باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 8

The correlated noise
Identification
Adaptive Kalman filtering

The Correlated Noises

- در بسیاری از کاربرد ها فرض **uncorrelated** بودن نویز فرایند و نویز اندازه گیری فرض صحیحی نیست به عبارت دیگر:

$v(n)$ and $\omega(n)$: correllated

$$E\left[\omega(i)v(j)\right] = S\delta(i-j)$$

با توجه به اینکه $v(n)$ و $\omega(n)$ نویز سفید هستند این دو سیگنال در تمام زمان ها ***correlated*** نیستند بلکه در زمان های خاص ***n*** آنها ***correlated*** هستند با ماتریس کوواریانس S.

The Correlated Noises

- معادلاتی از فیلتر کالمن که تغییر نمی کنند:

Measurement Update:

$$E\left[x(n)v(n)\right]=0 \;\longrightarrow\; \begin{aligned} &K(n)=P^{-}(n)C^{T}\left[CP^{-}(n)C^{T}+R\right]^{-1} && (5.80)\\ &\hat{x}(n)=\hat{x}^{-}(n)+K(n)\left[z(n)-C\hat{x}^{-}(n)\right] && (5.81)\\ &P(n)=P^{-}(n)-K(n)CP^{-}(n) && (5.82)\end{aligned}$$

تخمین نویز فرایند:

با توجه به رابطه (۵.۸۳)

$$\xrightarrow{(5.83)} \hat{x}^{-}(n+1)=\Phi\hat{x}(n)+\Gamma\underset{?}{\hat{\omega}(n)} \qquad (7.18)$$

The Correlated Noises

به منظور تخمین نویز فرایند مشابه تخمین $x(n)$ می توان از ***innovations*** استفاده نمود. با توجه به تعریف ***innovations*** :

$$\varepsilon(n)=z(n)-C\hat{x}^{-}(n)-\hat{v}^{-}(n)\overset{\hat{v}^{-}(n)=0}{=}z(n)-C\hat{x}^{-}(n)$$

مشابه تخمین بازگشتی حالت ها (معادله (۶.۲۲)):

$$\hat{\omega}(n)=\underset{0}{\cancel{\hat{\omega}^{-}(n)}}+E\left[\omega(n)\varepsilon^{T}(n)\right]\left(\mathrm{cov}(\varepsilon(n))\right)^{-1}\varepsilon(n) \qquad (6.22)$$

مجددا مشابه قبل و با توجه به نویز سفید بودن $\omega(n)$:

$$\hat{\omega}^{-}(n)=0$$

The Correlated Noises

همچنین

$$E\left[\omega(n)\varepsilon^T(n)\right] = E\left[\omega(n)\left(Cx(n)+v(n)-C\hat{x}^-(n)\right)\right]$$
$$= E\left[\omega(n)v^T(n)\right] = S$$

و همچنین:

$$E\left[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)\right] = CP^-(n)C^T + R$$

و در نتیجه:

$$\boxed{\hat{\omega}(n) = S\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1}\left[z(n)-C\hat{x}^-(n)\right] \qquad (7.20)}$$

The Correlated Noises

با جایگزینی معادله (۷.۲۰)، (۵.۸۰) و (۵.۸۱) در (۷.۱۸):

$$\hat{x}^-(n+1) = \Phi\hat{x}(n) + \Gamma\hat{\omega}(n)$$
$$= \Phi\left(\hat{x}^-(n) + K(n)\left[z(n)-C\hat{x}^-(n)\right]\right)$$
$$+\Gamma S\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1}\left[z(n)-C\hat{x}^-(n)\right]$$

و در نتیجه (*a priori estimation*):

$$\hat{x}^-(n+1) = \Phi\hat{x}^-(n) + \underbrace{\left[\Phi P^-(n)C^T + \Gamma S\right]\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1}}_{K_c(n)}\left[z(n)-C\hat{x}^-(n)\right]$$

$$\boxed{\hat{x}^-(n+1) = \Phi\hat{x}^-(n) + K_c(n)\left[z(n)-C\hat{x}^-(n)\right] \qquad (7.22)}$$

