بسمه تعالی

توابع مختلط (مشتق پذیربودن- تحلیلی بودن)   تاریخ ارسال 93/2/25

1-اگر $f(z)=\begin{cases}\frac{\bar{z}^2}{z} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ **نشان دهید** $f(z)$ **در مبدا در معادلات کشی ریمان صدق می کند ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست.**

2- نشان دهید تابع $f(z)=\begin{cases}\frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ **در** $z=0$ **در معادله کشی ریمان صدق می کند . آیا** $f(z)$ **در** $z=0$ **تحلیلی است.**

3- نشان دهید تابع $f(z)=z|z|$ **هیچ جا تحلیلی نیست.**

4- تابع $f(z)=xy^2+ix^2y$ **در کجا در شرایط کشی ریمان صدق می کند، کجا مشتق پذیر است، کجا تحلیلی است؟**

5-مطلوبست تعیین فرمولهای کشی-ریمان در دستگاه مختصات قطبی.

6-در مشتق پذیری توابع زیر بررسی کنید:

$$a)\ f(z)=\frac{z}{Re(z)}\qquad b)\ f(z)=\bar{z}^2\qquad c)\ f(z)-4z+\frac{1}{z}\qquad d)\quad f(z)=Re(z)-Im(z)\qquad e)\ f(z)=Im(\frac{2z}{z+1})$$

7- در تحلیلی بودن تابع $f(z)=|z|^2$ **بررسی کنید.**

8-تابع $f(z)=\left|x^2-y^2\right|+2ixy$ **داده شده است. در مورد نقاط و نواحی که تابع در آن تحلیلی است بررسی کنید.**

9- اگر $f(z)=\begin{cases}\frac{Re(z^2)}{|z|^2} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ **الف) در پیوستگی و نا پیوستگی تابع بررسی کنید. ب) در مورد تحلیلی بودن تابع بررسی نمایید.**

10- نشان دهید توابع زیر در هیچ جا مشتق پذیر نیستند.:

$$a)\ f(z)=\bar{z},\qquad b)\ f(z)=z-\bar{z}\qquad c)\ f(z)=2x+2ixy^2\qquad d)\ f(z)=e^xe^{-iy}$$

11- با استفاده از معادلات کشی ریمان در دستگاه مختصات قطبی مشخص کنید تابع $f(z)$ **در کجا دارای مشتق است و سپس مقدار آن را بیابید.**

$$a) f(z)=\frac{1}{z},\qquad b) f(z)=x^2+iy^2\qquad c) f(z)=zIm(z)$$

12- اگر v,u **در ناحیه** R **همساز باشند ثابت کنید** $\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+i(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y})$ **در** R **تحلیلی است.**

13- فرض کنید تابع $f(z)=u+iv$ در ناحیه D تحلیلی است و $|\mathrm{f(z)}|^2=\mathrm{K}$ که در آن K عددی است ثابت. نشان دهید که $f(z)$ در ناحیه D ثابت است.

14- اگر $u(x,y)=cos(x)cosh(y)$ قسمت حقیقی تابع $f(z)=u+iv$ باشد، مطلوبست محاسبه $f'(z)$.

15- تابع زیر در کدام نقاط مشتق پذیر است؟ در صورت مشتق پذیری مشتق را محاسبه نمایید. نواحی که تابع تحلیلی است را مشخص کنید. $\mathrm{f(z)}=|3\mathrm{x}-\mathrm{y}|+\mathrm{i}|\mathrm{y}-3\mathrm{x}|$

16-اگر تابع $w=f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد به کمک مختصات قطبی نشان دهید:

$$f'(\mathrm{z})=(\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta))\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{r}}=-\frac{\sin(\theta)+\mathrm{i}\cos(\theta)}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \theta}$$

و سپس با استفاده از آن مشتق $f(z)=\sqrt{z}$ را بیابید.

17- نواحی که تابع در آن تحلیلی است را مشخص نمایید

$$f(z)=\frac{|z-1|^2}{\bar{z}-1}+|x|+i|y|$$

18- اگر $f(z)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\,\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ نشان دهید تابع در $z=0$ در معادلات کشی ریمان صدق می کند ولی در $z=0$ مشتق پذیر نیست.

19- در تحلیلی بودن و نبودن تابع $f(z)$ بررسی کنید $\quad f(z)=\frac{z^4-1}{|z^2-1|^2}$

20- تابع $f(z)=Im(\frac{2z}{z+1})$ در چه نواحی در شرایط کشی-ریمان صدق می کند. مشتق تابع را در صورت وجود بیابید.

21- کلیه توابع همساز به شکل $u=f(\frac{x^2+y^2}{2})$ را بیابید.

22- اگر $f(z)=u+iv$ تابعی تحلیلی باشد نشان دهید $\mathrm{u,v}$ جواب معادله لاپلاس هستند. در این صورت u را مزدوج همساز v گویند. آیا v هم مزدوج همساز u هست ، یا به عبارتی تابع $v+iu$ هم تابعی تحلیلی هست ؟