قسمت نهم

مدلسازی ماشین القائی در سیستم qd0

درمعادلات ولتاژ- جریان :

- ☑ کمیات فازها به هم وابسته هستند
- ☑ ماتریس اندوکتانس متغییر با زمان است

پس برای سهولت محاسبات و حل مشکلات فوق از تبدیل (qd0)

در قاب مرجع گردان با سرعت دلخواه $(\theta = \omega t + \theta_0)$ استفاده میکنیم .

لازم به ذکر است که ماتریس تبدیل مولفه های استاتور ورتور، بد لیل تفاوت

سرعت نسبی قاب مرجع با رتور و استاتور، متفاوت میباشند :

روابط تبدیل (qd0) برای مولفه های استاتور :

$$\begin{cases} \left[f_s^{qd\mathbf{0}}\right] = \left[T_{qd\mathbf{0}}(\underline{q})\right]\left[f_s^{abc}\right] \\ \left[f_s^{abc}\right] = \left[T_{qd\mathbf{0}}(\underline{q})\right]^{-1}\left[f_s^{qd\mathbf{0}}\right] \end{cases}$$

$$[T_{qdo}(q)] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos \underline{q} & \cos(q - \frac{2p}{3}) & \cos(q + \frac{2p}{3}) \\ \sin q & \sin(q - \frac{2p}{3}) & \sin(q + \frac{2p}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

روابط تبدیل (qd0) برای مولفه های رتور :

$$
\begin{cases}
\left[f_r^{qd0}\right] = \left[T_{qd0}(\underline{q - q_r})\right]\left[f_r^{abc}\right] \\
\left[f_r^{abc}\right] = \left[T_{qd0}(\underline{q - q_r})\right]^{-1}\left[f_r^{qd0}\right]
\end{cases}
$$

$$
[T_{qd0}(q - q_r)] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}
\cos(\underline{q - q_r}) & \cos(q - q_r - \frac{2p}{3}) & \cos(q - q_r + \frac{2p}{3}) \\
\sin(q - q_r) & \sin(q - q_r - \frac{2p}{3}) & \sin(q - q_r + \frac{2p}{3}) \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{bmatrix}
$$

معادلات ولتاژ ـ جریان استاتور

اعمال تبدیل بر روی مولفه های استاتور و روتور جداگانه انجام میشود:

$$[V_s^{abc}] = [R_s^{abc}][i_s^{abc}] + {}^{d}\!/_{dt}[\lambda_s^{abs}]$$

$$\left[V_s^{abc}\right] = \left[T_{qd0}(q)\right]^{-1}\left[V_s^{qd0}\right]$$

$$\left[i_s^{abc}\right] = \left[T_{qd0}(q)\right]^{-1}\left[i_s^{qd0}\right]$$

$$\left[l_s^{abc}\right] = \left[T_{qd0}(q)\right]^{-1}\left[l_s^{qd0}\right]$$

با جایگزینی مقادیر ولتاژ، جریان و شار سه فاز با مقادیر متناظر قاب مرجع گردان داریم :

$$[T_{qd0}(q)]^{-1}[V_s^{qd0}] = [R_s^{abc}][T_{qd0}(q)]^{-1}[i_s^{qd0}] + p\left([T_{qd0}(q)]^{-1}[l_s^{qd0}]\right)$$

معادلات ولتاژ ـ جریان استاتور

حال طرفین معادله ولتاژ- جریان را در ماتریس $[T_{qd0}(q)]$ ضرب میکنیم

$$[T_{qd0}(q)][T_{qd0}(q)]^{-1}[V_s^{qd0}] =$$

$$[T_{qd0}(q)][R_s^{abc}][T_{qd0}(q)]^{-1}[i_{as}^{qd0}] + [T_{qd0}(q)]p\left([T_{qd0}(q)]^{-1}[l_s^{qd0}]\right)$$

ماتریس مقاومت استاتور را بصورت زیر میتوان نوشت :

$$[R_s^{abc}] = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} = R_s[I]$$

با جایگزینی ماتریس مقاومت داریم :

$$[V_s^{qd0}] = R_s[T_{qd0}(q)][I][T_{qd0}(q)]^{-1}[i_{as}^{qd0}] + [T_{qd0}(q)]p\left([T_{qd0}(q)]^{-1}[l_s^{qd0}]\right)$$

معادلات ولتاژ ــ جریان استاتور

پس از ساده سازی و بسط رابطه شاردور داریم :

$$[V_s^{qd\mathbf{0}}]=[R_s^{qd\mathbf{0}}][i_s^{qd\mathbf{0}}]+[T(q)][T(q)]^{-1}\,p[\,l_s^{qd\mathbf{0}}]+[T(q)]p[T(q)]^{-1}[\,l_s^{qd\mathbf{0}}]$$

$$[V_s^{qd\mathbf{0}}]=[R_s^{qd\mathbf{0}}][i_s^{qd\mathbf{0}}]+p[\,l_s^{qd\mathbf{0}}]+[T(q)]p[T(q)]^{-1}[\,l_s^{qd\mathbf{0}}]$$

$$p[T(q)]^{-1}={}^{d}\!/_{dt}[T(q)]^{-1}={}^{d}\!/_{dq}[T(q)]^{-1}\,{}^{dq}\!/_{dt}$$

$$[\mathrm{T}(\theta)]^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 1\\ \cos(\theta-\frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta-\frac{2\pi}{3}) & 1\\ \cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & 1\end{bmatrix}$$