$K_c(n)$: Kalman gain for correlated noise

The Correlated Noises

و در نتیجه (*a priori error covariance*):

$$\tilde{x}^-(n+1) = [\Phi - K_c(n)C]\hat{x}^-(n) + \Gamma\omega(n) - K_c(n)v(n)$$

در نتیجه ماتریس کوواریانس خطای تخمین عبارت خواهد بود از:

$$P^-(n+1) = [\Phi - K_c(n)C]P^-(n)[\Phi - K_c(n)C]^T + \Gamma Q\Gamma^T + K_c(n)RK_c^T(n)$$
$$-\Gamma SK_c^T(n) - K_c(n)S^T\Gamma^T$$

با جایگزینی $K_c(n)$ خواهیم داشت:

$$\boxed{P^-(n+1) = \Phi P^-(n)\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T - K_c(n)\left[CP^-(n)C^T + R\right]K_c^T(n)}$$

Kalman Filter for the Correlated Noises

در نتیجه معادلات فیلتر کالمن عبارت خواهد بود از:

Measurement Update:

$$K(n) = P^-(n)C^T\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1} \quad (5.80)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^-(n)\right] \quad (5.81)$$

$$P(n) = P^-(n) - K(n)CP^-(n) \quad (5.82)$$

Time Update:

$$K_c(n) = \left[\Phi P^-(n)C^T + \Gamma S\right]\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1}$$

$$\hat{x}^-(n+1) = \Phi\hat{x}^-(n) + K_c(n)\left[z(n) - C\hat{x}^-(n)\right]$$

$$P^-(n+1) = \Phi P^-(n)\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T - K_c(n)\left[CP^-(n)C^T + R\right]K_c^T(n)$$

شناسایی سیستم با استفاده از فیلتر کالمن

برای یک سیستم خطی با معادله تفاضلی:

$$y(n)=\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)+\sum_{i=0}^{M}b_i u(n-i) \qquad M<N \qquad \rightarrow \quad H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{1-\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}}$$

هدف بحث شناسایی سیستم: $a_i, b_i = ?$

به منظور فرموله نمودن مساله برای فیلتر کالمن:

$$r(n)\triangleq\begin{bmatrix} y(n-1)\\ \vdots \\ y(n-N)\\ u(n)\\ \vdots \\ u(n-M)\end{bmatrix}, \qquad x(n)\triangleq\begin{bmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_N\\ b_0\\ \vdots \\ b_M\end{bmatrix}$$

شناسایی سیستم با استفاده از فیلتر کالمن

و معادله فضای حالت متناظر عبارت است از:

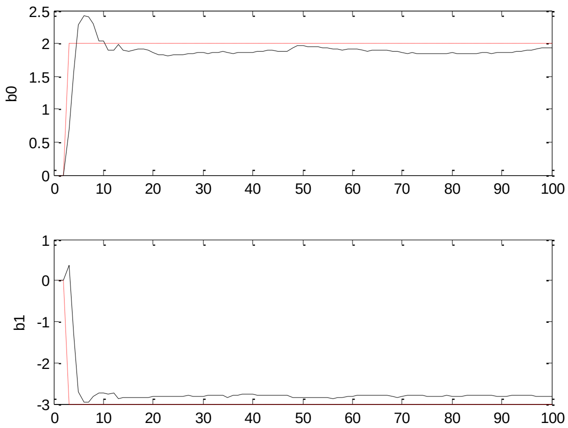
$$\begin{cases} x(n+1)=x(n)\\ y(n)=r^T(n)x(n)+v(n)\end{cases}$$

در این حالت مساله آماده استفاده از فیلتر کالمن است.

