فصل چهارم : انتگرال دوگانه

معرفی مبحث:

در این مبحث با انتگرال های دو گانه آشنا خواهیم شد.

پس از تعریف ، کاربرد ها و خواص انتگرال دو گانه ، نحوه محاسبه با استفاده از انتگرال های مکرر توضیح داده می شود. سپس اندکی درباره مختصات قطبی و رابطه آن با مختصات کارتزین و نحوه رسم منحنی های قطبی خواهیم آموخت. بعد از آن روش تغییر ترتیب انتگرالگیری ارائه می گردد.گاه لازم است برای ساده تر شدن محاسبات انتگرال دوگانه ، از تغییر متغیر استفاده شود. بدین منظور روش کلی تغییر متغیر و تغییر دستگاه کارتزین به قطبی توضیح داده خواهد شد.

هنگام ارائه بعضی از مباحث ، سوالاتی مطرح خواهیم کرد . هدف از ارائه این سوالات ، ایجاد انگیزه برای یادگیری مبحث بعدی ، یا تفکر و تعمیق مطالب قبلی است. در این فصل نیز بر حل تمرینات بیشتر تاکید می گردد.

از شما انتظار می رود در پایان این مبحث بر موارد زیر مسلط باشید:

- رسم حجم های مشخص شده در مسئله
- تعیین حدود انتگرال های مکرر
- محاسبه انتگرال های دو گانه
- تغییر ترتیب انتگرال گیری
- استفاده از روش تغییر متغیرکلی
- حل انتگرال دو گانه در دستگاه مختصات قطبی

یادآوری انتگرال یگانه :

به یاد می آوریم که برای محاسبه سطح واقع در زیر منحنی $y = f(x)$ محدود به محور x ها و خطوط $x = a, x = b$به صورت زیر عمل می کردیم.

ابتدا فاصله $[a, b]$ را به n قسمت تقسیم می کنیم به این عمل اِفراز کردن بازه گویند. اگر این اِفراز را P بنامیم آن را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$$

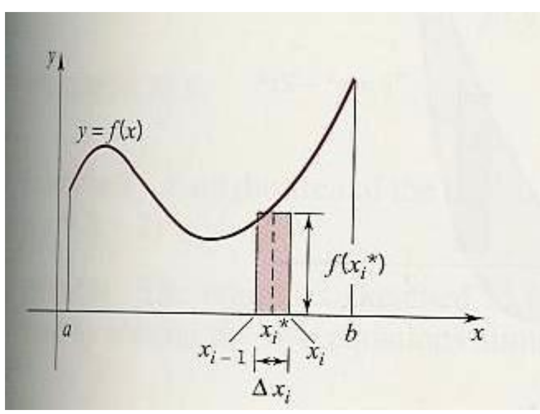
$$a = x_0 < x_0 < \cdots < x_{i-1} < x_i \dots < x_n = b$$

در فاصله بازه نمونه $[x_{i-1}, x_i]$، یک نقطه نمونه x_{i}^* انتخاب می نماییم. اکنون روی این ناحیه نمونه مستطیلی به بلندی $f(x_{\mathrm{i}}^*)$ و پهنای $\Delta_i x$ می سازیم. مساحت این مستطیل برابر است.

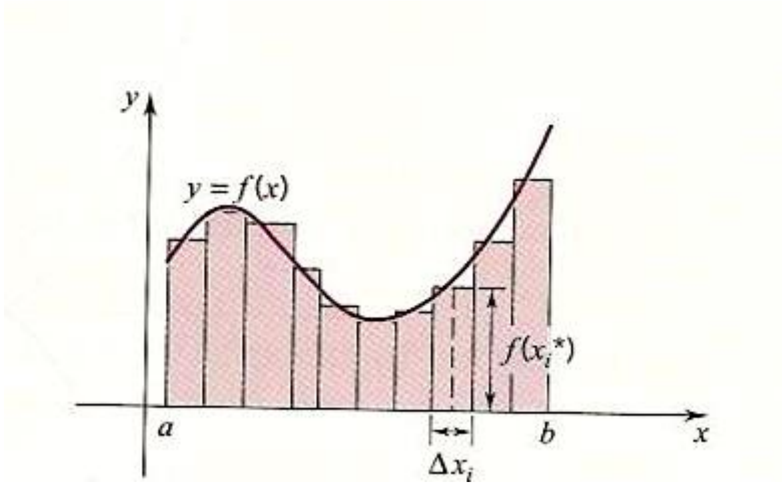
$$\Delta_i A = \Delta_i x * f(x_{\mathrm{i}}^*)$$

در فاصله [a,b] تعداد n مستطیل جزئی وجود دارد و در نتیجه مجموع این مساحت ها برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \Delta_i A = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \Delta_i x_{\mathrm{i}}^* f(x_{\mathrm{i}}^*)$$



شکل 1



شکل 2

ملاحظه می شود که بین مساحت مطلوب سطح زیر منحنی و مجموع مساحت های مستطیل های جزئی اختلاف وجود دارد.

اما اگر تعداد نقاط تقسیم بیشتر شود و در نتیجه فاصله بین نقاط تقسیم کمتر شود مساحت محاسبه شده به مساحت مورد نظر نزدیکتر میشود. کوچک کردن فواصل جزئی را اصطلاحا ظریف کردن افراز گویند. بنابراین با ظریف کردن افراز به مساحت مطلوب نزدیک میشویم.((توجه داشته باشیم که نُرم افراز به معنی بزرگترین طول فواصل جزئی می باشد.نرم افراز را به علامت $||P||$)نشان می دهند.) پس اگر از مجموع هایی که به دست آوردیم حد گیری کنیم وقتی نرم افراز به سمت صفر میل میکند و این حد موجود باشد و به انتخاب نقطه x_{i}^{*} هم بستگی نداشته باشد این حد مساحت سطح زیر منحنی را نشان میدهد که آن را با انتگرال تابع f(x) در فاصله [a,b] نمایش می دهیم.

$$S=\int_a^{b} \mathrm{f(x)dx}$$

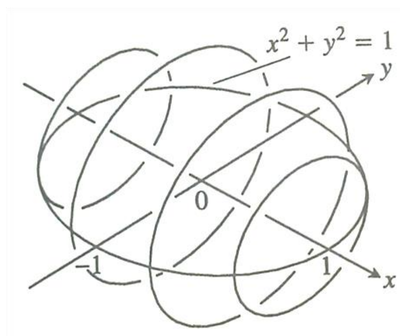
با روش مشابهی به تعریف انتگرال دوگانه می پردازیم.

تمرین:

مساحت سطح مقطع عمود بر محور x ها(A(x)) را در اجسام زیر بیابید:

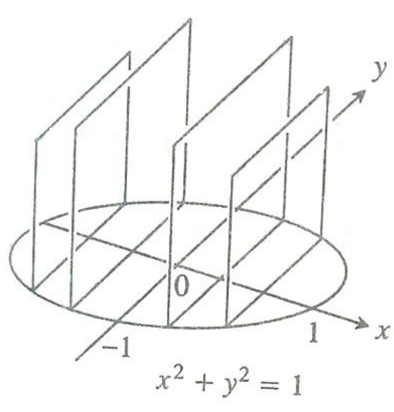
جسم بین صفحات x = -1 و x = 1 قرار دارد و تصویر جسم در صفحه xy نیم دایره های $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ است.

الف) سطح مقطع دایره هایی است که قطرشان در صفحه xy قرار دارد.



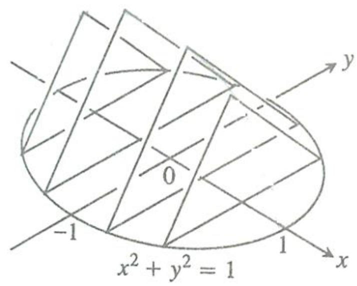
شکل 3

ب) سطح مقطع مربع هایی است که یک ضلعشان در صفحه xy قرار دارد.



شکل 4

ج) سطح مقطع مثلث های متساوی الاضلاعی است که یک ضلعشان در صفحه xy قرار دارد.

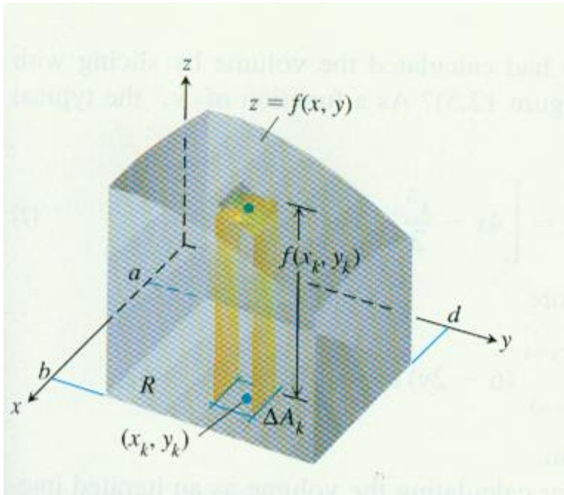


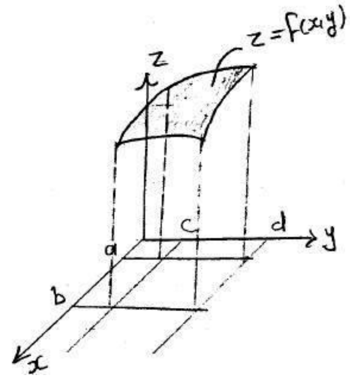
شکل 5

انتگرال دوگانه:

فرض کنیم رویه‌ی S دارای معادله $z = f(x, y)$ است. قسمتی از رویه که در بالای یک ناحیه مستطیل شکل R قرار می‌گیرد را در نظر می گیریم:

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \text{ و } c \leq y \leq d\}$$





شکل 6

هدف ، محاسبه حجم محدود از پایین به مستطیل R، از اطراف به صفحات $\mathrm{x}=\mathrm{a}$، $\mathrm{x}=\mathrm{b}$، $\mathrm{y}=\mathrm{c}$، $\mathrm{y}=\mathrm{d}$ و از بالا به رویه $\mathrm{z}=\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ است.

ابتدا ناحیه R را با رسم خطوطی به موازات محورها به نواحی جزء تقسیم می‌کنیم.

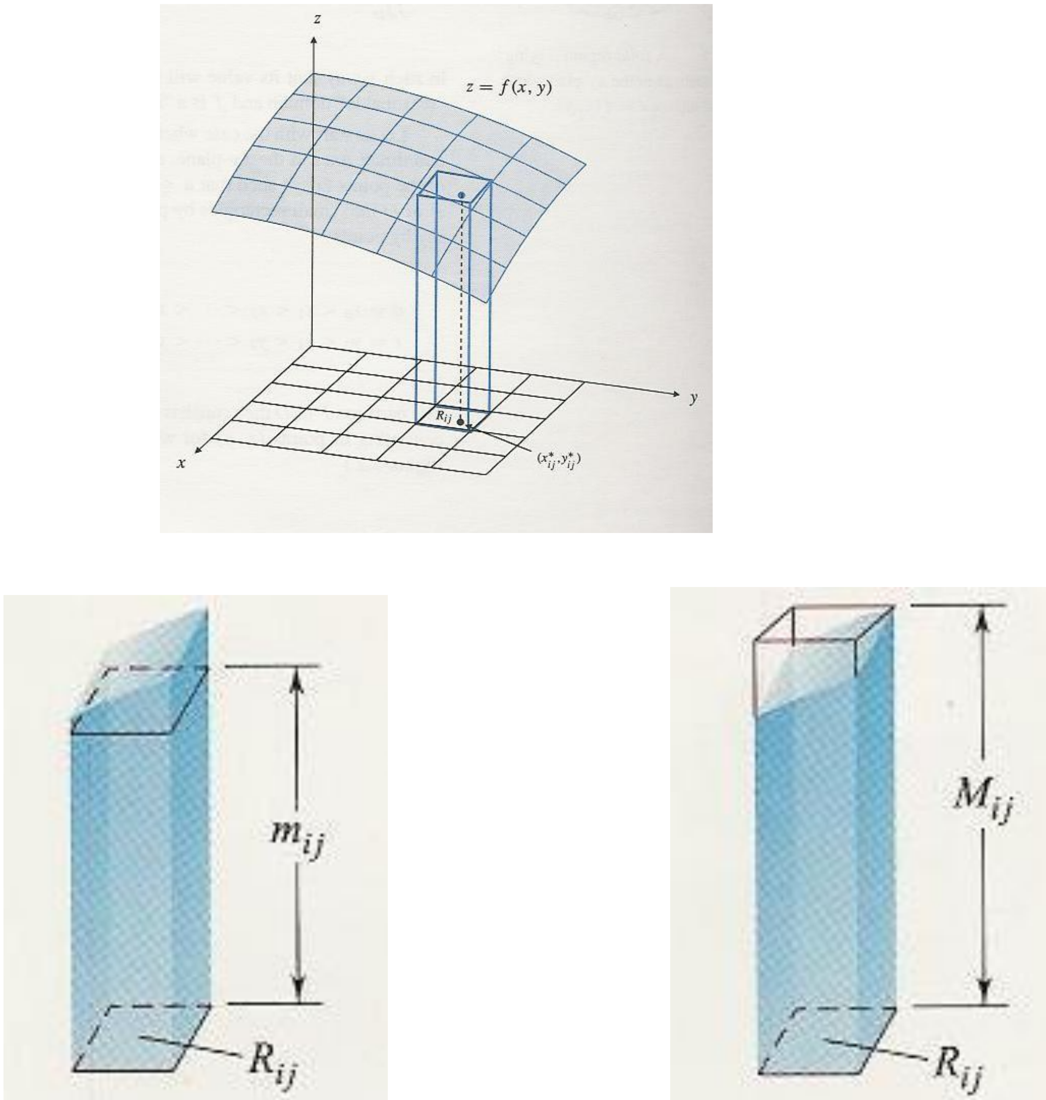
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

$$c \le y_0 < y_1 < \ldots < y_{j-1} < y_j < \ldots < y_m = d$$

بدین ترتیب در مستطیل R، تعداد $m \times n$ مستطیل جزء تشکیل می شود.

