بسمه‌تعالی

روش‌های جدید برای تعیین بردار سرعت زاویه‌ای جسم صلب بر حسب پارامترهای اویلر و پارامترهای دوران

تألیف هایک قولتوقچیان

چاپ اول یک‌صد نسخه آبان ٧٤

چاپ دوم یک‌صد نسخه آذر ٧٤

چاپ سوم یک‌صد نسخه خرداد ٧٦

چاپ چهارم پنجاه نسخه تیر ٨٠

چاپ پنجم پنجاه نسخه دی ٨٤

چاپ ششم پنجاه نسخه بهمن ٨٦

بسمه‌تعالی

مبحث سینماتیک و دینامیک جسم صلب در دانشگاه‌ها در سه مقطع عمومی، تخصصی و فوق‌لیسانس تدریس می‌گردد.

انگیزه تألیف این جزوه که در مقطع فیزیک تخصصی و فوق‌لیسانس می‌باشد، این است که در کتبی نظیر $Classical\ Mechanics$ توسط $H.Golestein$ عملگر چرخش به‌صورت $Passive$ و بر حسب پارامترهای اویلر معرفی شده و بدون مقدمه بردار سرعت زاویه‌ای برحسب پارامترهای نامبرده و به روش هندسی استخراج شده است. در نتیجه برای بسیاری از خوانندگان ارتباط بین بردار سرعت زاویه‌ای و عملگر چرخش مبهم باقی می‌ماند که خود زاینده مشکلاتی در فهم مطالب دینامیک جسم صلب است. نکته دیگر آنکه در دیگر مباحث مکانیک همیشه تبدیلات $Active$ بردار مکانی هر نقطه مادی مورداستفاده واقع می‌شود که متأسفانه در مبحث جسم صلب توجه لازم به این مهم مبذول نشده است.

پیدایش تحلیل ریاضی حرکت جسم صلب مرهون زحمات عالم بزرگوار **لئونارد اویلر** (۱۷۸۳ — ۱۷۰۷) می باشد و در این تالیف نشان داده شده است که فرمولاسیون بخش سینماتیک منشاء خیر و برکات عدیده در مکانیک کوانتمی نیز می‌باشد.

لمعاتی از شرح‌حال لئونارد اویلر که عمری را به زهد و تقوی علمی سپری نمود در کتاب معادلات دیفرانسیل تألیف $George\ Simmons$ آمده است که مطالعه آن به کلیه دانشجویان جوانی که در تلاش ایجاد حیات علمی خویش هستند توصیه می‌گردد.

مؤلف وظیفه خویش می‌داند که از افراد نامبرده در زیر که با همکاری صادقانه خویش انجام این تحریر را میسر ساختند قدردانی نماید:

۱- **دکتر سید محمدعلی بوترابی** معاونت پژوهشی دانشگاه.

۲- **دکتر حبیب مجیدی** ریاست دانشکده فیزیک که اگر این تألیف ثوابی داشته باشد ایشان نیز شریک هستند.

۳- **اکبر محرمی** دانشجو و از ذخایر دانشکده فیزیک که در امر تایپ و ممارست در کار زحمات فراوان متحمل شده‌اند.

۴- **سید مجید برکاتی** دانشجو که در راه‌اندازی و تایپ کامپیوتری تلاش مؤثری داشته‌اند.

۵- **دانشجویان تربیت‌مدرس** که با صبر و شکیبائی فرصت تعلیم‌وتعلم مباحث آمده در این تألیف برای مؤلف فراهم ساختند و در نهایت از عالم بزرگوار **تیگران یرواندیان** که نصایح گران‌مایه او همیشه راهگشای مؤلف بوده است یاد می‌شود.

امید است این جزوه و دیگر تألیفات منتشر شده مؤلف (امواج – الکتریسیته و مغناطیس و مکانیک عمومی) برای خوانندگان دروس فیزیک مقید واقع گردد و مؤلف را از اشتباهات و اشکالات احتمالی آن مطلع نمایند که مزید بر تشکر است.

هایک قولتوقچیان

مهرماه ١٣٧٤

بسمه‌تعالی

چکیده:

به‌منظور نقد و بررسی طیف وسیع‌تر خوانندگان از این تألیف، جسم صلب تعریف و به سه روش مختلف معادلات حرکت نقاط آن شرح و بر اهمیت روش دوم بنا به دلایل سینماتیکی و بر اهمیت روش سوم بنا به دلایل دینامیکی تأکید شده است. سپس عملگرها تعریف و خواص عملگر چرخش شرح و نمایش جمع‌وجور ($Compact$) آن با استفاده از مولدهای چرخش خرد صورت‌گرفته است.

نشان‌داده‌شده است که فرمالیزم ریاضی معادله $\vec{V}_a = \vec{\omega} \times \vec{r}_a(t)$ همانند فرمالیزم معادله شرودینگر در فضای هیلبرت است و در نتیجه می توان نام با مسمی $Propagator$ به عملگر چرخش که هر بردار مکانی زمان صفر را به بردار مکانی زمان t تبدیل می‌نماید اطلاق نمود.

با برقراری ارتباط بین حل مسئله جسم صلب به روش‌های دوم و سوم رابطه تحلیلی بین بردار سرعت زاویه‌ای و عملگر چرخش به دست آورده شده است و با استفاده از خواص کمیوتاتوری مولدهای چرخش خرد و قوانین تبدیل آنها مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای بر حسب پارامترهای اویلر چه در دستگاه مرجع و چه در دستگاه متصل به جسم صلب استخراج شده است. در کتب مکانیک کلاسیک این روابط فقط به‌صورت هندسی به دست آورده شده است و در نتیجه برای بسیاری از خوانندگان رابطه بین بردار سرعت زاویه‌ای و عملگر چرخش مشخص نمی‌گردد که خود ایجاد مشکل در فهم دینامیک جسم صلب را فراهم می‌کند. شایان‌ذکر است که به طریق مشابه می‌توان نشان داد که مقادیر ویژه سه عملگر L_x، L_y و L_z در فضای هیلبرت مساوی هستند. همچنین مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه ای بر حسب پارامترهای دوران به دو روش مختلف محاسبه شده است که در کتب مکانیک کلاسیک درباره آنها حتی صحبت نشده است. نهایتا با معرفی و استفاده از پارامترهای مایلنیک پلبانسکی رابطه بین پارامترهای اویلر و پارامترهای چرخش بدست آورده شده است. در فصل دوم مطالب بدیعی گفته نشده است؛ اما به زبان بهتری دینامیک جسم صلب شرح داده شده است.

مطالعه این تألیف به دانشجویانی که درس ریاضی فیزیک ۱، مکانیک کلاسیک دوره کارشناسی و کارشناسی‌ارشد و یا مکانیک کوانتمی دوره کارشناسی‌ارشد را دارند توصیه می گردد.

هایک قولتوقچیان

مهر ۱۳۷٤

فهرست مطالب:

فصل اول: سینماتیک جسم صلب

۱-۱ مقدمه و تعریف جسم صلب

به‌موجب تعریف، جسم صلب از سیستم ذراتی تشکیل شده است که فواصل بین آنها همیشه ثابت می‌باشد. وجود چنین قیدی باعث می‌شود که اگر معادله حرکت سه نقطه از جسم صلب غیر واقع بر یک خط مستقیم نسبت به دستگاه مرجعی معلوم باشد معادله حرکت هر نقطه دیگر آن در آن دستگاه مرجع معلوم خواهد شد. چه اگر سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست را A و B و C و نقطه چهارم را D بنامیم، ثابت بودن فواصل بین نقطه D با سه نقطه مزبور سه معادله زیر را حاصل می‌نماید که سه مجهول $x_D(t)$، $y_D(t)$ و $z_D(t)$ از آن به دست می‌آید که به زبان دیگر معادله حرکت نقطه دلخواه D به دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
|\vec{r}_A(t)-\vec{r}_D(t)| = l_{AD} &= \left[\left(x_A(t)-x_D(t)\right)^2+\left(y_A(t)-y_D(t)\right)^2+\left(z_A(t)-z_D(t)\right)^2\right]^{1/2}\\
|\vec{r}_B(t)-\vec{r}_D(t)| = l_{BD} &= \left[\left(x_B(t)-x_D(t)\right)^2+\left(y_B(t)-y_D(t)\right)^2+\left(z_B(t)-z_D(t)\right)^2\right]^{1/2}\\
|\vec{r}_C(t)-\vec{r}_D(t)| = l_{CD} &= \left[\left(x_C(t)-x_D(t)\right)^2+\left(y_C(t)-y_D(t)\right)^2+\left(z_C(t)-z_D(t)\right)^2\right]^{1/2}
\end{aligned}
\qquad (۱-۱)
$$

به زبان عامیانه، نقطه D راس هرمی را تشکیل می‌دهد که قاعده آن مثلث ABC است. پس هرگاه وضعیت قاعده در هر لحظه معلوم باشد، وضعیت نقطه D نیز معلوم می‌گردد.

نکته مهم دیگر آنکه برای تعیین معادله حرکت سه نقطه A و B و C نیاز به نه معادله حرکت نداریم. برای تعیین حرکت نقطه A می‌بایستی سه مختصه آن یعنی x_A، y_A و z_A را برحسب t تعیین نماییم اما برای نقطه B به علت وجود رابطه قیدی:

$$
|\vec{r}_A(t)-\vec{r}_B(t)| = l_{AB} = \left[\left(x_A(t)-x_B(t)\right)^2+\left(y_A(t)-y_B(t)\right)^2+\left(z_A(t)-z_B(t)\right)^2\right]^{1/2} \qquad (۱-۲)
$$

اگر فقط دو مختصه B مثلا x_B و y_B را برحسب t معین کرده باشیم، از رابطه (۲-۱) مختصه سوم یعنی z_B برحسب t به‌دست می‌آید و نهایتا به‌علت وجود دو رابطه قیدی برای نقطه C یعنی:

$$
\begin{aligned}
|\vec{r}_A(t)-\vec{r}_C(t)| = l_{AC} &= \left[\left(x_A(t)-x_C(t)\right)^2+\left(y_A(t)-y_C(t)\right)^2+\left(z_A(t)-z_C(t)\right)^2\right]^{1/2}\\
|\vec{r}_B(t)-\vec{r}_C(t)| = l_{BC} &= \left[\left(x_B(t)-x_C(t)\right)^2+\left(y_B(t)-y_C(t)\right)^2+\left(z_B(t)-z_C(t)\right)^2\right]^{1/2}
\end{aligned}
\qquad (۱-۳)
$$

کافیست مثلا یک مختصه $x_c(t)$ را بر حسب t تعیین کنیم، و مختصه دیگر از روابط قیدی (۳–۱) به‌دست خواهد آمد.

پس درواقع برای تعیین معادله حرکت هر نقطه از جسم صلب کافیست ٦=(۱+۲+۳) مختصه از نقاط A و B و C جسم صلب را بر حسب زمان بدانیم و به قولی درجه آزادی جسم صلب شش می‌باشد.

لازم به یادآوریست که حرکت نقطه A نسبت به دستگاه مرجع یک حرکت انتقالی است اما حرکت دو نقطه B و C نسبت به دستگاهی که مبدا آن واقع بر نقطه A و امتداد محورهای آن نسبت به محورهای دستگاه مرجع ثابت است (یعنی این دستگاه متصل به جسم صلب نیست و فقط مبدا آن به نقطه A جسم صلب متصل است) دارای حرکت دورانی می‌باشد و به قولی B و C هر یک بر روی سطوح دو کره به شعاع‌های l_{AB} و l_{AC} و به مرکزیت A حرکت می‌کنند.

هرگاه هیچ یک از نقاط جسم صلب ساکن نباشد، نقطه A را ترجیحا بر روی مرکز جرم جسم صلب انتخاب می‌کنند؛ چه در این‌حالت از روی رابطه:

$$\vec{F}_e = M\frac{d^2\vec{R}_C}{dt^2} \tag{۱–٤}$$

معادله حرکت آن به آسانی به دست می‌آید یعنی با دانستن نیروهای خارجی وارد بر جسم صلب معادله حرکت نقطه A معلوم می‌گردد.

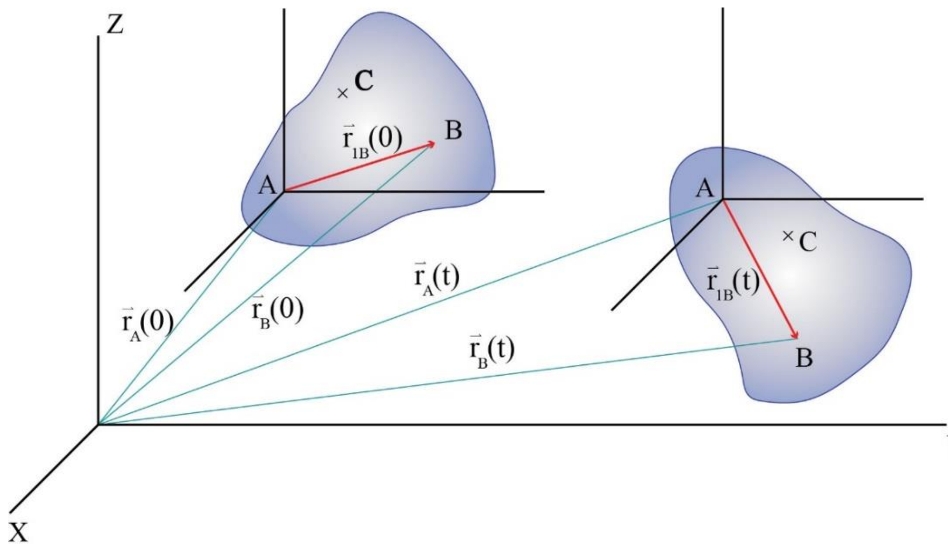
هرگاه حرکت جسم صلب به گونه‌ای باشد که یک نقطه آن نسبت به دستگاه مرجع ساکن باشد نقطه A و مرکز دستگاه مرجع را همان نقطه انتخاب می‌کنیم که به زبان دیگر معادله حرکت نقطه A به صورت $x_A = 0$، $y_A = 0$ و $z_A = 0$ در می‌آید.

پس تا این لحظه تعیین نقطه A و تعیین معادله حرکت آن مشخص شده است. حال برای تعیین معادله حرکت دو نقطه دیگر B و C چنین می‌گوییم:

تعیین معادله حرکت این دو نقطه کار اساسی سینماتیک جسم صلب است؛ هرگاه هیچ نقطه‌ای از جسم صلب ساکن نباشد ابتدا معادله حرکت نقاط B و C را نسبت به دستگاهی که مرکز آن مار بر نقطه A و نسبت

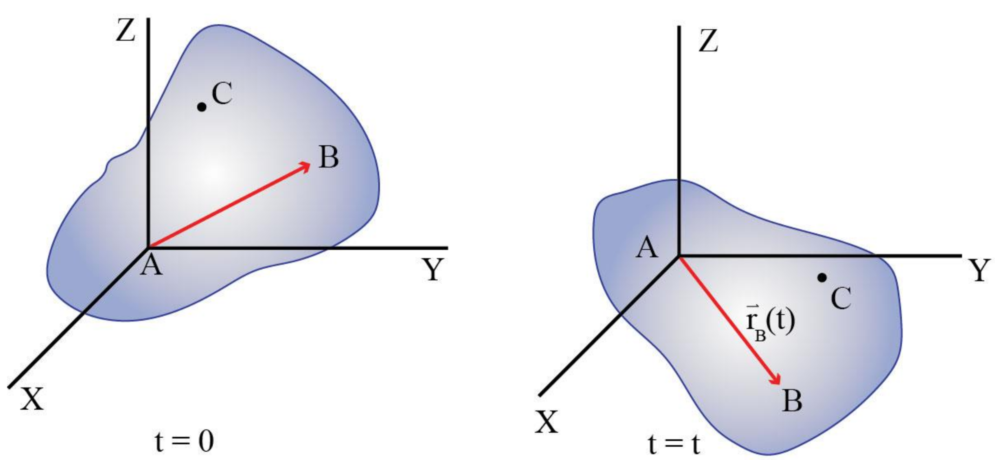
به دستگاه مرجع دارای حرکت انتقالی است (یعنی امتداد محورهای آن نسبت به محورهای دستگاه مرجع تغییر نمی‌کند اما این دستگاه به جسم صلب متصل نیست) را حساب می‌کنیم، یعنی $\vec{r}_{1B}$ و $\vec{r}_{1C}$ بر حسب t تعیین می‌کنیم و در نتیجه $\vec{r}_B(t)$ و $\vec{r}_C(t)$ از روابط (۵–۱) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\vec{r}_B(t) &= \vec{r}_A(t) + \vec{r}_{1B}(t)\\ \vec{r}_C(t) &= \vec{r}_A(t) + \vec{r}_{1C}(t)\end{aligned} \tag{۱–۵}$$



شکل (۱–۱)

اما اگر یک نقطه از جسم صلب نسبت به دستگاه مرجع ساکن باشد در این‌صورت اگر معادله حرکت نقاط B و C را به دست آوریم باز هم به هدف خود می‌رسیم.



شکل (۲–۱)

توجه کنید تا این لحظه نحوه تعیین معادله حرکت نقاط B و C برای دو حالت ذکر شده بیان نشده است. اما نتیجه کلی این است که در هر دو حالت حرکت جسم صلب، هدف ما تعیین معادله حرکت دو نقطه B و C از جسم صلب نسبت به دستگاهی است که یک نقطه آن در آن دستگاه ساکن باشد و به قولی مساله ما تعیین حرکت دورانی جسم صلب است. درواقع کار اساسی ما تعیین سه مختصه $y_B(t)$ و $x_B(t)$ و $x_C(t)$ جسم صلب بر حسب زمان است. (توجه نمایید که دستگاه مرجع به‌معنای دستگاه اینرسی هم نمی‌باشد)

هرچند که ما اصول تعیین معادله حرکت تمامی نقاط جسم صلب را به‌روش فوق شرح داده‌ایم اما به دو علت از روش فوق برای تعیین معادله حرکت جسم صلب استفاده نمی‌کنیم:

- اول آنکه ما هیچ وسیله‌ای برای تعیین معادلات حرکت نقاط B و C را نداریم. حتی اگر نیروی خارجی وارد بر نقاط B و C را بدانیم، از نیروهای داخلی وارد بر نقاط مزبور بی‌خبریم و در نتیجه فرمول نیوتون از حیّز انتفاع خارج می‌شود.
- ثانیا اگر به‌نحوی از انحناء معادلات حرکت نقاط A و B و C به‌دست آمده باشد تعیین معادله حرکت نقطه دلخواهی نظیر D از روی روابط (۱-۱) کاریست بسیار مشکل و طولانی (هرچند عملی) بنابراین برای تعیین معادله حرکت نقاط B و C و هر نقطه دلخواه نظیر D به‌روش دوم که در زیر می‌آید شرح می‌دهیم:

۱-۲ تعریف دوران و مشخصه‌های دوران و دوران خرد

چون نقاط B و C یک جسم صلب نسبت به دستگاهی که یک نقطه نظیر A به‌روی مبداء دستگاه قرار دارد حرکت دورانی انجام می‌دهد پس ابتدا دوران هر نقطه حول محور مار بر مبداء مختصات به‌صورت زیر شرح می‌دهیم:

هرگاه برروی محور دوران مورد نظر بردار یکه $\hat{l}$ انتخاب نماییم دوران هر نقطه دلخواه حول این محور به اندازه زاویه ϕ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

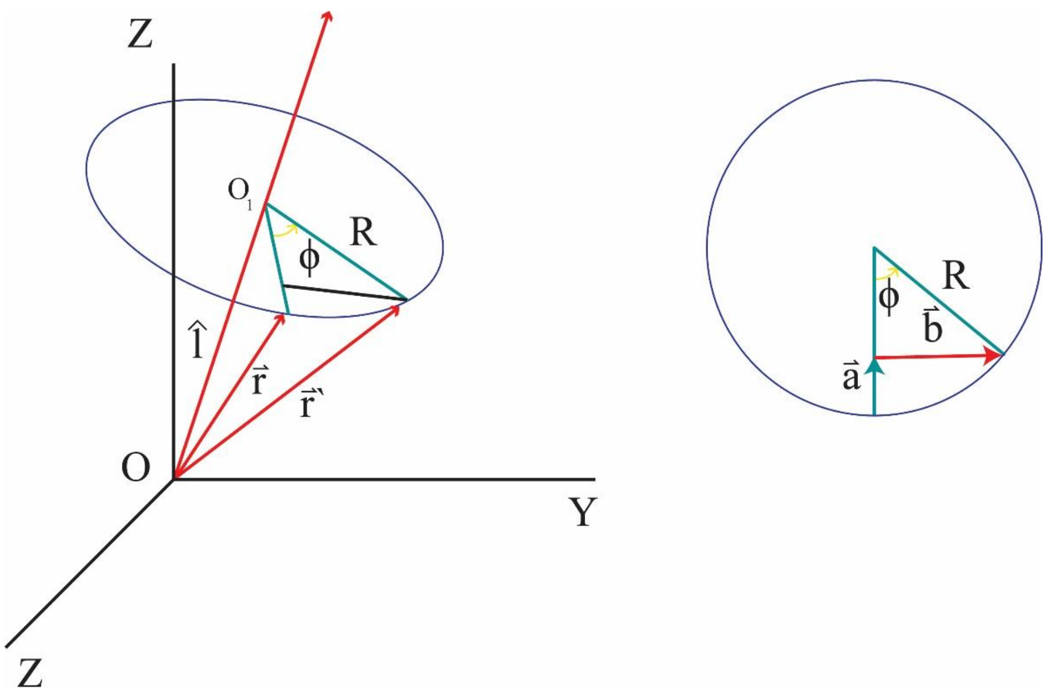
ابتدا از نقطه مورد نظر صفحه‌ای عمود بر محور (که موسوم به محور دوران است) رسم می‌کنیم. فاصله فصل مشترک صفحه با محور از نقطه دلخواه را شعاع دوران، R، می‌نامیم. حال اگر در صفحه مزبور دورانی به‌اندازه

زاویه ϕ در جهت خمش انگشتان دست راست طوری انجام دهیم که انگشت شست همین دست در جهت بردار یکه $\hat{l}$ انگشتان باشد، گویند نقطه مزبور دورانی به‌اندازه ϕ حول محور دوران (که با بردار یکه $\hat{l}$ مشخص شده) انجام می‌دهد بنابراین بردار مکانی $\vec{r}$ منتهی به نقطه دلخواه به بردار مکانی $\overrightarrow{r'}$ تبدیل می‌یابد.

بردار یکه $\hat{l}$ واقع بر محور دوران و زاویه ϕ را مشخصه‌های دوران یا پارامترهای دوران نامند. همانگونه که از نظر هندسی با معلوم بودن مشخصه‌های دوران توانستیم موقعیت نقطه دوران‌یافته را معلوم نماییم از نظر تحلیلی (جبری) هم می‌بایستی توان چنین کاری را داشته باشیم چه به‌موجب شکل (۳–۱):

$$\overrightarrow{r'} = \vec{r} + \vec{a} + \vec{b} \qquad (۱–٦)$$

a و $\vec{b}$ هم در شکل (-1-3a) و هم در شکل (-1-3b) مشخص شده‌اند که می‌بایستی برحسب مشخصه‌های دوران معلوم نماییم.



شکل (۳–۱)

به‌موجب شکل (۳–۱) قدر مطلق $\vec{a}$ برابر:

$$|\vec{a}| = R(1-\cos\phi) \tag{۱–۷}$$

از طرفی $\vec{a}$ در صفحه مار بر $\vec{r}$ و $\hat{l}$ قرار دارد جهت آن در جهت بردار یکه $\frac{\overrightarrow{OO_1}-\vec{r}}{R}$ است.

$$\left|\overrightarrow{OO_1}\right| = \hat{l}\cdot\vec{r} \to \overrightarrow{OO_1} = (\hat{l}\cdot\vec{r})\,\hat{l} \tag{۱–۸}$$

پس $\vec{a}$ برابر می‌شود با:

$$\vec{a} = (1-\cos\phi)\left[(\hat{l}\cdot\vec{r})\,\hat{l}\;-\;\vec{r}\right] \tag{۱–۹}$$

اما درمورد بردار $\vec{b}$ که در امتداد عمود بر صفحه مار بر $\vec{r}$ و $\hat{l}$ است به‌موجب شکل (۳–۱)

$$\left|\vec{b}\right| = R\,sin\,\phi \tag{۱–۱۰}$$

و جهت آن در جهت بردار یکه $\frac{\hat{l}\times\vec{r}}{R}$ است بنابراین $\vec{b}$ با رابطه:

$$\vec{b} = sin\,\phi\;\;(\hat{l}\times\vec{r}) \tag{۱–۱۱}$$

داده می‌شود با جایگزینی (۹–۱) و (۱۱–۱) در (٦–۱) $\overrightarrow{r'}$، بردار دوران‌یافته بر حسب مشخصه‌های دوران ϕ، $\hat{l}$ و بردار $\vec{r}$ معلوم می‌شود.

$$\overrightarrow{r'} = \vec{r} + (1-\cos\phi)\left[(\hat{l}\cdot\vec{r})\,\hat{l}\;-\;\vec{r}\right] + sin\,\phi\;\;(\hat{l}\times\vec{r}) \tag{۱–۱۲}$$

توجه می‌کنیم اگر $\hat{l}$ و ϕ و $\vec{r}$ داده شود $\overrightarrow{r'}$ معلوم می‌شود.