شناسایی سیستم با استفاده از فیلتر کالمن

مثال (شناسایی سیستم):

$$H(z)=\frac{2-3z^{-1}}{1-0.7z^{-1}+0.1z^{-2}}$$



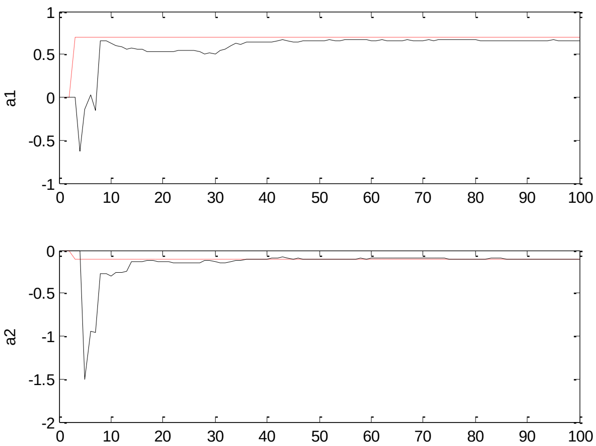
Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

11

شناسایی سیستم با استفاده از فیلتر کالمن

مثال (شناسایی سیستم):

$$H(z)=\frac{2-3z^{-1}}{1-0.7z^{-1}+0.1z^{-2}}$$



Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

12

تخمین خواص استاتیکی نویز

به منظور استفاده صحیح از فیلتر کالمن در تخمین سیگنال، لازم است خواص استاتیکی نویز فرایند و نویز مشاهدات مشخص باشد.

در این بخش معادلاتی ارائه می گردد که بر اساس آن تخمینی بازگشتی از کوواریانس نویز مشاهدات (R) و نویز فرایند (Q) ارائه می گردد.

تخمین ماتریس کوواریانس نویز مشاهدات (R)

$$\varepsilon(n) = z(n) - C\hat{x}^{-}(n) = C\left(x(n) - \hat{x}^{-}(n)\right) + v(n) = C\tilde{x}^{-}(n) + v(n)$$

$$\Rightarrow \quad S_r(n) = E\left[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)\right] = CP^{-}(n)C^T + R \qquad \text{(R.1)}$$

تخمین خواص استاتیکی نویز

از طرفی:

$$\hat{S}_r(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\varepsilon(k) - \bar{\varepsilon}\right)\left(\varepsilon(k) - \bar{\varepsilon}\right)^T = \frac{n-1}{n}\hat{S}_r(n-1) + \frac{1}{n}\left(\varepsilon(n) - \bar{\varepsilon}\right)\left(\varepsilon(n) - \bar{\varepsilon}\right)^T$$

$$\text{where,} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon(k) \qquad \text{(R.2)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \hat{R}(n) = \hat{S}_r(n) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}CP^{-}(k)C^T}$$

تخمین خواص استاتیکی نویز

تخمین ماتریس کوواریانس نویز فرایند (Q)

$$q(n) = x(n+1) - \hat{x}^-(n+1) = x(n+1) - \Phi\hat{x}(n) = \Phi\left(x(n) - \hat{x}(n)\right) + w(n)$$

$$\Rightarrow \quad S_q(n) = \Phi P(n)\Phi^T + Q \qquad (Q.1)$$

$$q(k) = \hat{x}(k+1) - \hat{x}^-(k+1)$$

$$\hat{S}_q = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(q(k)-\bar{q}\right)\left(q(k)-\bar{q}\right)^T = \frac{n-1}{n}\hat{S}_q(n-1) + \frac{1}{n}\left(q(n)-\bar{q}\right)\left(q(n)-\bar{q}\right)^T$$

$$\text{where,} \quad \bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q(k) \qquad (Q.2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{Q}(n) = \hat{S}_q(n) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi P(k)\Phi^T}$$

Adaptive Kalman filtering

Measurement Update:

$$K(n) = P^-(n)C^T\left[CP^-(n)C^T + \hat{R}(n)\right]^{-1} \qquad (5.80)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^-(n)\right] \qquad (5.81)$$

$$P(n) = P^-(n) - K(n)CP^-(n) \qquad (5.82)$$

Time Update:

$$\hat{x}^-(n+1) = \Phi\hat{x}(n) \qquad (5.83)$$

$$P^-(n+1) = \Phi P(n)\Phi^T + \Gamma\hat{Q}(n)\Gamma^T \qquad (5.84)$$

$$\boxed{\hat{R}(n) = \hat{S}_r(n) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} CP^-(k)C^T}$$

$$\boxed{\hat{Q}(n) = \hat{S}_q(n) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi P(k)\Phi^T}$$

