باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 4

فیلتر وینر

مقدمه

- فیلتر وینر یک فیلتر LTI است که در کنترل و پردازش سیگنال دارای کاربرد فراوان است. این فیلتر یک تخمین LMMSE از سیگنال ارائه می کند.

- فیلتر وینر دارای سه ساختار کلی و مهم است که عبارتند از:

  – **Finite Impulse Response (Wiener-Hopf Equation)**
  – **Infinite Impulse Response**
  – **Causal Wiener Filter**

فیلترهای LTI-MMSE :

- با فرض اینکه تخمینگر مد نظر ما یک تخمینگر LTI است(در این فصل به دنبال یافتن چنین تخمینگری هستیم)، لذا می توان این تخمینگر را با استفاده از توصیف کانولوشن به صورت زیر ارائه نمود:

$$\hat{s}(n) = h(n) * z(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)z(i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)z(n-i) \qquad (4.2)$$

که در آن $h(n)$ عبارت است از پاسخ ضربه تخمینگر که به آن فیلتر نیز می گویند.

- با فرض LTI بودن تخمینگر، این امکان بوجود می آید که از ابزارهای حوزه فرکانس (مانند تبدیل z و تبدیل فوریه) بتوان استفاده نمود.

فیلترهای LTI-MMSE :

- اگر H به صورت زیر تعریف شود

$$H = \{n : h(n) \neq 0\}$$

آنگاه رابطه (۴.۲) را به صورت زیر می توان بازنویسی نمود:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i \in H} h(i)z(n-i)$$

که با درنظر گرفتن $s(n)$ و $z(n)$ به صورت سیگنال های تصادفی با توزیع مشترک متغیر تصادفی $\hat{s}(n)$ به صورت زیر قابل بیان خواهد بود.

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \sum_{i \in H} h(i)\mathbf{z}(n-i) \qquad (4.4)$$

فیلترهای LTI-MMSE :

- هدف طراحی در اینجا تعیین پاسخ ضربه تخمینگر است، $h(n)$ بطوریکه MSE را می نیمم نماید.

$$MSE = E\left[\left(s(n)-\hat{s}(n)\right)^2\right]$$

لذا:

$$MSE = E\left[\left(s(n)-\sum_{i\in H} h(i)\mathbf{z}(n-i)\right)\left(s(n)-\sum_{j\in H} h(j)\mathbf{z}(n-j)\right)\right]$$

$$= E\left[s^2(n)\right]-2\sum_{i\in H} h(i)E\left[s(n)z(n-i)\right]+\sum_{i\in H}\sum_{j\in H} h(i)h(j)E\left[z(n-i)z(n-j)\right] \quad (4.6)$$

فیلترهای LTI-MMSE :

- با مشتق گیری از MSE نسبت به $h(i)$ و با فرض $h(i)\neq 0$ خواهیم داشت؟

$$\frac{\partial MSE}{\partial h(i)} = -2E\left[s(n)z(n-i)\right]+2\sum_{j\in H} h(j)E\left[z(n-i)z(n-j)\right]=0$$

درنتیجه:

$$\sum_{j\in H} h(j)E\left[z(n-i)z(n-j)\right]=E\left[s(n)z(n-i)\right] \qquad (4.7)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{j\in H} h(j)\underbrace{R_z(j-i)}_{Auto-Corr.} = \underbrace{R_{sz}(i)}_{Cross-Corr.}\ , \qquad i\in H \qquad (4.8)}$$

فیلترهای LTI-MMSE :

با توجه به اینکه معادله (۴.۸) مبنای ارائه فیلتر وینر است که منجر به یک فیلتر LTI و MMSE می گردد لذا، خواص مطرح شده در خصوص تخمینگر های LMMSE را خواهد داشت. در این خصوص نکات زیر قابل طرح هستند:

- فقط گشتاورهای مرتبه دوم جهت تعیین فیلتر LTI بهینه لازم هستند.
- معادله (۴.۶) یک معادله به فرم **quadratic** نسبت به $h(n)$ است که این امر نتایج زیر را به همراه خواهد داشت:
  - MSE دارای یک می نیمم منحصر به فرد است و در نتیجه فیلتر LTI و بهینه $h(n)$ یکتا است.
  - مقدار می نیمم با استفاده از $\frac{\partial MSE}{\partial h(i)}=0$ قابل محاسبه است.

اصل تعامد برای فیلترهای LTI-MMSE :

معادله (۴.۷) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\sum_{j\in H} h(j)E\left[z(n-i)z(n-j)\right]=E\left[s(n)z(n-i)\right] \qquad (4.7)$$

$$\Rightarrow E\left[z(n-i)\left(s(n)-\underbrace{\sum_{j\in H} h(j)z(n-j)}_{\hat{s}(n)}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow E\left[z(n-i)\left(s(n)-\hat{s}(n)\right)\right]=E\left[z(n-i)\tilde{s}(n)\right]=0 \qquad (4.9)$$

- که این معادله نشانگر ارضا شدن اصل تعامد است برای تخمینگر های LTI-MMSE.
- با تعریف $Z=\{z(n-i), i\in H\}$ رابطه (۴.۹) نشان می دهد که خطای تخمین بر مشاهدات مجموعه Z عمود است.

اصل تعامد برای فیلترهای LTI-MMSE :

قضیه ۴.۱: اگر $\hat{s}(n)=h(n)*z(n)$ یک تخمین بهینه LTI باشد که $h(n)$ روی H تعریف شده است و با فرض اینکه $g(n)$ پاسخ ضربه یک فیلتر LTI است که روی زیر مجموعه ای از H تعریف می شود. آنگاه خطای تخمین بر خروجی $g(n)*z(n)$ عمود خواهد بود.

$$E\left[\left(s(n)-\hat{s}(n)\right)g(n)*z(n)\right]=0$$

قضیه ۴.۲: اگر $h(n)$ پاسخ ضربه یک فیلتر LTI بر روی مجموعه H باشد و همچنین اگر G مجموعه ای از تمامی فیلترهای LTI بر روی H باشد. آنگاه در میان تمامی فیلترهای G ، $\hat{s}(n)=h(n)*z(n)$ یک تخمین MMSE است اگر و فقط اگر خطای تخمین بر $g(n)*z(n)$ عمود باشد که $g(n)$ پاسخ ضربه هر یک از فیلترهای تعریف شده در G است.

$$E\left[\left(s(n)-h(n)*z(n)\right)g(n)*z(n)\right]=0$$

اصل تعامد برای فیلترهای LTI-MMSE :

با توجه به قضیه (۴.۲)

$$g(n)=\delta(n-i) \quad\Rightarrow\quad g(n)*z(n)=z(n-i)$$

$$\boxed{\hat{s}(n)=h(n)*z(n) \text{ is } \mathit{MMSE} \text{ estimation } \Leftrightarrow E\left[\left(s(n)-h(n)*z(n)\right)z(n-i)\right]=0}$$

The FIR Wiener filter

با توجه به آنچه تا کنون ارائه شد مساله یافتن تخمینگر LTI-MMSE آماده ارائه است.