حال اگر بردار $\overrightarrow{r'}$ را حول محور دوران دیگری نظیر $\hat{n}$ با اندازه زاویه بی‌نهایت کوچک $\Delta\phi$ دوران دهیم، $\overrightarrow{r'}$ تبدیل به $\overrightarrow{r''}$ می‌گردد. اینگونه دوران‌ها را چرخش خرد می‌نامند، چون داریم:

$$\sin(\Delta\phi) \approx \Delta\phi \qquad\qquad \cos(\Delta\phi) \cong 1-\frac{1}{2}(\Delta\phi)^2+\cdots$$

پس با حفظ جملات بی‌نهایت کوچک مرتبه اول $\overrightarrow{r''}$ به‌موجب (۱۲–۱) برابر می‌شود با:

$$\begin{cases}\overrightarrow{r''} = \overrightarrow{r'} + \vec{0} + \Delta\vec{\phi}\,(\hat{n} \times \overrightarrow{r'}) \\ \overrightarrow{r''} = \overrightarrow{r'} + \Delta\vec{\phi} \times \overrightarrow{r'} \\ \Delta\vec{\phi} = \hat{n}\,\Delta\vec{\phi}\end{cases} \qquad (۱–۱۳)$$

روابط (۱۲–۱) و (۱۳–۱) از روابط بسیار مهم می‌باشند که حال از آن‌ها تعبیر فیزیکی می‌کنیم.

هرگاه $\vec{r}$ را بردار مکانی نقطه aام از جسم صلب در زمان صفر و $\overrightarrow{r'}$ را همان بردار مکانی در زمان t بنامیم. یعنی:

$$\begin{cases}\vec{r} = \overrightarrow{r_a}\,(0) \\ \overrightarrow{r'} = \overrightarrow{r_a}\,(t)\end{cases} \qquad (۱–۱٤)$$

و هرگاه بردار یکه $\hat{l}$ و زاویه دوران برحسب t داده شوند، یعنی:

$$\begin{cases}\hat{l} = \hat{l}\,(t) \\ \phi = \phi\,(t)\end{cases} \qquad (۱–۱۵)$$

در این‌صورت به‌موجب (۱۲–۱) خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{r_a}\,(t) = \overrightarrow{r_a}\,(0) + (1 - cos\,\phi(t))\big[(\hat{l}(t)\cdot\overrightarrow{r_a}\,(0))\,\hat{l}(t) - \overrightarrow{r_a}\,(0)\big] + sin\,\phi(t)\,(\hat{l}(t) \times \overrightarrow{r_a}\,(0)) \qquad (۱–۱٦)$$
$$a = 1, 2, \cdots, N$$

رابطه (۱٦–۱) مبین این واقعیت است که اگر بردار یکه $\hat{l}$ و ϕ بر حسب زمان معلوم باشند، نه تنها معادله نقاط B و C که در بخش (۳–۱) خواستار آن بودیم معلوم می‌شود بلکه معادله حرکت هر نقطه دلخواه نظیر D هم از رابطه (۱٦–۱) به‌دست می‌آید (کافیست بجای $\overrightarrow{r_a}\,(t)$، $\overrightarrow{r_d}\,(t)$ در (۱٦–۱) قرار بدهیم) توجه می‌کنیم که معلوم بودن $\hat{l}$ و ϕ به‌معنای مشخص کردن سه کمیت برحسب t است چون $\hat{l}$ برداریست یکه مثلا l_x و l_y بر حسب t معلوم گردد l_z از واحد بودن طول معلوم و نهایتا با مشخص کردن ϕ یعنی جمعا با مشخص کردن سه کمیت بر حسب t معادله حرکت هر نقطه از جسم صلب بدست می‌آید. بخاطر بیاوریم که با روش اول هم با مشخص کردن سه مختصه $y_B(t)$ و $x_B(t)$ و $x_C(t)$ می‌توانستیم مختصات کلیه نقاط جسم صلب (نظیر D) بر حسب t معلوم سازیم.

مزیّت رابطه (١٦–١) در این است که با معلوم بودن پارامترهای دوران برحسب زمان مختصات هر نقطه از جسم صلب معلوم می‌گردد و دیگر نیازی به روابط (۱–۱) برای تعیین معادله حرکت نقاط دیگر جسم صلب نداریم.

اما باز در اینجا با مشکل دیگری برخورد کرده‌ایم: چگونه $\hat{l}$ و ϕ را برحسب t بدست آوریم؟

در مقام پاسخ، از معادله (۱۳–۱)، چرخش خرد، تعبیر فیزیکی می‌کنیم:

هرگاه همانند سابق $\overrightarrow{r'}$ را بردار مکانی ذره aام از جسم صلب در لحظه t بدانیم، چون در مدت زمان کوتاه جسم صلب می‌تواند چرخش خرد انجام دهد پس $\overrightarrow{r''}$ را از نظر فیزیکی $\vec{r}(t+\Delta t)$ می‌نامیم. پس:

$$\begin{cases} \vec{r} \equiv \overrightarrow{r_a}\,(0) \\ \overrightarrow{r'} \equiv \overrightarrow{r_a}\,(t) \\ \overrightarrow{r''} \equiv \overrightarrow{r_a}\,(t+\Delta t) \end{cases} \qquad (۱–۱۷)$$

بنابراین معادله (۱۳–۱) به‌صورت:

$$\overrightarrow{r_a}\,(t+\Delta t) = \overrightarrow{r_a}\,(t) + \Delta\phi(\,\hat{n}(t) \times \overrightarrow{r_a}\,(t)\,) \qquad (۱–۱۸)$$

در می‌آید، حال اگر $\overrightarrow{r_a}\,(t)$ را به‌سمت چپ برده و رابطه فوق را بر Δt تقسیم کنید، خواهیم داشت:

$$\frac{\overrightarrow{r_a}\,(t+\Delta t) - \overrightarrow{r_a}\,(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}\,(\,\hat{n}(t) \times \overrightarrow{r_a}\,(t)\,) \qquad (۱–۱۸)$$

نام فیزیکی $\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ زاویه طی شده در واحد زمان یا به‌قولی سرعت زاویه‌ای می‌باشد که اگر در $\hat{n}$ ضرب شود:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \hat{n}\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \vec{\omega}(t) \qquad (۱–۱۹)$$

را بردار سرعت زاویه‌ای لحظه t نامند و معنای فیزیکی آن این‌است که بردار $\vec{\omega}(t)$ امتداد محور دوران در لحظه t با زاویه دوران خرد $\vec{\omega}\Delta t$ مشخص می‌کند. این، وضعیت جسم صلب در لحظه t را به وضعیت آن در لحظه $t+\Delta t$ تبدیل می‌کند اما توجه نمایید که $(\phi, \hat{l})$ وضعیت جسم صلب در لحظه صفر را به وضعیت ان در لحظه t تبدیل می‌نماید. توجه کنید امتداد $\vec{\omega}$ (منظور همان $\hat{n}$) با امتداد $\hat{l}$ یکسان نمی‌باشد مگر در مسائل خاص که غالبا در فیزیک عمومی مطرح می‌گردد. بنابراین رابطه (a–۱۸–۱) به‌صورت:

$$\frac{d\,\overrightarrow{r_a}\,(t)}{dt} = \vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{r_a}\,(t) \tag{۱–۲۰}$$

در می‌آید. همانگونه که مشاهده خواهیم کرد این رابطه مهم‌ترین رابطه سینماتیکی جسم صلب است، چه اگر $\vec{\omega}$ بر حسب t معلوم باشد از سه معادله دیفرانسیلی مرتبه اول (۲۰–۱) می‌توان $\overrightarrow{r_a}$ را برحسب t معلوم ساخت. چون تعیین $\overrightarrow{r_a}\,(t)$ منوط به دانستن $\vec{\omega}$ شده است بنابراین، این سوال مطرح می‌شود که $\vec{\omega}$ بر حسب t را چگونه به‌دست آوریم؟ در اینجاست که با کمک معادلات اویلر که بعدا شرح داده می‌شود $\vec{\omega}$ برحسب t تعیین و سپس به کمک رابطه (۲۰–۱) $\overrightarrow{r_a}\,(t)$ را برحسب t معلوم می‌سازیم.

رابطه (۲۰–۱) از نظر ریاضی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌باشد. چنین بنظر می‌رسد که حل چنین معادله دیفرانسیلی آسان است اما همانگونه که مشاهده خواهیم کرد، حل ان مشکل‌تر از آن است که تصور می‌رود و بدین علت است که در فیزیک عمومی معادله (۲۰–۱) را فقثط برای حالتی که امتداد $\vec{\omega}$ (و نه جهت آن) ثابت باشد حل می‌کنند.

نشان خواهیم داد که رابطه (۲۰–۱) از نظر فرمالیزم ریاضی عین معادله شرودینگر است و درواقع مفاهیمی نظیر $Propagator$ که در مکانیک کوانتومی استفاده می‌شود اولین بار در سینماتیک جسم صلب به‌کار گرفته شده است و نهایتا اگر معادله (۲۰–۱) حل گردد می‌توان این حل را با جواب بدست آمده در معادله (۱–۱٦) مقایسه کرد و در نتیجه رابطه‌ای تحلیلی بین بردار سرعت زاویه‌ای، $\vec{\omega}$ و مشخصه‌های دوران بدست آورد. (در کتاب مرجع ۱ این روابط فقط به‌روش هندسی بدست آورده شده است).

خلاصه کلام آن‌که روش نهایی تعیین معادلات حرکت جسم صلب از روی رابطه (۲۰–۱) صورت می‌گیرد. حال قبل از آن‌که معادله (۱–۲۰) را رسما حل نماییم، عملگرها و کاربرد آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱-۳ تعریف عملگرها

به موجب تعریف عملگرها ابزار ریاضی هستند که اگر بر برداری اثر کننده آن‌را به بردار دیگر تبدیل می‌کنند که الزاما نه طول و نه امتداد آن ثابت می‌ماند.

در روابط زیر برای سهولت در تحریر و بیان دقیق‌تر روابط بردارها، نوتاسیون دیراک را معرفی می‌کنیم و آن چیزی جز تغییر سمبل → به‌صورت $|\square\rangle$ نمی‌باشد، یعنی $\vec{a}$ را به‌صورت $|a\rangle$ نمایش می‌دهیم و در نتیجه وارونه و مزدوج بردار را به‌صورت $\vec{a}^* \equiv \langle a|$ نمایش می‌دهیم که به زبان علمی آن‌را برا (Bra) نامند و بردار را هم غلبا کت (Ket) نامند.

هرگاه بردار $|a\rangle$ را در یک دستگاه بردار پایه متعامد و نرمالیزه $|e_i\rangle$ (که همان $\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ و $\hat{k}$ هستند) تجزیه کنیم خواهیم داشت:

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_i |e_i\rangle \tag{۱–۲۱}$$

و اگر بخواهیم مؤلفه $\vec{a}$ را تعیین کنیم طرفین رابطه را در $\langle e_j|$ ضرب اسکالر می‌کنیم:

$$\langle e_j|a\rangle = \sum_i a_i \langle e_j|e_i\rangle \tag{۱–۲۲}$$

و چون $|e_i\rangle$ و $\langle e_j|$ بر هم متعامد هستند حاصلضرب اسکالر $\widehat{e_i}$ در $\widehat{e_j}$ برابر با:

$$\langle \mathrm{e_i}|\mathrm{e_j}\rangle = \delta_{\mathrm{ij}} \tag{۱–۲۳}$$

می‌شود. بنابراین مقدار a_j برابر می‌شود با:

$$a_j = \langle e_j|a\rangle \tag{۱–۲۴}$$

می گردد. با جایگزاری (۲٤–۱) در (۲۱–۱) خواهیم داشت:

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{3} |e_i\rangle\langle e_i|a\rangle \tag{۱–۲۵}$$

در نتیجه با اولین عملگر

$$\sum_i |e_i\rangle\langle e_i| = \mathrm{I} \tag{۱–۲۶}$$

که بر هر برداری نظیر $|a\rangle$ اثر کند همان بردار را حاصل می‌نماید آشنا می‌شویم عملگر فوق را عملگر واحد می‌نامند.

توجه کنید اگر نوتاسیون دیراک استفاده نمی‌کردیم در این‌صورت مجبور به استفاده از نوتاسیون دایادیک می‌بودیم که امروزه متداول نیست. هنگامیکه ادعا می‌کنیم عملگری را می‌شناسیم بدان معناست که اگر آن‌را بر هر بردار معلومی اثر دهیم، بردار تبدیل یافته را برای ما معلوم نماید یا به‌قولی موفقه‌های بردار تبدیل یافته برای ما معلوم باشد.

شرط لازم برای معلوم بودن یک عملگر آن‌است که از تاثیر آن بر هر سه بردار پایه $|e_i\rangle$ با خبر باشیم. اگر A بر $|e_i\rangle$ اثر کرده و نتیجه $|\varepsilon_i\rangle$ حاصل نماید، معلوم بودن $|\varepsilon_i\rangle$ به‌معنای معلوم بودن مؤلفه‌های آن در دستگاه $\{\widehat{e_i}\}$ است یعنی:

$$A|e_i\rangle = |\varepsilon_i\rangle \tag{۱–۲۷}$$

در نتیجه اگر طرفین را در $\langle e_j|$ ضرب کنیم داریم:

$$\langle e_j \mid A \mid e_i\rangle = \langle e_j|\varepsilon_i\rangle \tag{۱–۲۸}$$

کمیت $\langle e_j \mid \varepsilon_i\rangle$ به‌معنای مؤلفه‌های بردار $|\varepsilon_i\rangle$ در امتداد $|e_j\rangle$ می‌باشد پس هرگاه ما در فضای سه‌بعدی نه کمیت $\langle e_j \mid A \mid e_i \rangle$ را بشناسیم در این‌صورت اگر هر برداری نظیر $\vec{a}$ داده شود از تاثیر A بر $\vec{a}$ مطلع هستیم. کمیت‌های $\langle e_j \mid A \mid e_i \rangle$ را غالبا به‌صورت A_{ji} نوشته و آن‌را مؤلفه‌های عملگر A در بردار پایه $\{e_j\}$ می‌نامند. حال اگر عملگر A بر $|a\rangle$ اثر نماید بردار $|b\rangle$ حاصل شود:

$$\begin{gathered} A|a\rangle = |b\rangle \\ \sum_j A a_j |e_j\rangle = |b\rangle \\ \sum_j \langle e_i \mid A a_j \mid e_j \rangle = \langle e_i \mid b \rangle \end{gathered} \tag{۱–۲۹}$$

بنابراین داریم:

$$\sum_i A_{ij} a_j = b_i \tag{۱-۳۰}$$

یعنی اگر A_{ij} ها و a_j ها معلوم باشند، در این‌صورت b_i ها معلوم می‌شوند. بنابراین هنگامیکه عملگری به‌صورت یک جدول مربعی زیر داده می‌شود:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \tag{۱-۳۱}$$

بدان معناست که تاثیر عملگر A بر روی $\overrightarrow{e_1}$ و $\overrightarrow{e_2}$ و $\overrightarrow{e_3}$ را معلوم کرده‌اند. توجه کنید همانگونه که یک بردار در یک دستگاه متعامد $\overrightarrow{e_\iota}$ دارای مؤلفه‌های a_i که $(i = 1, 2, 3)$ می‌باشد و در یک دستگاه متعامد دیگر (که دارای مبداء مشترک با دستگاه $\overrightarrow{e_\iota}$ است) دارای مؤلفه‌های $a_i^{'}$ خواهد بود، که به صورت $\langle e_i' \mid a \rangle$ نوشته می‌شود، مؤلفه‌های یک عملگر در بردار پایه‌های متفاوت دارای مقادیر مختلفی می‌باشد. یعنی اگر بخواهیم A را در بردار پایه $\overrightarrow{e_\iota}$ نشان دهیم داریم:

$$A_{ij} = \langle e_i \mid A \mid e_j \rangle \tag{۱-۳۲}$$

و اگر دستگاه متعامد دیگری در نظر بگیریم، مؤلفه‌های A به شکل دیگیری خواهد بود، یعنی:

$$A'_{ij} = \langle e'_i \mid A \mid e'_j \rangle \tag{۱-۳۳}$$

توجه می‌کنیم که خواص یک عملگر با تغییر بردار پایه‌های آن تغییر نمی‌کند؛ یعنی اگر A بر $\vec{a}$ اثر کرده و بردار $\vec{b}$ حاصل نماید که مثلا زاویه ۳۰ درجه با $\vec{a}$ بسازد در نمایش‌های مختلف A زاوایه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ همیشه ۳۰ درجه باقی می‌ماند.

از آرزوهای بزرگ ماست که هرگاه عملگر A در بردار پایه‌ای نمایش داده شده باشد، بردار پایه جدیدی بیابیم که نمایش A در آن بردار پایه ساده‌ترین شکل ممکن را داشته باشد و ساده‌ترین شکل، نمایش قطری یک عملگر می‌باشد که ریاضی‌دانان آنرا قطری کردن عملگر می‌نامند.

حاصل‌ضرب دو عملگر عملگر جدیدی را حاصل می‌نماید که هرگاه دو عملگر را بشناسیم نتیجه حاصلضرب دو عملگر عملگری شناخته شده خواهد بود. برای اثبات چنین می‌گوییم:

$$AB = C$$

شناختن C یعنی معلوم بودن C_{ij} یعنی:

$$\langle e_i \mid AB \mid e_j \rangle = \langle e_i \mid C \mid e_j \rangle$$

حال ما بین A و B عملگر واحد را قرار می‌دهیم، یعنی:

$$\sum_k |e_k\rangle\langle e_k| = \mathrm{I}$$

بنابراین داریم:

$$\sum_k \langle e_i|A|e_k\rangle\langle e_k|B|e_j\rangle = C_{ij}$$

$$\sum_k A_{ik}B_{kj} = C_{ij} \qquad (۱-۳٤)$$

رابطه (۳٤–۱) قاعده حاصل‌ضرب دو عملگر را بیان می‌کند که ما غالبا آن‌را به‌صورت اصل پذیرفته بودیم. توجه کنید که در حالت کلی:

$$AB \neq BA \qquad (۱-۳۵)$$

از یک عملگر می‌توان عملگرهای جدیدی ساخت، مثلا عملگر وارونه (ترانهاده) عملگر A را به‌صورت $\tilde{A}$ نمایش میدهند که با عملگر A به‌صورت زیر مرتبط است:

$$\left(\tilde{A}\right)_{ij} = A_{ji} \qquad (۱-۳٦)$$

عملگر وارونه مزدوج عملگر A به‌صورت A^+ نمایش می‌دهند که با عملگر A به‌صورت زیر مرتبط است:

$$(A^+)_{ij} = A^*{}_{ji} \qquad (۱-۳۷)$$

در فضای حقیقتی روابط (۳٦–۱) و (۳۷–۱) عینیت هستند.

عملگر معکوس عملگر A را با A^{-1} نمایش می‌دهند که عملگر جدیدی است و با عملگر A به‌صورت زیر مرتبط است:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I} \qquad (۱-۳۸)$$

مؤلفه‌های A^{-1} از قاعده خاص به‌دست می‌آید که در اینجا ضرورتی برای بیان آن نیست.

هرگاه یک عملگر دارای خاصیت زیر باشد:

$$A = A^{+} \tag{۱–۳۹}$$

آن‌را عملگر هرمیتی (در فضای حقیقی متقارن) نامند. هرگاه عملگر A دارای خاصیت

$$AA^{+} = A^{+}A = \mathrm{I} \tag{۱–۴۰}$$

باشد در آن‌صورت عملگر A را یونیتاری (در فضای حقیقی متعامد) نامند. علت نامگذاری کلمه متعامد در فضای حقیقی به‌شرح زیر می‌باشد:

$$\begin{gathered} AA^{+} = A^{+}A = 1 \quad , \quad A^{+} = A^{-1} \\ \sum_k A_{ik}A^{+}_{kj} = \delta_{ij} \\ \sum_k A_{ik}A_{jk} = \delta_{ij} \end{gathered} \tag{۱–۴۱}$$

رابطه (۴۱–۱) مبین این واقعیت است که عناصر واقع در سطر iام برعناصر واقع در سطر jام عمود است و به‌همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که عنصر ستون iام بر عناصر ستون jام عمود است. حال یک نکته ریاضی ساده اما مهم در مورد عملگرها را خاطر نشان می‌کنیم و آن اینکه هرگاه عملگر A بردار $\vec{a}$ را به بردار $\vec{b}$ تبدیل نماید، عملگر $\langle a|A^{+}$ را به $\langle b|$ تبدیل می‌نماید. برای اثبات چنین می‌گوییم:

$$\begin{gathered} A|a\rangle = |b\rangle \\ \sum_j A_{ij}a_j = b_i \end{gathered}$$

از طرفین رابطه فوق مزدوج می‌گیریم:

$$\sum_j {A^*}_{ij}{a^*}_j = {b^*}_i$$

چون حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار در فضای مختلط با رابطه $\langle q \mid p\rangle = \langle p \mid q\rangle^*$ تعریف شده است بنابراین اگر $b_i = \langle e_i \mid b\rangle$ باشد، $b_i^* = \langle b \mid e_i\rangle$ می‌گردد. بنابراین رابطه فوق برابر می‌شود با:

$$\sum_j \langle a|e_j\rangle A_{ji}^{+} = \langle b|e_i\rangle$$
$$\sum_j \langle a|e_j\rangle\langle e_j|A^{+}|e_j\rangle = \langle b|e_i\rangle$$
$$\langle a|A^{+}|e_i\rangle = \langle b|e_i\rangle$$

که با ضرب طرفین در $|e_i\rangle$ و جمع‌بندی روی اندیس i نتیجه می‌گیریم که:

$$\langle a \mid A^{+} = \langle b \mid \leftarrow A \mid a\rangle = \mid b\rangle \tag{۱–۴۲}$$

رابطه (۴۲–۱) را در آینده بارها از آن استفاده خواهیم کرد.

یکی از خواص عملگرهای یونیتاری این است که اگر بر هر برداری اثر نماید، آن‌را تبدیل به بردار دیگر می‌نماید، اما طول بردار ثابت می‌ماند که اثبات ان به‌شرح زیر می‌باشد:

$$A|a\rangle = |b\rangle|$$
$$\langle a|A^{+} = \langle b|$$
$$\langle a|A^{+}A|a\rangle = \langle b|b\rangle \tag{۱–۴۳}$$
$$\langle a|1|a\rangle = \langle b|b\rangle$$
$$\langle a|a\rangle = \langle b|b\rangle$$

پس عملگر یونیتاری برای دوران دادن بردار مکانی بدون تغییر دادن طول ان کاربرد زیادی در سینماتیک جسم صلب خواهد داشت.

حال می‌خواهیم رابطه (۱۶–۱) که دوران بردار مکانی $\vec{r}$ حول $\hat{l}$ با اندازه ϕ می‌باشد را به‌صورت تاثیر عملگر A بر $\vec{r}$ به‌دست آوریم. برای این منظور طرفین رابطه (۱۶–۱) را در بردار پایه $\vec{e_i}$ ضرب اسکالر می‌کنیم (اندیس a را که معرف ذره است را موقتا می‌توان کنار گذاشت)

$$x_i(t) = x_i(0) + (1 - \cos\phi)[l_j x_j(0) l_i - x_i(0)] + \varepsilon_{ikj} \sin\phi \; l_k \, x_j(0) \tag{۱–۴۴}$$

حال از رابطه (٤٤–۱)، $x_j(0)$ را فاکتور می‌گیریم:

$$x_i(t) = \{\delta_{ij} + (1 - cos\,\phi)[l_i l_j - \delta_{ij}] - \varepsilon_{ikj}\, sin\,\phi\;\, l_k\} x_j(0)$$

(توجه کنید که جمع‌بندی روی اندیس j داریم) بنابراین عملگر چرخشی که باعث دوران $\vec{r}$ حول $\hat{l}$ با اندازه ϕ می‌باشد در دستگاه بردار پایه $\vec{e_i}$ نمایشی به‌صورت زیر دارد:

$$x_i(t) = A_{ij} x_j(0)$$

$$A_{ij} = \delta_{ij} + (1 - cos\;\phi)(l_i l_j - \delta_{ij}) - \varepsilon_{ijk} l_k\, sin\;\phi \tag{۱–٤٥}$$

عملگر چرخش فوق را در حالت‌های که محور دوران آن در جهات محورهای دستگاه مختصات باشد بارها مشاهده کرده‌ایم؛ به‌عنوان مثال اگر $\hat{l} = \hat{k}$ (یعنی $l_i = \delta_{i3}$) عملگر چرخش به‌صورت زیر است:

$$A_{11} = 1 + (1 - \cos\;\phi)(0 - 1) - 0 = \cos\;\phi$$
$$A_{12} = 0 + (1 - \cos\;\phi)(0 - 0) - \varepsilon_{123} l_3 \sin\;\phi = -\sin\;\phi$$
$$A_{13} = 0 + (1 - \cos\;\phi)(0 - 0) - \varepsilon_{13k}\delta_{k3} \sin\;\phi = 0$$
$$A_{21} = \cdots$$
$$A_{22} = \cdots$$

بنابراین عملگر A به‌صورت زیر در می‌آید:

$$A(\vec{k}, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\;\phi & -\sin\;\phi & 0 \\ \sin\;\phi & \cos\;\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۱–٤٦}$$

و اگر محور دوران منطبق بر oy باشد یعنی $\hat{l} = \hat{j}$ $\quad \ell_i = \delta_{i2}$ عملگر A به‌صورت زیر در می‌آید:

$$A(\vec{j}, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\;\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{۱–٤٧}$$

و اگر محور دوران منطبق بر ox باشد یعنی $\hat{l} = \hat{\imath}$ $\quad \ell_i = \delta_{i1}$ عملگر A به‌صورت زیر در می‌آید:

$$A(\vec{\imath}, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\;\phi & -\sin\;\phi \\ 0 & \sin\;\phi & \cos\;\phi \end{pmatrix} \tag{۱–٤۸}$$

نمایش عملگر A هنگامیکه $\hat{l}$ منطبق بر هیچ‌یک از محورها نباشد، به‌موجب رابطه (۴۵–۱) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi + l_1^2(1-\cos\phi) & (1-\cos\phi)l_1l_2 - l_3\sin\phi & (1-\cos\phi)l_1l_3 + l_2\sin\phi \\ (1-\cos\phi)l_1l_2 + l_3\sin\phi & \cos\phi + l_2^2(1-\cos\phi) & (1-\cos\phi)l_2l_3 - l_1\sin\phi \\ (1-\cos\phi)l_1l_3 - l_2\sin\phi & (1-\cos\phi)l_2l_3 + l_1\sin\phi & \cos\phi + l_3^2(1-\cos\phi) \end{pmatrix} \quad (۱–۴۹)$$

(توجه کنید که $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$ است) توجه کنید که تریس (رد) عملگر A چه از روی (۴۵–۱) و چه از روی (۴۹–۱) برابر است با:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{3} A_{ii} = \sum_{i=1}^{3} [\delta_{ii} + (1-\cos\phi)(l_il_i - \delta_{ii}) - \varepsilon_{iik}\sin\phi]$$
$$tr(A) = 3 + (1-\cos\phi)(1-3) - 0 \quad (۱–۵۰)$$
$$tr(A) = 1 + 2\cos\phi$$

حال می‌خواهیم نشان دهیم که عملگر A یونیتاری (متعامد) می‌باشد اثبات $AA^+ = 1$ از روی (۴۵–۱) و یا (۴۹–۱) ممکن اما کمی طولانی است. بنابراین سعی می‌کنیم رابطه فوق را جمع و جور تری بنویسیم. برای این منظور حاصل‌ضرب برداری دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌صورت تاثیر عملگری بر بردار $\vec{b}$ بدست می‌آوریم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum\nolimits_{i,j,k} \varepsilon_{ikj} a_i b_k \mid e_j\rangle \quad (۱–۵۱)$$

در (۵۱–۱) b_k را به‌صورت $\langle e_k|b\rangle$ می‌نویسیم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\sum_{i,j,k} a_i \varepsilon_{ijk} |e_j\rangle\langle e_k|b\rangle$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = -a_i \varepsilon_{ijk} |e_j\rangle\langle e_k|b\rangle$$

حال اگر سه عملگر ضد هرمیتی (ضد متقارن) S^i $(i = 1, 2, 3)$ به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$S^i = \varepsilon_{ijk}|e_j\rangle|e_k| \quad , \quad i = 1,2,3 \quad (۱–۵۲)$$

در آن‌صورت داریم:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = -(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{S}})|\boldsymbol{b}\rangle \tag{۱–۵۳}$$

توجه کنید $\vec{a} \cdot \vec{S} = \sum_i a_i S^i$ است. عملگرهای S^i را عملگرهای مولد چرخش خرد می‌نامند و در بردار پایه $\vec{e_i}$ نمایش آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \langle e_m|S^i|e_n\rangle &= \varepsilon_{ijk}\langle e_m|e_j\rangle\langle e_k|e_n\rangle \\ &= \varepsilon_{imn} \\ {S^i}_{jk} &= \varepsilon_{ijk} \end{aligned} \tag{۱–۵۴}$$

فرم صریح نمایش سه عملگر فوق در بردار پایه $\vec{e_i}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$S^{1=}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{۱–۵۵}$$

همانگونه که مشاهده خواهیم کرد استفاده از خواص عملگرهای S^i است که بسیاری از محاسبات سخت و طولانی سینماتیک جسم صلب را آسان می‌گرداند.