معادلات ولتاژ _ جریان استاتور

$$\frac{d}{dq}\left([T(q)]^{-1}\right)=\begin{bmatrix}-\sin q & \cos q & 0\\ -\sin(q-\frac{2p}{3}) & \cos(q-\frac{2p}{3}) & 0\\ -\sin(q+\frac{2p}{3}) & -\cos(q+\frac{2p}{3}) & 0\end{bmatrix}$$

$$[T(q)]\left(P[T(q)]^{-1}\right)=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}\cos q & \cos(q-\frac{2p}{3}) & \cos(q+\frac{2p}{3})\\ \sin q & \sin(q-\frac{2p}{3}) & \sin(q+\frac{2p}{3})\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sin q & \cos q & 0\\ -\sin(q-\frac{2p}{3}) & \cos(q-\frac{2p}{3}) & 0\\ -\sin(q+\frac{2p}{3}) & -\cos(q+\frac{2p}{3}) & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad [T(q)]\left(p[T(q)]^{-1}\right)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.\frac{dq}{dt}=w\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

معادلات ولتاژ ــ جریان استاتور

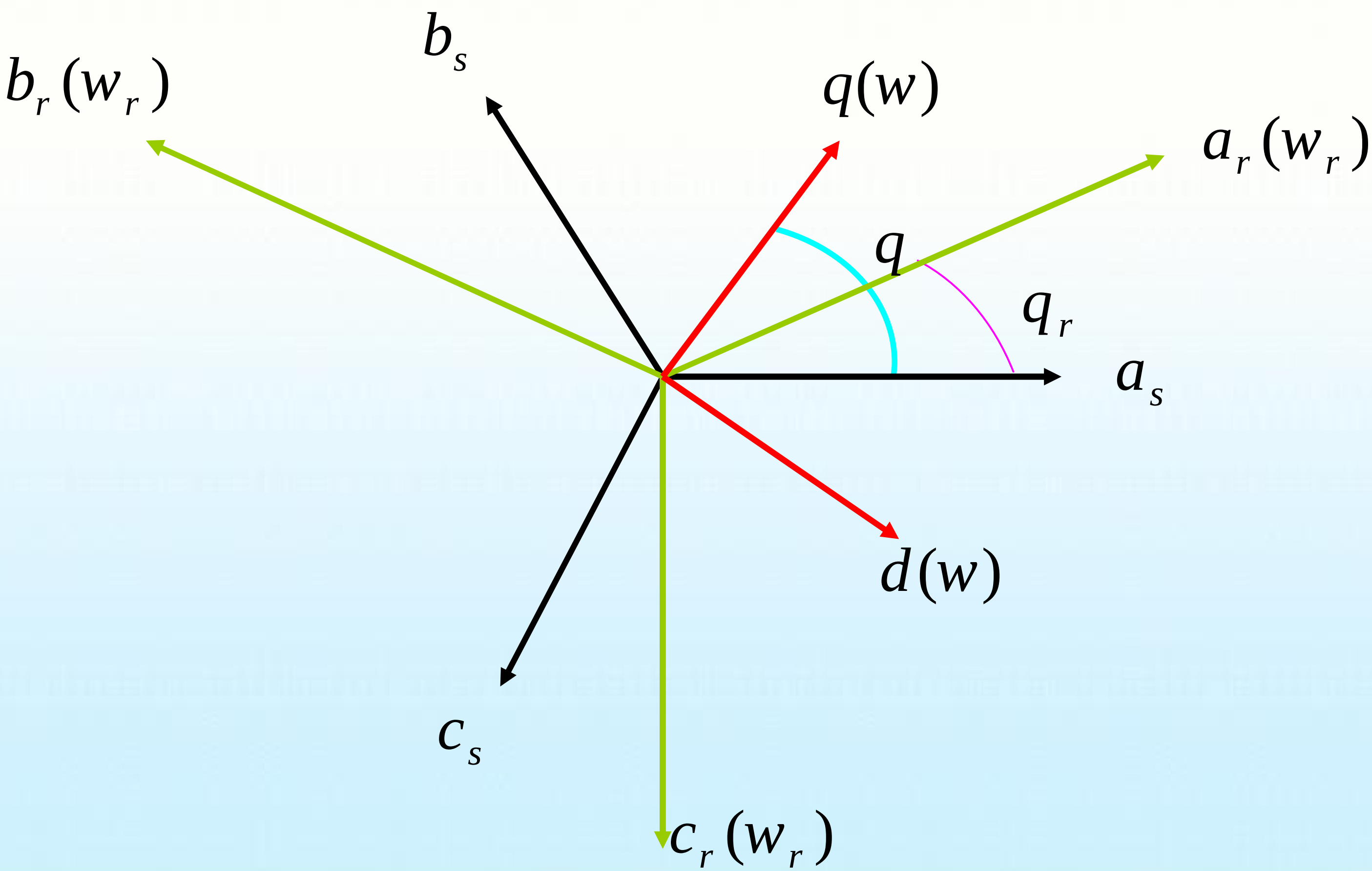
$$\left[V_s^{qd\mathbf{0}}\right]=\underbrace{\left[R_s^{qd\mathbf{0}}\right]\left[i_s^{qd\mathbf{0}}\right]}_{1}+\underbrace{p\left[l_s^{qd\mathbf{0}}\right]}_{2}+w\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\left[l_s^{qd\mathbf{0}}\right]}_{3}$$

