



باسمه تعالی

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

بیژن معاونی

(دانشیار دانشگاه علم و صنعت ایران)

نیمسال دوم ۹۶-۹۷



باسمه تعالی

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 1

مقدمه

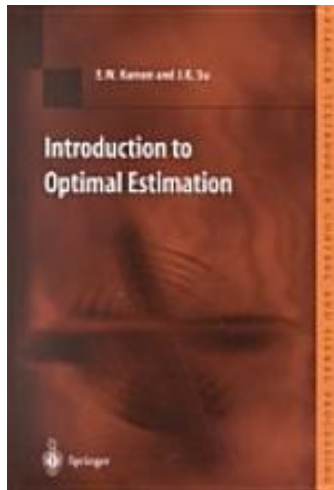
مقدمه

- یکی از مهمترین مشکلات در علوم مهندسی تخمین متغیرهای کمی با استفاده از اندازه گیری ها است.
- تخمین شامل موارد زیر می گردد:
 - تخمین سیگنال بر اساس اندازه گیری های نویزی.
 - تخمین حالت های سیستم بر اساس اندازه گیری های نویزی خروجی و حالت ها.
 - تخمین پارامترهای یک تابع.

مقدمه

- کاربرد تئوری تخمین:
 - سیستم های هوا-فضا
 - مخابرات
 - صنایع تولیدی
 - مهندسی پزشکی
- مثالهایی از کاربرد عملی تخمین:
 - تخمین موقعیت یا سرعت واقعی هواپیما بر اساس موقعیت اندازه گیری شده توسط رادار.
 - تخمین پارامترهای یک فرآیند در یک سیستم تولیدی.
 - تخمین ضربان قلب یک فرد با استفاده از سیگنال ECG.

مرجع درس



Introduction to Optimal Estimation

By:

- Edward W. Kamen
- Jonathan Su

Springer (1999)

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

5

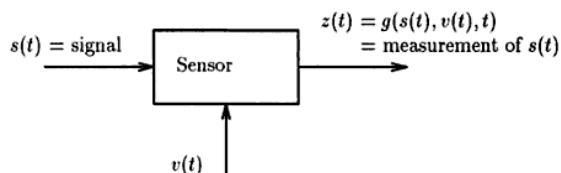
تخمین سیگنال

$s(t)$: Signal تابعی حقیقی از متغیر پیوسته زمان t

$z(t)$ سیگنال تولید شده از $s(t)$ که بیان ریاضی آن عبارت است از:
$$z(t) = g(s(t), v(t), t)$$

$v(t)$: noise or disturbance

به عنوان مثال $z(t)$ می توان سیگنال یا مقادیر اندازه گیری شده از سیگنال $s(t)$ توسط سنسور باشد.



Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

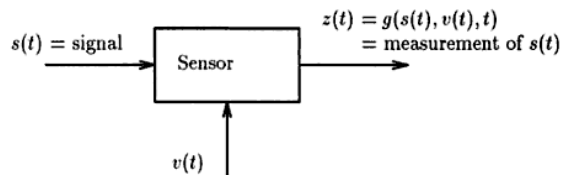
6

تخمین سیگنال

در بسیاری از کاربردها فرم ساده تری از مقدار اندازه گیری شده بر حسب سیگنال و نویز ارائه می گردد که عبارت است از:

$$z(t) = s(t) + v(t)$$

در این حالت نویز به صورت جمع شونده با سیگنال ترکیب می شود. این نویز می تواند ناشی از تغییرات فیزیکی سنسور مانند گرما و/یا ناشی از یک منبع خارجی باشد.



Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

7

تخمین سیگنال

یکی از مثال های مهم در مدل نویز جمع شونده مساله تعقیب هدف (Target Tracking) است. که سیگنال اندازه گیری شده از روی رادار کاملاً نویزی است و نویز آن از نوع جمع شونده در نظر گرفته می شود. از دیگر مثال های این نوع توصیف سیگنال های ECG و EEG است.

$$z(t) = s(t) + v(t)$$

اگر چه نویز جمع شونده مهمترین روش توصیف اثر نویز بر سیگنال است که علت آن را میتوان سهولت در تحلیل دانست. ولیکن تنها روش نبوده و اثرات تمامی نویز ها را نیز به این روش نمی توان توصیف نمود.

از دیگر روشهای توصیف اثر نویز بر سیگنال، می توان نویز ضربی را نام برد:

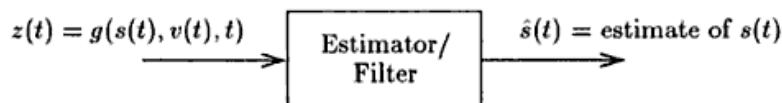
$$z(t) = s(t).v(t)$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

8

تخمین سیگنال

یکی از مسائل مهم در علوم و مهندسی باز سازی سیگنال واقعی $s(t)$ با استفاده از سیگنال اندازه گیری $z(t)$ است. که این مساله را یک نوع مساله تخمین و/یا فیلترینگ است. ابزاری را نیز که تخمین سیگنال $s(t)$ را تولید مینماید نیز تخمینگر یا فیلتر نامیده می شود.



Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

9

تخمینگر (Estimator)

همانطور که در رویتگرها نیز مشخص بود، بطور کلی تخمینگر یک سیستم دینامیکی است. مقدار تخمین زده شده $\hat{s}(t)$ در زمان t به صورت یک تابع ساده از $z(t)$ در زمان t قابل بیان نیست.

بلکه مقدار تخمینی تابعی از مقادیر $z(\tau)$ در یک بازه خاص τ می باشد.