اولین کاربرد S^i ها نمایش علگر دوران به فرم جمع و جور می‌باشد. به موجب رابطه (۱۳–۱) یک چرخش خرد با استفاده از (۵۳–۱) به‌صورت:

$$\begin{aligned} \vec{r}\,' &= \vec{r} - (\Delta\vec{\phi} \cdot \vec{S})\vec{r} \\ \vec{r}\,' &= (1 - \Delta\vec{\phi} \cdot \vec{S})\vec{r} \end{aligned} \tag{۱–۵۶}$$

در می‌آید. چون یک دوران حول محور $\hat{l}$ و با اندازه زاویه ϕ معادل N دوران حول محور $\hat{l}$ و با زاویه $\frac{\phi}{N}$ می‌باشد. پس اگر N را بسیار بزرگ انتخاب کنیم هر یک از دوران‌های $\frac{\phi}{N}$ دوران‌های خرد محسوب می‌شود و در نتیجه یک دوران متناهی حول $\hat{l}$ با اندازه زاویه ϕ برابر می‌شود با:

$$\vec{r}\,' = \left(1 - \frac{\vec{\phi} \cdot \vec{S}}{N}\right)^N \vec{r} \tag{۱–۵۷}$$

و با در نظر گرفتن تعریف:

$$Lim_{N\to\infty}\,(1-\frac{x}{N})^N = e^{-x}$$

رابطه (۵۷–۱) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\boldsymbol{\vec{r}' = e^{-(\vec{\phi}\cdot\vec{S})}\vec{r} = e^{-\phi(\vec{l}\cdot\vec{S})}\vec{r}} \qquad ,\boldsymbol{\vec{\phi} = \phi\vec{l}} \tag{۵۸–۱}$$

رابطه (۵۸–۱) فرم $compact$ رابطه (۱۲–۱) می‌باشد چون اگر بسط تابع نمایی را بنویسیم به رابطه (۱۲–۱) می‌رسیم:

$$e^{-(\vec{\phi}\cdot\vec{S})}\vec{r} = \left[1 + \left(-\vec{\phi}\cdot\vec{S}\right) + \frac{\left(-\vec{\phi}\cdot\vec{S}\right)^2}{2!} + \frac{(-\vec{\phi}\cdot\vec{S})^3}{3!} + \frac{(-\vec{\phi}\cdot\vec{S})^4}{4!} + \cdots\right]\vec{r}$$

$$e^{-(\vec{\phi}\cdot\vec{S})}\vec{r} = \left[1 - \phi(\vec{l}\cdot\vec{S}) + \frac{\phi^2(\vec{l}\cdot\vec{S})^2}{2!} - \frac{\phi^3\left(\vec{l}\cdot\vec{S}\right)^3}{3!} + \frac{\phi^4(\vec{l}\cdot\vec{S})^4}{4!} + \cdots\right]\vec{r} \tag{۵۹–۱}$$

و چون داریم:

$$\left(-\vec{l}\cdot\vec{s}\right)\vec{r} = \vec{l}\times\vec{r}$$
$$\left(-\vec{l}\cdot\vec{s}\right)^2\vec{r} = \left(-\vec{l}\cdot\vec{s}\right)\left(\vec{l}\times\vec{r}\right) = l\times(l\times\vec{r}) = \vec{l}\left(\vec{l}\cdot\vec{r}\right) - \vec{r}l^2$$
$$\left(-\vec{l}\cdot\vec{s}\right)^3\vec{r} = \left(-\vec{l}\cdot\vec{s}\right)\left(-\vec{l}\cdot\vec{s}\right)^2\vec{r} = \vec{l}\times\left[\left(\vec{l}\cdot\vec{r}\right)\vec{l} - \vec{r}\right] = -\vec{l}\times\vec{r} = \left(\vec{l}\cdot\vec{s}\right)\vec{r} = -\left(-\vec{l}\cdot\vec{s}\right)\vec{r}$$
$$\left(-\vec{l}\cdot\vec{s}\right)^4\vec{r} = \left(-\vec{l}\cdot\vec{s}\right)\left(-\vec{l}\cdot\vec{s}\right)^3\vec{r} = -\left(-\vec{l}\cdot\vec{s}\right)^2\vec{r}$$

بنابراین رابطه (۵۹–۱) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$e^{-(\vec{\phi}\cdot\vec{S})}\vec{r} = \left[1 - \phi\left(\vec{l}\cdot\vec{S}\right) + \frac{\phi^2}{2!}\left(\vec{l}\cdot\vec{S}\right)^2 + \frac{\phi^3}{3!}\left(\vec{l}\cdot\vec{S}\right) - \frac{\phi^4}{4!}\left(\vec{l}\cdot\vec{S}\right)^2 + \cdots\right]\vec{r}$$

که فقط شامل جملات $\left(\vec{l}\cdot\vec{S}\right)$ و $\left(\vec{l}\cdot\vec{S}\right)^2$ می‌باشد که با فاکتورگیری هر یک از جملات مزبور خواهیم داشت:

$$e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}}\vec{r} = \left\{1 + \left(-\vec{l}\cdot\vec{S}\right)[\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \cdots] + \left(\vec{l}\cdot\vec{S}\right)^2[\frac{\phi^2}{2!} - \frac{\phi^4}{4!} + \cdots]\right\}\vec{r}$$
$$e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}}\vec{r} = \left\{1 + \left(-\vec{l}\cdot\vec{S}\right)\sin\,\phi + \left(-\vec{l}\cdot\vec{S}\right)^2(1-\cos\,\phi)\right\}\vec{r}$$
$$e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}}\vec{r} = \left\{1 + (1-\cos\phi)[\left(\vec{l}\cdot\vec{r}\right)\vec{l} - \vec{r}] + (\vec{l}\times\vec{r})\sin\,\phi\right\}$$

که همان نتیجه رابطه (۱۲–۱) است. بنابراین از این به بعد عملگر دوران حول محور $\vec{l}$ و با اندازه زاویه دوران ϕ را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A(\vec{l},\phi)=e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}} \tag{۱–۶۰}$$

همانگونه که مشاهده می‌شود رابطه (۶۰–۱) نسبت به روابط (۱۲–۱) یا (۴۵–۱) بخاطر داشتن فرم $compact$ ارجح است.

حال به آسانی می‌توان ثابت کرد که عملگر A یونیتاری (متعامد) و همچنین دترمینان آن برابر یک است. چون با توجه به اینکه S^i ضد هرمیتی است، یعنی ${S^i}^+=-S^i$ بنابراین داریم:

$$AA^+=e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}}\cdot e^{\vec{\phi}\cdot\vec{s}}=1 \tag{۱–۶۱}$$

و باتوجه به رابطه:

$$det(e^B)=e^{tr(B)}$$

$$det(A)=det(e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}})=e^{tr(-\vec{\phi}\cdot\vec{s})} \tag{۱–۶۲}$$

و چون داریم:

$$tr(S^i)=\sum_j {S^i}_{jj}=\sum_j \varepsilon_{ijj}=0 \qquad ,i=1,2,3$$

بنابراین داریم:

$$det(A)=1$$

نکته قابل توجه دیگر اینکه:

$$A^+(\vec{l},\phi)=e^{\vec{\phi}\cdot\vec{s}}=A(\vec{l},-\phi) \tag{۱–۶۳}$$

نمایش A به فرم (۶۰–۱) مستقل از دستگاه بردار پایه است بنابراین می‌توان هر بردار پایه‌ای را انتخاب نمود. نمایش مستقل از بردار پایه را می‌توان به صورت دیگری هم نوشت، کافیست که در رابطه (۱۴۵–۱) از $|e_j\rangle$ و $\langle e_i|$ فاکتور گرفت و یا اینکه رابطه (۶۰–۱) را بسط داد. در هر دو حالت نتیجه یکسان است.

$$\langle e_i|A|e_j\rangle = \delta_{ij} + (1-\cos\,\phi)[l_il_j - \delta_{ij}] - \varepsilon_{ijk}l_k\sin\,\phi \quad ,\varepsilon_{ijk} = S_{ij}^k$$

$$\langle e_i|A|e_j\rangle = \langle e_i|\{1 + (1-\cos\,\phi)(|l\rangle\langle l| - 1) - (\vec{l}\cdot\vec{S})\sin\,\phi\}|e_j\rangle$$

$$\begin{aligned} A &= 1 + (1-cos\ \phi)[|l\rangle\langle l| - 1] - (\vec{l}\cdot\vec{S})\ sin\ \phi \\ A &= 1 + (1-cos\ \phi)[-\vec{l}\cdot\vec{S}] + (-\vec{l}\cdot\vec{S})\ sin\ \phi \end{aligned} \qquad (۱-٦٤)$$

خواص کمیتوتاری و تبدیلات S^i:

به‌موجب رابطه (۵۲-۱) داریم:

$$\begin{aligned} [S^i,S^j] &= \varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}[|e_m\rangle\langle e_n|,|e_p\rangle\langle e_q|] \\ &= \varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}[|e_m\rangle\langle e_q|\delta_{np} - |e_p\rangle\langle e_n|\delta_{mq}\rangle \\ &= \varepsilon_{imp}\varepsilon_{jpq}|e_m\rangle\langle e_q| - \varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpm}|e_p\rangle\langle e_n| \\ &= -[\delta_{ij}\delta_{mq} - \delta_{iq}\delta_{mj}]|e_m\rangle|e_q| + [\delta_{ij}\delta_{np} - \delta_{ip}\delta_{nj}]|e_p\rangle\langle e_n| \\ &= -\delta_{ij}|e_m\rangle| + |e_j\rangle\langle e_i| + \delta_{ij}|e_p\rangle\langle e_p| - |e_i\rangle\langle e_j| \\ [S^i,S^j] &= -\{|e_i\rangle\langle e_j| - |e_j\rangle\langle e_i|\} \end{aligned} \qquad (۱-٦۵)$$

از طرفی داریم:

$$S^P = \varepsilon_{pmn}|e_m\rangle\langle e_n|$$

$$\begin{aligned} \sum_P \varepsilon_{Pij}S^P &= \sum\varepsilon_{Pij}\varepsilon_{Pmn}|e_m\rangle\langle e_n| \\ &= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})|e_m\rangle\langle e_n| \\ &= |e_i\rangle\langle e_j| - |e_j\rangle\langle e_i| \end{aligned}$$

در نتیجه رابطه (٦۵-۱) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$[S^i,S^j] = -\sum_k \varepsilon_{ijk}S^k \qquad (۱-٦٦)$$

رابطه کمیتوتاری (٦٦-۱) بسیار مشابه رابطه کمیتوتاری اپراتورهای ممنتوم‌های زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی است. و در این رابطه تعبیر زیبایی از مقادیر قابل اندازه‌گیری اپراتورهای L_i خواهیم کرد.

حال اگر $e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}}$ یک عملگر دوران حول $\hat{l}$ و با اندازه زاویه ϕ باشد، رابطه:

$$e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}}(\widehat{m}\cdot\vec{S})e^{\vec{\phi}\cdot\vec{s}} \tag{۱–٦٧}$$

که $\overrightarrow{m}$ یک بردار دلخواه می‌باشد، نتیجه زیرین را می‌دهد. به‌موجب اتحاد $Baker\ Hausdorf$:

$$e^{\lambda A}Be^{-\lambda A} = B + \lambda[A,B] + \frac{\lambda^2}{2!}[A,[A,B]] + \cdots$$

داریم که:

$$\begin{aligned}
e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}}(\widehat{m}\cdot\vec{S})e^{\vec{\phi}\cdot\vec{s}} &= \widehat{m}\cdot\vec{S} + \left[-\vec{\phi}\cdot\vec{S},\widehat{m}\cdot\vec{S}\right] + \frac{1}{2!}\Big[\big(-\vec{\phi}\cdot\vec{S}\big),\big[\big(-\vec{\phi}\cdot\vec{S}\big),\big(\widehat{m}\cdot\vec{S}\big)\big]\Big] + \cdots,\\
&= \widehat{m}\cdot\vec{S} - \phi_i m_j[S^i,S^j] + \cdots\\
&= \widehat{m}\cdot\vec{S} + \phi_i m_j\varepsilon_{ijk}S^k + \cdots\\
&= \widehat{m}\cdot\vec{S} + (\vec{\phi}\times\overrightarrow{m})_k S^k + \frac{1}{2!}[-\vec{\phi}\cdot\vec{S},(\vec{\phi}\times\overrightarrow{m})\cdot\vec{S}] + \cdots\\
&= \widehat{m}\cdot\vec{S} + (\vec{\phi}\times\overrightarrow{m})\cdot\vec{S} + \frac{1}{2!}[\vec{\phi}\times(\vec{\phi}\times\overrightarrow{m})]\cdot\vec{S} + \cdots\\
&= \{\widehat{m} + \vec{\phi}\times\widehat{m} + \frac{1}{2!}\vec{\phi}\times(\vec{\phi}\times\widehat{m}) + \cdots\}\cdot\vec{S}\\
&= \{[1 - \vec{\phi}\cdot\vec{S} + \frac{1}{2!}(-\vec{\phi}\cdot\vec{S})^2 + \cdots]\widehat{m}\}\cdot\bar{S}\\
&= (e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}}\widehat{m})\cdot\vec{S}
\end{aligned}$$

بدان معناست که بردار $\overrightarrow{m}$ را حول $\hat{l}$ با اندازه ϕ دوران دهیم که بردار جدید $\hat{n}$ حاصل شود، یعنی:

$$e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}}(\widehat{m}\cdot\vec{S})e^{\vec{\phi}\cdot\vec{s}} = (e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}}\widehat{m})\cdot\vec{S} = \hat{n}\cdot\vec{S} \tag{۱–٦٨}$$

هرگاه مثلا در رابطه (۱–٦٨) $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{e_3}$ و $\vec{n} = \overrightarrow{e_1}$ انتخاب کنیم، در این‌صورت $\hat{l}$ در امتداد $\vec{J}$ و $\phi = \frac{\pi}{2}$ است:

رابطه (۱–٦٨) را به‌زبان ریاضی تبدیل یونیتاری نامند. حال می‌دانیم که مقادیر ویژه عملگر B در اثر تبدیل یونیتاری تغییر نمی‌کند، یعنی:

$$B|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

$$ABA^{-1}A|\lambda\rangle = \lambda \qquad\qquad A|\lambda\rangle = |\lambda\rangle'$$

$$B'|\lambda\rangle' = \lambda|\lambda\rangle'$$

بنابراین مقادیر ویژه سه عملگر S^1 و S^2 و S^3 هر سه مساوی هستند.

تذکر این موضوع در مکانیک کوانتومی شایان اهمیت است. چون به‌روش مشابه رابطه (۱–٦٦) در فضای هیلبرت به‌صورت:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}}(\widehat{m}\cdot\vec{L})e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} = \hat{n}\cdot\vec{L} \qquad (۱–٦٩)$$

است که مبیّن این واقعیت است که مقادیر مشاهده‌پذیر (قابل اندازه‌گیری) سه عملگر $\mathrm{L_x}$ و $\mathrm{L_y}$ و $\mathrm{L_z}$ مساوی می‌باشند، به‌عبارت دیگر چه محوری را oz بنامیم علی السویه است.

واضح است که از (۱–٦٨) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$e^{\vec{\phi}\cdot\vec{S}}(\overrightarrow{m}\cdot\vec{S})e^{\vec{\phi}\cdot\vec{S}} = \left(e^{\vec{\phi}\cdot\vec{S}}\overrightarrow{m}\right)\cdot\vec{S} = \overrightarrow{m}'\cdot\vec{S} \qquad (۱–٧٠)$$

۱-۴ رابطه بین مشخصه‌های دوران و بردار سرعت زاویه‌ای

رابطه (۱–۲۰) به‌کمک رابطه (۱–۵۳) به‌صورت:

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \vec{\omega}(t)\times\vec{r}(t) = \left(-\vec{\omega}\cdot\vec{S}\right)\vec{r}(t) = -\Omega(t)\vec{r}(t) \qquad (۱–٧١)$$

در می‌آید که عملگر $\Omega(t)$ عبارت است از:

$$\Omega(t) = \sum_i \omega_i(t)S^i = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3(t) & -\omega_2(t) \\ -\omega_3(t) & 0 & \omega_1(t) \\ \omega_2(t) & -\omega_1(t) & 0 \end{pmatrix}$$

در اینجا لازم است توضیحاتی به دوستداران مکانیک کوانتومی داده شود. رابطه (۷۱–۱) از نظر فرمالیزم ریاضی عین معادله شرودینگر در فضای هیلبرت می‌باشد، یعنی معادله:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H\,|\psi(t)\rangle \tag{۱–۷۲}$$

که حل معادله فوق وقتی که H تابعی از زمان نباشد، به‌صورت زیر است:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle \tag{۱–۷۳}$$

در مکانیک کوانتومی $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ *را* $Propagator$ *نامند و آن عملگری است که اگر بر بردار حالت ذره در زمان صفر،* $|\psi(0)\rangle$، اثر کند بردار حالت در زمان t، $|\psi(t)\rangle$ را می‌دهد.

حال به‌موجب (۷۱–۱) در فضای سه‌بعدی داریم:

$$-\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \Omega(t)\vec{r}(t)$$

حل معادله (۷۱–۱) به‌علت آنکه Ω تابعی از زمان است و عملگری ضد هرمیتی است، در مقایسه با معادله شرودینگری که هامیلتونین تابعی از زمان نیست، مشکل‌تر است. اما اگر آن‌را حل کنیم، حل آن به چه صورت خواهد بود؟ با کمی تامل و تفکر حل (۷۱–۱) چیزی جز رابطه (٤٥–۱) نمی‌باشد که در فرم $compact$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{r}(t) = A(\vec{l}(t), \phi(t))\vec{r}(0) \tag{۱–۷٤}$$

بنابراین می‌توان A را به‌زبان مکانیک کوانتومی $Propagator$ نامید، که $\vec{r}(0)$ را به $\vec{r}(t)$ تبدیل می‌کند.

به‌موجب (۷۱–۱) و (۷٤–۱) می‌بایستی رابطه‌ای بین $\vec{\omega}$ و $A(t)$ وجود داشته باشد. اگر (۷٤–۱) را در $A^{+}(t)$ ضرب کنیم و سپس نسبت به زمان مشتق بگیریم؛ خواهیم داشت:

$$A^{+}(t)\vec{r}(t) = \vec{r}(0)$$

$$\dot{A}^{+}(t)\vec{r}(t) + A^{+}(t)\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = 0$$

$$-\frac{d}{dt}\bar{r}(t) = A(t)\dot{A}(t)^{+}\vec{r}(t)$$

که به‌موجب رابطه (۱–۷۱) داریم:

$$\Omega(t)\vec{r}(t) = A(t)\dot{A}^{+}(t)\vec{r}(t)$$

و چون $\vec{r}(t)$ بردار مکانی دلخواهی از جسم صلب است پس خواهیم داشت که:

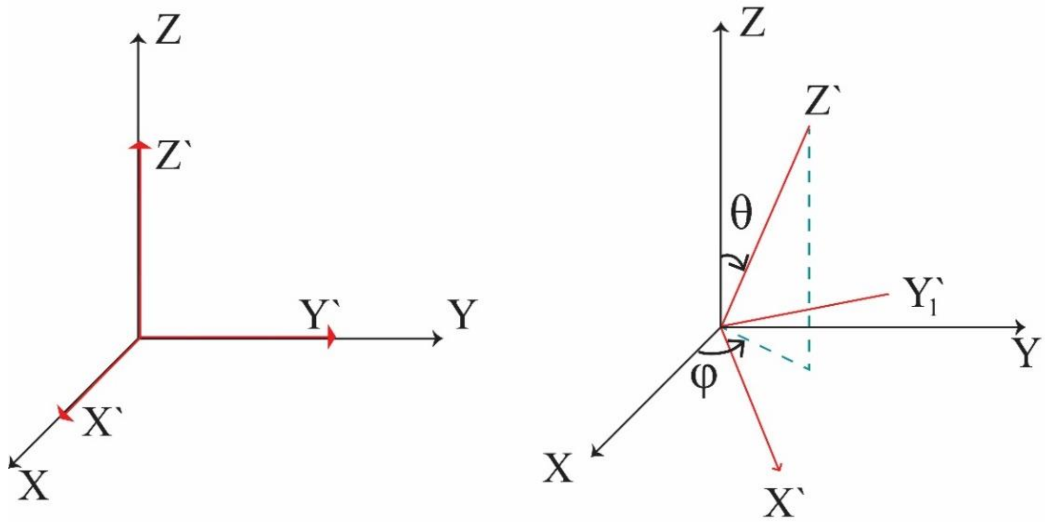
$$A(t)\dot{A}^{+}(t) = \Omega(t) = \sum_{i} \omega_i S^i \tag{۱–۷۵}$$

رابطه (۱–۷۵) رابطه بین $\vec{\omega}$ و مشخصه‌های دوران؛ (ϕ و $\hat{l}$) بدست می‌دهد. نظر باینکه فرم متداول ماتریس A به‌صورت (۱–٤۹) می‌باشد، مشتق‌گیری از آن و سپس ضرب آن در A کار بسیار طولانی‌ای می‌باشد. در کتب مکانیک کلاسیک این عملیات انجام نیافته ولی با استفاده از فرم $Compact$، A و قوانین تبدیل عملگرهای S^i، می‌توان رابطه بین $\vec{\omega}$ و (ϕ و $\hat{l}$) را بدست آورد. اما قبل از انجام چنین کاری بهتر است ابتدا پارامترهای اویلر را معرفی نماییم.