در رابطه فوق بخش اول ولتاژ اهمی، بخش دوم ولتاژ ترانسفورمری و بخش سوم ولتاژ گردشی میباشد که به سرعت نسبی قاب مرجع و محور سیم پیچیها بستگی دارد :

$$\begin{cases}V_{qs}=R_s i_{qs}+{d}/{dt}\,l_{qs}+w\,l_{ds}\\V_{ds}=R_s i_{ds}+{d}/{dt}\,l_{ds}-w\,l_{qs}\\V_{\mathbf{0}s}=R_s i_{\mathbf{0}s}+{d}/{dt}\,l_{\mathbf{0}s}\end{cases}$$

معادلات ولتاژ ـ جریان رتور

$$\left[V_r^{abc}\right]=\left[R_r^{abc}\right]\left[i_r^{abc}\right]+p\left[l_r^{abc}\right]$$



معادلات ولتاژ _ جریان رتور

حال تبدیل(qd0) رابرمولفه های رتور اعمال میکنیم:

$$\left[V_r^{abc}\right]=\left[T_{qd\mathbf{0}}(q-q_r)\right]^{-1}\left[V_r^{qd\mathbf{0}}\right]$$

$$\left[i_r^{abc}\right]=\left[T_{qd\mathbf{0}}(q-q_r)\right]^{-1}\left[i_r^{qd\mathbf{0}}\right]$$

$$\left[l_r^{abc}\right]=\left[T_{qd\mathbf{0}}(q-q_r)\right]^{-1}\left[l_r^{qd\mathbf{0}}\right]$$

با جایگزینی مقادیر ولتاژ، جریان و شار سه فاز با مقادیر متناظر در قاب مرجع گردان داریم :

$$[T_{qd\mathbf{0}}(q-q_r)]^{-1}[V_r^{qd\mathbf{0}}]=[R_r^{abc}][T_{qd\mathbf{0}}(q-q_r)]^{-1}[i_r^{qd\mathbf{0}}]+p\left([T_{qd\mathbf{0}}(q-q_r)]^{-1}[l_r^{qd\mathbf{0}}]\right)$$

معادلات ولتاژ ـ جریان رتور

روابط ولتاژ- جریان روتور نیز مشابه با معادلات استاتور بدست میآید:

$$\left[V_r^{qd0}\right]=\left[R_r^{qd0}\right]\left[i_r^{qd0}\right]+p\left[l_r^{qd0}\right]+(w-w_r)\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\left[l_r^{qd0}\right]$$

معادلات شار - جریان استاتور

حال تبدیل(qd0) رابر روی روابط شار -جریان استاتوراعمال می کنیم :

$$\left[\lambda_s^{abc}\right]=\left[L_{ss}^{abc}\right]\left[i_s^{abc}\right]+\left[L_{sr}^{abc}\right]\left[i_r^{abc}\right]$$

$$\left[T(\theta)\right]^{-1}\left[\lambda_s^{qd0}\right]=\left[L_{ss}^{abc}\right]\underbrace{\left[T(\theta)\right]^{-1}}\left[i_s^{qd0}\right]+\left[L_{sr}^{abc}\right]\underbrace{\left[T(\theta-\theta_r)\right]^{-1}}\left[i_r^{qd0}\right]$$

تبدیل (qd0) برای متغیرهای استاتور   **تبدیل (qd0) برای متغیرهای رتور**

معادلات شار - جریان استاتور

پس از ساده سازی روابط داریم:

$$[T(q)]^{-1}\left[l_s^{qd0}\right] = \left[L_{ss}^{abc}\right]\,[T(q)]^{-1}\left[i_s^{qd0}\right] + \left[L_{sr}^{abc}\right]\,[T(q-qr)]^{-1}\left[i_r^{qd0}\right]$$

$$\left[l_s^{qd0}\right] = \underbrace{[T(q)]\,\left[L_{ss}^{abc}\right]\,[T(q)]^{-1}}\left[i_s^{qd0}\right] + \underbrace{[T(q)]\,\left[L_{sr}^{abc}\right]\,[T(q-qr)]^{-1}}\left[i_r^{qd0}\right]$$

