باسمه تعالی

شناسایی سیستم ها

بیژن معاونی

(دانشیار دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی)

۹۷-۹۸

باسمه تعالی

شناسایی سیستم ها
Lecture 1

مقدمه

مقدمه

• از مسائل مهم و مطرح در مهندسی بویژه در تعامل با سیستم های عملیاتی :

– مدلسازی
– یافتن پارامترهای مدل
– پیش بینی رفتار سیستم
– ...

مقدمه

علل نیاز به مدل سیستم ها؟

• **For simulation** (study the system output for a given input)
Ex. Thermal study of a space shuttle when it enters the atmosphere

• **For design** (compute the system parameters to have a desired output for a given input)
Ex. Design of electrical, mechanical or chemical installations

• **For prediction** (forecast the future values of the output)
Ex. weather forecasting; flood forecasting

• **For control** (model-based controller design)
Ex. Pole placement controller design for tracking and disturbance rejection

مقدمه

راه های دست یافتن به مدل یک سیستم؟

First principle modeling

Based on physical laws, physical models

$$g(s) = \frac{k}{s(\tau s+1)}$$

(continuous-time models, academic interest)

System identification

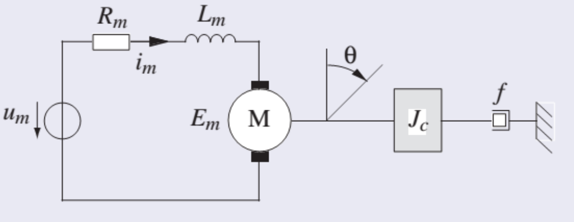
Based on input/output measured data

$$g(z) = \frac{bz}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

(discrete-time models, practical interest)

مقدمه – مثال

Physical modeling



$E_m = K_m \dot{\theta}$

$M_m = K_m i_m(t)$

Assumptions : only viscous friction, backlash and self inductance L_m neglected (*frottement visqueux, néglige les jeux et l'inductance de l'induit*)

- $(J_m + J_c)\ddot{\theta}(t) + f\dot{\theta}(t) = K_m i_m(t)$ $\qquad u_m(t) = R_m i_m(t) + K_m \dot{\theta}$
- $(J_m + J_c)R_m\ddot{\theta}(t) + (fR_m + K_m^2)\dot{\theta}(t) = K_m u_m(t)$
- $\left[(J_m + J_c)R_m s^2 + (fR_m + K_m^2)s\right]\Theta(s) = K_m U_m(s)$
- $\dfrac{\Theta(s)}{U_m(s)} = \dfrac{K_m}{(J_m + J_c)R_m s^2 + (fR_m + K_m^2)s}$ $\qquad$ model : $G(s) = \dfrac{K}{s(\tau s + 1)}$

مقدمه – مثال (شناسایی تحت بار یک محرک الکترومکانیک)
محل انجام پروژه .HCS-Lab

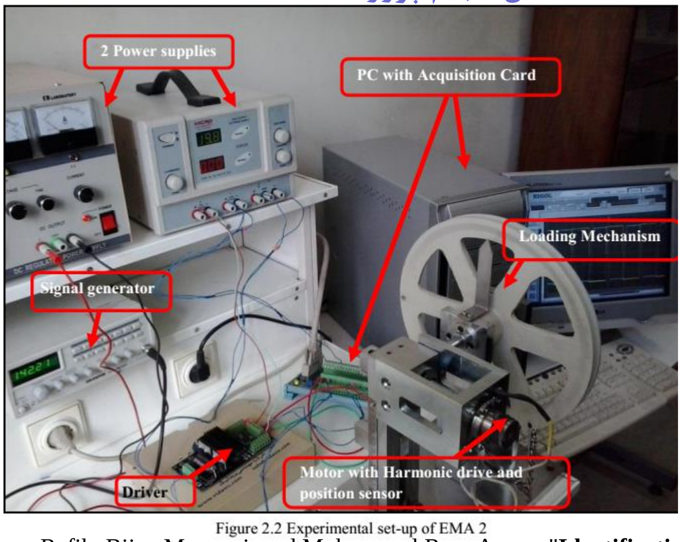


Figure 2.2 Experimental set-up of EMA 2

Salloum, Rafik, Bijan Moaveni, and Mohammad Reza Arvan. "**Identification and robust controller design for an electromechanical actuator with time delay**." *Transactions of the Institute of Measurement and Control* 37.9 (2015): 1109-1117.

