بسمه تعالی

سری 4 تاریخ ارسال 92/12/9 تاریخ تحویل 93/1/16

1- ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع ذیل را در صورت وجود به دست آورید.

$$z = 2x^2 + y^3 - xy + 1$$

2- درجه حرارت در هر نقطه از یک ناحیه مثلث شکل با رئوس (0,0),(3,0),(0,1) از رابطه $T(x,y) = 4xy + y^2 + 6x$ محاسبه می شود.مطلوبست تعیین سردترین و گرم ترین نقاط روی ناحیه.

3- نشان دهید دو رویه $z = xy - y^2 + 8y - 5$, $z = e^{2x+y+4}$ در نقطه (-3,2,1) بر هم مماسند.

4- با فرض آنکه $F(x,y,z) = 0$ بتواند هر متغیر را به عنوان تابعی از دو متغیر دیگر تعریف کند، نشان دهید در هر نقطه ای که مشتقات جزئی F_z, F_y, F_x مخالف صفر باشند،

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

5- نزدیکترین نقاط منحنی فصل مشترک دو سطح $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$ به مبداء را بیابید.

6- دو معادله $F(x,y,u,v) = 0$, $G(x,y,u,v) = 0$ ، y , x را به عنوان توابعی از u , v به طور ضمنی معرفی می کند.مثلا $x = X(u,v), y = Y(u,v)$. نشان دهید در نقاطی که ژاکوبی $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \neq 0$ ،

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,u)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

7- ثابت کنید

$$\int_0^{\pi} \mathrm{Ln}\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right) dx = \pi \mathrm{Ln}\left(\frac{b-\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right) \qquad a,b > 1$$

8- موقع بارندگی روی سطح $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$ آب در کدام قسمت سطح جمع می شود.

9- ثابت c را طوری بیابید که صفحات مماس در هر نقطه فصل مشترک دو کره

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1 \quad , \quad (x-c)^2 + y^2 + z^2 = 3$$

بر هم عمود باشند.

10- اگر $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha-cosx}$, $\alpha > 1$، آنگاه $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2-cosx)^2} = ?$

11-نشان دهید :a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\alpha \cos x+\sin x} = \frac{\alpha\pi}{2(\alpha^2+1)} - \frac{Ln\alpha}{\alpha^2+1}$$

b با استفاده از a ثابت کنید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x dx}{2\cos x+\sin x} = \frac{3\pi+5-8Ln2}{50}$$

12- مطلوبست محاسبه دیفرنسیل های مرتبه اول و دوم هر یک از توابع (z, y, x متغیرهای مستقل) زیر:

$b)\ u = \dfrac{z}{x^2+y^2}$ $\qquad$ $a) u = e^{xy}$

13- مطلوبست معادلات خط مماس و صفحه قائم بر منحنی با معادله

$$x^2 - 3xy + z^2 = 1$$

$$2xtan(xz) + 2y^2 - z = 1$$

در نقطه$m_0(0,1,1)$

14- مطلوبست تعیین مشتق جهت دار تابع $f(x,y,z) = e^x cos\pi yz$ در نقطه $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$ در امتداد خط تقاطع دو صفحه $x+y-z-5=0$, $4x-y-z+2=0$.

15- بر سطح $x^2+y^2-z^2-2x=0$ نقاطی را به دست آورید که صفحات مماس بر آنها افقی باشند.

16- معادلات خط مماس و صفحه قائم بر منحنی $\begin{cases} 3x^2+y^2z=-2 \\ 2xz-x^2y=3 \end{cases}$ در نقطه (1,-1,1) را پیدا کنید.

17- توابع دیفرانسیل پذیر و مشتق پذیر $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ چنانند که

$$u(1,2) = v(1,2) = 0$$

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1 \\ ye^{v-u} - \dfrac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

مطلوبست تعیین $dv(1,2)$, $du(1,2)$

18- اگر $f(x,y,r,s)=0$, $g(x,y,r,s)=0$ ثابت کنید

$$\frac{\partial y}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

19- اگر $z^3 - xz - y = 0$ نشان دهید $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{3z^2+x}{(3z^2-x)^3}$

20- اگر $u = {}^3y$, $x^5+y=t$, $x^2+y^2=t^2$ مطلوبست تعیین $\frac{du}{dt}$.

21- نشان دهید که هر صفحه مماس بر سطح $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ محورهای مختصات را در نقاطی قطع می کند که مجموع طول فواصل آن نقاط از مبداء مختصات مقداری است ثابت.

22- ثابت کنید تمام خطوط نرما بر رویه دوار $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ محور xها را قطع می کند.

23- سیمی به شکل دایره ای به شعاع واحد $x^2 + y^2 = 1$ است و طوری حرارت داده می شود که درجه حرارت آن در نقطه (x, y) برابر است با $T = x^2 + 2y^2 - x$. مطلوبست تعیین گرمترین و سردترین نقطه سیم.

