باسمه تعالی

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 2

سیگنال های تصادفی
و سیستم های با ورودی تصادفی

نیمسال دوم ۹۷-۹۶

مقدمه

- در مساله تخمین سیگنال $s(n)$ از مقدار اندازه گیری $z(n)=g\left(s(n),v(n),nT\right)$ ترم نویزی $v(n)$ معمولا به صورت تصادفی تغییر می کند، لذا مدل سازی نویز $v(n)$ نیازمند فرموله نمودن سیگنال های تصادفی است. همچنین امکان دارد سیگنال $s(n)$ شامل متغیرهای تصادفی باشد که این نیاز به توصیف و مدل سازی سیگنال تصادفی را بیش از پیش نشان می دهد.

- یک متغیر تصادفی بر اساس نتایج ممکن یک آزمایش از مجموعه نتایج S تعریف می شود.
- یک رویداد A زیر مجموعه رخدادهای S می باشد.

S : Probability Space

متغیرهای تصادفی

- یک متغیر تصادفی x عبارت است از تابعی از مجموعه S به مجموعه اعداد حقیقی.

$$\alpha \in S \quad \to \quad \boldsymbol{x}(\alpha) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \neq 0 \\ \boldsymbol{x}(\alpha) = 0 \end{cases}$$

- البته ممکن است ساختار نوشتاری زیر نیز استفاده گردد:

$$\alpha_i \ \leftrightarrow \ i^{th} \text{ trial} \ \Rightarrow \boldsymbol{x}(i) = \boldsymbol{x}(\alpha_i) \qquad \text{where, } i = 1, 2, \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sample realizations} \\ \text{sample values} \end{array}\right\} \text{of random variable } \boldsymbol{x}$$

متغیرهای تصادفی

- احتمال رخ دادن واقعه A از مجموعه رخ دادهای S را با $P(A)$ نمایش می دهند.

$$P(A) \in \mathbb{R}^+$$

- برای $A \subset S$ معادلات و نامعادلات زیر صادق هستند:

$$0 \le P(A) \le 1 \qquad (2.1)$$

$$P(S) = 1 \qquad (2.2)$$

-

$$\left.\begin{array}{l} A \subset S \\ B \subset S \\ A \cap B = \varnothing \end{array}\right\} P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (2.3)$$

متغیرهای تصادفی

- $\left.\begin{array}{l} A \subset S \\ B \subset S \\ A \cap B \neq \varnothing \end{array}\right\} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $(2.3) \quad \Rightarrow \begin{cases} P(\varnothing) = 0 \\ P(\bar{A}) = 1 - P(A) \end{cases}$
- **یک متغیر تصادفی x در فضای احتمالی S (*Probability Space*) با استفاده از تابع توزیع احتمال آن مشخص می گردد.**

$$F_x(x) = P\{\alpha \in S : x(\alpha) \leq x\}$$

$F_x(x)$ عبارت است از احتمال اینکه مقدار متغیر تصادفی x کوچکتر یا مساوی مقدار حقیقی x باشد.

متغیرهای تصادفی

- **با توجه به تعریف تابع توزیع احتمال معادلات زیر در مورد آنها قابل توجه می باشند.**

$$\left.\begin{array}{l} F_x(-\infty) = 0 \\ F_x(\infty) = 1 \end{array}\right\} \qquad (2.4)$$

$$0 \leq F_x(x) \leq 1 \text{ for all } x \qquad (2.5)$$

$$\text{If } x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; F_x(x_1) < F_x(x_2) \qquad (2.6)$$

- **رابطه (۲.۶) نشان می دهد که تابع توزیع احتمال یک تابع غیر کاهشی (non-decreasing) است.**

متغیرهای تصادفی

- هر متغیر تصادفی x با استفاده از تابع چگالی احتمال متناظر نیز قابل توصیف است. که این تابع عبارت است از مشتق تابع توزیع احتمال آن متغیر تصادفی.

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x) \qquad (2.7)$$

$$(2.7) \quad \Rightarrow \quad F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)dx \qquad (2.8)$$

- با توجه به روابط (۲.۷) و (۲.۸) معادلات زیر قابل استنتاج خواهند بود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$$

متغیرهای تصادفی

- با توجه به روابط (۲.۷) و (۲.۸) معادلات زیر قابل استنتاج خواهند بود:

$$\text{If } x_1 < x_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow P(x_1 < x \le x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x)dx$$

Most likely value of RV $\boldsymbol{x}$:

$$x \mid \ \max\left[\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_x(x)dx\right] \ \rightarrow \ \frac{df_x(x)}{dx} = 0$$

متغیرهای تصادفی

• مثال:

$$S=\{\text{working normally, not working normally}\}$$

$$P(\text{working normally})=0.9,\quad P(\text{not working normally})=0.1$$

پس می توان متغیر تصادفی x را به صورت زیر تعریف نمود:

$$\boldsymbol{x}(\text{working normally})=0,\qquad \boldsymbol{x}(\text{not working normally})=1$$

$\Rightarrow$ The Probability Distribution Function:

$$F_x(x)=P\{\alpha\in S:\boldsymbol{x}(\alpha)\le x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.9, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f_x(x)=0.9\delta(x)+0.1\delta(x-1)$$