Causal Estimator:

$$\hat{s}(t) = \alpha(\{z(\tau) : -\infty < \tau \leq t\}, t)$$

Non-Causal Estimator:

$$\hat{s}(t) = \alpha(\{z(\tau) : -\infty < \tau \leq t + a\}, t)$$

Where, $a > 0$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

10

تخمینگر خطی (Linear Estimator)

تخمینگرهای علی ارائه شده خطی است اگر و فقط اگر تابع α خطی باشد. در این حالت مقدار تخمینی $\hat{s}(t)$ به صورت زیر قابل بیان خواهد بود.

Causal Linear Estimator:

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) z(\tau) d\tau$$

که $h(t, \tau)$ پاسخ ضربه تابع تخمینگر می باشد.

Non-Causal Estimator:

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{t+a} h(t, \tau) z(\tau) d\tau$$

Where, $a > 0$

تخمینگرهای غیر علی به صورت **real time** قابل استفاده نیستند و فقط در محاسبات **off-line** کاربرد دارند.

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

11

تخمینگر خطی نامتغیر با زمان (LTI Estimator)

تخمینگرهای خطی ارائه شده در اسلاید قبلی متغیر با زمان هستند. در صورتی این تخمینگرها خطی نامتغیر با زمان (LTI) خواهند بود اگر و فقط اگر تابع تخمینگر $h(t, \tau)$ به صورت تابعی از تفاضل $t - \tau$ قابل بیان باشد. به عبارت دیگر

$$h(t, \tau) = h(t - \tau)$$

که $h(t)$ پاسخ ضربه تخمینگر است در زمان t به ازای اعمال تابع ضربه $\delta(t)$ در $t=0$.

Linear Causal Time-invariant Estimator:

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) z(\tau) d\tau \underset{\text{convolution}}{=} h(t) * z(t)$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

12

توصیف فرکانسی تخمینگر خطی نامتغیر با زمان

با استفاده از تبدیل فوریه:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$$

که ω متغیر فرکانس برحسب رادیان بر ثانیه است.

$$\hat{S}(\omega) = H(\omega)Z(\omega)$$

در نتیجه:

که $H(\omega)$ پاسخ فرکانسی تابع تبدیل تخمینگر می باشد.

طراحی تخمینگر

با توجه به معادلات ارائه شده برای تخمینگر، طراحی تخمینگر خطی عبارت خواهد بود از تعیین تابع $h(t, \tau)$.

اگر تخمینگر خطی نامتغیر با زمان در نظر گرفته شود تعیین $h(t)$ یا $H(\omega)$ کفایت خواهد کرد.

با فرض اینکه $z(t) = s(t) + v(t)$ است رابطه ورودی-خروجی تخمینگر خطی به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned}\hat{s}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)[s(\tau) + v(\tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)s(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)v(\tau) d\tau\end{aligned}$$

طراحی تخمینگر

اگر تخمینگر خطی نامتغیر با زمان در نظر گرفته شود معادلات قبلی در حوزه فرکانس به صورت زیر قابل بیان خواهد بود:

$$\hat{S}(\omega) = H(\omega)S(\omega) + H(\omega)V(\omega)$$

این معادلات نشان می دهد که طراحی تخمینگر لازم است به گونه ای انجام پذیرد که نویز $v(t)$ را دفع کرده و سیگنال $s(t)$ را عبور دهد. به عبارت دیگر تخمینگر لازم است در حوزه فرکانس به گونه ای طراحی شود که:

$$H(\omega)S(\omega) = S(\omega)$$

$$H(\omega)V(\omega) = 0$$

معادلات فوق در صورتی کاملاً برآورده می گردند که پاسخ فرکانسی نویز و سیگنال اشتراکی نداشته باشند.

طراحی تخمینگر

به هر حال موارد زیادی وجود دارد که طراحی تخمینگر بر اساس ایده پاسخ فرکانسی سیگنال و نویز امکان پذیر نیست. در این حالت روشهای پیشرفته تخمین لازم است که ما را به سمت طراحی فیلتر وینر و کالمن هدایت می نماید.

که فیلتر وینر با استفاده از ایده حوزه فرکانسی سیگنال و فیلتر کالمن با استفاده از ایده های حوزه زمان عمل خواهد نمود.

تخمین بر اساس اندازه گیری های گسسته در زمان

با توجه به اینکه بیشتر اندازه گیری ها به صورت گسسته در زمان صورت می پذیرد و پردازش سیگنال نیز با استفاده از کامپیوترهای دیجیتال انجام می شود لازم است مساله تخمین در حوزه گسسته در زمان نیز بررسی شده و در این حوزه پیگیری شود.

به این منظور

$$z(nT) = g(s(nT), v(nT), nT) \rightarrow z(n) = g(s(n), v(n), nT)$$

که T عبارت است از زمان نمونه برداری.

در این حالت مساله مورد نظر ما به عنوان تخمین عبارت خواهد بود از تولید تخمین $\hat{s}(n)$ از $s(n)$ با استفاده از $z(i)$ در بازه ای از مقادیر صحیح i .
که به عنوان یک تخمینگر علی میتوان فرم کلی زیر را معرفی نمود:

$$\hat{s}(n) = \alpha(\{z(i) : -\infty < i \leq n\}, n)$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

17

تخمینگر های خطی گسسته در زمان

مشابه حالت پیوسته در زمان نیز یک تخمینگر علی خطی گسسته در زمان ساختاری به صورت زیر دا:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=-\infty}^n h(n, i) z(i) \quad (1.15)$$

که $h(n, i)$ عبارت است از خروجی تخمینگر در مرحله n ام وقتی که ورودی ضربه واحد در زمان i به آن اعمال شده است.