ناحیه نمونه را با طول $\Delta_j \mathrm{y} = \mathrm{y}_j - \mathrm{y}_{j-1}$ و عرض $\Delta_i \mathrm{x} = \mathrm{x}_i - \mathrm{x}_{i-1}$ انتخاب کرده و در آن یک نقطه دلخواه (x^*_{ij}, y^*_{ij}) را مشخص می‌کنیم و از آن نقطه خطی به موازات محور z ها رسم می‌کنیم تا رویه را

در نقطه P_{ij} قطع کند. در این صورت مکعب مستطیلی را در نظر بگیریدکه مساحت قاعده آن $\Delta_i x \Delta_j y$ و بلندی آن $f\ (x^*_{ij}, y^*_{ij})$ (ارتفاع نقطه P_{ij})است.



شکل 7

البته حجم این مکعب مستطیل با حجم محدود از پایین به ناحیه R_{ij} و از بالا به قسمتی از رویه واقع در بالای ناحیه نمونه R_{ij} متفاوت است.همانطور که در شکل های بالا مشاهده می شود حجم این مکعب مستطیل ، گاه از حجم زیر رویه بیشتر و گاه کمتر است. حجم این مکعب مستطیل نمونه را با ΔV_{ij} نشان می دهیم:

$$\Delta V_{ij} = \Delta_i x \Delta_j y \quad \times \; f(x^*_{ij}, y^*_{ij})$$

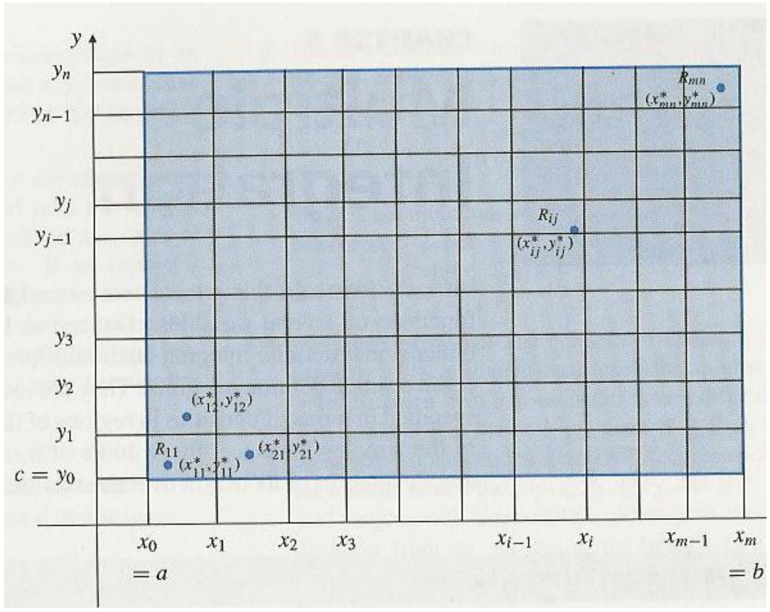
تمام این حجم‌های جزئی را با هم جمع می‌کنیم.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Delta V_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \Delta_i x \Delta_j y$$

به این مجموع ها ، مجموع ریمان تابع f بر ناحیه R می گوییم.

تعریف نُرم اِفراز نواحی دوبعدی :

ناحیه دوبعدی با رسم خطوطی به موازات محوها به مستطیل های جزء تقسیم می شود. ماکزیمم قطر مستطیل های جزء تولید شده در این اِفراز را "نُرم اِفراز" می نامند . اگر افراز را با P نشان دهیم ، نرم افراز را با نماد $\|P\|$ نشان می دهیم.



شکل 8

دقت کنیم که چون به بی‌نهایت روش می‌توان فاصله $[a,b]$ را به n قسمت و به بی‌نهایت روش فاصله [c,d] را به m قسمت تقسیم کرد، در این صورت تعداد بی‌نهایت از این مستطیل‌های جزئی می‌توانیم تولید کنیم.بنابراین بینهایت مجموع به فرم $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Delta V_{ij}$ وجود دارد.

حال اگر حد این مجموع‌ها به ازاء افرازهایی که نرم آنها به سمت صفر میل می‌کند موجود باشد و به انتخاب نقطه (x^*_{ij}, y^*_{ij}) در ناحیه نمونه بستگی نداشته باشد ، یعنی

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \Delta_i x \Delta_j y$$

موجود باشد .این حد مجموع ، حجم محدود از پایین به مستطیل R و از بالا به رویه S رانشان می‌دهد.

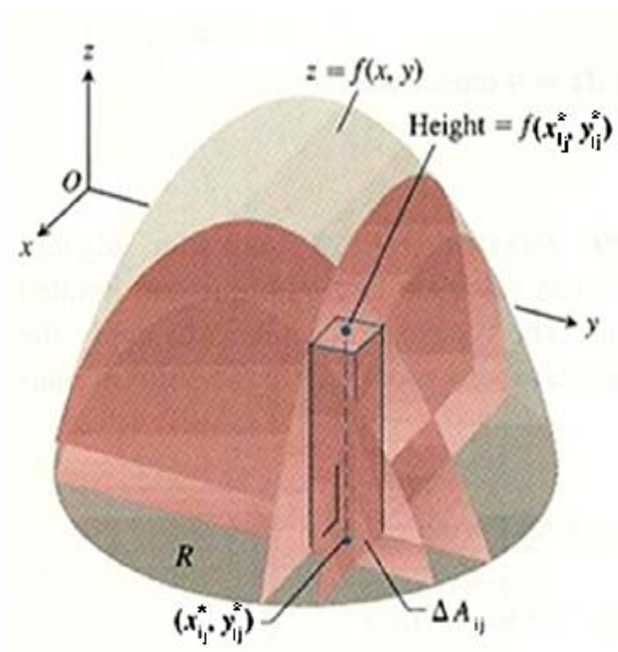
این حد مجموع ،(حد مجموع ریمان تابع $f(x, y)$ بر ناحیه R)را با انتگرال دوگانه زیر نشان می‌دهیم.

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \Delta_i x \Delta_j y = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

بنابراین می‌توان نوشت:

اگر f بر ناحیه محدود R تابعی پیوسته باشد، آنگاه حجم ناحیه محدود به رویه f و ناحیه R برابر است با:

$$V = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$



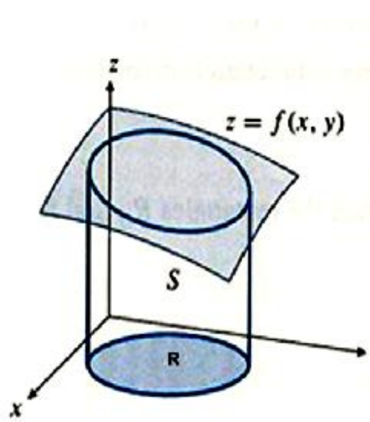
شکل 9

تابع تحت انتگرال یعنی $f(x,y)$ رویه‌ای را نشان می‌دهد که حجم از بالا به آن محدود است. R ناحیه‌ای در صفحه xy است که حجم از پایین به آن محدود است. عبارت $dx\,dy$ مساحت سطح جزئی نمونه را نشان می‌دهد. در نتیجه عبارت تحت انتگرال $f(x,y)\,dx\,dy$ در واقع حجم جزئی مکعب مستطیل را نمونه است و انتگرال دوگانه ،حد مجموع این حجم‌های جزئی می باشد.

بنابراین حجم جسمی که از پایین به ناحیه مستطیل شکل R و از بالا به رویه S محدود باشد با انتگرال تابع f(x,y) بر ناحیه R به دست خواهد آمد.

نکته :

لزومی ندارد که ناحیه R همواره به شکل مستطیل باشد. این ناحیه به هر شکلی که باشد حجم محدود از پایین به ناحیه R و از بالا به رویه S با انتگرال تابع f(x,y) بر این ناحیه محاسبه می شود.

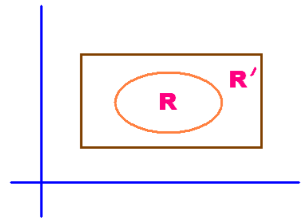


شکل 10

سوال:

اگر ناحیه R به شکل مستطیل نباشد ، آیا فرمول ها صادقند؟

اگر ناحیه R به شکل مستطیل نباشد ، ابتدا ناحیه R را در یک مستطیل R' قرار می دهیم.



شکل 11

تابع $\overline{f(x,y)}$ را بر مستطیل R' به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\overline{f(x,y)}=\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in R \\ 0 & (x,y)\in R',(x,y)\notin R \end{cases}$$

اکنون حجم جسم محدود از پایین به ناحیه مستطیل شکل R' و از بالا به رویه $\overline{f(x,y)}$ را مطابق بحث قبلی محاسبه می کنیم.

آیا این حجم با حجم محدود از پایین به ناحیه R و از بالا به رویه $f(x,y)$ تفاوت دارد؟

مشخص است که چون در نقاط خارج از ناحیه R و داخل R' تابع $\overline{f(x,y)}$ برابر با صفر تعریف شده ، این دو حجم با هم مساوی هستند. بنابراین می توان نوشت:

$$V=\iint \overline{f(x,y)}dxdy=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\overline{f}(x^*{}_{ij},y^*{}_{ij})\Delta_i x\Delta_j y$$

$$=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(x^*{}_{ij},y^*{}_{ij})\Delta_i x\Delta_j y=\iint f(x,y)dxdy$$

کاربردهای انتگرال دوگانه:

انتگرال های دوگانه در محاسبه بسیاری از ویژگی های فیزیکی اجسام کاربرد دارند. خوب است در این جا با تعدادی از این کاربردها آشنا شویم:

1- محاسبه حجم:

$$V=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

2- محاسبه مساحت قاعده :

اگر $f(x,y)=1$، در واقع حجمی به دست می‌آید که قاعده آن ناحیه R و ارتفاع آن برابر یک است. در واقع مقدار عددی این حجم با مساحت قاعده برابر است.

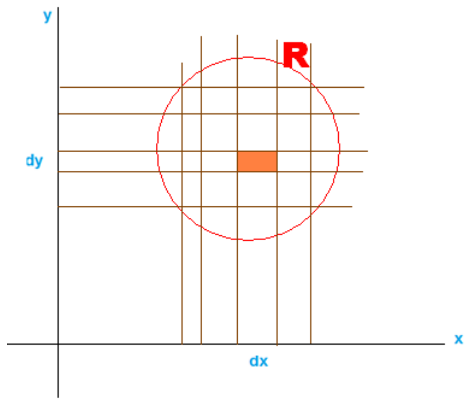
$$A=\iint_R dx\,dy$$

3-محاسبه جرم ورقه ناهمگن:

ورقه ناهمگن ورقه ای است که چگالی آن در تمام نقاط ثابت نیست. چگالی یکی از خواص فیزیکی مهم است که ماده ای را از ماده دیگر متمایز می کند. در شرایط فیزیکی یکسان ، نمونه ای از یک ماده معین جرمی دارد که مستقیما متناسب با حجم آن است . نسبت جرم ماده به حجم آن را چگالی می نامند.برای محاسبه جرم یک ورقه همگن با چگالی ثابت می توان نوشت:

مساحت ورقه × چگالی= جرم کل ورقه

اگر R را ورقه‌ای ناهمگن در نظر بگیریم که چگالی سطحی در هر نقطه (x, y) آن برابر با $\rho(x,y)$ باشد، در این صورت حاصل‌ضرب چگالی سطحی در سطح جزئی آن یعنی $\rho(x,y)\,dx\,dy$ جرم جزئی را نتیجه می‌دهد:



شکل 12

جرم کلی ورقه ناهمگن برابر حد مجموع این جرم‌های جزئی است:

$$M = \iint_R \rho(x,y)\,dx\,dy$$

4- گشتاورهای جرم نسبت به محورها

$$M_x = \iint_R y\rho(x,y)\,dx\,dy \quad \text{و} \quad M_y = \iint_R x\rho(x,y)\,dx\,dy$$

فرض کنید جرم های m_1, m_2, m_3 روی محور x حول تکیه گاه o واقع شده اند.

شکل 13

بسته به اندازه جرم ها و چگونگی قرار گرفتن روی محور ،ممکن است سیستم در حالت تعادل قرار داشته باشد و یا نامتعادل باشد. جاذبه زمین به هر یک از این جرم ها نیرویی به طرف پایین وارد می کند. این نیروها موجب چرخش محور حول تکیه گاه می شود بطوریکه می تواند محور را مانند الاکلنگی به بالا یا پایین ببرد. این اثر چرخشی گشتاور جرم نامیده می شود.

5- مرکز جرم ورقه ناهمگن

بسیاری از سیستم های مکانیکی به گونه ای رفتار می کنند گویا همه جرم آن ها در یک نقطه متمرکز شده است.این نقطه به نام مرکز جرم نامیده می شود. تعیین محل این نقطه از مباحث مهم می باشد.مرکز جرم یک جفت ذره با جرم مساوی نقطه ای است واقع در میان خط واصل دو ذره.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

6- گشتاورهای ماند نسبت به محورها

$$I_y = \iint_R x^2 \rho(x,y)\, dx\, dy \quad \text{و} \quad I_x = \iint_R y^2 \rho(x,y)\, dx\, dy$$

تجربه نشان می دهد که می توان جسمی را به کمک نیرو به دوران واداشت. برای مثال نیرویی که به طور مماسی بر محیط چرخی وارد شود می تواند چرخ را به گردش در آورد. توانایی نیرو در ایجاد دوران را گشتاور ماند می نامند. در واقع اگر جسمی به شکل یک محور استوانه ای داشته باشیم ، مطلوبست بدانیم چه مقدار انرژی لازم است تا این محور با سرعت مشخصی بچرخد. در اینجا مفهومی به نام گشتاور ماند مطرح می گردد که با این چرخش زاویه ای مربوط است.

7- گشتاور نسبت به مبدأ

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dx\, dy$$

خواص انتگرال های دو گانه

اگر $\boldsymbol{G = g(x, y)}$ $\quad$ $\boldsymbol{F = f(x, y)},$ توابعی پیوسته روی ناحیه D باشند آنگاه

1- $$\iint_D kF(x, y)dA = k\iint_D F(x, y)dA$$

k یک عدد دلخواه است.

