باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 5

تخمین بازگشتی و فیلتر کالمن

مقدمه

• در فصل قبل فیلتر وینر و طراحی آن در سه نوع ارائه گردید.

– **FIR Wiener filter**
– **Non-Causal Wiener filter**
– **Causal Wiener filter**

که هر یک مشکلات خاص خود را دارند و در عمل امکان استفاده از فیلتر FIR بیشتر از سایرین وجود خواهد داشت. ولیکن مشکل فیلتر FIR نیز این است که در هر مرحله تعداد محدودی از مشاهدات را در تخمین به کار می گیرد و این امر موجب می گردد که بخشی از داده ها به مرور زمان در تخمین بی تاثیر می گردند. به عبارت دیگر مشاهدات پیشین حذف می گردند.

مقدمه

- لذا اگر بتوان روشی را ارائه نمود که مشاهدات قبلی را در تخمین بکار گیرد امکان تخمین بهتر فراهم می گردد.
- دو ایده عمده را می توان در این خصوص ارائه نمود:

1. حل معادلات فیلتر وینر با اضافه شدن مشاهدات که نیاز حجم حافظه زیاد و محاسبات پیچیده دارد.
2. ارائه یک فرم بازگشتی که امکان به روز شدن تخمین در حین اضافه شدن اطلاعات را داشته باشد.

مقدمه

LMMSE Estimation

- معادلات یک فیلتر LMMSE نامتغیر با زمان:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} h(i) z(n-i), \qquad (5.1)$$

- و در صورتیکه در مساله تخمین نیاز به تخمینگر هایی باشد که نسبت به زمان متغیرند، لذا می توان معادله (۵.۱) را به صورت معادله (۵.۲) بازنویسی نمود:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} h_n(i) z(n-i), \qquad (5.2)$$

- که حل آن با استفاده از قاعده MSE منجر به معادله Wiener-Hopf متغیر با زمانی به صورت زیر می شود:

$$\sum_{j=0}^{n} h_n(j) R_z(n-i, n-j) = R_{sz}(n, n-i), \; 0 \le i \le n \qquad (5.3)$$

مقدمه

LMMSE Estimation

- استفاده از معادله (۵.۳) در مساله تخمین به صورت زیر امکان پذیر خواهد بود:

$$\sum_{j=0}^{n} h_n(j) R_z(n-i, n-j) = R_{sz}(n, n-i),\ \ 0 \le i \le n \qquad (5.3)$$

  - در هر زمان n، معادله (۵.۳) شامل n معادله خطی است که لازم است برای محاسبه n ضریب ثابت فیلتر حل شوند.

$$\{h_n(i): 0 \le i \le n-1\}$$

  - با استفاده از ضرایب حاصل معادله (۵.۲):

$$\{z(i): 1 \le i \le n\} \xrightarrow{\text{Causal Wiener Filter}} \hat{s}(n)$$

مقدمه

LMMSE Estimation

- پر واضح است که در این فیلترلازم است تمامی مشاهدات ذخیره گردند، لازم است تمامی ضرایب ذخیره گردند و همچنین لازم است n معادله خطی حل گردند که در صورتی که n بزرگ باشد این مشکل مضاعف می گردد. در نتیجه پیاده سازی این فیلتر نیازمند حافظه زیادی است(به این دسته از فیلترها، فیلتر ***growing-Memory*** ***LMMSE*** می گویند) و امکان پیاده سازی واقعی ندارد.

مقدمه

Estimation based on a State model

- **ML estimators:** $f_z(z \mid s = s)$
- **MAP estimators:** $f_s(s \mid z = z)$

- **اگر اطلاعات کافی در خصوص تولید سیگنال$s(n)$ وجود داشته باشد امکان محاسبه $f_z(z \mid s = s)$ و $f_s(s \mid z = z)$ وجود دارد و در نتیجه امکان استفاده از تخمین های ML و MAP نیز وجود دارد.**
  - اگر سیگنال $s(n)$ را بتوان به صورت یک مدل فضای حالت بیان نمود:

$$x(n+1) = \Phi x(n) + \omega(n)$$
$$s(n) = Cx(n),$$

مقدمه

Estimation based on a State model

- **ML estimators:** $f_z(z \mid s = s)$
- **MAP estimators:** $f_s(s \mid z = z)$

- **اگر اطلاعات کافی در خصوص تولید سیگنال$s(n)$ وجود داشته باشد امکان محاسبه $f_z(z \mid s = s)$ و $f_s(s \mid z = z)$ وجود دارد و در نتیجه امکان استفاده از تخمین های ML و MAP نیز وجود دارد.**

- **اگر سیگنال $s(n)$ را بتوان به صورت یک مدل فضای حالت بیان نمود:**

$$x(n+1)_{N\times 1} = \Phi_{N\times N} x(n) + \omega(n)_{N\times 1}$$
$$s(n) = C_{1\times N} x(n)$$
$$z(n) = s(n) + v(n)$$

مقدمه

Estimation based on a State model

- مساله جدید تخمین متغیر حالت$x(n)$ است که با استفاده از آن امکان تخمین سیگنال $s(n)$ به سادگی وجود دارد که فرم کلی آن به صورت زیر است:

$$\hat{x}(n) = \alpha_n(\hat{x}(0), \hat{P}(0), Z_n) \qquad (5.4)$$

where,

$\hat{x}(0)$ = a guess of $E[x(0)]$

$\hat{P}(0)$ = a guess of Cov$[x(0)]$

$$Z_n = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix}$$

- لذا هدف یافتن تخمین $\hat{x}(n)$ است که یک ضابطه را بهینه می نماید.

مقدمه

ML Estimation

For simplicity: $\omega(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(n+1) = \Phi x(n) & (5.5) \\ s(n) = Cx(n) & (5.6) \end{cases}$

با فرض معکوس پذیر بودن ماتریس Φ

$$x(n) = \Phi^{-1}x(n+1) \quad \text{and} \quad x(n-1) = \Phi^{-1}x(n) \qquad (5.7)$$

$$\Rightarrow \quad z(i) = s(i) + v(i) = C\Phi^{-n+i}x(n) + v(i), \quad \text{i=1,2,...,n.}$$

$$\Rightarrow \quad Z_n = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\Phi^{-n+1} \\ C\Phi^{-n+2} \\ \vdots \\ C \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix}, \qquad \Rightarrow z_n = U_n x(n) + V_n,$$

مقدمه

ML Estimation

در صورتیکه $v(n)$ نویز سفید گوسی با میانگین صفر باشد در نتیجه:

$$f_{v_n}(V_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|R_n\right|^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2} V_n^T \; R_n^{-1} \; V_n), \qquad (5.8)$$

که در آن $R_n = Cov(V_n)$

$$f_{z_n}(Z_n \left| x(n) = x \right.) = f_{v_n}(V_n)\Big|_{v_n = z_n - u_n x} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|R_n\right|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(Z_n - U_n x)^T R_n^{-1}(Z_n - U_n x)\right] \qquad (5.9)$$

$$\max \; f_{z_n}(Z_n \left| x(n) = x \right.)\big| \Rightarrow \min\left[(Z_n - U_n x)^T R_n^{-1}(Z_n - U_n x)\right]$$

$$\xrightarrow{Least\ Square} \hat{x}_{ML}(n) = [U_n^T R_n^{-1} U_n]^{-1} U_n^T R_n^{-1} Z_n. \qquad (5.10)$$

مقدمه

ML Estimation

همانگونه که از رابطه (۵.۱۰) مشخص است تخمین ML نیازمند اطلاعات زیادی از مشاهدات است.