مقدمه – مثال (شناسایی تحت بار یک محرک الکترومکانیک)
محل انجام پروژه .HCS-Lab

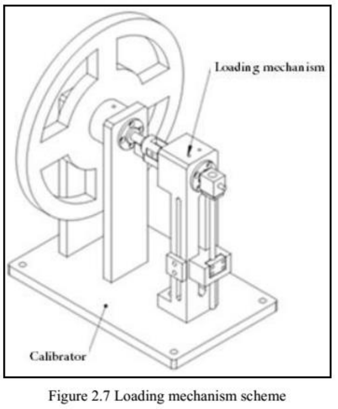


Figure 2.7 Loading mechanism scheme

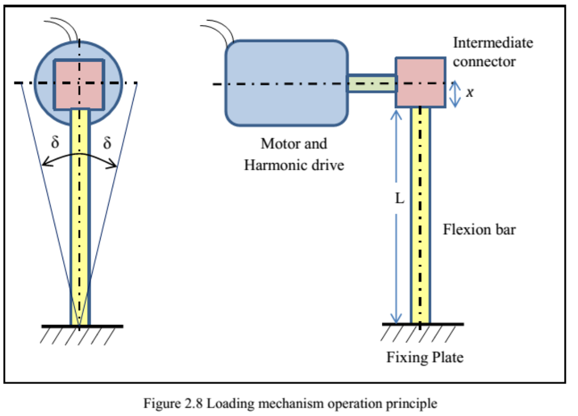


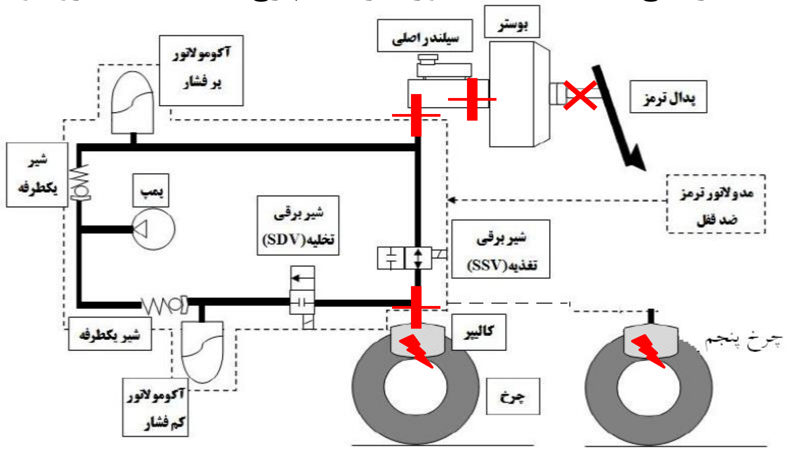
Figure 2.8 Loading mechanism operation principle

R. Salloum, Design and Implementation of Robust Controller for an Electromechanical Actuator, PhD Thesis, School of Railway Eng., IUST, 2014.

مقدمه–مثال (مدلسازی و شناسایی سیستم های ترمز ضد لغزش)

محل انجام پروژه HCS-Lab. & Sharif U.T.

میکروسوئیچ   سنسور سرعت چرخ   فشارسنج



معاونی، نصیریف پایگانه، عارفیان، "مدل سازی و تحلیل سیستم ترمز هیدرولیکی ضد قفل خودرو"، مجله کنترل، جلد ۶، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۱، ۱۱-۲۶.

مقدمه–مثال (مدلسازی و شناسایی سیستم های ترمز ضد لغزش)

محل انجام پروژه HCS-Lab. & Sharif U.T.

$x_1 = x_{mc}$	$x_6 = P_w$	$x_{11} = x_{LPA}$	$x_{16} = x_{HPA}$
$x_2 = \dot{x}_{mc}$	$x_7 = x_w$	$x_{12} = \dot{x}_{LPA}$	$x_{17} = \dot{x}_{HPA}$
$x_3 = P_{mc}$	$x_8 = \dot{x}_w$	$x_{13} = P_{LPA}$	$x_{18} = \omega$
$x_4 = P_r$	$x_9 = P_{wout}$	$x_{14} = P_{P0}$	$x_{19} = v$
$x_5 = P_{win}$	$x_{10} = P_{Lout}$	$x_{15} = P_{HPA}$	$x_{20} = z$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_{mc}}{M_{mc}}x_1 - \frac{\mu_d N}{M_{mc}}sign(x_1) - \left(\frac{C_{mc}}{M_{mc}}\right)x_2 + \left(\frac{A_{mc}}{M_{mc}}\right)x_3 - (-Fbooster + \mu_s N)$$

$$\dot{x}_{18} = \frac{R_w F_x - P_w A_C \mu\, r_{eff}}{J_w}$$

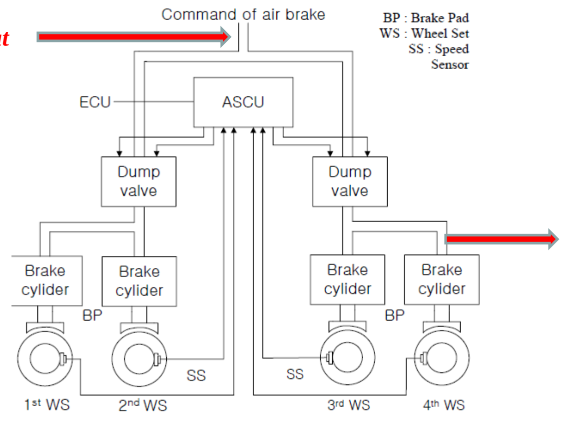
$$\dot{x}_{19} = \frac{-F_x - \frac{1}{2}\rho C_d A_f V_r}{M}$$

$$\dot{x}_{20} = v_r - \frac{\sigma 0 |v_r|}{g(v_r)}$$

معاونی، نصیری، پایگانه، عارفیان، "مدل سازی و تحلیل سیستم ترمز هیدرولیکی ضد قفل خودرو"، مجله کنترل، جلد ۶، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۱، ۱۱-۲۶.