2- مجموع و تفاضل

$$\iint_D (F \pm G)dA = \iint_D FdA \pm \iint_D GdA$$

3-

$$\iint_D G\,dA \geq 0 \qquad if \quad F \geq 0 \quad on \quad D$$

-4

$$\iint_D F\,dA \geq \iint_D G\,dA \qquad if \quad F \geq G \quad on \quad D$$

5-اگر ناحیه انتگرالگیری به چند ناحیه تقسیم شود

$$D = D_1 + D_2 + \cdots \ldots + D_n$$

$$\iint_D F\,dA = \iint_{D_1} F\,dA + \iint_{D_2} F\,dA + \ldots + \iint_{D_n} F\,dA$$

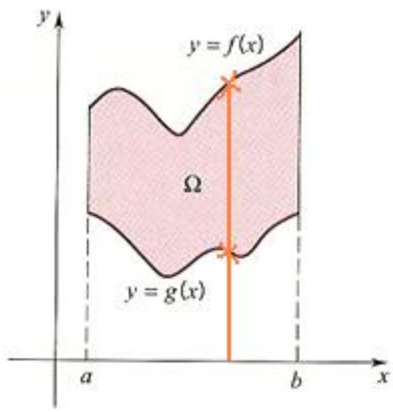
محاسبه انتگرال دوگانه :

محاسبه انتگرال دوگانه $f(x,y)$ با استفاده مستقیم از تعریف آسان نیست. در این جا می خواهیم روشی برای محاسبه انتگرال دوگانه تابع دومتغیره $f(x,y)$ ارائه دهیم.

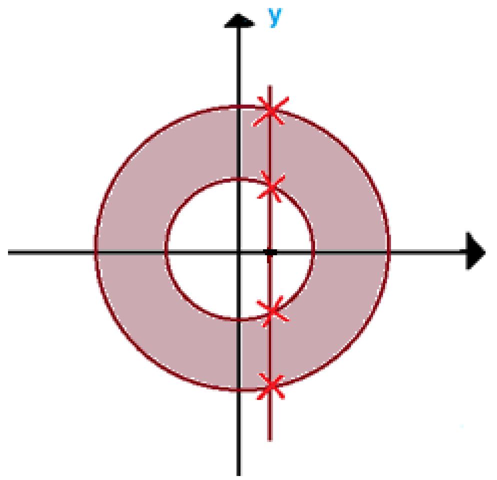
برای محاسبه انتگرال دوگانه ، لازم است ناحیه R به صورت منظم تعریف شده باشد. بنابراین ابتدا به تعریف ناحیه منظم می پردازیم

ناحیه منظم در امتداد محور y ها:

اگر خطی به موازات محور y **ها** رسم شود و از نقاط داخلی ناحیه عبور کند و مرز ناحیه را در دو نقطه قطع نماید، در این صورت می گوییم این ناحیه در امتداد محور y ها منظم است.



شکل 14



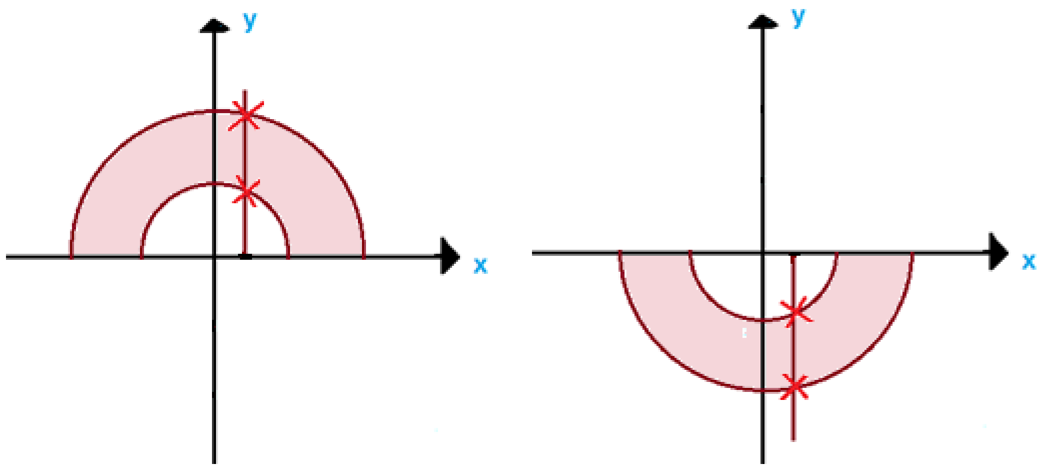
شکل 15

در شکل شماره (14) ناحیه ای منظم و در شکل شماره (15) ناحیه ای نامنظم در امتداد محور y ها نشان داده شده است.

سوال:

چگونه می توان ناحیه شماره (2) را منظم کرد؟

اگر توسط محور x ها ناحیه را به دو قسمت تقسیم کنیم نواحی زیر به دست می آیند:

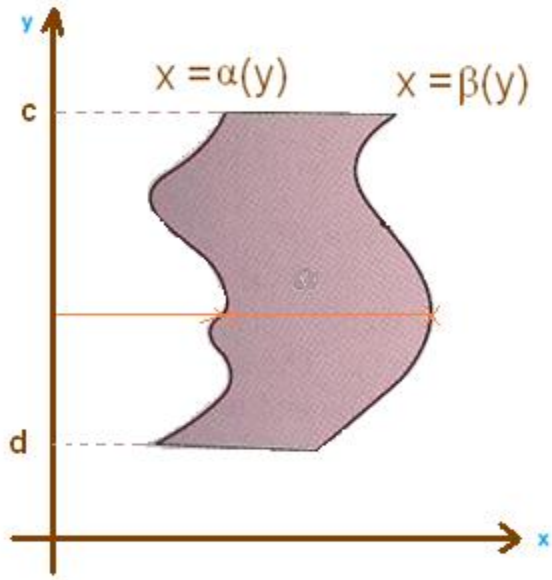


شکل 16

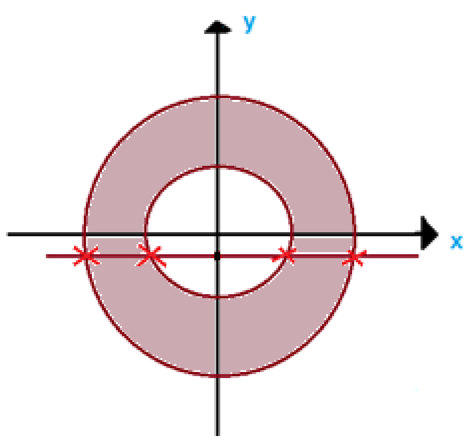
اکنون هر یک از نواحی به دست آمده در امتداد محور y ها منظم هستند.

<u>ناحیه منظم در امتداد محورx ها:</u>

اگر خطی به موازات محور x ها رسم شود و از نقاط داخلی ناحیه عبور کند و مرز ناحیه را در دو نقطه قطع نماید ، در این صورت می گوییم این ناحیه در امتداد محور x ها منظم است.



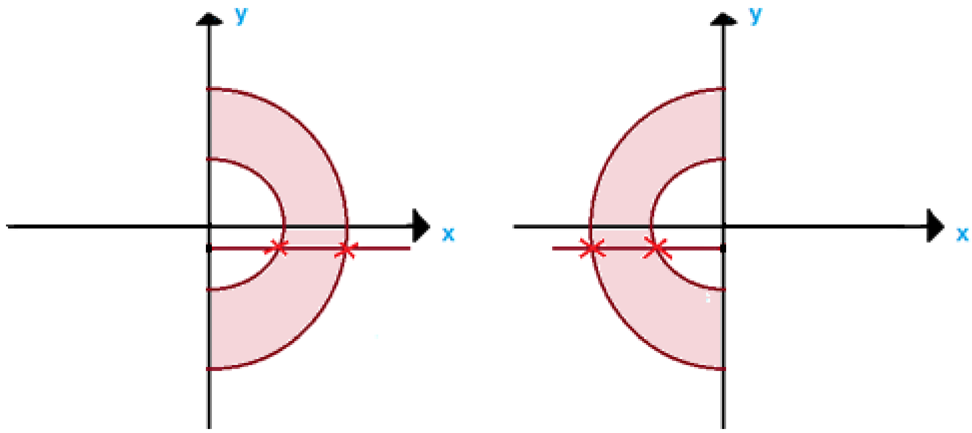
شکل 17



شکل 18

در شکل شماره (17) ناحیه ای منظم و در شکل شماره (18) ناحیه ای نامنظم در امتداد محور x ها نشان داده شده است.

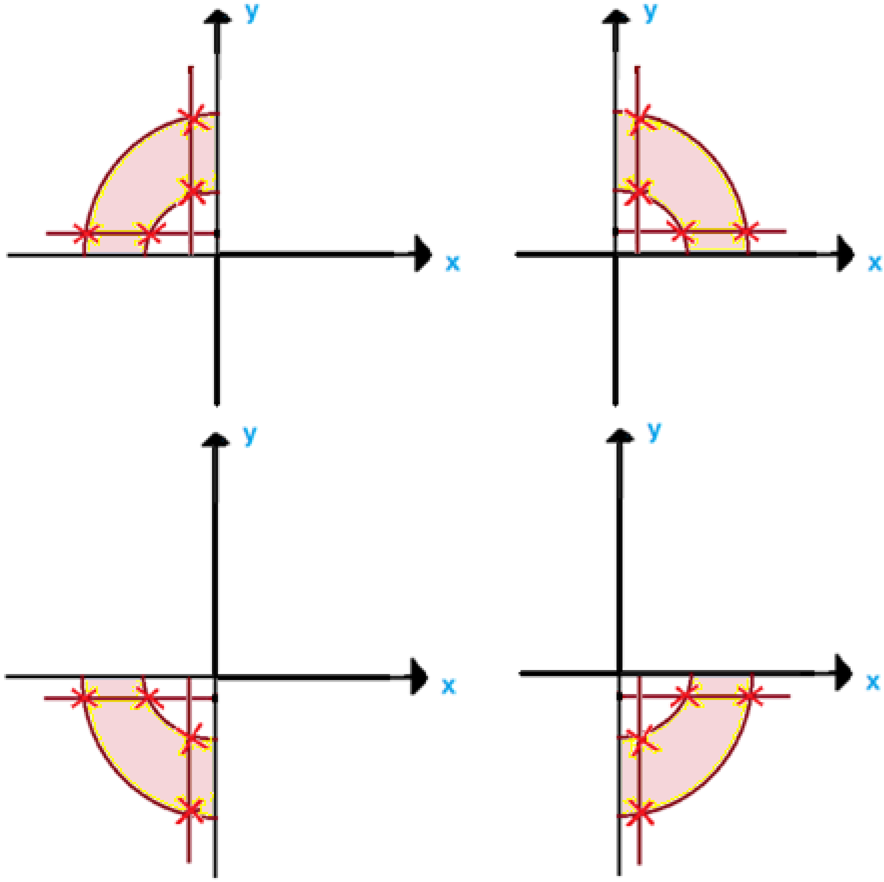
اکنون اگر توسط محور y ها ناحیه را به دو قسمت تقسیم کنیم نواحی زیر به دست می آیند:



شکل19

هر یک از نواحی به دست آمده در امتداد محور x ها منظم هستند.

بنابراین ناحیه نامنظم را می‌توان با رسم خطوطی به موازات محورها به نواحی منظم تبدیل کرد. اگر هر دو محور را در نظر بگیریم این ناحیه به 4 ناحیه جزء تقسیم می‌شود که در امتداد هر دو محور منظم هستند.



شکل 20

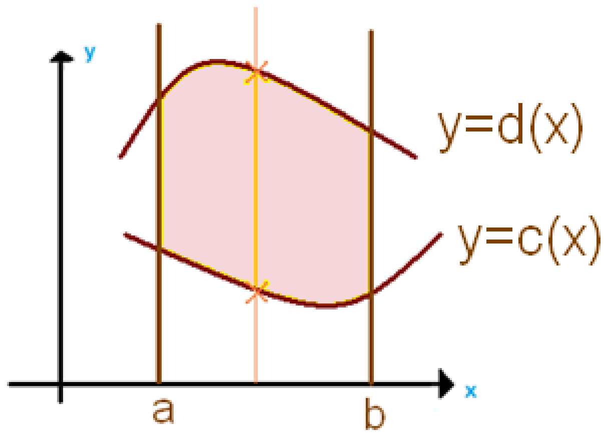
بنابراین می‌توان در هر حال ناحیه مورد نظر را در امتداد محورها منظم فرض کرد، در صورت نامنظم بودن ، ناحیه را به نواحی جزء منظم تقسیم می‌کنیم. در این صورت اگر $R = R_{۱} + R_{۲} + \ldots + R_n$ که هر R_i ناحیه‌ای منظم است، خواهیم داشت:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{Ri} f(x,y)\,dx\,dy$$

اکنون فرض کنیم R ناحیه‌ای منظم است.به دو صورت می توانیم ناحیه R را نشان دهیم:

1- با استفاده از منظم بودن در امتداد محور y ها

در این صورت ناحیه را به صورت زیر فرض می کنیم:



شکل 21

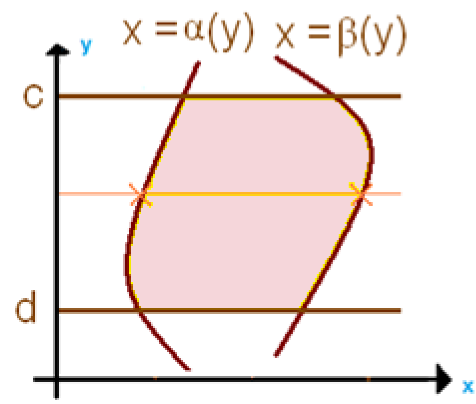
چون ناحیه ،ناحیه ای منظم در امتداد محور y ها می باشد ، بنابراین ابتدا تغییرات x را از روی ناحیه تعیین می کنیم ، یعنی حداقل و حداکثر x را که بین دو مقدار ثابت است مشخص می کنیم.$a \le x \le b$

سپس نقطه x ثابتی بین a و bدر نظر گرفته و از این نقطه خطی به موازات محور y ها رسم می کنیم. از روی شکل مشخص است که حداقل و حداکثر y ، ارتفاع نقطه ، بین منحنی $c(x)$ (مرز پایینی ناحیه) و منحنی $d(x)$ (مرز بالایی ناحیه) تغییر می کند. یعنی

$a \le x \le b$ و $c(x) \le y \le d(x)$

2- با استفاده از منظم بودن در امتداد محور x ها

در این صورت ناحیه را به صورت زیر فرض می کنیم:



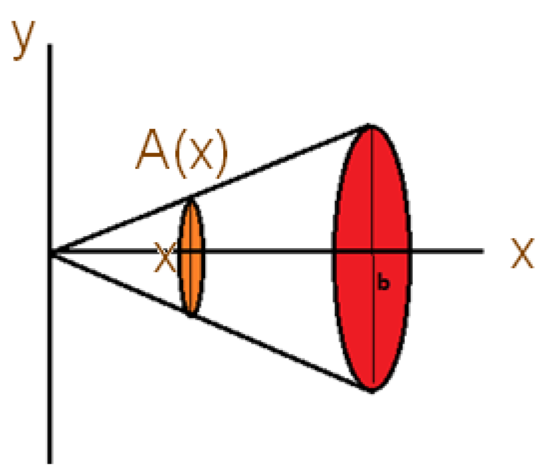
شکل22

چون ناحیه ناحیه ای منظم در امتداد محور x ها می باشد . بنابراین ابتدا تغییرات y را از روی ناحیه تعیین می کنیم ، یعنی حداقل و حداکثر y را که بین دو مقدار ثابت است مشخص می کنیم. $c \le y \le d$

سپس نقطه ثابتی بین c و d در نظر گرفته و از این نقطه خطی به موازات محور x ها رسم می کنیم. از روی شکل مشخص است که حداقل و حداکثر x ، بین منحنی $x = \alpha(y)$ (مرز سمت چپ ناحیه) و منحنی $x = \beta(y)$ (مرز سمت راست ناحیه) تغییر می کند. یعنی

$\alpha(y) \le x \le \beta(y) \qquad c \le y \le d$

اکنون به محاسبه انتگرال دوگانه می‌پردازیم. برای این منظور از یکی از کاربردهای انتگرال یگانه استفاده می‌کنیم.به خاطر می آوریم در انتگرال‌های توابع یک‌متغیره بادانستن سطح مقطع عمود بر یک محور می‌توانیم حجم جسم را به دست آوریم.