مقدمه

MAP Estimation

Similar to ML estimator: $\omega(n)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x(n+1)=\Phi x(n) & (5.5) \\ s(n)=Cx(n) & (5.6) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad z(i)=s(i)+v(i) \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

$$f_{v_n}(V_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|R_n\right|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}V_n^T\;R_n^{-1}\;V_n\right), \qquad (5.8)$$

با توجه به ویژگی فیلتر MAP که نیازمند اطلاعاتی از سیگنال است، برای حالت ها فرض توزیع گوسی با میانگین $\bar{x}(n)$ و کوواریانس $P(n)$ در نظر گرفته می شود.

$$f_{x(n)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|P(n)\right|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(x-\bar{x}(n)\right)^T P^{-1}(n)\left(x-\bar{x}(n)\right)\right] \qquad (5.11)$$

مقدمه

MAP Estimation

با توجه به آنچه پیش از این در مورد تخمین MAP گفته شده است:

$$f_{x(n)}(x|\mathbf{Z}_n=Z_n)=\frac{f_{Z_n}(Z_n|\mathbf{x}(n)=x)\,f_{x(n)}(x)}{f_{Z_n}(Z_n)}$$

$$\Rightarrow\; f_{\mathbf{z}_n}(Z_n|\mathbf{x}(n)=x)\,f_{x(n)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^n\left|R_n\right|^{1/2}\left|p(n)\right|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(Z_n-U_nx\right)^T R_n^{-1}\left(Z_n-U_nx\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(x-\bar{x}(n)\right)^T p^{-1}(n)\left(x-\bar{x}(n)\right)\right]$$

که برای ماکزیمم نمودن آن لازم است عبارت زیر می نیمم باشد:

$$\Psi=\left(Z_n-U_nx\right)^T R_n^{-1}\left(Z_n-U_nx\right)+\left(x-\bar{x}(n)\right)^T p^{-1}(n)\left(x-\bar{x}(n)\right)$$

مقدمه

MAP Estimation

با مشتقگیری از Ψ نسبت به x :

$$-2U_n^T R_n^{-1} Z_n + 2U_n^T R_n^{-1} U_n x - 2P^{-1}(n)\bar{x}(n) + 2P^{-1}(n)x = 0$$

$$\Rightarrow \hat{x}_{MAP}(n) = [U_n^T R_n^{-1} U_n + P^{-1}(n)]^{-1}[P^{-1}(n)\bar{x}(n) + U_n^T R_n^{-1} Z_n] \quad (5.12)$$

لازم به ذکر است که ماتریس $U_n^T R_n^{-1} U_n + P^{-1}(n)$ همواره معکوس پذیر است چرا که $P^{-1}(n) > 0$.

همچنین:

$$\bar{x}(n) = \Phi^n \bar{x}(0) \qquad (5.13)$$

$$P(n) = \Phi^n P(0)(\Phi^T)^n \qquad (5.14)$$

مقدمه

MAP Estimation

لذا

$$\hat{x}_{MAP}(n) = \left[U_n^T R_n^{-1} U_n + \Phi^n P^{-1}(0)(\Phi^T)^n\right]^{-1} \times \left[(\Phi^T)^{-n} P^{-1}(0)\bar{x}(0) + U_n^T R_n^{-1} Z_n\right] \qquad (5.15)$$

پر واضح است که تخمین MAP نیز به تمامی مشاهدات گذشته نیاز دارد.

تخمین یک سیگنال ثابت

در این بخش به تخمین یک سیگنال ثابت با استفاده از تخمین بازگشتی خواهیم پرداخت که مساله **growing-Memory** در آن حل شده است.

$s(n) = s$

لذا تخمین **LMMSE** با استفاده از مشاهدات $z(1), z(2)\dots, z(n)$ عبارت است از:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} h_n(i) z(n-i)$$

$$MSE = E\left[\left(s(n) - \sum_{i=0}^{n-1} h_n(i) z(n-i)\right)^2\right].$$

تخمین یک سیگنال ثابت

فرض کنید

$$E\left[s^2\right] = P > 0,$$

$$R_s(i-j) = E\left[s(i)s(j)\right] = E\left[s^2\right] = P, \qquad \forall i, j \in \mathbb{Z}.$$

که مقدار واقعی P نامشخص است. همچنین

$$z(n) = s(n) + v(n) = s + v(n)$$

$$s(n) \,\&\, v(n): \text{ JWSS}$$

$$v(n): \text{ white noise with known variance } \sigma_v^2$$

$$R_v(i-j) = E\left[v(i)v(j)\right] = \sigma_v^2 \delta(i-j),$$

$$\Rightarrow \; R_z(i-j) = R_s(i-j) + R_v(i-j) = P + \sigma_v^2 \delta(i-j).$$

تخمین یک سیگنال ثابت

به منظور محاسبه ضرایب فیلتر:

$$\frac{\partial MSE}{\partial h_n(i)} = -2E\left[s(n)z(n-i)\right] + 2\sum_{j=0}^{n-1} h_n(j)E\left[z(n-i)z(n-j)\right] = 0$$

در نتیجه:

$$\sum_{j=0}^{n-1} h_n(j)R_z(j-i) = R_{sz}(i) = R_s(i) = P, \qquad i=0,1,\ldots,n-1.$$

که در فرم ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} P+\sigma_v^2 & P & \cdots & P \\ P & P+\sigma_v^2 & \cdots & P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P & P & \cdots & P+\sigma_v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_n(0) \\ h_n(1) \\ \vdots \\ h_n(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ P \\ \vdots \\ P \end{bmatrix}$$

تخمین یک سیگنال ثابت

با توجه به متقارن بودن ماتریس ضرایب و شکل معادله:

$$h_n(0) = h_n(1) = \cdots = h_n(n-1) = h_n \qquad (5.16)$$

$$= \frac{P}{nP+\sigma_v^2} = \frac{1}{n+\sigma_v^2/P} \quad . \qquad (5.17)$$

لذا:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} h_n z(n-i) = h_n \sum_{i=0}^{n-1} z(n-i) \qquad (5.18)$$

معادله (۵.۱۸) نشان می دهد که با افزایش **n** ($n \to \infty$)، حافظه مورد نیاز به سمت بی نهایت میل خواهد نمود.

تخمین یک سیگنال ثابت

از معادله (۵.۱۸) داریم:

$$\hat{s}(n+1) = h_{n+1}\sum_{i=0}^{n} z(n+1-i), \qquad (5.19)$$

که

$$h_{n+1} = \frac{P}{(n+1)P+\sigma_v^2} = \frac{1}{n+1+\sigma_v^2/P} \qquad (5.20)$$

اگر $j = i-1$ باشد رابطه (۵.۱۹) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\hat{s}(n+1) = h_{n+1}\sum_{j=-1}^{n-1} z(n-j) = h_{n+1}z(n+1) + h_{n+1}\sum_{j=0}^{n-1} z(n-j) \qquad (5.21)$$

از مقایسه رابطه (۵.۱۸) و (۵.۲۱) خواهیم داشت:

$$\hat{s}(n+1) = \frac{h_{n+1}}{h_n}\hat{s}(n) + h_{n+1}z(n+1). \qquad (5.22)$$

تخمین یک سیگنال ثابت

رابطه (۵.۲۲) نشان می دهد که در تخمین $\hat{s}(n+1)$ به مقدار آخرین تخمین و آخرین مشاهده نیاز است و دیگری نیازی به ذخیره سازی اطلاعات نیست. به عبارت دیگر رابطه (۵.۲۲) یک تخمین بازگشتی را در اختیار می گذارد.

حال می توان سعی کرد ضرایب فیلتر را نیز به صورت برگشتی محاسبه نمود

$$\left.\begin{aligned} h_n &= \frac{P}{nP+\sigma_v^2} = \frac{1}{n+\sigma_v^2/P} && (5.17)\\ h_{n+1} &= \frac{P}{(n+1)P+\sigma_v^2} = \frac{1}{n+1+\sigma_v^2/P} && (5.20)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{n+\sigma_v^2/P}{n+1+\sigma_v^2/P} = 1-h_{n+1}$$

تخمین یک سیگنال ثابت

در نتیجه:

$$h_{n+1} = \frac{h_n}{1+h_n} = h_n(1+h_n)^{-1} \qquad (5.24)$$

و با استفاده از آن می توان رابطه (۵.۲۲) را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\boxed{\hat{s}(n+1) = \hat{s}(n) + \underbrace{h_{n+1}}_{filter\ gain}\left[z(n+1) - \hat{s}(n)\right] \qquad (5.25)}$$

محاسبه MSE:

محاسبه MSE با توجه به تغییر سیگنال تخمینی $\hat{s}(n)$ ، لازم است به ازای هر بار تخمین مجددا محاسبه گردد. لذا داریم: $MSE(n)$

23

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

تخمین یک سیگنال ثابت

$$MSE(n) = E\left[(s-\hat{s}(n))^2\right]$$
$$= E\left[s^2\right] - 2E\left[s\hat{s}(n)\right] + E\left[\hat{s}^2(n)\right] \qquad (5.26)$$
$$= P - 2h_n\sum_{i=0}^{n-1} E\left[sz(n-i)\right] + h_n^2 E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} z(n-i)\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} z(n-j)\right)\right]$$