۱-۵ پارامترهای اویلر

هرگاه سه دوران متوالی حول محورهای خاصی با زوایای دوران متناهی و مشخصی انجام دهیم (که در زیر شرح داده می‌شود) چون جهت محورهای دوران مشخص است این سه دوران را فقط بازوایای دوران نامگذاری می‌کنیم و آن‌ها را پارامترهای اویلر یا زوایای اویلر نامند. ممکن است برای خواننده این سوال مطرح شود که چگونه سه دوران متوالی حول سه محور دوران معین معادل یک دوران (ϕ و $\hat{l}$) می‌گردد؟ پاسخ خام بدین سوال آنست که دوران در هر دو حالت با سه پارامتر دوران مشخص می‌شود. اما برای دادن پاسخ دقیق‌تر به این موضوع چنین استدلال می‌کنیم:

دو دستگاه مختصات منطبق بر هم را در نظر می‌گیریم و سپس یکی از آن‌ها را به‌طور دلخواه دوران داده و در یک وضعیت معینی قرار می‌دهیم:



شکل (٤-١)

هرگاه مختصات زاویه‌ای محور oz' (مطابق شکل (b-٤-١) θ و ϕ بنامیم، با دو دوران متوالی:

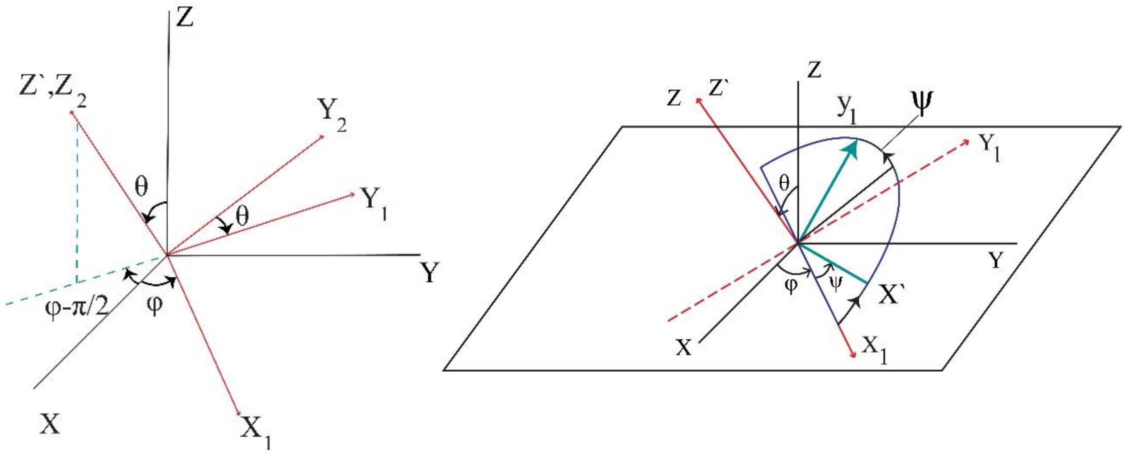
۱- $(\hat{k},\varphi)$ که دوران حول محور oz با اندازه زاویه φ می‌باشد که محور ox را به محور ox_1 و محور oy را به محور oy_1 تبدیل می‌کند. اما محورهای oz و oz_1 برهم منطبق هستند.

۲- $(\vec{\partial}_1,\theta)$ که $\vec{\partial}_1$ بردار یکه‌ای است واقع بر محور oy_1 از دستگاه $ox_1y_1z_1$ به دستگاه $ox_2y_2z_2$ تبدیل می‌نماید.

بناراین محور oz منطبق بر محور oz' می‌شود. اما انطباق این دو محور به‌معنای انطباق دو دستگاه مختصات نمی‌باشد. کافیست دوران سومی حول محور oz' و با اندازه ψ انجام دهیم تا دو دستگاه بر هم منطبق شوند. بنابراین با سه دوران متوالی φ و θ و ψ دستگاه $oxyz$ را منطبق بر $ox'y'z'$ می‌نماید. φ و θ و ψ را می توان پارامترهای اویلر نامید. پارامترهای اویلر تعریف منحصر بفردی ندارند و تعریف فوق بیشتر در مکانیک کوانتومی استفاده می‌شود تا در مکانیک کلاسیک. در مکانیک کلاسیک پارامترهای اویلر به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

ابتدا دستگاه $oxyz$ را حول $\hat{k}$ و با اندازه زاویه φ و سپس حول $\hat{\imath}_1$ و با اندازه زاویه θ ($\hat{\imath}_1$ بردار یکه‌ای است واقع بر محور ox_1 از دستگاه $ox_1y_1z_1$ که از دوران دستگاه $oxyz$ حول محور $\hat{k}$ و با اندازه φ

حاصل شده است) دوران می‌دهیم. این بدان معناست که محور oz' دارای مختصات زاویه‌ای $(\varphi - \frac{\pi}{2}، \theta)$ می‌باشد.



شکل (۵-۱)

و نهایتاً دوران حول محور $\hat{k}'$ و با اندازه زاویه ψ را می‌دهیم. بنابراین دو دستگاه $oxyz$ و $ox'y'z'$ بر هم منطبق می‌شوند.

حال در مسئله جسم صلب هر بردار مکانی جسم صلب است که دوران می‌کند. برای این منظور در زمان صفر دو دستگاه $oxyz$ و $ox'y'z'$ را بر هم منطبق در نظر می‌گیریم و یک بردار مکانی دلخواه $\vec{r}(0)$ از جسم صلب را در نظر می‌گیریم اگر دستگاه $ox'y'z'$ متصل به جسم صلب باشد، با دوران $(\hat{k}, \varphi)$ هم بردار مکانی و هم دستگاه $ox'y'z'$ دوران می‌یابد. بنابراین در اثر این دوران $\vec{r}$ تبدیل به $\vec{r}_1$ می‌گردد یعنی:

$$A(\vec{k}, \varphi)\vec{r}(0) = \vec{r}_1 \tag{۱-۷۶}$$

سپس دوران دوم $(\vec{\imath}_1, \theta)$ $\vec{r}_1$ را به $\vec{r}_2$ تبدیل می‌کند یعنی:

$$A(\vec{\imath}_1, \theta)\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \tag{۱-۷۷}$$

و نهایتاً اگر دوران سوم را اعمال نماییم، $\vec{r}(t)$ را حاصل می‌نماید یعنی داریم:

$$A(\vec{k}', \psi)\vec{r}_2 = \vec{r}(t) \tag{۱-۷۸}$$

بنابراین از روابط به دست آمده خواهیم داشت:

$$A(\vec{k}',\psi)A(\vec{\imath}_1,\theta)A(\vec{k},\varphi)\vec{r}(0)=\vec{r}(t) \tag{۱-۷۹}$$

توجه کنید که سه دوران فوق معادل یک دوران (ϕ و $\hat{l}$) می‌باشد یعنی:

$$\vec{r}(t)=A(\vec{l},\phi)r(0)=A(\vec{k}',\psi)A(\vec{\imath}_1,\theta)A(\vec{k},\varphi)\vec{r}(0) \tag{۱-۸۰}$$

نظر به اینکه $\vec{\imath}_1$ و $\hat{k}'$ در دستگاه $oxyz$ دارای مؤلفه‌های پیچیده‌ای می‌باشد یعنی:

$$\begin{gathered}\vec{\imath}_1=\cos\ \varphi\,\vec{\imath}+\sin\ \varphi\,\vec{\jmath}\\ \vec{k}'\equiv\vec{k}_2=\sin\theta\sin\varphi\,\vec{\imath}-\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath}+\cos\theta\,\vec{k}\end{gathered} \tag{۱-۸۱}$$

نمایش‌های $A\ (\hat{\imath}_1,\theta)$ و $A\ (\hat{k}',\psi)$ همانند رابطه (۴۹-۱) پیچیده می‌باشد. در مقام چاره جویی دست به حیله ریاضی زیرین می‌زنیم. (اثبات بهتر که از کتاب Sakurai برگرفته شده است و در ضمینه آمده را مطالعه کنید)

هرگاه عملگر یونیتاری A بر بردار پایه‌ای اثر کند و بردار پایه $|e_i'\rangle$ را حاصل نماید رابطه بین مولفه‌های یک بردار نظیر $|a\rangle$ در دو دستگاه به صورت زیرین به هم مرتبط می‌شوند:

$$\begin{gathered}A|e_i\rangle=|e_i'\rangle\\ \langle e_i|A^+=\langle e_i'|\\ \langle e_i|A^+|a\rangle=\langle e_i'|a\rangle\end{gathered} \tag{۱-۸۲}$$

در رابطه (۸۲-۱) $\langle e_i'|a\rangle$ به معنای مولفه بردار $|a\rangle$ در دستگاه $|e_i'\rangle$ است. پس رابطه بین مولفه‌های **یک بردار** در دو دستگاه متعامد به صورت:

$$A_{ij}^+a_j=a_i'$$

که رابطه محض آن به صورت زیر می‌باشد: این تبدیل را تبدیل غیرفعال می‌نامند.

$$A^+|a\rangle=(|a\rangle)' \tag{۱-۸۳}$$

حال دو دستگاه $oxyz$ و $ox_1y_1z_1$ (که دومی در اثر دوران $(\hat{k},\varphi)$ حاصل شده است و بردار $\vec{r}$ را در نظر می‌گیریم. رابطه بین مولفه‌های بردار $\vec{r}$ در دو دستگاه به موجب رابطه (۸۳–۱) به صورت:

$$A^{+}(\vec{k},\varphi)\vec{r}=(\vec{r})_1 \tag{۱–۸۴}$$

که فرم صریح آن به صورت:

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix} \tag{۱–۸۵}$$

است. حال اگر دو دستگاه $ox_1y_1z_1$ و $ox_2y_2z_2$ (که دومی در اثر دوران حول محور ox_1 به اندازه θ حاصل شده در نظر بگیریم) رابطه بین مولفه‌های بردار $\vec{r}$ در این دو دستگاه نامبرده به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix} \tag{۱–۸۶}$$

بسیار دقت کنید که رابطه (۸۶–۱) را به صورت:

$$A^{+}(\vec{\imath},\theta)(\vec{r})_1=(\vec{r})_2 \tag{۱–۸۷}$$

می‌نویسیم و نه به صورت $A\ (\hat{\imath}_1,\theta)$ ، و نهایتاً اگر دو دستگاه $ox_2y_2z_2$ و $ox'y'z'$ (که دومی در اثر دوران حول محور oz_2 به اندازه زاویه ψ حاصل شده است) در نظر بگیریم رابطه بین مولفه‌های بردار $\vec{r}$ در این دو دستگاه به صورت:

$$A^{+}\big(\vec{k},\psi\big)(\vec{r})_2=(\vec{r})' \tag{۱–۸۸}$$

می‌باشد. که فرم صریح آن به صورت:

$$\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} \tag{۱–۸۹}$$

می‌باشد بنابراین رابطه بین مولفه‌های بردار $\vec{r}$ در دو دستگاه $oxyz$ و $ox'y'z'$ به صورت:

$$(\vec{r})'=A^{+}(\vec{k},\psi)A^{+}(\vec{\imath},\theta)A^{+}(\vec{k},\varphi)\vec{r} \tag{۱–۹۰}$$

و یا به عبارتی:

$$\vec{r} = A(\vec{k},\varphi)A(\vec{\imath},\theta)A(\vec{k},\psi)(\vec{r})' \tag{۱–۹۱}$$

می‌باشد. حال از $\vec{r}$ و $(\vec{r})$‘ تعبیر فیزیکی می‌نماییم.

$(\vec{r}')$ مولفه‌های بردار $\vec{r}$ در دستگاه پریم است. اگر بردار مکانی جسم صلب همراه با دستگاه متصل به آن دوران نموده باشد در این صورت مولفه‌های $\vec{r}$ در دستگاه پریم یعنی $\vec{r}'$ همان $\vec{r}(0)$ است و از طرف دیگر $\vec{r}$ در (۹۱–۱) مولفه‌های بردار $\vec{r}$ در دستگاه $oxyz$ است که تعبیر فیزیکی آن همان بردار مکانی جسم صلب در زمان t است پس در این صورت تعبیر فیزیکی (۹۱–۱) به صورت:

$$\vec{r}(t) = A(\vec{k},\varphi)A(\vec{\imath},\theta)A(\vec{k},\psi)\vec{r}(0) \tag{۱–۹۲}$$

در می‌آید. حال این رابطه با رابطه (۷۹–۱) مقایسه کنید. و مشاهده کنید که نمایش ماتریس‌ها در (۱–۹۲) در مقایسه با (۷۹–۱) چقدر ساده‌تر می‌باشد. رابطه (۹۲–۱) کاربرد زیادی در مکانیک کوانتمی دارد. (مثلاً به مرجع ۲ مراجعه نمایید.)

معنای هندسی رابطه (۹۲–۱) این است که به جای سه دوران دستگاه متصل به جسم صلب و بردار مکانی جسم صلب حول $(\hat{k},\varphi)$ و $(\hat{\imath}_1,\theta)$ و $(\widehat{k'},\psi)$ می‌توان ابتدا دوران $(\hat{k},\psi)$ و بعد $(\hat{\imath},\theta)$ و بعد $(\hat{k},\varphi)$ را انجام داد. (توجه کنید که جای φ و ψ عوض شده است.) و مزیت دوران دوم ساده‌تر بودن شکل ماتریس‌های دوران می‌باشد. توجه می‌کنیم که اگر φ و θ و ψ بر حسب t داده شود بردار $\vec{r}$ در زمان t حاصل می‌شود. اثبات بهتر هم‌ارز بودن روابط (۹۰–۱) و (۸۰–۱) در بخش ضمیمه ۳ مشاهده کنید. حال در مقام آن هستیم که رابطه‌ای بین $\vec{\omega}$ و پارامترهای دوران استخراج کنیم.

همان‌گونه که مشاهده خواهیم کرد استخراج این روابط نقش اساسی در تعیین معادلات حرکت جسم صلب خواهد داشت. به موجب رابطه (۷۵–۱) داریم:

$$A\dot{A}^{+} = \Omega(t) = \sum_{i} \omega_i S^i$$

عملکرد A بر حسب پارامترهای اویلر به موجب (۹۲–۱) برابر است با:

$$A(t) = e^{-\varphi S^3} e^{-\theta S^1} e^{-\psi S^3} \tag{۱–۹۳}$$

و چون $-S^i = {S^i}^+$ می‌باشد بنابراین داریم:

$$A^+(t) = e^{\psi S^3} e^{\theta S^1} e^{\varphi S^3} \tag{۱–۹٤}$$

و $\dot{A}^+$ برابر است با:

$$\dot{A}^+(t) = \dot{\psi} S^3 e^{\psi S^3} e^{\theta S^1} e^{\varphi S^3} + e^{\psi S^3} \dot{\theta} S^1 e^{\theta S^1} e^{\varphi S^3} + e^{\psi S^3} e^{\theta S^1} \dot{\varphi} S^3 e^{\varphi S^3}$$

(مواظب عدم کمیوتاسیون S^i ها با S^j ها باشید.) بنابراین داریم:

$$A(t)\dot{A}^+(t) = e^{-\varphi S^3} e^{-\theta S^1} \dot{\psi} S^3 e^{\theta S^1} e^{\varphi S^3} + e^{-\varphi S^3} \dot{\theta} S^1 e^{\varphi S^3} + \dot{\varphi} S^3$$

حال به موجب رابطه (٤٨–۱) داریم:

$$e^{-\vec{\varphi}\cdot\vec{S}} \vec{m} \cdot \vec{S} e^{\vec{\varphi}\cdot\vec{S}} = \left(e^{-\vec{\varphi}\cdot\vec{S}} \vec{m}\right) \cdot \vec{S} = \vec{n} \cdot \vec{S} \tag{۱–۹٥}$$

بنابراین پرواضح است که:

$$e^{-\theta S^1} \vec{k} \cdot \vec{S} e^{\theta S^1} = \left(-\sin\theta\, \vec{j} + \cos\theta\, \vec{k}\right) \cdot \vec{S}$$

و در نتیجه داریم:

$$e^{-\varphi S^3}\left(-\sin\ \theta\, \vec{j} + \cos\ \theta\, \vec{k}\right) \cdot \vec{\mathrm{S}}\, e^{\varphi S^3} = -\sin\ \theta(\cos\ \varphi\, \vec{j} - \sin\ \varphi\, \vec{\imath}) \cdot \vec{\mathrm{S}} + \cos\ \theta\, \vec{k} \cdot \vec{\mathrm{S}}$$

بنابراین (۹٦–۱) با استفاده از روابط به دست آمده برابر است با:

$$e^{-\varphi S^3} \vec{\imath} \cdot \vec{S} e^{\varphi S^3} = (\cos\ \varphi \vec{\imath} + \sin\ \varphi \vec{j}) \cdot \vec{S} \tag{۱–۹٦}$$

و همچنین داریم:

$$\begin{aligned} A(t)\dot{A}^+(t) = -\dot{\psi}\sin\ \theta\cos\ \varphi S^2 + \dot{\psi}\sin\theta\,\sin\varphi S^1 + \dot{\psi}\cos\ \theta S^3 + \\ \dot{\theta}\cos\ \varphi S^1 + \dot{\theta}\sin\ \varphi S^2 + \dot{\varphi} S^3 \end{aligned} \tag{۱–۹۷}$$

که با فاکتورگیری داریم:

$$A(t)\dot{A}^+(t) = \left(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi\right)S^1 + -\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi\, S^2 + \left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right)S^3$$

و با جای‌گذاری در (۱–۷۵) و مقایسه ضرایب S^i به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) &= \omega_x(t) = \dot{\psi}sin\ \theta sin\ \varphi + \dot{\theta}cos\ \varphi \\
\omega_2(t) &= \omega_y(t) = -\dot{\psi}sin\ \theta cos\ \varphi + \dot{\theta}sin\ \varphi \\
\omega_3(t) &= \omega_z(t) = \dot{\psi}cos\ \theta + \dot{\varphi}
\end{aligned} \qquad (۱–۹۸)$$

حال بهتر است روشی را که مرجع ۱ در استخراج (۱–۹۸) به کار می‌برد شرح داده شود. چون متاسفانه تا حدی توضیحات داده شده در آن مبهم است. گفتیم پارامترهای اویلر یعنی φ و θ و ψ بر حسب زمان داده شود نه تنها بردار مکانی $\vec{r}(t)$ هر نقطه از جسم صلب معلوم می‌گردد بلکه جهت‌گیری ($orientation$) دستگاه متصل به جسم صلب نیز معلوم می‌شود.

بنابراین اگر بخواهیم وضعیت جسم صلب را در لحظه $t + \Delta t$ تعیین کنیم کافی است مقدار پارامترهای اویلر را در لحظه $t + \Delta t$ بدانیم، یعنی:

$$\varphi(t + \Delta t) \quad , \quad \theta(t + \Delta t) \quad , \quad \psi(t + \Delta t)$$

اما از طرفی هم گفتیم اگر وضعیت جسم صلب در لحظه t معلوم باشد. با چرخش خرد $\vec{\omega}\Delta t$ می‌توان آن را به وضعیت $t + \Delta t$ در آورد.

به موجب شکل (۱–٦) در زمان $t + \Delta t$ محور ox_1 (که غالباً $line\ of\ nods$ می‌نامند.) می‌بایستی زاویه:

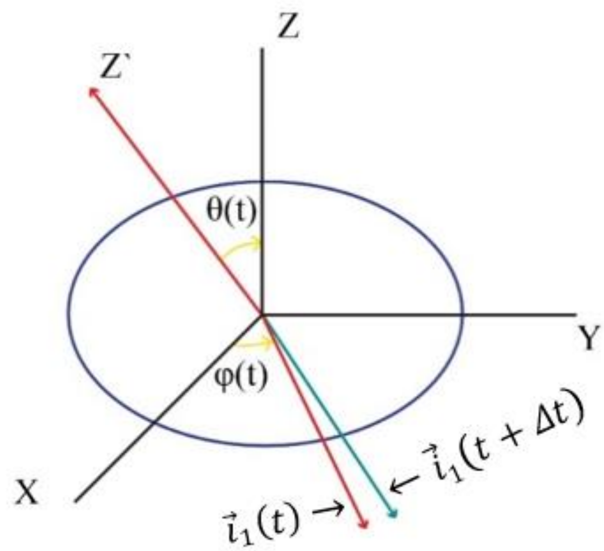
$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \dot{\varphi}\Delta t + 0(\Delta t)^2$$

با محور ox داشته باشد بنابراین دستگاه پریم در زمان t را حول محور oz به اندازه چرخش خرد $\vec{k}\dot{\varphi}\Delta t$ بچرخانیم محور ox_1 با محور ox زوایه $\varphi(t + \Delta t)$ می‌سازد.

پس این چرخش خرد را با پارامترهای ($\dot{\varphi}\Delta t$ و k) مشخص می‌کنیم و داریم:

$$\Delta t\vec{\omega}_1(t) = \vec{k}\dot{\varphi}\Delta t$$

حال اگر دستگاه حاصل را حول محور $\vec{i}_1(t + \Delta t)$ چرخشی به اندازه $\dot{\theta}\Delta t$ انجام دهیم زاویه بین محور oz' با oz برابر $\theta(t) + \dot{\theta}\Delta t$ یعنی $\theta(t + \Delta t)$ می‌شود.



شکل (٦–١)

بنابراین این چرخش خرد را با پارامترهای ($\vec{i}_1(t+\Delta t)$ و $\dot{\theta}\Delta t$) مشخص می‌کنیم و داریم:

$$\Delta t\vec{\omega}_2(t) = \vec{i}_1(t+\Delta t)\dot{\theta}\Delta t$$

که با تقریب بی‌نهایت کوچک مرتبه اول برابر با:

$$\Delta t\vec{\omega}_2(t) = \vec{i}_1(t)\dot{\theta}\Delta t + 0(\Delta t)^2$$

می‌شود. و نهایتاً اگر حول $\vec{k}_2(t+\Delta t)$ دورانی به اندازه $\dot{\psi}\Delta t$ انجام دهیم دستگاه $ox'y'z'$ در لحظه t به وضعیت لحظه $t+\Delta t$ در خواهد آمد که البته:

$$\Delta t\vec{\omega}_3(t) = \vec{k}_2(t+\Delta t)\dot{\psi}\Delta t = \vec{k}_2(t)\dot{\psi}\Delta t + \cdots$$

می‌باشد. به زبان دیگر با سه چرخش خرد حول سه محور $\hat{k}$ و $\hat{\imath}_1$ و $\hat{k}'$ به اندازه $\dot{\varphi}\Delta t$ و $\dot{\theta}\Delta t$ و $\dot{\psi}\Delta t$ می‌توان وضعیت دستگاه را از حالت t به حالت $t+\Delta t$ در آورد.

حال به موجب (٥٦–١) نتیجه سه چرخش خرد متوالی را می‌توان معادل یک چرخش خرد دانست چون به موجب (٥٦–١) داریم:

$$\vec{r}' = (1 - \Delta\vec{\varphi}\cdot\vec{S})\vec{r}$$
$$\vec{r}'' = (1 - \Delta\vec{\theta}\cdot\vec{S})\vec{r}'$$

و در نتیجه با حفظ جملات بی‌نهایت کوچک مرتبه اول داریم:

$$\vec{r}'' = (1 - (\Delta\vec{\theta} + \Delta\vec{\varphi}) \cdot \vec{S})\vec{r} + \cdots \tag{۱–۹۹}$$

یعنی می‌توان چرخش‌های خرد را به صورت برداری جمع کرد و معادل یک چرخش دانست پس چرخش خرد معادل با $\vec{\omega}\Delta t$ که دستگاه $ox'y'z'$ در لحظه t را به لحظه $t+\Delta t$ دوران می‌دهد برابر است با:

$$\vec{\omega}\Delta t = (\vec{\omega}_1(t) + \vec{\omega}_2(t) + \vec{\omega}_3(t))\Delta t$$

و در نتیجه داریم:

$$\overline{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t)\vec{k} + \dot{\theta}(t)\vec{\imath}_1(t) + \dot{\psi}(t)\vec{k}_2(t) \tag{۱–۱۰۰}$$

و با در نظر گرفتن مقادیر داده شده $\hat{\imath}_1$ و $\hat{k}_2$ در (۱–۸۱)، برابر می‌شود با:

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\cos\ \varphi\vec{\imath} + \dot{\theta}\sin\ \varphi\vec{\jmath} + \dot{\psi}\sin\ \theta\sin\varphi\,\vec{\imath} - \dot{\psi}\sin\ \theta\cos\varphi\,\vec{\jmath} + \dot{\psi}\cos\ \theta\vec{k} \tag{۱–۱۰۱}$$

و این همان نتیجه است که کتاب مرجع۱ به عنوان مسئله ارائه نموده است. و همان رابطه (۱–۹۸) ما می‌باشد.

همان‌گونه که مشاهده خواهیم کرد ما علاقه به تعیین $\vec{\omega}$ در دستگاه پریم داریم. بنابراین کافی است در (۱۰۰–۱) ، $\hat{k}$ و $\hat{\imath}_1$ و $\hat{k}_2$ برحسب بردارهای یکه $\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ و $\hat{k}$ محاسبه شود.

چون داریم:

$$\begin{aligned}
\vec{k}_2 &\equiv \vec{k}' \\
\vec{\imath}_1 &= cos\ \psi\vec{\imath}' - sin\ \psi\vec{\jmath}' \\
\vec{k} &= cos\ \theta\vec{k}_2 + sin\ \theta\vec{\jmath}_2 \\
&= cos\ \theta\vec{k}' + sin\ \theta(cos\ \psi\vec{\jmath}' + sin\ \psi\vec{\imath}')
\end{aligned} \tag{۱–۱۰۲}$$

بنابراین داریم:

$$\vec{\omega}(t) = (\dot{\varphi}\cos\ \theta + \dot{\psi})\vec{k}' + \left(\dot{\varphi}\sin\ \theta\cos\ \psi - \dot{\theta}\sin\ \psi\right)\vec{\jmath}' + (\dot{\theta}\cos\ \psi + \dot{\varphi}\sin\ \theta\sin\ \psi)\vec{\imath}' \tag{۱–۱۰۳}$$

این رابطه را نیز کتاب مرجع۱ به‌عنوان متن درسی استخراج کرده است.

برای استخراج رابطه (۱۰۳–۱) به روش پیشنهادی ما کافی است نحوه نمایش یک عملگر در یک بردار پایه جدید را به دست آوریم هرگاه نمایش آن در یک بردار پایه قدیم معلوم بوده باشد.

$$\langle e_i' \mid M \mid e_j' \rangle \equiv M_{ij}' = \langle e_i \mid A^+ M A \mid e_j \rangle \tag{۱-۱۰۴}$$

رابطه (۱۰۴-۱) معرف این واقعیت است که اگر از تاثیر A بر بردار پایه e_i بردارهای $e_j^{'}$ حاصل شده باشد نمایش یک عملگر دلخواه نظیر M در بردار پایه $e_i^{'}$ برابر حاصل‌ضرب A^+MA می‌باشد.