The **noncausal** discrete-time counterpart estimator:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=-\infty}^{n+q} h(n, i) z(i) \quad (1.16)$$

q : positive integer

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

18

تخمینگر های LTI گسسته در زمان

تخمینگر (۱.۱۵) یک تخمینگر LTI است اگر و فقط اگر تابع $h(n, i)$ تابعی از $n-i$ باشد و

$$h(n, i) = h(n - i)$$

در این حالت معادلات تخمینگر به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=-\infty}^n h(n-i)z(i) = h(n) * z(n) \quad (1.18)$$

مثالی از یک تخمینگر ساده

$$s(n) = s$$

فیلتر میانگین:

$$z(n) = s + v(n), \quad n = 1, 2, \dots$$

با استفاده از فیلتر میانگین:

$$\hat{s}(n) = \frac{1}{n} [z(1) + z(2) + \dots + z(n)] = s + \frac{1}{n} [v(1) + v(2) + \dots + v(n)]$$

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=1}^n h(n, i)z(i) \quad \longrightarrow \quad h(n, i) = \frac{1}{n} \quad \longrightarrow \quad \text{فیلتر میانگین فیلتر خطی است.}$$

فیلتر میانگین متغیر با زمان است.

توصیف حوزه فرکانس تخمینگر گسسته در زمان

$$(1.18) \quad \xrightarrow{DTFT: S(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)e^{-j\omega n}} \hat{S}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})Z(e^{j\omega})$$

تخمین پارامترهای سیگنال:

در بسیاری از کاربردها، یک سیگنال گسسته قابل بیان به صورت زیر است:

$$s(n) = \sum_{j=1}^q \theta_j \gamma_j(n) \quad (1.20)$$

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$: constant as parameters of signal

$\gamma_1(n), \gamma_2(n), \dots, \gamma_q(n)$: known function of n

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

21

تخمین پارامترهای سیگنال

$$\text{If } s(n) = s \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \theta &= s \\ \gamma(n) &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{If } \gamma_j(n) = n^{j-1} \quad \longrightarrow \quad s(n) = \sum_{j=1}^q \theta_j n^{j-1} \quad (1.20)$$

مساله اصلی در اینجا تخمین پارامترهای $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ بر اساس مقادیر اندازه گیری شده $z(n) = g(s(n), v(n), nT)$

راه حل: روش کوچکترین مربعات خطا (Least Square)

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

22

تخمین حالت

یکی از محل های استفاده تخمینگر ها مدل های فضای حالت و تخمین متغیرهای حالت است.

$$\dot{x}_{N \times 1}(t) = Ax(t) + B\omega_{m \times 1}(t) \quad (1.21) \quad \text{State model}$$

$$z_{p \times 1}(t) = Cx(t) + v_{p \times 1}(t) \quad (1.22) \quad \text{Measurement equation}$$

$\omega(t)$: process noise

$v(t)$: measurement noise

مساله اصلی در این کاربرد تولید $\hat{x}(t)$ به عنوان تخمینی از حالت ها است با استفاده از اندازه گیری های انجام شده $z(\tau)$ برای $0 \leq \tau \leq t$.

Kalman-Bucy filter:
$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + K(t)[z(t) - C\hat{x}(t)]$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

23

مثال (Tracking an Object)

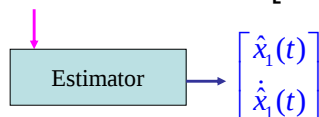
مساله تعقیب یک شیء که شامل دنبال کنندگی موقعیت و سرعت آن شیء است میتواند یکی از مثال های عملی در تخمین محسوب گردد.

با فرض اینکه شیء دارای سرعت ثابت باشد حرکت آن در سه محور را میتوان به صورت جداگانه در نظر گرفت. اگر بخواهیم حرکت در محور x را مدل نماییم میتوان آن را بصورت معادله حالت زیر توصیف نمود.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad \text{where: } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{bmatrix}$$

در این حالت رادار موقعیت شیء را به صورت یک متغیر دارای نویز اندازه گیری به صورت زیر ارائه می نماید.

$$z(\tau) = x_1(t) + v(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + v(t)$$



Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

24

مثال (Tracking an Object)

اغلب تخمینگرها به صورت گسسته در زمان عمل می نمایند، لذا لازم است معادلات حالت به صورت گسسته در زمان ارائه شود:

$$\Phi = e^{AT}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{N \times 1}(t) = Ax(t) + B\omega_{m \times 1}(t) \\ z_{p \times 1}(t) = Cx(t) + v_{p \times 1}(t) \end{cases} \xrightarrow{\Gamma = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau} \begin{cases} x(n+1) = \Phi x(n) + \Gamma \omega(n) \\ z(n) = Cx(n) + v(n) \end{cases}$$

در نتیجه برای این مثال:

$$\begin{cases} x(n+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(n) \\ z(n) = Cx(n) + v(n) \end{cases}$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

25

استفاده از مدل حالت در تخمین سیگنال

دسته بزرگی از سیگنالها معادلات دیفرانسیل از مرتبه N را برآورده می نمایند. این دسته از سیگنالها را با استفاده از مدل فضای حالت می توان تخمین زد.

$$s^{(N)}(t) + a_{N-1}s^{(N-1)}(t) + \dots + a_1s^{(1)}(t) + a_0s(t) = 0$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= s(t) \\ x_2(t) &= s^{(1)}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= s^{(N-1)}(t) \end{aligned} \implies \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \\ s(t) = Cx(t) \end{cases} \xrightarrow{\quad} z(t) = Cx(t) + v(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{N-1} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

26

استفاده از مدل حالت در تخمین پارامترهای سیگنال

مساله تخمین پارامترها که پیش از این مطرح شد را می توان به مساله تخمین متغیرهای حالت تبدیل نموده و حل کرد.

$$(1.20) \quad \Leftrightarrow \quad s(n) = \sum_{j=1}^q \theta_j \gamma_j(n)$$

$$\Rightarrow x_i = \theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

با توجه به اینکه ضرایب ثابت هستند:

$$x(n+1) = x(n) \rightarrow \Phi = I_{q \times q}$$

$$\Rightarrow s(n) = \gamma(n)x(n) \rightarrow z(n) = \gamma(n)x(n) + v(n)$$

همانگونه که مشخص است در این حالت ضرایب تخمین زده شده تابعی از n هستند که با گذشت زمان به سمت مقادیر واقعی همگرا خواهند شد.