متغیرهای تصادفی

• مثال: <u>متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت</u>

$$S=[-1,1]$$

$$\boldsymbol{x}(\alpha)=\alpha$$

تابع توزیع احتمال (پیوسته)

$$F_x(x)=P\{\alpha\in S:\boldsymbol{x}(\alpha)\le x\}=\begin{cases}0, & x<-1\\ \dfrac{x+1}{1-(-1)}=0.5(x+1), & -1\le x<1\\ 1, & 1\le x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f_x(x)=\begin{cases}0.5, & -1<x<1\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

متغیرهای تصادفی

- مثال: متغیر تصادفی گوسی یا نرمال

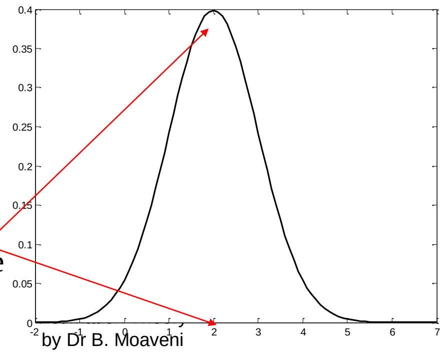
$$\boldsymbol{x}(\alpha)=\alpha$$

- با فرض توزیع گوسی:

$$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

η : real number

σ: positive number



$x=\eta=2$: most likely value

توزیع شرطی و چگالی شرطی

$\boldsymbol{x}$: RV

S : probability Space

$A\subset S$: A is an event

- تابع توزیع شرطی:

$$F_x(x\,|\,A)=P\left(\{\alpha\in S:\boldsymbol{x}(\alpha)\le x\}\,|\,A\right)=\frac{P\left(\{\alpha\in S:\boldsymbol{x}(\alpha)\le x\}\cap A\right)}{P\left(A\right)}$$

- تابع چگالی شرطی:

$$f_x(x\,|\,A)=\frac{dF_x(x\,|\,A)}{dx}$$

توزیع شرطی و چگالی شرطی

- مثال:

$$F_x(x) = P\{\alpha \in S : \mathbf{x}(\alpha) \le x\} = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.5(x+1), & -1 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \end{cases}$$

$$A = \{x \in S : 0 \le x \le 1\} \Rightarrow P(A) = 0.5$$

$$P\left(\{\alpha \in S : \mathbf{x}(\alpha) \le x\} \cap A\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.5x, & 0 \le x \le 1 \\ 0.5, & 1 < x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F_x(x \mid A) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases}$$

تابع از متغیر تصادفی

Ψ : real valued function

$$y = \Psi(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad y(\alpha) = \Psi\left(\mathbf{x}(\alpha)\right)$$

- مثال:

$$y(\alpha) = \Psi\left(x(\alpha)\right) = \alpha x(\alpha)$$

$$F_y(y) = P\{\alpha \in S : \mathbf{y}(\alpha) \le y\} \quad \Rightarrow F_y(y) = P\{\alpha \in S : \alpha\mathbf{x}(\alpha) \le y\}$$

$$\Rightarrow F_y(y) = P\left\{\alpha \in S : \mathbf{x}(\alpha) \le {}^{y}\!/_{\alpha}\right\} = F_x(\frac{y}{\alpha})$$

گشتاور یک متغیر تصادفی

x: RV

$f_x(x)$: probability density function

$$i^{th} \text{ moment of } x: \quad E\left[x^i\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x^i f_x(x)dx$$

- امید ریاضی: گشتاور اول یک متغیر تصادفی را مقدار میانگین یا امید ریاضی آن متغیر یا مرکز ثقل تابع چگالی احتمال گویند.

$$\boxed{E\left[x\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x \; f_x(x)dx}$$

$$x: x_1, x_2, \ldots, x_N \quad \rightarrow \quad E\left[x\right]\approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

گشتاور یک متغیر تصادفی

- مثال:

x: Uniformly Distributed RV

$$x_1 \le x \le x_2 \rightarrow f_x(x)=\frac{1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow \quad E\left[x\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x \; f_x(x)dx=\int_{x_1}^{x_2} x \; \frac{1}{x_2-x_1}dx=\frac{x_2+x_1}{2}$$

- مثال: مقدار میانگین یک متغیر تصادفی گوسی

$$x \sim N(\eta,\sigma^2): \qquad f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

گشتاور یک متغیر تصادفی

- ادامه مثال: مقدار میانگین یک متغیر تصادفی گوسی

$\rightarrow \quad E[x] = \eta : \quad$ most likely value

- گشتاور مرتبه دوم:

$$E\left[x^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)dx \;>0 \qquad : \text{ mean of the square/ mean square}$$

$$\boldsymbol{x} : x_1, x_2, \ldots, x_N \quad \rightarrow \quad E\left[x^2\right] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

واریانس و انحراف معیار یک متغیر تصادفی

- واریانس یک متغیر تصادفی:

امید ریاضی مجذور فاصله تا مقدار میانگین

$$\boxed{\begin{array}{r} Var[x] = E\left[\left(x-\eta\right)^2\right] \\ \eta : \text{ mean of } \boldsymbol{x} \end{array}}$$

$$Var[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x-\eta\right)^2 f_x(x)dx = E[x^2] - \left(E[x]\right)^2$$

- انحراف معیار یک متغیر تصادفی:

جذر واریانس یک متغیر تصادفی

$$\boxed{\sigma = \sqrt{Var[x]}}$$

واریانس و انحراف معیار یک متغیر تصادفی

- مثال:

$\boldsymbol{x}$: Uniformly Distributed RV

$$x_1 \le x \le x_2 \to f_x(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \; E\left[x^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \frac{1}{x_2 - x_1} dx = \frac{x_1^2 + x_2 x_1 + x_2^2}{3}$$

$$\to Var[x] = E[x^2] - \left(E[x]\right)^2 = \frac{x_1^2 + x_2 x_1 + x_2^2}{3} - \frac{x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2}{4} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{12}$$

- **توجه: معلوم بودن مقدار میانگین و واریانس برای توصیف توزیع یکنواخت و توزیع گوسی کافی است ولیکن در حالت کلی این دو مشخصه کفایت نمی کند.**

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$: Jointly Distributed RVs

Joint Distrbuted Function: $F_{x,y}(x,y) = P\left(\{\boldsymbol{x} \le x, \boldsymbol{y} \le y\}\right)$

Joint Density Function: $f_{x,y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{x,y}(x,y)}{\partial x \partial y}$

$$\Rightarrow \; P\left(\{\boldsymbol{x} \le x, \boldsymbol{y} \le y\}\right) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{x,y}(x,y)\; dx\; dy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\; dy \\ f_y(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\; dx \end{cases}$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

- امید ریاضی دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

$$E[xy]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \; f_{x,y}(x,y)\, dx\, dy$$

x, y: Uncorrelated RVs $\leftrightarrow$ $E[xy]=E[x]E[y]$

- کوواریانس x و y

$$\boxed{Cov[x,y]=E\big[\big(x-E[x]\big)\big(y-E[y]\big)\big]}$$

x, y: Uncorrelated RVs $\leftrightarrow$ Cov[x,y]=0

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

- دو متغیر تصادفی مستقل

دو متغیر تصادفی مستقل خوانده می شوند اگر:

$$F_{x,y}(x,y)=F_x(x)F_y(y) \;\;\Rightarrow\;\; f_{x,y}(x,y)=f_x(x)f_y(y)$$

توجه: **اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند غیر همبسته (*uncorrelated*) نیز هستند.**

- تابعی از دو متغیر تصادفی:

$$z=\Psi(x,y) \longrightarrow E[z]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x,y)\; f_{x,y}(x,y)\, dx\, dy$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

- مثال:

$$z = x + y \qquad \Rightarrow \quad E[z] = E[x] + E[y]$$

$\longrightarrow$ If x, y are uncorrelated $\quad \Rightarrow \quad Var[z] = Var[x] + Var[y]$

$\longrightarrow$ If x, y are independent

$$\Rightarrow \quad f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-y)\, f_y(y) dy = f_x(z) * f_y(z)$$

نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} x:\ N(\eta_x, \sigma_x^2) \\ y:\ N(\eta_y, \sigma_y^2) \\ x, y \text{ are Independent} \end{array}\right\} \Rightarrow \ z = x + y \text{ is Gaussian}:\ N(\eta_x + \eta_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

- توابع توزیع شرطی:

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$: Jointly Distributed RVs

where, $\begin{cases} x_1 \le x_2 \\ y \end{cases}$ are real numbers

Conditional Distrbuted Function:

$$F_y(y \mid x_1 < x \le x_2) = P\left(\{\boldsymbol{y} \le y\} \mid x_1 < \boldsymbol{x} \le x_2\right) = \frac{P\{\boldsymbol{y} \le y, x_1 < \boldsymbol{x} \le x_2\}}{P\{x_1 < \boldsymbol{x} \le x_2\}}$$

where, $\quad P\{\boldsymbol{y} \le y, x_1 < \boldsymbol{x} \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\infty}^{y} f_{x,y}(x,y)\, dx\, dy$

$$P\{x_1 < \boldsymbol{x} \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x)\, dx$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

- توابع چگالی شرطی:

$$\boxed{f_y(y \mid x_1 < x \le x_2) = \frac{\partial F_y(y \mid x_1 < x \le x_2)}{\partial y} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f_{x,y}(x,y)\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} f_x(x)\,dx}}$$

$$\text{If} \quad \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x + \Delta x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f_y(y \mid x < \mathbf{x} \le x + \Delta x) = \frac{\int_{x}^{x+\Delta x} f_{x,y}(x,y)\,dx}{\int_{x}^{x+\Delta x} f_x(x)\,dx} \approx \frac{f_{x,y}(x,y)\,\Delta x}{f_x(x)\,\Delta x}$$

$$\xrightarrow{\Delta x \to 0} \quad f_y(y \mid \mathbf{x} = x) = \lim_{\Delta x \to 0} f_y(y \mid x < \mathbf{x} \le x + \Delta x) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)}$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

- رابطه **Bayes**:

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \quad f_y(y \mid \mathbf{x} = x) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)} \\ &\text{similarly:} \quad f_x(x \mid \mathbf{y} = y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_y(y \mid \mathbf{x} = x) = \frac{f_x(x \mid \mathbf{y} = y)\, f_y(y)}{f_x(x)}}$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

مثال:

$$\left.\begin{array}{l} z = x + y \\ x, y \text{ are independent} \\ y \sim N(0,\sigma_y^2) \end{array}\right\} \rightarrow f_z(z \mid \mathbf{x} = x) = ?$$

$$P\{\mathbf{z} \le z, \mathbf{x} = x\} = P\{\mathbf{x} + \mathbf{y} \le z, \mathbf{x} = x\} = P\{\mathbf{y} \le z - x, \mathbf{x} = x\}$$

$$\overset{independence}{=} P\{\mathbf{y} \le z - x\} P\{\mathbf{x} = x\}$$

$$\Rightarrow f_z(z \mid \mathbf{x} = x) = f_y(z - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_y^2}} \qquad (2.45)$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