حال به موجب رابطه (۷۵-۱) داریم:

$$A\dot{A}^+ = \Omega(t) = \sum_i \omega_i S^i$$

با ضرب طرفین در A^+ از چپ و A از راست و با در نظر گرفتن خواص یونیتاری عملگر A خواهیم داشت:

$$\dot{A}^+ A = A^+ \Omega A = \sum_i \omega_i' S^i \tag{۱-۱۰۵}$$

برای استخراج تساوی سوم در (۱۰۵-۱) چنین می‌گوییم:

$$\sum_i A^+ \omega_i S^i A = \sum_i \omega_i e^{\vec{\phi}\cdot\vec{s}} (\vec{e}_i \cdot \vec{S}) e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}}$$

و به موجب (۶۸-۱) داریم:

$$\begin{aligned} &= \sum_i \omega_i (e^{\vec{\phi}\cdot\vec{s}} \vec{e}_i) \cdot \vec{S} \\ &= \quad (e^{\vec{\phi}\cdot\vec{s}} \vec{\omega}) \cdot \vec{S} \\ &= (A^+ \vec{\omega}) \cdot \vec{S} \\ &= \vec{\omega}' \cdot \vec{S} \end{aligned} \tag{۱-۱۰۶}$$

بنابراین از روی رابطه (۱۰۵-۱) و با محاسبه مشابه که انجام دادیم می‌توان ${\omega'}_i$ را برحسب پارامترهای اویلر محاسبه کرد. مع هذا بازهم می‌توان از یک شگرد ریاضی استفاده نمود:

اگر (۱۰۵-۱) را با (۷۵-۱) مقایسه کنیم مشاهده می‌کنیم جای A پس و پیش شده است. می‌توان (۱-۱۰۵) را به صورت:

$$\dot{A}^+ A = \left(A^+ \dot{A}\right)^+ \tag{۱-۱۰۷}$$

نوشت. از طرفی چون:

$$A(\varphi, \theta, \psi) = e^{-\varphi S^3} e^{-\theta S^1} e^{-\psi S^3}$$

می‌باشد، پس:

$$A^{+}(\varphi,\theta,\psi) = e^{\psi S^3} e^{\theta S^1} e^{\varphi S^3}$$

درمی‌آید. که می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned} A^{+}(\varphi,\theta,\psi) &= A(-\psi,-\theta,-\varphi) \\ A(\varphi,\theta,\psi) &= A^{+}(-\psi,-\theta,-\varphi) \end{aligned} \tag{۱–۱۰۸}$$

و در نتیجه داریم:

$$\dot{A}(\varphi,\theta,\psi) = \dot{A}^{+}(-\psi,-\theta,-\varphi) \tag{۱–۱۰۹}$$

پس (۱–۱۰۵) با در نظر گرفتن روابط (۱–۱۰۷) و (۱–۱۰۸) و (۱–۱۰۹) به صورت زیر:

$$(A^{+}\dot{A})^{+} = \{A(-\psi,-\dot{\theta},-\varphi)\dot{A}^{+}(-\psi,-\theta,-\varphi)\}^{+} = -(\omega_i' S^i)^{+} \tag{۱–۱۱۰}$$

در می‌آید و در نتیجه رابطه (۱–۱۰۵) عین رابطه (۱–۷۵) درمی‌آید. پس کافی است در استخراج مولفه‌های بردار $\vec{\omega}$ در دستگاه متصل به جسم صلب در رابطه (۱–۹۸):

$$\omega_i \to -\omega_i' \quad , \quad \psi \to -\varphi \quad , \quad \theta \to -\theta \quad , \quad \varphi \to -\psi$$

تبدیل نماییم. یعنی داریم:

$$\begin{aligned} -\omega_1'(t) &= (-\dot{\varphi})sin(-\theta)sin(-\psi) - \dot{\theta}cos(-\psi) \\ -\omega_2'(t) &= \dot{\varphi}sin(-\theta)cos(-\dot{\psi}) - \dot{\theta}sin(-\psi) \\ -\omega_3'(t) &= (-\dot{\varphi})cos(-\theta) - \dot{\psi} \end{aligned}$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\begin{aligned} \omega_1'(t) &= \dot{\varphi}\sin\,\theta\sin\,\psi + \dot{\theta}\cos\,\psi \\ \omega_2'(t) &= \dot{\varphi}\sin\,\theta\cos\,\psi - \dot{\theta}\sin\,\psi \\ \omega_3'(t) &= \dot{\varphi}\cos\,\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{۱–۱۱۱}$$

حال می‌خواهیم $\vec{\omega}$ را برحسب پارامترهای (ϕ و $\hat{l}$) استخراج کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که اگر عملگر A را به صورت:

$$A = e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{S}}$$

تعریف کنیم به علت آن‌که نمای اکسپونانسیل از حاصل جمع سه عملگر است نمی‌توان مشتق A را به صورت:

$$\dot{A}^{+} \neq \left(\vec{\phi}\cdot\vec{S}\right)e^{+\vec{\phi}\cdot\vec{s}}$$

نوشت. بنابراین در مقام چاره جویی چنین می‌کنیم:

از رابطه(۱-٦٤) به آسانی می‌توان دریافت که $|l\rangle$ بردار ویژه عملگر چرخش با مشخصه‌های (ϕ و $\hat{l}$) ، با مقدار ویژه ۱+ می‌باشد. یعنی:

$$A \mid l\rangle = |l\rangle \tag{۱-۱۱۲}$$

با ضرب طرفین در A^{+} خواهیم داشت:

$$A^{+}|l\rangle = |l\rangle \tag{۱-۱۱۳}$$

با مشتق زمانی گرفتن از رابطه (۱-۱۱۳) خواهیم داشت:

$$\dot{A}^{+}|l\rangle + A^{+}|\dot{l}\rangle = |\dot{l}\rangle \tag{۱-۱۱٤}$$

طرفین را در A ضرب میکنیم و به جای $A\dot{A}^{+}$ مساوی‌اش را به موجب (۱-۷۵) ، Ω قرار می‌دهیم:

$$\Omega\,|l\rangle + |\dot{l}\rangle = A\,|\dot{l}\rangle \tag{۱-۱۱۵}$$

در نتیجه از رابطه (۱-۱۵) نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned}(1-A)|\dot{l}\rangle &= -\Omega|l\rangle\\ &= -\vec{\omega}\cdot\vec{S}|l\rangle\\ &= \vec{\omega}\times\vec{l}\end{aligned} \tag{۱-۱۱٦}$$

حال اگر به جای A مساوی‌اش را از (۱-٦٤) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$[-(1-\cos\,\varphi)[\mid l\rangle\langle l \mid -1] + \sin\,\phi(\vec{l}\cdot\vec{S})] \mid \dot{l}\rangle = \vec{\omega}\times\vec{l} \tag{۱-۱۱۷}$$

نظر به اینکه:

$$\langle l|\dot{l}\rangle = \vec{l}\cdot\frac{d}{dt}\vec{l} = \mathbf{0}$$

از رابطه (۱۱۷–۱) نتیجه می‌گیریم که:

$$\vec{\omega} \times \vec{l} = (1 - cos\ \phi)\dot{\vec{l}} - (\vec{l} \times \dot{\vec{l}})\ sin\ \phi \qquad (۱–۱۱۸)$$

حال از اتحاد:

$$\vec{\omega}(t) = (\vec{\omega} \cdot \vec{l})\vec{l} + \vec{l} \times (\vec{\omega} \times \vec{l})$$

استفاده می‌کنیم. اگر کمی دقت نماییم:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{l} = \dot{\phi}(t) \qquad (۱–۱۱۹)$$

می‌باشد. برای اثبات چنین می‌گوییم:

اگر $\vec{\omega}$ را در دو راستای موازی با $\hat{l}$ و عمود برآن تجزیه نماییم:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp}$$

در این صورت $\vec{\omega}_{\parallel}$ جسم صلب را از وضعیت با زاویه $\phi(t)$ به $\phi(t + \Delta t)$ تبدیل می‌کند و در نتیجه:

$$\phi(t + \Delta t) - \phi(t) \approx \dot{\phi}\Delta t.$$

می‌گردد یعنی:

$$\vec{\omega}_{||} = \dot{\phi}\vec{l}$$

بنابراین (۱۱۸–۱) به کمک (۱۱۹–۱) به صورت:

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\phi}\vec{l} + \vec{l} \times \left[(1 - \cos\ \phi)\dot{\vec{l}} - \left(\vec{l} \times \dot{\vec{l}}\right)\sin\ \phi\right]$$

در می‌آید بنابراین:

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\phi}\vec{l} + (1 - \cos\ \phi)(\vec{l} \times \dot{\vec{l}}) + \dot{\vec{l}}\sin\ \phi \qquad (۱–۱۲۰)$$

رابطه (۱۲۰–۱) مولفه‌های $\vec{\omega}$ را برحسب پارامترهای چرخش (ϕ و $\hat{l}$) حاصل نماید. محاسبات صریح:

$$A\dot{A}^{+} = \sum_{i} \omega_i S^i$$

همین نتیجه (۱۲۰–۱) را حاصل نموده که در بخش ضمیمه آمده است.

برای تعیین مولفه های $\vec{\omega}(t)$ در دستگاه متصل به جسم صلب کافی است با استدلال مشابه به آن‌چه که منجر به رابطه (۱۱۱–۱) گردید

$$\omega_i \to -\omega_i' \qquad , \qquad \phi \to -\phi$$

جایگزین کنیم در این‌صورت:

$$(\vec{\omega})' = \dot{\phi}\vec{l} - (1 - cos\ \phi)(\vec{l} \times \dot{\vec{l}}) + \dot{\vec{l}}\, sin\ \phi \tag{۱–۱۲۱}$$

در مورد رابطه (۱۲۱–۱) در آخر این فصل توضیحات بیشتری داده شده است.

۱-۶ پارامترهای مایلنیک پلبانسکی (Mielnik Plebański)

توضیح: این پارامترها اولین بار توسط $prof. D . Pursey$ به مولف معرفی شده است و بعضی اوقات نیز به پارامترهای رودریگرز مشهور هستند.

تا این لحظه دو دسته پارامترهای مختلف (ϕ و $\hat{l}$) و (ψ و θ و φ) برای مشخص کردن یک دوران دلخواه معرفی شده اند و بردار سرعت لحضه‌ای برحسب آن ها تعیین گردید. $\vec{\omega}(t)$ چه در دستگاه مرجع و چه در دستگاه متصل به جسم همان‌گونه که روابط (۱۰۳–۱) و (۱۱۱–۱) و (۱۲۰–۱) و (۱۲۱–۱) نشان می‌دهد تابعی از مشتقات مرتبه اول زمانی از پارامترها و خود پارامتر می‌باشد. توجه کنید که مثلاً بردار مکانی یک نقطه از جسم صلب نسبت به دستگاه مرجع تابعی از زمان است یعنی جهت آن تغییر می‌کند اما در دستگاه متصل به جسم صلب تابعی از زمان نیست یعنی مولفه‌های آن ثابت است اما بردار $\vec{\omega}$ چه در دستگاه مرجع و چه در دستگاه متصل به جسم صلب (از طریق پارامترها) تابعی از زمان است یعنی امتداد بردار $\vec{\omega}$ در هر دو دستگاه در زمان‌های مختلف فرق می‌کند. حال ممکن است که خواننده انگیزه معرفی پارامترهای مایلنیک پلبانسکی برای مشخص کردن یک دوران دلخواه را از خود سوال نمایید؟ همان‌گونه که خواهیم دید به کمک این پارامترها که از این به بعد آن ها را پارامترهای $M - P$ می‌نامیم مشخصه های یک دوران معادل که نتیجه دو دوران حول دو محور دوران متفاوت است را به آسانی به دست می‌آوریم و در نتیجه به کمک همین

پارامترهای $M-P$ خواهد که مشخصه های یک دوران معادل ($\hat{l}$ و ϕ) را برحسب پارامترهای اویلر (یا به قولی سه دوران متوالی) به دست می‌آید شایان ذکر است که در کتاب مرجع ۲ این مطلب را به کمک فضای اسپین استخراج کرده است که در مورد آن نیز بعداً مفصلاً صحبت خواهد شد.

پارامترهای $M-P$ به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\vec{W}=\vec{l}tg\frac{\phi}{2} \quad ,|\vec{W}|=tg\frac{\phi}{2} \tag{1-122}$$

یعنی $\vec{W}$ امتداد محور دوران و قدرمطلق آن مقدار زاویه دوران را معلوم می‌سازد. بنابراین عملگر دوران (۱–٦٤) برحسب پارامترهای $M-P$ به صورت زیر در می‌آیید:

$$A=1+2\sin^2\frac{\phi}{2}[|l\rangle\langle l|-1]-2(\bar{l}\cdot\bar{S})sin\frac{\phi}{2}cos\frac{\phi}{2}$$

با در نظر گرفتن رابطه های زیر:

$$sin\frac{\phi}{2}=\frac{tg\frac{\phi}{2}}{\sqrt{1+tg^2\frac{\phi}{2}}}=\frac{W}{\sqrt{1+W^2}} \qquad , \qquad cos\frac{\phi}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\frac{\phi}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+W^2}}$$

عملگر A به صورت زیر در می‌آید:

$$A=1+\frac{2}{1+W^2}[|W\rangle\langle W|-W^2]-2\frac{\vec{W}\cdot\vec{S}}{1+W^2} \tag{1-123}$$

و با در نظر گرفتن رابطه:

$$(-\hat{l}\cdot\vec{S})(\hat{l}\cdot\vec{S})=|l\rangle\langle l|-1$$

عملگر A نهایتاً به صورت زیر در می‌آید:

$$A=1+\frac{2}{1+W^2}(-\vec{W}\cdot\vec{S})^2+\frac{2}{1+W^2}(-\vec{W}\cdot\vec{S}) \tag{1-124}$$

روابط (۱–۱۲۳) یا (۱–۱۲٤) نمایش عملگر دوران برحسب پارامترهای $M-P$ می‌باشد.

توجه می‌کنیم که تاثیر عملگر A بر بردار $\vec{r}$ بردار $\vec{r}'$ را حاصل می‌نماید که برابر است با:

$$A\vec{r}=\vec{r}'=\{1+\frac{2}{1+W^2}(-\vec{W}\cdot\vec{S})[(-\vec{W}\cdot\vec{S})+1]\}\vec{r}$$

که با کمی عملیات جبری ساده نتیجه می‌گیریم که:

$$\vec{r}'=\vec{r}+\frac{2}{1+W^2}\vec{W}\times[\vec{W}\times\vec{r}+\vec{r}] \qquad (١–١٢٥)$$

رابطه (١–١٢٥) معادل رابطه (١–١٦) است با این تفاوت که (١–١٢٥) برحسب پارامترهای $M-P$ نوشته شده است اما (١–١٦) برحسب پارامترهای (ϕ و $\hat{l}$) نوشته شده است.

حال اگر به طرفین رابطه (١–١٢٤) عملگر واحد اضافه نموده و طرفین را در عملگر $(-\vec{W}\cdot\vec{S})$ ضرب نماییم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(-\vec{W}\cdot\vec{S})(A+1)&=2[(-\vec{W}\cdot\vec{S})+\frac{(-\vec{W}\cdot\vec{S})^3+(-\vec{W}\cdot\vec{S})^2}{1+W^2}]\\&=2[(-\vec{W}\cdot\vec{S})+\frac{W^2(-\vec{W}\cdot\vec{S})+(-\vec{W}\cdot\vec{S})^2}{1+W^2}]\\&=\frac{2(-\vec{W}\cdot\vec{S})+(-\vec{W}\cdot\vec{S})^2}{1+W^2}\end{aligned}$$

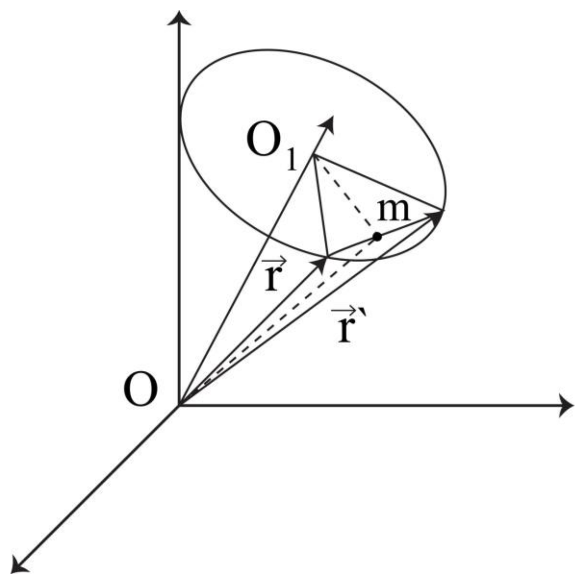
که نتیجه می‌گیریم:

$$(-\vec{W}\cdot\vec{S})(A+1)=(A-1) \qquad (١–١٢٦)$$

اگر (١–١٢٦) را در $\vec{r}$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(-\vec{W}\cdot\vec{S})(\vec{r}+\vec{r}')&=\vec{r}'-\vec{r}\\ \vec{W}\times(\vec{r}'+\vec{r})&=\vec{r}'-\vec{r}\end{aligned} \qquad (١–١٢٦–a)$$

رابطه (١–١٢٦–a) را می‌توان به روش آسان‌تر هندسی اثبات نمود.



برای این منظور نقطه M که هم مرکز لوزی است که دو ضلع مجاور آن از $\vec{r}'$ و $\vec{r}$ تشکیل شده و هم مرکز لوزی واقع در صفحه دوران. در نتیجه:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MO_1} = \left|\overrightarrow{OO_1}\right| \hat{l}$$

می‌شود، در این‌صورت اگر طرفین رابطه فوق را در $\hat{l}\tan\frac{\phi}{2}$ ضرب برداری کنیم:

$$tan\frac{\phi}{2}\hat{l} \times \overrightarrow{OM} = tan\frac{\phi}{2}\overrightarrow{O_1M}$$

از روی لوزی با اضلاح مجاور $\vec{r}'$ و $\vec{r}$:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{r}' + \vec{r}}{2}$$

است و از روی حاصل ضرب طرف راست درمی‌یابیم نتیجه بردار موازی $\vec{r}' - \vec{r}$ خواهد بود که اگر در $tan\frac{\phi}{2}$ هم ضرب شود، خود $\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{2}$ حاصل می‌شود. پس نتیجه (a–۱۲۶–۱) حاصل شد، یعنی:

$$\vec{W} \times (\vec{r}' + \vec{r}) = \vec{r}' - \vec{r}$$

در $tan\frac{\phi}{2}\hat{l} \times \vec{n}$ ، $\hat{l} \times \vec{n}$ در جهت $\vec{r}' - \vec{r}$ قرار می‌گیرد.

حال از (١٢٦–١) استفاده کرده و پارامترهای $M-P$ حاصل از دو دوران $\overrightarrow{W_1}$ و $\overrightarrow{W_2}$ که معادل یک دوران است را به دست می‌آوریم.

به موجب (١٢٦–١) داریم:

$$\begin{aligned} \vec{r}' - \vec{r} &= \overrightarrow{W_1} \times (\vec{r}' + \vec{r}) \\ \vec{r}'' - \vec{r}' &= \overrightarrow{W_2} \times (\vec{r}'' + \vec{r}') \end{aligned} \tag{١–١٢٧}$$

از جمع دو رابطه (١٢٧–١) داریم:

$$\vec{r}'' - \vec{r} = \left(\overrightarrow{W_1} + \overrightarrow{W_2}\right) \times \vec{r}' + \overrightarrow{W_1} \times \vec{r} + \overrightarrow{W_2} \times \vec{r}'' \tag{١–١٢٨}$$

اگر بتوان نتیجه‌ای نظیر:

$$\vec{r}'' - \vec{r} = \overrightarrow{W}_{eq} \times (\vec{r}'' + \vec{r})$$

به دست آورد در این صورت $\overrightarrow{W}_{eq}$ پارامترهای $M-P$ معادل دو دوران متوالی به دست خواهد آمد. پس جمله مزاحم در (١٢٨–١) جمله اول سمت راست می‌باشد. حال رابطه اول و دوم (١٢٧–١) به ترتیب در $\overrightarrow{W_2}$ و $\overrightarrow{W_1}$ ضرب برداری کرده و از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\left(\overrightarrow{W_2} + \overrightarrow{W_1}\right) \times \vec{r}' - \left(\overrightarrow{W_1} \times \vec{r}'' + \overrightarrow{W_2} \times \vec{r}\right) \\ &\qquad = \overrightarrow{W_2} \times \left[\overrightarrow{W_1} \times (\vec{r} + \vec{r}')\right] - \overrightarrow{W_1} \times \left[\overrightarrow{W_2} \times (\vec{r}'' + \vec{r}')\right] \end{aligned}$$

سمت راست رابطه (١٢٩–١) برابراست با:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{W_1}[\overrightarrow{W_2} \cdot (\vec{r}' + \vec{r})] - (\vec{r}' + \vec{r})(\overrightarrow{W_1} \cdot \overrightarrow{W_2}) \\ &\qquad = \overrightarrow{W_2}[\overrightarrow{W_1} \cdot (\vec{r}'' + \vec{r}')] + (\vec{r}' + \vec{r}'')(\overrightarrow{W_1} \cdot \overrightarrow{W_2}) \end{aligned} \tag{١–١٢٩}$$

با توجه به اینکه:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{W_1} \cdot \vec{r}' &= \overrightarrow{W_1} \cdot \vec{r} \\ \overrightarrow{W_2} \cdot \vec{r}' &= \overrightarrow{W_2} \cdot \vec{r}'' \end{aligned}$$

سمت راست رابطه (١٢٩–١) برابر می‌شود با:

$$\vec{W}_1[\vec{W}_2\cdot(\vec{r}''+\vec{r})]+(\vec{r}''-\vec{r})(\vec{W}_1\cdot\vec{W}_2)-\vec{W}_2[\vec{W}_1\cdot(\vec{r}''+\vec{r}')]$$

بنابراین از ترکیب (١-١٢٨) و (١-١٢٩) داریم:

$$\vec{r}''-\vec{r}=\vec{W}_1\times\vec{r}''+\vec{W}_2\times\vec{r}+\vec{W}_1[\vec{W}_2\cdot(\vec{r}'+\vec{r})]+(\vec{r}''-\vec{r})(\vec{W}_1\cdot\vec{W}_2)-\vec{W}_2[\vec{W}_1\cdot(\vec{r}''+\vec{r})]+\vec{W}_1\times\vec{r}+\vec{W}_2\times\vec{r}''$$

$$(\vec{r}''-\vec{r})\left[1-\vec{W}_1\cdot\vec{W}_2\right]=\left(\vec{W}_1+\vec{W}_2\right)\times\vec{r}''+\left(\vec{W}_1+\vec{W}_2\right)\times\vec{r}+(\vec{r}''+\vec{r})\times\left(\vec{W}_1\times\vec{W}_2\right)$$

$$(\vec{r}''-\vec{r})\left[1-\vec{W}_1\cdot\vec{W}_2\right]=\left(\vec{W}_1+\vec{W}_2\right)\times(\vec{r}''+\vec{r})-\left(\vec{W}_1\times\vec{W}_2\right)\times(\vec{r}''+\vec{r})$$

$$\vec{r}''-\vec{r}=\frac{\vec{W}_2+\vec{W}_1+\vec{W}_2\times\vec{W}_1}{1-\vec{W}_2\cdot\vec{W}_1}\times(\vec{r}+\vec{r}'') \qquad (١-١٣٠)$$

از رابطه (١-١٣٠) پارامترهای $M-P$ یک دوران معادل دو دوران متوالی به دست می‌آید یعنی:

$$\vec{W}_{eq}=\frac{\vec{W}_2+\vec{W}_1+\vec{W}_2\times\vec{W}_1}{1-\vec{W}_2\cdot\vec{W}_1} \qquad (١-١٣١)$$

توجه کنید که هرگاه زوایای دوران کوچک باشد $\vec{W}_2\times\vec{W}_1$ و $\vec{W}_2\cdot\vec{W}_1$ از بی‌نهایت کوچک‌های مرتبه دوم در خواهند آمد و در نتیجه برای دو چرخش خرد متوالی یک چرخش معادل خواهیم داشت به موجب (١-١٣١) برابر با:

$$\vec{W}_{eq}\approx\vec{W}_1+\vec{W}_2 \qquad (١-١٣٢)$$

می‌گردد. حال می‌دانیم سه دوران متوالی اویلر برحسب پارامترهای $M-P$ به موجب تعریف برابراست با:

$$\begin{aligned}\vec{W}_1&=\vec{k}tg\frac{\psi}{2}\\ \vec{W}_2&=\vec{\imath}tg\frac{\theta}{2}\\ \vec{W}_3&=\vec{k}tg\frac{\varphi}{2}\end{aligned} \qquad (١-١٣٣)$$

دوران معادل دو دوران متوالی $\vec{W}_1$ و $\vec{W}_2$ به موجب (١-١٣١) برابراست با:

$$\vec{W}'_{eq} = \frac{\vec{\imath} tg\frac{\theta}{2} + \vec{k} tg\frac{\psi}{2} - \vec{\jmath} tg\frac{\theta}{2} tg\frac{\psi}{2}}{1} \qquad (١-١٣٤)$$

و در نتیجه دوران سه دوران متوالی بازهم به موجب (١٣١-١) برابر می‌شود با:

$$\overrightarrow{W}_{eq} = \frac{\vec{\imath} tg\frac{\theta}{2} + \vec{k} tg\frac{\psi}{2} - \vec{\jmath} tg\frac{\theta}{2} tg\frac{\psi}{2} + \vec{k} tg\frac{\varphi}{2} + \vec{k} tg\frac{\varphi}{2} \times \left(\vec{k} tg\frac{\psi}{2} + \vec{\imath} tg\frac{\theta}{2} - \vec{\jmath} t\hat{g}\frac{\psi}{2} tg\frac{\theta}{2}\right)}{1 - tg\frac{\varphi}{2} tg\frac{\psi}{2}}$$

$$\overrightarrow{W}_{eq} = \frac{\vec{\imath} tg\frac{\theta}{2}\left(1 + tg\frac{\varphi}{2} tg\frac{\psi}{2}\right)}{1 - tg\frac{\varphi}{2} tg\frac{\psi}{2}} + \frac{\vec{\jmath} tg\frac{\theta}{2}\left(tg\frac{\varphi}{2} - tg\frac{\psi}{2}\right)}{1 - tg\frac{\varphi}{2} tg\frac{\psi}{2}} + \frac{\vec{k}\left(tg\frac{\varphi}{2} + tg\frac{\psi}{2}\right)}{1 - tg\frac{\varphi}{2} tg\frac{\psi}{2}}$$