برای تمامی فیلترهای وینر که در ادامه ارائه می گردد فرض بر این است که $s(n)$ ، $v(n)$ و $z(n)$ متغیرهای تصادفی *JWSS* با میانگین صفر هستند. لذا:

$$E\left[z(i)z(j)\right]=R_z(j-i)=R_z(k)$$
$$E\left[s(i)z(j)\right]=R_{sz}(j-i)=R_{sz}(k)$$

The FIR Wiener filter

استخراج معادلات فیلتر وینر:

- با فرض اینکه فیلتر مد نظر دارای پاسخ ضربه ای به صورت $h(n)$ روی مجموعه $H=\{0,1,2,\ldots,N-1\}$ باشد. آنگاه پاسخ ضربه در یک بازه زمانی محدود موجود است که به این نوع فیلتر، فیلتر FIR گویند.

- در ارائه یک فیلتر FIR و *causal*، در بازه زمانی N، به N، طول فیلتر گفته می شود و *N-1* را مرتبه فیلتر گویند.

- به منظور استخراج معادلات فیلتر وینر از معادله Wiener-Hopf استفاده می شود و به دنبال محاسبه تکرار جزئیات نیستیم.

The FIR Wiener filter

بنابراین

$$\hat{s}(n)=\sum_{i=0}^{N-1}h(i)z(n-i) \qquad (4.13)$$

$$MSE=E\left[\left(s(n)-\hat{s}(n)\right)^2\right] \qquad (4.14)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1}h(j)R_z(j-i)=R_{sz}(i), \qquad 0\le i\le N-1 \qquad (4.15)$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} R_z(0) & R_z(1) & \cdots & R_z(N-1) \\ R_z(1) & R_z(0) & \cdots & R_z(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_z(N-1) & R_z(N-2) & \cdots & R_z(0) \end{bmatrix}}_{R_z} \underbrace{\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{bmatrix}}_{h} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{sz}(0) \\ R_{sz}(1) \\ \vdots \\ R_{sz}(N-1) \end{bmatrix}}_{r_{sz}} \qquad (4.16)$$

توجه داشته باشید که در نوشتن معادله (۴.۱۶) از $R_z(k)=R_z(-k)$ استفاده شده است.

The FIR Wiener filter

در نتیجه

$$(4.16) \quad \to \quad R_z h = r_{sz} \qquad (4.17)$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad h=R_z^{-1}r_{sz} \qquad (4.18)}$$

$$\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_z(0) & R_z(1) & \cdots & R_z(N-1) \\ R_z(1) & R_z(0) & \cdots & R_z(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_z(N-1) & R_z(N-2) & \cdots & R_z(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{sz}(0) \\ R_{sz}(1) \\ \vdots \\ R_{sz}(N-1) \end{bmatrix} \qquad (4.19)$$

توجه: ماتریس R_z دارای یک فرم خاص است که با عنوان ماتریس Toeplitz شناخته می شود لذا جهت محاسبه رابطه (۴.۱۹) از روش برگشتی به نام Levinson-Durbin می توان استفاده نمود.

The FIR Wiener filter

محاسبه MSE:

$$MSE = E\left[\tilde{s}(n)\left(s(n)-\sum_{i=0}^{N-1}h(i)z(n-i)\right)\right] = E\left[\tilde{s}(n)s(n)\right]-\sum_{i=0}^{N-1}h(i)\,\cancel{E\left[\tilde{s}(n)z(n-i)\right]}$$

$$= E\left[\tilde{s}(n)s(n)\right] = E\left[s^2(n)\right]-\sum_{i=0}^{N-1}h(i)E\left[s(n)z(n-i)\right]$$

$$= R_s(0)-\sum_{i=0}^{N-1}h(i)R_{sz}(i) \qquad (4.21)$$

$$MSE_{filter} = R_s(0)-h^T r_{sz} \qquad (4.22)$$

The FIR Wiener filter

اگر $\hat{s}(n)=z(n)$ در نظر گرفته می شد آنگاه:

$$MSE_{no-filter} = E\left[\left(s(n)-z(n)\right)^2\right] = R_s(0)-2R_{s,z}(0)+R_z(0) \qquad (2.23)$$

بر این اساس به منظور ارزیابی تاثیر فیلتر وینر شاخصی به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\text{reduction in } MSE = 10\log_{10}\left(\frac{MSE_{no-filter}}{MSE_{filter}}\right)\ \text{dB} \qquad (2.24)$$

توجه: از معیار MSE به منظور ارزیابی عملکرد فیلتر می توان سود جست. توجه داشته باشید که بالا بردن مرتبه فیلتر می تواند موجب کاهش MSE گردد ولیکن در فیلتر FIR این امر تاثیر چندانی ممکن است نداشته باشد.

The FIR Wiener filter

اندازه گیری با حضور نویز جمع شونده:

اگر مشخص باشد که نویز به صورت جمع شونده قابل مدل شدن است آنگاه امکان جایگزینی $R_z(k)$ و $R_{sz}(k)$ با معادلات ساده تر وجود خواهد داشت:

$z(n) = s(n) + v(n)$

$s(n), v(n):$ uncorrelated, zero mean & JWSS

در نتیجه

$$\begin{aligned} R_z(k) &= E\left[z(n)z(n-k)\right] = E\left[\left(s(n)+v(n)\right)\left(s(n-k)+v(n-k)\right)\right] \\ &= E\left[s(n)s(n-k)\right] + E\left[v(n)v(n-k)\right] = R_s(k) + R_v(k) \qquad (4.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{sz}(k) &= E\left[s(n)z(n-k)\right] = E\left[s(n)\left(s(n-k)+v(n-k)\right)\right] \\ &= E\left[s(n)s(n-k)\right] + E\left[s(n)v(n-k)\right] = R_s(k) \qquad (4.26) \end{aligned}$$

The FIR Wiener filter

لذا ضرایب فیلتر با حضور نویز جمع شونده عبارتند از:

$$h = \left(R_s + R_v\right)^{-1} r_s$$

که

$$R_s = \begin{bmatrix} R_s(0) & R_s(1) & \cdots & R_s(N-1) \\ R_s(1) & R_s(0) & \cdots & R_s(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_s(N-1) & R_s(N-2) & \cdots & R_s(0) \end{bmatrix} \qquad R_v = \begin{bmatrix} R_v(0) & R_v(1) & \cdots & R_v(N-1) \\ R_v(1) & R_v(0) & \cdots & R_v(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_v(N-1) & R_v(N-2) & \cdots & R_v(0) \end{bmatrix}$$

$$r_s = \begin{bmatrix} R_s(0) \\ R_s(1) \\ \vdots \\ R_s(N-1) \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{bmatrix}$$