مثال: (استفاده از رابطه **Byaes**)

$$\left.\begin{array}{l} z = x + y \\ x, y \text{ are independent} \\ x \sim N(\eta_x,\sigma_x^2) \\ y \sim N(\eta_y,\sigma_y^2) \end{array}\right\} \rightarrow f_x(x \mid \mathbf{z} = z) = ?$$

$z = x + y$ is Gaussian : $N(\eta_x + \eta_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2) \rightarrow f_z(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} e^{-\frac{(z-\eta_z)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}}$

$$(2.45) \rightarrow f_z(z \mid \mathbf{x} = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_y^2}}$$

$$\Rightarrow f_x(x \mid \mathbf{z} = z) = \frac{f_z(z \mid \mathbf{x} = x) f_x(x)}{f_z(z)} = \frac{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_y^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sigma_x} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(z-\eta_z)^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_y^2)}}$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

امید ریاضی شرطی:

$$E[\mathbf{y} \mid \mathbf{x}=x]=\int_{-\infty}^{\infty} y f_y(\mathbf{y} \mid \mathbf{x}=x)\,dy=\Psi(x)$$

$$E[\Psi(x)]=E\left[E[\mathbf{y} \mid \mathbf{x}]\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_y(\mathbf{y} \mid \mathbf{x}=x) f_x(x)\,dy\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_{x,y}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,dy\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} y f_y(\mathbf{y})\,dy=E[y]$$

$$\Longrightarrow \boxed{E\left[E[\mathbf{y} \mid \mathbf{x}]\right]=E[y]}$$

متغیر های تصادفی برداری

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N$: N jointly dsitributed RVs on S

vector RV $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha \in S} \mathbf{x}(\alpha)=\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(\alpha) \\ \mathbf{x}_2(\alpha) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N(\alpha) \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \boxed{E[\mathbf{x}]=\begin{bmatrix} E[\mathbf{x}_1] \\ E[\mathbf{x}_2] \\ \vdots \\ E[\mathbf{x}_N] \end{bmatrix}}$$

$\boxed{Cov(\mathbf{x})_{N\times N}=E\left[\left(\mathbf{x}-E[\mathbf{x}]\right)\left(\mathbf{x}-E[\mathbf{x}]\right)^T\right] \quad \text{: Symmetric and P.D.}}$

متغیر های تصادفی برداری

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N$: N jointly dsitributed RVs on S

$$F_{\boldsymbol{x}}(x) = P\left\{\boldsymbol{x}_1 \le x_1, \boldsymbol{x}_2 \le x_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N \le x_N\right\}$$
$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \frac{\partial^N}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_N} F_{\boldsymbol{x}}(x)$$

سیگنال های گسسته در زمان تصادفی

یک سیگنال گسسته در زمان تصادفی را می توان به صورت یک رشته عددی نمایش داد:

$$\ldots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), \ldots \quad \rightarrow x(n) : n \in [-\infty, \infty]$$

که $x(n)$ ها متغیرهای تصادفی با توزیع مشترک هستند و با نمایش فوق یک سیگنال تصادفی دو طرفه شناخته می شوند.

مثالی از سیگنال تصادفی یک طرفه را به صورت زیر می توان ارائه نمود:

$$x(0), x(1), x(2), \ldots \quad \rightarrow \quad x(i) : i \ge 0$$

سیگنال های گسسته در زمان تصادفی

یک سیگنال گسسته در زمان تصادفی را می توان با استفاده از مشخصات تابع خود همبستگی (*Autocorrelation function*) آن معرفی نمود.

$$R_x(i,j) = E\left[x(i)x(j)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(i)x(j)\, f_{x(i)x(j)}\left(x(i),x(j)\right)\, dx(i)\, dx(j)$$

$i, j:$ integer value

توجه: خود همبستگی یک سیگنال، معیاری از میزان همبستگی ما بین نمونه های آن سیگنال است.

سیگنال های گسسته در زمان تصادفی

مثال:

$x(n+1) = ax(n)$

$a \neq 0$

$a \in \Re$

$R_x(i,j) = ?$

$$\left.\begin{aligned} x(i) &= a^i x(0) \\ x(j) &= a^j x(0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_x(i,j) = E\left[x(i)x(j)\right] = a^{i+j} E\left[x(0)^2\right]$$

$$\text{If} \quad \left.\begin{aligned} &a < 0 \\ &i + j : odd \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad R_x(i,j) < 0$$

So, the autocorrelation of RVs can be “negatively correlated”

سیگنال های گسسته در زمان تصادفی

مثال:

$x(n)$: random signal

$x(i), x(j)$: are independent for all i, j

$E[x(i)] = 0, \quad \forall i$

$$R_x(i,j) = E[x(i)x(j)] = \begin{cases} E\left[x(i)^2\right] & i = j \\ E[x(i)]E[x(j)] & i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R_x(i,j) = 0, \quad i \neq j$$

$\Rightarrow$ there is no correlation between the samples of signal

$\Rightarrow$ Random Signal is *Purely Random*

If $E[x(i)] = c_i \neq 0, \quad \forall i \quad \Rightarrow$ There is correlation between the samples.

