

بسمه تعالی

93/2/25

بخش نگاشت ها

1- نقش هر یک از منحنی های زیر را توسط نگاشت $w = z^2$ بیابید:

a) $y = -x$, b) $x = 3$, c) $y = x + 1$, d) $y^2 = x^2 + 1$

2- نقش هر یک از نواحی زیر را توسط نگاشت $w = z^2$ بیابید:

a) $|z| > 2$, b) $0 \leq y \leq 1$, c) $-\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{4}$

3- نقش هر یک از منحنی های زیر را توسط نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید:

a) $0 < x < 1, 0 < y < 1$, b) $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4}$
 c) $|z + 1| = 1$, d) $y = x - 1$, e) $x = 1$, f) $|z - 3i| = 3$

4- نقش ناحیه $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4}$ را توسط نگاشت های زیر بیابید:

a) $w = iz$, b) $w = z^2$, c) $w = iz^2$, d) $w = -iz^2$, e) $w = z^3$

5- نقش ناحیه $y > 1$ را با تبدیل $w = (1 - i)z$ بیابید.

6- نقش هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را با تبدیل $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

7- نقش هر یک از نواحی زیر را توسط تبدیل $w = e^z$ بیابید:

a) $-1 < x < 1, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, b) $0 < x < 2, 0 < y < 1$, c) $-3 < x < -2, 0 < y < \frac{\pi}{4}$

8- نقش هر یک از نواحی زیر را با نگاشت $w = \sin(z)$ بیابید:

a) $0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < 2$, b) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < 1$, c) $0 < x < 2\pi, 1 < y < 2$

9- تبدیل موبیوسی بنویسید که سه نقطه $(\infty, 1, 0) \rightarrow (0, 2 + 2i, 4)$ را بنگارد و سپس نقش ناحیه واقع در داخل دایره $|z - 2| = 2$ و خارج از دایره $|z - 1| = 1$ را تحت نگاشت فوق بیابید.

-10 تصویر نواحی زیر را تحت نگاشت $w = \frac{z-i}{z+i}$ بیابید

a) $|z + i| < 1$, b) $x > 0, y > 0, |z + i| < 2$

-11 تصویر ناحیه $y > 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ را تحت نگاشت $w = \text{Ln}(\sin(z))$ بیابید.

-12 تبدیل موبیوسی بیابید که $(0, i, \infty) \rightarrow (1, \infty, -1)$ را بنگارد. سپس تصویر ناحیه

$$D = \{x + iy: x \geq 1, y \geq 1\}$$

را تحت نگاشت $w = i \frac{z-1}{z+1}$ بیابید.

-13 تبدیل موبیوسی بیابید که $(i, \infty, 0) \rightarrow (0, 1, 1)$. سپس مبدل ناحیه $\text{Im}(z) \geq 1$

$0 < |z| \leq 1$ را تحت نگاشت $w = i \frac{z-1}{z+1}$ بیابید.

-14 مطلوبست تعیین تصویر منحنی $|z| = 3$ تحت نگاشت $w = \frac{25}{z}$.

-15 تصویر ناحیه $0 < \text{Re}(z) < 1, \text{Im}(z) > 0$ را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

-16 تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ تصویر منحنی ها یا نواحی زیر را بیابید:

a) $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$, b) $|z| = 1, \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \pi$, c) $2 \leq x \leq 4, y = 0$,

d) $-2 < y < -1, x = 0$, e) $0 < \text{Re}(z) < 1$

-17 تبدیل دو خطی بنویسید که نقاط $z_3 = -1, z_2 = i, z_1 = 1$ را بترتیب روی نقاط

$$w_3 = 1, w_2 = 0, w_1 = -1$$

-18 مطلوبست تعیین تبدیل دوخطی که الف) نقاط $1, 0, -1$ را به ترتیب روی

$$1, 1, 0 \rightarrow 0, 1, \infty$$
 تصویر کند. ب) نقاط $1, 0, \infty$ ترتیب روی $0, 1, \infty$ تصویر نماید.

-19 تصویر ناحیه محدود به حلقه $1 < |z| < 2$ را تحت نگاشت $w = \frac{z+1}{z+2}$ بیابید.

-20 تابع تحلیلی $w = f(z)$ بیابید که ناحیه $1 \leq y \leq x + 1$ را روی ناحیه محدود به

$$|w| = 1$$
 دایره واحد را بنگارد.

-21 نقش ناحیه $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y \leq 0$ را تحت نگاشت $w = \sin^2 z$ بیابید.