ماتریس اندوکتانس خودی استاتور (qd0)

ماتریس اندوکتانس متقابل استاتور-رتور(qd0)

$$\Rightarrow \quad \left[l_s^{qd0}\right] = \left[L_{ss}^{qd0}\right]\,\left[i_s^{qd0}\right] + \left[L_{sr}^{qd0}\right]\,\left[i_r^{qd0}\right]$$

ماتریس اندوکتانس خودی استاتور (qd0):

$$\left[L_{ss}^{qd0}\right] = \left[T(q)\right]\left[L_{ss}^{abc}\right]\left[T(q)\right]^{-1}$$

$$= \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos q & \cos(q-\frac{2p}{3}) & \cos(q+\frac{2p}{3}) \\ \sin q & \sin(q-\frac{2p}{3}) & \sin(q+\frac{2p}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ls}+L_{ss} & L_{sm} & L_{sm} \\ L_{sm} & L_{ls}+L_{ss} & L_{sm} \\ L_{sm} & L_{sm} & L_{ls}+L_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q & \sin q & 1 \\ \cos(q-\frac{2p}{3}) & \sin(q-\frac{2p}{3}) & 1 \\ \cos(q+\frac{2p}{3}) & \sin(q+\frac{2p}{3}) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left[L_{ss}^{qd0}\right] = \begin{bmatrix} L_{ls}+\frac{3}{2}L_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls}+\frac{3}{2}L_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix}$$

ماتریس اندوکتانس متقابل استاتور- رتور(qd0):

$$\left[L_{sr}^{qd0}\right] = \left[T(q)\right]\left[L_{sr}^{abc}\right]\left[T(q - qr)\right]^{-1}$$

$$\left[L_{sr}^{qd0}\right] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}L_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}L_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

معادلات شار- جریان رتور

$$\left[l_r^{abc}\right]=\left[L_{rr}^{abc}\right]\left[i_r^{abc}\right]+\left[L_{rs}^{abc}\right]\left[i_s^{abc}\right]$$

$$\left[T(q-q_r)\right]^{-1}\left[l_r^{qd0}\right]=\left[L_{rr}^{abc}\right]\left[T(q-q_r)\right]^{-1}\left[i_r^{qd0}\right]+\left[L_{rs}^{abc}\right]\left[T(q)\right]^{-1}\left[i_s^{qd0}\right]$$

$$\left[l_r^{qd0}\right]=\left[T(q-q_r)\right]\left[L_{rr}^{abc}\right]\left[T(q-q_r)\right]^{-1}\left[i_r^{qd0}\right]+\left[T(q-q_r)\right]\left[L_{rs}^{abc}\right]\left[T(q)\right]^{-1}\left[i_s^{qd0}\right]$$

ماتریس اندوکتانس خودی رتور **(qd0)**

ماتریس اندوکتانس متقابل رتور-استاتور**(qd0)**

$$\left[l_r^{qd0}\right]=\left[L_{rr}^{qd0}\right]\left[i_r^{qd0}\right]+\left[L_{rs}^{qd0}\right]\left[i_s^{qd0}\right]$$

ماتریس اندوکتانس خودی رتور(qd0):

$$\left[L_{rr}^{qd0}\right]=\begin{bmatrix} L_{lr}+\frac{3}{2}L_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & L_{lr}+\frac{3}{2}L_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & L_{lr} \end{bmatrix}$$

ماتریس اندوکتانس متقابل رتور-استاتور (qd0):

$$\left[L_{rs}^{qd0}\right]=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}L_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}L_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

معادلات شار - جریان

$$
\begin{bmatrix} l_{qs} \\ l_{ds} \\ l_{0s} \\ l_{qr} \\ l_{dr} \\ l_{0r} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
L_{1s}+\frac{3}{2}L_{ss} & 0 & 0 & \frac{3}{2}L_{sr} & 0 & 0 \\
0 & L_{1s}+\frac{3}{2}L_{ss} & 0 & 0 & \frac{3}{2}L_{sr} & 0 \\
0 & 0 & L_{1s} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{2}L_{sr} & 0 & 0 & L_{lr}+\frac{3}{2}L_{rr} & 0 & 0 \\
0 & \frac{3}{2}L_{sr} & 0 & 0 & L_{lr}+\frac{3}{2}L_{rr} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{lr}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{0s} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \\ i_{0r} \end{bmatrix}
$$