هرگاه در دو جمله اول در صورت و مخرج:

$$tgx = \frac{sinx}{cosx}$$

بنویسیم خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{W}_{eq} = \vec{\imath}\frac{sin\frac{\theta}{2} cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}{cos\frac{\theta}{2} cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)} + \vec{\jmath}\frac{sin\frac{\theta}{2} sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}{cos\frac{\theta}{2} cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)} + \vec{k} tg\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{W}_{eq} = \frac{\vec{\imath} sin\frac{\theta}{2} cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) + \vec{\jmath} sin\frac{\theta}{2} sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) + \vec{k}\cos\frac{\theta}{2} sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}{cos\frac{\theta}{2} cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)} \qquad (١-١٣٥)$$

بنابراین به موجب (١٣٥-١) مشخصه‌های یک دوران ($\hat{l}$ و ϕ) که معادل سه دوران اویلر می‌باشد به دست می‌آید. کافی است در (١٣٥-١) به جای $\overrightarrow{W}_{eq}$ مساوی‌اش را از رابطه زیر قرار دهیم:

$$\overrightarrow{W}_{eq} = \vec{l} tg\frac{\phi}{2} \qquad (١-١٣٦)$$

حال اگر رابطه (١٣٥-١) را به توان دو برسانیم خواهیم داشت:

$$tg^2\frac{\phi}{2} = \frac{sin^2\frac{\theta}{2}(\cos^2\frac{\varphi-\psi}{2} + sin^2\frac{\varphi-\psi}{2}) + cos^2\frac{\theta}{2}sin^2(\frac{\varphi+\psi}{2})}{cos^2\frac{\theta}{2}cos^2\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}$$
$$= \frac{1}{cos^2\frac{\theta}{2}cos^2(\frac{\varphi+\psi}{2})}\{sin^2\frac{\theta}{2} + cos^2\frac{\theta}{2}sin^2(\frac{\varphi+\psi}{2})\}$$

و با توجه به اتحاد زیر:

$$1 + tg^2x = \frac{1}{cos^2x}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{1}{cos^2\frac{\phi}{2}} = \frac{sin^2\frac{\theta}{2} + cos^2\frac{\theta}{2}sin^2\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) + cos^2\frac{\theta}{2}cos^2\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}{cos^2\frac{\theta}{2}cos^2\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)} \qquad (۱-۱۳۷)$$
$$\cos\frac{\phi}{2} = \cos\frac{\theta}{2}\cos(\frac{\varphi+\psi}{2})$$

و با در نظر گرفتن این که:

$$\vec{l}sin\frac{\phi}{2} = \vec{W}_{eq}cos\frac{\phi}{2}$$

می‌باشد. در آن صورت داریم:

$$\vec{l}\sin\frac{\phi}{2} = \vec{\imath}\sin\frac{\theta}{2}\cos(\frac{\varphi-\psi}{2}) + \vec{\jmath}\sin\frac{\theta}{2}\sin(\frac{\varphi-\psi}{2}) + \vec{k}\cos\frac{\theta}{2}\sin(\frac{\varphi+\psi}{2}) \qquad (۱-۱۳۸)$$

روابط (۱۳۷-۱) و (۱۳۸-۱) مبین روابط بین پارامترهای اویلر بر حسب پارامترهای چرخش می‌باشد و این از امتیازات معرفی پارامترهای $M-P$ می‌باشد.

به عنوان آخرین مطلب در بخش اول سینماتیک مفهوم مشتق زمانی یک بردار وابسته به زمان در دو دستگاه که یکی نسبت به دیگری حرکت دورانی دارد استخراج می‌کنیم.

مشتق زمانی یک بردار در هر دستگاهی به صورت زیر تعریف می‌شود:

هرگاه a_i مولفه iام بردار $\vec{a}$ باشد داریم:

$$Lim\frac{a_i(t+\Delta t)-a_i(t)}{\Delta t}=\frac{da_i(t)}{dt} \tag{۱-۱۳۹}$$

یعنی ناظر در هر دستگاهی تغییرات زمانی مولفه‌های یک بردار را در آن دستگاه اندازه‌گیری می‌نماید. و دیگر کاری ندارد که دستگاهی که خود واقع بر آن است نسبت به دستگاه دیگردر حال حرکت است.

بنابراین مشتق زمانی یک کمیت برداری برای یک ناظر واقع در دستگاهی برابر:

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt}=\sum_i \frac{da_i(t)}{dt}\vec{e}_i \tag{۱-۱۴۰}$$

می‌باشد. با در نظر گرفتن چنین تعریفی مشاهده می‌شود که مشتق زمانی یک بردار که یکی نسبت به دیگری در حال دوران است با هم‌دیگر مساوی نیستند چون هرگاه دستگاه $ox'y'z'$ نسبت به $oxyz$ در حال دوران باشد داریم:

$$\begin{gathered}\vec{a}=\sum_i a_i\vec{e}'_i=\sum_i \vec{a}'_i\vec{e}'_i\\ \frac{d\vec{a}(t)}{dt}=\sum_i \frac{da_i(t)}{dt}\vec{e}_i=\sum_i \frac{da'_i}{dt}\vec{e}'_i+\sum_i a'_i\frac{d\vec{e}'_i}{dt}\end{gathered} \tag{۱-۱۴۱}$$

طرف چپ رابطه فوق معرف مشتق زمانی بردار در دستگاه $oxyz$ است امّا فقط جمله اول طرف راست معرف مشتق زمانی همان بردار در دستگاه $ox'y'z'$ می‌باشد. بنابراین برای تمایز مشتقات زمانی یک بردار در دستگاه‌های مختلف آن‌ها را به صورت:

$$\frac{da_i}{dt}\vec{e}_i\equiv\frac{d\vec{a}}{dt} \tag{۱-۱۴۲}$$

$$\frac{da'_i}{dt}\vec{e}'_i\equiv\frac{d^*\vec{a}}{dt} \tag{۱-۱۴۳}$$

نشان می‌دهیم. از طرفی به‌موجب رابطه سینماتیکی استخراج شده (۲۰-۱) که در آن $\vec{\omega}$ سرعت زاویه‌ای دستگاه دوار نسبت به دستگاه مرجع است داریم:

$$\frac{d\vec{e}_i'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_i'$$

بنابراین رابطه (١٤١-١) برابر با:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d^*\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a} \qquad (1-144)$$

می‌شود. این رابطه در بخش دینامیک جسم صلب استفاده فراوانی دارد. برای استخراج رابطه فوق به روش دیگر چنین می‌کنیم:

رابطه بین مولفه‌های یک بردار در دو دستگاه که دستگاه پریم ناشی از تاثیر عملگر A بر $\vec{e}_i$ حاصل شده باشد به صورت:

$$\sum_j A_{ij}^{+} a_j(t) = a_i'(t) \qquad (1-145)$$

می‌باشد. از (١٤٥-١) نسبت به زمان مشتق گرفته و خواهیم داشت:

$$\dot{A}_{ij}^{+} a_j + A_{ij}^{+} \dot{a}_j = \dot{a}_i'(t) \qquad (1-146)$$

طرفین رابطه فوق را از طرف چپ در A_{ki} ضرب می‌کنیم و بر روی اندیس i جمع می‌کنیم:

$$\sum_{i,j} A_{ki}\dot{A}_{ij}^{+} a_j + \sum_{i,j} A_{ki} A_{ij}^{+} \dot{a}_j = \sum_i A_{ki}\dot{a}_i'(t)$$

$$\sum_j \left(\vec{\omega} \cdot \vec{S}\right)_{kj} a_j + \delta_{kj}\dot{a}_j = A_{ki}\dot{a}_i'(t) \qquad (1-147)$$

$$\dot{a}_k = \sum_j -\left(\vec{\omega} \cdot \vec{S}\right)_{kj} a_j + A_{ki}\dot{a}_i'(t)$$

$$\dot{a}_k = (\vec{\omega} \times \vec{a})_k + A_{ki}\dot{a}_i'(t)$$

رابطه (١٤٧-١) از نظر استفاده، کاربردی تر از رابطه محض (١٤٤-١) می‌باشد. و از نظر مشخص شدن رابطه بین مشتقات زمانی مولفه‌های یک بردار مفهومی‌تر است. اگر بخواهیم این رابطه را به صورت (١٤٤-١) بنویسیم کافی است طرفین رابطه را در $\vec{e}_k$ ضرب کرده و روی اندیس k جمع می‌کنیم. با علم به این‌که:

$$A|e_i\rangle = |e_i'\rangle$$

$$\sum_k |e_k\rangle\langle e_k|A|e_i\rangle = |e_i'\rangle \;\rightarrow\; A_{ik}^{+}|e_k\rangle = |e_i'\rangle$$

$$\sum_k A_{ki}|e_k\rangle = |e_i'\rangle$$

خواهیم داشت:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d^*\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a} \tag{۱–۱۴۸}$$

توجه کنید برای جسم صلب اگر دستگاه دوران کننده متصل به جسم صلب باشد مختصات بردار مکانی در دستگاه دوار با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. بنابراین در نتیجه:

$$\frac{d^*\vec{r}}{dt} = 0$$

و بازهم به نتیجه معروف:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \omega \times r$$

می‌رسیم. همچنین اگر $\vec{a}$ را $\vec{\omega}(t)$ فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^*\vec{\omega}}{dt} \tag{۱–۱۴۹}$$

به عنوان آخرین مطلب در این فصل با استفاده از رابطه (۱–۱۴۴) مولفه‌های بردار $\vec{\omega}(t)$ (که قبلاً هم به دست آورده‌ایم) چه در دستگاه مرجع و چه در دستگاه متصل به جسم صلب بر حسب پارامترهای دوران استخراج می‌کنیم به موجب (۱–۱۱۳):

$$A^{+}|l\rangle = |l\rangle$$

اما به موجب (۱–۸۲) و یا (۱–۸۳) نتیجه می‌گیریم که مولفه‌های بردار $\vec{l}$ در هر دو دستگاه مساوی است یعنی:

$$l_i(t) = l_i'(t) \qquad i = 1,2,3 \tag{۱–۱۵۰}$$

است. حال اگر رابطه (۱۴۴–۱) را برای بردار $\vec{l}$ بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d^*\vec{l}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{l} \tag{1-151}$$

$$\sum_i \frac{dl_i}{dt}(\vec{e}_i - \vec{e}_i') = \vec{\omega} \times \vec{l}$$

$$\sum_i \frac{dl_i}{dt}(1 - A)\vec{e}_i = \vec{\omega} \times \vec{l} \tag{1-152}$$

$$(1 - A)\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{l} \tag{1-153}$$

حال با جای‌گذاری A از رابطه (٦٤-١) خواهیم داشت:

$$[-(1 - \cos\ \phi)[|l\rangle\langle l| - 1] + (\vec{l}.\vec{S})\sin\ \phi]\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{l}$$

$$(1 - \cos\ \phi)\frac{d\vec{l}}{dt} - (\vec{l} \times \dot{\vec{l}})\sin\ \phi = \vec{\omega} \times \vec{l}$$

و این همان رابطه (۱۱۸–۱) است که قبلاً استخراج کرده بودیم بنابراین با عملیات مشابه به رابطه (۱۲۰–۱) می‌رسیم که عبارت است از:

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\phi}\vec{l} + (1 - \cos\ \phi)(\vec{l} \times \frac{d\vec{l}}{dt}) + \frac{d\vec{l}}{dt}\sin\ \phi$$

حال اگر بخواهیم مولفه‌های $\vec{\omega}(t)$ را در دستگاه پریم استخراج می‌کنیم. به موجب (۱۵۲–۱) داریم:

$$\sum_i \frac{dl_i'}{dt}(A^+ - 1)\vec{e}_i' = \vec{\omega} \times \vec{l} \tag{1-154}$$

و اگر A^+ را جایگزین نماییم:

$$\left[(1 - \cos\ \phi)[|l\rangle\langle l| - 1] + (\vec{l}.\vec{S})\sin\ \phi\right]\frac{d^*\vec{l}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{l}$$

به موجب (۱۵۱–۱):

$$\vec{l} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{l} \cdot \frac{d^*\vec{l}}{dt} = 0$$

است پس خواهیم داشت:

$$-(1-\cos\ \phi)\frac{d^*\vec{l}}{dt}-\left(\vec{l}\times\frac{d^*\vec{l}}{dt}\right)\sin\ \phi=\vec{\omega}\times\vec{l}$$

بنابراین به موجب اتحاد:

$$\vec{\omega}(t)=\vec{l}(\vec{\omega}\cdot\vec{l})+\vec{l}\times(\vec{\omega}\times\vec{l}) \qquad ,\vec{\omega}\cdot\vec{l}=\dot{\phi}$$
$$\vec{\omega}(t)=\dot{\phi}\vec{l}-(1-\cos\ \phi)\vec{l}\times\frac{d^*\vec{l}}{dt}+\frac{d^*\vec{l}}{dt}\sin\ \phi \tag{۱–۱۵۵}$$

رابطه (۱۵۵–۱) مولفه‌های بردار $\vec{\omega}(t)$ در دستگاه $\vec{e}_i'$ را می‌دهد مثلاً:

$$\omega_i'(t)=\dot{\phi}l_i-\varepsilon_{ijk}(1-\cos\ \phi)l_j\dot{l}_k+\dot{l}_i\sin\ \phi$$

توجه کنید که $l_i=l_i{}'$ است.

رابطه (۱۵۵–۱) مبین این روش بود که هرگاه $\vec{\omega}(t)$ بر حسب پارامترهای دوران در دستگاه مرجع معلوم بوده باشد در دستگاه متصل به جسم صلب مولفه‌های از رابطه:

$$\omega_i\rightarrow-\omega_i' \qquad , \qquad \phi\rightarrow-\phi$$

پیروی می‌کند. رابطه (۱۵۵–۱) همان رابطه (۱۲۱–۱) است.

فصل دوم: دینامیک جسم صلب

۲-۱ مقدمه:

تا کنون بیان شده است اگر بردار سرعت زاویه ای بر حسب زمان معلوم بوده باشد از رابطه معروف سینماتیکی:

$$\frac{d\vec{r}_a}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_a \qquad (a = 1,2,3,\ldots,N)$$

می‌توان بردار مکانی هر ذره از جسم صلب را بدست اورد. تاکید می‌نماییم که تا این لحظه معادله دیفرانسیل مرتبه اول به‌ظاهر ساده‌ای را که از معادله فوق ناشی میشود هنوز حل نکرده‌ایم و فقط بردار سرعت زاویه ای $\vec{\omega}$ را بر حسب پارامتر های دوران $(\hat{l} \cdot \phi)$ و با بر حسب پارامتر های (φ, θ, Ψ) اویلر استخراج کرده ایم.

سوال اساسی حال این است که به فرض بخواهیم معادله فوق را حل کنیم، میبایستی $\vec{\omega}$ معلوم بوده باشد. پس $\vec{\omega}$ از چه رابطه ای بدست می آید؟

پاسخ بدین سوال حتی از روی غریزه فرمول نیوتون میباشدو برای این منظور فرمول جدیدی از روی فرمول نیوتن استخراج میکنیم که اولین بار توسط لئونارد اویلر صورت گرفته که ما در زیر آن را استخراج میکنیم. این فرمول مخصوص جسم صلب نیست بلکه مربوط به سیستم ذرات مادی میباشد.

۲-۲ فرمول اویلر برای سیستم ذرات (ملاعبه با فرمول نیوتن)

هرگاه در دستگاه مرجعی (که الزاما اینرسی نمیباشد) $\vec{\mathrm{F}}_\mathrm{a}$ برآیند نیروهای وارد به ذره aام باشد به موجب فرمول نیوتن داریم:

$$\vec{\mathrm{F}}_\mathrm{a} = \mathrm{m}_\mathrm{a} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{a}}{\mathrm{dt}} \tag{۲-۱}$$

اگر طرفین رابطه (۱-۲) را در $\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{a}$ از چپ ضرب برداری نموده و سپس بر روی اندیس a جمع بندی نماییم خواهیم داشت:

$$\sum_{\mathrm{a}=1}^{N} \vec{\mathrm{r}}_\mathrm{a} \times \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{a} = \sum_{\mathrm{a}=1}^{N} m_\mathrm{a} \vec{\mathrm{r}}_\mathrm{a} \times \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{a}}{\mathrm{dt}} \tag{۲-۲}$$

به موجب تعریف طرف چپ رابطه (۲-۲) را گشتاور نیروهای وارد به سیستم ذرات نامند و با $\vec{\tau}$ نشان میدهند. اگر علامت مشتق زمانی در سمت راست را به جلو بکشیم خواهیم داشت:

$$\vec{\tau} = \sum_{\mathrm{a}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} m_{\mathrm{a}}(\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{a}}) - \sum_{\mathrm{a}} m_{\mathrm{a}} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{dt}} \times \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{a}}$$

توجه میکنیم که جمله دوم سمت راست صفر است در نتیجه خواهیم داشت:

$$\vec{\tau} = \sum_{\mathrm{a}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \mathrm{m}_{\mathrm{a}}(\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{a}}) \tag{۲-۳}$$

کمیت $\mathrm{m}_{\mathrm{a}}\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{a}}$ را بردار ممانتم زاویه ای ذره a، نامند و جمع بر روی اندیس a بردار ممانتم زاویه ای سیستم ذرات مادی را بدست میدهد و ما آن را با $\vec{\mathrm{L}}(t)$ نشان میدهیم:

$$\vec{\mathrm{L}}(t) = \sum \vec{\mathrm{L}}_{\mathrm{a}}(t) = \sum_{\mathrm{a}} \mathrm{m}_{\mathrm{a}}\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{a}}(t) \times \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{a}}(t) \tag{۲-٤}$$

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\mathrm{dt}} \tag{۲-۵}$$

طرف چپ رابطه (۵-۲) باز هم ساده تر میشود. چه اگر نیرو های وارد به ذره aام را به صورت نیرو های داخلی و خارجی تقسیم کنیم بموجب (۲-۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \sum_{a} \vec{r}_a \times \left(\vec{F}_a^{ext} + \sum_{b} \vec{f}_{ba}\right) \\ &= \sum_{a} \vec{r}_a \times \vec{F}_a^{ext} + \sum_{a}\sum_{b} \vec{r}_a \times \vec{f}_{ba}\end{aligned}$$

$\vec{f}_{ba}$ نیروی داخلی است که ذره bام به ذره aام وارد میکند و فرض بر این است که $\vec{f}_{aa}$ صفر است.

جمله دوم طرف راست رابطه فوق را به صورت:

$$\sum_{a}\sum_{b} \vec{r}_a \times \vec{f}_{ba} = \frac{1}{2}\left[\sum_{a}\sum_{b} \vec{r}_a \times \vec{f}_{ba} + \sum_{b}\sum_{a} \vec{r}_b \times \vec{f}_{ab}\right]$$

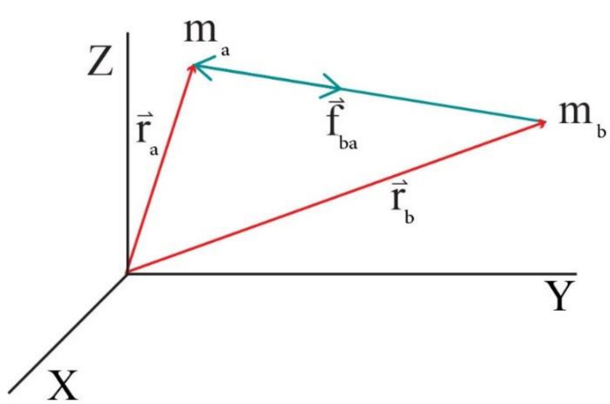
می‌نویسیم و چون:

$$\vec{f}_{ba} = -\vec{f}_{ab}$$

است پس:

$$\sum_a \sum_b \vec{r}_a \times \vec{f}_{ba} = \frac{1}{2}\sum_a \sum_b (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \times \vec{f}_{ba}$$

در میاید که به موجب شکل (۱-۲) $\vec{f}_{ba}$ و $(\vec{r}_a - \vec{r}_b)$ موازی هم هستند.



شکل (۱-۲)

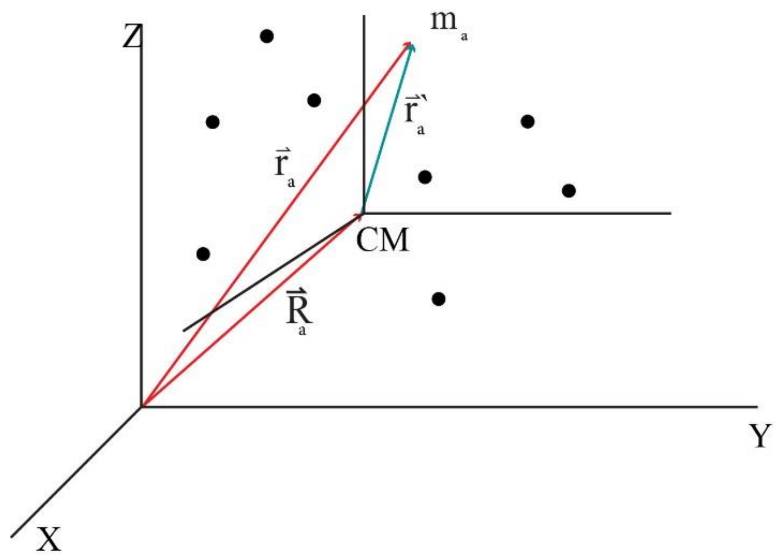
و در نتیجه گشتاور نیرو های داخلی صفر میشود بنابراین رابطه (٥-۲) اصلاح شده به صورت:

$$\vec{\tau}^e = \sum \vec{r}_a \times \vec{F}_a^e = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{۲-٦}$$

در میاید. رابطه (٦-۲) را فرمول اویلر نامند که اساسا از فرمول نیوتن استخراج شده است. این رابطه مزیت بسیار زیادی نسبت به رابطه (٥-۲) دارد چه غالبا در مسایل نیروهای خارجی وارد به سیستم ذرات معلوم میباشد اما از نیروهای داخلی که بین ذرات وجود دارد بی خبر هستیم. از درس مکانیک میدانیم ممانتم خطی سیستم ذرات برابر با ممانتم نقطه هندسی مرکز جرم است، یعنی:

$$\sum_a m_a \vec{r}_a = M\vec{R}_c \tag{۲-۷}$$

اما در مورد ممانتم زاویه ای چنین رابطه ای برقرار نمیباشد. برای اثبات چنین میکنیم:



شکل (۲-۲)

دستگاه مرکز جرمی را که نسبت به دستگاه مرجع حرکت انتقالی انجام میدهد (یعنی امتداد محور آن نسبت به امتداد محورهای دستگاه مرجع ثابت است) در نظر میگیریم.

بموجب شکل (۲-۲) داریم:

$$\vec{r}_a = \vec{R} + \vec{r}'_a$$
$$\vec{v}_a = \vec{V}_c + \vec{v}'_a$$

حال

$$\vec{L}(t) = \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a = \sum_a m_a (\vec{R} + \vec{r}'_a) \times (\vec{V}_c + \vec{v}'_a)$$
$$= \sum_a m_a \vec{R}_a \times \vec{V}_c + \sum_a m_a \vec{R} \times \vec{v}'_a + \sum_a m_a \vec{r}'_a \times \vec{V}_c + \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}'_a$$

به موجب تعریف نقطه مرکز جرم

$\sum_{\mathrm{a}} m_{\mathrm{a}} \vec{r}'_{\mathrm{a}}(t) = 0$ و $\sum_{\mathrm{a}} m_{\mathrm{a}} \vec{v}'_{\mathrm{a}}(t) = 0$

در نتیجه:

$$\vec{L}(t) = M\vec{R}(t) \times \vec{V}_c + \sum_a m_a \vec{r}'_a(t) \times \vec{v}'_a(t) \tag{۲-۸}$$

یعنی ممانتم زاویه زاویه سیستم ذرات نسبت به دستگاه مرجع برابر ممانتم زاویه نقطه مرکز جرم به علاوه ممانتم زاویه‌ای سیستم ذرات نسبت به دستگاه مرکز جرم فوق رابطه (۸-۲) را در (٦-۲) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}^e &= \sum_a \vec{r}_a \times \vec{F}_a^e \equiv \sum_a \left(\vec{R} + \vec{r}'_a\right) \times \vec{F}_a^e \\
&= \frac{d}{dt}\left[M\vec{R} \times \vec{V}_c(t) + \sum_a m_a \vec{r}'_a(t) \times \vec{v}'_a(t)\right] \\
&\vec{R} \times \vec{F}^e + \sum_a \vec{r}'_a \times \vec{F}_a^e = M\vec{R} \times \vec{a}_c(t) + \frac{d}{dt}\sum_a m_a\left(\vec{r}'_a(t) \times \vec{v}'_a\right)
\end{aligned}$$

با حذف جملات مساوی نتیجه میگیریم که:

$$\sum_a \vec{r}'_a(t) \times \vec{F}_a^e(t) = \frac{d}{dt} m_a(\vec{r}'_a(t) \times \vec{v}'_a(t)) \tag{۲-۹}$$

توجه کنید در رابطه (۹-۲) $\vec{F}_a^e$ نیروی خارجی وارد به ذره a که در دستگاه مرجع مشخص شده است میباشد؛ اما $\vec{r}'_a$ بازوی نیرو F_a^e از مبدا دستگاه مرکز جرم تا نقطه اثر نیروی $\vec{F}_a^e$ است. همچنین $\vec{r}'_a$ و $\vec{v}'_a$ مختصات و سرعت ذره aام نسبت به دستگاه مرکز جرم است.