The FIR Wiener filter

مثال (۴.۲):

signal $s(n)$, $R_s(k) = 0.95^{|k|}$

Additive noise $v(n)$, $\sigma_v^2 = 2 \rightarrow R_v(k) = 2\delta(k)$

$s(n), v(n)$: uncorrelated, zero mean & JWSS

یک فیلتر بهینه خطی از مرتبه ۲ ارائه نمایید.

$$N-1=2 \Rightarrow \boxed{N=3}$$

$$\begin{cases} R_z(k) = R_s(k) + R_v(k) = 0.95^{|k|} + 2\delta(k) \\ R_{sz}(k) = R_s(k) = 0.95^{|k|} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} R_z(0) & R_z(1) & R_z(2) \\ R_z(1) & R_z(0) & R_z(1) \\ R_z(2) & R_z(1) & R_z(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sz}(0) \\ R_{sz}(1) \\ R_{sz}(2) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0.95 & 0.9025 \\ 0.95 & 3 & 0.95 \\ 0.9025 & 0.95 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.95 \\ 0.9025 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad h = [0.2203 \quad 0.1919 \quad 0.1738]$$

The FIR Wiener filter

ادامه مثال (۴.۲):

$$MSE_{filter} = R_s(0) - h^T r_{sz} = 0.4406$$

از طرفی

$$MSE_{no-filter} = 2$$

$$\Rightarrow \qquad \text{reduction in } MSE = 6.56 \ ^{(dB)}$$

The FIR Wiener filter

پیش بینی سیگنال با استفاده از فیلتر وینر FIR :

یکی از اجزا تخمین، پیش بینی سیگنال است که تخمین با یک گام پیش بینی را بر اساس فیلتر وینر FIR می توان به صورت زیر فرموله نمود:

$$\hat{s}(n+1) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) z(n-i) \qquad (4.31)$$

$$MSE = E\left[\left(s(n+1) - \hat{s}(n+1)\right)^2\right] \qquad (4.32)$$

مقایسه معادلات فوق با معادلات (۴.۱۳) و (۴.۱۴) نشان می دهد که فقط شاخص زمانی از n به *n+1* تغییر کرده است. لذا می توان معادلات حاصل جهت محاسبه پارامترهای *h* را بطور مشابه بازنویسی نمود.

The FIR Wiener filter

ضرایب *h* در پیش بینی سیگنال با استفاده از فیلتر وینر FIR :

$$\begin{bmatrix} R_z(0) & R_z(1) & \cdots & R_z(N-1) \\ R_z(1) & R_z(0) & \cdots & R_z(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_z(N-1) & R_z(N-2) & \cdots & R_z(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sz}(1) \\ R_{sz}(2) \\ \vdots \\ R_{sz}(N) \end{bmatrix} \qquad (4.34)$$

در نتیجه *MSE* عبارت خواهد بود از:

$$MSE = R_s(0) - \sum_{i=0}^{N-1} h(i) R_{sz}(i+1) \qquad (4.35)$$

The FIR Wiener filter

مثال (۴.۳): پیش بینی در حضور نویز رزونانسی

هدف طراحی یک فیلتر مرتبه ۳ با یک مرحله پیش بینی است. در حالیکه سیگنال آکوستیک s در یک محیط بسته در حال اندازه گیری است.

The signal is generated via $\boxed{s(n)=0.4s(n-1)+\omega(n)}$

$\omega(n)$: white noise with *zero mean* and *unit variance*

با توجه به رزونانس در محیط بسته نویز اندازه گیری به صورت زیر قابل مدلسازی است. در این مدل x مدلی از رزونانس ناشی از محیط بسته است، d عبارت است از نویز سفید با میانگین صفر و واریانس ۱ که نویز میکروفن را مدل می نماید.

$$\begin{cases} x(n)=0.5x(n-1)+0.3s(n-1) \\ v(n)=x(n)+d(n) \end{cases}$$

$$z(n)=s(n)+v(n)$$

The FIR Wiener filter

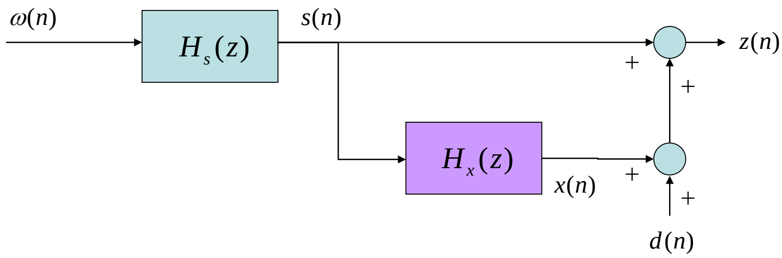
ادامه مثال (۴.۳):

$d(n),\omega(n)$ are uncorrelated

all processes are JWSS

در حالیکه s و v دارای *correlation* هستند به دلیل وجود رزونانس.

با توجه به روابط فوق کل فرایند را می توان به صورت زیر مدل نمود:



The FIR Wiener filter

ادامه مثال (۴.۳):

با توجه به رابطه (۴.۳۴) به منظور محاسبه پارامترهای h لازم است $R_z(k)$ و $R_{sz}(k)$ محاسبه گردد.

$$R_z(k) = E\left[z(n)z(n-k)\right] = E\left[\left(s(n)+v(n)\right)\left(s(n-k)+v(n-k)\right)\right]$$
$$= E\left[\left(s(n)+0.5x(n-1)+0.3s(n-1)+d(n)\right)\left(s(n-k)+0.5x(n-k-1)+0.3s(n-k-1)+d(n-k)\right)\right]$$
$$= R_s(k)+0.5R_{sx}(k+1)+0.3R_s(k+1)+0.5R_{xs}(k-1)+0.25R_x(k)+0.15R_{sx}(k)+0.3R_s(k-1)$$
$$+0.15R_{sx}(k)+0.09R_s(k)$$
$$= 0.3R_s(k+1)+1.09R_s(k)+0.3R_s(k-1)$$
$$+0.5R_{sx}(k+1)+0.15R_{sx}(k)+0.5R_{xs}(k-1)$$
$$+0.25R_x(k)+0.15R_{xs}(k)$$

The FIR Wiener filter

ارتباط PSD با تبدیل z یک طرفه و دو طرفه

$$S_{XX}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m} = \sum_{m=-\infty}^{-1} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m} + \sum_{m=0}^{\infty} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} R_{XX}[-k]e^{j\Omega k} + \sum_{m=0}^{\infty} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} R_{XX}[-k]e^{j\Omega k} + \sum_{m=1}^{\infty} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m} + R_{XX}[0]$$

$$\begin{aligned} r_{xx}[0] &\geq |r_{xx}[k]| \\ r_{xx}[-k] &= r_{xx}[k] \\ r_{xy}[-k] &= r_{yx}[k]. \end{aligned}$$

The FIR Wiener filter

ادامه مثال (۴.۳):

در نتیجه لازم است ترم های $R_s(k)$ ، $R_x(k)$ و $R_z(k)$ محاسبه گردند.

