باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 7

Nonlinear Estimation

مقدمه

- در بخش های قبلی فیلتر کالمن برای SMM های خطی معرفی گشت. ولیکن در بسیاری از موارد SMM ها به صورت غیرخطی بیان می شوند.
- لذا در این بخش به معرفی *Extended Kalman Filter* خواهیم پرداخت.

The Extended Kalman Filter

- معرفی SMM غیرخطی

$$\begin{cases} x(n+1) = \phi(x(n)) + \Gamma\omega(n) & (8.1) \\ z(n) = \gamma(x(n)) + v(n) & (8.2) \end{cases}$$

$\omega(n):$ zero mean white noise

$$E\left[\omega(i)\omega^T(j)\right] = Q_{m\times m}\delta(i-j);$$

where, $Q:$ covariance matrix

$v(n):$ zero mean white noise

$$E\left[v(i)v^T(j)\right] = R_{p\times p}\delta(i-j);$$

where, $R:$ covariance matrix

$v(n)$ and $\omega(n):$ uncorrellated

The Extended Kalman Filter

- معرفی SMM غیرخطی

$$\begin{cases} x_{m\times 1}(n+1) = \phi_{m\times 1}(x(n)) + \Gamma\omega(n) & (8.1) \\ z_{p\times 1}(n) = \gamma_{p\times 1}(x(n)) + v(n) & (8.2) \end{cases}$$

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_m(x) \end{bmatrix} \qquad \gamma(x) = \begin{bmatrix} \gamma_1(x) \\ \gamma_2(x) \\ \vdots \\ \gamma_p(x) \end{bmatrix}$$

$\phi_i(x), \gamma_j(x):$ scalar valued functions

خطی سازی مدل سیگنال/مشاهدات

- با توجه به اینکه فیلتر کالمن مدل خطی سیگنال/مشاهدات را برای تخمین در نظر می گیرد می توان از مدل خطی سازی شده **SMM** استفاده نمود. لذا:

$$\phi(x(n)) = \phi(\hat{x}(n)) + J_\phi(\hat{x}(n))\left[x(n) - \hat{x}(n)\right] + \dots \qquad (8.3)$$

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_m(x) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad J_\phi(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} \qquad (8.4)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

خطی سازی مدل سیگنال/مشاهدات

- به طور مشابهی برای تابع $\gamma(x(n))$ حول $\hat{x}^-(n)$ خواهیم داشت:

$$\gamma(x(n)) = \gamma(\hat{x}^-(n)) + J_\gamma(\hat{x}^-(n))\left[x(n) - \hat{x}^-(n)\right] + \dots \qquad (8.5)$$

- در نتیجه:

$$x(n+1) = \phi(\hat{x}(n)) + J_\phi(\hat{x}(n))\left[x(n) - \hat{x}(n)\right] + \Gamma\omega(n) \qquad (8.6)$$

$$z(n) = \gamma(\hat{x}^-(n)) + J_\gamma(\hat{x}^-(n))\left[x(n) - \hat{x}^-(n)\right] + v(n) \qquad (8.7)$$

و از این مدل جهت اعمال فیلتر کالمن توسعه یافته (**EKF**) استفاده می شود.

The Extended Kalman Filter

- **Time Update:**

مشابه استخراج معادلات فیلتر کالمن در این مرحله تخمین *a priori* از $\hat{x}^{-}(n)$ ارائه می گردد:

$$\xrightarrow{Unbiased\ \ Estimation} E\left[x(n)-\hat{x}^{-}(n)\,|\,Z^{-}\right]=0$$

$$\hat{x}^{-}(n)=E\left[x(n)\middle|Z^{-}\right] \qquad (8.8)$$

$$=E\left[\phi(\hat{x}(n-1))+J_{\phi}(\hat{x}(n-1))\left[x(n-1)-\hat{x}(n-1)\right]+\Gamma\omega(n\text{-}1)\middle|Z^{-}\right] \qquad (8.9)$$

$$\Rightarrow \hat{x}^{-}(n)=\phi(\hat{x}(n-1))+J_{\phi}(\hat{x}(n-1))E\left[x(n-1)-\hat{x}(n-1)\middle|Z^{-}\right]$$

$$+\Gamma E\left[\omega(\text{n-1})\middle|Z^{-}\right]$$

The Extended Kalman Filter

- **Time Update:**

$$\xrightarrow{Unbiased\ \ Estimation} E\left[x(n-1)-\hat{x}(n-1)\middle|Z^{-}\right]=0$$

$$\longrightarrow E\left[\omega(n-1)\middle|Z^{-}\right]=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{x}^{-}(n)=\phi(\hat{x}(n-1))}$$