که

$$E\left[sz(n-i)\right] = E\left[s(s+v(n-i))\right] = E[s^2] + E[sv(n-i)]$$
$$= P + E[s]E[v(n-i)] = P$$

24

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

تخمین یک سیگنال ثابت

همچنین

$$E\left[z(n-i)z(n-j)\right]=E\left[(s+v(n-i))\ (s+v(n-j))\right]=p+\sigma_v^2\delta(i-j),$$

که نتیجه می دهد:

$$h_n^2 E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} z(n-i)\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} z(n-j)\right)\right]=h_n^2(n^2P+n\sigma_v^2)$$

و در نتیجه:

$$MSE(n)=P-2nh_nP+h_n^2(n^2P+n\sigma_v^2) \qquad (5.27)$$

تخمین یک سیگنال ثابت

با فرض معلوم بودن P و با استفاده از (۵.۱۷)

$$MSE(n)=\frac{P\sigma_v^2}{nP+\sigma_v^2}=h_n\sigma_v^2 \qquad (5.28)$$

و در نتیجه می توان مقدار MSE را نیز به صورت بازگشتی محاسبه نمود:

$$MSE(n+1)=h_{n+1}\sigma_v^2=\frac{h_{n+1}}{h_n}MSE(n)=(1-h_{n+1})MSE(n) \qquad (5.29)$$

تخمین یک سیگنال ثابت

ارائه یک الگوریتم بازگشتی به منظور تخمین سیگنال ثابت:

۱- مقدار دهی اولیه:

$$n=0 \qquad \hat{s}(0)=\begin{cases} E[s] \\ \vee \\ 0 \end{cases}$$

$$P=V \ \ \text{: a guess} \qquad h_0=\frac{V}{\sigma_v^2} \qquad MSE(0)=V$$

۲- دریافت مشاهده $z(n+1)$

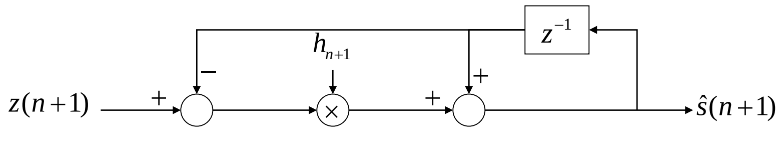
تخمین یک سیگنال ثابت

ارائه یک الگوریتم بازگشتی به منظور تخمین سیگنال ثابت:

۳- محاسبه روابط (۵.۲۴)، (۵.۲۵) و (۵.۲۹)

$$h_{n+1}=h_n(1+h_n)^{-1}$$
$$\hat{s}(n+1)=\hat{s}(n)+h_{n+1}\left[z(n+1)-\hat{s}(n)\right],$$
$$MSE(n+1)=(1-h_{n+1})MSE(n).$$

۴- افزایش مقدار *n* و بازگشت به مرحله ۲.



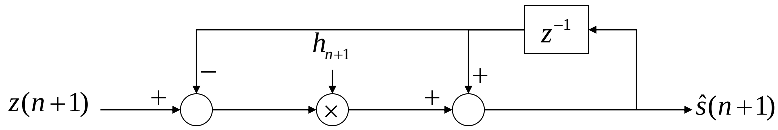
تخمین یک سیگنال ثابت

ارائه یک الگوریتم بازگشتی به منظور تخمین سیگنال ثابت:

۳- محاسبه روابط (۵.۲۴)، (۵.۲۵) و (۵.۲۹)

$$h_{n+1} = h_n (1+h_n)^{-1}$$
$$\hat{s}(n+1) = \hat{s}(n) + h_{n+1}\left[z(n+1) - \hat{s}(n)\right],$$
$$MSE(n+1) = (1-h_{n+1})MSE(n).$$

۴- افزایش مقدار n و بازگشت به مرحله ۲.



تخمین یک سیگنال ثابت

بررسی وضعیت تخمین:

$$E\left[\hat{s}(n)\right] = E\left[h_n \sum_{i=0}^{n-1} z(n-i)\right] = h_n \sum_{i=0}^{n-1} E\left[z(n-i)\right]$$
$$= h_n \sum_{i=0}^{n-1} (E[s] + E[v(n-i)]) = h_n \sum_{i=0}^{n-1} E[s]$$
$$= nh_n E[s] = \frac{n}{n+\sigma_v^2 / V} E[s]. \qquad (5.31)$$

مشخص است که این تخمینگر در حالت کلی unbiased نیست ولیکن

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\hat{s}(n)\right] = E[s] \qquad (5.32)$$

تخمین یک سیگنال ثابت

بررسی وضعیت تخمین:

$$MSE(n) = P - (2nP)h_n + (n^2P + n\sigma_v^2)h_n^2$$

$$= p - (2nP)\frac{V}{nV+\sigma_v^2} + (n^2P + n\sigma_v^2)\left(\frac{V}{nV+\sigma_v^2}\right)^2$$

$$= \frac{(nV+\sigma_v^2)^2 P - 2nPV(nV+\sigma_v^2) + (n^2P + n\sigma_v^2)\, V^2}{(nV+\sigma_v^2)^2} = \frac{nV^2\sigma_v^2 + P\sigma_v^2}{(nV+\sigma_v^2)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} MSE(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{nV^2\sigma_v^2 + P\sigma_v^4}{n^2V^2 + 2nV\sigma_v^2 + \sigma_v^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{nV^2\sigma_v^2}{n^2V^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_v^2}{n} = 0 \qquad (5.33)$$

در نتیجه تخمین بازگشتی ارائه شده برای $n \to \infty$ یک تخمین کامل است.

مساله تخمین بازگشتی

مساله تخمین بازگشتی محاسبه $\hat{s}(n+1)$ با استفاده از مشاهدات $z(n+1)$ و $\hat{s}(n)$ است.

$$\hat{s}(n+1) = \alpha_{n+1}(\hat{s}(n), \mathrm{z(n+1)}). \qquad (5.34)$$

توجه کنید که تخمینگر حاصل میتواند غیرخطی و/یا متغیر با زمان باشد. در ادامه به دنبال <u>تخمین خطی</u> با شرط بهینه سازی <u>MMSE</u> خواهیم بود.

مدل سیگنال / مشاهدات

در این بخش فرضیات لازم برای سیگنال و مشاهدات برای استفاده در مساله تخمین ارائه می شود:

- در این بخش سیگنال و مشاهدات به صورت متغیرهای حالت و خروجی ازیک مدل فضای حالت در نظر گرفته می شوند.
- فرض کنید $s(n)$ و $z(n)$ بردار فرایندهای تصادفی با ابعاد p باشند:

$$s(n) = \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \\ \vdots \\ s_p(n) \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad z(n) = \begin{bmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \\ \vdots \\ z_p(n) \end{bmatrix}. \qquad (5.35)$$

مدل سیگنال / مشاهدات

- بطور کلی $s(n)$ یک نویز رنگی است که با عبور نویز سفید از یک سیستم خطی حاصل می شود.

$$x(n+1) = \Phi_{N\times N}x(n) + \Gamma_{N\times m}\omega(n), \quad x(0) = x_0 \qquad (5.36)$$

$$s(n) = C_{p\times N}x(n), \qquad (5.37)$$

$$z(n) = s(n) + v(n) \qquad (5.38)$$

که

$\omega(n)$: zero mean white noise

$$E\left[\omega(i)\omega^T(j)\right] = Q_{m\times m}\delta(i-j); \qquad (5.39)$$

where, Q: covariance matrix

مدل سیگنال / مشاهدات

$v(n)$: zero mean white noise

$$E\left[v(i)v^T(j)\right]=R_{p\times p}\delta(i-j); \qquad (5.40)$$

where, R: covariance matrix

- همچنین x_0 ، $\omega(n)$ و $v(n)$ متغیرهاس مستقلی هستند.
- ماتریس های Q و R، ماتریس های کوواریانس، متقارن و مثبت معین هستند.

توجه: خواص و فرضیات فوق در خصوص سیگنال و مشاهدات کمک می کند فیلتر کالمن در موقعیت هایی کار کند که فیلتر وینر قابلیت لازم را ندارد.