محاسبه $R_s(k)$:

$$\left.\begin{array}{l}(2.89)\rightarrow S_s(z)=H_s(z)H_s(z^{-1})S_\omega(z)\\ H_s(z)=\dfrac{1}{1-0.4z^{-1}}\\ S_\omega(z)=1\end{array}\right\}\Rightarrow S_s(z)=\frac{1}{1-0.4z^{-1}}\frac{1}{1-0.4z}=\frac{25}{21}\frac{z}{z-0.4}-\frac{25}{21}\frac{z}{z-2.5}$$

$$\rightarrow \boxed{R_s(k)=\frac{25}{21}(0.4)^{|k|}}$$

محاسبه $R_x(k)$:

$$\left.\begin{array}{l}(2.89)\rightarrow S_x(z)=H_x(z)H_x(z^{-1})S_s(z)\\ H_x(z)=\dfrac{0.3z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\end{array}\right\}\Rightarrow S_x(z)=\frac{0.3z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\frac{0.3z}{1-0.5z}\frac{1}{1-0.4z^{-1}}\frac{1}{1-0.4z}$$

$$\rightarrow \boxed{R_x(k)=\frac{1}{7}\left[\frac{25}{3}(0.5)^{|k|}-\frac{125}{21}(0.4)^{|k|}\right]}$$

The FIR Wiener filter

ادامه مثال (۴.۳):

محاسبه $R_{sx}(k)$:

$$\left.\begin{array}{l}(2.90)\rightarrow S_{sx}(z)=H_x(z^{-1})S_s(z)\\ H_x(z)=\dfrac{0.3z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\end{array}\right\}\Rightarrow S_{ss}(z)=\frac{0.3z}{1-0.5z}\frac{1}{1-0.4z^{-1}}\frac{1}{1-0.4z}$$

$$\rightarrow \boxed{R_{sx}(k)=\frac{5}{7}\left[\frac{25}{4}2^k.1(-k-1)-\frac{125}{84}\left[2(0.4)^{|k+1|}-(0.4)^{|k|}\right]\right]}$$

از طرفی $R_{xs}(k)=R_{sx}(-k)$ است. از طرفی:

$$R_{sz}(k)=E\left[s(n)z(n-k)\right]=E\left[s(n)\big(s(n-k)+0.5x(n-k-1)+0.3s(n-k-1)+d(n-k)\big)\right]$$
$$=0.3R_s(k+1)+R_s(k)+0.5R_{sx}(k+1)$$

لذا با توجه به محاسبات انجام گرفته در بالا مساله آماده محاسبه پارامترهای h است.

The FIR Wiener filter

ادامه مثال (۴.۳):

برای یک تخمینگر (پیش بینی کننده) مرتبه ۳:

$$\begin{bmatrix} 2.8172 & 1.2129 & 0.7567 & 0.4385 \\ 1.2129 & 2.8172 & 1.2129 & 0.7567 \\ 0.7567 & 1.2129 & 2.8172 & 1.2129 \\ 0.4385 & 0.7567 & 1.2129 & 2.8172 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5503 \\ 0.2201 \\ 0.0881 \\ 0.0352 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & h(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2010 & 0.0029 & -0.0191 & -0.0113 \end{bmatrix}$$

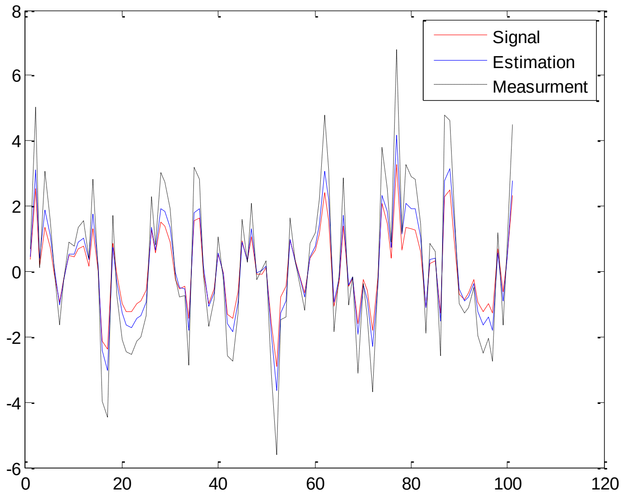
که مقدار MSE برای این فیلتر عبارت است از:

$$MSE = 1.0813$$

The FIR Wiener filter

ادامه مثال (۴.۳):

تخمین سیگنال در حالت فیلترینگ با فیلتر مرتبه ۳:



The FIR Wiener filter

مثال (۴.۴):pure prediction

با فرض اینکه هیچگونه نویزی در مشاهدات وجود ندارد، لذا:

$$R_z(k) = R_{sz}(k) = R_s(k) = 0.5\delta(k) + 0.9^{|k|}\cos(\frac{\pi k}{8})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1.5 & 0.8315 & 0.5728 \\ 0.8315 & 1.5 & 0.8315 \\ 0.5728 & 0.8315 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8315 \\ 0.5728 \\ 0.2790 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & h(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5045 & 0.1528 & -0.0914 \end{bmatrix}$$

پروژه شماره ۳

انجام شبیه سازی مثال ۴.۳:

۱- انجام شبیه سازی کامل مثال به صورت کاملا مشابه

۲- اضافه نمودن میانگین عددی غیر صفر به نویز (d) و بررسی نتایج

۳- حذف کامل نویز (d) و بررسی عملکرد فیلتر قبلی

۴- حذف کامل نویز (d) و طراحی فیلتر جدید و بررسی عملکرد آن

۵- طراحی فیلتر غیر پیش بین برای حذف نویز

۶- استفاده از اطلاعات نادرست برای نویز و بررسی عملکرد فیلتر طراحی شده در مر حله ۵

The Non-causal Wiener filter

اگر در طراحی فیلتر، پاسخ ضربه فیلتر $h(n)$ روی مجموعه نامحدود H تعریف شود، به آن فیلتر Infinite Impulse Response (IIR) گفته می شود.
مجموعه های نامحدود زیادی وجود دارند ولیکن در اینجا و با هدف معرفی فیلترهای **IIR**، مجموعه **H** برابر مجموعه اعداد صحیح در نظر گرفته می شود (**H=Z**).

- مشخصا چنین فیلتر عبارت خواهد بود از **Non-causal IIR Wiener filter** که معمولا با عنوان ***Non-causal Wiener filter*** شناخته می شود.
- مطمئنا چنین فیلتری کاربرد به هنگام (**online**) ندارد ولیکن در کاربردهای **off-line** که حجم مشاهدات زیادی وجود دارد بسیار قابل به کارگیری خواهد بود.

توجه: **Non-causal Wiener filter** بهترین تخمین ممکن با استفاده از یک فیلتر **LTI** را در اختیار می گذارد.