سیگنال های Wide-Sense Stationary:

یک سیگنال تصادفی گسسته در زمان را WSS گویند اگر:

$$\begin{cases} (1)- \quad E[x(n)] = c \;\; \text{(a constant value)} \quad \forall n \in [-\infty, \infty] \\ (2)- \quad E[x(i)x(j)] = E[x(i+k)x(j+k)], \quad \forall i, j, k: \text{ integer} \end{cases}$$

$$(2) \quad \Rightarrow j = i: \;\; E\left[x(n)^2\right] = cte \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}[x(n)] = cte$$

در نتیجه شرط لازم اینکه یک سیگنال تصادفی WSS باشد این است که میانگین و واریانس $x(n)$ به ازای هر n ثابت باشد.

سیگنال های Wide-Sense Stationary:

نتیجه: یک سیگنال متشکل از متغیرهای تصادفی با توزیع گوسی یا توزیع یکنواخت WSS است اگر و فقط اگر میانگین و واریانس آن ثابت باشد.

این شرط در حالت کلی و برای سایر توزیع ها درست نیست.

خواص سیگنال های WSS:

$$\begin{cases} R_x(i,j) = E\left[x(i)x(j)\right] = E\left[x(0)x(j-i)\right] = R_x(0, j-i) \\ \rightarrow \ \text{If} \ k = j-i \ \Rightarrow \ R_x(k) = R_x(0,k) \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ R_x(k) = R_x(-k) \end{cases}$$

سیگنال های Wide-Sense Stationary:

مثال: (نویز سفید)

اگر سیگنالی متشکل از متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر باشد یک سیگنال WSS است اگر و فقط اگر

$$E\left[x(n)^2\right] = Var\left[x(n)\right] = \sigma^2 = cte$$

$$\Rightarrow \ R_x(k) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$where, \ \delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

توجه: سیگنالی با مشخصات فوق را نویز سفید می دانیم.

سیگنال های Wide-Sense Stationary:

مثال: سیگنال WSS

$$x(n) = \omega(n) + \omega(n-1)$$

$$where, \quad \omega(n): \text{ white noise}$$
$$E[\omega(n)] = 0$$
$$E[\omega(n)^2] = \sigma^2$$

$$\Rightarrow E[x(n)] = E[\omega(n)] + E[\omega(n-1)] = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow E[x(i)x(j)] = E[(\omega(i)+\omega(i-1))(\omega(j)+\omega(j-1))]$$
$$= E[\omega(i)\omega(j) + \omega(i)\omega(j-1) + \omega(i-1)\omega(j) + \omega(i-1)\omega(j-1)]$$
$$= E[\omega(i)\omega(j)] + E[\omega(i)\omega(j-1)] + E[\omega(i-1)\omega(j)] + E[\omega(i-1)\omega(j-1)]$$
$$\Rightarrow x \text{ is WSS}$$

سیگنال های Wide-Sense Stationary:

ادامه مثال: سیگنال WSS

$$x(n) = \omega(n) + \omega(n-1)$$

$$\Rightarrow E[x(i)x(j)] =$$
$$= E[\omega(i)\omega(j)] + E[\omega(i)\omega(j-1)] + E[\omega(i-1)\omega(j)] + E[\omega(i-1)\omega(j-1)]$$
$$= \sigma^2[2\delta(j-i) + \delta(j-i-1) + \delta(j-i+1)] = \sigma^2[2\delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k+1)]$$

نتیجه:متغیرهای تصادفی $x(i)$ و $x(j)$ همبسته هستند اگر

$$\begin{cases} j = i \\ j = i-1 \\ j = i+1 \end{cases}$$

تخمین تابع خود همبستگی (Autocorrelation)

اگر $\boldsymbol{x}(n)$ یک سیگنال WSS با میانگین صفر باشد. تخمین از تابع خود همبستگی $R_x(k)$ را با $\hat{R}_x(k)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می نمایند.

$x(1), x(2), \ldots, x(N):$ sample values of RV $\boldsymbol{x}(n)$

$$\boxed{\hat{R}_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k} x(i)x(i+k), \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1}$$

* $\hat{R}_x(k) = \hat{R}_x(-k), \qquad k = -1,-2,\ldots,-N+1$

تخمین تابع خود همبستگی (Autocorrelation)

به منظور ارزیابی وضعیت تخمین $\hat{R}_x(k)$ به صورت زیر عمل می شود:

$$\hat{R}_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k} x(i)x(i+k), \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$\Rightarrow E\left[\hat{R}_x(k)\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k} E\left[x(i)x(i+k)\right] = \frac{N-k}{N}R_x(k)$$

در نتیجه $\hat{R}_x(k)$ یک تخمین بایاس شده از $R_x(k)$ است.

* $E\left[\hat{R}_x(k)\right] \neq R_x(k)$

در بهترین حالت:

* $(\text{If} \quad N \to \infty) \quad \Rightarrow \left(\hat{R}_x(k) \cong R_x(k)\right)$

طیف توان (Power Spectrum):

اگر $x(n)$ یک سیگنال WSS با میانگین صفر باشد. تابع چگالی توان (power spectral density) و/یا (power spectrum) آن با تبدیل فوریه گسسته در زمان آن و به صورت زیر تعریف می گردد:

$$S_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k) e^{-jk\omega} \qquad (2.67)$$

این تابع توزیع فرکانسی توان سیگنال را بر حسب فرکانس بیان می کند.

$$properties: \begin{cases} S_x(e^{j\omega}) \geq 0 \\ S_x(e^{j\omega}) \in \Re \\ S_x(e^{j\omega}) \text{ is periodic fuction of } \omega \text{ with period } 2\pi \\ S_x(e^{j\omega}) \text{ is symmetric about } \omega = 0 \end{cases}$$

طیف توان (Power Spectrum):

مثال: نویز سفید WSS با میانگی صفر را در نظر بگیرید

$x(n)$: white noise

$$\rightarrow \quad R_x(k) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$\Rightarrow \quad S_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k) e^{-jk\omega} = \sigma^2 \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k) e^{-jk\omega} \right]$$

در نتیجه طیف توان سیگنال نویز سفید دارای دامنه ثابتی برابر σ^2 است که به آن توان نویز گویند.