در بخش به روز رسانی زمانی لازم است تخمین ماتریس کوواریانس شرطی نیز محاسبه گردد. لفظ شرطی به این دلیل اضافه می گردد که از مدل خطی سازی شده و به ازای مشاهدات Z^{-} این ماتریس محاسبه می گردد.

The Extended Kalman Filter

- **Time Update:**

$$P^-(n) = Cov\left[x(n) - \hat{x}^-(n) \middle| Z^-\right] \qquad (8.11)$$

$$= E\left[(x(n) - \hat{x}^-(n))(x(n) - \hat{x}^-(n))^T \middle| Z^-\right] \qquad (8.12)$$

$$\Rightarrow \quad P^-(n) = Cov\left[\phi(\hat{x}(n-1)) + J_\phi(\hat{x}(n-1))\tilde{x}(n-1) + \Gamma\omega(n\text{-}1) \text{-} \hat{x}^-(n) \middle| Z^-\right]$$

$$\Rightarrow \; P^-(n) = Cov[J_\phi(\hat{x}(n-1))\tilde{x}(n-1) + \Gamma\omega(n\text{-}1) | Z^-] \qquad (8.13)$$

با توجه به استقلال خطای تخمین از نویز فرایند خواهیم داشت:

The Extended Kalman Filter

- **Time Update:**

$$\Rightarrow \quad P^-(n) = J_\phi(\hat{x}(n-1)Cov\left[\tilde{x}(n-1) \middle| Z^-\right] J_\phi^T(\hat{x}(n\text{-}1)) + \Gamma Q(n\text{-}1)\Gamma^T \qquad (8.14)$$

در صورتیکه:

$$P(n) = Cov\left[\tilde{x}(n) \middle| Z\right] = Cov\left[x(n) - \hat{x}(n) \middle| Z\right] \qquad (8.15)$$

آنگاه:

$$\boxed{P^-(n) = J_\phi(\hat{x}(n-1)P(n-1)J_c^T(\hat{x}(n\text{-}1)) + \Gamma Q(n\text{-}1)\Gamma^T \qquad (8.16)}$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

در این مرحله با فرض بدون بایاس بودن تخمین $\hat{x}^{-}(n)$ و متعامد بودن خطای تخمین $\tilde{x}^{-}(n)$ بر مشاهدات $z(n-1),\dots,z(2),z(1)$ به دنبال یافتن تخمین $\hat{x}(n)$ به صورت زیر خواهیم بود:

$$\hat{x}(n)=b(n)+K(n)z(n) \qquad (8.17)$$

با توجه به اینکه تخمین $\hat{x}(n)$ بدون بایاس است لذا:

$$E\left[x(n)-\hat{x}(n)\middle|Z\right]=0$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

با جایگزینی معادلات (۸.۷) و (۸.۱۷) در معادله قبل:

$$E\left[x(n)-b(n)-K(n)\left[\gamma(\hat{x}^{-}(n))+J_{\gamma}(\hat{x}^{-}(n))\tilde{x}^{-}(n)+v(n)\right]\middle|Z\right]=0$$

لازم به ذکر است که$\hat{x}^{-}(n)$ ثابت است چرا که فقط به Z^{-} وابسته است نه به $z(n)$ آخرین مشاهده. در نتیجه:

$$b(n)=E\left[b(n)\middle|Z\right]=-K(n)\gamma(\hat{x}^{-}(n))-K(n)J_{\gamma}(\hat{x}^{-}(n))E[\tilde{x}^{-}(n)|Z]$$
$$+E[x(n)|Z]-K(n)E[v(n)|Z] \qquad (8.18)$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