شکل 23

اگر سطح مقطع برابر $A(x)$ باشد، آنگاه حجم جسم از رابطه زیر به دست می آید:

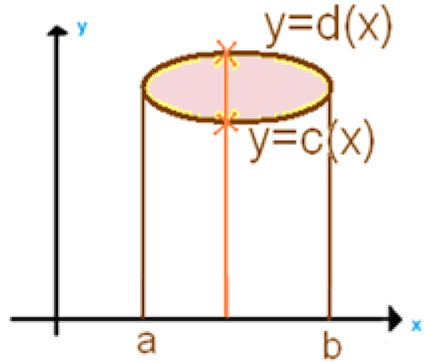
$$V = \int_{\cdot}^{b} A(x)dx$$

از این خاصیت برای محاسبه انتگرال دوگانه که حجم جسم را محاسبه می‌کند استفاده می‌کنیم.

محاسبه انتگرال دوگانه:

الف) ناحیه در امتداد محور y ها منظم است

اگر ناحیه R، ناحیه ای منظم در امتداد محور y ها باشد آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:



شکل 24

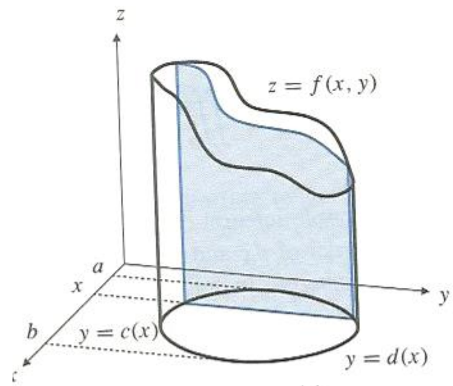
$$a \le x \le b \quad و \quad c(x) \le y \le d(x)$$

محاسبه انتگرال دوگانه:

طبق تعریف حجم جسم محدود از پایین به ناحیه R ، از بالا به رویه $z = f(x,y)$ و از اطراف به رویه استوانه ای گذرنده از مرز ناحیه R با انتگرال دوگانه

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

به دست می آید. برای محاسبه این انتگرال ، یا محاسبه حجم جسم ، از کاربرد انتگرال یگانه (که در بالا توضیح داده شد) استفاده می کنیم.



شکل 25

بدین منظور صفحه x ثابتی را همانطور که در شکل دیده می شود ، رسم می کنیم. سطح مقطع این صفحه ثابت با جسم سایه زده شده است. مساحت این سطح مقطع را با $A(x)$ نشان می دهیم. در صورتی که مقدار $A(x)$ مشخص باشد ، طبق کاربرد انتگرال می توانیم حجم را براساس فرمول زیر به دست آوریم:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

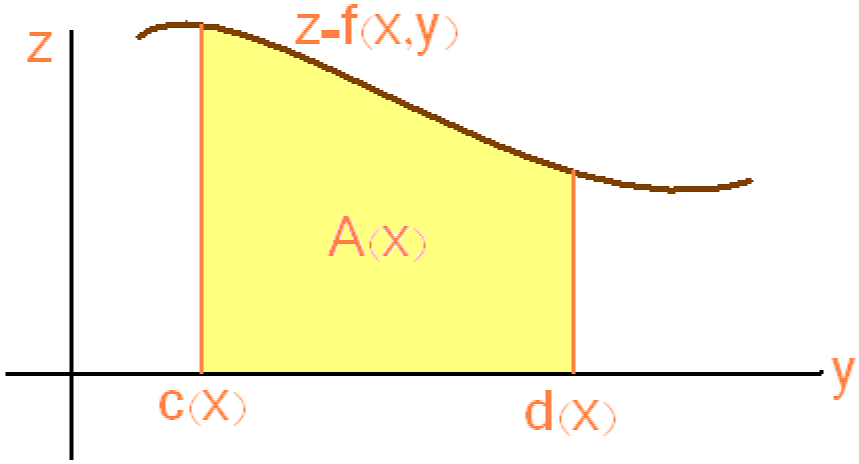
بنابراین لازم است سطح مقطع $A(x)$ را محاسبه کنیم. اما این مساحت چگونه قابل محاسبه است؟

دقت کنید که $A(x)$ سطح زیر منحنی محل تلاقی صفحه x ثابت با رویه $z = f(x, y)$ است.

این منحنی در فضای سه بعدی ، به عنوان محل تلاقی دو رویه نشان داده می شود

$$c : \begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x \ \text{ثابت} \end{cases}$$

بنابراین در این منحنی **x** تغییر نمی کند و فقط **y** متغیر منحنی است.



شکل 26

بنابراین

$$A(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy$$

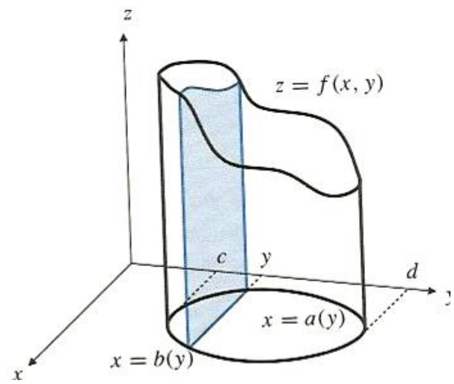
$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy]dx$$

$$=\int_a^b\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dydx$$

<u>ب) ناحیه در امتداد محورx ها منظم است</u>

به همین ترتیب اگر از منظم بودن در امتداد محور x ها استفاده کنیم ، ناحیه به صورت زیر تعریف می شود:

$\alpha(y) \le x \le \beta(y) \qquad c \le y \le d$



شکل 27

حال اگر در فاصله $[c,d]$ ، y ثابتی در نظر بگیریم و از این نقطه صفحه ای بر محور y ها عمود کنیم، سطح مقطع این صفحه y ثابت با جسم را با $A(y)$ نشان می دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d [\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx]dy$$

$$= \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dxdy$$

نتایج به دست آمده را مرور می کنیم:

استفاده از منظم بودن در امتداد محورy ها $V = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dydx$

استفاده از منظم بودن در امتداد محورx ها $V = \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dxdy$

به این انتگرال ها ، انتگرال های مکرر برای محاسبه انتگرال دوگانه گویند.

در این دو فرمول دقت کنید که جای dx و dy عوض شده‌اند. گفته می‌شود که ترتیب انتگرال‌گیری تغییر می‌کند. البته تغییر ترتیب انتگرالگیری به این معنی نیست که در انتگرال های مکرر فقط جای dx و dy با هم عوض شوند. در این باره بعدا بیشتر توضیح خواهیم داد.

تمرین:

تمرینات زیر برای کسب مهارت بیشتر دررسم حجم ها و آمادگی برای محاسبه انتگرال های دو گانه طراحی شده است:

1- مطلوبست رسم حجم محدود به صفحات $y=-۱ \quad , x=۱ \quad , z=۰$ و رویه استوانه ای $z=y^۲$

2- مطلوبست رسم ناحیه محدود به رویه استوانه ای $z=y^۲$ و صفحات

$$y=-۱ \quad , y=۱ \quad , x=۱ \quad , x=۰ \quad , z=۰$$

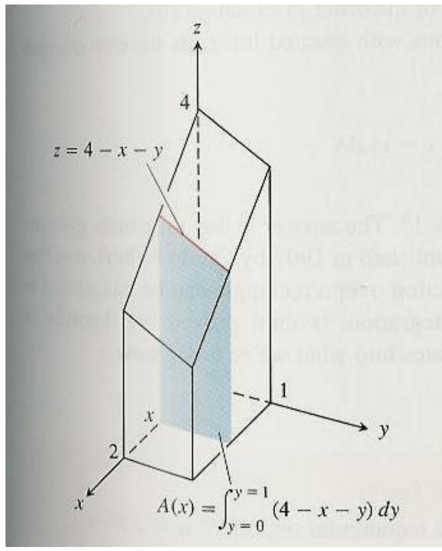
3- حجم واقع در ربع اول مختصات محدود به صفحات $y+۲z=۲ \quad , \quad x+z=۱$ را رسم کنید:

4- حجم محدود به صفحات مختصات و صفحه $y+z=۲$ و رویه استوانه ای $z=۴-y^۲$ را رسم کنید:

5- حجم محدود به استوانه $x^۲+y^۲=۱$ و صفحات $z=-y \quad , \quad z=۰$ را رسم کنید:

جدول مرجع انتگرالگیری در قسمت خلاصه در پایان این فصل آمده است.

مثال: حجم جسم محدود به صفحه $z = ۴ - x - y$ و از پایین به مربع $0 \le x \le 2$ $0 \le y \le 1$ واقع در صفحه xyرا بیابید:



شکل 28

ناحیه R مربعی است که هم در امتداد محور x ها و هم در امتداد محور y ها منظم است. با توجه به شکل شماره (1) اگر از منظم بودن در امتداد محور x ها استفاده کنیم، ابتدا تغییرات y را بین دو مقدار ثابت در نظر می‌گیریم: $0 \le y \le 1$

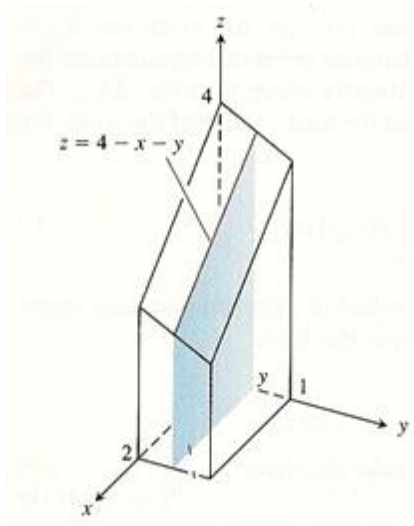
و سپس یک y ثابت انتخاب می‌کنیم، خطی به موازات محور x ها رسم می‌کنیم و تغییرات x را روی این خط مشخص می‌کنیم: $0 \le x \le 2$

بدین ترتیب ناحیه Rبه صورت زیر مشخص می شود:

$$\begin{cases} ۰ \le y \le ۱ \\ ۰ \le x \le ۲ \end{cases}$$

سوال:

با توجه به شکل شماره (2) اگر از منظم بودن در امتداد محور y ها استفاده کنیم،ناحیهR چگونه مشخص می شود؟



شکل 29

ابتدا تغییرات x را مشخص می‌کنیم، $0 \le x \le 2$ سپس x ثابتی بین $[0, 2]$ انتخاب کرده و خطی به موازات محور y ها رسم می‌کنیم و روی این خط تغییرات y (حداقل و حداکثر y) را مشخص می‌کنیم تا نقطه از ناحیه خارج نشود. که در این مثال تغییرات y هم ثابت است، زیرا ناحیه به صورت مربع است. $0 \le y \le 1$

در این صورت:

$$V = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y)dydx$$

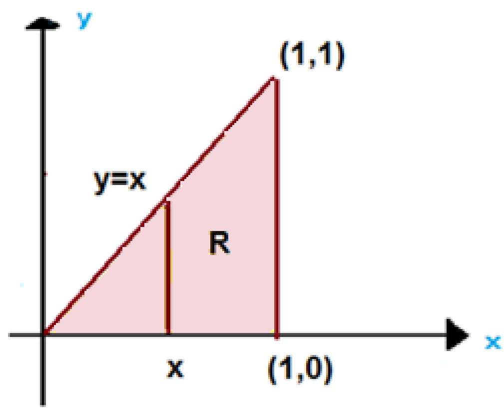
$$= \int_0^2 \left[(4 - x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^1 dx = \int_0^2 \left[(4 - x)(1 - 0) - \frac{1}{2}(1 - 0) \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[\left(4 - x - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 = 3 - 2 = 1$$ واحد حجم

سوال:

انتگرال را با استفاده از منظم بودن در امتداد محور xها هم محاسبه کنید و مقدار انتگرال ها را با هم مقایسه کنید. به چه نتیجه ای می رسید؟

مثال 2: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $\iint_R xydxdy$ که در آن R ناحیه محدود به مثلثی با رئوس $(۰,۰)$، $(۱,۰)$و $(۱,۱)$



شکل 30

ناحیه R در امتداد هر دو محور منظم است. اگر از منظم بودن در امتداد محور y ها استفاده شود، ابتدا حداقل و حداکثر x را در این ناحیه مشخص می‌کنیم، داریم $۰ \le x \le ۱$. سپس x ثابتی در این فاصله انتخاب کرده و خطی به موازات محور y ها رسم می‌کنیم و حداقل و حداکثر ارتفاع را روی این خط مشخص می‌کنیم.