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

27

تخمین کمترین مربعات (Least Square Estimation)

تخمین کمترین مربعات یکی از روشهای قدرتمند تخمین است که بر پایه روش کمترین مربعات بنا نهاده شده است. این روش یک روش غیر تصادفی تخمین است، به عبارت دیگر در این روش اندازه گیری ها و متغیرهای مد نظر عمل تخمین نویزی نیستند.

در ادامه روش کمترین مربعات برای دو هدف زیر مد نظر قرار می گیرد:

1. تخمین پارامترهای سیگنال.
2. تخمین متغیرهای حالت در مدل فضای حالت.

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

28

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش کمترین مربعات

یک سیگنال گسسته با توصیف زیر در نظر بگیرید:

$$(1.20) \quad \Leftrightarrow \quad s(n) = \sum_{j=1}^q \theta_j \gamma_j(n) \Rightarrow s(n) = \gamma(n)\theta$$

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q : \text{constant and unknown} \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_q \end{bmatrix}$$

$\gamma_1(n), \gamma_2(n), \dots, \gamma_q(n)$: known function of n

$$\gamma(n) = [\gamma_1(n) \quad \dots \quad \gamma_q(n)]$$

Measurements of signal: $z(n) = s(n) + v(n)$

مشابه قبل هدف یافتن $\hat{\theta}(n)$ به عنوان تخمین θ است در زمان nT با استفاده از:

$$z(1), z(2), \dots, z(n)$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

29

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش کمترین مربعات

با استفاده از مقدار تخمین زده شده $\hat{\theta}(n)$ میتوان سیگنال جدیدی با عنوان $\hat{s}(n)$ را ساخت که تخمینی از سیگنال واقعی $s(n)$ می باشد.

$$s(n) = \gamma(n)\theta(n), \quad (1.34)$$

همچنین مقادیر تخمینی از سیگنال را در بازه $i < n$ با استفاده از $\hat{\theta}(n)$ میتوان در اختیار داشت.

$$\hat{s}(i) = \gamma(i)\hat{\theta}(n), \quad i < n \quad (1.35)$$

حال میتوان مجموع مربعاتی را به صورت زیر ارائه نمود که اگر تخمین $\hat{\theta}(n)$ با مقدار θ برابر بوده و $v(i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ باشد مجموع مربعات در رابطه (۱.۳۶) صفر خواهد گشت.

$$S.S. = [z(1) - \hat{s}(1)]^2 + [z(2) - \hat{s}(2)]^2 + \dots + [z(n) - \hat{s}(n)]^2 \quad (1.36)$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

30

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش کمترین مربعات

ولیکن در صورتی که $\hat{\theta}(n)$ با θ برابر نباشد مجموع مربعات مقدار مثبتی را نتیجه خواهد داد که اندازه آن بستگی دارد به فاصله مقدار تخمین زده شده از مقدار واقعی.

لذا مجموع مربعات را میتوان به صورت یک تابع خطا در نظر گرفت که هدف حداقل نمودن مقدار آن است با استفاده از تخمین درست $\hat{\theta}(n)$.

تخمین $\hat{\theta}(n)$ که تابع مربعات خطای (۱.۳۶) را مینیمم مینماید را تخمین حداقل مربعات خطا (LS) از θ در زمان nT می نامند.

*** به منظور محاسبه تخمین کمترین مربعات خطا (Least Square) از پارامترهای سیگنال $s(n)$ ابتدا لازم است رابطه (۱.۳۶) به صورت برداری بازنویسی گردد. به این منظور:

$$Z_n = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad \Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n) \end{bmatrix}_{n \times q}$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

31

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش کمترین مربعات

در نتیجه رابطه (۱.۳۶) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$S.S. = [Z_n - \Gamma_n \hat{\theta}(n)]^T [Z_n - \Gamma_n \hat{\theta}(n)]$$

به منظور محاسبه تخمین $\hat{\theta}(n)$ با استفاده از حداقل سازی تابع S.S. میتوان از ایده مشتق گیری جزئی نسبت به $\hat{\theta}(n)$ استفاده نمود. در این صورت:

$$\frac{\partial(S.S.)}{\partial \hat{\theta}(n)} = -2\Gamma_n^T [Z_n - \Gamma_n \hat{\theta}(n)] = 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma_n^T \Gamma_n \hat{\theta}(n) = \Gamma_n^T Z_n \quad (1.38)$$

شرط کافی برای محاسبه $\hat{\theta}(n)$ از این رابطه و یا به عبارت دیگر معکوس پذیر بودن $\Gamma_n^T \Gamma_n$ این است که رتبه ماتریس Γ_n برابر q باشد.

$$\hat{\theta}(n) = [\Gamma_n^T \Gamma_n]^{-1} \Gamma_n^T Z_n \quad (1.39)$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

32

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش کمترین مربعات

چند نکته مهم:

- شرط اینکه رتبه ماتریس Γ_n برابر q باشد این است که $n \geq q$ باشد. به عبارت دیگر تعداد دسته اطلاعات اندازه گیری شده از تعداد ضرایب مجهول بیشتر باشد.
- تخمین حداقل مربعات (LS) تخمینی از θ در زمان nT ارائه می نماید که به آن روش *batch* گفته می شود، چرا که برای محاسبه آن به تمامی اطلاعات و اندازه گیری های $z(1), z(2), \dots, z(n)$ نیاز است. پر واضح است که این روش به صورت *off-line* قابل استفاده می باشد.
- شرط کامل بودن رتبه ماتریس Γ_n در اصل یک محدودیتی است بر روی تابع های $\gamma_j(n)$ به عنوان تابع های زمانی توصیف کننده سیگنال.