کاهش پارامترهای ماتریس

ماتریسهای بدست آمده بر حسب پارامترهای $L_{ss}, L_{sr}, L_{ls}, L_{rr}, L_{lr}$ هستند. برای کاستن از این پارامترها از روابط زیر که با صرفنظر کردن از افت فشار مغناطیسی در هسته استاتور ورتور بدست آمده، استفاده میکنیم :

$$L_{ss} = \frac{N_s^2}{R_g} = N_s^2 P_g \qquad \rightarrow L_{sm} = N_s^2 P_g \cos\frac{2p}{3} = \frac{-1}{2} L_{ss}$$

$$L_{rr} = N_r^2 P_g \qquad L_{rm} = N_r^2 P_g \cos\frac{2p}{3} = -\frac{1}{2} L_{rr}$$

$$L_{sr} = N_s N_r P_g \qquad \rightarrow L_{sr} = (N_s{}^2 P_g)(N_r / N_s)$$

معادلات ولتاژ _ جریان

$$
\begin{bmatrix} V_{qs} \\ V_{ds} \\ V_{0s} \\ V'_{qr} \\ V'_{dr} \\ V'_{0r} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
R_s & 0 & 0 & & & \\
0 & R_s & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & R_s & & & \\
 & & & R'_r & 0 & 0 \\
 & 0 & & 0 & R'_r & 0 \\
 & & & 0 & 0 & R'_r
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{0s} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \\ i'_{0r} \end{bmatrix}
+ \frac{d}{dt}
\begin{bmatrix} l_{qs} \\ l_{ds} \\ l_{0s} \\ l'_{qr} \\ l'_{dr} \\ l'_{0r} \end{bmatrix}
$$

$$
+
\begin{bmatrix}
0 & w & 0 & & & \\
-w & 0 & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & 0 & w-w_r & 0 \\
 & & & -(w-w_r) & 0 & 0 \\
0 & & & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} l_{qs} \\ l_{ds} \\ l_{0s} \\ l'_{qr} \\ l'_{dr} \\ l'_{0r} \end{bmatrix}
$$

انتقال کمیتها به طرف استاتور

$$\frac{\lambda'_{qr}}{\lambda_{qr}} = \frac{N_s}{N_r} \qquad \frac{i'_{qr}}{i_{qr}} = \frac{N_r}{N_s}$$

$$\begin{bmatrix} l_{qs} \\ l_{ds} \\ l_{0s} \\ l'_{qr} \\ l'_{dr} \\ l'_{0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{Ls}+\frac{3}{2}L_{ss} & 0 & 0 & \frac{3}{2}(\frac{N_s}{N_r})L_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & L_{Ls}+\frac{3}{2}L_{ss} & 0 & 0 & \frac{3}{2}(\frac{N_s}{N_r})L_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & L_{Ls} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}(\frac{N_s}{N_r})L_{sr} & 0 & 0 & (\frac{N_s}{N_r})^2(L_{Lr}+L_{rr}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}(\frac{N_s}{N_r})L_{sr} & 0 & 0 & (\frac{N_s}{N_r})^2(L_{Lr}+L_{rr}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{N_s}{N_r})^2 L_{Lr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{0s} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \\ i'_{0r} \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{2}(\frac{N_s}{N_r})L_{sr} = \frac{3}{2}(\frac{N_s}{N_r})N_s N_r P_g = \frac{3}{2}N_s^2 P_g = \frac{3}{2}L_{ss}$$

معادلات شار - جریان

پس از ساده سازی داریم :

$$
\begin{bmatrix} \lambda_{qs} \\ \lambda_{ds} \\ \lambda_{0s} \\ \lambda'_{qr} \\ \lambda'_{dr} \\ \lambda'_{0r} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
L_{ls}+\frac{3}{2}L_{ss} & 0 & 0 & \frac{3}{2}L_{ss} & 0 & 0 \\
0 & L_{ls}+\frac{3}{2}L_{ss} & 0 & 0 & \frac{3}{2}L_{ss} & 0 \\
0 & 0 & L_{ls} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{2}L_{ss} & 0 & 0 & L'_{lr}+\frac{3}{2}L_{ss} & 0 & 0 \\
0 & \frac{3}{2}L_{ss} & 0 & 0 & L'_{lr}+\frac{3}{2}L_{ss} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_{lr}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{0s} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \\ i'_{0r} \end{bmatrix}
$$

معادلات شار - جریان نهایی

با استفاده از $L_{ss}=\frac{2}{3}L_m$ در نهایت داریم :

$$\begin{bmatrix}\lambda_{qs}\\ \lambda_{ds}\\ \lambda_{0s}\\ \lambda'_{qr}\\ \lambda'_{dr}\\ \lambda'_{0r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{ls}+L_m & 0 & 0 & L_m & 0 & 0\\ 0 & L_{ls}+L_m & 0 & 0 & L_m & 0\\ 0 & 0 & L_{ls} & 0 & 0 & 0\\ L_m & 0 & 0 & L'_{lr}+L_m & 0 & 0\\ 0 & L_m & 0 & 0 & L'_{lr}+L_m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_{lr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{qs}\\ i_{ds}\\ i_{0s}\\ i'_{qr}\\ i'_{dr}\\ i'_{0r}\end{bmatrix}$$

معادلات ولتاژ _ جریان استاتور

از آنجا که معمولا راکتانسها بجای ا ندوکتانسها در اختیار قرار میگیرد، بنابراین ترجیح داده میشود که معادلات بر حسب راکتانسها نوشته شود. در نتیجه معادلات ولتاژ _ جریان استاتور به صورت زیر تغییر میکند :