بدین ترتیب ناحیهR به صورت زیر مشخص می شود: $۰ \le y \le x$

$$\begin{cases} ۰ \le x \le ۱ \\ ۰ \le y \le x \end{cases}$$

در این صورت خواهیم داشت:

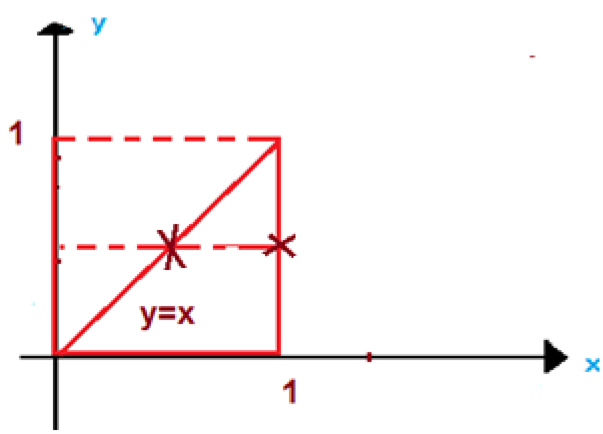
$$\iint_R xydxdy = \int_۰^۱ \int_۰^x xydydx = \int_۰^۱ \frac{x}{۲} y^۲ \Big|_۰^x dx =$$

$$\int_۰^۱ \frac{x^۳}{۲} dx = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} x^۴ \Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۸}$$

اگر از منظم بودن در امتداد محور x ها استفاده کنیم، ابتدا تغییرات y را مشخص می‌کنیم، داریم:

$$۰ \le y \le ۱$$

در این فاصله، $[0,1]$، y ثابتی در نظر گرفته و خطی به موازات محور x ها رسم می‌کنیم و حداقل و حداکثر x را روی این خط مشخص می‌کنیم تا نقطه در ناحیه قرار گیرد و از آن خارج نشود.$y \le x \le ۱$



شکل31

$$R:\begin{cases} ۰ \le y \le ۱ \\ y \le x \le ۱ \end{cases}$$

$$\iint_R xydxdy = \int_۰^۱ \int_y^۱ xydxdy = \int_۰^۱ y\frac{x^۲}{۲}\Big|_y^۱ dy = \int_۰^۱ \frac{۱}{۲}\left(y - y^۳\right)dy$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}y^۲ - \frac{۱}{۴}y^۴\right)\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}\right) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۸}$$

دقت کنیم که در این مسئله ، تغییر ترتیب انتگرالگیری اعمال شده است ولی این تغییر ترتیب در طول محاسبه و سختی و سادگی محاسبات هیچ گونه اثری نداشته است.

نکته :

گفتیم که اگر ناحیه‌ای هم در امتداد محور x ها و در امتداد محور y ها منظم باشد، در این صورت:

$$V = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx = \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dxdy$$

نکته 2:

وقتی در انتگرال‌ها جای dx و dy عوض شود گویند ترتیب انتگرال‌گیری عوض شده است. در بعضی از حالات تغییر ترتیب انتگرال‌گیری نه در طول محاسبه اثر دارد، نه در سختی و آسانی محاسبات. (مثال 1)

بعضی مواقع تغییر ترتیب انتگرال‌گیری کار را راحت‌تر انجام می‌دهد و در بعضی از حالات باید تغییر ترتیب انتگرال‌گیری داده شود، زیرا در غیر این صورت انتگرال قابل محاسبه نخواهد بود.

مثال 3: مطلوب است محاسبه $\int_۰^۱ \int_{\sqrt{x}}^۱ e^{y^۲} dydx$

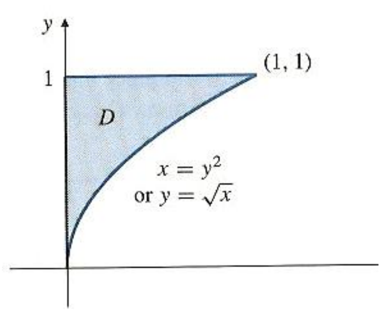
سوال:

آیا می توانید انتگرال یگانه $\int e^{y^۳}\,dy$ را حساب کنید؟

چون تابع تحت انتگرال $e^{y^۳}$ است، در این صورت برای محاسبه این انتگرال ، باید مشتق $y^۳$ همراه $e^{y^۳}$ قرار داشته باشد تا بتوان عمل انتگرال‌گیری را انجام داد. در غیر این صورت انتگرال‌گیری امکان‌پذیر نمی‌باشد.

این از حالاتی است که تغییر ترتیب انتگرال‌گیری الزامی است. توجه به انتگرال فوق نشان می دهد که از منظم بودن در امتداد محور y هااستفاده شده است ابتدا ناحیه انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم. $\sqrt{x} \le y \le ۱$ و

$۰ \le x \le ۱$



شکل 32

حال به جای منظم بودن در امتداد محور y ها، از منظم بودن در امتداد محور x ها استفاده می‌کنیم.

در این حالت ابتدا محدوده y را مشخص می‌کنیم: $۰ \le y \le ۱$

و سپس y ثابتی در نظر می‌گیریم و خطی به موازات محور x ها رسم می‌کنیم. حداقل و حداکثر x را روی این خط مشخص می‌کنیم تا نقطه از ناحیه خارج نشود. $۰ \le x \le y^۲$

در نتیجه:

$$R:\begin{cases} ۰ \le y \le ۱ \\ ۰ \le x \le y^۲ \end{cases}$$

$$V = \int_۰^۱ dx \int_{\sqrt{x}}^۱ e^{y^۳}\, dy = \int_۰^۱ dy \int_۰^{y^۲} e^{y^۳}\, dx$$

$$= \int_۰^۱ y^۲ e^{y^۳}\, dy = \frac{۱}{۳} e^{y^{۳-۱}} \Big|_۰^۱ = \frac{e-۱}{۳}$$

مثال 4: حجم جسم صلب محدود به صفحات $y=۰$، $z=۰$، صفحه $z=a-x+y$ و استوانه $y=a-\frac{x^۲}{a}$ (a مقداری ثابت است)را محاسبه کنید.

یادآوری 1 :

معادله کلی صفحه به صورت $Ax+By+Cz+D=۰$ است. این معادله صفحه ای است که محورهای مختصات را به ترتیب در نقاطی به طول تغییرات $-\frac{D}{A}$ و $-\frac{D}{B}$و $-\frac{D}{C}$قطع می کند. برای رسم صفحه ابتدا محل تلاقی آن را با محورهای مختصات به دست می آوریم:

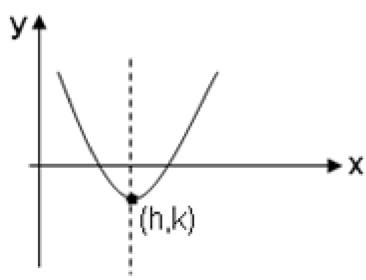
$$\begin{cases} x=۰ \\ y=۰ \\ z=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \\ y=-a \end{cases} \qquad \begin{cases} y=۰ \\ z=۰ \\ x=a \end{cases}$$

یادآوری 2 :

اگر $F(x,y)=0$ نمایشگر رویه ای در فضای سه بعدی باشد ، این رویه ، استوانه ای است که منحنی مولد آن دارای معادله $F(x,y)=0$ واقع در صفحه xy است و خط هادی به موازات محور z ها قرار دارد. بنابراین معادله $y=a-\frac{x^2}{a}$ یک رویه استوانه ای با مقطع منحنی $y=a-\frac{x^2}{a}$ واقع در صفحه xy است.

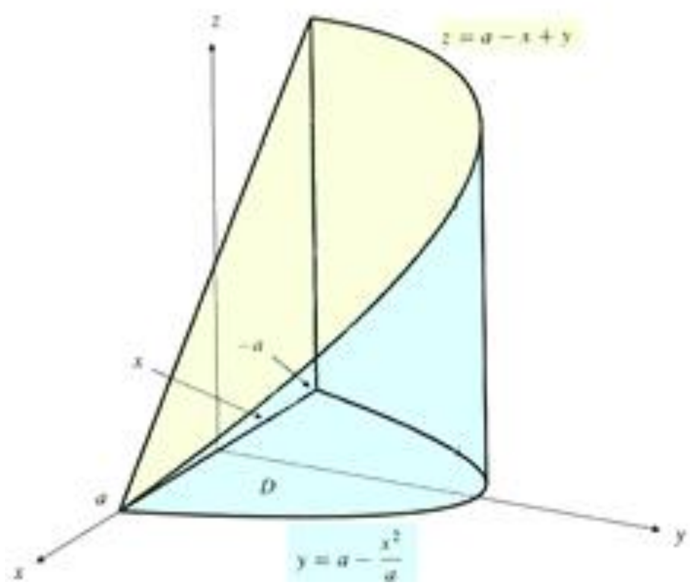
یادآوری 3 :

معادله کلی سهمی زیر به صورت $c>0$ $\quad (x-h)^2=4c(y-k)$ است .



شکل 33

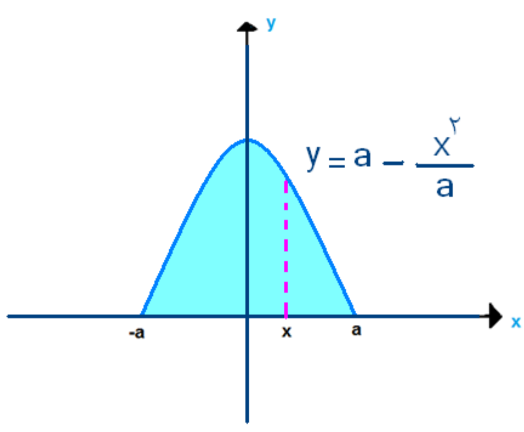
بنابراین $y=a-\frac{x^2}{a}$ سهمی با محور موازی y ها است که در نقاط $x=\pm a$ محور x ها را قطع می کند.



شکل 34

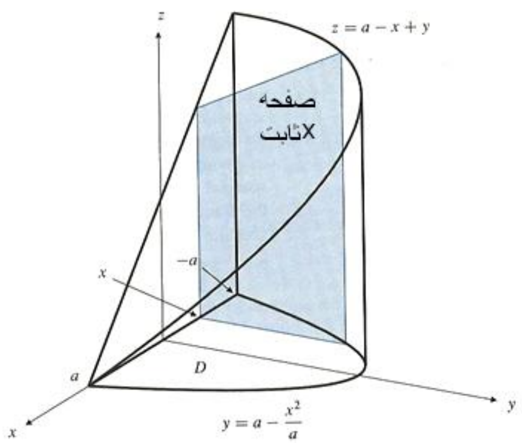
حجم محدود به این رویه ها ،روی پای استوانه ، یعنی ناحیه محدود به محور x ها و سهمی $y = a - \frac{x^۲}{a}$

تصویر می شود. تصویر این حجم در صفحه xy در شکل زیر نشان داده شده است:



شکل 35

ناحیه هم در امتداد محور x ها و هم در امتداد محور y ها منظم است. از منظم بودن نسبت به محور y ها استفاده می‌کنیم. بنابراین ابتدا تغییرات x و سپس تغییرات y را می‌یابیم:



شکل 36

$$-a \le x \le a$$

$$0 \le y \le a - \frac{x^2}{a}$$

در نتیجه:

$$V = \int_{-a}^{a} \int_{0}^{a-\frac{x^2}{a}} (a - x + y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \left[(a - x)y + \frac{1}{2} y^2\right]_{0}^{a-\frac{x^2}{a}} dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \left[a\left(a - \frac{x^2}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(a - \frac{x^2}{a}\right)^2\right] dx$$

$$=\int_{-a}^{a} a\left(a-\frac{x^{۲}}{a}\right)+\frac{۱}{۲}\left(a-\frac{x^{۲}}{a}\right)^{۲}\ \Big]dx+\int_{-a}^{a}\left(a-\frac{x^{۲}}{a}\right)dx$$

در انتگرال دوم چون تابع تحت انتگرال فرد است، انتگرال آن در فاصله $[-a,a]$ صفر است.

یادآوری:

تابعی فرد است که نمودار آن نسبت به مبدا مختصات دارای تقارن باشد.به عبارت دیگر:

$$f:[-a,a]$$
$$f(-a)=f(a)$$

$$V=\int_{-a}^{a}\left[a^{۲}-x^{۲}+\frac{۱}{۲}\left(a^{۲}+\frac{x^{۴}}{a^{۲}}-۲x^{۲}\right)\right]dx=\frac{۲۸}{۱۵}a^{۳}$$ واحد حجم

تمرین

تذکر: برای محاسبه انتگرال ها لزوما باید به طور کامل با بخش رویه ها آشنایی داشته باشید.

1- مطلوب است حجم واقع زیر $z=۱-x^{۲}$ و بالای ناحیه $۰\le x\le ۱$، $۰\le y\le x$

2- مطلوب است حجم زیر $z=۱-x^{۲}-y^{۲}$ و بالای ناحیه $x\ge ۰$، $y\ge ۰$ و $x+y\le ۱$

3- بالای مثلث با رئوس $(۰,۰)$، $(a,۰)$، $(۰,b)$ و زیر صفحه $z=۲-\frac{x}{a}-\frac{y}{D}$

4- درون دو استوانه $x^2+y^2=a^2$، $y^2+z^2=a^2$ واقع در $\frac{1}{8}$ اول مختصات

5- حجم محدود به استوانه $x^2+y^2=a^2$، صفحه $z=4x$ و صفحه $z=0$

6- حجم محدود به استوانه $x^2+y^2=1$، صفحه $z=0$ و صفحه $2x+3y+z=10$

7- داخل استوانه $x^2+2y^2=8$، بالای صفحه $z=y-4$ و زیر صفحه $z=8-x$

8- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

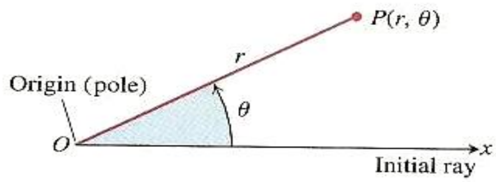
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int_0^1 dx \int_x^{x^{\frac{1}{3}}} \sqrt{1-y^4}\, dy$$

بعضی مواقع در محاسبه انتگرال‌ها راحت‌تر است به جای آنکه انتگرال را در مختصات دکارتی محاسبه کنیم، آن را در مختصات قطبی ادامه دهیم.