The Non-causal Wiener filter

استخراج معادلات :

با توجه به اینکه به دنبال ارائه یک تخمینگر **LTI** هستیم

$$\hat{s}(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)z(n-i)$$

لذا رابطه **Wiener-Hopf** عبارت خواهد بود از

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)R_z(j-i)=R_{sz}(i) \qquad i\in\mathbb{Z} \qquad (4.41)$$

رابطه (۴.۴۱) یک سیستم از بعد بی نهایت را توصیف می نماید لذا نمی توان آن را به صورت ماتریسی و مشابه فیلتر **FIR** حل نمود.

The Non-causal Wiener filter

استخراج معادلات :

ولیکن با توجه به فرض صفر بودن میانگین و **JWSS** بودن، امکان گرفتن تبدیل **Z** از این رابطه وجود دارد و در نتیجه

$$(4.41) \xrightarrow{z-trans.} S_{sz}(z) = S_z(z)H(z)$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{S_{sz}(z)}{S_z(z)} \qquad (4.42)$$

واضح است که اگر $S_z(z)$ دارای صفری روی دایره واحد یا خارج از آن باشد موجب ناپایداری $H(z)$ می گردد.

The Non-causal Wiener filter

محاسبه MSE:

مشابه فیلتر **FIR** و رابطه (۴.۲۱) میتوان نشان داد که **MSE** برای **Non-causal Wiener Filter** به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$MSE = R_s(0) - \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)R_{sz}(i) \qquad (4.43)$$

اگر امکان محاسبه $h(i)$ با استفاده از تبدیل **z** معکوس $H(z)$ وجود داشته باشد، MSE را میتوان از رابطه (۴.۴۳) استفاده نمود ولیکن در بسیاری از مواقع این محاسبه بسیار پیچیده می شود. لذا لازم است روش دیگری پیشنهاد گردد.

The Non-causal Wiener filter

ادامه محاسبه MSE:

با توجه به قضیه مانده ها می توان رابطه MSE را با استفاده از رابطه زیر نیز محاسبه نمود:

$$MSE = \begin{cases} \dfrac{1}{j2\pi}\oint_C \left[S_s(z) - H(z)S_{sz}(z^{-1})\right] z^{-1}dz & S_{sz}(z) \text{ rational} \\ \dfrac{1}{j2\pi}\oint_C \left[S_s(z) - H(z)S_{sz}^{*}(z)\right] z^{-1}dz & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (4.47)$$

توجه: این رابطه را می توان برای محاسبه MSE در هر نوع فیلتر وینری استفاده نمود.

The Non-causal Wiener filter

مثال: MSE در حضور نویز جمع شونده

$$(4.25) \rightarrow S_z(z) = S_S(z) + S_v(z)$$
$$(4.26) \rightarrow S_{sz}(z) = S_s(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{S_{sz}(z)}{S_z(z)}$$

$$\xrightarrow{(4.47)} MSE = \frac{1}{j2\pi}\oint_C \left[S_s(z) - \frac{S_{sz}(z)}{S_z(z)} S_{sz}(z^{-1})\right] z^{-1}dz = \frac{1}{j2\pi}\oint_C S_s(z)\left[1 - \frac{S_{sz}(z)}{S_z(z)}\right] z^{-1}dz$$
$$= \frac{1}{j2\pi}\oint_C S_s(z)\left[\frac{S_v(z)}{S_z(z)}\right] z^{-1}dz = \frac{1}{j2\pi}\oint_C S_v(z)H(z)z^{-1}dz$$

The Non-causal Wiener filter

مثال(۴.۵): مقایسه فیلتر وینر FIR و Non-Causal

مجددا مثال ۴.۲ را در نظر بگیرید، با توجه به محاسبات انجام گرفته:

$$R_z(k) = 0.95^{|k|} + 2\delta(k)$$
$$R_{sz}(z) = 0.95^{|k|}$$

در نتیجه با گرفتن تبدیل z:

$$S_z(z) = \frac{1-0.95^2}{(1-0.95z^{-1})(1-0.95z)} + 2 = 2.3955\frac{\left(1-0.7931z^{-1}\right)\left(1-0.7931z\right)}{(1-0.95z^{-1})(1-0.95z)}$$
$$S_{sz}(z) = \frac{1-0.95^2}{(1-0.95z^{-1})(1-0.95z)}$$

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

39

The Non-causal Wiener filter

ادامه مثال(۴.۵): مقایسه فیلتر وینر FIR و Non-Causal

$$R_z(k) = 0.95^{|k|} + 2\delta(k)$$
$$R_{sz}(z) = 0.95^{|k|}$$

در نتیجه با گرفتن تبدیل z:

$$H(z) = \frac{S_{sz}(z)}{S_z(z)} = \frac{0.0975}{2.3955\left(1-0.7931z^{-1}\right)\left(1-0.7931z\right)}$$
$$= 0.1097\frac{1-\left(0.7931\right)^2}{\left(1-0.7931z^{-1}\right)\left(1-0.7931z\right)} \rightarrow h(n) = 0.1097\left(0.7931\right)^{|n|}$$

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

40

The Non-causal Wiener filter

ادامه مثال(۴.۵): مقایسه فیلتر وینر FIR و Non-Causal

$$MSE=(0.95)^0-\sum_{n=-\infty}^{\infty}0.1097(0.7931)^{|n|}(0.95)^{|n|}$$

$$=1-0.1097\left[\sum_{n=0}^{\infty}(0.7931)^n(0.95)^n+\sum_{n=-1}^{-\infty}(0.7931)^{-n}(0.95)^{-n}\right]$$

$$=1-0.1097\left[2\sum_{n=0}^{\infty}(0.7931)^n(0.95)^n-1\right]$$

$$=0.2195$$

لذا:

$$\text{reduction in MSE}=10\log\left(\frac{MSE_{no-filter}}{MSE_{NC\_wiener}}\right)=10\log(\frac{2}{0.2195})=9.5960^{dB}$$

The Non-causal Wiener filter

ادامه مثال(۴.۵): مقایسه فیلتر وینر FIR و Non-Causal

همچنین:

$$\text{reduction in MSE}=10\log\left(\frac{MSE_{FIR\_wiener-filter}}{MSE_{NC\_wiener}}\right)=10\log(\frac{0.4405}{0.2195})=3.0251^{dB}$$

توجه: لازم است انتظار داشته باشیم که Non-causal Wiener Filter بهترین تخمین ممکن را در میان فیلترهای LTI در اختیار گذارد.

The Causal Wiener filter

نبود اطلاعات کافی در مسائل عملی موجب می گردد استفاده از تخمینگر **Non-causal Wiener Filter** غیرممکن باشد، لذا فرمولاسیون جدیدی برای حل یافتن یک فیلتر **LTI** و **Causal** مورد نیاز است. بنابراین:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) z(n-i) \qquad (4.50)$$

در نتیجه معادله **Wiener-Hopf** به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(j) R_z(j-i) = R_{sz}(i) \qquad i \in \mathbb{N} \qquad (4.51)$$

که بر خلاف معادله (۴.۴۱) از آن نمی توان به صورت یک کانولوشن ساده یاد کرد و در نتیجه امکان استفاده از تکنیک طراحی تخمینگر غیرعلی وجود ندارد.