مقدمه –مثال (مدلسازی و شناسایی سیستم های ترمز ضد لغزش)
محل انجام پروژه HCS-Lab. & Sharif U.T.

Excitation Input

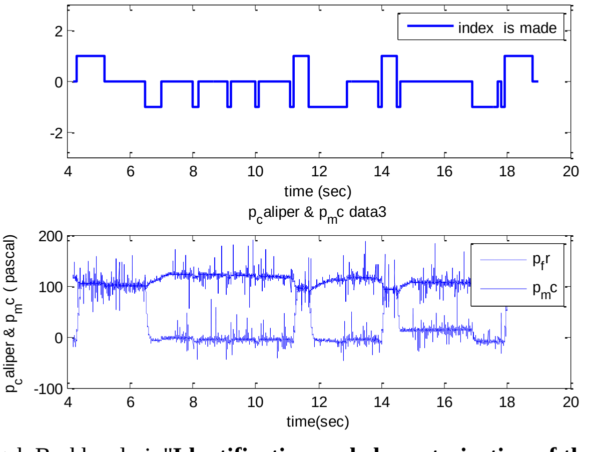


Measurement Output

مقدمه –مثال (مدلسازی و شناسایی سیستم های ترمز ضد لغزش)
محل انجام پروژه HCS-Lab. & Sharif U.T.

Excitation Input

Measurement Output



Moaveni, Bijan, and Pegah Barkhordari. "**Identification and characterization of the hydraulic unit in an anti-lock brake system.**" *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering* 230.10 (2016): 1430-1440.

مقدمه – مقایسه مدل های فیزیکی و مدلهای مستخرج از شناسایی

Physical Modeling

$$G(s) = \frac{K_m}{(J_m + J_c)R_m s^2 + (fR_m + K_m^2)s}$$

☺ Direct relation with physical parameters

☹ High order, approximative, need complete process knowledge, physical parameters should be known

Identification Models

$$G(z) = \frac{bz}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

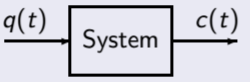
☺ Appropriate for controller design, simple and efficient

☹ Limited validity (operating point, type of input), sensors, measurement noise, unknown model structure

مقدمه – انواع مدل در سیستم ها

- dynamic/static
- monvariable/multivariable
- deterministic/stochastic
- lumped parameter /distributed parameter
- linear/nonlinear
- time-invariant / time-variant
- Causal / noncausal
- zero initial condition
- Stable/Unstable
- …

مقدمه – انواع مدل سیستم ها



$$\dot{c}(t) + 2c^2(t) = 3q(t-\theta) \qquad c(0) = c_0$$

dynamic/statique? monovariable/multivariable?
deterministic/stochastic?
lumped parameter/distributed parameter?
linear/nonlinear? time-variant/time-invariant?
causal/noncausal? zero/nonzero initial condition?

System : dynamic, monovariable, deterministic, lumped parameter, nonlinear, time-invariant, causal, nonzero initial condition.

مقدمه – توصیف های مختلف سیستم ها

- Input/Output representation
- State-Space representation
- Time-domain representation
- Frequency-domain representation
- Continuous-time representation
- Discrete-time representation

مقدمه – سیستم ها و سیگنال های گسسته زمان

سیگنال آنالوگ :

سیگنال هایی که به صورت پیوسته در زمان تغییر می کنند.

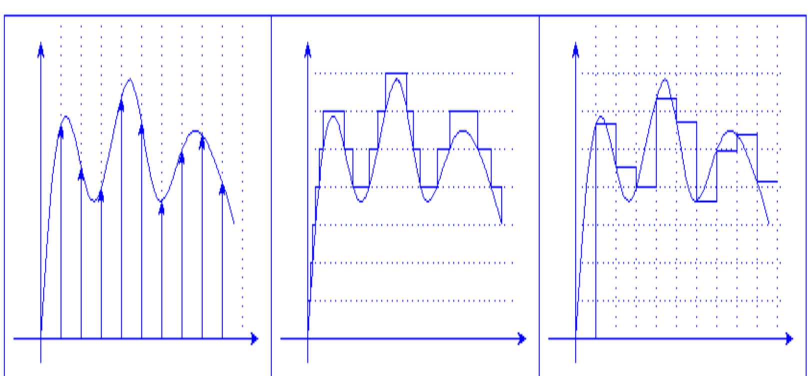
سیگنال گسسته :

سیگنال هایی که فقط به صورت گسسته در زمان تغییر می کنند.