24-اسکی بازی در نقطه (1,2,1) روی کوهی که دارای معدله $z = 6x - x^2 - y^2$ قرار دارد(محورzها به سمت بالا در نظر گرفته می شود، محور yهابه سمت شمال و محور xها در سمت شرق)

(a) در چه جهتی تندترین شیب وجود دارد.مقدار شیب چقدر است؟

(b) اگر اسکی باز به سمت غرب حرکت کند، به سمت بالای کوه حرکت می کندو یا به سمت پایین و با چه میزانی(نسبت به فاصله)

(c) برای برگشت به پایین کوه، اسکی باز باید در چه جهتی حرکت کند؟

25- اگر $\phi(\alpha) = \int_{\sqrt{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}} cos\alpha x^2 dx$ مطلوبست محاسبه $\frac{d\phi}{d\alpha}$

26- معادله خط مماس بر دو سطح$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$, $z = e^{x-y}$ در نقطه (1,1,1) را بیابید.

27- (a) مطلوبست تعیین ماکزیمم و مینیمم تابع $x^2 + y^2 + z^2$ با دو شرط $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$, $z = x + y$

(b) نتیجه قسمت بالا را از نظر هندسی تعبیر کنید. .

28- مطلوبست تعیین نقطه ای از سهموی $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - 2$ که نزدیکترین نقطه به (0,1,0) باشد

29- مشتق جهت دار تابع $f(x, y, z) = x^2 + 2xyz - yz^2$ در نقطه (1,1,2) در امتداد $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-3}$ را تعیین کنید.

30- صفحات $x + 2y + 3z = 0$, $2x + 3y + z = 4$ همدیگر را در روی خط مستقیمی قطع می کنند. نقطه های روی خط بیابید که کوتاهترین فاصله تا مبداء را داشته باشد.

31- صفحه $x + y - z + 1 = 0$ نیمه بالایی مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ را در یک منحنی قطع می کند. منحنی را بیابید. نقاطی را روی این منحنی مشخص کنید که فاصله آنها تا مبداء بیشترین و کمترین مقدار باشد.

32- (a) مطلوبست تعیین ماکزیمم و مینیمم تابع $x^2 + y^2 + z^2$ با دو شرط $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$, $z = x + y$.

(b) نتیجه قسمت بالا را از نظر هندسی تعبیر کنید.

33- مطلوبست تعیین ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x, y, z) = 4 - z$ از بیضی محل تلاقی $x^2 + y^2 = 8$, $x + y + z = 1$.

34- مطلوبست معادلات خط مماس و صفحه قائم بر منحنی $x = t - cost$, $y = 3 + sin2t$, $z = 1 + cost$ در $t = \frac{\pi}{2}$.

35- مشتق جهت دار $F = x^2yz^3$ در امتداد منحنی $x = e^{-u}$, $y = 2sinu + 1$, $z = u - cosu$ در نقطه P که در آن u=0 را بیابید.

36- نشان دهید که مقدار لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ در دستگاه مختصات استوانه ای با رابطه

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

داده می شود.

37- نشان دهید که در دستگاه مختصات کروی معادله لاپلاس به صورت زیر

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{cot\phi}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

است.

38- دو تابع یک متغیره G, F و تابع دو متغیره Z با معادله زیر به هم مربوطند:

$$[F(x) + G(y)]^2 e^{z(x,y)} = 2F'(x)G'(y)$$

اگر $F(x) + G(y) \neq 0$ نشان دهید که مشتق جزئی مخلوط $D_{21}Z$ هرگز صفر نمی شود.

39- اگراز معادلات $F(x, y, u, v) = 0$, $G(x, y, u, v) = 0,$ به توان y, x را به عنوان توابعی از v, u حل کرد نشان دهید:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} / \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$$

40- اگر معادلات $x = f(u, v), y = g(u, v)$ بتواند برای v, u بر حسب y, x حل شود. نشان دهید :

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 / \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

41- اگر $x = f(u, v), y = g(u, v), u = h(r, s), v = k(r, s)$ آنگاه y, x می توانند به عنوان توابعی از s, r بیان شوند، با محاسبه مستقیم نشان دهید:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \times \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)}$$

این یک حالت خاص قانون زنجیره ای برای ژاکوبین هاست.

42- فرض کنید $x > -1$. $F(x) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1},$ به کمک مشتقگیری از F مقدار انتگرال $\int_0^1 t^x (\ln(t))^x dt$ را محاسبه کنید.

43- $x > 0, y > 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-xt^2} - e^{-yt^2}}{t^2} dt,$ را محاسبه کنید.

44- در نظر بگیرید که $x>0$ ، $\int_0^\infty e^{-xt}\sin(t)\,dt,$. انتگرال های $\int_0^\infty te^{-xt}\sin(t)\,dt, \int_0^\infty t^2e^{-xt}\sin(t)\,dt$ را محاسبه کنید.

45- معادلات انتگرالی زیر را حل کنید.

$$a)\ f(x) = Cx + D + \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

$$b)\ f(x) = x + \int_0^x (x-2t)f(t)dt, \qquad c)\ f(x) = 1 + \int_0^1 (x+t)f(t)dt$$