The Causal Wiener filter

پیش از اینکه تکنیکی برای طراحی فیلتر علی پیشنهاد گردد لازم است دو مطلب مهم ارائه گردد که عبارتند از:

- **Spectral factorization theorem**
- **Causal-part Extraction: The plus operation**

The Causal Wiener filter

Spectral factorization theorem:

اگر $x(n)$ یک فرایند تصادفی، با مقدار حقیقی، با میانگین صفر و **WSS** با تابع چگالی طیفی آن یک تابع گویا به صورت $S_x(z)$ باشد. آنگاه این تابع را به صورت زیر می توان تجزیه نمود:

$$S(z) = S_x^+(z)S_x^-(z) \qquad (4.52)$$

که،

- $S_x^+(z)$ و $S_x^-(z)$ دو تابع گویا از **z** هستند.
- اگر p_i ها قطب های $S_x^+(z)$ باشند، آنگاه $|p_i| < 1$
- اگر z_i ها صفر های $S_x^+(z)$ باشند، آنگاه $|z_i| < 1$
- اگر p_i ها قطب های $S_x^-(z)$ باشند، آنگاه $|p_i| \geq 1$
- اگر z_i ها صفر های $S_x^-(z)$ باشند، آنگاه $|z_i| \geq 1$
- $S_x^+(z) = S_x^-(z^{-1})$

The Causal Wiener filter

مثال(۴.۷): تجزیه تابع چگالی طیفی

اگر $s(n)$ یک فرآیند تصادفی قابل توصیف با معادله تفاضلی زیر باشد:

$$s(n) = 1.1s(n-1) - 0.24s(n-2) + 2\omega(n) + 3\omega(n-1)$$

$$\omega(n): \begin{cases} \text{zero mean, WSS} \\ R_\omega(n) = 5(0.6)^n \end{cases}$$

آنگاه:

$$S(z) = 1.1z^{-1}S(z) - 0.24z^{-2}S(z) + 2W(z) + 3z^{-1}W(z)$$

$$\Rightarrow \quad H_s(z) = \frac{S(z)}{W(z)} = \frac{2+3z^{-1}}{1-1.1z^{-1}+0.24z^{-2}} = \frac{2(1+1.5z^{-1})}{(1-0.3z^{-1})(1-0.8z^{-1})}$$

The Causal Wiener filter

ادامه مثال(۴.۷): تجزیه تابع چگالی طیفی

از طرفی

$$S_{\omega}(z)=5\frac{0.64}{\left(1-0.6z^{-1}\right)\left(1-0.6z\right)}$$

لذا

$$\Rightarrow \quad S_z(z)=H_s(z)H_s(z^{-1})S_{\omega}(z)$$

$$\Rightarrow S_z(z)=\frac{2(1+1.5z^{-1})}{\left(1-0.3z^{-1}\right)\left(1-0.8z^{-1}\right)}\frac{2(1+1.5z)}{\left(1-0.3z\right)\left(1-0.8z\right)}\frac{3.2}{\left(1-0.6z^{-1}\right)\left(1-0.6z\right)}$$

$$\Rightarrow \quad S_s^+(z)=\frac{2(1+1.5z)\sqrt{3.2}}{\left(1-0.3z^{-1}\right)\left(1-0.8z^{-1}\right)\left(1-0.6z^{-1}\right)}$$

The Causal Wiener filter

The Causal-Part Extraction: The plus operation

یکی از اپراتورهای مورد نیاز در جداسازی بخش علی، **plus-operator** است.
اگر $h(n)$ یک سیستم **LTI** حقیقی با تابع تبدیل گویای گسسته به صورت $H(z)$ باشد. در حوزه زمان می توان $h(n)$ را به صورت دو بخش علی و غیرعلی تقسیم نمود.

$$h(n)=\text{causal part of } h(n) + \text{anticausal part of } h(n)$$

$$\text{causal part of } h(n)\triangleq\left[h(n)\right]_+ = h(n)1(n)$$

$$\text{anticausal part of } h(n)\triangleq\left[h(n)\right]_- = h(n)1(-n-1)$$

$$\Rightarrow \quad H(z)=\left[H(z)\right]_+ + \left[H(z)\right]_-$$

The Causal Wiener filter

The Causal-Part Extraction: The plus operation

که

$[H(z)]_+ = Z\{h(n)1(n)\}$: *plus operator* or *causal – part extraction*

$[H(z)]_- = Z\{h(n)1(-n-1)\}$: minus *operator*

استخراج بخش Causal برای تابع گویا $H(z)$

$$H(z)=\frac{\sum_{n=1}^{L}\beta_{-n}z^{n}+\sum_{n=1}^{M}\beta_{n}z^{-n}}{\sum_{n=1}^{N}a_{n}z^{-n}}=\underbrace{\sum_{n=1}^{L}c_{-n}z^{n}}_{\substack{P_A(z)\\ \downarrow \\ Anti-Causal}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{M-N}c_{n}z^{-n}}_{\substack{P_C(z)\\ \downarrow \\ Causal}}+\underbrace{\frac{\sum_{n=0}^{N-1}b_{n}z^{-n}}{\sum_{n=1}^{N}a_{n}z^{-n}}}_{\substack{Q(z)\\ \downarrow \\ \text{Proper}}} \qquad (4.60)$$

The Causal Wiener filter

The Causal-Part Extraction: The plus operation

$Q(z)$ دارای ماکزیمم N-1 صفر و N قطب است. اگر فرض کنیم این تابع داری K قطب مجزا باشد (که $K \le N$) آنگاه می توان آن را به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$Q(z)=\frac{\sum_{n=0}^{N-1}b_{n}z^{-n}}{\sum_{n=1}^{N}a_{n}z^{-n}}=\left(\frac{1}{a_0}\right)\frac{\sum_{n=0}^{N-1}b_{n}z^{-n}}{\prod_{k=1}^{K}(1-p_k z^{-1})^{m_k}} \qquad \begin{cases} p_k : \text{pole position} \\ m_k : \text{pole degrees}\end{cases}$$

با گسترش به کسرهای جزئی:

$$Q(z)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{m_k}\frac{q_{k,m}}{\left(1-p_k z^{-1}\right)^{m}}=\sum_{k=1}^{K}Q_k(z)$$

The Causal Wiener filter

The Causal-Part Extraction: The plus operation

که $Q_k(z)$ نشان دهنده اثر قطب kام را نشان می دهد.

$$Q_k(z)=\sum_{m=1}^{m_k}\frac{q_{k,m}}{\left(1-p_k z^{-1}\right)^m}=\underbrace{\frac{q_{k,1}}{\left(1-p_k z^{-1}\right)}}_{Q_k'(z)}+\sum_{m=2}^{m_k}\frac{q_{k,m}}{\left(1-p_k z^{-1}\right)^m}$$

$$Z^{-1}\left[Q_k'(z)\right]=Z^{-1}\left[\frac{q_{k,1}}{1-\mu z^{-1}}\right]\overset{p_k=\mu}{=}\begin{cases}\mu^n u(n), & \text{ROC}=\{z:|z|>|\mu|\} \quad (4.63)\\ -\mu^n u(-n-1) & \text{ROC}=\{z:|z|<|\mu|\} \quad (4.64)\end{cases}$$

در نتیجه تابعی لازم است انتخاب گردد که ROC تابع گویای $H(z)$ را شامل شود.