دوره تناوب نمونه برداری :

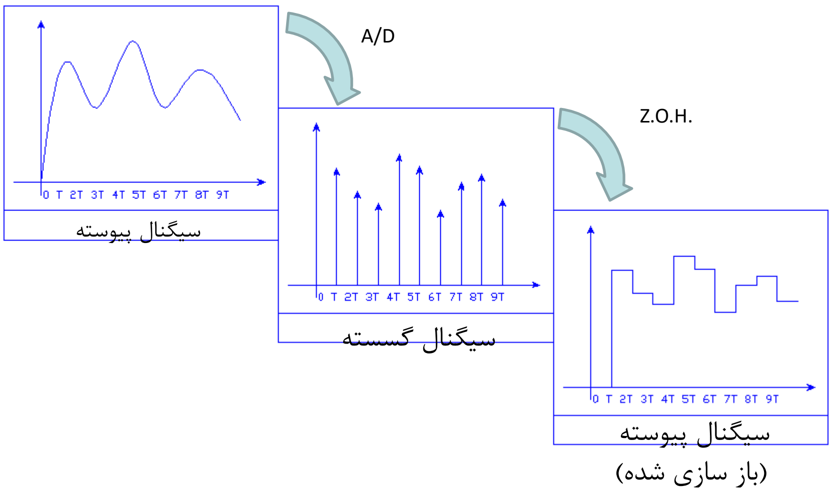
فاصله زمانی بین دو نمونه گیری در سیستم یا سیگنال گسسته.

