بسمه تعالی   سری دوم   ارسال 92/11/30 تحویل 92/12/13

1- مطلوبست تعیین سری فوریه تابع $f(x)$ که به ازا جمیع مقادیر با معادلات زیر تعریف شده است:

$$i)\ f(x)=e^{x}\ ,\quad -\pi<x\le\pi,\ \ ii)\ f(x+2\pi)=f(x)$$

و نتیجه بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{2}(\pi\coth\pi-1)$$

2- اگر x بین $\pi,0$ قرار داشته باشد و λ عدد صحیح نباشد ، سری کسینوسی نیم دامنه ای نمایش تابع $\cos\lambda x$ را بیابید. سپس نشان دهید که:

$$i)\ \pi\cot\pi\lambda=\frac{1}{\lambda}+\sum_{n=1}\frac{2\lambda}{\lambda^2-n^2}$$

$$ii)\ \pi\cos\pi\lambda=\sum_{n}(-1)^n\left(\frac{1}{n+\lambda}+\frac{1}{n-1-\lambda}\right)$$

3- سری فوریه تابع $f(x)$ در بازه $(0,2\pi)$ به صورت زیر است:

$$\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

ثابت کنید که سری فوریه تابع $\int_0^x f(y)dy$ در همان بازه عبارت است از:

$$\frac{A_0}{2}+\sum(A_n\cos(nx)+B_n\sin(nx))$$

که در آن

$$A_0=2\pi a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xf(x)dx,\quad A_n=-\frac{1}{n}b_n,\quad B_n=-\frac{1}{n}a_0+\frac{1}{n}a_n$$

4- اگر به ازا $0\le x\le 2\pi$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)f(x)dx$$

5- اگر

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi<x<0\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=-\pi,0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$$

نشان دهید که به ازا $-\pi\le x\le\pi$،

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(2nx)}{n}$$

نتیجه بگیرید که اگر $0\le x\le\pi$ انگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(2nx)}{n^2}=x^2-x+S$$

که در آن

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

با قرار دادن $x=\frac{\pi}{2}$ و یا به طریق دیگری ثابت کنید $S=\frac{\pi^2}{6}$ و نتیجه بگیرید که:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(2nx)}{n^3}=\frac{1}{3}x(\pi-x)(\pi-2x),\quad 0\le x\le\pi$$

$$ii)\ \frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots.=\frac{\pi^3}{32}$$

6- تابع $f(t)$ دارای دوره π است و مقدار آن به ازای $0\le t<\frac{\pi}{2}$ برابر $sin(2t)$ و به ازا $\frac{\pi}{2}\le x<\pi$ صفر است. نشان دهید که :

$$f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}sin(2t)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(4nt)}{(2n-1)(2n+1)}$$

نتیجه بگیرید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}$$

از بسط تابع $f(t)$ ، مقدار سری :

$$\frac{sin(4t)}{1\times 2\times 3} + \frac{sin(8t)}{3\times 4\times 5} + \frac{sin(12t)}{5\times 6\times 7} + \cdots \ldots$$

را در بازه $0 \leq t \leq \pi$ به دست آورید.

7-- اگر $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right), \qquad |x| < \pi, \qquad f(x+2\pi) = f(x)$

سری تابع را بنویسید ونشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = 2, \qquad \sum_{n\ \text{فرد}}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = \frac{\pi}{2}$$