یادآوری : آشنایی با مختصات قطبی

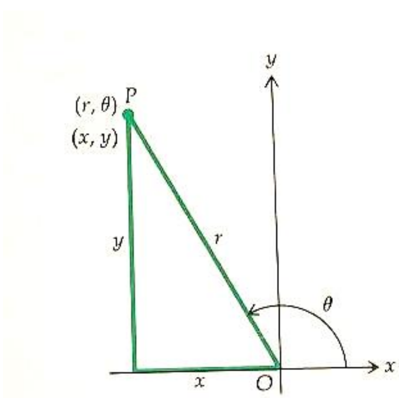
در مختصات قطبی محوری به نام محور قطبی و یک نقطه روی آن به نام قطب در نظر گرفته می‌شود. هر نقطه Pدر مختصات قطبی با فاصله آن تا قطب (r) و زاویه‌ای که خط واصل بین P و قطب (شعاع حامل) با محور قطبی می‌سازد (θ) مشخص می‌شود. P(r,θ)

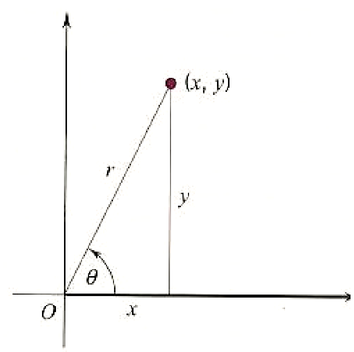


شکل 37

یادآوری: رابطه بین مختصات قطبی و مختصات کارتزین

برای تعیین ارتباط بین مختصات قطبی و مختصات کارتزین، معمولاً محور قطبی را طوری روی محور xها قرار می‌دهند که قطب روی مبدأ مختصات قرار گیرد.





شکل 38

اگر فرض کینم نقطه P در مختصات دکارتی دارای مختصات (x,y) و در مختصات قطبی دارای مختصات (r,θ) باشد، در این صورت از روی اشکال فوق می توان رابطه بین این دو دسته از مختصات را به صورت زیر به دست آورد:

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

$$y = r\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x}$$

بنابراین هر دسته از مختصات که معلوم باشند می‌توان دسته دیگر را از آن نتیجه گرفت.

مثال :

فرض کنید P دارای مختصات (1و1) در دستگاه کارتزین باشد. مطلوبست تعیین مختصات قطبی آن؟

حل)

چون رابطه بین مختصات کارتزین و قطبی به صورت $\theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x}$ $\quad r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ است ، بنابراین

$\theta = \tan^{-۱} ۱ = \frac{\pi}{۴}$ $\quad r = \sqrt{۲}$ و در نتیجه مختصات قطبی P برابر $(\sqrt{۲}, \frac{\pi}{۴})$ است.

مثال:

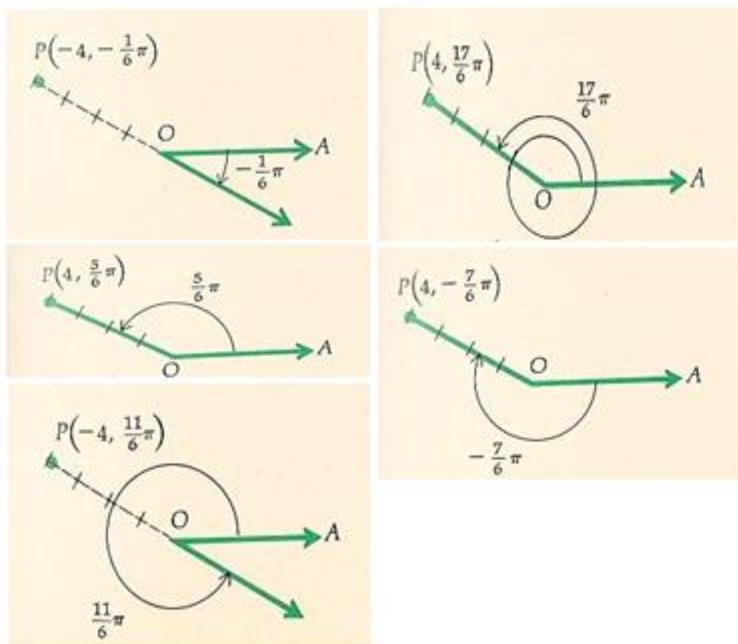
اگر P دارای مختصات قطبی $(۱, \frac{\pi}{۳})$ باشد، مطلوبست تعیین مختصات کارتزین P ؟

حل)

داریم: $y = r\sin\theta \quad x = r\cos\theta$ بنابراین

$$x = ۱ \times \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} \qquad y = ۱ \times \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

اگر نقطه روی خود شعاع حامل انتخاب شودr مثبت خواهد بود و اگر روی ادامه شعاع حامل انتخاب گردد r منفی در نظر گرفته خواهد شد.بدون آنکه محدودیتی روی r و θ اعمال شود . در شکل زیر مختصات نقطه P به 5 صورت نمایش داده شده است.



شکل 39

معمول و عرف است که در دستگاه مختصات دکارتی x را به عنوان متغیر مستقل و y را متغیر وابسته و یا تابعی از x در نظر می گیرند و ارتباط این دو متغیر را به صورت $y=f(x)$ نشان می دهند، در دستگاه مختصات قطبی هم معمولاً θ را متغیر مستقل و r را به عنوان متغیر وابسته معرفی می کنند و رابطه بین این دو را به صورت $r = f(\theta)$ نشان می دهند. باید دقت داشت که اگر محدودیتی برای r و θ قرار ندهیم و هر دو بتوانند در کل

R تغییر کنند، در این صورت در مختصات قطبی هر نقطه دارای مختصات قطبی متفاوتی می‌باشد که می‌توان آنها را به صورت‌های زیر در نظر گرفت:

$$P\Big|_{\theta}^{r} \quad (1) \qquad P\Big|_{\theta\pm 2n\pi}^{r} \quad (2) \qquad \Big|_{\pi+\theta}^{-r} \quad (3) \qquad \Big|_{\pi+\theta\pm 2n\pi}^{-r} \quad (4) \qquad \Big|_{-\pi+\theta}^{-r} \quad (5) \qquad \Big|_{(-\pi+\theta)\pm 2n\pi}^{-r} \quad (6)$$

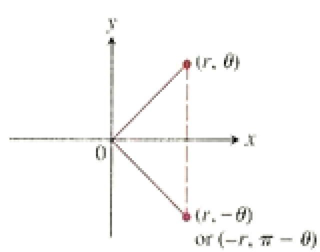
رسم منحنی در مختصات قطبی:

برای رسم منحنی در مختصات قطبی معمولاً از نقطه‌یابی استفاده می شود. زوایای مختلف انتخاب می شود و rهای متناظر آن را از روی ضابطه تعریف مشخص می کنند و سپس از وصل نقاط به دست آمده منحنی را رسم می‌کنند. البته برای رسم راحت‌تر می توان از خاصیت تقارن منحنی نسبت به محورها استفاده کرد.

بررسی وجود تقارن در منحنی های قطبی:

حالت 1:

منحنی نسبت به محور x ها (محور قطبی) تقارن دارد.



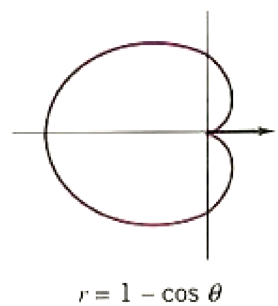
شکل 40

در این حالت نقطه (r,θ) و نقاط $(r,-\theta)$ یا $(-r,\pi-\theta)$ هم بر روی منحنی قرار دارند.

مثال:

$$r = ۱ - \cos\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$r = ۱ - \cos(-\theta)$$

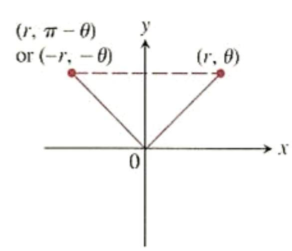
پس نقطه $(r,-\theta)$روی منحنی قرار دارد.



شکل 41

حالت 2:

منحنی نسبت به محور y ها (خط $\theta = \frac{\pi}{۲}$) تقارن دارد.

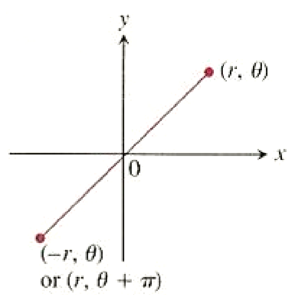


شکل 42

در این حالت نقطه (r,θ) و نقاط $(-r,-\theta)$ یا $(r,\pi-\theta)$ هم بر روی منحنی قرار دارند.

حالت 3:

منحنی نسبت به مبدا (قطب) تقارن دارد. (نسبت به هر دو محور x و y تقارن وجود دارد)



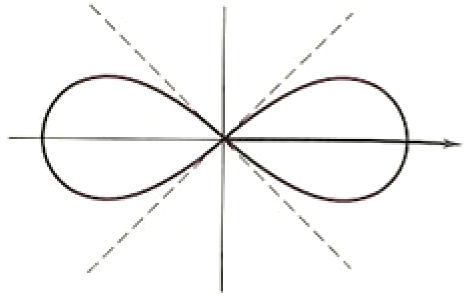
شکل43

در این حالت نقطه (r,θ) و نقاط $(-r,\theta)$ یا $(r,\pi+\theta)$ هم بر روی منحنی قرار دارند.

مثال:

$$r^{۲}=۴\cos\theta$$

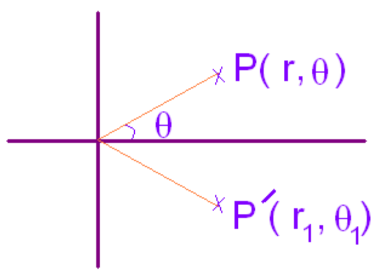
$$(-r)^{۲}=۴\cos\theta$$



شکل 44

سوال 1: اگر نقطه $P(r,\theta)$ روی منحنی $r=f(\theta)$ قرار داشته باشد و منحنی نسبت به محور x ها (محور قطبی) دارای تقارن باشد ، مختصات نقطه P' متقارن P را نسبت به محور x ها بیابید ؟

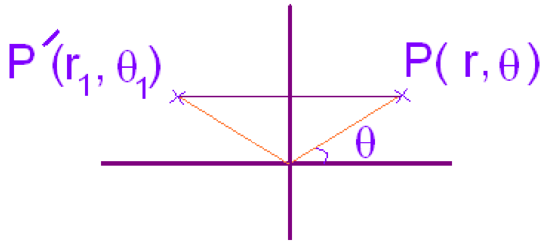
آیا مختصات P' منحصربفرد است یا نه؟ چرا؟



شکل45

سوال 2: اگر نقطه $P(r,\theta)$ روی منحنی $r=f(\theta)$ قرار داشته باشد، و منحنی نسبت به محور y ها (خط $\theta=\frac{\pi}{۲}$) دارای تقارن باشد ، مختصات نقطه P' ، متقارن P نسبت به محور y ها را بیابید؟

آیا مختصات P' منحصربفرد است یا نه؟ چرا؟



شکل 46

<u>منحنی های قطبی</u>

در مختصات قطبی چند دسته منحنی بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در مطالب زیر با هر یک از این منحنی ها و معادلات آنها آشنا خواهیم شد:

- دوایر
  - مرکز بر مبدا مختصات
  - مرکز بر محور x ها
  - مرکز بر محور y ها
- منحنی هایی با معادلات $r = a \pm b\cos\theta$ ، $r = a \pm b\sin\theta$ (در حالت خاص $a=b$ معروف به منحنی های دلگون)
- منحنی های چندپر
- منحنی های پروانه گون (لمینسکات)

دوایر: دوایر در دستگاه قطبی به صورت زیر معرفی می‌شوند:

الف) دوایری که مرکز آنها در مبدا مختصات قرار دارند :

معادله این دوایر در دستگاه مختصات کارتزین به صورت زیر است.

$$x^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{a}^2$$

معادله این دسته از دوایر را با استفاده از روابط ما بین دستگاه مختصات کارتزین و قطبی در دستگاه قطبی به دست می آوریم :

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{a}^2 \quad => \mathrm{r}^2 = \mathrm{a}^2 \quad => r = a$$

ب) دوایری که مرکز آنها روی محور x قرار دارد و از مبدا می گذرند :

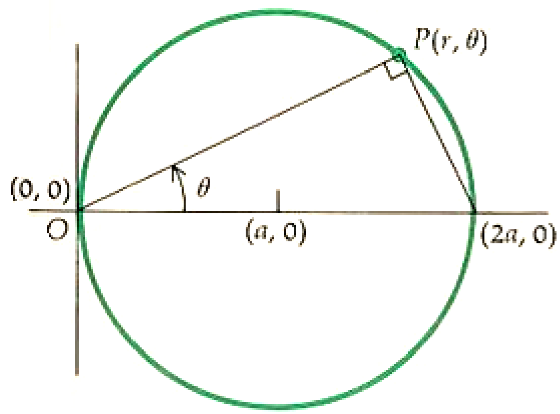
معادله این دسته از دوایر به صورت زیر است.

$$(x-a)^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{a}^2$$

با استفاده از روابط مابین دو دستگاه مختصات ، معادله این دسته از دوایر را در دستگاه مختصات قطبی به دست می آوریم. ابتدا معادله را باز می کنیم:

$$\mathrm{x}^2 + a^2 - 2ax + y^2 = a^2 \quad => r^2 - 2\mathrm{ar}\cos(\theta) = 0 \quad => r = 2a\cos(\theta)$$

بنابراین معادله $r = 2a\cos(\theta)$ نمایشگر دایره ایست که مرکز آن روی محور طولها(محور قطبی) قرار دارد، از مبدا مختصات عبور می کند و در مبدا بر محور عرض ها(y ها)مماس است.



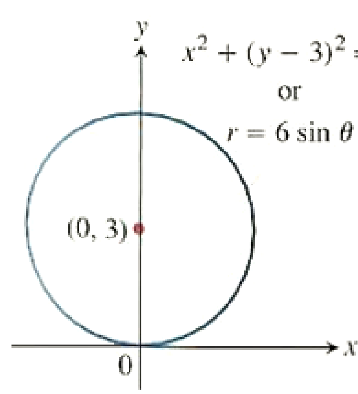
شکل 47

ج) دوایری که مرکز آنها روی محور y ها قرار دارد ، از مبدا می گذرند و در مبدا بر محور طول ها مماس اند.

به راحتی می توان نشان داد که معادله این دسته از دوایر به صورت زیر است

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2 \;=> x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2 \;\; => r^2 - 2ar\sin(\theta) = 0$$

$$r = 2a\sin(\theta)$$



شکل 48

دسته دوم منحنی‌هایی با معادلات $r = a \pm b\sin\theta, r = a \pm b\cos\theta$

الف) حالت خاص($a=b$) : این حالت به منحنی‌های دلگون یا کاردیوئید معروفند.