مقدمه

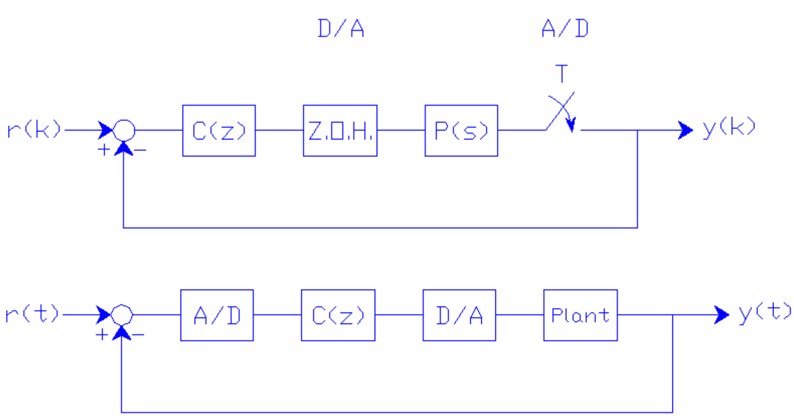


سیگنال دیجیتال	سیگنال کوانتیزه	سیگنال آنالوگ و گسسته

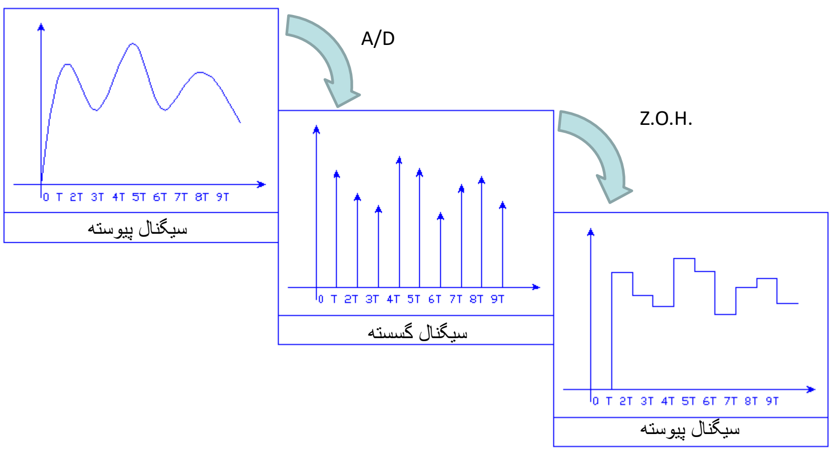
مقدمه



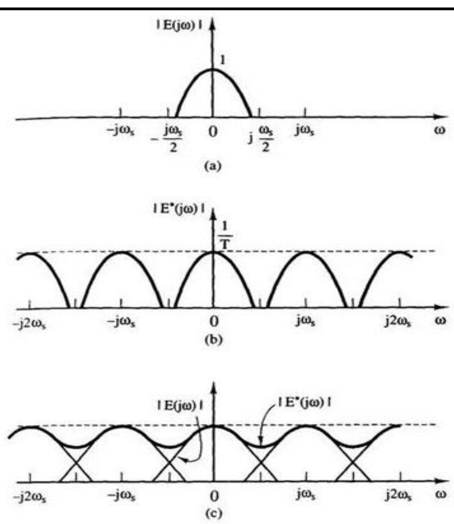
مقدمه- یک سیستم کنترل دیجیتال نوعی



مقدمه



نمونه بردار و نگهدارنده



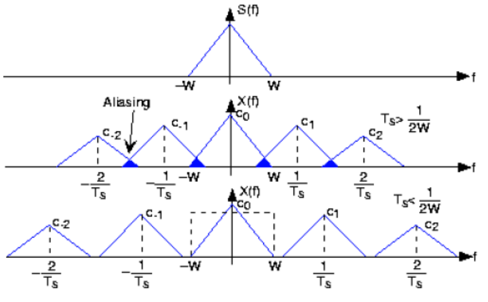
قضیه شنون :

یک تابع زمانی $x(t)$ که دارای فرکانس های کوچکتر از f_0 هرتز باشد به منظور نمونه برداری لازم است با دوره تناوب حداکثر $\frac{1}{2f_0}$ نمونه برداری شود .

نمونه بردار و نگهدارنده

Aliasing

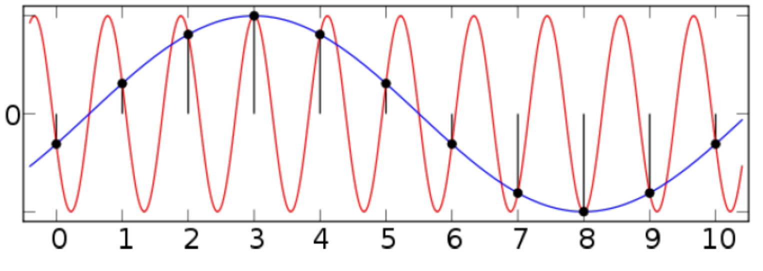
Aliasing occurs when there is an **overlap** in the shifted, periodic (as we already noted) copies of our original signal's FT, i.e. spectrum. In the frequency domain, one will notice that part of the signal will overlap with the periodic signals next to it. In this overlap the values of the frequency will be added together and the shape of the signal's spectrum will be altered.



نمونه بردار و نگهدارنده

Aliasing

A typical case of aliasing is displayed below where the sampled (blue) signal corresponds to both a frequency change and a phase shift with respect to the original signal (red).



مقدمه

ارزیابی:

- تمرین و پروژه: ۱۲ نمره

systemidentification.2015@gmail.com

- پایان ترم: ۸

تبدیل Z:

تبدیل دو طرفه $y(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} y(k).z^{-k}=\sum_{-\infty}^{+\infty} y(kT).z^{-k}$

تبدیل یکطرفه $y(z)=\sum_{0}^{\infty} y(k).z^{-k}$

- مثال :

If $e(k) = 1 \rightarrow E(z) = ?$

$$E(z)=1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots \rightarrow E(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1} \quad |z^{-1}|<1$$

تبدیل Z:

مثال: *تابع نمایی*

$$e(t)=e^{-at}\rightarrow e(kT)=e^{-akT}\Rightarrow E(z)=?$$

$$E(z)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-akT}.z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-aT}.z^{-1})^{k}=1+(e^{-aT}.z^{-1})+(e^{-aT}.z^{-1})^{2}+\dots$$

$$\Rightarrow E(z)=\frac{1}{1-e^{-aT}.z^{-1}}\qquad |e^{-aT}.z^{-1}|<1$$

مثال: *تابع شیب*

$$e(t)=t\rightarrow e(kT)=kT\Rightarrow E(z)=?$$

$$E(z)=\sum_{k=0}^{\infty}kT.z^{-k}=T(\sum_{k=0}^{\infty}k.z^{-k})=T(z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\dots)=$$

$$=Tz^{-1}(1+2z^{-1}+3z^{-2}+\dots)=Tz^{-1}(\frac{1}{(1-z^{-1})^{2}})=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}$$

خواص تبدیل Z:

❊ خطی بودن

$$Z\left[e_1(k)+ae_2(k)\right]=E_1(z)+aE_2(z)$$

❊ انتقال حقیقی

$$\boxed{Z\left[e(k-n)u(k-n)\right]=z^{-n}.E(z)}$$

$$\boxed{Z\left[e(k+n)u(k+n)\right]=z^{n}.[E(z)-\sum_{k=0}^{n-1}e(k).z^{-k}]}$$

$$Z\left[e(k-n)u(k-n)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}e(k-n).z^{-k}=z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}e(k-n).z^{-(k-n)}$$

$$=z^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}e(k-n).z^{-(k-n)}=z^{-n}\sum_{k-n=0}^{\infty}e(k-n).z^{-(k-n)}=z^{-n}.E(z)$$