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش کمترین مربعات

فرم بازگشتی روش کمترین مربعات (Recursive Least Square)

با توجه به دو علت مهم: (۱) سنگینی محاسبات در زمانی که مقدار n بزرگ می شود و (۲) نیاز به محاسبه *online* پارامترها، روش کمترین مربعات بازگشتی (RLS) ارائه گشته است.

با استفاده از معادلات زیر که درستی آنها به سادگی قابل بررسی است.

$$\Gamma_{n+1}^T Z_{n+1} = \Gamma_n^T Z_n + \gamma^T(n+1)z(n+1) \quad (1.40)$$

$$\Gamma_{n+1}^T \Gamma_{n+1} = \Gamma_n^T \Gamma_n + \gamma^T(n+1)\gamma(n+1) \quad (1.41)$$

با استفاده از قضیه معکوس سازی ماتریس:

Matrix Inversion Lemma :

$$(A_{11}^{-1} + A_{12}A_{22}A_{21})^{-1} = A_{11} - A_{11}A_{12}(A_{21}A_{11}A_{12} + A_{22}^{-1})^{-1}A_{21}A_{11} \quad (5.93)$$

$$\left[\Gamma_{n+1}^T \Gamma_{n+1} \right]^{-1} = \left[\Gamma_n^T \Gamma_n \right]^{-1} - \frac{\left[\Gamma_n^T \Gamma_n \right]^{-1} \gamma^T(n+1)\gamma(n+1) \left[\Gamma_n^T \Gamma_n \right]^{-1}}{1 + \gamma(n+1) \left[\Gamma_n^T \Gamma_n \right]^{-1} \gamma^T(n+1)} \quad (1.42)$$

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش RLS

با جایگزاری $n+1$ به جای n در (۱.۳۹) خواهیم داشت:

$$\hat{\theta}(n+1) = [\Gamma_{n+1}^T \Gamma_{n+1}]^{-1} \Gamma_{n+1}^T Z_{n+1} \quad (1.43)$$

با جایگزاری (۱.۴۲) و (۱.۴۰) در (۱.۴۳) خواهیم داشت:

$$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + K(n) [z(n+1) - \gamma(n+1)\hat{\theta}(n)] \quad (1.44)$$

$$K(n)_{q \times 1} = \frac{[\Gamma_n^T \Gamma_n]^{-1} \gamma^T(n+1)}{1 + \gamma(n+1) [\Gamma_n^T \Gamma_n]^{-1} \gamma^T(n+1)} \quad (1.45)$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

35

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش RLS

با توجه به رابطه (۱.۴۵) و (۱.۴۲) میتوان محاسبات $K(n)$ و $[\Gamma_n^T \Gamma_n]^{-1}$ را به صورت بازگشتی انجام داد.

$$\begin{aligned} [\Gamma_{n+1}^T \Gamma_{n+1}]^{-1} &= [\Gamma_n^T \Gamma_n]^{-1} - \frac{[\Gamma_n^T \Gamma_n]^{-1} \gamma^T(n+1) \gamma(n+1) [\Gamma_n^T \Gamma_n]^{-1}}{1 + \gamma(n+1) [\Gamma_n^T \Gamma_n]^{-1} \gamma^T(n+1)} \\ &= [\Gamma_n^T \Gamma_n]^{-1} - K(n) \gamma(n+1) [\Gamma_n^T \Gamma_n]^{-1} = (I - K(n) \gamma(n+1)) [\Gamma_n^T \Gamma_n]^{-1} \end{aligned}$$

$P_n = [\Gamma_n^T \Gamma_n]^{-1}$

$$\begin{aligned} K(n) &= \frac{P_n \gamma^T(n+1)}{1 + \gamma(n+1) P_n \gamma^T(n+1)} \\ \hat{\theta}(n+1) &= \hat{\theta}(n) + K(n) [z(n+1) - \gamma(n+1)\hat{\theta}(n)] \\ P_{n+1} &= (I - K(n) \gamma(n+1)) P_n \end{aligned}$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

36

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش RLS

روش مربعات بازگشتی (RLS) بسیار موثرتر از روش مربعات (LS) در پروسه تخمین به کار گرفته می شود.

نکاتی مهم در خصوص استفاده از روش RLS :

- روش RLS به مقدار اولیه تخمین $\hat{\theta}$ نیاز دارد. اگر هیچ اطلاعاتی از مقدار اولیه وجود نداشته باشد می توان مقدار آن را برابر صفر در نظر گرفت.
- اولین تخمین های مناسب میتوانند در مرحله r بدست آیند. مقدار r کوچکترین مقدار صحیحی است که به ازای آن ماتریس $\Gamma_r^T \Gamma_r$ معکوس پذیر می باشد.
- مقدار ماتریس P_0 نیز لازم است در شروع الگوریتم مقدار دهی شود که پیشنهاد مناسب برای آن عبارت است از $P_0 = \alpha I, \alpha > 0$.

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

37

مثال

$$s(n) = s \longrightarrow \begin{cases} \gamma(n) = 1 \\ \theta = s \end{cases}$$

$$z(n) = s + v(n)$$

$$\Rightarrow \Gamma_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma_n^T \Gamma_n = n \xrightarrow{\text{LS}} \hat{\theta}(n) = [\Gamma_n^T \Gamma_n]^{-1} \Gamma_n^T Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z(i)$$

نتیجه مشابه نتیجه تخمین فیلتر میانگین است.

$$\xrightarrow{\text{RLS}} \begin{cases} K(n) = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} \\ \hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + \frac{1}{n+1} (z(n+1) - \hat{\theta}(n)) \end{cases}$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

38

روش کمترین مربعات وزن داده شده (WLS)

$$S.S. = [Z_n - \Gamma_n \hat{\theta}(n)]^T W_n [Z_n - \Gamma_n \hat{\theta}(n)] \quad \text{where, } W_n : \text{Symmetric positive definite}$$