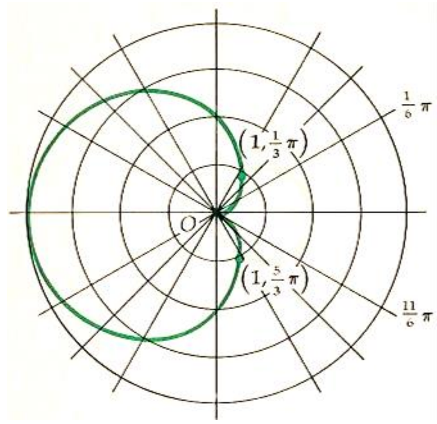
$$r = a(1 \pm \cos\theta) \qquad r = a(1 \pm \sin\theta)$$

مثال: $r = 1 - \cos\theta$

همان گونه که قبلا بررسی شد این منحنی نسبت به مور x ها تقارن دارد. بنابراین برای رسم منحنی کافی است در فاصله $0 < \theta < \pi$ نقطه یابی کنیم:

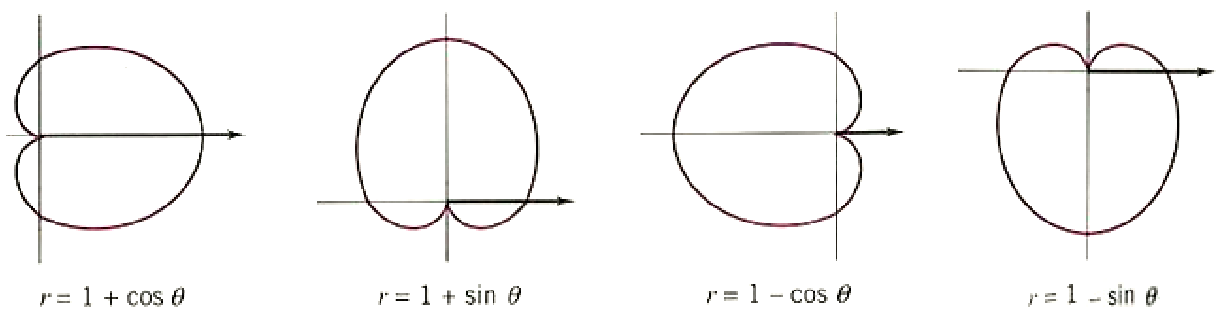
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	1	$\frac{1}{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	2

از اتصال زوج مختصات (r,θ) منحنی را رسم می کنیم.



شکل 49

نمودار منحنی های $r = 1 \pm \sin(\theta)$, $r = 1 \pm \cos(\theta)$ در شکل زیر نشان داده شده است:



شکل 50

نکته: مشخص بودن خطوطی که در قطب بر منحنی مماسند نیز در رسم شکل به ما کمک می‌کند. برای یافتن این خطوط کافی است معادله $f(\theta) = ۰$ را حل کنیم. مثلاً در کاردیوئید $r = ۱ + \sin\theta$ خطوط مماس در قطب بر این منحنی از حل معادله $۱ + \sin\theta = ۰$ به دست می آیند:

$$\sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$$

ب) حالت کلی منحنی هایی با معادلات $r=a\pm b\,sin\theta, r=a\pm b\,cos\theta$ ($a\neq b$)

مثال 1: نمودار منحنی $r=1-2\cos(\theta)$ را رسم کنید :

حل: ابتدا تقارن منحنی را نسبت به محور x ها بررسی می کنیم. کافی است مختصات نقطه P' متقارن $P(r,\theta)$ را در منحنی قرار دهیم. P' دارای مختصات $(r,-\theta)$ و یا $(-r,\pi-\theta)$ است.

$$r=۱-۲\cos\theta$$
$$r=۱-۲\cos(-\theta)$$
$$=۱-۲\cos\theta$$

چون مختصات $(r,-\theta)$ در معادله صدق می کند ، در این صورت منحنی نسبت به محور x ها تقارن دارد.

البته اگر این زوج از مختصات نقطه P' در معادله صدق نکرد باید زوج دوم یعنی $(-r,\pi-\theta)$ را در معادله امتحان کرد. اگر زوج دوم هم در معادله صدق نکرد تنها نتیجه می شود که منحنی نسبت به محور x ها تقارن ندارد، در غیر اینصورت هر کدام از زوج مختصات در معادله صدق کند تقارن نسبت به محور x ها نتیجه می شود.

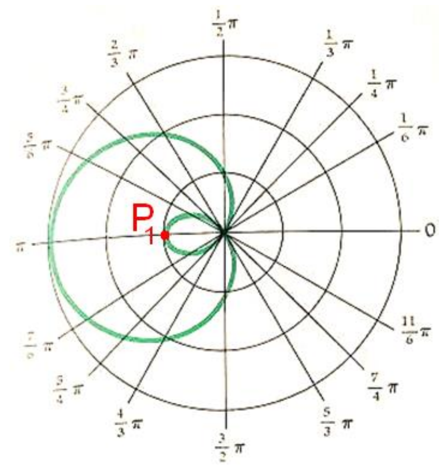
بنابراین تنها در فاصله $[۰,-\pi]$ نقطه یابی می کنیم.

θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
r	-۱	$۱-۲\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$۱-۲\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$۱-۲\frac{۱}{۲}$	$۱-۲(۰)$	$۱-۲\frac{-۱}{۲}$	$۱-۲\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$	$۱-۲\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$	$۱-۲(-۱)$
r	-۱	$۱-\sqrt{۳}$	$۱-\sqrt{۲}$	۰	۱	۲	$۱+\sqrt{۲}$	$۱+\sqrt{۳}$	۲

با توجه به جدول فوق شکل منحنی به صورت زیر خواهد بود .

نکته:

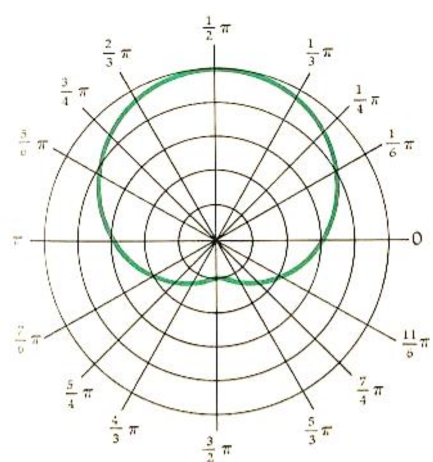
وقتی r منفی باشد ، نقطه روی ادامه شعاع حامل قرار می گیرد. برای مثال به ازاء $\theta=۰$ که $r=-۱$ به دست آمده است ، نقطه روی محور x منفی و به فاصله 1 از مبدا ($P_۱$) قرار می گیرد.



شکل 51

مثال 2:

نمودار منحنی $r = 3 + 2\sin(\theta)$ به صورت زیر است.



شکل 52

◈ دسته سوم منحنی هایی با معاد له $r = a\sin(n\theta)$ و یا $r = a\cos(n\theta)$

این منحنی‌ها را منحنی‌های چند پر(rose curve) گویند. اگر n زوج باشد تعداد پرها برابر $2n$ و اگر n فرد باشد، تعداد پرهای منحنی برابر n است.

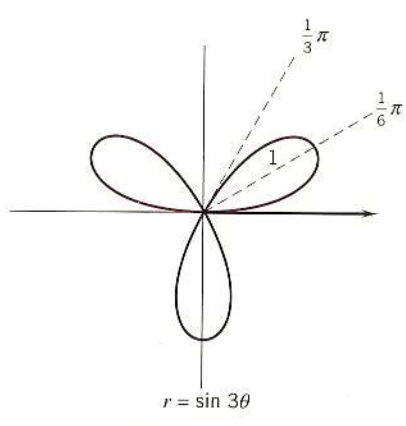
مثال: منحنی $r = \sin ۳\theta$ را رسم کنید.

اگر از تقارن استفاده کنیم نتیجه می‌گیریم که منحنی نسبت به محور x ها($\theta = ۰$) تقارن ندارد ولی نسبت به محور y ها ($\theta = \frac{\pi}{2}$)دارای تقارن است. برای تعیین خطوطی که در قطب بر منحنی مماس هستند، معادله $\sin ۳\theta = ۰$ را حل می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$sin 3\theta = 0 \Rightarrow 3\theta = k\pi$$

$$\theta = \frac{k\pi}{3} \Rightarrow \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

با استفاده از تقارن منحنی نسبت به محور y ها و خطوط مماس بر منحنی در قطب ، کافی است نقطه یابی را فقط در فاصله $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ انجام دهیم. منحنی به صورت زیر رسم می شود:



شکل 53

◈ دسته چهارم منحنی ها یی با معادلات $r^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad r^2 = a^2 \sin 2\theta$

این منحنی ها به نام به نام پروانه گون یا لمینسکات معروفند.

مثال:

منحنی $r^۲ = ۴\sin ۲\theta$ را رسم کنید:

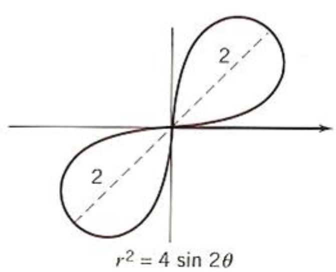
اولاً منحنی نسبت به هیچکدام از محور های x و y تقارن ندارد.

خطوط مماس در قطب را مشخص می‌کنیم.

$$۴\sin ۲\theta = ۰ \Rightarrow ۲\theta = k\pi$$

$$\theta = \frac{k\pi}{۲}, k = ۰, \theta = ۰, k = ۱ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۲}$$

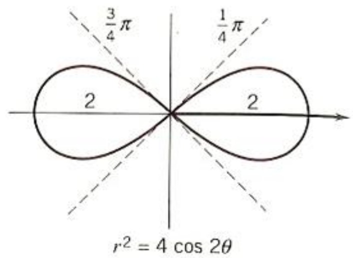
حداکثر مقدار r به ازاء حداکثر مقدار $۴\sin ۲\theta$اتفاق می افتد که متناظر با حداکثر مقدار $\sin ۲\theta$ یعنی $\sin ۲\theta = ۱$ایجاد می شود. پس در زاویه $۲\theta = \frac{\pi}{۲}$ و یا روی شعاع $\theta = \frac{\pi}{۴}$ حداکثر $r = ۲$ $\quad r^۲ = ۴$ به دست می آید.



شکل 54

مثال 2:

در شکل زیر نمودار $r^{۲} = ۴\cos ۲\theta$ رسم شده است.



شکل 55

تمرین:

منحنی های زیر را رسم کنید:

$۱) r = -۱ - \cos\theta$

$۲) r = ۲\sin n\theta$

$۳) r = ۲\cos ۳\theta$

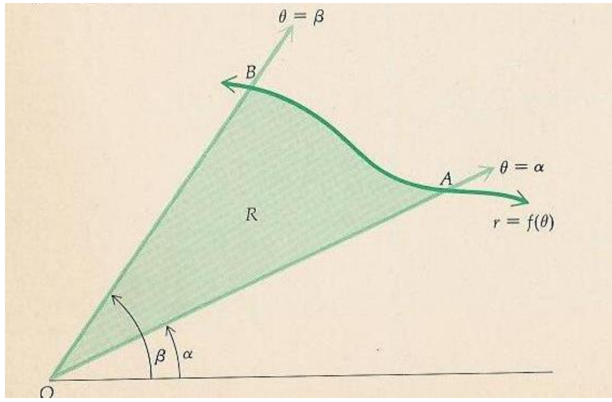
$۴) r = ۲ + \sin\theta$

$۵) r^{۲} = -\sin ۲\theta$

$۶) r = \theta$

سوال 1:

فرض کنیم تابع f بر بازه بسته $[\alpha, \beta]$ پیوسته و نامنفی باشد. با توجه به شکل زیر ناحیه R را مشخص کنید:

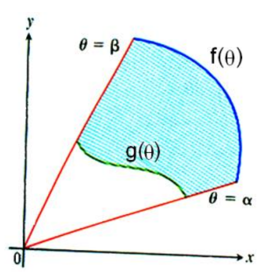


شکل 56

ناحیه R محدود به منحنی با معادله $r = f(\theta)$ و خطوط $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ است.

سوال 2:

فرض کنیم $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ توابعی پیوسته بر بازه $[\alpha, \beta]$ و $f(\theta) \geq g(\theta)$ باشد. با توجه به شکل، ناحیه R را مشخص کنید:



شکل 57

ناحیه R محدود به دو منحنی با معادلات $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ وخطوط $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ است.

اکنون به بحث اصلی خود در ارتباط با تبدیل یک انتگرال دو گانه در مختصات کارتزین به انتگرال در دستگاه مختصات قطبی بر می گردیم.

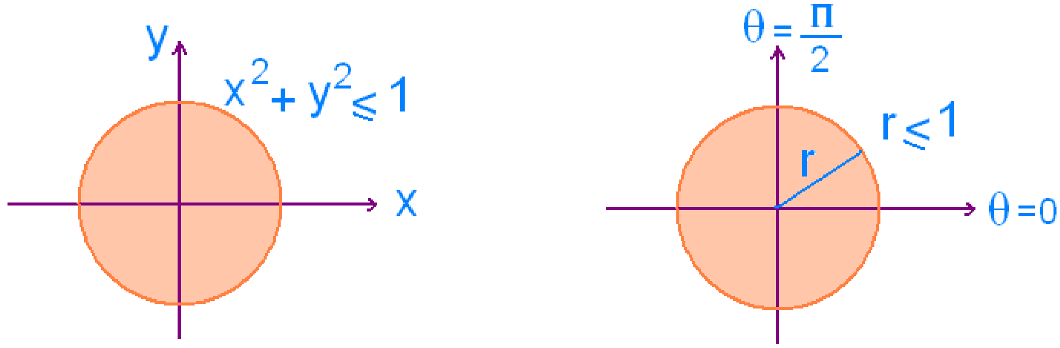
برای تبدیل یک انتگرال دوگانه از دستگاه مختصات دکارتی به مختصات قطبی لازم است با انواع مختلف منحنی‌های قطبی و تغییرات r و θ در نواحی محدود به این منحنی‌ها به **خوبی** آشنایی داشته باشیم.

تبدیل انتگرال دوگانه از دستگاه مختصات دکارتی به دستگاه مختصات قطبی

برای تبدیل یک انتگرال دوگانه نظیر $\iint_R f(x,y)dxdy$ به انتگرالی در دستگاه مختصات قطبی،ابتدا باید ناحیه R که توسط مرزهایی محدود شده است را در صفحه **قطبی** تصویر کنیم.