طیف توان (Power Spectrum):

توجه: شرط همگرایی معادله (۲.۶۷) عبارت است از اینکه

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_x(k)| < \infty$$

و این شرط بر قرار خواهد بود اگر و فقط اگر $S_x(z)$ دارای هیچ قطبی روی دایره واحد نباشد.

$$S_x(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k) z^{-k} = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad (2.69)$$

دو سیگنال تصادفی

دو سیگنال تصادفی را **jointly distributed** گویند اگر هر دوی انها روی یک فضای احتمالی S تعریف شده باشند.

Cross Correlation function:

$$R_{x,y}(i,j) = E\left[x(i), y(j)\right] \quad i, j: \text{ integer values}$$

اگر $x(n)$ و $y(n)$ دو متغیر تصادفی **WSS** باشند آنگاه تابع $R_{x,y}(i,j)$ تابعی از تفاضل $j-i$ خواهد بود.

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

ابتدا یک سیستم غیر تصادفی (deterministic) با ورودی غیر تصادفی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n,i)u(i) \qquad (2.73)$$

که $h(n,i)$ پاسخ ضربه سیستم می باشد.

اگر این سیستم نامتغیر با زمان باشد رابطه (۲.۷۳) را میتوان به صورت زیر بازنویس نمود

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)u(i) \qquad (2.74)$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

اگر ورودی این سیستم یک ورودی تصادفی $\omega(n)$ باشد. سیگنال تصادفی خروجی عبارت است از:

$$\boldsymbol{y}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n,i)\boldsymbol{\omega}(i) \qquad (2.75)$$

که $h(n,i)$ پاسخ ضربه سیستم می باشد.

اگر این سیستم نامتغیر با زمان باشد رابطه (۲.۷۵) را میتوان به صورت زیر بازنویس نمود

$$\boldsymbol{y}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\boldsymbol{\omega}(i) \qquad (2.76)$$

با توجه به اینکه $\omega(n)$ یک متغیر تصادفی است و یک عدد نیست لذا از روابط فوق $y(n)$ قابل محاسبه نمی باشد.

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

اگر$\omega(n)$به عنوان نمونه های از $\omega(n)$ معرفی شود آنگاه روابط (۲.۷۵) و (۲.۷۶) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n,i)\omega(i) \qquad (2.77)$$

که $h(n,i)$ پاسخ ضربه سیستم می باشد.

اگر این سیستم نامتغیر با زمان باشد رابطه (۲.۷۷) را میتوان به صورت زیر بازنویس نمود

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\omega(i) \qquad (2.78)$$

خروجی این معادلات، $y(n)$ ، نمونه هایی از متغیر تصادفی $y(n)$ است.

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

اما نکته مهم محاسبه خصوصیات تصادفی متغیر تصادفی خروجی به صورت تابعی از خصوصیات متغیر تصادفی $\omega(n)$ است.

اما در حالت کلی این امکان وجود ندارد، ولیکن به صورت یک استثنا در صورتی که ورودی یک متغیر تصادفی گوسین باشد متغیر تصادفی خروجی نیز یک متغیر تصادفی گوسین خواهد بود که میانگین و واریانس آن قابل محاسبه است.

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

محاسبه تابع خود همبستگی خروجی:

به منظور محاسبه تابع خود همبستگی ابتدا WSS بودن خروجی به ازای ورودی تصادفی WSS اثبات می گردد.

در اینجا سیستم نامتغیر با زمان و پایدار BIBO فرض می شود.

$$(1)\quad y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\omega(i) \rightarrow E\left[y(n)\right]=E\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\omega(i)\right]$$

$$\rightarrow E\left[y(n)\right]=\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)E\left[\omega(i)\right]\right)$$

$$\xrightarrow{h \text{ is BIBO stable}} E\left[y(n)\right]=A\eta=\text{constant}$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

$$(2)\quad E\left[y(i)y(j)\right]=E\left[\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} h(i-r)\omega(r)\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(j-l)\omega(l)\right)\right]$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(i-r)h(j-l)E\left[\omega(r)\omega(l)\right]$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(i-r)h(j-l)E\left[\omega(\underbrace{r+k}_{\bar{r}})\omega(\underbrace{l+k}_{\bar{l}})\right]$$

$$=\sum_{\bar{r}=-\infty}^{\infty}\sum_{\bar{l}=-\infty}^{\infty} h(i-\bar{r}+k)h(j-\bar{l}+k)E\left[\omega(\bar{r})\omega(\bar{l})\right]$$

$$=E\left[\left(\sum_{\bar{r}=-\infty}^{\infty} h(i-\bar{r}+k)\omega(\bar{r})\right)\left(\sum_{\bar{l}=-\infty}^{\infty} h(j-\bar{r}+k)\omega(\bar{l})\right)\right]=E\left[y(i+k)y(j+k)\right]$$