مدل سیگنال / مشاهدات

فیلتر وینر نیازمند سیگنال WSS و نویز فرایند با میانگین صفر و سیستم پایدار می باشد. در حالیکه فیلتر کالمن چنین محدودیت هایی وجود ندارد. به عبارت دیگر فیلتر کالمن می تواند برای یک سیستم ناپایدار و همچنین برای حالت های با میانگین غیر صفر بکار رود.
همچنین امکان استفاده از کالمن فیلتر برای یک سیستم متغیر با زمان با نویز **non-stationary** نیز وجود دارد.

توجه: از سوی دیگر فیلتر وینر به مشخصات استاتیک سیگنال و نویز نیاز دارد و فقط تابع های همبستگی و یا چگالی طیفی لازم هستند.
در حالیکه در فیلتر کالمن به شناخت کامل مدل سیستم به صورت فضای حالت نیاز است.

تخمین a priori و a posteriori

a priori

Available measurements:

$$Z^{-}=\{z(1),\ldots,z(n-1)\}$$

Estimate of $x(n)$: $\hat{x}^{-}(n)$

Estimation Error: $\tilde{x}^{-}(n)$

Error covariance: $P^{-}(n)$

MSE: $E\left[\tilde{x}^{-}(n)\left(\tilde{x}^{-}(n)\right)^{T}\right]$

$$=trace\left(P^{-}(n)\right)$$

$z(n)$ become available

a posteriori

Available measurements:

$$Z=\{z(1),\ldots,z(n)\}$$

Estimate of $x(n)$: $\hat{x}(n)$

Estimation Error: $\tilde{x}(n)$

Error covariance: $P(n)$

MSE: $E\left[\tilde{x}(n)\left(\tilde{x}(n)\right)^{T}\right]$

$$=trace\left(P(n)\right)$$

$$P^{-}(n)=Cov\left[\tilde{x}^{-}(n)\right]=E\left[\tilde{x}^{-}(n)\left(\tilde{x}^{-}(n)\right)^{T}\right]$$

$$P(n)=Cov\left[\tilde{x}(n)\right]=E\left[\tilde{x}(n)\left(\tilde{x}(n)\right)^{T}\right]$$

$$\tilde{x}^{-}(n)=x(n)-\hat{x}^{-}(n)$$

$$\tilde{x}(n)=x(n)-\hat{x}(n)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

فرض کنید:

$\hat{x}(n-1)$: as a LMMSE is available

$GOAL: \hat{x}(n)=?$ from Z^{-}

در نتیجه ما به دنبال یافتن تخمین (***a priori***) $\hat{x}^{-}(n)$ با استفاده از تخمین (***a posteriori***) $\hat{x}(n-1)$ هستیم.

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a priori* Estimate

از آنجایی که $\hat{x}^{-}(n)$ لازم است یک تخمین بهینه LMMSE باشد لذا باید شرط تعامد را برآورده نماید:

$$E\left[(x(n)-\hat{x}^{-}(n))z^{T}(i)\right]=0 \qquad i=1,2,\ldots,n\text{-}1 \qquad (5.45)$$

و با تعریف

$$Z_{n-1}=\begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n-1) \end{bmatrix}$$

میتوان رابطه (۵.۴۵) را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$E\left[(x(n)-\hat{x}^{-}(n))Z_{n-1}^{T}\right]=0_{N\times n-1} \qquad (5.46)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a priori* Estimate

$$\left.\begin{matrix}(5.36) \\ x(n-1)=\hat{x}(n-1)+\tilde{x}(n-1)\end{matrix}\right\} \rightarrow \quad x(n)=\Phi\hat{x}(n-1)+\Phi\tilde{x}(n-1)+\Gamma\omega(n-1)$$

$$(5.46)\rightarrow \quad E\left[\left(\Phi\hat{x}(n-1)-\hat{x}^{-}(n)\right)Z_{n-1}^{T}\right]+\Phi \underbrace{E\left[\tilde{x}(n-1)Z_{n-1}^{T}\right]}_{0}+\Gamma \underbrace{E\left[\omega(n-1)Z_{n-1}^{T}\right]}_{0}=0$$

Orthogonal principle

Independency and zero mean noise

$$\Rightarrow \quad E\left[\left(\Phi\hat{x}(n-1)-\hat{x}^{-}(n)\right)Z_{n-1}^{T}\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{x}^{-}(n)=\Phi\hat{x}(n-1) \qquad (5.47)}$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a priori* Error Covariance

به منظور استخراج ارتباط ماتریس خطای کوواریانس $P(n-1)$ با $P^{-}(n)$ داریم:

$$P^{-}(n) = Cov\left[x(n) - \hat{x}^{-}(n)\right]$$
$$= Cov\left[\Phi x(n-1) + \Gamma \omega(n-1) - \Phi \hat{x}(n-1)\right]$$
$$= Cov\left[\Phi \tilde{x}(n-1) + \Gamma \omega(n-1)\right] \qquad (5.48)$$

همچنین با توجه به استقلال $\omega(n-1)$ و $\tilde{x}(n-1)$:

$$E[\tilde{x}(n-1)\omega^{T}(n-1)] = 0$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a priori* Error Covariance

در نتیجه:

$$\boxed{P^{-}(n) = \Phi P(n-1)\Phi^{T} + \Gamma Q \Gamma^{T} \qquad (5.49)}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}^{-}(n) &= \Phi \hat{x}(n-1) && (5.47) \\ P^{-}(n) &= \Phi P(n-1)\Phi^{T} + \Gamma Q \Gamma^{T} && (5.49) \end{aligned}\right\} \rightarrow \textit{time update}$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

Measurement Update

مساله دیگری که لازم است حل شود، نحوه استفاده از مشاهده $z(n)$ در تصحیح تخمین $x(n)$است. به عبارت دیگر نحوه به روز شدن مقدار $\hat{x}(n)$ با استفاده از $z(n)$لازم است ارائه گردد. که در این مسیر ماتریس $P(n)$ نیز می بایستی که محاسبه گردد:

The *a posteriori* Estimation

$\hat{x}(n-1): known$

$$E\left[\left(x(n-1)-\hat{x}(n-1)\right)Z_{n-1}^{T}\right]=0 \qquad (5.50)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

$$\xrightarrow{LMMSE\ \text{estimation}} \hat{x}(n-1)=\sum_{j=0}^{n-1}H_{n-1}(j)z(j)=J(n-1)Z_{n-1} \qquad (5.51)$$

where

$$J(n-1)=[H_{n-1}(1)\ \ H_{n-1}(2)\ \ldots\ H_{n-1}(n-1)\ ].$$

حال برای یافتن $\hat{x}(n)$:

$$\hat{x}(n)=\sum_{j=1}^{n}H_{n}(j)z(j) \qquad (5.52)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

که لازم است شرط تعامد را برآورده نماید، لذا:

$$E\left[\left(x(n)-\hat{x}(n)\right)z^{T}(i)\right]=0 \qquad i=1,2,\ldots,n$$

و/یا:

$$E\left[\left(x(n)-\hat{x}(n)\right)Z_n^{T}\right]=0, \qquad (5.53)$$

$$\text{where} \qquad Z_n=\begin{bmatrix} z(1)\\ z(2)\\ \vdots\\ z(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Z_{n-1}\\ z(n)\end{bmatrix}.$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

در نتیجه رابطه (۵.۵۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{x}(n)=K(n)z(n)+G(n)Z_{n-1} \qquad (5.54)$$

where

$$K(n)=H_n(n)$$

$$G(n)=\left[H_n(1),\ H_n(2),\ \ldots\ H_n(n-1)\right].$$

حال نیاز به محاسبه $G(n)$ و $K(n)$ است.

$$\hat{x}(n)=\underset{?}{K(n)}\,z(n)+\underset{?}{G(n)}\,Z_{n-1} \qquad (5.54)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

$$(5.54)\xrightarrow{(5.37)\ (5.38)}\ \hat{x}(n)=K(n)[Cx(n)+v(n)]+G(n)Z_{n-1}$$
$$=K(n)C\Phi x(n-1)+K(n)C\Gamma\omega(n-1) \qquad (5.55)$$
$$+K(n)v(n)+G(n)Z_{n-1}$$