در حالیکه

$$\xrightarrow{Unbiased\ \ Estimation} E[\tilde{x}^{-}(n)\,|\,Z] = 0$$

$$E[v(n)\,|\,Z] = 0$$

$$\Rightarrow b(n) = -K(n)\gamma(\hat{x}^{-}(n)) + E[x(n)\,|\,Z]$$

$$\xrightarrow{(8.8)} \quad b(n) = \hat{x}^{-}(n) - K(n)\gamma(\hat{x}^{-}(n))$$

$$\xrightarrow{(8.17)} \quad \boxed{\hat{x}(n) = \hat{x}^{-}(n) + K(n)[z(n) - \gamma(\hat{x}^{-}(n))] \qquad (8.19)}$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

برای یافتن ماتریس $K(n)$ از اصل تعامد استفاده می شود:

$$E\Big[\big(x(n) - \hat{x}(n)\big) z^{T}(i)\,|\,Z\Big] = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (8.20)$$

$$\xrightarrow{(8.19)} \quad E\Big[\Big\{x(n) - \hat{x}^{-}(n) - K(n)\big[z(n) - \gamma(\hat{x}^{-}(n))\big]\Big\} z^{T}(i)\,|\,Z\Big] = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$$\Rightarrow \quad E\Big[\Big\{\tilde{x}^{-}(n) - K(n)\big[z(n) - \gamma(\hat{x}^{-}(n))\big]\Big\} z^{T}(i)\,|\,Z\Big] = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (8.21)$$

که

$$E\big[\tilde{x}^{-}(n) z^{T}(i)\,|\,Z\big] = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

لذا برای $i=n$ **و با استفاده از رابطه (۸.۷):**

$$E\Big[\Big(\tilde{x}^-(n)-K(n)J_\gamma(\hat{x}^-(n))\tilde{x}^-(n)-K(n)v(n)\Big)$$

$$\times\ \Big(\gamma(\hat{x}^-(n))+J_\gamma(\hat{x}^-(n))\tilde{x}^-(n)+v(n)\Big)^T\,\big|Z\Big]=0 \qquad (8.22)$$

با توجه به شرط بدون بایاس بودن تخمین و مستقل بودن از مشاهده $z(n)$ **:**

$$E\left[\tilde{x}^-(n)\middle|Z=Z\right]=\ E\left[\tilde{x}^-(n)\middle|Z^-=Z^-\right]=0$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

رابطه (۸.۲۲) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n))-K(n)J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n))-K(n)R(n)=0$$

در نتیجه بهره فیلتر کالمن در ***EKF*** **عبارت خواهد بود از:**

$$\boxed{K(n)=P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n))\Big[J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n))+R(n)\Big]^{-1} \qquad (8.23)}$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

همچنین برای ماتریس کوواریانس شرطی خطا خواهیم داشت:

$$P(n) = Cov\left[x(n) - \hat{x}^-(n) - K(n)\left[J_\gamma(\hat{x}^-(n))\tilde{x}^-(n) + v(n)\right] \middle| Z\right]$$
$$= P^-(n) - P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n))K^T(n) - K(n)J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n)$$
$$+K(n)\left[J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n)) + R(n)\right]K^T(n) \qquad (8.24)$$

با جایگزینی از رابطه (۸.۲۳) خواهیم داشت:

$$\boxed{P(n) = P^-(n) - K(n)J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n) \qquad (8.25)}$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

$$K(n) = P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n))[J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n)) + R(n)]^{-1} \qquad (8.26)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)[z(n) - \gamma(\hat{x}^-(n))] \qquad (8.27)$$

$$P(n) = P^-(n) - K(n)J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n) \qquad (8.28)$$

- **Time Update:**

$$P^-(n+1) = J_\phi(\hat{x}(n))P(n)J_\phi^T(\hat{x}(n)) + \Gamma Q(n)\Gamma^T \qquad (8.29)$$

$$\hat{x}^-(n+1) = \phi(\hat{x}(n)) \qquad (8.30)$$

The Extended Kalman Filter

مثال

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + \omega(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \dfrac{\rho_0}{2} e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2^2(k) x_3(k) - g + \omega(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \omega(k) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k) + v(k)$$