اگر ماتریس W_n قطری باشد:

$$W_n = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w_n \end{bmatrix}$$

$$S.S. = \sum_{i=1}^n w_i [z(i) - \hat{s}(i)]^2$$

همانگونه که مشخص است از w_i ها میتوان به عنوان ضریب فراموشی اطلاعات استفاده نمود. بطوریکه:

$$\begin{cases} w_n = 1 \\ w_i \rightarrow 0 \text{ as } i \rightarrow 1 \end{cases}$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

39

روش کمترین مربعات وزن داده شده (WLS)

Weighted Least Square:

$$\hat{\theta}(n) = [\Gamma_n^T W_n \Gamma_n]^{-1} \Gamma_n^T W_n Z_n$$

Weighted Recursive Least Square :

$$\text{If } W_n = \begin{bmatrix} \alpha^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha^{n-2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 0 < \alpha < 1: \text{ forgetting factor}$$

$$K(n)_{q \times 1} = \frac{[\Gamma_n^T W_n \Gamma_n]^{-1} \gamma^T(n+1)}{\alpha + \gamma(n+1) [\Gamma_n^T W_n \Gamma_n]^{-1} \gamma^T(n+1)}$$

$$[\Gamma_{n+1}^T \Gamma_{n+1}]^{-1} = (I - K(n) \gamma(n+1)) [\Gamma_n^T W_n \Gamma_n]^{-1}$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

40

روش کمترین مربعات وزن داده شده (WLS)

Recursive Least Square with Forgetting Factor:

$$K(n) = \frac{P_n \gamma^T(n+1)}{\alpha + \gamma(n+1) P_n \gamma^T(n+1)}$$

$$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + K(n) [z(n+1) - \gamma(n+1) \hat{\theta}(n)]$$

$$P_{n+1} = \frac{(I - K(n) \gamma(n+1)) P_n}{\alpha}$$

$0 < \alpha < 1$: forgetting factor

پروژه ۱

با استفاده از روش LS و RLS پارامترهای عددی α_i تابع زیر را تخمین بزنید و مسائل زیر را بررسی کنید:

- ۱- اثر تعداد نمونه ها
- ۲- اثر مقادیر اولیه پارامترها در RLS
- ۳- اثر مقادیر اولیه ماتریس کوواریانس خطا
- ۴- اثر ضریب فراموشی
- ۵- مزایا و معایب LS و RLS نسبت به یکدیگر

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \sin(2t) + \alpha_2 e^{-0.5t}$$

$$T_s = 0.1$$

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = 0.2$$

$$\alpha_2 = -1$$

پروژه ۲

شناسایی یک سیستم حداقل مرتبه ۳

- مقایسه روش LS و RLS
- بررسی و تحلیل همگرایی پارامترها در روش RLS
 - بررسی اثر شرایط اولیه
 - بررسی مقدار اولیه ماتریس کوواریانس خطا
 - بررسی مساله بازنشانی ماتریس کوواریانس خطا
 - بررسی اثر ضریب فراموشی
- بررسی و تحلیل انتخاب مرتبه صورت و مخرج
- شناسایی با استفاده از جعبه ابزار شناسایی سیستم MATLAB

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS

$$x(n+1) = \Phi_{N \times N} x(n) \quad (1.54)$$

$$z(n) = C_{1 \times N} x(n) + v(n) \quad (1.55)$$

مشابه قبل هدف تخمین حالت ها است با استفاده از اندازه گیری های

$$z(1), z(2), \dots, z(n)$$

با فرض اینکه ماتریس Φ معکوس پذیر است معادله (۱.۵۴) را می توان در جهت عکس به صورت زیر حل نمود:

$$x(i) = \Phi^{-n+i} x(n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.56)$$

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS

با استفاده از روابط (۱.۵۴) تا (۱.۵۶):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix}}_{Z_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} Cx(1) \\ Cx(2) \\ \vdots \\ Cx(n) \end{bmatrix}}_{U_n} + \underbrace{\begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix}}_{V_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\Phi^{-n+1} \\ C\Phi^{-n+2} \\ \vdots \\ C \end{bmatrix}}_{U_n} x(n) + \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

$$\rightarrow Z_n = U_n x(n) + V_n \quad (1.58)$$

در نتیجه تابع مجموع مربعات را می توان به صورت زیر نوشت:

$$S.S. = [Z_n - U_n x(n)]^T [Z_n - U_n x(n)] \quad (1.59)$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

45

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS

با گرفتن مشتق جزئی از معادله (۱.۵۹) نسبت به $x(n)$ و مساوی صفر قرار دادن، تخمین متغیرهای حالت به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\hat{x}(n) = [U_n^T U_n]^{-1} U_n^T Z_n \quad (1.61)$$

با بازنویسی ماتریس U_n به صورت تابعی از ماتریس رؤیت پذیر O_n خواهیم داشت:

$$O_n = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix} : \text{observability matrix} \Rightarrow U_n = O_n \Phi^{1-n}$$

$$\rightarrow \hat{x}(n) = \Phi^{n-1} [O_n^T O_n]^{-1} O_n^T Z_n \quad (1.67)$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

46

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS

توجه به معادله (۱.۶۷) نشان می دهد که در این معادله Φ^{-1} ظاهر نشده است و لذا نیازی به فرض محدود کننده معکوس پذیری Φ نیست.

$$\hat{x}(n) = \Phi^{n-1} [O_n^T O_n]^{-1} O_n^T Z_n \quad (1.67)$$

نکته قابل توجه در خصوص معادله (۱.۶۷) این است که ماتریس O_n دارای است مرتبه کامل است اگر و فقط اگر ماتریس $O_n^T O_n$ معکوس پذیر باشد و یا به عبارت دیگر مدل فضای حالت (۱.۵۴) و (۱.۵۵) رؤیت پذیر باشد.

