



باسمہ تعالیٰ

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 6

Innovations

مقدمه

- در فصل قبل فیلتر کالمن به عنوان یک فیلتر برگشتی معرفی گردید.

• در این فصل:

- معرفی بحث خطای تخمین تحت عنوان *Innovation*
- کاربرد *Innovation* و اطلاعات موجود در آن در خصوص تخمین
- امکان بازنویسی فیلتر کالمن بر اساس تعریف *Innovation*
- نحوه استفاده از فیلتر کالمن برای SMM های متغیر با زمان
- شرایط واگرایی فیلتر کالمن

The Innovations

- در فیلتر کالمن:

$$Z^- = \{z(1) \ \cdots \ z(n-1)\} \rightarrow \hat{x}^-(n) \left. \vphantom{\hat{x}^-(n)} \right\} \xrightarrow{z(n)} \hat{x}(n)$$

- اطلاعات جدید موجود مشاهده $z(n)$ را *innovation* می نامند.
- همچنین اطلاعات جدید موجود در هر مشاهده تشکیل یک سیگنال تصادفی می دهند که به آنها *innovations* گویند.
- *innovations* دارای خواص جالب توجهی هستند و دیدگاه جدیدی را نسبت به مساله تخمین ایجاد می نمایند.

The Innovations

- تعریف *innovations*:

$$\varepsilon(n) = z(n) - C\hat{x}^-(n) \quad (6.1)$$

$$= z(n) - \hat{z}^-(n) \quad (6.2)$$

در این تعریف $\hat{z}^-(n)$ عبارت است از تخمین LMMSE از مشاهده $z(n)$ با استفاده از Z^- :

$$\hat{z}^-(n) = C\hat{x}^-(n) \quad (6.3)$$

با توجه به اینکه:

$$\left. \begin{aligned} z(n) &= Cx(n) + v(n) \\ \hat{z}^-(n) &= C\hat{x}^-(n) + \hat{v}^-(n) \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{v}^-(n) = E[v(n)] = 0$$

The Innovations

• اطلاعات جدید در *innovations*:

Innovations حاوی اطلاعات جدیدی از مشاهده $z(n)$ است که به صورت خطی قابل پیش بینی خطی از Z^- نیست.

$$z(n) = \hat{z}^-(n) + \varepsilon(n)$$

• **Orthogonality**:

innovations بر مشاهدات عمود است.

$$E[\varepsilon(n)z^T(i)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (6.4)$$

Proof: $\hat{E}[\varepsilon(n)z^T(i)] = E[(z(n) - \hat{z}^-(n))z^T(i)]$

$$= E[(Cx(n) + v(n) - C\hat{x}^-(n))z^T(i)]$$

$$= CE[(x(n) - \hat{x}^-(n))z^T(i)] - E[v(n)z^T(i)] = 0 \quad (6.8)$$

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

5

The Innovations

• **Uncorrelatedness/White Noise**:

$$E[\varepsilon(i)\varepsilon^T(j)] = 0 \quad i \neq j \quad (6.5)$$

Proof:

$$E[\varepsilon(i)\varepsilon^T(n)] = E[(z(i) - \hat{z}^-(i))\varepsilon^T(n)]$$

$$= E[z(i)\varepsilon^T(n)] - E[\hat{z}^-(i)\varepsilon^T(n)]$$

$$= E[z(i)\varepsilon^T(n)] - \sum_{j=1}^{i-1} A_j(j)E[z(j)\varepsilon^T(n)] = 0 \quad (6.14)$$

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

6

The Innovations

• *innovations* حاوی اطلاعات معادل اطلاعات مشاهدات هستند.

$\{z(1) \cdots z(n)\}$: Linear Combination of $\{\varepsilon(1) \cdots \varepsilon(n)\}$

• **Orthogonality**:

innovations بر مشاهدات عمود است.

$$E[\varepsilon(n)z^T(i)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (6.4)$$

• **Uncorrelatedness/White Noise**:

$$E[\varepsilon(i)\varepsilon^T(j)] = 0 \quad i \neq j \quad (6.5)$$

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

7

The Innovations

• **LMMSE تخمین**:

به عنوان نتیجه ای از خواص قبلی

$$\hat{x}(n) = \sum_{j=1}^n E[x(n)\varepsilon^T(j)] \left(E[\varepsilon(j)\varepsilon^T(j)] \right)^{-1} \varepsilon(j) \quad (6.6)$$

• **LMMSE تخمین بازگشتی**:

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + E[x(n)\varepsilon^T(n)] \left(E[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)] \right)^{-1} \varepsilon(n) \quad (6.7)$$

* لازم به ذکر است که مجموعه $\{z(0), \dots, z(n)\}$ شامل اطلاعات موازی - تکراری است، در حالیکه در مجموعه *innovations* $\{\varepsilon(0), \dots, \varepsilon(n)\}$ چنین اطلاعاتی وجود ندارد.