رابطه (۹-۲) را غالبا به صورت:

$$\vec{\tau}'^e = \frac{d}{dt}\vec{L}'(t) \tag{۲-۱۰}$$

مینویسند. البته منظور از پریم دستگاه مرکز جرم است که نسبت به دستگاه مرجع دارای حرکت انتقالی است.

هنگامیکه یک نقطه از جسم صلب ساکن نباشد از رابطه (۱۰-۲) استفاده میکنیم توجه میکنیم که ظاهر هر دو فرمول (٦-۲) و (۱۰-۲) یکی میباشد اما در باطن اینگونه نیست.

۲-۳ فرمول اویلر برای جسم صلب

ممانتم زاویه ای یک سیستم ذرات با رابطه

$$\vec{\mathrm{L}}(t)=\sum_{\mathrm{a}} m_a\vec{r}_a(t)\times\vec{v}_a(t)$$

داده میشود اما فرق اساسی جسم صلب با سیستم ذرات در این است که $\vec{v}_a$ با رابطه

$$\vec{v}_a(t)=\vec{\omega}(t)\times\vec{r}_a \tag{۲-۱۱}$$

داده می‌شود که برای هر ذره از جسم صلب صادق است. درنتیجه ممانتم زاویه‌ای جسم صلب برابر می‌شود:

$$\vec{L}(t)=\sum_{\mathrm{a}} m_a\vec{r}_a(t)\times[\vec{\omega}(t)\times\vec{r}_a(t)]$$

داده میشود با استفاده از فرمول (بک–کب) خواهیم داشت:

$$\vec{\mathrm{L}}(t)=\sum_{\mathrm{a}} m_a[\vec{\omega}(t){r_a}^2(t)-\vec{r}_a(t)(\vec{\omega}(t)\cdot\vec{r}_a(t)] \tag{۲-۱۱-a}$$

برای تعیین مؤلفه iام در دستگاه مرجع کافیست طرفین را در $\vec{e}_i$ ضرب کنیم،

$$\mathrm{L_i}(t)=\sum_{\mathrm{a}} m_a[\delta_{ij}{r_a}^2(t)-x_{ia}(t)x_{ja}(t)]\omega_j(t)$$

و اگر از $\omega_j(t)$ فاکتور بگیریم خواهیم داشت:

$$\mathrm{L_i}(t)=\sum_{\mathrm{a}} m_a[\delta_{ij}{r_a}^2(t)-x_{ia}(t)x_{ja}(t)]\omega_j(t) \tag{۲-۱۲}$$

ضریب $\omega_j(t)$ را تانسور اینرسی جسم صلب نامند و به ساختار هندسی جسم صلب بستگی دارد و آن را با $\mathrm{I_{ij}}$ نشان میدهند.

$$\mathrm{I_{ij}(t)}=\sum_{\mathrm{a}} m_a[\delta_{ij}r_a^2(t)-x_{ia}(t)x_{ja}(t)] \tag{۲-۱۳}$$

و برای جسم صلب پیوسته تانسور اینرسی به صورت:

$$\mathrm{I_{ij}}(t)=\int\rho(\dot{\vec{r}})[\delta_{ij}r^2(t)-x_i(t)x_j(t)]d^3x \tag{۲-۱۴}$$

در میاید. بنابراین (۱۲–۲) به صورت

$$L_i(t) = I_{ij}(t)\omega_j(t) \qquad (۲–۱۵)$$

در می آید. حال به موجب فرمول اویلر داریم:

$$\vec{\tau}^e = \frac{d\vec{L}}{dt}$$
$$\tau_i^e = \frac{d}{dt}[I_{ij}(t)\omega_j(t)] \qquad (۲–۱٦)$$

با مشاهده رابطه (۱٦–۲) با کمال تاسف در میابیم که تانسور I_{ij} تابعی از مختصات

$x_{ia}(t)$ ها $[a = 1,2,\ldots,N; i = 1,2,3]$ میباشد که از طریق آن ها تابعی از از t میگردد. مگر نه آنکه تمامی تلاش ما برای تعیین مجهولات $[a = 1,2,\ldots,N; i = 1,2,3]x_{ia}(t)$ بود که هنوز موفق به تعیین آن نشده ایم پس تانسور اینرسی تابع مجهولی از t میباشد.

در مقام چاره جویی رابطه (a-۱۱-۲) را در دستگاه متصل به جسم صلب مینویسیم یعنی طرفین رابطه را در $\vec{e}_i{}'$ ضرب اسکالر میکنیم و در نتیجه خواهیم داشت:

$$L_i'(t) = \sum_a m_a[\omega_i'(t){r_a'}^2(t) - x_{ia}'(t)(\omega_j'(t)x_{ja}'(t))] \qquad (۲–۱۷)$$

توجه کنید که در استخراج (۱۷–۲) از خاصیت اینکه مجذور طول بردار در دو دستگاه یکسان هستند و همچنین مقدار حاصلضرب اسکالر دو بردار در دو دستگاه که یکی از دوران دیگری حاصل شده است ناوردا است، استفاده کردیم. حال اگر در (۱۷–۲) از ω_j' فاکتور بگیریم خواهیم داشت:

$$L_i'(t) = \sum_a m_a[\delta_{ij} \quad r_{a'}^2(t) - x_{ia}'(t)x_{ja}'(t)]\omega_j'(t)$$
$$L_i'(t) = I_{ij}'(t)\omega_i'(t) \qquad (۲–۱۸)$$

روابط (۱۵–۲) و (۱۸–۲۹ نمایش محض رابطه

$$\vec{L}(t) = I\vec{\omega}(t)$$

در دو دستگاه $\{e_i\}$ و $\{e_i'\}$ میباشد. بظاهر چنین مینماید که تانسور اینرسی در دو دستگاه تابعی از t، زمان میباشد اما اگر کمی دقت کنیم مشاهده میکنیم که تانسور اینرسی در دستگاه متصل به جسم صلب تابعی از زمان نیست چون بردار مکانی هر نقطه از جسم صلب در دستگاه متصل به جسم صلب تابعی از زمان نیست و اگر دو دستگاه در لحظه $t = 0$ برهم منطبق باشند در این صورت

$$\begin{aligned} \vec{r}_a'(t) &= \vec{r}_a(0) \\ \vec{x}_{ia}'(t) &= \vec{x}_{ia}(0) \end{aligned} \tag{۲–۱۹}$$

میباشد بنابراین تانسور اینرسی در دستگاه متصل به جسم صلب تابعی از زمان نمیباشد و آن را به صورت

$$I_{ij}' = \sum_a m_a[{r_a}^2(0)\delta_{ij} - x_{ia}(0)x_{ja}(0)] \equiv I_{ij}(\cdot) \tag{۲–۲۰}$$

نشان می‌دهیم.

برای استخراج نمایش محض تانسور اینرسی چه از روی رابطه (۲۰–۲) و چه از روی رابطه (۱۳–۲) کافیست که از I_{ij} و یا $I_{ij}^{`}$ براکت های $\langle e_i|$ و $|e_j\rangle$ یا $\langle e_i^{`}|$ و $|e_j^{`}\rangle$ را فاکتور بگیریم. به عنوان مثال ما چنین کاری در مورد (۲۰–۲۹ انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} I_{ij}' &= \langle e_i'|I|e_j'\rangle = \\ &\langle e_i'|\left\{\sum_a m_a[{r_a}^2(0)1 - |r_a\rangle\langle r_a|]\right\}|e_j'\rangle \end{aligned}$$

در این صورت رابطه محض تانسور اینرسی برابر می‌شود با:

$$I' = \sum_a m_a[{r_a}^2(0)1 - |r_a\rangle\langle r_a|] \tag{۲–۲۱}$$

همانگونه که از (۲۰–۲) با (۲۱–۲) مشاهده میشود تانسور اینرسی یک ماتریس هرمیتی (متقارن) میباشد که دارای خواص هندسی جالبی می‌باشد:

الف– مقادیر ویژه این عملگر هرمیتی حقیقی و مثبت است.

ب– بردار های ویژه عملگر هرمیتی متعامد است.

ج– و در نتیجه نمایش یک عملگر هرمیتی در بردار پایه متعامد که حاصل از بردار های ویژه آن باشد قطری میباشد

برای اثبات اگر $|I_i\rangle$ بردار ویژه I با مقدار ویژه $|I_i|$ باشد در این صورت داریم:

$$I = I^+$$

$$I|I_i\rangle = I_i|I_i\rangle \quad (٢-٢٢)$$

$$\langle I_j|I^+ = I_j^*\langle I_j| \quad (٢-٢٣)$$

اگر (٢٢-٢) را در $\langle I_j|$ و (٢٣-٢) را در $|I_i\rangle$ ضرب کنیم و سپس از هم کم کنیم خواهیم داشت:

$$0 = (I_i - I_j^*)\langle I_j \mid I_i\rangle \quad (٢-٢٤)$$

هرگاه $|I_i\rangle \neq |I_j\rangle$ انتخاب کنیم چون $\langle I_i \mid I_i \rangle \neq 0$ است، نتیجه میگیریم:

$$I_i = I_i^* \quad (٢-٢٥)$$

در نتیجه I_i میبایستی حقیقی باشد. یعنی مقادیر ویژه حقیقی هستند. حال اگر $\mathrm{i} \neq j$ در نظر بگیریم و $I_i \neq I_j$ باشد، در این صورت به موجب (٢٤-٢)

$$\langle I_i|I_j\rangle = 0 \quad (٢-٢٦)$$

است. یعنی بردار های ویژه مربوط به مقادیر ویژه متفاوت بر هم عمود هستند. ولی هرگاه $\mathrm{i} \neq j$ باشد اما $I_i = I_j$ باشد نتیجه (٢٦-٢) صادق نیست. یعنی بردار ای ویژه بر هم عمود نیستند اما مسئله در این حالت

آسان تر از آن است که تصور میشود. هرگاه برای هرگاه $j \neq \mathrm{i}$ و $I_i = I_j$ باشد بردار های ویژه متفاوت بالاجبار به صورت:

$$| I_i, 1\rangle \quad , \quad | I_i, 2\rangle \tag{۲-۲۷}$$

نشان میدهیم هرچند که

$$\langle I_i, 2|I_i, 1\rangle \neq 0 \tag{۲-۲۸}$$

است یعنی این بردار های ویژه برهم عمود نیستند اما هر بردار دلخواهی که ترکیب خطی از این دو بردار باشد باز هم بردار ویژه عملگر I محسوب میشود مثلا $|\varepsilon\rangle$ که به صورت زیر تعریف شده بردار ویژه I با همان مقدار ویژه I است.

$$|\varepsilon\rangle = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j |I_i, j\rangle \tag{۲-۲۹}$$
$$I|\varepsilon\rangle = I_i|\varepsilon\rangle$$

پس در این حالت (دژنرسی) تعداد بردار های ویژه بیش از سه میشود. بنابرین از این مجموعه بردار های ویژه آن هایی را انتخاب میکنیم که همگی بر هم عمود باشند مثلا اگر سه مقدار ویژه تانسور اینرسی I_1 و I_2 و I_3 باشند به طوری که $I_2 = I_1$ اما $I_3 \neq I_1$ باشد در اینصورت $|I_3\rangle$ عمود بر $|I_1\rangle$ و $|I_2\rangle$ است اما $|I_3\rangle$ عمود بر $|I_1\rangle$ نمیباشد. اما میتوان $|I_3\rangle$ و $|I_1\rangle$ و $|\varepsilon\rangle$ انتخاب کرد که بر عم عمود میباشند (با انتخاب ضرایب α_j مناسب).

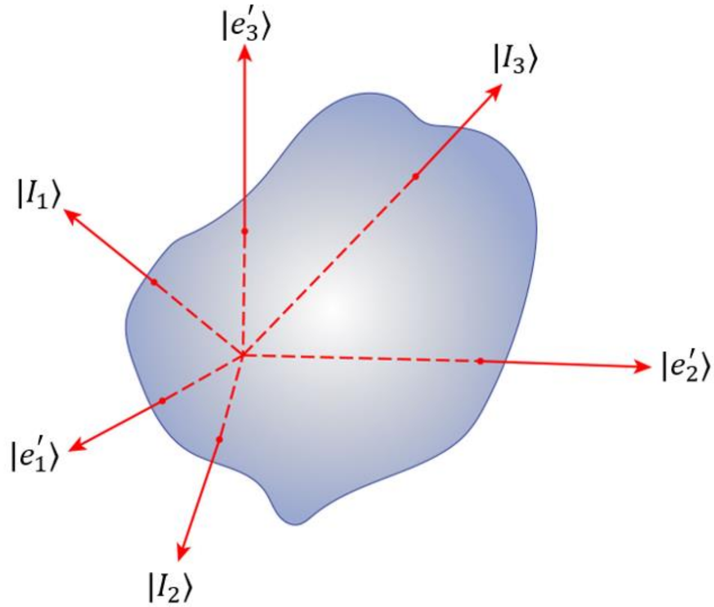
حال توجه کنید نمایش I در بردار پایه و $|e_i'\rangle$ و دستگاه بردار پایه $|e_i'\rangle$ و $|I_i\rangle$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\left\langle e_i'|I|e_j'\right\rangle = I_{ij}^{'} \tag{۲-۳۰}$$

$$\left\langle I_i|I|I_j\right\rangle = I_i\delta_{ij} \tag{۲-۳۱}$$

یعنی نمایش I در بردار پایه ای که از بردار های ویژه آن تشکیل شده است دارای ساده ترین شکل یعنی قطری میباشد مشاهده خواهیم کرد که محور های دستگاه متصل به جسم صلب را اگر در امتداد بردار های

ویژه عملگر اینرسی انتخاب کنیم حل مسئله آسان تر خواهد بود. در شکل (۳-۲) دو دستگاه متصل به جسم صلب رسم شده که یکی اختیاری است و در مورد دستگاه دوم امتداد محور ها منطبق بر بردار های ویژه عملگر I است.



شکل (۳-۲)

نمایش صریح **I** در دستگاهی که از بردار های عملگر **I** تشکیل شده است به صورت

$$\langle I_i|I|I_j\rangle = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \qquad (۲-۳۲)$$

خواهد بود. در مورد دیگر خواص تانسور اینرسی و نحوه محاسبه آن به علت ساده بودن در اینجا ذکر نمی‌شود و خواننده را به کتب معتبر مکانیک ارجاع می‌دهیم.

۲-۴ تعیین معادله حرکت جسم صلب - "با یک تیر دو نشان"

همانگونه که مشاهده کردیم تانسور اینرسی فقط در دستگاه متصل به جسم صلب قابل محاسبه میباشد و در نتیجه در رابطه

$$L_i' = I_{ij}'\omega_j'$$

ω_j' مؤلفه $\vec{\omega}$ در دستگاه متصل به جسم صلب است. به موجب فرمول (٦-٢) اویلر داریم:

$$\vec{\tau}^e = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

و با استفاده از فرمول (١٤٤-١) رابطه فوق به صورت

$$\vec{\tau}^e = \frac{d^*\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} \tag{٢-٣٣}$$

و اگر مولفه iام رابطه فوق را رد دستگاه متصل به جسم صلب بنویسیم خواهیم داشت (طرفین را در $\vec{e}_j^{\grave{}}$ ضرب اسکالر میکنیم).

$$\tau_i'^e = \frac{dL_i'}{dt} + \varepsilon_{ijk}\omega_j' L_k' \tag{٢-٣٤}$$

که با جایگزار مقدار $L_i^{\grave{}}$ بر حسب $I_{ij}'\omega_j^{\grave{}}$ خواهیم داشت:

$$\tau_i'^e = \sum_j I_{ij}'\dot{\omega}_j'(t) + \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk}\omega_j' I_{kl}'\omega_l' \tag{٢-٣٥}$$

از رابطه فوق که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیر خطی است میتوان $(\mathrm{i}=1,2,3)\omega_j'(t)$ را بدست آورد. اما تعیین $\omega_j^{\grave{}}(t)$ در حالت عمومی، مسئله جسم صلب را حل نمیکند چه حداقل ما $\omega(t)$ را میخواستیم که با جایگزاری آن در معادله

$$\frac{d\vec{r}_a(t)}{dt} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_a(t)$$

$\vec{r}_a(t)$ را به دست آوریم.

در اینجاست که پارامتر های دوران و یا پارامتر های اویلر به کمک ما می آیند چه به موجب (١١١-١) و (١٢١-١) $\omega_l'(t)$ را بر حسب پارامتر های نامبرده استخراج گردیده است و اگر $\omega_l'(t)$ را بر حسب این پارامتر ها در معادله (٣٥-٢) قرار دهیم سه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و غیر خطی بر حسب پارامتر های نامبرده بدست میاید که اگر بتوانیم آن ها را حل کنیم پارامتر های دوران یا پارامتر های اویلر بر حسب t به دست می آیند. چه زیباست. خاطر نشان میسازیم با تعیین پارامتر های یاد شده بر حسب زمان نه تنها $\omega_j^{\grave{}}$ و

ω_j بر حسب t به دست می آیند بلکه عملگر چرخش که بر حسب پارامتر های دوران یا اویلر میباشد بر حسب t به دست می آید و در نتیجه معادله حرکت هر ذره از جسم صلب به دست می آید و این ان چیزی بود که برای آن این همه تلاش نموده اید (و این یک تیر و دو نشان است)

نکات مهمی که میبایستی مد نظر داشته باشیم:

الف– گشتاور نیروهای خارجی را میبایست بر حسب پارامتر های اویلر استخراج کنیم تا از رابطه (۳۵–۲) بتوان پارامتر ها را بر حسب زمان به دست آوریم.

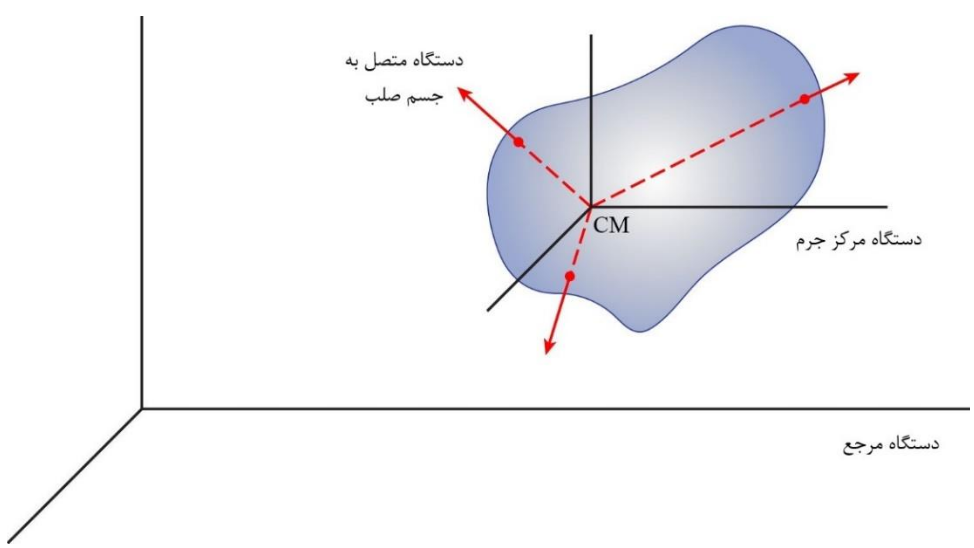
ب– اگر محور دستگاه متصل به جسم صلب در امتداد بردار های ویژه عملگر I قرار گیرد رابطه (۳۵–۲) ساده تر شده به صورت:

$$\tau_i'^{e} = \sum_j I_i'\delta_{ij}\dot{\omega}_j'(t) + \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\omega_j'\omega_l' I_l'\delta_{kl}$$

(۲–۳٦)

$$\tau_i'^{e} = I_i'\dot{\omega}_i'(t) + \varepsilon_{ijk}\omega_j'\omega_k' I_k'$$

ج– اگر هیچ نقطه از جسم صلب ساکن نباشد تفاوت اساسی در مسئله نخواهیم داشت به موجب شکل (۲–٤) دستگاه مرکز جرمی در نظر میگیریم:



شکل (٤–۲)

که نسبت به دستگاه مرجع حرکت انتقالی انجام می‌دهد و دستگاه سوم متصل به جسم صلب میباشد. بنابرین حرکت دورانی جسم صلب را نسبت به دستگاه مرکز جرم تعیین می‌کنیم و برای این منظور از اویلر (۱۰–۲) استفاده می‌کنیم یعنی بازوی گشاور نیروها در این مسئله تغییر می‌کند. پس از حل مسئله با یک انتقال حرکت جسم صلب را نسبت به دستگاه مرجع باسانی تعیین می‌گردد.

۵-۲ ضمیمه

استخراج مؤلفه‌های $\omega(t)$ برحسب پارامترهای دوران با استفاده از عملگر چرخش:

هدف از انجام این محاسبات نه تنها نشان دادن روش دیگر محاسبه مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای است، بلکه قصد بر این است که نشان داده شود که اگر از خواص و قوانین تبدیل عملگرها استفاده نشود این محاسبات طولانی و به‌قولی بصورت $BruteForce$ انجام می‌شود. این محاسبات را اکبر محرمی انجام داده است.

$$AA^{+} = \overline{\omega}.S$$

$$\left(A\dot{A}^{+}\right)_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k$$

$$\left(A\dot{A}^{+}\right)_{12} = \varepsilon_{123}\omega_3$$

$$A_{11}\dot{A}^{+}{}_{12} + A_{12}\dot{A}^{+}{}_{22} + A_{13}\dot{A}^{+}{}_{32} = \omega_3$$

$$A_{ij} = \delta_{ij} + (1-\cos\,\phi)(l_i l_j - \delta_{ij}) - \varepsilon_{ijk} l_k \sin\,\phi$$

$$A_{11} = 1 + (1-\cos\,\phi)(l_1^2 - 1)$$

$$A_{12} = (1-\cos\,\phi) l_1 l_2 - l_3 \sin\,\phi$$

$$A_{13} = (1-\cos\,\phi) l_1 l_3 + l_2 \sin\,\phi$$

$$\left(\dot{A}^{+}\right)_{ij} = \dot{A}_{ji} = \dot{\phi}\sin\,\phi(l_i l_j - \delta_{ij}) + (1-\cos\,\phi)(\dot{l}_i l_j + l\dot{l}_j) + \varepsilon_{ijk}\dot{l}_k \sin\,\phi + \dot{\phi}\cos\,\phi\varepsilon_{ijk} l_k$$

$$\left(\dot{A}^{+}\right)_{12} = \dot{\phi}\sin\,\phi l_1 l_2 + (1-\cos\,\phi)(\dot{l}_1 l_2 + \dot{l}_2 l_1) + \sin\,\phi\dot{l}_3 + \dot{\phi}\cos\,\phi l_3$$

$$\left(\dot{A}^{+}\right)_{22} = \dot{\phi}\sin\,\phi(l_2^2 - 1) + (1-\cos\,\phi)(2\dot{l}_2 l_2)$$

$$\left(\dot{A}^{+}\right)_{32} = \dot{\phi}\sin\,\phi(l_3 l_2) + (1-\cos\,\phi)(\dot{l}_2 l_3 + \dot{l}_3 l_2) - \dot{l}_1 \sin\,\phi - \dot{\phi}\cos\,\phi l_1$$

$$A_{11}\dot{A}_{12}^{+} = (1 + (1-\cos\,\phi)(l_1^2 - 1))(\dot{\phi}\sin\,\phi l_1 l_2 + (1-\cos\,\phi)(\dot{l}_1 l_2 + \dot{l}_2 l_1) + \sin\,\phi\dot{l}_3 + \dot{\phi}\cos\,\phi l_3)$$

$$A_{12}\dot{A}_{22}^{-} = ((1-\cos\,\phi) l_1 l_2 - l_3 \sin\,\phi)(\dot{\phi}\sin\,\phi(l_2^2 - 1) + 2(1-\cos\,\phi)\dot{l}_2 l_2)$$

$$A_{13}\dot{A}_{32}^{+} = ((1-\cos\,\phi) l_1 l_3 + l_2 \sin\,\phi)(\dot{\phi}\sin\,\phi l_2 l_3 + (1-\cos\,\phi)(\dot{l}_2 l_3 + \dot{l}_3 l_2) - \dot{l}_1 \sin\,\phi - \dot{\phi}\cos\,\phi l_1)$$

$$\omega_3 = \dot{\phi}sin\ \phi l_1 l_2 + (1 - cos\ \phi)(\dot{l}_1 l_2 + l\dot{l}_2) + \dot{l}_3 sin\ \phi + \dot{\phi}cos\ \phi l_3$$
$$+ \dot{\phi}sin\ \phi(1 - cos\ \phi)(l_1 l_2)(l_1^2 - 1) + (1 - cos\ \phi)^2(\dot{l}_1 l_2 + l_1\dot{l}_2)(l_1^2 - 1)$$
$$+ sin\ \phi(1 - cos\ \phi)\dot{l}_5(l_1^2 - 1) + \dot{\phi}cos\ \phi(1 - cos\ \phi)l_5(l_1^2 - 1) + \dot{\phi}sin\ \phi(1$$
$$- cos\ \phi)(l_2^2 - 1)l_1 l_2 + 2(1 - cos\ \phi)^2 l_1\dot{l}_2 l_2^2 - \dot{\phi}sin^2\ \phi l_3(L_2^2 - 1)$$
$$- 2sin\ \phi(1 - cos\ \phi)l_2\dot{l}_3 + \dot{\phi}sin\ \phi(1 - cos\ \phi)l_1 l_2 l_3^2 + (1 - cos\ \phi)^2 l_1 l_3 l_3$$
$$+ l_2\dot{l_3} - sin\ \dot{\phi}(1 - cos\ \phi)l_1\dot{l}_1 l_3 - \dot{\phi}cos\ \phi(1 - cos\ \phi)l_1^2 l_3 + \dot{\phi}sin^2\ \phi l_2^2 l_3$$
$$+ sin\ \phi(1 - cos\ \phi)l_2\left(\dot{l}_2 l_3 + l\dot{l}_3\right) - \dot{l}_1 l_2 sin^2\ \phi - l_1\dot{l}_2\dot{\phi}sin\ \phi cos\ \phi$$

$$\omega_3 = \dot{\phi}\sin^2\phi l_3 + \dot{\phi}\sin\phi\,(1 - \cos\phi)l_1 l_2(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - 2)$$
$$- \dot{\phi}\cos\phi\,(1 - \cos\phi)l_3 + \dot{\phi}\sin\phi\, l_1 l_2 + \dot{l}_3\sin\phi + l_3\dot{\phi}\cos\phi - \dot{l}_1 l_2\sin^2\phi$$
$$- l_1\dot{l}_2\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi - 2\sin\phi\,(1 - \cos\phi)l_2\dot{l}_2 l_3 - \sin\ \phi(1 - \cos\ \phi)l_1\dot{l}_1 l_5$$
$$+ (1 - \cos\ \phi)^2(\dot{l}_1 l_2 + l\dot{l}_2)(l_1^2 - 1) + (1 - \cos\phi)\left(\dot{l}_1 L_2 + l\dot{l}_2\right)$$
$$+ \sin\phi\,(1 - \cos\phi)\dot{l}_3(l_1^2 - 1) + 2(1 - \cos\ \phi)^2 l_1\dot{l}_2 l_2^2$$
$$+ (1 - \cos\ \phi)^2 l_1 l_3(\dot{l}_2 l_3 + l\dot{l}_3) + \sin\phi\,(1 - \cos\phi)l_2\left(\dot{l}_2 l_3 + l_2\dot{l}_3\right)$$