تخمین حالت ها با استفاده از روش RLS

$$\hat{x}(n+1) = \Phi \hat{x}(n) + K(n) [z(n+1) - C \Phi \hat{x}(n)]$$

$$K(n) = \frac{P_n C^T}{1 + C P_n C^T}$$

$$P_{n+1} = \Phi [I - K(n)C] P_n \Phi^T$$

$$P_n = \Phi^n [O_n^T O_n] (\Phi^T)^n$$

خطای تخمین

خطای تخمین به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\tilde{x}(n) = x(n) - \hat{x}(n)$$

از طرفی:

$$Z_n = U_n x(n) + V_n = O_n \Phi^{1-n} x(n) + V_n$$

در نتیجه:

$$\hat{x}(n) = \Phi^{n-1} [O_n^T O_n]^{-1} O_n^T [O_n \Phi^{1-n} x(n) + V_n]$$

$$\Rightarrow \hat{x}(n) = x(n) + \Phi^{n-1} [O_n^T O_n]^{-1} O_n^T V_n$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(n) = x(n) - \hat{x}(n) = -\Phi^{n-1} [O_n^T O_n]^{-1} O_n^T V_n$$

این رابطه نشان می دهد که دامنه خطای تخمین ارتباط مستقیم دارد با دامنه نویز $v(n)$.

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

49

خطای تخمین

خطای تخمین به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\tilde{x}(n) = x(n) - \hat{x}(n)$$

از طرفی:

$$Z_n = U_n x(n) + V_n = O_n \Phi^{1-n} x(n) + V_n$$

در نتیجه:

$$\hat{x}(n) = \Phi^{n-1} [O_n^T O_n]^{-1} O_n^T [O_n \Phi^{1-n} x(n) + V_n]$$

$$\Rightarrow \hat{x}(n) = x(n) + \Phi^{n-1} [O_n^T O_n]^{-1} O_n^T V_n$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(n) = x(n) - \hat{x}(n) = -\Phi^{n-1} [O_n^T O_n]^{-1} O_n^T V_n$$

این رابطه نشان می دهد که دامنه خطای تخمین ارتباط مستقیم دارد با دامنه نویز $v(n)$.

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

50

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS در حضور ورودی معلوم

$$x(n+1) = \Phi_{N \times N} x(n) + \Gamma_{N \times 1} u(n)$$

$$z(n) = C_{1 \times N} x(n) + v(n)$$

مشابه قبل هدف تخمین حالت ها است با استفاده از اندازه گیری های

$$z(1), z(2), \dots, z(n)$$

با فرض اینکه ماتریس Φ معکوس پذیر است خواهیم داشت:

$$\rightarrow x(1) = \Phi^{-1}[\Phi^{-1}x(3) - \Phi^{-1}\Gamma u(2)] - \Phi^{-1}\Gamma u(1) = \Phi^{-2}x(3) - \Phi^{-2}\Gamma u(2) - \Phi^{-1}\Gamma u(1)$$

$$\rightarrow x(1) = \Phi^{-2}[\Phi^{-1}x(4) - \Phi^{-1}\Gamma u(3)] - \Phi^{-2}\Gamma u(2) - \Phi^{-1}\Gamma u(1) = \Phi^{-3}x(4) - \Phi^{-3}\Gamma u(3) - \Phi^{-2}\Gamma u(2) - \Phi^{-1}\Gamma u(1)$$

$\vdots$

$$\rightarrow x(1) = \Phi^{-(n-1)}x(n) - \Phi^{-(n-1)}\Gamma u(n-1) - \dots - \Phi^{-1}\Gamma u(1) = \Phi^{-n+1}x(n) - \sum_{i=1}^{n-1} \Phi^{-i}\Gamma u(i)$$

$$\rightarrow x(1) = \Phi^{-n+1}x(n) - \sum_{i=1}^{n-1} \Phi^{-i}\Gamma u(i)$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

51

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS در حضور ورودی معلوم

$$x(n+1) = \Phi_{N \times N} x(n) + \Gamma_{N \times 1} u(n)$$

$$z(n) = C_{1 \times N} x(n) + v(n)$$

جمله عمومی

$$\rightarrow x(i) = \Phi^{-n+i}x(n) - \sum_{k=1}^{n-i} \Phi^{-k}\Gamma u(k+i-1)$$

$$Z_n = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx(1) + v(1) \\ Cx(2) + v(2) \\ \vdots \\ Cx(n) + v(n) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\Phi^{-n+1} \\ C\Phi^{-n+2} \\ \vdots \\ C \end{bmatrix}}_{U_n} x(n) - C \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n-1} \Phi^{-k}\Gamma u(k) \\ \sum_{k=1}^{n-2} \Phi^{-k}\Gamma u(k+1) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Psi} + \underbrace{\begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix}}_{V_n}$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

52

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS در حضور ورودی معلوم

$$\hat{x}(n+1) = [U_{n+1}^T U_{n+1}]^{-1} U_{n+1}^T \bar{Z}_{n+1} = \Phi^n [O_{n+1}^T O_{n+1}]^{-1} O_{n+1}^T \bar{Z}_{n+1} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (O_{n+1}^T O_{n+1})^{-1} &= (O_n^T O_n + \varphi^{T^n} C^T C \varphi^n)^{-1} \\ &\stackrel{\text{Matrix Inv. Lemma}}{=} (O_n^T O_n)^{-1} - \frac{(O_n^T O_n)^{-1} \varphi^{T^n} C^T C \varphi^n (O_n^T O_n)^{-1}}{1 + C \varphi^n (O_n^T O_n)^{-1} \varphi^{T^n} C^T} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} O_{n+1}^T \bar{Z}_{n+1} &= \begin{bmatrix} C^T & \varphi^T C^T & \cdots & \varphi^{T^{n-1}} C^T & \varphi^{T^n} C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}(1) \\ \vdots \\ \bar{z}(n+1) \end{bmatrix} \\ &= O_n^T \bar{Z}_n + \begin{bmatrix} C^T & \varphi^T C^T & \cdots & \varphi^{T^{n-1}} C^T & \varphi^{T^n} C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \varphi^{-n} \Gamma u(n) \\ C \varphi^{-n+1} \Gamma u(n) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \\ \rightarrow O_{n+1}^T \bar{Z}_{n+1} &= O_n^T \bar{Z}_n + O_n^T O_n \varphi^{-n} \Gamma u(n) + \varphi^{T^n} C^T z(n+1) \end{aligned} \quad (3)$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