❈ **در نتیجه هر دو شرط WSS بودن سیگنال خروجی برآورده گشته است.**

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

محاسبه تابع خود همبستگی

$$R_y(k) = E\left[y(n)y(n+k)\right] = E\left[y(0)y(k)\right] = E\left[\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} h(-r)\omega(r)\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)\omega(l)\right)\right]$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-r)h(k-l)E\left[\omega(r)\omega(l)\right]$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-r)h(k-l)\underbrace{E\left[\omega(0)\omega(l-r)\right]}_{R_\omega(l-r)} \qquad (2.80)$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-r)h(k-l)R_\omega(l-r) = h(k)*h(-k)*R_\omega(k) \qquad (2.81)$$

که * نشان دهنده اپراتور کانولوشن بوده و این رابطه توصیف کننده ارتباط ورودی-خروجی یک سیستم با ورودی تصادفی است.

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

محاسبات انجام شده در خصوص محاسبه تابع خود همبستگی خروجی برای یک سیستم نامتغیر با زمان و پایدار صورت گرفت. لذا لازم است به نکات زیر نیز توجه داشت:

$$1-If \left\{\begin{matrix}\omega \text{ is not WSS} \\ h \text{ is T.I.}\end{matrix}\right\} \Rightarrow y \text{ is not WSS}$$

$$2-If \left\{\begin{matrix}\omega \text{ is WSS} \\ h \text{ is T.V.}\end{matrix}\right\} \nRightarrow y \text{ is or is not WSS}$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

محاسبه تابع Cross Correlation بین ورودی-خروجی:

$$R_{\omega y}(k) = E[\omega(n)y(n+k)] = E[\omega(0)y(k)] = E\left[\omega(0)\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(k-i)\omega(i)\right)\right]$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(k-i)E[\omega(0)\omega(i)]$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(k-i)R_{\omega}(i) = h(k) * R_{\omega}(k) \qquad (2.86)$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

مثال: سیستم علی نا متغیر با زمانی را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{cases} h(n) = a^n, \ n > 0 \\ h(n) = 0, \quad n < 0 \\ |a| < 1 \end{cases}$$

$$E[y(n)] = \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\right) E[\omega(i)] = \frac{1}{1-a} E[\omega(n)]$$

$$(2.81) \rightarrow R_y(k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a^{k-r-l} R_{\omega}(l-r)$$

اگر فرض شود که ورودی نویز سفید با میانگین صفر و واریانس σ^2 است آنگاه:

$$R_{\omega}(k) = \sigma^2 \delta(k)$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

ادامه مثال:

در نتیجه

$$(2.81) \rightarrow R_y(k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a^{k-r-l} R_\omega(l-r) =$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{0} a^{k-2r} \sigma^2 = \sigma^2 a^k \sum_{r=0}^{\infty} a^{2r} = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^k, \quad \text{for } k \geq 0$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

چگالی طیفی خروجی:

برای سیستم LTI مفروض در اسلایدهای قبل تابع چگالی طیفی به صورت زیر خواهد بود. با استفاده از تبدیل فوریه گسسته در زمان:

$$(2.81) \rightarrow S_y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) S_\omega(e^{j\omega})$$

$$\rightarrow S_y(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 S_\omega(e^{j\omega}) \qquad (2.88)$$

اگر ورودی نویز سفید با واریانس σ^2 باشد، آنگاه:

$$\boxed{S_y(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 \sigma^2}$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

جمع بندی:

$$S_y(z) = Z\left[R_y(k)\right]$$
$$S_\omega(z) = Z\left[R_\omega(k)\right]$$

$$\boxed{(2.88) \xrightarrow{Z \text{ trans.}} S_y(z) = H(z)H(z^{-1})S_\omega(z) \qquad (2.89)}$$

$$S_{\omega y}(z) = Z\left[R_{\omega y}(k)\right]$$

$$\boxed{(2.86) \xrightarrow{Z \text{ trans.}} S_{\omega y}(z) = H(z)S_\omega(z) \qquad (2.90)}$$

ارتباط PSD با تبدیل z یک طرفه و دو طرفه

$$S_{XX}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m} = \sum_{m=-\infty}^{-1} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m} + \sum_{m=0}^{\infty} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} R_{XX}[-k]e^{j\Omega k} + \sum_{m=0}^{\infty} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} R_{XX}[-k]e^{j\Omega k} + \sum_{m=1}^{\infty} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m} + R_{XX}[0]$$

$$\begin{aligned} r_{xx}[0] &\geq |r_{xx}[k]| \\ r_{xx}[-k] &= r_{xx}[k] \\ r_{xy}[-k] &= r_{yx}[k]. \end{aligned}$$

توصیف سیستم به صورت معادله تفاضلی

یکی از شکل های مهم توصیف ارتباط ورودی-خروجی توصیف به صورت معادله تفاضلی است.

$$y(n)=\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)+\sum_{j=0}^{M}b_j\omega(n-j) \qquad (2.91)$$

که تابع تبدیل متناظر با آن در حوزه $\mathbf{Z}$ عبارت است از:

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1-a_1z^{-1}-\cdots-a_Nz^{-N}}$$

توصیف سیستم به صورت معادله تفاضلی

مثال (محاسبه میانگین):

$$y(n)=ay(n-1)+\omega(n)$$

$$\rightarrow H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\rightarrow\begin{cases}h(n)=?=a^n, & n\ge 0\\ h(n)=?=0, & n<0\end{cases}$$