خواص تبدیل Z:

$$Z\left[e(k+n)u(k+n)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}e(k+n).z^{-k}=z^{n}\sum_{k=0}^{\infty}e(k+n)z^{-(k+n)}=$$

$$=z^{n}[\sum_{k+n=n}^{\infty}e(k+n).z^{-(k+n)}+\sum_{k+n=0}^{n-1}e(k+n)z^{-(k+n)}-\sum_{k+n=0}^{n-1}e(k+n)z^{-(k+n)}]=$$

$$=z^{n}(E(z)-\sum_{k+n=0}^{n-1}e(k+n).z^{-(k+n)})=z^{n}(E(z)-\sum_{k=0}^{n-1}e(k)z^{-k})$$

مثال:

$$Z[e(k+1)]=z\left(E(z)-e(0)\right)$$

$$Z[e^{-a(k-3)T}.u(k-3)]=z^{-3}.Z[e^{-akT}]=z^{-3}.\frac{z}{z-e^{-aT}}=\frac{1}{z^{2}(z-e^{-aT})}$$

خواص تبدیل Z:

❈ انتقال مختلط

$$\boxed{Z\left[e^{ak}.x(k)\right]=X(ze^{-a})}$$

$$Z\left[e^{ak}.x(k)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{ak}.x(k).z^{-k}=x(0)+e^{a}x(1)z^{-1}+e^{2a}x(2)z^{-2}+\dots$$

$$=x(0)+x(1)(e^{-a}.z)^{-1}+x(2)(e^{-2a}.z)^{-2}+\dots=X(e^{-a}.z)$$

مثال:

$$if\ \ x(k)=k\ ==>\ X(z)=\frac{z}{(z-1)^{2}}\quad \text{then}\quad Z[ke^{ak}]=\frac{ze^{-a}}{(ze^{-a}-1)^{2}}$$

خواص تبدیل Z:

❊ قضیه مقدار اولیه

$$\boxed{e(0)=\lim_{z\to\infty}E(z)}$$

$$E(z)=e(0)+e(1).z^{-1}+e(2).z^{-2}+\ldots$$

❊ قضیه مقدار نهایی

$$\boxed{x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1).X(z)}$$

$$Z[x(k+1)-x(k)]=\lim_{n\to\infty}[\sum_{k=0}^{n}x(k+1)z^{-k}-\sum_{k=0}^{n}x(k)z^{-k}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[-x(0)+x(1)(1-z^{-1})+x(2)(z^{-1}-z^{-2})+\ldots+x(n+1)z^{-n}]$$

$$\lim_{z\to 1}\{Z[x(k+1)-x(k)]\}=\lim_{n\to\infty}[x(n+1)-x(0)]$$

$$\lim_{z\to 1}\{z\left(X(z)-x(0)\right)-x(z)\}=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\lim_{n\to\infty}x(n+1)$$

حل معادله تفاضلی:

۱- روش ترتیبی:

مثال:

$$m(k)=x(k)-x(k-1)-m(k-1)\quad,\qquad \mathrm{k}\geq 0$$

$$x(k)=\begin{cases}1 & ,\ \mathrm{k:Even}\\ 0 & ,\ \mathrm{k:Odd}\end{cases}$$

$$x(-1)=m(-1)=0$$

So:

$$m(0)=x(0)-x(-1)-m(-1)=1-0-0=1$$

$$m(1)=x(1)-x(0)-m(0)=0-1-1=-2$$

$$m(2)=x(2)-x(1)-m(1)=1-0-(-2)=3$$

$$m(3)=x(3)-x(2)-m(2)=0-1-3=-4$$

$$m(4)=x(4)-x(3)-m(3)=1-0-(-4)=5$$

$$\vdots$$

حل معادله تفاضلی:

۲- استفاده از تبدیل Z :

$$m(k)+a_{n-1}m(k-1)+...+a_0 m(k-n)=b_n x(k)+b_{n-1}x(k-1)+...+b_0 x(k-n)$$
$$M(z)+a_{n-1}z^{-1}M(z)+...+a_0 z^{-n}M(z)=b_n X(z)+b_{n-1}z^{-1}X(z)+...+b_0 z^{-n}X(z)$$
$$\Rightarrow \frac{M(z)}{X(z)}=\frac{b_n+b_{n-1}z^{-1}+...+b_0 z^{-n}}{1+a_{n-1}z^{-1}+...+a_0 z^{-n}}$$

مثال:

$$M(z)=X(z)-z^{-1}.X(z)-z^{-1}M(z)\rightarrow \frac{M(z)}{X(z)}=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=\frac{z-1}{z+1}$$
$$x(k)=\begin{cases}1 & ,\ \text{k : Even}\\ 0 & ,\ \text{k : Odd}\end{cases} \Longrightarrow X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k).z^{-k}=1+x(2).z^{-2}+x(4).z^{-4}+...=\frac{1}{1-z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-1}$$
$$\Rightarrow M(z)=X(z).\frac{z-1}{z+1}=\frac{z^2}{(z-1)(z+1)}.\frac{z-1}{z+1}=\frac{z^2}{(z+1)^2}\ \rightarrow m(k)=?$$

تبدیل Z معکوس:

❖ به منظور محاسبه ی $m(k)$ به محاسبه تبدیل Z معکوس نیاز است.