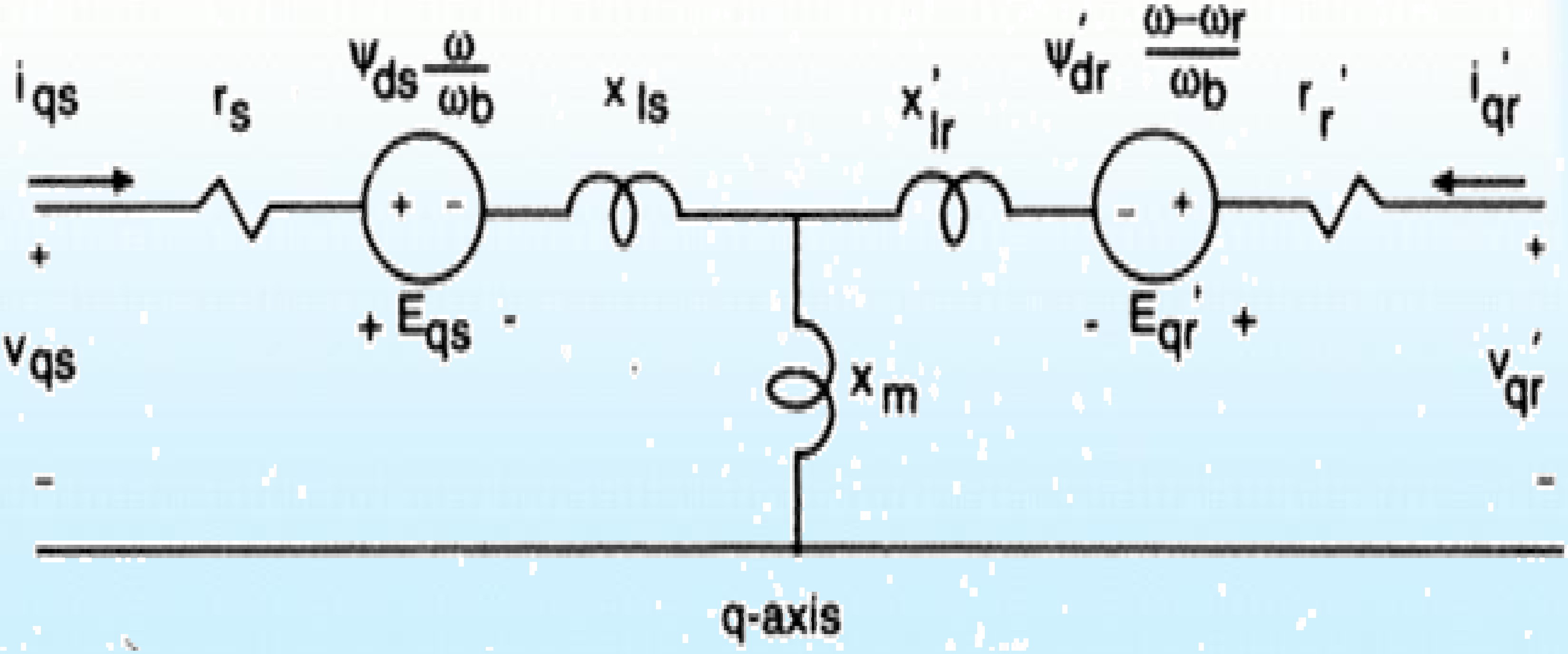
$$\begin{cases} v_{qs} = Ri_{qs} + \dfrac{1}{w_b}\dfrac{d}{dt}y_{qs} + \dfrac{w}{w_b}y_{ds} \\[2ex] v_{ds} = Ri_{ds} + \dfrac{1}{w_b}\dfrac{d}{dt}y_{ds} - \dfrac{w}{w_b}y_{qs} \end{cases}$$

معادلات ولتاژ ـ جریان رتور

$$\begin{cases} v'_{qr} = R'_r \, i'_{qr} + \dfrac{1}{w_b}\dfrac{d}{dt} y'_{qr} + \dfrac{(w - w_r)}{w_b} y'_{dr} \\[2ex] v'_{dr} = R'_r \, i'_{dr} + \dfrac{1}{w_b}\dfrac{d}{dt} y'_{dr} - \dfrac{(w - w_r)}{w_b} y'_{qr} \end{cases}$$

