

بسمه تعالی

93/2/25

انتگرال رویه ای

سری 9

1- ابتدا ثابت کنید که حجم V محدود به رویه بسته S عبارتست از :

$$V = \frac{1}{3} \iiint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dv$$

که در آن $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ کسینوس های هادی بردار نرمال بر رویه S و رو به خارج است.

ثانیا به کمک قضیه دیورژانس حجم ناحیه محدود به رویه های زیر را بیابید.

$$z = 2x^2 + 3y^2 \quad , \quad z = 4 - 2x^2 - y^2$$

2- مطلوبست محاسبه انتگرال سطح میدان برداری $F = \left(\frac{x^3}{12}, \frac{y^3}{27}, \frac{z^3}{3}\right)$ بر سطح S که قسمت خارجی رویه با معادله

$$\frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \quad .$$

3- مطلوبست انتگرال سطح $\iint_{\sigma} \left(\frac{xy}{z}\right) d\sigma$ که در آن σ قسمتی از سهموی $z = x^2 + y^2$ واقع در $\frac{1}{8}$ اول مختصات واقع در بالای دایره $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ است.

4- مطلوبست تعیین شار تابع نیروی $F = xi + yj + zk$ گذرنده از سطح $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ واقع بین صفحات $z = 2$, $z = 1$.

5- مطلوبست محاسبه

$$\iint_{\sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy$$

$$\sigma: x^2 + y^2 = 9 \quad , \quad z = 0 \quad , \quad z = 3$$

6- تابع نیروی $A = (2xy + z)i + y^2j - (x + 3y)k$ و سطح بسته $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, $2x + 2y + z = 6$ مفروض است محاسبه

$$\iint_{\sigma} A \cdot ndv$$

7- مطلوبست محاسبه $\iint_v u(x, y, z) ds$ که در آن v سهموی $z = 2 - (x^2 + y^2)$ واقع در بالای صفحه xy باشد و $u(x, y, z)$ برابر است با :

$$a) \quad 1 \qquad b) \quad x^2 + y^2.$$

8- مطلوبست تعیین گرانیگاه سطح کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ محدود به مخروط $z \tan \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

9- مطلوبست تعیین مساحت قسمتی از سهموی $z = x^2 + y^2$ که بوسیله صفحه $z = 2$ ، $z = 0$ قطع شده است.

10- مطلوبست مساحت قسمتی از سطح $x^2 - 2z = 0$ که در بالای ناحیه محدود به خطوط $x = \sqrt{3}$ ، $y = 0$ ، $y = x$ در صفحه xy قرار می گیرد.

11- مساحت قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ که توسط مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ قطع شده است..

12- انتگرال سطح $g(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + 4}$ روی سطح قطع شده توسط استوانه $y^2 + 4z = 16$ توسط صفحات $z = 0$ ، $x = 1$ ، $x = 0$.

13- مطلوبست شار میدان برداری \vec{F} گذرنده از قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ که در $\frac{1}{8}$ اول مختصات قرار دارد.

$$F(x, y, z) = yi - xj + k$$

14- شار گذرنده از رویه $z = 4 - y^2$ محدود به صفحات $z = 0$ ، $x = 0$ ، $x = 1$ برای تابع برداری

$$F(x, y, z) = z^2i + xj - 3zk$$

15- مطلوبست محاسبه $\iint_S x ds$ روی قسمتی از استوانه $z = \frac{x^2}{2}$ که در $\frac{1}{8}$ اول مختصات و داخل استوانه $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد.

16- مطلوبست مساحت قسمتی از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ که در داخل استوانه $x^2 + y^2 = 2ay$ قرار می گیرد.

17- مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + z^2 = a^2$ که در داخل استوانه $y^2 + z^2 = a^2$ قرار می گیرد.

18- مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_S y ds$ که در آن S قسمتی از صفحه $z = 1 + y$ واقع در داخل مخروط $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ است.

19- مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = 2ay$ که در داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ قرار می گیرد.

20- اگر S سطح خارجی بیضی گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ، انتگرال سطح زیر را محاسبه کنید:

$$I = \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) d\sigma$$

21- یک جریان مایع دارای بردار چگالی شار $F(x, y, z) = xi - (2x + y)j + zk$ است. فرض کنید S نیم کره

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، $z \geq 0$ و بردار قائم یکه به سمت خارج سطح باشد. جریان مایع گذرنده از S در واحد زمان را بیابید.

22- مطلوبست محاسبه $\iiint_\sigma F \cdot ndv$ که در آن $F(x, y, z) = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$ و بردار یکه نرمال پر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است. چرا نمی توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد.

23- مرکز جرم قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ که در $\frac{1}{8}$ اول مختصات قرار می گیرد.

24- مطلوبست محاسبه $I = \iint_{\sigma} \text{Curl}F \cdot n d\sigma$ که در آن σ قسمتی از کره $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$ واقع در بالای صفحه xy و n بردار قائم بر سطح و

$$F = y^2 \cos xz \, i + x^3 e^{yz} \, j - e^{-xyz} \, k$$

25- $\iint_{\sigma} F \cdot n d\sigma$ که در آن $F = (z^2 - x)i - xyj + 3zk$ که در آن σ محدود به $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$.