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

8

بررسی خطا

- کاربرد جالب توجه *innovations*:

امکان مشاهده و بررسی نحوه عملکرد فیلتر کالمن با استفاده از خاصیت سفید بودن سیگنال *innovations*.

$$\begin{aligned}\varepsilon(n) &= z(n) - \hat{z}^-(n) \\ &= x(n) - C\hat{x}^-(n)\end{aligned}\quad (6.28)$$

$\varepsilon(n)$ should be zero mean white noise

- البته لازم است $\hat{x}^-(0) = E[x(0)]$ باشد تا بدون بایاس بودن تخمین تضمین گردد.
- اگر سیگنال $\varepsilon(n)$ نویز سفید نباشد لازم است طراحی فیلتر مجددا صورت پذیرد. به عبارت دیگر این امکان وجود دارد که مدل دقیق نبوده باشد یا نویزهای $\omega(n)$ و $v(n)$ رنگی و/یا **correlated** باشند.

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

9

Time-varying State Modeled and Non-stationary Noises

- مدل حالت متغیر با زمان:

$$x(n+1) = \Phi(n+1, n)x(n) + \Gamma(n)\omega(n), \quad x(0) = x_0, \quad (6.29)$$

$$s(n) = C(n)x(n), \quad (6.30)$$

$$z(n) = s(n) + v(n), \quad (6.31)$$

که $\Phi(n+1, n)$ ، $\Gamma(n)$ و $C(n)$ توابع معلوم غیر تصادفی هستند. همچنین:

$$E[\omega(i)\omega^T(j)] = Q(i)\delta(i-j), \quad (6.32)$$

$$E[v(i)v^T(j)] = R(i)\delta(i-j), \quad (6.33)$$

که $Q(n)$ و $R(n)$ توابع معلومی از n هستند.

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

10

Time-varying State Modeled and Non-stationary Noises

• کالمن فیلتر برای سیستم متغیر به زمان

Measurement Update:

$$K(n) = P^-(n)C^T(n)[C(n)P^-(n)C^T(n) + R(n)]^{-1} \quad (6.34)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)[z(n) - C(n)\hat{x}^-(n)] \quad (6.35)$$

$$P(n) = P^-(n) - K(n)C(n)P^-(n) \quad (6.36)$$

Time Update:

$$\hat{x}^-(n+1) = \Phi(n+1, n)\hat{x}(n) \quad (6.37)$$

$$P^-(n+1) = \Phi(n+1, n)P(n)\Phi^T(n+1, n) + \Gamma(n)Q(n)\Gamma^T(n) \quad (6.38)$$

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

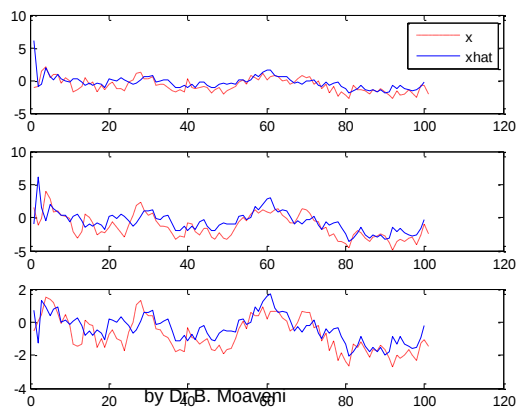
11

Time-varying State Modeled and Non-stationary Noises

مثال:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 1 \\ 1.2 & 0.4 & -0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = 4, \quad R = \text{diag}([80 \ 66 \ 25])$$



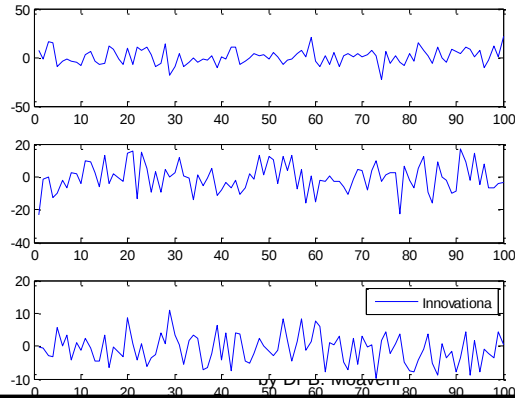
12

Time-varying State Modeled and Non-stationary Noises

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 1 \\ 1.2 & 0.4 & -0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = 4, \quad R = \text{diag}([80 \ 66 \ 25])$$

مثال:



13