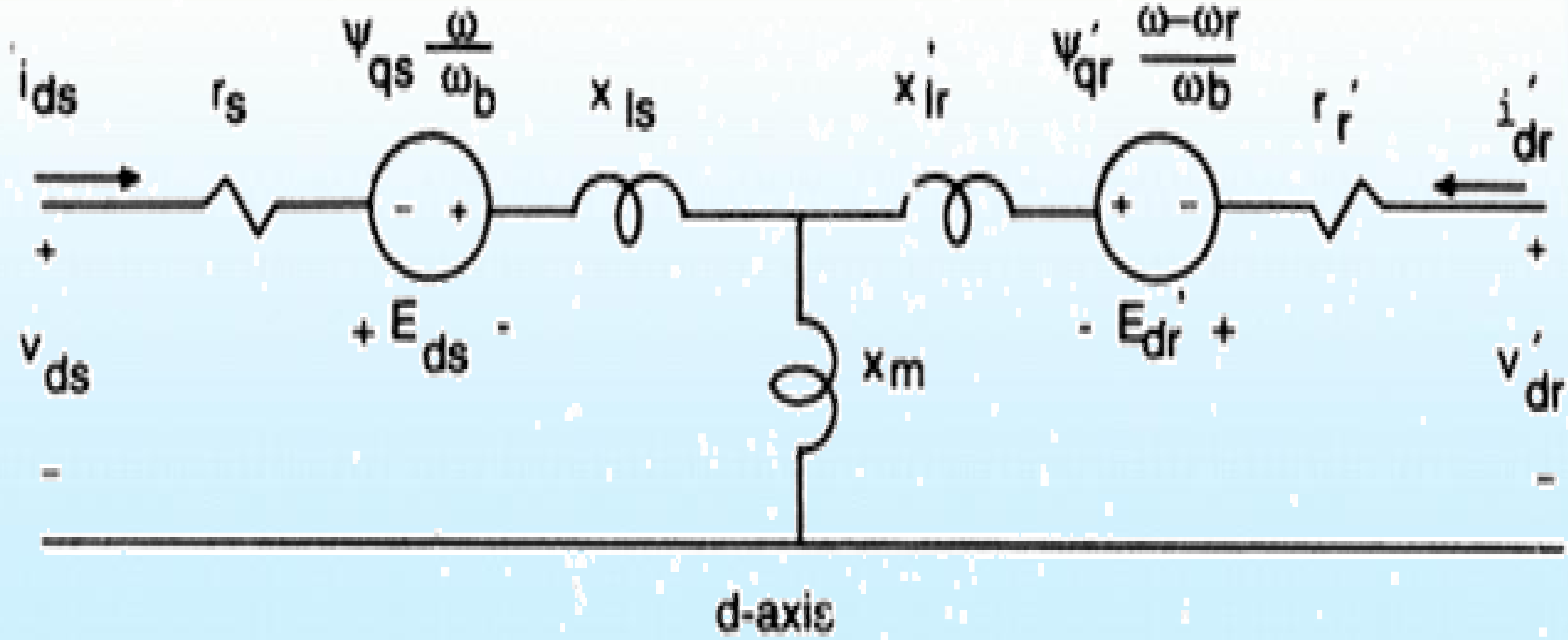
مدل مداری محور q

با توجه به دو رابطه بدست آمده، میتوان مدل مداری بر روی محور q را بدست آورد.

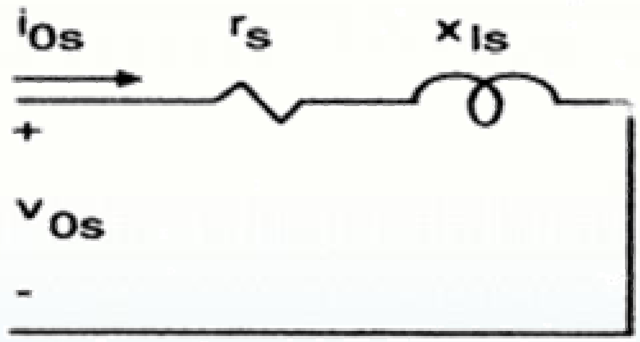


مدل مداری محور d

برای بدست آوردن مدل مداری بر روی محور d نیز میتوان همانند مدل محور q عمل کرد.



مدار معادل مولفه صفر روتور و استاتور



استاتور

رتور

معادله دینامیکی ماشین

پس از آنکه معادلات الکتریکی بدست آمد، اکنون برای نوشتن معادله دینامیکی ماشین رابطه ای برای گشتاور الکترومغناطیسی بدست می آوریم. برای اینکار از رابطه توان لحظه ای استفاده میکنیم:

$$P_{in} = \left[v_s^{abc}\right]^T \left[i_s^{abc}\right] + \left[v_r^{abc}\right]^T \left[i_r^{abc}\right]$$

$$P_{in} = (V_a i_a + V_b i_b + V_c i_c)_s + (V_a i_a + V_b i_b + V_c i_c)_r$$

$$\mathrm{P_{in}} = \frac{3}{2}\left[\mathrm{V_{qs} i_{qs} + V_{ds} i_{ds} + 2V_{0s} i_{0s} + V_{qr} i_{qr} + V_{dr} i_{dr} + 2V_{0r} i_{0r}}\right]$$

$$v_{qs} = R i_{qs} + \frac{d}{dt} l_{qs} + w\, l_{ds}$$

$$P_{in} = \frac{3}{2}\left[R_s i_{qs}^2 + i_{qs} \, {}^{d}\!/_{dt}\, l_{qs} + w l_{ds} i_{qs} + R_s i_{ds}^{\ 2} + i_{ds} \, {}^{d}\!/_{dt}\, l_{ds} - w l_{qs} i_{ds} + \ldots\right]$$