تخمین خواص استاتیکی نویز

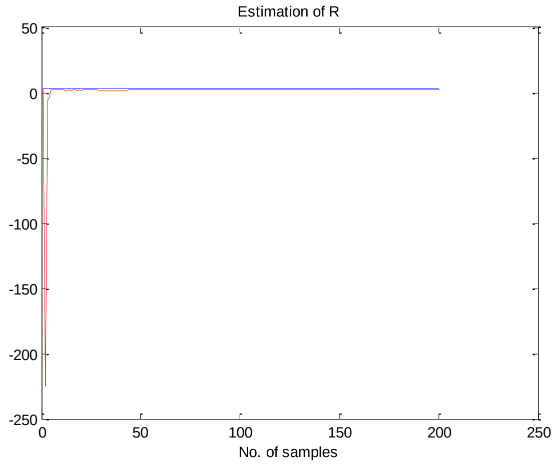
مثال:

$$x(n+1)=\begin{bmatrix}-0.8 & 0.9\\ 0.1 & 0.5\end{bmatrix}+w(n)$$

$$z(n)=\begin{bmatrix}0.4 & 0.1\end{bmatrix}x(n)$$

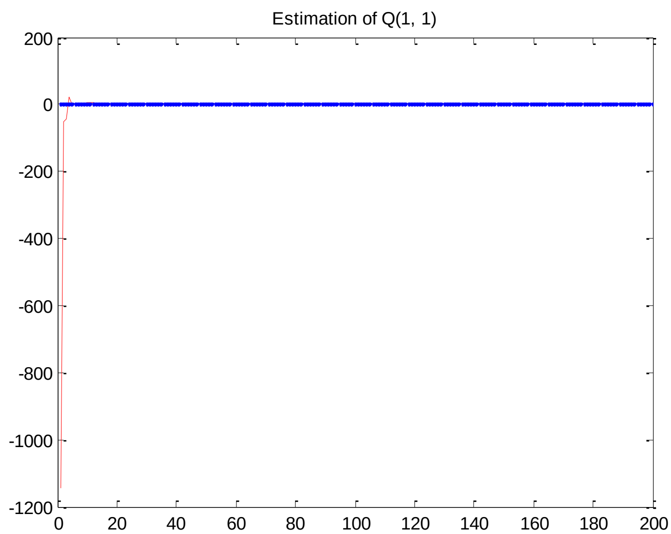
$$Q=\begin{bmatrix}1.6 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$R=3$$



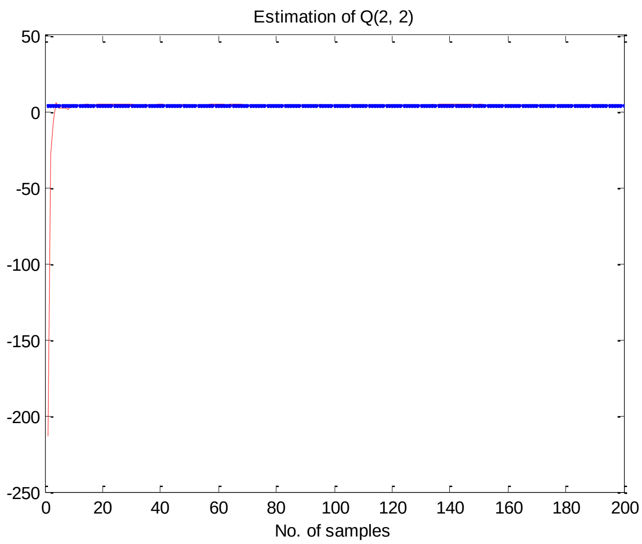
تخمین خواص استاتیکی نویز

ادامه مثال:



تخمین خواص استاتیکی نویز

ادامه مثال:



مراجع

The material of this lecture is based on:

[1] E. W. Kamen, J. K. Su, **Introduction to Optimal Estimation**., Springer, 1999.

[2] Strenge, **Optimal Control and Estimation**., 1997.