-22 تبدیل موبیوسی بنویسید که $(\infty, 1, 2) \rightarrow (i, \infty, 0)$ و سپس با تبدیل $w = \frac{z-2i}{z-i}$ مبدل

$$D = \{z ||z| \leq 1, \text{Re}z \geq 0\}$$
 ناحیه را بیابید.

-23 تبدیل موبیوسی بنویسید که $(0, 1, \infty) \rightarrow (-1, \infty, 1)$. سپس مبدل ناحیه

$$D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, |z| \leq 1\}$$

را توسط آن بیابید.

- 24- تبدیل موبیوسی بنویسید که ناحیه $-\pi \leq \theta \leq -\frac{3\pi}{4}$ را روی دایره واحد بنگارد.
- 25- تبدیل موبیوسی بنویسید که $(0,1,i) \rightarrow (1,\infty,-i)$. سپس نقش ناحیه $D = \{x + iy | x > 1, y > -1\}$ را تحت نگاشت $w = \frac{z-1}{z-1+2i}$ بیابید.
- 26- نقش ناحیه $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$ را تحت نگاشت $w = iz^2 + 1$ بیابید.
- 27- تبدیل موبیوسی بنویسید که سه نقطه $(\infty, 1, 0) \rightarrow (0, 2 + 2i, 4)$ را بنگارد و سپس نقش ناحیه واقع در داخل دایره $|z - 2| = 2$ و خارج از دایره $|z - 1| = 1$ را تحت نگاشت فوق بیابید.
- 28- نقش ناحیه $|x| \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0$ را تحت نگاشت $w = \ln(\sin(z))$ بیابید.
- 29- تبدیل موبیوسی بنویسید که $(-1, \frac{1}{3}, 1) \rightarrow (0, 2, \infty)$. سپس مبدل ناحیه زیر را تحت آن نگاشت بیابید. $D = \{z | 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}\}$.
- 30- تصویر ناحیه $1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 4$ را تحت نگاشت $w = ie^z$ را بیابید.
- 31- تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت $w = z^2$ به دست آورید:
- $$D = \left\{ (x, y) \mid y \geq 0, xy \leq \frac{\pi}{2}, x^2 - y^2 \leq \pi, x \geq y \right\}$$
- 32- تصویر ناحیه $0 \leq \arg(z) \leq \pi, 1 \leq |z| \leq e^{\frac{\pi}{2}}$ را تحت نگاشت $w = \operatorname{Ln}(\sin(z))$ بیابید.
- 33- تصویر نوار $1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2, |x| \leq \frac{\pi}{4}$ را تحت نگاشت $w = \sinh(z)$ بیابید.
- 34- تبدیل ناحیه $|z| < 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0$ را تحت نگاشت $w = i \frac{1-z}{1+z}$ بیابید.
- 35- مطلوبست تصویر نواحی زیر تحت نگاشت $w = \frac{z-i}{z+i}$
- 36- الف) نقاط داخلی دایره ای به مرکز $-i$ ناحیه $|z + i| < 2, x > 0, y > 0$ تبدیل موبیوسی بنویسید تا $(0,1,i) \rightarrow (1,\infty,-1)$. سپس تبدیل خط $x + y = 1$ را تحت این نگاشت را بیابید.
- 37- تبدیل موبیوسی بیابید که $(0,1,\infty) \rightarrow (-1,\infty,a)$. سپس مبدل ناحیه زیر را به از $a = 1$ به دست آورید:
- $$D: x > 0, y > 0, |z| < 1$$
- 38- تصویر ناحیه $D = \{x + iy | x \geq 0, |y| \leq 1\}$ را تحت نگاشت $w = (1 + i) \sin(\pi iz)$ بیابید.
- 39- نگاشت موبیوسی بنویسید تا $(0, \infty, -i) \rightarrow (1, i, 0)$. سپس مبدل ناحیه

نگاشت $w = \frac{z-1}{z-i}$ را تحت نگاشت $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$ بیابید.

-40 نگاشتی بیابید تا نوار تیم متناهی $D = \{z: 0 \leq x, |y| \leq \frac{1}{2}\}$ را درون دایره واحد

بنگارد.

-41 الف) نشان دهید که تابع $w = \sin(z)$ در $x = \frac{\pi}{2}$ هم‌مدیس نیست. نقش $y = 0$ را تحت

این نگاشت مشخص کرده و آن را رسم کنید. ب) نقش ناحیه بین خطوط $y = -2, y = \pm x$

را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ مشخص و رسم کنید.