53

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS در حضور ورودی معلوم

$$\begin{aligned} (1), (2), (3) \rightarrow \hat{x}(n+1) &= \varphi^n (O_{n+1}^T O_{n+1})^{-1} O_{n+1}^T \bar{Z}_{n+1} = \varphi \hat{x}(n) + \Gamma u(n) + \varphi^n (O_n^T O_n)^{-1} \varphi^{T^n} C^T z(n+1) \\ &\quad - \varphi^n \frac{(O_n^T O_n)^{-1} \varphi^{T^n} C^T C \varphi^n (O_n^T O_n)^{-1}}{1 + C \varphi^n (O_n^T O_n)^{-1} \varphi^{T^n} C^T} (O_n^T \bar{Z}_n + \varphi^{T^n} C^T z(n+1)) \\ &\quad - \varphi^n \frac{(O_n^T O_n)^{-1} \varphi^{T^n} C^T C}{1 + C \varphi^n (O_n^T O_n)^{-1} \varphi^{T^n} C^T} \Gamma u(n) \\ \rightarrow \hat{x}(n+1) &= \varphi \hat{x}(n) + \Gamma u(n) + \varphi^n (O_n^T O_n)^{-1} \varphi^{T^n} C^T z(n+1) + k(n) (-C(\varphi \hat{x}(n) + \Gamma u(n)) \\ &\quad - k(n) C \varphi^n (O_n^T O_n)^{-1} \varphi^{T^n} C^T z(n+1)) \end{aligned}$$

where

$$k(n) = \frac{\varphi^n (O_n^T O_n)^{-1} \varphi^{T^n} C^T}{1 + C \varphi^n (O_n^T O_n)^{-1} \varphi^{T^n} C^T}$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

54

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS در حضور ورودی معلوم

$$\begin{aligned} \rightarrow \hat{x}(n+1) &= \varphi \hat{x}(n) + \Gamma u(n) + k(n)(-C(\varphi \hat{x}(n) + \Gamma u(n))) + (I - k(n)C)P_n C^T z(n+1) \\ \rightarrow \hat{x}(n+1) &= \varphi \hat{x}(n) + \Gamma u(n) + k(n)(z(n+1) - C(\varphi \hat{x}(n) + \Gamma u(n))) - k(n)z(n+1) + (I - k(n)C)P_n C^T z(n+1) \\ \rightarrow \hat{x}(n+1) &= \varphi \hat{x}(n) + \Gamma u(n) + k(n)(z(n+1) - C(\varphi \hat{x}(n) + \Gamma u(n))) + \underbrace{(P_n C^T - k(n) - k(n)C P_n C^T)}_{=0} z(n+1) \end{aligned}$$

$$k(n) = \frac{\varphi^n (O_n^T O_n)^{-1} \varphi^{Tn} C^T}{1 + C \varphi^{Tn} (O_n^T O_n)^{-1} \varphi^n C^T} = \frac{P_n C^T}{1 + C P_n C^T} \Rightarrow k(n) + k(n)C P_n C^T = P_n C^T$$

$$P_n = \varphi^n (O_n^T O_n)^{-1} \varphi^{Tn}$$

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS در حضور ورودی معلوم

رابطه بازگشتی تخمینگر حالت LS

$$\begin{aligned} \hat{x}(n+1) &= \varphi \hat{x}(n) + \Gamma u(n) + k(n)(z(n+1) - C(\varphi \hat{x}(n) + \Gamma u(n))) \\ \Rightarrow k(n) &= \frac{P_n C^T}{1 + C P_n C^T} \\ P_{n+1} &= \Phi [I - K(n)C] P_n \Phi^T \end{aligned}$$

پروژه ۲

۱- با استفاده از تخمینگر حالت LS و رویتگر لیونبرگر متغیرهای حالت سیستم زیر را تخمین بزنید.

$$\mathbf{X}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.8467 & 0.12 & -0.05 \\ 0.0156 & -0.79 & -0.0333 \\ 0.0156 & -0.14 & -0.6833 \end{bmatrix} \mathbf{X}(k)$$

۱-۱ نويز اندازه گيری را يك نويز سفید با میانگین صفر
در نظر بگیرید و تاثیر تغییرات واریانس آن را در نتیجه
فرایند تخمین حالت ها بررسی نمایید.

$$z(k) = [-3 \ 9 \ 0] \mathbf{X}(k) + v(k)$$

۱-۲ نقش پارامترهای مختلف در طراحی تخمینگر ها را بررسی نمایید.

$$\mathbf{X}(0) = [2 \ -1 \ 4]$$

۲- بخش اول پروژه را برای دینامیک ناپایداری به صورت زیر مجددا اجرا نموده و نتایج را تحلیل کنید.

$$\mathbf{X}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.94 & -0.0667 & -0.1433 \\ -0.0467 & -0.9144 & -0.0956 \\ -0.0467 & -0.2644 & -0.7456 \end{bmatrix} \mathbf{X}(k)$$

$$z(k) = [-3 \ 9 \ 0] \mathbf{X}(k) + v(k)$$

$$\mathbf{X}(0) = [10 \ -2 \ 4]$$