به منظور مقایسه نتایج با محاسه میانگین سیگنال خروجی آغاز خواهیم کرد:

$$E\left[y(n)\right]=aE\left[y(n-1)\right]+E\left[\omega(n)\right]=aE\left[y(n-1)\right]+\eta$$

به شرط $|a|<1$:

$$E\left[y(n)\right]=\frac{1}{1-a}\eta$$

توصیف سیستم به صورت معادله تفاضلی

مثال: (محاسبه تابع خود همبستگی خروجی)

$$y(n) = ay(n-1) + \omega(n)$$

$$\begin{aligned} R_y(k) &= E\left[y(n)y(n+k)\right] \\ &= E\left[ay(n)y(n+k-1) + y(n)\omega(n+k)\right] \\ &= aE\left[y(n)y(n+k-1)\right] + E\left[y(n)\omega(n+k)\right] \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $y(n)$ هیچ وابستگی به $\omega(n+j)$ برای $j \geq 1$ ندارد :

$$E\left[y(n)\omega(n+k)\right] = E\left[y(n)\right]E\left[\omega(n+k)\right] = 0$$

توصیف سیستم به صورت معادله تفاضلی

ادامه مثال: (محاسبه تابع خود همبستگی خروجی)

$$R_y(k) = aE\left[y(n)y(n+k-1)\right] = aR_y(k-1)$$

$$\Rightarrow R_y(k) = a^k R_y(0)$$

از طرفی:

$$R_y(0) = E\left[y^2(n)\right] = E\left[\left(ay(n-1) + \omega(n)\right)^2\right] = a^2 R_y(0) + R_\omega(0)$$

$$\Rightarrow R_y(0) = \frac{1}{1-a^2} R_\omega(0)$$

$$\boxed{\Rightarrow R_y(k) = \frac{a^k}{1-a^2} R_\omega(0)}$$

توصیف سیستم با استفاده از معادلات حالت

از دیگر شکل های مهم توصیف توصیف سیستم، استفاده از معادلات حالت است.

$$x(n+1)=\Phi_{N\times N}x(n)+\Gamma_{N\times m}\omega(n)$$
$$y(n)=C_{p\times N}x(n)$$

این سیستم ها معمولا با نحوه انتشار میانگین و کوواریانس متغیرهای حالت و خروجی مشخص می شوند. لذا:

$$E\left[x(n+1)\right]=\Phi_{N\times N}E\left[x(n)\right]+\Gamma_{N\times m}E\left[\omega(n)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Rightarrow E\left[x(n)\right]=\Phi^{n}E\left[x(0)\right]+\sum_{i=0}^{n-1}\Phi^{n-i-1}\Gamma_{N\times m}E\left[\omega(n)\right]\\&\Rightarrow E\left[y(n)\right]=C\Phi^{n}E\left[x(0)\right]+\sum_{i=0}^{n-1}C\Phi^{n-i-1}\Gamma_{N\times m}E\left[\omega(n)\right]\end{aligned}}$$

توصیف سیستم با استفاده از معادلات حالت

که اگر $E\left[\omega(n)\right]=0$ باشد:

$$\boxed{\begin{aligned}&\Rightarrow E\left[x(n)\right]=\Phi^{n}E\left[x(0)\right]=\Phi^{n}x(0)\\&\Rightarrow E\left[y(n)\right]=C\Phi^{n}E\left[x(0)\right]=C\Phi^{n}x(0)\end{aligned}}$$

حال به منظور مشخص نمودن نحوه انتشار کوواریانس:

$$\begin{aligned}P(n+1)&=Cov\left[x(n+1)\right]=Cov\left[\Phi x(n)+\Gamma\omega(n)\right]\\&=Cov\left[\Phi x(n)\right]+Cov\left[\Gamma\omega(n)\right]\\&=\Phi Cov\left[x(n)\right]\Phi^{T}+\Gamma Cov\left[\omega(n)\right]\Gamma^{T}\\&=\Phi P(n)\Phi^{T}+\Gamma Cov\left[\omega(n)\right]\Gamma^{T}\end{aligned}$$

توصیف سیستم با استفاده از معادلات حالت

در نتیجه نحوه انتشار کوواریانس حالت ها عبارت است از:

$$P(n) = \Phi^n P(0) \left(\Phi^T\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi^i \Gamma Cov\left[\omega(n)\right] \Gamma^T \left(\Phi^T\right)^i, \qquad \text{for } n = 1, 2, \ldots \tag{2.106}$$

و همچنین نحوه انتشار کوواریانس خروجی ها عبارت است از:

$$Cov\left[y(n)\right] = C\Phi^n P(0) \left(\Phi^T\right)^n C^T + \sum_{i=0}^{n-1} C\Phi^i \Gamma Cov\left[\omega(n)\right] \Gamma^T \left(\Phi^T\right)^i C^T, \qquad \text{for } n = 1, 2, \ldots \tag{2.107}$$

توصیف سیستم با استفاده از معادلات حالت

و اگر خروجی اندازه گیری به صورت زیر تعریف شود:

$$z(n) = Cx(n) + v(n)$$

آنگاه:

$$Cov\left[z(n)\right] = C\Phi^n P(0) \left(\Phi^T\right)^n C^T + \sum_{i=0}^{n-1} C\Phi^i \Gamma Cov\left[\omega(n)\right] \Gamma^T \left(\Phi^T\right)^i C^T + Cov\left[v(n)\right] \tag{2.108}$$