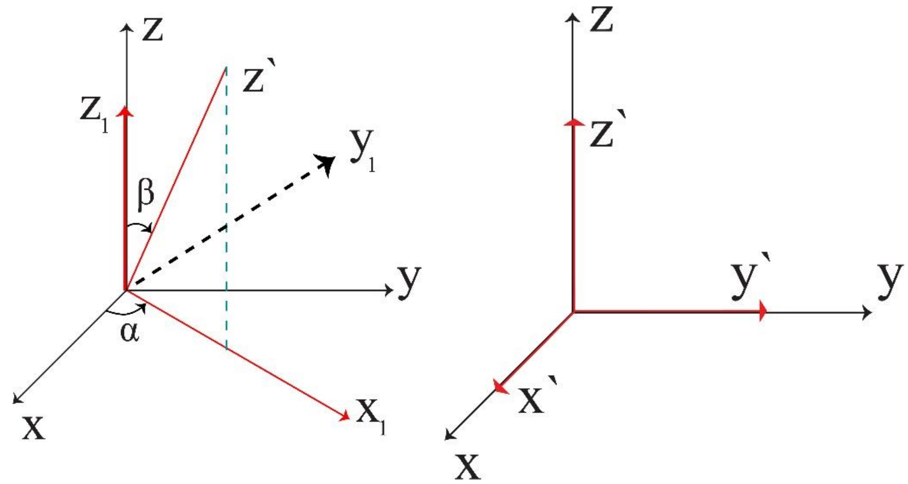
$$\omega_3 = -\dot{\phi}\sin\ \phi l_1 l_2 + \dot{\phi}\sin\ \phi\cos\ \phi l_1 l_2 + \dot{\phi}\sin^2\ \phi l_3 - \dot{\phi}\cos\ \phi L_3 + L_3\dot{\phi}\cos^2\ \phi + l_1\dot{l}_2\dot{\phi}\sin\ \phi$$
$$+ \dot{l}_3\sin\ \phi + \dot{\phi}\cos\ \phi l_3 - \dot{l}l_2\sin^2\ \phi - l_1\dot{l}_2\dot{\phi}\sin\ \phi\cos\ \phi$$
$$- \sin\ \phi(1 - \cos\ \phi)(2l_2\dot{l}_2 l_3 + l_1\dot{l}_1 l_3 - l_1^2\dot{l}_3 + \dot{l}_3 - l_2\dot{l}_2 l_3 - l_2^2\dot{l}_3)$$
$$+ (1 - \cos\ \phi)^2\left(l_1^2\dot{l}_1 l_2 - \dot{l}_1 l_2 + l_1^3\dot{l}_2 - \dot{l}_2 l_1 + 2l_2^2\dot{l}_2 l_1 + l_3^2\dot{l}_2 l_1 + l_1 l_2 l_3 l_3\right)$$
$$+ (1 - \cos\ \phi)(\dot{l}_1 L_2 + \dot{l}_2 L_1)$$

$$\omega_3 = \dot{\phi}l_3 + \dot{l}_3 sin\ \phi - \dot{l}_1 l_2 sin^2\ \phi + (1 - cos\ \phi)(\dot{l}_1 l_2 + \dot{l}_2 l_1)\ + (1 - cos\ \phi)^2[l_1 l_2(l_1\dot{l}_1$$
$$+ 2l_2\dot{l}_2 + l_3\dot{l}_3) - \dot{l}_1 l_2 - \dot{l}_2 l_1 + l_1^3\dot{l}_2 + l_3^2\dot{l}_2 l_1]$$
$$\omega_3 = \dot{\phi}l_3 + \dot{l}_5 sin\ \phi - \dot{l}_1 l_2 sin^2\ \phi + (1 - cos\ \phi)(\dot{l}_1 l_2 + \dot{l}_2 l_1) - (1 - cos\ \phi)^2\dot{l}_1\dot{l}_2$$
$$\omega_3 = \dot{\phi}l_3 + \ddot{l}_3 sin\ \phi - \dot{l}_1 l_2(1 + sin^2\ \phi + cos^2\ \phi - 2cos\ \phi) + (1 - cos\ \phi)(\ddot{l}_1 l_2 + \ddot{l}_2 l_1)$$
$$\omega_3 = \dot{\phi}l_3 + \dot{l}_3 sin\ \phi - 2(1 - cos\ \phi)\dot{l}_2 + (1 - cos\ \phi)\dot{l}_1 l_2 + (1 - cos\ \phi)l_1\dot{l}_2$$
$$\omega_3 = \dot{\phi}l_3 + \dot{l}_3 sin\ \phi + (1 - cos\ \phi)(\dot{l}_2 l_1 - \dot{l}_1 l_2)$$

۶-۲ اثبات بهتر هم‌ارز بودن روابط (۸۰-۱) و (۹۲-۱)

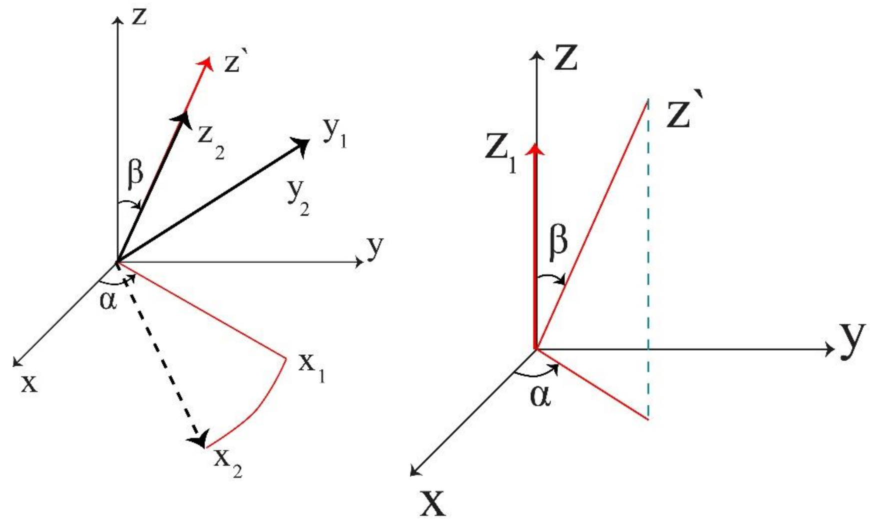
مولف با مشاهده اثبات هندسی هم‌ارز بودن روابط (۸۰-۱) و (۹۲-۱) در کتاب $sakurai$ روش تحلیلی زیر را ارائه می‌نماید.

ابتدا دو دستگاه $oxyz$ و $ox'y'z'$ بر هم منطبق فرض می‌کنیم و سپس دستگاه پریم را با دوران به وضعیت نهایی دلخواه منتقل می‌کنیم. حال سعی می‌کنیم با پارامترهای اویلر یعنی با سه دوران متوالی دستگاه پریم را به وضعیت نهایی خودش منطبق نماییم. برای این منظور دستگاه پریم با دوران اول به‌شرح زیر به دستگاه $ox_1y_1z_1$ تبدیل نموده و سپس این دستگاه را با دوران دوم تبدیل به دستگاه $ox_2y_2z_2$ و نهایتا با دوران سوم دستگاه $ox_2y_2z_2$ را منطبق به دستگاه $ox'y'z'$ در وضعیت نهایی می‌کنیم. هرگاه مختصات کروی محور oz' در وضعیت نهایی (α, β) بنامیم (مطابق شکل):



شکل(A-1)

بنابراین دوران اول را حول محور $\vec{k}$ و با اندازه زاویه α انجام می‌دهیم که مختصرا با $(\vec{k}, \alpha)$ نشان می‌دهیم. در اثر این دوران دستگاه $ox_1y_1z_1$ حاصل می‌شود.



شکل (A-2)

به‌موجب شکل فوق oz و oz_1 و ox_1 در صفحه عمود بر محور oy_1 قرار گرفته‌اند، پس دوران دوم حول محور y_1 با اندازه β انجام می‌دهیم.

محور oz یعنی محور oz' اولیه منطبق بر oz' نهایی می‌شود. آیا منطبق شدن دو محور oz_2 با oz' به‌معنای منطبق شدن دستگاه $ox'y'z'$ از حالت اولیه به حالت نهایی است؟ پاسخ آن **منفی** است.

بنابراین کافیست دوران سوم $(\overrightarrow{k'},\gamma)$ انجام دهیم که دستگاه مختصات پریم اولیه و نهایی بر هم منطبق شود. پس عملگر دورانی معادل که دستگاه پریم اولیه را به دستگاه پریم نهایی تبدیل می‌کند با رابطه

$$A(\alpha,\beta,\gamma)=e^{-\gamma\overrightarrow{k'}\cdot\vec{S}}e^{-\beta\overrightarrow{J_1}\cdot\vec{S}}e^{-\alpha\vec{k}\cdot\vec{S}} \qquad (\text{A–۱})$$

داده می‌شود. مشکل رابطه (A–۱) در ماتریس‌های پیچیده عملگرهای $e^{-\gamma\overrightarrow{k'}\cdot\vec{S}}$ و $e^{-\beta\overrightarrow{J_1}\cdot\vec{S}}$ است. حال تا اینجا مطلب جدیدی گفته نشده است.

حال به رابطه (٦٨–۱) برمی‌گردیم:

$$e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{S}}\,\vec{m}\cdot\vec{S}\,e^{\vec{\phi}\cdot\vec{S}}=(e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{S}}\,\vec{m})\cdot\vec{S}=\vec{n}\cdot\vec{S} \qquad , \qquad e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{S}}\,\vec{m}=\vec{n}$$

که $\hat{n}$ بردار دوران یافته $\vec{m}$ است. با کمی دقت متوجه هستیم که

$$e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{S}}\,(\vec{m}\cdot\vec{S})^{P}e^{\vec{\phi}\cdot\vec{S}}=\left[\left(e^{\vec{\phi}\cdot\vec{S}}\cdot\vec{m}\right)\cdot\vec{S}\right]^{P}=\left[\vec{n}\cdot\vec{S}\right]^{P} \qquad (\text{A–۲})$$

و چون:

$$e^{\pm\vec{m}\cdot\vec{s}} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(\pm\vec{n}\cdot\vec{s})^p}{p!}$$

بنابراین به نتیجه جدید

$$e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{s}}e^{\pm\vec{m}\cdot\vec{s}}e^{\vec{\phi}\cdot\vec{s}} = e^{\pm\vec{n}\cdot\vec{s}} \tag{A–۳}$$

می‌رسیم که نتیجه جالبی است. اکنون چگونه از $\vec{k}$ به $\vec{k'}$ می‌رسیم؟

$$e^{-\gamma\vec{k'}\cdot\vec{s}} = e^{-\beta\vec{J_1}\cdot\vec{s}}e^{-\gamma\vec{k}\cdot\vec{s}}e^{+\beta\vec{J_1}\cdot\vec{s}} \tag{A–٤}$$

و چگونه از $\vec{J}$ به $\vec{J_1}$ می‌رسیم؟

$$e^{-\beta\vec{J_1}\cdot\vec{s}} = e^{-\alpha\vec{k}\cdot\vec{s}}e^{-\beta\vec{J}\cdot\vec{s}}e^{+\alpha\vec{k}\cdot\vec{s}} \tag{A–٥}$$

با جایگزاری تدریجی روابط فوق در (A–۱):

$$A(\alpha,\beta,\gamma) = (e^{-\beta\vec{J_1}\cdot\vec{s}}e^{-\gamma\vec{k}\cdot\vec{s}}e^{+\beta\vec{J_1}\cdot\vec{s}})e^{-\beta\vec{J_1}\cdot\vec{s}}e^{-\alpha\vec{k}\cdot\vec{s}}$$
$$A(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-\beta\vec{J_1}\cdot\vec{s}}e^{-\alpha\vec{k}\cdot\vec{s}}e^{-\gamma\vec{k}\cdot\vec{s}}$$

و با جایگزاری جمله اول با معادلش:

$$A(\alpha,\beta,\gamma) = (e^{-\alpha\vec{k}\cdot\vec{s}}e^{-\beta\vec{J}\cdot\vec{s}}e^{+\alpha\vec{k}\cdot\vec{s}})e^{-\alpha\vec{k}\cdot\vec{s}}e^{-\gamma\vec{k}\cdot\vec{s}}$$
$$A(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-\alpha\vec{k}\cdot\vec{s}}e^{-\beta\vec{J}\cdot\vec{s}}e^{-\gamma\vec{k}\cdot\vec{s}} \tag{A–٦}$$

که هم‌ارز بودن روابط (A–۱) و (A–٦) را نشان می‌دهد.

شایان ذکر است که در مکانیک کوانتومی بردار مکانی $\vec{X}$ در فضای سه بعدی متصل به دستگاه پریم است و در نتیجه عملگر دوران A به‌صورت اکتیو بردار $\vec{X}$ را هم دوران داده و آن‌را تبدیل به بردار $\vec{X}'$ می‌نماید، یعنی:

$$A\,\vec{X} = \vec{X}'$$

حال این سوال پیش می‌آید که در فضای هیلبرت چه عملگر منتسب به A می‌شناسیم که بردار $|\vec{X}\rangle$ را به بردار $|\vec{X}'\rangle$ تبدیل نماید. این عملگر را با نماد D مشخص می‌کنند که ادامه این مطالب در کتاب‌های کوانتوم مکانیک بخوانید.

عملگر A در کتاب ساکورایی با R نشان داده شده است و رابطه مورد نظر (۱۹–۳–۳) می‌باشد.

در نظریه گروه‌ها، هرگاه برای عناصر X و A و B گروه رابطه $A = XBX^{-1}$ برقرار باشد، عنصر B را مزدوج عنصر A نامند. بنابراین به‌موجب (A–۳)

$$e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{S}}e^{-\beta\vec{m}\cdot\vec{S}}e^{\vec{\phi}\cdot\vec{S}} = e^{-\beta\vec{n}\cdot\vec{S}} \tag{A–۷}$$

پس تمامی عملگرهای دوران با زاویه دوران یکسان β اما با محورهای دوران متفاوت (تعداد بی‌نهایت است) مزدوج (هم‌یوغ) یک دیگر هستند.

حال به‌آسانی نشان دهید عملگر (٦٩–۱) با عملگر ساده $A(\vec{k},\varphi)$ دارای مقادیر ویژه یکسان هستند. (راهنمایی: به رابطه بین (٦٨–۱) و (٦٩–۱) مراجعه نمائید)

حال برمی‌گردیم به مساله دوران با پارامترهای اویلر در مکانیک کلاسیک. به‌موجب (۷۹–۱) عملگر دوران با رابطه

$$A(\varphi,\theta,\psi) = e^{-\psi\overrightarrow{k'}\cdot\vec{S}}e^{-\theta\overrightarrow{\iota_1}\cdot\vec{S}}e^{-\varphi\vec{k}\cdot\vec{S}} \tag{A–۸}$$

داده شده است. مانند سابق سوال می‌کنیم با چه دورانی از $\vec{k}$ به $\overrightarrow{k'}$ می‌رسیم.

$$e^{-\psi\overrightarrow{k'}\cdot\vec{S}} = e^{-\theta\overrightarrow{\iota_1}\cdot\vec{S}}e^{-\psi\vec{k}\cdot\vec{S}}e^{+\theta\overrightarrow{\iota_1}\cdot\vec{S}} \tag{A–۹}$$

با جایگزاری (A–۹) در (A–۸):

$$\begin{aligned}A(\varphi,\theta,\psi) &= \left[e^{-\theta\overrightarrow{\iota_1}\cdot\vec{S}}e^{-\psi\vec{k}\cdot\vec{S}}e^{+\theta\overrightarrow{\iota_1}\cdot\vec{S}}\right]e^{-\theta\overrightarrow{\iota_1}\cdot\vec{S}}e^{-\varphi\vec{k}\cdot\vec{S}}\\ &= e^{-\theta\overrightarrow{\iota_1}\cdot\vec{S}}e^{-\varphi\vec{k}\cdot\vec{S}}e^{-\psi\vec{k}\cdot\vec{S}}\end{aligned}$$

حال در رابطه فوق با چه دورانی از $\vec{\iota}$ به $\overrightarrow{\iota_1}$ می‌رسیم.

$$e^{-\theta\overrightarrow{\iota_1}\cdot\vec{S}} = \left[e^{-\varphi\vec{k}\cdot\vec{S}}e^{-\theta\vec{\iota}\cdot\vec{S}}e^{+\varphi\vec{k}\cdot\vec{S}}\right]e^{-\varphi\vec{k}\cdot\vec{S}}e^{-\psi\vec{k}\cdot\vec{S}}$$

$$A(\varphi,\theta,\psi) = e^{-\varphi\vec{k}\cdot\vec{S}}e^{-\theta\overrightarrow{\iota_1}\cdot\vec{S}}e^{-\psi\vec{k}\cdot\vec{S}} \tag{A–۱۰}$$

رابطه فوق نشان‌دهنده هم‌ارز بودن (A–۱۰) با (A–۸) است. **اثبات جالبی است!**

۷-۲ تعیین بردار $\vec{\omega}$ با استفاده از محاسبات کامپیوتری (برنامه $Maple$)

مرور مختصر از مطالب گفته شده:

گفته شد معادله حرکت هرنقطه از جسم صلب در حرکت دورانی از رابطه

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$|\vec{v}| = (-\vec{\omega} \cdot \vec{g})|r\rangle$$

پیروی می‌کند که

$$\Omega = \vec{\omega} \cdot \vec{S} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(در رابطه فوق بجای $\vec{\omega}$ می‌توان هر بردار دیگری را قرار داد)

رابطه $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ مهم‌ترین رابطه سینماتیکی جسم صلب است، با معلوم بودن $\vec{\omega}$، $\vec{v}$ هر ذره و در نتیجه $\vec{r}$ هر ذره بدست می‌آید. این نبوغ لئونارد اویلر بود که حل $\vec{r}(t)$ به‌صورت $A(\varphi, \theta, \psi)$ معرفی کرد. اگردرآن

$$A(\vec{k}, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(\vec{\imath}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

باشند، در این‌صورت

$$A(\varphi, \theta, \psi) = A(\vec{k}, \varphi) A(\vec{\imath}, \theta) A(\vec{k}, \psi)$$

می‌باشد. حل ضرب این سه ماتریس به‌وسیله برنامه $Maple$ انجام می‌شود؛

آنچه که در این جزوه استخراج گردید و در کتاب‌هایی نظیر گلدشتاین گفته نشده و آن برقراری روابط ۷۵–۱) و (۱۰۶–۱) یعنی

$$A\dot{A}^{\top} = \Omega = \vec{\omega} \cdot \vec{S} = \sum_{i} \omega_i \cdot S^i$$

$$\dot{A}^{\top} A = \Omega' = \overrightarrow{\omega'} \cdot \vec{S} = \sum_{i} \omega_i{}' \cdot S^i$$

است که ω_i و $\omega_i{}'$ مؤلفه‌های بردار $\vec{\omega}$ به‌ترتیب در دستگاه مرجع و دستگاه دوار (دستگاه متصل به جسم صلب است) می‌باشند. هرچند می‌توان $A(\varphi, \theta, \psi)$ را به‌صورت دستی محاسبه نمود. (هرچند طولانی است) اما محاسبه $\dot{A}^{\top}$ به‌صورت دستی کار بس مشکل است. در این جا است که برنامه $Maple$ به‌کمک ما آمده است. با مقایسه نتایج حاصل با Ω و Ω' ، ω_i و $\omega_i{}'$ بدست می‌آیند.

علاوه بر این، روش دیگر محاسبه $\omega_i{}'$ هم وجود دارد و آن استفاده از برنامه $Maple$ است که محاسبه دستی آن دشوار است.

$$\mathbf{A}^{\top}|\boldsymbol{\omega}\rangle = |\boldsymbol{\omega}\rangle'$$

برای خواننده جالب خواهد بود بردار سرعت زاویه‌ای درحالت خاص که محور دوران ثابت است ماتریس اویلر فقط به‌صورت $A(\vec{k}, \phi)$ است و به‌صورت دستی محاسبه می‌شود. محاسبات توسط برنامه در صفحه بعد پیوست می‌گردد.

$with(LinearAlgebra):$
$with(Typesetting):$
$Settings(typesetprime = true):$
$Settings(typesetdot = true):$

$$\boldsymbol{EulerMatrix} := (\phi, \theta, \psi) \rightarrow \left(\begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right):$$

$\boldsymbol{A} := EulerMatrix(\phi(t), \theta(t), \psi(t))$

$$A := \begin{bmatrix} \cos(\phi(t))\cos(\psi(t)) - \sin(\phi(t))\cos(\theta(t))\sin(\psi(t)) & -\cos(\phi(t))\sin(\psi(t)) - \sin(\phi(t))\cos(\theta(t))\cos(\psi(t)) & \sin(\phi(t))\sin(\theta(t)) \\ \sin(\phi(t))\cos(\psi(t)) + \cos(\phi(t))\cos(\theta(t))\sin(\psi(t)) & -\sin(\phi(t))\sin(\psi(t)) + \cos(\phi(t))\cos(\theta(t))\cos(\psi(t)) & -\cos(\phi(t))\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t))\sin(\psi(t)) & \sin(\theta(t))\cos(\psi(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

Calculation of $\mathbf{A}\,.\,\dot{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}}$ **:**

$\boldsymbol{\Omega} := map(simplify, A \cdot map(diff, Transpose(A), t))$

$$\Omega := \begin{bmatrix} 0 & \dot{\psi}(t)\cos(\theta(t)) + \dot{\phi}(t) & \cos(\phi(t))\dot{\psi}(t)\sin(\theta(t)) - \dot{\theta}(t)\sin(\phi(t)) \\ -\dot{\psi}(t)\cos(\theta(t)) - \dot{\phi}(t) & 0 & \sin(\phi(t))\dot{\psi}(t)\sin(\theta(t)) + \dot{\theta}(t)\cos(\phi(t)) \\ -\cos(\phi(t))\dot{\psi}(t)\sin(\theta(t)) + \dot{\theta}(t)\sin(\phi(t)) & -\sin(\phi(t))\dot{\psi}(t)\sin(\theta(t)) - \dot{\theta}(t)\cos(\phi(t)) & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

Calculation of $\dot{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}$ **:**

$\boldsymbol{\Omega\_prime} := map(simplify, map(diff, Transpose(A), t) \cdot A)$

$$\Omega\_prime := \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi}(t)\cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t) & -\cos(\psi(t))\dot{\phi}(t)\sin(\theta(t)) + \dot{\theta}(t)\sin(\psi(t)) \\ -\dot{\phi}(t)\cos(\theta(t)) - \dot{\psi}(t) & 0 & \sin(\psi(t))\dot{\phi}(t)\sin(\theta(t)) + \dot{\theta}(t)\cos(\psi(t)) \\ \cos(\psi(t))\dot{\phi}(t)\sin(\theta(t)) - \dot{\theta}(t)\sin(\psi(t)) & -\sin(\psi(t))\dot{\phi}(t)\sin(\theta(t)) - \dot{\theta}(t)\cos(\psi(t)) & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

Calculation of $A^T|\omega\rangle$**:**

$$\omega := \begin{bmatrix} \sin(\phi(t))\dot{\psi}(t)\sin(\theta(t)) + \dot{\theta}(t)\cos(\phi(t)) \\ -\cos(\phi(t))\dot{\psi}(t)\sin(\theta(t)) + \dot{\theta}(t)\sin(\phi(t)) \\ \dot{\psi}(t)\cos(\theta(t)) + \dot{\phi}(t) \end{bmatrix}:$$

$\omega\_prime := map(\mathrm{simplify}, \mathrm{Transpose}(\mathrm{A}) \cdot \omega)$

$$\omega\_prime := \begin{bmatrix} \sin(\psi(t))\dot{\phi}(t)\sin(\theta(t)) + \dot{\theta}(t)\cos(\psi(t)) \\ \cos(\psi(t))\dot{\phi}(t)\sin(\theta(t)) - \dot{\theta}(t)\sin(\psi(t)) \\ \dot{\phi}(t)\cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$