همچنین با استفاده از رابطه (۵.۳۶) و $x(n-1)=\hat{x}(n-1)+\tilde{x}(n-1)$

$$x(n)=\Phi\hat{x}(n-1)+\Phi\tilde{x}(n-1)+\Gamma\omega(n-1). \qquad (5.56)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

$$\left.\begin{matrix}(5.55)\\(5.56)\end{matrix}\right\}\rightarrow\ \tilde{x}(n)=x(n)-\hat{x}(n)$$
$$=\left[I-K(n)C\right]\Phi\hat{x}(n-1)+\left[I-K(n)C\right]\Phi\tilde{x}(n-1) \qquad (5.57)$$
$$+\left[I-K(n)C\right]\Gamma\omega(n-1)-K(n)v(n)-G(n)Z_{n-1}$$

$$(5.57)\xrightarrow[\hat{x}(n-1)=J(n-1)Z_{n-1}]{(5.51)}$$

$$\tilde{x}(n)=\left[I-K(n)C\right]\Phi J(n-1)Z_{n-1}+\left[I-K(n)C\right]\Phi\tilde{x}(n-1)$$
$$+\left[I-K(n)C\right]\Gamma\omega(n-1)-K(n)v(n)-G(n)Z_{n-1}. \qquad (5.58)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

حال با استفاده از شرط (۵.۵۳) :

$$(5.53): \quad E\left[\tilde{x}(n)Z_n^T\right] = E\left[\tilde{x}(n)\begin{bmatrix} Z_{n-1} \\ z(n) \end{bmatrix}^T\right] = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E[\tilde{x}(n)Z_{n-1}^T] = 0 & (5.59) \\ E[\tilde{x}(n)z^T(n)] = 0 & (5.60) \end{cases}$$

در نتیجه:

$$E[\tilde{x}(n)Z_{n-1}^T] = \left[I - K(n)C\right]\Phi J(n-1)E\left[Z_{n-1}Z_{n-1}^T\right] - G(n)E\left[Z_{n-1}Z_{n-1}^T\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad G(n)E\left[Z_{n-1}Z_{n-1}^T\right] = \left[I - K(n)C\right]\Phi J(n-1)E\left[Z_{n-1}Z_{n-1}^T\right] \qquad (5.61)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

که:

$$R > 0 \rightarrow E\left[Z_{n-1}Z_{n-1}^T\right] \text{ is invertible}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G(n) = \left[I - K(n)C\right]\Phi J(n-1) \qquad (5.62)}$$

$$\hat{x}(n) = K(n)\, z(n) + \left[I - K(n)C\right]\Phi J(n-1)Z_{n-1} \qquad (5.54)$$

$$\hat{x}(n) = K(n)\, z(n) + \left[I - K(n)C\right]\Phi\hat{x}(n-1) \qquad (5.54)$$

در نتیجه:

$$\hat{x}(n) = \Phi\hat{x}(n-1) + K(n)\left[z(n) - C\Phi\hat{x}(n-1)\right] \qquad (5.63)$$

$$\boxed{\xrightarrow{(5.47)} \hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^-(n)\right]. \qquad (5.64)}$$

?

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *Kalman* gain

$$\left.\begin{matrix}(5.36)\\(5.63)\end{matrix}\right\} \rightarrow \tilde{x}(n) = \Phi x(n-1) + \Gamma\omega(n-1) - \Phi\hat{x}(n-1) - K(n)z(n) + K(n)C\Phi\hat{x}(n-1)$$

$$(5.65)$$

همچنین:

$$\left.\begin{matrix}(5.37)\\(5.38)\end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{aligned} z(n) &= C\Phi x(n-1) + C\Gamma\omega(n-1) + v(n) && (5.66)\\ &= C\Phi\tilde{x}(n-1) + C\Phi\hat{x}(n-1) + C\Gamma\omega(n-1) + v(n) && (5.67)\end{aligned}$$

با جایگذاری معادله (۵.۶۶) در (۵.۶۵)

$$\begin{aligned}\tilde{x}(n) = {} & \Phi x(n-1) + \Gamma\omega(n-1) - \Phi\hat{x}(n-1) + K(n)C\Phi\hat{x}(n-1)\\ & - K(n)\left\{C\Phi\tilde{x}(n-1) + C\Phi\hat{x}(n-1) + C\Gamma\omega(n-1) + v(n)\right\}\end{aligned}$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *Kalman* gain

$$\tilde{x}(n) = \left[I - K(n)C\right]\Phi\tilde{x}(n-1) + \left[I - K(n)C\right]\Gamma\omega(n-1) - K(n)v(n) \qquad (5.68)$$

با جایگزینی معادله (۵.۶۷) و (۵.۶۸) در شرط (۵.۶۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & E\left[\tilde{x}(n)z^T(n)\right] = \Phi P(n-1)\Phi^T C^T + \Gamma Q\Gamma^T C^T\\ & -K(n)C\Phi P(n-1)\Phi^T C^T - K(n)C\Gamma Q\Gamma^T C^T - K(n)R = 0, \qquad (5.69)\end{aligned}$$

$$(5.49) \rightarrow P^-(n)C^T = K(n)[CP^-(n)C^T + R],$$

$$\boxed{\Rightarrow \ \textit{Kalman Gain}: \ K(n) = P^-(n)C^T[CP^-(n)C^T + R]^{-1} \qquad (5.70)}$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Error Covariance

$$P^{-}(n) \xleftrightarrow{ok} P(n-1) \qquad P(n) \xleftrightarrow{?} P^{-}(n)$$

$$P(n) = Cov\left[x(n) - \hat{x}(n)\right].$$

با استفاده از معادلات (۵.۳۷) و (۵.۳۸) و (۵.۷۰) خواهیم داشت:

$$P(n) = Cov\left[x(n) - \hat{x}^{-}(n) - K(n)\left[Cx(n) + v(n) - C\hat{x}^{-}(n)\right]\right]$$

$$= Cov\left[\left[\left(I - K(n)C\right)\tilde{x}^{-}(n)\right] - K(n)v(n)\right]$$

$$= P^{-}(n) - K(n)CP^{-}(n) - P^{-}(n)C^{T}K^{T}(n) \qquad (5.71)$$

$$+K(n)\left[CP^{-}(n)C^{T} + R\right]K^{T}(n)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Error Covariance

با جایگزینی رابطه (۵.۷۰) در (۵.۷۱) خواهیم داشت:

$$-P^{-}(n)C^{T}K^{T}(n) + K(n)\left[CP^{-}(n)C^{T} + R\right]K^{T}(n) \overset{(5.70)}{=} 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad P(n) = P^{-}(n) - K(n)CP^{-}(n) \qquad (5.72)}$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Error Covariance

با جایگزینی رابطه (۵.۷۰) در (۵.۷۱) خواهیم داشت:

$$-P^{-}(n)C^{T}K^{T}(n)+K(n)\left[CP^{-}(n)C^{T}+R\right]K^{T}(n)\overset{(5.70)}{=}0$$

$$\boxed{\Rightarrow\quad P(n)=P^{-}(n)-K(n)CP^{-}(n)\qquad\qquad (5.72)}$$

جمع بندی معادلات فیلتر کالمن

در استفاده از معادلات فیلتر کالمن ابتدا لازم است مقادیر اولیه پارامترهای برگشتی انتخاب گردند. به این منظور:

$$\hat{x}^{-}(0)=E\left[x(0)\right]\qquad\qquad (5.73)$$

$$P^{-}(0)=E\left[(x(0)-\hat{x}^{-}(0))(x(0)-\hat{x}^{-}(0))^{T}\right],\qquad\qquad (5.74)$$

با توجه به اینکه مقادیر فوق (امید ریاضی ها) در اختیار ما نیستند :

$$\hat{x}^{-}(0)=\textit{guess}\text{ of the value of }\hat{x}^{-}(0)\text{ or of }\mathrm{E}\left[x(0)\right]\qquad\qquad (5.75)$$

$$P^{-}(0)=\textit{guess}\text{ of }\mathrm{E}\left[\left(x(0)-\hat{x}^{-}(0)\right)\left(x(0)-\hat{x}^{-}(0)\right)^{T}\right],\qquad\qquad (5.76)$$

جمع بندی معادلات فیلتر کالمن

ولیکن (۵.۷۶) تاحدودی دور از دسترس است. اما $P^{-}(0)$ ماتریسی متقارن و مثبت معین است و در بسیاری از مواقع انتخاب زیر کفایت می نماید:

$$P^{-}(0) = \lambda I \qquad \lambda > 0, \qquad (5.77)$$

یا

$$P^{-}(0) = diag(\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}), \quad \lambda_i > 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m \qquad (5.78)$$

معادلات فیلتر کالمن

Measurement Update:

$$K(n) = P^{-}(n)C^{T}\left[CP^{-}(n)C^{T} + R\right]^{-1} \qquad (5.80)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^{-}(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^{-}(n)\right] \qquad (5.81)$$

$$P(n) = P^{-}(n) - K(n)CP^{-}(n) \qquad (5.82)$$

Time Update:

$$\hat{x}^{-}(n+1) = \Phi\hat{x}(n) \qquad (5.83)$$

$$P^{-}(n+1) = \Phi P(n)\Phi^{T} + \Gamma Q\Gamma^{T} \qquad (5.84)$$

کالمن فیلتر ارائه شده برای *filtering* ($\hat{x}(n)$) یک مرحله *prediction* ($\hat{x}^{-}(n)$) است که به در کل با نام فیلتر کالمن شناخته می شود.