مثال:

$$\begin{array}{l|l} z^2 & z^2+2z+1 \\ \cline{2-2} -\left(z^2+2z+1\right) & 1-2z^{-1}+3z^{-2}-4z^{-3}+5z^{-4} \\ \hline \quad -2z-1 & \\ \quad -\left(-2z-4-2z^{-1}\right) & \\ \hline \qquad 3+2z^{-1} & \\ \qquad -\left(3+6z^{-1}+3z^{-2}\right) & \\ \hline \qquad\quad -4z^{-1}-3z^{-2} & \\ \qquad\quad -\left(-4z^{-1}-8z^{-2}-4z^{-3}\right) & \\ \hline \qquad\qquad 5z^{-2}-4z^{-3} & \\ \qquad\qquad -\left(5z^{-2}-10z^{-3}-5z^{-4}\right) & \\ \hline \qquad\qquad\quad -6z^{-3}-5z^{-4} & \end{array}$$

$$\rightarrow M(z)=1-2z^{-1}+3z^{-2}-4z^{-3}+5z^{-4}+...$$
$$\Rightarrow M(z)=\sum_{k=0}^{\infty}m(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)z^{-k}$$
$$\rightarrow m(k)=(-1)^k(k+1)$$

تبدیل Z معکوس:

۱- روش سری های توانی

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

$$x(z)=\frac{z}{z^2-3z+2}$$

$$\begin{array}{l|l} z & z^2-3z+2 \\ -\underline{z-3+2z^{-1}} & z^{-1}+3z^{-2}+7z^{-3}+\dots \\ +3-2z^{-1} & \\ -\underline{3z-9z^{-1}+6z^{-2}} & \\ 7z^{-1}+6z^{-2} & \\ -\underline{7z^{-1}-21z^{-2}+14z^{-3}} & \\ 15z^{-2}-14z^{-3} & \\ \dots & \end{array}$$

$$\to x(0)=0, x(1)=1, x(2)=3, x(3)=7,\dots$$

$$\Rightarrow \boxed{x(k)=2^k-1}$$

تبدیل Z معکوس:

۲ - استفاده از گسترش به کسرهای جزیی
(مشابه تبدیل لاپلاس عمل میشود)

$$\delta(k-n) \leftrightarrow z^{-n}$$

$$1 \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$k \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$k^2 \leftrightarrow \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$ka^2 \leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$\sin(ak) \leftrightarrow \frac{z\sin(a)}{z^2-2z.\cos(a)+1}$$

$$\cos(ak) \leftrightarrow \frac{z[z-\cos(a)]}{z^2-2z.\cos(a)+1}$$

$$a^k\sin(bk) \leftrightarrow \frac{az\sin(b)}{z^2-2az.\cos(b)+a^2}$$

$$a^k\cos(bk) \leftrightarrow \frac{z^2-az\cos(a)}{z^2-2az.\cos(b)+a^2}$$

تبدیل Z معکوس:

مثال:

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{z-2}$$

با توجه به روابط مذکور به نظر میرسد که یک ترم z همواره در صورت تبدیل z توابع وجود دارد، برای اینکه بتوانیم از جدول $X(z)/z$ استفاده کنیم صورت را در z ضرب میکنیم.

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}\Rightarrow X(z)=\frac{-z}{z-1}+\frac{z}{z-2}\Rightarrow Z^{-1}[X(z)]=\begin{cases}-1+2^{k} & k\geq 1\\ 0 & k=0\end{cases}$$

$$Y(z)=z^{-1}.X(z)=\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{z-2}\Rightarrow x(k-1)=\begin{cases}-1+2^{k-1} & k\geq 1\\ 0 & k=0\end{cases}$$

تبدیل Z معکوس:

۳- روش انتگرال معکوس ساز

$$e(h)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}E(z).z^{k-1}.dz$$

Γ مسیر بسته ای است که شامل تمام قطب های محدود سیستم میباشد. با توجه به قضیه مانده ها خواهیم داشت :

$$e(k)=\sum_{E(z)z^{k-1}\text{محل قطب های}}(E(z)z^{k-1}\text{ مانده})$$

مانده در قطب ساده z=a :

$$\boxed{\mathrm{Res}|_{z=a}=\lim_{z\to a}\ (z-a)E(z)z^{k-1}}$$

مانده در قطب تکراری z=a (mمرتبه):

$$\boxed{\mathrm{Res}|_{z=a}=\lim_{z\to a}\ \frac{1}{(m-1)!}.\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^{m}.E(z)z^{k-1}]}$$

تبدیل Z معکوس:

مثال:

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

$$x(k)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^k}{(z-1)(z-2)}+\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^k}{(z-1)(z-2)}=-1+2^k$$

مثال:

$$X(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

$$If\ \ k=0\Rightarrow x(k)=\lim_{z\to 0} z.\frac{1}{z(z-1)(z-2)}+\lim_{z\to 1}(z-1).\frac{1}{z(z-1)(z-2)}+\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{1}{z(z-1)(z-2)}=0$$

$$if\ \ k\geq 1\Rightarrow x(k)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}+\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}=-1+2^{k-1}$$

مثال:

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\to x(k)=\frac{1}{1!}.\frac{d}{dz}[(z-1)^2.\frac{z}{(z-1)^2}.z^{k-1}]|_{z=1}=k$$

محاسبه مدل فضای حالت زمان گسسته از روی مدل فضای حالت پیوسته

$$\begin{cases} x(t)=A_C x(t)+B_C u(t) \\ y(t)=C_C x(t)+D_C u(t) \end{cases} \rightarrow\ x(t)=\varphi_c(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\varphi_c(t-\tau)B_C u(\tau)d\tau$$

$$\varphi_c(t-t_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{{A_C}^k(t-t_0)^k}{k!}$$

به منظور محاسبه پاسخ حالت ها به صورت زمان گسسته:

$$t=kT+T$$

$$t_0=kT$$

$$x(kT+T)=\varphi_c(T)x(kT)+\int_{kT}^{kT+T}\varphi_c(KT+T-\tau)B_C\ \underset{\substack{\downarrow\\ Z.O.H\\ \downarrow\\ u(\tau)=u(kT)\\ kT\leq\tau<(k+1)T}}{u(\tau)}\ d\tau$$

$$\Rightarrow x\big((k+1)T\big)=\varphi_c(T)x(kT)+\left[\int_{kT}^{kT+T}\varphi_c(KT+T-\tau)B_C d\tau\right]u(kT)$$

محاسبه مدل فضای حالت زمان گسسته از روی مدل فضای حالت پیوسته

- از مقایسه با معادله فوق با فرم استاندارد فضای حالت:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \varphi_C(T) = e^{A_C T} \\ B = \int_{kT}^{kT+T} \varphi_c(KT + T - \tau) B_C \, d\tau \end{cases}$$

$$y(t) = C_C x(t) + D_C u(t) \rightarrow y(kT) = C_C x(k) + D_C u(k)$$

$$kT - \tau = -\sigma \rightarrow d\tau = d\sigma$$

$$\Rightarrow B = \left[\int_0^T \varphi_C(t - \sigma) d\sigma \right] B_C$$

از طرفي :

$$\varphi_C(T) = T + A_C T + \frac{A_C{}^2 T^2}{2!} + \frac{A_C{}^3 T^3}{3!} + \ldots = A$$

$$\int_0^T \varphi_C(t-\sigma)d\sigma = -\int_T^0 \varphi_C(\tau)d\tau = \int_0^T \varphi_C(\tau)d\tau = \int_0^T \left(T + A_C T + \frac{A_C{}^2 T^2}{2!} + \frac{A_C{}^3 T^3}{3!} + \ldots \right) d\tau$$

$$= IT + \frac{A_C T^2}{2!} + \frac{A_C{}^2 T^3}{3!} + \ldots \quad \Rightarrow \quad B = \left[IT + \frac{A_C T^2}{2!} + \frac{A_C{}^2 T^3}{3!} + \ldots \right] B_C$$

41

محاسبه مدل فضای حالت زمان گسسته از روی مدل فضای حالت پیوسته

- به منظور ساده نمودن محاسبات:

$$kT - \tau = -\sigma \rightarrow d\tau = d\sigma \;\Rightarrow\; B = \left[\int_0^T \varphi_C(t-\sigma)d\sigma \right] B_C \overset{t-\sigma=\tau}{=} -\int_T^0 \varphi_C(\tau) B_C d\tau = \int_0^T \varphi_C(\tau) B_C d\tau$$

- از طرفی

$$\varphi_C(T) = I + A_C T + \frac{A_C{}^2 T^2}{2!} + \frac{A_C{}^3 T^3}{3!} + \ldots = A$$

$$\Rightarrow \int_0^T \varphi_C(t-\sigma)d\sigma = -\int_T^0 \varphi_C(\tau)d\tau = \int_0^T \varphi_C(\tau)d\tau = \int_0^T \left(I + A_C T + \frac{A_C{}^2 T^2}{2!} + \frac{A_C{}^3 T^3}{3!} + \cdots \right) d\tau$$

$$= IT + \frac{A_C T^2}{2!} + \frac{A_C{}^2 T^3}{3!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad B = \left[IT + \frac{A_C T^2}{2!} + \frac{A_C{}^2 T^3}{3!} + \ldots \right] B_C \cong A.T.B_c$$

42