Extraction for Stable Rational $H(z)$

اگر $H(z)$ پایدار باشد فرایند استخراج بخش **causal** ساده تر خواهد شد.
پایدار شدن $H(z)$ موجب می گردد **ROC** مربوط به $Q_k'(z)$ ، دایره واحد را شامل گردد.

لذا، با پایدار بودن $Q_k(z)$ لازم است از رابطه (۴.۶۳) استفاده شود که نشانگر یک سیگنال **causal** است. و اگر p_k ناپایدار باشد $Q_k(z)$، **anti-causal** خواهد بود.

$$N_A+N_C=N$$

N_A : order of the poles of $H(z)$ outside the unit circle

N_C : order of the poles of $H(z)$ inside the unit circle

Extraction for Stable Rational $H(z)$

درنتیجه:

$$Q_A(z)=\sum_{\substack{k=1\\|p_k|>1}}^{K} Q_k(z)=\frac{\sum_{n=0}^{N_A-1}\lambda_n z^{-n}}{\prod_{\substack{k=1\\|p_k|>1}}^{K}(1-p_k z^{-1})^{m_k}}$$: Anti-causal, proper, rational part of $H(z)$

$$Q_C(z)=\sum_{\substack{k=1\\0<|p_k|<1}}^{K} Q_k(z)=\frac{\sum_{n=0}^{N_C-1}\mu_n z^{-n}}{\prod_{\substack{k=1\\0<|p_k|<1}}^{K}(1-p_k z^{-1})^{m_k}}$$: Causal, proper, rational part of $H(z)$

درنتیجه بخش **causal** عبارت است از:

$$\Rightarrow \quad [H(z)]_+ = P_c(z)+Q_c(z)$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

روش کار:

۱- استخراج $P_C(z)$ و $P_A(z)$ با استفاده از تقسیمات متوالی.

۲- استخراج $Q_C(z)$ و $Q_A(z)$ با گسترش به کسرهای جزئی.

۳- $[H(z)]_+ = P_c(z)+Q_c(z)$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

مثال ۴.۸:

$$H(z)=\frac{5z-\frac{1}{2}+5z^{-1}-\frac{5}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad \text{ROC}=\left\{z:\frac{1}{4}<|z|<\infty\right\}$$

$$\begin{array}{l|l} 5z-\frac{1}{2}+5z^{-1}-\frac{5}{4}z^{-2} & 1-\frac{1}{4}z^{-1} \\ -\left(5z-\frac{5}{4}\right) & 5z+\frac{3}{4}=Q_A(z) \\ \quad \frac{3}{4}+5z^{-1}-\frac{5}{4}z^{-2} & \\ \quad -\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{16}z^{-1}\right) & \\ \quad \frac{83}{16}z^{-1}-\frac{5}{4}z^{-2} & \end{array}$$

$$H(z)=5z+\frac{3}{4}+\frac{\frac{83}{16}z^{-1}-\frac{5}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

ادامه مثال ۴.۸:

$$H(z)=\frac{5z-\frac{1}{2}+5z^{-1}-\frac{5}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad \text{ROC}=\left\{z:\frac{1}{4}<|z|<\infty\right\}$$

$$\begin{array}{l|l} -\frac{5}{4}z^{-2}+\frac{83}{16}z^{-1} & -\frac{1}{4}z^{-1}+1 \\ -\left(-\frac{5}{4}z^{-2}+5z^{-1}\right) & 5z^{-1}-\frac{3}{4}=Q_C(z) \\ \quad \frac{3}{16}z^{-1} & \\ \quad -\left(\frac{3}{16}z^{-1}-\frac{3}{4}\right) & \\ \quad \frac{3}{4} & \end{array}$$

$$H(z)=5z+\frac{3}{4}+5z^{-1}-\frac{3}{4}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$=5z+5z^{-1}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

ادامه مثال ۴.۸:

$$\Rightarrow \left[H(z)\right]_+ = 5z^{-1} + \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad h(n) = 5\delta(n-1) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

روش دوم محاسبه $\left[H(z)\right]_+$:

$$H(z) = c_{-1}z + c_0 + c_1 z^{-1} + \frac{\mu_0}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

ادامه مثال ۴.۸:

$$H(z) = \frac{c_{-1}z + \left(-\frac{1}{4}c_{-1} + c_0 + \mu_0\right) + \left(-\frac{1}{4}c_0 + c_1\right)z^{-1} + \left(-\frac{1}{4}c_1\right)z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$= \frac{5z - \frac{1}{2} + 5z^{-1} - \frac{5}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow \left[c_{-1} \quad c_0 \quad c_1 \quad \mu_0\right] = \left[5 \quad 0 \quad 5 \quad \frac{3}{4}\right]$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

ادامه مثال ۴.۸:

$$H(z)=\frac{c_{-1}z+\left(-\frac{1}{4}c_{-1}+c_0+\mu_0\right)+\left(-\frac{1}{4}c_0+c_1\right)z^{-1}+\left(-\frac{1}{4}c_1\right)z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$=\frac{5z-\frac{1}{2}+5z^{-1}-\frac{5}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow\left[c_{-1}\quad c_0\quad c_1\quad \mu_0\right]=\left[5\quad 0\quad 5\quad \frac{3}{4}\right]$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

مثال ۴.۹:

$$H(z)=\frac{6z^2-51z+128-109z^{-1}+197z^{-2}-232z^{-3}+80z^{-4}}{2-17z^{-1}+40z^{-2}-16z^{-3}}\qquad \text{ROC}=\left\{z:\frac{1}{2}<|z|<4\right\}$$

$$H(z)=3z^2+4+\frac{7z^{-1}+37z^{-2}-168z^{-3}+80z^{-4}}{2-17z^{-1}+40z^{-2}-16z^{-3}}$$

$$H(z)=3z^2+4+(-2)-5z^{-1}+\frac{4-17z^{-1}+32z^{-2}}{2-17z^{-1}+40z^{-2}-16z^{-3}}$$

$$Q(z)=\frac{2-\frac{17}{2}z^{-1}+16z^{-2}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)^2}=\frac{1}{\left(1-0.5z^{-1}\right)}+\frac{1}{\left(1-4z^{-1}\right)^2}$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