معادلات فیلتر کالمن

نوع دیگری از پیاده سازی فیلتر کالمن با انتخاب شرایط اولیه به صورت زیر صورت می گیرد:

$$\hat{x}(0) = guess \text{ of } \hat{x}(0) \qquad (5.87)$$

$$P(0) = guess \text{ of } E\left[\left(x(0)-\hat{x}(0)\right)\left(x(0)-\hat{x}(0)\right)^T\right] \qquad (5.88)$$

$set: \; n = 1$

Time Update:

$$\hat{x}^-(n) = \Phi\hat{x}(n-1)$$

$$P^-(n) = \Phi P(n-1)\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T$$

Measurement Update:

$$K(n) = P^-(n)C^T\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1}$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^-(n)\right]$$

$$P(n) = P^-(n) - K(n)CP^-(n)$$

معادلات فیلتر کالمن

نوع دیگری از پیاده سازی فیلتر کالمن با انتخاب شرایط اولیه به صورت زیر صورت می گیرد:

$$\hat{x}(0) = guess \text{ of } \hat{x}(0) \qquad (5.87)$$

$$P(0) = guess \text{ of } E\left[\left(x(0)-\hat{x}(0)\right)\left(x(0)-\hat{x}(0)\right)^T\right] \qquad (5.88)$$

$set: \; n = 1$

Time Update:

$$\hat{x}^-(n) = \Phi\hat{x}(n-1)$$

$$P^-(n) = \Phi P(n-1)\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T$$

Measurement Update:

$$K(n) = P^-(n)C^T\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1}$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^-(n)\right]$$

$$P(n) = P^-(n) - K(n)CP^-(n)$$

خواص فیلتر کالمن

General Properties:

۱- فیلتر کالمن یک سیستم متغیر بازمان است.

۲- با دسته بندی معادلات فیلتر کالمن، دو دسته معادله مستقل را می توان ارائه نمود:

estimate recursion:

$$K(n) = P^-(n)C^T\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1} \qquad (5.80)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^-(n)\right] \qquad (5.81)$$

$$\hat{x}^-(n+1) = \Phi\hat{x}(n) \qquad (5.83)$$

Covariance Recursion:

$$K(n) = P^-(n)C^T\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1} \qquad (5.80)$$

$$P(n) = P^-(n) - K(n)CP^-(n) \qquad (5.82)$$

$$P^-(n+1) = \Phi P(n)\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T \qquad (5.84)$$

خواص فیلتر کالمن

General Properties:

۳- توجه به معادلات ***Recursion Estimate*** نشان دهنده این نکته است که این معادلات وابسته به مشاهدات نیستند و امکان پیش محاسبه کوواریانس خطا و بهره کالمن بدون هیچگونه مشاهده ای وجود دارد.

Riccati Equation:

$$\left.\begin{matrix}(5.84)\\(5.82)\end{matrix}\right\} \rightarrow P^-(n+1) = \Phi P^-(n)\Phi^T - \Phi K(n)CP^-(n)\Phi^T + \Gamma Q(n)\Gamma^T$$

Riccati Equation:

$$\overset{(5.80)}{\Longrightarrow} P^-(n+1) = \Phi\left\{P^-(n) - P^-(n)C^T\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1}CP^-(n)\right\}\Phi^T + \Gamma Q(n)\Gamma^T \qquad (5.89)$$

خواص فیلتر کالمن

Error Systems

به منظور بررسی پایداری فیلتر کالمن از بررسی خطای تخمین استفاده می شود. لذا:

$$E[\tilde{x}(n)] = E[x(n) - \hat{x}(n)]$$
$$= E\left[\Phi x(n-1) + \Gamma(n-1)\omega(n-1) - \Phi\hat{x}(n-1) - K(n)[z(n) - C\Phi\hat{x}(n-1)]\right]$$
$$= E\left[\Phi x(n-1) + \Gamma(n-1)\omega(n-1) - \Phi\hat{x}(n-1) \right. \quad (5.90)$$
$$\left. -K(n)\left\{C\left[\Phi x(n-1) + \Gamma(n-1)\omega(n-1)\right] + v(n) - C\Phi\hat{x}(n-1)\right\}\right]$$
$$= \left[I - K(n)C\right]\Phi E[\tilde{x}(n-1)]$$

$$Estimation\,Error \; \boxed{E[\tilde{x}(n)] = \left[I - K(n)C\right]\Phi E[\tilde{x}(n-1)]}$$

$$\Phi E[\tilde{x}(n)] = \Phi\left[I - K(n)C\right]\Phi E[\tilde{x}(n-1)]$$
$$\longrightarrow E[\tilde{x}^-(n+1)] = \Phi\left[I - K(n)C\right]E[\tilde{x}^-(n)]$$
$$\longrightarrow E[\tilde{x}^-(n)] = \Phi\left[I - K(n-1)C\right]E[\tilde{x}^-(n-1)] \quad (5.92)$$

فرم معادل فیلتر کالمن

با استفاده از لم معکوس سازی ماتریس می توان معادلات فیلتر کالمن را به نحو دیگری ارائه نمود که بر اساس آن بتوان *Kalman Smoother* را ساده تر بیان کرده و پایداری فیلتر کالمن را اثبات نمود.

Matrix Inversion Lemma :

$$(A_{11}^{-1} + A_{12}A_{22}A_{21})^{-1} = A_{11} - A_{11}A_{12}(A_{21}A_{11}A_{12} + A_{22}^{-1})^{-1}A_{21}A_{11} \quad (5.93)$$

$$\xrightarrow{(5.81)} \hat{x}(n) = [I - k(n)C]P^-(n)(P^-(n))^{-1}\hat{x}^-(n) + K(n)z(n)$$
$$= P(n)\left((P^-(n))^{-1}\Phi\hat{x}(n-1)\right) + K(n)z(n) \quad (5.94)$$
$$= P(n)\left[(P^-(n))^{-1}\Phi\hat{x}(n-1) + P^{-1}(n)K(n)z(n)\right]$$

فرم معادل فیلتر کالمن

از طرفی:

$$P(n)=P^{-}(n)-P^{-}(n)C^{T}[CP^{-}(n)C^{T}+R]^{-1}CP^{-}(n)$$

با استفاده از لم معکوس سازی ماتریس:

$$P^{-1}(n)=(P^{-}(n))^{-1}+(P^{-}(n))^{-1}P^{-}(n)C^{T}\times$$
$$\left[-CP^{-}(n)(P^{-}(n))^{-1}P^{-}(n)C^{T}+\left(CP^{-}(n)C^{T}+R\right)\right]^{-1}CP^{-}(n)(P^{-}(n))^{-1}.$$
$$P^{-1}(n)=(P^{-}(n))^{-1}+C^{T}\times\left[R\right]^{-1}C.$$

با ضرب معادله فوق در $K(n)$:

$$\xrightarrow{5.80} P^{-1}(n)K(n)=\left[(P^{-}(n))^{-1}+C^{T}R^{-1}C\right]P^{-}(n)C^{T}\left[CP^{-}(n)C^{T}+R\right]^{-1}$$
$$=C^{T}[I+R^{-1}CP^{-}(n)C^{T}][CP^{-}(n)C^{T}+R]^{-1}$$
$$=C^{T}R^{-1}[R+CP^{-}(n)C^{T}][CP^{-}(n)C^{T}+R]^{-1}$$
$$=C^{T}R^{-1}.$$

فرم معادل فیلتر کالمن

در نتیجه معادله (۵.۹۴) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\hat{x}(n)=P(n)\left[(P^{-}(n))^{-1}\Phi\hat{x}(n-1)+C^{T}R^{-1}z(n)\right] \qquad (5.95)$$

همچنین :

$$P(n)=P^{-}(n)-P^{-}(n)C^{T}[CP^{-}(n)C^{T}+R]^{-1}CP^{-}(n)$$

با استفاده از لم معکوس سازی ماتریس:

$$P(n)=[(P^{-}(n))^{-1}+C^{T}R^{-1}C]^{-1} \qquad (5.96)$$

معادلات جدید فیلتر کالمن

$$\hat{x}^-(n) = \Phi\hat{x}(n-1) \qquad (5.97)$$

$$P(n) = \left[(P^-(n))^{-1} + C^T R^{-1} C\right]^{-1} \qquad (5.98)$$

$$\hat{x}(n) = P(n)\left[(P^-(n))^{-1}\Phi\hat{x}(n-1) + C^T R^{-1} z(n)\right] \qquad (5.99)$$

$$P^-(n+1) = \Phi P(n)\Phi^T + \Gamma Q(n)\Gamma^T \qquad (5.100)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

فیلتر کالمن با توجه به تغییر و به روز شدن $P^-(n)$ ، $P(n)$ و $K(n)$ ذاتا یک سیستم متغیر با زمان است در هر مرحله به روز می گردد.