از آنجائی که عبارات تلفات اهمی و انرژی مغناطیسی نقشی در تولید گشتاور ندارند ،از این عبارات صرفنظر میکنیم. عبارات باقیمانده در ایجاد گشتاور نقش دارند :

$$P_T = \frac{3}{2}\left[w l_{ds}.i_{qs} - w l_{qs} i_{ds} + (w - w_r)\, l'_{dr} i'_{qr} - (w - w_r)\, l'_{qr} i'_{dr}\right]$$

با استفاده از روابط شار- جریان میتوان ثابت کرد :

$$l_{ds} i_{qs} - l_{qs} i_{ds} = -(l'_{dr} i'_{qr} - l'_{qr} i'_{dr}) = L_m (i'_{dr}\, i_{qs} - i'_{qr}\, i_{ds})$$

$$\left[(L_{ls} + L_m) i_{ds} i_{qs} + L_m i'_{dr}\, i_{qs}\right] - \left[(L_{ls} + L_m) i_{ds} i_{qs} + L_m i'_{qr}\, i_{ds}\right] = L_m (i'_{dr}\, i_{qs} - i'_{qr}\, i_{ds})$$

$$\left[(L'_{lr} + L_m) i'_{dr}\, i'_{qr} + L_m i_{ds} i'_{qr}\right] - \left[(L'_{lr} + L_m) i'_{qr}\, i'_{dr} + L_m i_{qs} i'_{dr}\right] = -L_m (i'_{dr}\, i_{qs} - i'_{qr}\, i_{ds})$$

در نتیجه داریم :

$$P_T = \frac{3}{2}\left[w(l_{ds}.i_{qs} - l_{qs}i_{ds}) + (w - w_r)(l'_{dr}i'_{qr} - l'_{qr}i'_{dr})\right]$$

$$P_T = \frac{3}{2}\left[w(l_{ds}.i_{qs} - l_{qs}i_{ds}) - (w - w_r)(l_{ds}.i_{qs} - l_{qs}i_{ds})\right]$$

$$p_T = \frac{3}{2}\left[l_{ds}i_{qs} - l_{qs}i_{ds}\right]\left[w - w + w_r\right] = \frac{3}{2}w_r\left(l_{ds}i_{qs} - l_{qs}i_{ds}\right)$$

معادله گشتاور

اکنون رابطه گشتاور بدست می آید:

$$T=\frac{p_T}{\Omega_r}=(\frac{3}{2})(\frac{p}{2})(l_{ds}i_{qs}-l_{qs}i_{ds})$$

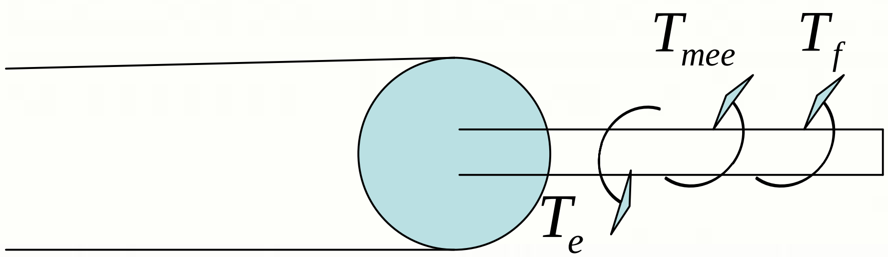
$$\Omega_r=\frac{2}{p}w_r$$

همچنین میتوان روابط مشابهی برای گشتاور الکترو مغناطیسی بدست آورد:

$$T=(\frac{3}{2})(\frac{p}{2})(l'_{dr}i'_{qr}-l'_{qr}i'_{dr})$$

$$T=(\frac{3}{2})(\frac{p}{2})L_m(i'_{dr}\,i_{qs}-i'_{qr}\,i_{ds})$$

معادله دینامیکی حاکم بر ماشین همانند هر جسم دورانی دیگربصورت زیر نوشته میشود:



حالت موتوری → $T_e - T_{mec} - T_f = J\frac{d\Omega_r}{dt}$

حالت ژنراتوری → $T_e + T_{mee} - T_f = J\frac{d\Omega_r}{dt}$

سیستمهای مرجع در ماشینهای القائی

در معادلات قبل هیچ فرضی راجع به سرعت مرجع گردان نکرده و w را دلخواه فرض کردیم. بر اساس فرضی که راجع به سرعت مرجع گردان میکنیم، سه سیستم مرجع معمول در ماشینهای القائی خواهیم داشت :

1. سیستم مرجع ساکن $\longleftarrow$ $w = 0$

2. سیستم مرجع گردان چسبیده به روتور $\longleftarrow$ $w = w_r$

3. سیستم مرجع گردان چسبیده به میدان استاتور $\longleftarrow$ $w = w_s$