ادامه مثال ۴.۹:

$$H(z) = \frac{6z^2 - 51z + 128 - 109z^{-1} + 197z^{-2} - 232z^{-3} + 80z^{-4}}{2 - 17z^{-1} + 40z^{-2} - 16z^{-3}} \qquad \text{ROC} = \left\{ z : \frac{1}{2} < |z| < 4 \right\}$$

$$\left[H(z)\right]_+ = 2 - 5z^{-1} + \frac{1}{\left(1 - 0.5z^{-1}\right)}$$

Derivation of the Causal Wiener Filter

با توجه به رابطه (۴.۵۱) برای محاسبه فیلتر وینر **causal** لازم است حل شود:

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(j) R_z(j-i) = R_{sz}(i) \qquad i \ge 0 \qquad (4.51)$$

ولیکن امکان استفاده از تبدیل **Z** وجود ندارد چرا که معادله فقط برای $i \ge 0$ درست است. به منظور حل این مساله $h'(i)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$h'(i) = R_{sz}(i) - \sum_{j=0}^{\infty} h(j) R_z(j-i) \qquad i \in \mathbb{Z} \qquad (4.65)$$

$$h'(i) = \begin{cases} 0 & i \ge 0 \\ R_{sz}(i) - \sum_{j=0}^{\infty} h(j) R_z(j-i) & i < 0 \end{cases} \qquad (4.66)$$

Derivation of the Causal Wiener Filter

حال با توجه به تعریف $h'(i)$ امکان استفاده از تبدیل Z وجود دارد. در نتیجه با استفاده از تبدیل Z خواهیم داشت:

$$H'(z) = S_{sz}(z) - H(z)S_z(z) = S_{sz}(z) - H(z)S_z^+(z)S_z^-(z)$$

با تقسیم طرفین بر $S_z^-(z)$ خواهیم داشت:

$$\frac{H'(z)}{S_z^-(z)} = \frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)} - H(z)S_z^+(z)$$

به منظور استخراج بخش causal:

$$\left[\frac{H'(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ = \left[\frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ - \left[H(z)S_z^+(z)\right]_+$$

Derivation of the Causal Wiener Filter

واضح است که $h'(i)$ کاملا anti-causal بود، لذا $H'(z)$ نیز فقط شامل قطب های خارج خارج از دایره واحد است و ریشه های $S_z^-(z)$ نیز در خارج دایره واحد قرار دارد. در نتیجه:

$$\left[\frac{H'(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ = 0$$

از سوی دیگر با توجه به تعریف $H(z)$ causal است و قطب های $S_z^+(z)$ نیز در داخل دایره واحد است.

$$\left[\frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ - H(z)S_z^+(z) = 0$$

در نتیجه Causal Wiener Filter:

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{1}{S_z^+(z)}\left[\frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ \qquad (4.68)}$$

Properties of the Causal Wiener Filter

با توجه به معادله (۴.۶۸) و فرض عدم و جود ریشه های $S_z^+(z)$ روی دایره واحد می توان نشان داد که $H(z)$ کاملا پایدار است.

مقدار MSE فیلتر وینر Causal:

با توجه به رابطه MSE برای فیلترهای Non-causal میتوان رابطه زیر را برای محاسبه MSE فیلترهای causal ارائه نمود:

$$MSE = R_s(0) - \sum_{i=0}^{\infty} h(i) R_{sz}(i)$$

$$MSE = \begin{cases} \frac{1}{j2\pi}\oint_C \left[S_s(z) - H(z)S_{sz}(z^{-1})\right] z^{-1}dz = \sum\left[\text{Residues of integran inside unit circle}\right] & S_{sz}(z)\ \text{rational} \\ \frac{1}{j2\pi}\oint_C \left[S_s(z) - H(z)S_{sz}^*(z)\right] z^{-1}dz & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.75)$$

The Causal Wiener Filter

مثال ۴.۱۰: مثال ۴.۲ و ۴.۵ را مجددا در نظر بگیرید

$$S_s(z) = \frac{0.0975}{\left(1-0.95z^{-1}\right)\left(1-0.95z\right)}$$

$$S_v(z) = 2$$

$$\Rightarrow S_{sz}(z) = S_s(z)$$

$$S_z(z) = \frac{1-0.95^2}{(1-0.95z^{-1})(1-0.95z)} + 2 = 2.3955\frac{\left(1-0.7931z^{-1}\right)\left(1-0.7931z\right)}{(1-0.95z^{-1})(1-0.95z)}$$

$$\Rightarrow \quad S_z(z) = 1.5477\frac{\left(1-0.7931z^{-1}\right)}{(1-0.95z^{-1})} \times 1.5477\frac{\left(1-0.7931z\right)}{(1-0.95z)} = S_z^+(z)S_z^-(z)$$

The Causal Wiener Filter

ادامه مثال ۴.۱۰:

$$S_z^+(z) = 1.5477\frac{(1-0.7931z^{-1})}{(1-0.95z^{-1})}$$

$$S_z^-(z) = 1.5477\frac{(1-0.7931z)}{(1-0.95z)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)} = \frac{\dfrac{0.0975}{(1-0.95z^{-1})(1-0.95z)}}{1.5477\dfrac{(1-0.7931z)}{(1-0.95z)}} = \frac{0.0630}{(1-0.7931z)(1-0.95z^{-1})}$$

$$= \frac{-0.0794z^{-1}}{(1-1.2608z^{-1})(1-0.95z^{-1})}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)} = \frac{0.2555}{(1-0.95z^{-1})} - \frac{0.2555}{(1-1.2608z^{-1})} \Rightarrow \left[\frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ = \frac{0.2555}{(1-0.95z^{-1})}$$

The Causal Wiener Filter

ادامه مثال ۴.۱۰:

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{1}{S_z^+(z)}\left[\frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ = \frac{\dfrac{0.2555}{(1-0.95z^{-1})}}{1.5477\dfrac{(1-0.7931z^{-1})}{(1-0.95z^{-1})}} = \frac{0.1651}{(1-0.7931z^{-1})}$$

$$\Rightarrow \quad h(n) = 0.1651\times(0.7921)^n u(n)$$

$$MSE = 1-0.1651\times\sum_{i=0}^{\infty}(0.7531)^i(0.95)^i = 1-\frac{0.1651}{1-0.7531\times0.95} = 0.3302$$

$MSE_{no-filter}$	$MSE_{FIR-filter}$	MSE_{NC}	MSE_C
2	0.4405	0.2195	0.3302

Signal Prediction

برای پیش بینی یک سیگنال با استفاده از فیلتر وینر و به اندازه m مرحله خواهیم داشت:

$$\hat{s}(n+m)=\sum_{i=0}^{\infty}h(i)z(n-i)$$

در نتیجه معادله **Wiener-Hopf** به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\sum_{j=0}^{\infty}h(j)R_z(j-i)=R_{sz}(m+i)\quad i\geq 0$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{H(z)=\frac{1}{S_z^+(z)}\left[\frac{z^m S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+}$$

مقدار **MSE** نیز مشابه تخمینگر محاسبه می گردد.