در حالیکه برای مدل های سیگنال/مشاهدات نامتغیر بازمان با نویز **stationary** این مقادیر به حالت ماندگاری می رسند و **steady state kalman filter** ایجاد می گردد.

با فرض رسیدن به حالت ماندگار و عدم تغییر $P^-(n)$:

$$P_\infty^- = \lim_{n\to\infty} P^-(n) \qquad (5.102)$$

Algebraic Riccati Equation(ARE):

$$(5.89) \Longrightarrow P_\infty^- = \Phi\left[P_\infty^- - P_\infty^- C^T\left(CP_\infty^- C^T + R\right)^{-1} CP_\infty^-\right]\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T \qquad (5.103)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

در نتیجه برای P_∞^- حاصل از حل معادله جبری ریکاتی، بهره کالمن و ماتریس کوواریانس خطا به صورت زیر خواهد بود:

$$K_\infty = P_\infty^- C^T (C P_\infty^- C^T + R) \qquad (5.104)$$

$$P_\infty = P_\infty^- - K_\infty C P_\infty^- \qquad (5.105)$$

$$= P_\infty^- - P_\infty^- C^T (C P_\infty^- C^T + R)^{-1} C P_\infty^- \qquad (5.106)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

مثال (۵.۱)(یافتن مدل فضای حالت):

سیگنال WSS، $s(n)$ با تابع خودهمبستگی:

$$R_s(n) = 0.5\delta(n+1) + \delta(n) + 0.5\delta(n-1), \qquad (5.107)$$

$$\xrightarrow{power\ spectral\ density} S_s(z) = 0.5z + 1 + 0.5z^{-1} \qquad (5.108)$$

اندازه گیری سیگنال نیز با حضور نویز سفید $\omega(n)$ با واریانس $\sigma_\omega^2 = 2$ انجام می پذیرد. همچنین سیگنال و نویز غیرهمبسته هستند.

یکی از روش های تعیین مدل فضای حالت، استفاده از تابع چگالی طیفی به صورت

$$S_s(z) = S_s^+(z) S_s^+(z^{-1})$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال (۵.۱)(یافتن مدل فضای حالت):

و می توان $S_s^+(z)$را به صورت یک سیستم LTI با ورودی نویز سفید با واریانس واحد در نظر گرفت و با تحقق آن می توان به یک مدل فضای حالت دست یافت.

لذا:

$$S_s(z)=0.5z+1+0.5z^{-1} \quad =a(1-bz)a(1-bz^{-1})=a^2[-bz+(1+b^2)-bz^{-1}].$$

درنتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} a^2(1+b^2)=1 \\ -a^2b=0.5 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a^4-4a^2+1=0 \quad \Rightarrow S_s^+(z)=\frac{1+z^{-1}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال(۵.۱) (یافتن مدل فضای حالت):

با استفاده از تحقق رویتگر:

$$\begin{cases} x'(n+1)=0x'(n)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\omega'(n) \\ s(n)=x'(n)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\omega'(n) \end{cases}$$

که $\omega'(n)$ نویز سفید با میانگین ثابت و واریانس واحد را نشان می دهد.

با تعریف بردار حالت جدید به صورت:

$$X(n)\stackrel{\Delta}{=}\begin{bmatrix} s(n) \\ x'(n+1) \end{bmatrix},$$

$$X(n+1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}X(n)+\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\omega'(n+1)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال (۵.۱)(یافتن مدل فضای حالت):

با فرض $\omega(n)=\omega'(n+1)$:

$$X(n+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}X(n)+\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\omega(n)$$

$$s(n)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}X(n).$$

$$z(n)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}X(n)+v(n)$$

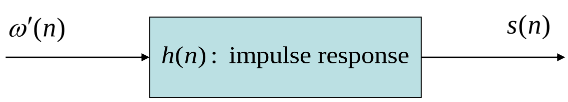
که $R_v(n)=2\delta(n)$ است، $\omega(n)$ و $v(n)$ ناهمبسته هستند.

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

مثال (۵.۲)(یافتن مدل فضای حالت-۲):

در اینجا روش دوم استخراج یک مدل فضای حالت با استفاده از اطلاعات تابع خود همبستگی و تئوری سیستم های خطی ارائه می گردد.

$$R_s(n)=0.5\delta(n+1)+\delta(n)+0.5\delta(n-1), \qquad (5.107)$$



$$\omega':\begin{cases}\text{white noise}\\ \sigma_\omega^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ R_s(n)=h(n)*h(-n)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال (۵.۲)(یافتن مدل فضای حالت-۲):

اگر $h(n)$ از مرتبه N باشد، $R_s(n)$ از مرتبه $2N-1$ خواهد بود.

$$(5.107) \rightarrow N=2 \quad \Rightarrow s(n) = a\omega'(n) + b\omega'(n-1)$$

$$\Rightarrow \quad R_s(n) = \begin{cases} a^2+b^2=1, & n=0 \\ ab=1/2 & n=\pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x(n) \triangleq \begin{bmatrix} s(n) \\ \omega'(n) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \omega'(n+1) \\ s(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(n). \end{cases}$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال (۵.۲)(یافتن مدل فضای حالت-۲):

assume: $\omega'(n+1) = \omega(n)$

$$x(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \omega(n) \qquad (5.109)$$

$$s(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(n) \qquad (5.110)$$

$$z(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(n) + v(n) \qquad (5.111)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

مثال (۵.۳)(محاسات در SSKF):

برای SMM مثال (۵.۲):

$$\begin{cases} x(n+1)=\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(n)+\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \omega(n) & (5.109) \\ s(n)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(n) & (5.110) \\ z(n)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(n)+v(n) & (5.111) \\ R_v(n)=2\delta(n) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} P_\infty^- = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \\ (5.103) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(a+2)b-c^2}{2(a+2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال (۵.۳)(محاسات در SSKF):

$$b = 1$$

$$c = 1/\sqrt{2}$$

$$a = \frac{(a+2)(1)-(1/\sqrt{2})^2}{2a+4} \Rightarrow 2a^2+2a-7/2=0 \Rightarrow a=-0.5\pm\sqrt{2}$$

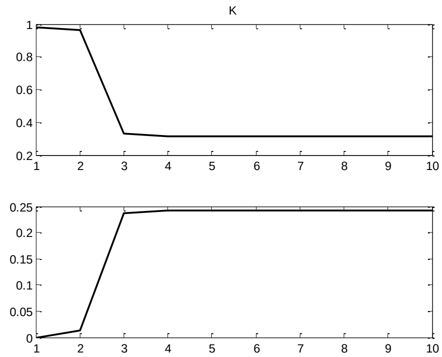
$$\xrightarrow{P_\infty^- > 0} a = -0.5+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad P_\infty^- = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-0.5 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.9142 & 0.7071 \\ 0.7071 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.112)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