$\rho_0 = 0.0034$

$g = 32.2$

$\kappa = 32000$

$R = 100$

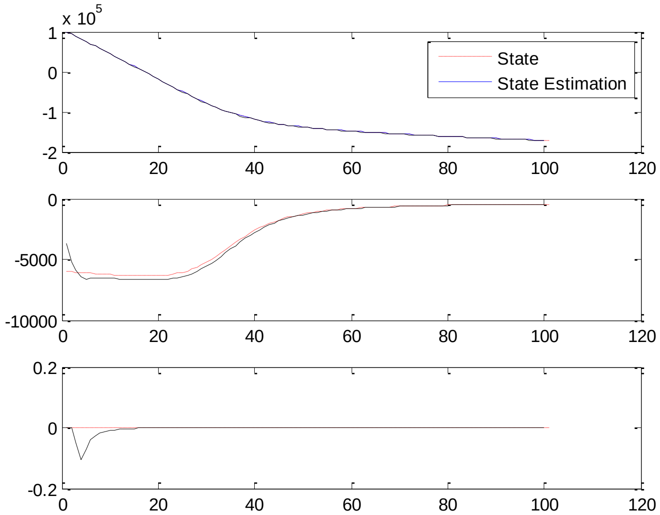
$Q = 0$

$$J_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\dfrac{\rho_0}{2\kappa} e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2^2(k) x_3(k) & 1 + \rho_0 e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2(k) x_3(k) & \dfrac{\rho_0}{2} e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2^2(k) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_\gamma = [1 \quad 0 \quad 0]$$

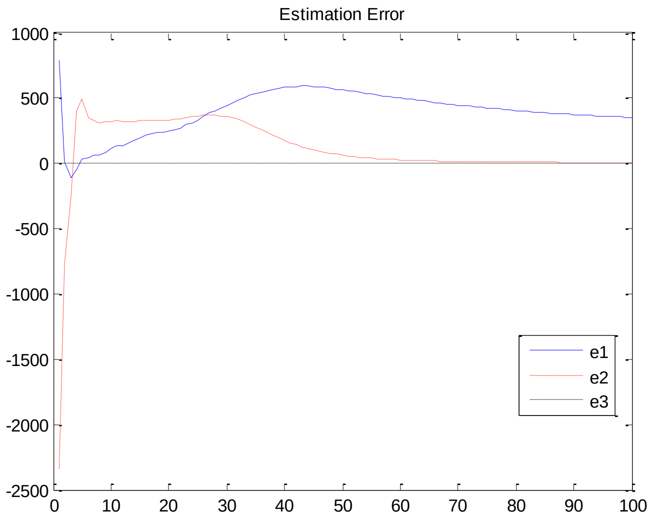
The Extended Kalman Filter

ادامه مثال



The Extended Kalman Filter

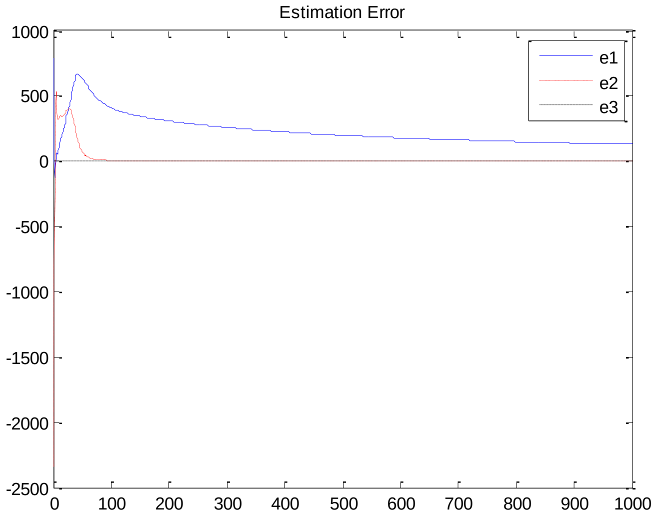
ادامه مثال



Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

The Extended Kalman Filter

ادامه مثال



Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

The Iterated Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

$$\hat{x}^{+}(n,0)=\hat{x}^{-}(n)$$

$$P^{+}(n,0)=P^{-}(n)$$

$$K(n)=P^{+}(n,i)J_{\gamma}^{T}(\hat{x}^{+}(n,i))[J_{\gamma}(\hat{x}^{+}(n,i))P^{+}(n,i)J_{\gamma}^{T}(\hat{x}^{+}(n,i))+R(n)]^{-1}$$

