

بسمه تعالی

سری 8 93/2/25 بخش انتگرال خط

1- اگر C منحنی بسته ساده ای باشد که از مبدا عبور نکند، مطلوبست محاسبه

$$\oint_C \frac{-y^3}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

(i) اگر C شامل مبدا نباشد.

(ii) اگر C شامل مبدا باشد.

2- مطلوبست محاسبه $\int_C \frac{1-y^2}{(1+x)^2} dx + \frac{y}{(1+x)^2} dy$ که در آن C مربعی است که از خطوط $y = \pm 1$ ، $x = \pm 1$ تشکیل شده است.

3- مطلوبست محاسبه

$$\oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right) dy, C: 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$$

4- فرض کنید C یک منحنی است که هر نقطه از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ را به هر نقطه از کره $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ وصل می کند. اگر $F = 5|r|^3 \vec{r}$ که در آن $\vec{r} = xi + yj + zk$ نشان دهید $\int_C F \cdot dr = b^5 - a^5$

5- مقادیر A ، B را چنان تعیین کنید که میدان برداری $F = AxLnzi + By^2zj + \left(\frac{x^2}{2} + y^3\right)k$ واصل بین $(1,1,1)$ تا $(2,1,2)$ باشد، مطلوبست محاسبه

$$\int_C 2xLnzdx + 3y^2zdy + \left(y^3 + \frac{x^2}{2}\right)dz$$

6- اگر C محل تلاقی $z = \ln(1+x)$ ، $y = x$ از مبدا مختصات تا نقطه $(1,1, \ln 2)$ باشد، مطلوبست محاسبه

$$\int_C (2x \sin(\pi y) - e^z) dx + (\pi x^2 \cos(\pi y) - 3e^z) dy - xe^z dz$$

8- اگر C منحنی مرزی ناحیه محصور بین $x^2 + y^2 = 1$ ، $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ باشد، انتگرال خط زیر را محاسبه کنید.

$$I = \oint_C xdy - ydx$$

9- $\int_C y^2 ds$ که در آن C سیکلوئید $(x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t))$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$

10- $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$ که در آن C دایره $x^2 + y^2 = ax$ باشد.

11- $\int_C \frac{ds}{y^2}$ که در آن C منحنی زنجیره ای $y = a \cosh \frac{x}{a}$ باشد.

12- $\int_C x^2 ds$ که در آن C دایره زیر است:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

14- $\int_C z ds$ که در آن C وسی از منحنی $y^2 = ax$ ، $x^2 + y^2 = z^2$ از نقطه $O(0,0,0)$ تا نقطه $A(a, a, a\sqrt{2})$ است.

15- مطلوبست تعیین مرکز ثقل کمان سیکلوئید $0 \leq t \leq \pi$ ، $y = a(1 - \cos t)$ ، $x = a(t - \sin t)$

16- مطلوبست مساحت محدود به هیپو سیکلوئید $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

17- اگر D ناحیه با مرز C باشد :

(a) نشان دهید گرانیکه ناحیه D از روابط زیر به دست می آید:

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \oint_C x^2 dy \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{2A} \oint_C y^2 dx$$

(b) اگر دانسته در هر نقطه D برابر با 1 باشد، نشان دهید گشتاور ماند نسبت به محور z ها برابر است با

$$I_z = \frac{1}{3} \oint_C x^3 dy - y^3 dx$$