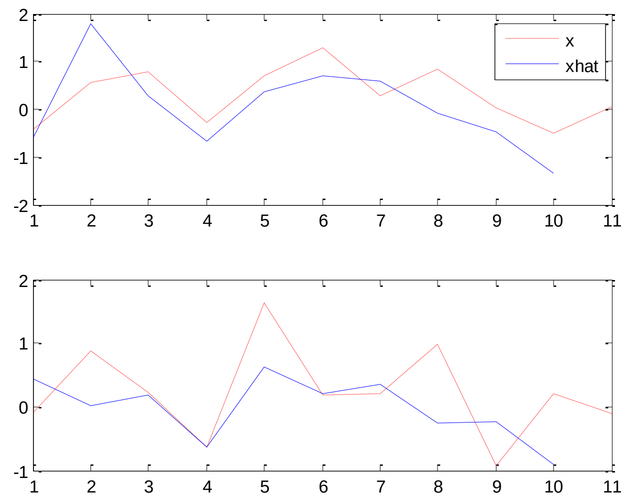
ادامه مثال (۵.۳)(محاسات در SSKF):

$$\xrightarrow{(5.104)} \qquad K_\infty = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}-1/2}{\sqrt{2}+3/2} \\ \dfrac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3/2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.3137 \\ 0.2426 \end{bmatrix}. \qquad (5.113)$$



The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال (۵.۳)(محاسات در SSKF):



Input-Output form of Kalman Filter

برای SSKF ، که یک سیستم خطی است:

$$\left.\begin{matrix}(5.81)\\(5.83)\\(5.86)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\hat{x}^-(n+1)=\Phi\left[I-K_\infty C\right]\hat{x}^-(n)+\Phi K_\infty z(n) & (5.114)\\ \hat{s}^-(n)=C\hat{x}^-(n). & (5.115)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad H_{SSKF\_predictor}(z)=C\left(zI-\Phi[I-K_\infty C]\right)^{-1}\Phi K_\infty. \qquad (5.116)$$

$$\Rightarrow \quad H_{SSKF\_filtering}(z)=C\left(zI-[I-K_\infty C]\Phi\right)^{-1}K_\infty$$

Causal Wiener filter and SSKF

لازم به ذکر است که یک تخمینگر خطی و **causal** منحصر به فرد است.
لذا، می توان گفت دو تخمینگر بالا تقریبا یکی هستند. ولیکن:

$$SSKF: \quad (5.115)\rightarrow \hat{s}^-(n)=C\hat{x}^-(n)+0z(n),$$

$$\rightarrow \hat{s}^-(n)=\sum_{i=1}^{n} b(i)z(n-i) \qquad (5.117)$$

$$Causal\ Wiener\ Filter: \quad \hat{s}(n)=\sum_{i=0}^{n} a(i)z(n-i). \qquad (5.118)$$

$$\left.\begin{matrix}(5.117)\\(5.118)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b(0)=0\\ a(0)\neq 0\\ SSKF: \quad \text{one-step prediciotn}\\ C.\ Wiener\ F.: \text{filtering}\end{cases}$$

Causal Wiener filter and SSKF

مثال (۵.۵) (مقایسه دو تخمینگر در پیش بینی):

برای SMM مثال (۵.۳) دو تخمینگر SSKF و Causal Wiener Filter به صورت زیر خواهند بود:

۱- SSKF:

$$(5.114) \rightarrow \hat{s}^{-}(n+1) = C\hat{x}^{-}(n+1) = C\Phi[I - K_{\infty}C]\hat{x}^{-}(n) + C\Phi K_{\infty} z(n).$$

$$\Rightarrow H_{SSKF,pred}(z) = C\Phi(I - K_{\infty}C)[zI - \Phi(I - K_{\infty}C)]^{-1}\Phi K_{\infty} + C\Phi K_{\infty}$$

$$\xrightarrow[(5.113)]{(5.112)} H_{SSKF,pred}(z) = \frac{0.1716}{1 + 0.1716z^{-1}},$$

Causal Wiener filter and SSKF

ادامه مثال (۵.۵) (مقایسه دو تخمینگر در پیش بینی):

۲-Causal Wiener Predictor:

$$H_{Wiener,pred}(z) = \frac{1}{S_z^{+}(z)}\left[\frac{zS_{sz}(z)}{S_z^{-}}\right]_{+}$$

$$S_z^{+}(z) = 1.7071(1 + 0.1716z^{-1})$$

$$\left[\frac{zS_{sz}(z)}{S_z^{-}(z)}\right]_{+} = \left[\frac{0.5z + 1 + 0.5z^{-1}}{1.7071(1 + 0.1716z)}\right]_{+}$$

$$= \left[0.2929 + 1.7029z - \frac{1.1714}{z^{-1} + 0.1716}\right]_{+} = 0.2929$$

Causal Wiener filter and SSKF

ادامه مثال (۵.۵) (مقایسه دو تخمینگر در پیش بینی):

۲-Causal Wiener Predictor:

$$\Rightarrow H_{Wiener,pred}(z) = \frac{1}{1.7071(1+0.1716z^{-1})} \times 0.2929 = \frac{0.1716}{1+0.1716z^{-1}}.$$

مقایسه دو تابع تبدیل $H_{SSKF,pred}(z)$ و $H_{Wiener,pred}(z)$ نشان از معادل بودن این دو تخمینگر دارد.

Causal Wiener filter and SSKF

مثال (۵.۶) (مقایسه دو تخمینگر در حالت **filtering**):

۱-SSKF:

$$\left.\begin{array}{r}(5.83)\\(5.114)\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{x}(n) = (I - K_\infty C)\hat{x}^-(n) + K\ z(n).$$

$$\Rightarrow \hat{s}(n) = C\hat{x}(n) = C(I - K_\infty C)\hat{x}^-(n) + CK_\infty z(n),$$

$$\Rightarrow H_{SSKF,filt}(z) = C(I - K_\infty C)[zI - \Phi(I - K_\infty C)]^{-1}\Phi K_\infty + CK_\infty$$

$$Example(5.3) \xrightarrow[(5.113)]{(5.112)} H_{SSKF,filt}(z) = 1 - \frac{0.6863}{1+0.1716z^{-1}}$$

Causal Wiener filter and SSKF

مثال (۵.۶) (مقایسه دو تخمینگر در حالت filtering):

۱-Causal Wiener Filter:

$$H_{SSKF,\,filt}(z) = \frac{1}{S_z^+(z)}\left[\frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ = \frac{1}{S_z^+(z)}\left[\frac{0.5z+1\_0.5z^{-1}}{1.7071(1+0.1716z)}\right]_+$$

$$= \frac{1}{S_z^+(z)}\left[0.2929z^{-1}+0.5355+\frac{0.2010}{z^{-1}+0.1716}\right]_+$$

$$= \frac{1}{1.7071(1+0.1716z^{-1})}\times(0.2929z^{-1}+0.5355)$$

$$= 1-\frac{0.6863}{1+0.1716z^{-1}}.$$

The SSKF estimator:

دو قضیه ای که در ادامه ارائه می گردند، جایگاه استفاده از SSKF را در SMM های <u>نامتغیر بازمان و با حضور نویز Stationary</u> روشن می کنند:

<u>قضیه ۵.۱:</u> اگر $\sqrt{Q}$ ماتریسی باشد که $\sqrt{Q}\sqrt{Q}^T = Q > 0$ و زوج $(\Phi,\Gamma\sqrt{Q})$ پایدارپذیر باشند. آنگاه زوج (Φ,C) آشکارپذیر خواهند بود <u>اگر و فقط اگر</u>:

- **SSKF وجود دارد.**
- **SSKF بدون بایاس خواهد بود.**
- **P_∞^- یک حل محدود منحصر به فرد <u>مثبت نیمه معین</u> برای معادله ریکاتی (۵.۱۰۳) خواهد بود.**
- **مقدار P_∞^- مستقل از $P^-(0) \ge 0$ خواهد بود.**

The SSKF estimator:

نتیجه قضیه فوق را به منظور سادگی در استفاده از آن به صورت زیر می توان استفاده کرد:

قضیه ۵.۲: اگر $Q>0$ و زوج $\left(\Phi,\Gamma\sqrt{Q}\right)$ کنترل پذیر باشد و زوج $\left(\Phi,C\right)$ رویت پذیر باشد آنگاه:

- **SSKF** وجود دارد.
- **SSKF** بدون بایاس خواهد بود.
- P_{∞}^{-} یک حل محدود منحصر به فرد مثبت نیمه معین برای معادله ریکاتی (۵.۱۰۳) خواهد بود.
- مقدار P_{∞}^{-} مستقل از $P^{-}(0)\geq 0$ خواهد بود.