$$\hat{x}^{+}(n,i+1)=\hat{x}^{+}(n,i)+K(n)[z(n)-\gamma(\hat{x}^{+}(n,i))]$$

$$P^{+}(n,i+1)=P^{+}(n,i)-K(n)J_{\gamma}(\hat{x}^{+}(n,i))P^{+}(n,i)$$

$$\boxed{i=N}$$

- **Time Update:**

$$P(n)=P^{+}(n,N+1)$$

$$\hat{x}(n)=\hat{x}^{+}(n,N+1)$$

$$P^{-}(n+1)=J_{\phi}(\hat{x}(n))P(n)J_{\phi}^{T}(\hat{x}(n))+\Gamma Q(n)\Gamma^{T}$$

$$\hat{x}^{-}(n+1)=\phi(\hat{x}(n))$$

The Extended Kalman Filter

مثال

$$\begin{cases} x_1(k+1)=x_1(k)+x_2(k)+\omega(k) \\ x_2(k+1)=x_2(k)+\dfrac{\rho_0}{2}e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}}x_2^2(k)x_3(k)-g+\omega(k) \\ x_3(k+1)=x_3(k)+\omega(k) \end{cases}$$

$$y(k)=x_1(k)+v(k)$$

$\rho_0=0.0034$

$g=32.2$

$\kappa=32000$

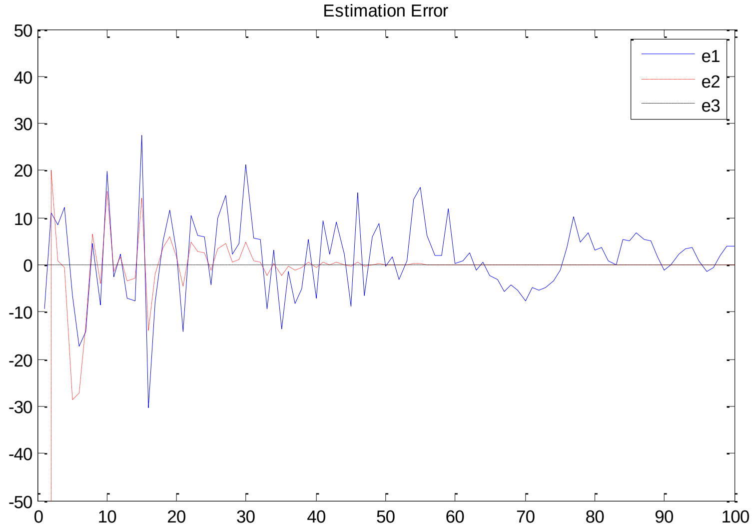
$R=100$

$Q=0$

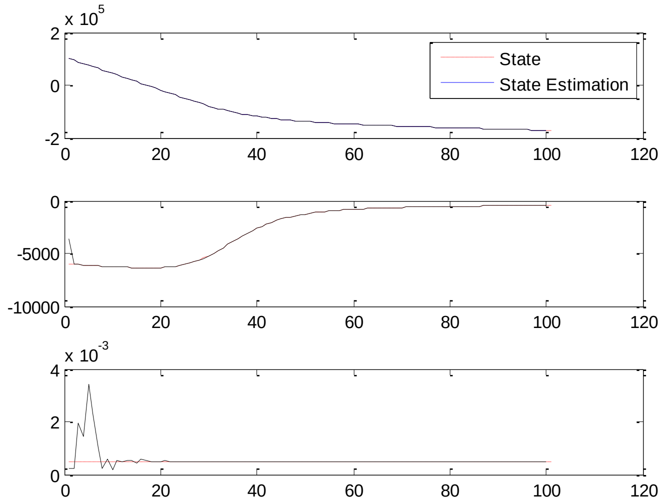
$$J_{\phi}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\dfrac{\rho_0}{2\kappa}e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}}x_2^2(k)x_3(k) & 1+\rho_0 e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}}x_2(k)x_3(k) & \dfrac{\rho_0}{2}e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}}x_2^2(k) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{\gamma}=[1\quad 0\quad 0]$$

The Iterated Extended Kalman Filter



The Iterated Extended Kalman Filter



The Iterated Extended Kalman Filter