نکته:

این تصویر کردن لزوماً شکل ناحیه را تغییر نمی دهد ولی لازم است در ناحیه تصویر، تغییرات θ و r را مشخص کنیم. اگر محور قطبی $\theta = ۰$ را منطبق بر محور x ها و شعاع $\theta = \frac{\pi}{۲}$ را منطبق بر محور y ها انتخاب کنیم، در این صورت شکل تصویر R (ناحیه R') تفاوتی با شکل ناحیه R ندارد. مثلا دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ را در نظر بگیرید. تصویر این دایره در صفحه قطبی به صورت $r = ۱$ است.



شکل 58

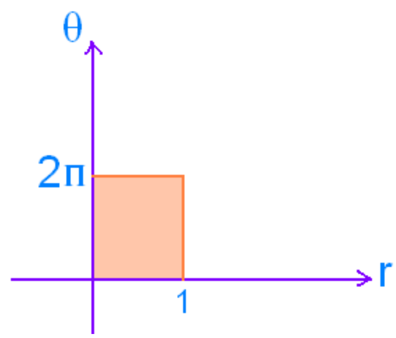
$$-1 \leq x \leq 1 \qquad \Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \qquad \Rightarrow 0 \leq r \leq 1$$

ولی اگر محورهای و را به صورت دو محور عمود بر هم انتخاب کنیم ، در این صورت ناحیه ای با حدود تغییرات

$$\begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{matrix}$$

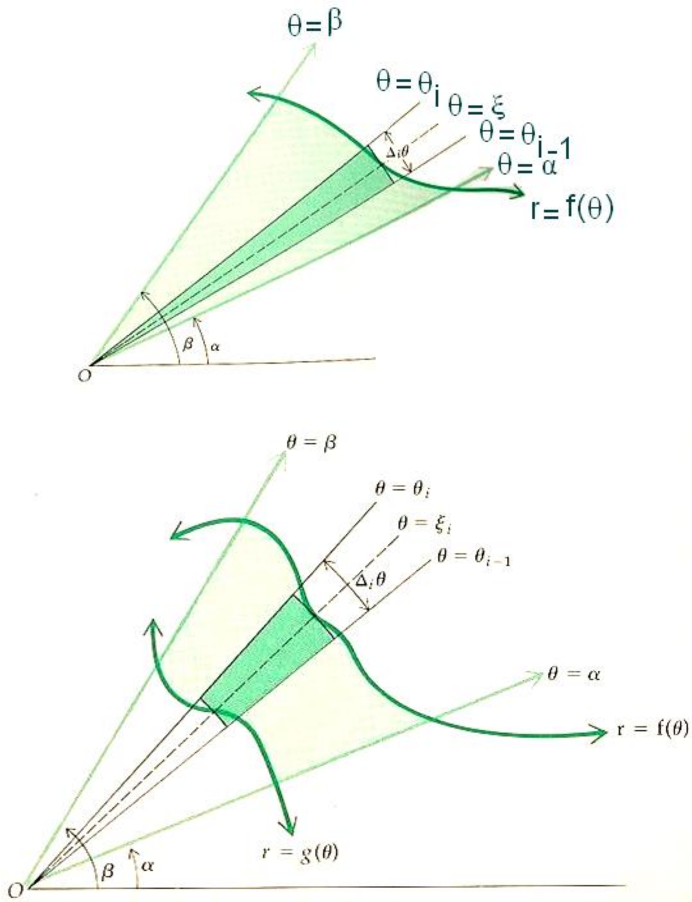
به صورت یک مستطیل نمایش داده می شود.



شکل 59

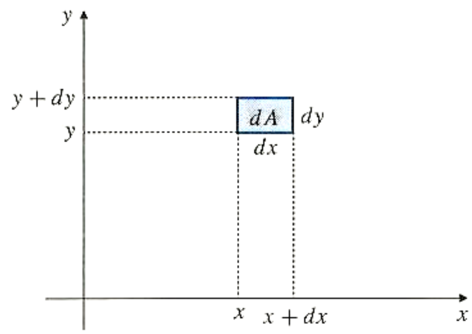
در اکثر موارد از حالت اول نمایش استفاده می شود.

پس از مشخص کردن تغییرات θ و r ، در تابع تحت انتگرال به جای *y,x* از روابط بین مختصات دکارتی و قطبی یعنی $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ استفاده می کنیم. در مرحله سوم به جای سطح جزیی *dxdy* باید سطح جزیی را در صفحه قطبی تعیین کنیم، که به صورت زیر آن را مشخص می‌کنیم.



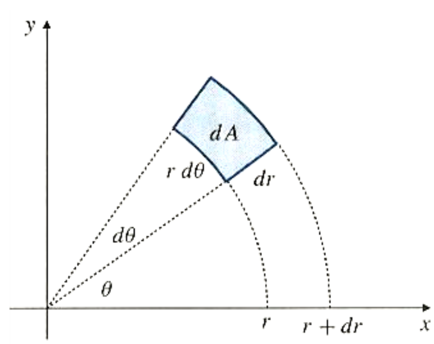
شکل60

یادآوری می کنیم که در صفحه کارتزین برای تعیین سطح جزیی خطوط موازی محورهای مختصات را رسم می کردیم و سطح تشکیل شده بین خطوط *x=x* و *x=x+dx* و خطوط *y=y* و *y=y+dy*، را در نظر می گرفتیم این سطح با مساحت *dxdy* به عنوان سطح نمونه انتخاب می‌گردید.



شکل 61

برای تعیین مساحت جزئی در مختصات قطبی ، نظیر حالت مختصات کارتزین ، منحنی های $r=r$ و $r=r+dr$ (r طرف دوم ثابت در نظر گرفته می شود) و منحنی های $\theta=\theta$ و $\theta=\theta+d\theta$ (θ در طرف راست روابط فوق مقادیر ثابت است) را رسم می کنیم. منحنی های r و $r+dr$ دوایری به مرکز مبدا (قطب) و منحنی های θ و $\theta+d\theta$ ، شعاع هایی هستند که با محور x ها زاویه ثابت می سازند. در شکل زیر این منحنی های رسم شده اند.



شکل 62

مساحت محدود به این چهار منحنی برابر است با: $dA=rdrd\theta$

یک ضلع شبه مستطیل برابر dr و یک ضلع آن $rd\theta$ است در نتیجه این عملیات، انتگرال از دستگاه مختصات دکارتی به انتگرال در دستگاه قطبی تبدیل می‌شود.

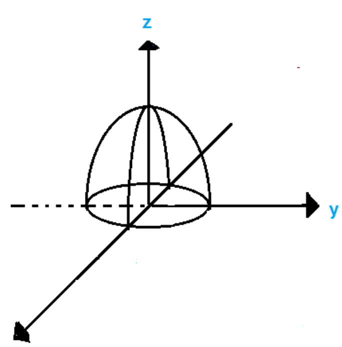
$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f[r\cos\theta, r\sin\theta]rdrd\theta$$

نکته:

در محاسبه انتگرال های دوگانه وقتی تصاویر به صورت دایره هستند، انتگرال گیری در مختصات قطبی راحت‌تر از انتگرال گیری در مختصات دکارتی است.

مثال: مطلوبست محاسبه حجم جسم محدود به صفحه ***z=0***، سهموی $z=1-x^2-y^2$.

تصویر این حجم ، ناحیه محدود به دایره $x^۲+y^۲=۱$ است.



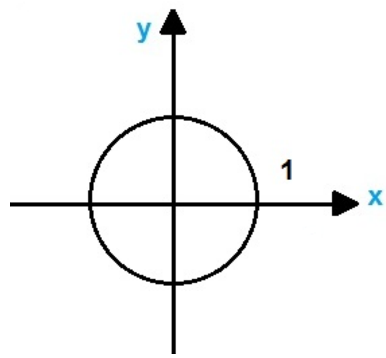
شکل 63

$$V = \iint_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)dxdy$$

اگر این انتگرال را در مختصات دکارتی حل کنیم،

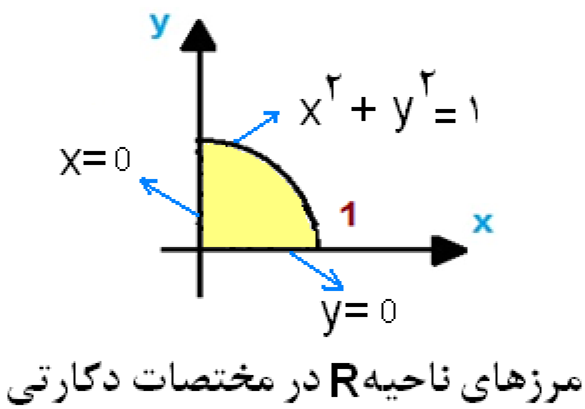
$$x^۲+y^۲\le ۱ \Rightarrow \quad -۱\le x\le ۱ \quad , \quad -\sqrt{۱-x^۲}\le y\le \sqrt{۱-x^۲}$$

$$V=\int_{-۱}^{۱}\int_{-\sqrt{۱-x^۲}}^{\sqrt{۱-x^۲}}(۱-x^۲-y^۲)dydx = ۴\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{\sqrt{۱-x^۲}}(۱-x^۲-y^۲)dydx$$



شکل 64

در اینجا از حالت تقارن حجم نسبت به صفحات مختصات استفاده شده است.



شکل 65

اما اگر این انتگرال را در مختصات قطبی حل کنیم، ابتدا ناحیه تصویر را در دستگاه جدید به دست می‌آوریم.

برای به دست آوردن تصویر ، باید تصویر مرزهای ناحیه R را در دستگاه قطبی به دست آوردتا ناحیه تصویر

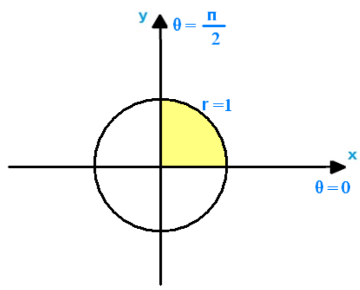
R' مشخص شود.(در این حالت محور قطبی را منطبق بر محور x ها و خط $\theta = \frac{\pi}{۲}$ منطبق بر محور y ها در نظر گرفته شده است)

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow r=1$$

$$x=0 \Rightarrow r\cos\theta=0 \Rightarrow \cos\theta=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$y=0 \Rightarrow r\sin\theta=0 \Rightarrow \sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0$$

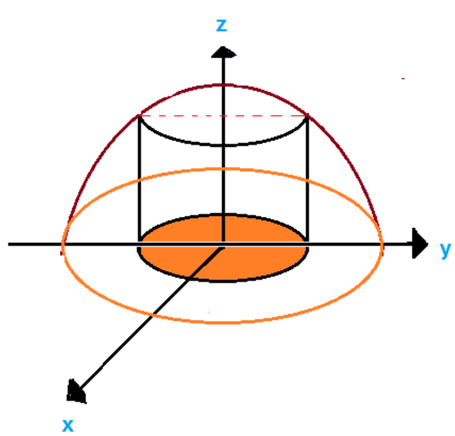
$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(1-r^2)r\,dr\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4)\Big|_0^1 d\theta=4\times\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$



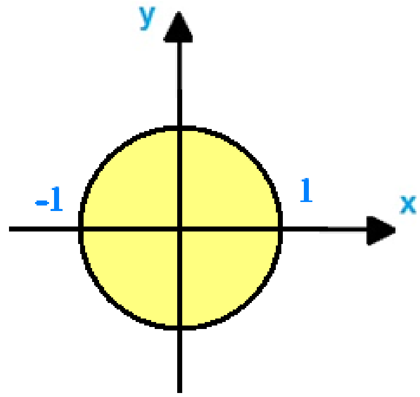
تعیین مرزهای ناحیه تصویر R در مختصات قطبی

شکل 66

مثال 2: مطلوبست محاسبه حجم جسم واقع در داخل استوانه $x^2+y^2=1$ زیر کره $x^2+y^2+z^2=4$ و بالای صفحه $z=0$



شکل 67



شکل 68

$$-۱\leq x\leq ۱$$
$$-\sqrt{۱-x^{۲}}\leq y\leq \sqrt{۱-x^{۲}}$$

در واقع تصویر حجم نقاط واقع در داخل و روی مرز دایره $x^2+y^2=1$ است، (یعنی پای استوانه $(R:x^2+y^2\leq 1$ حجم از پایین به $z=۰$ و از بالا به کره $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ محدود شده است. این حجم دارای تقارن است. بنابراین

$$V=\iint_{R:x^2+y^2\leq 1}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dydx$$
$$=4\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dydx$$

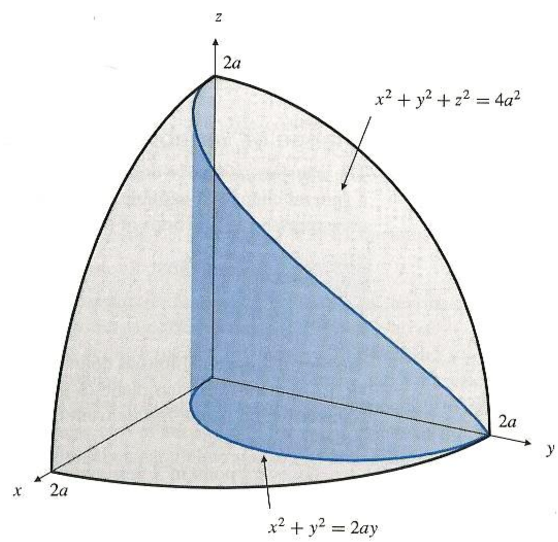
تبدیل این انتگرال به انتگرال در مختصات قطبی

$$=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{۱}\sqrt{۴-r^{۲}}\,rdrd\theta$$
$$=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}-\frac{۱}{۳}(۴-r^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۰}^{۱}d\theta=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۳}(۴^{\frac{۳}{۲}}-(۳)^{\frac{۳}{۲}})d\theta=۴\times\frac{\pi}{۶}(۸-۳\sqrt{۳})$$

سوال:

حجم محدود واقع در بالای صفحه $z=0$ ، خارج از استوانه $x^2+y^2=1$ و زیر کره $x^2+y^2+z^2=4$ را بیابید؟

مثال 3: حجم محدود به کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ و داخل استوانه $x^2+y^2=2ay$ و $z=0$ را بیابید.



شکل 69

$$V=\iint_{R:x^{۲}+y^{۲}\le ۲ay}\sqrt{۴a^{۲}-x^{۲}-y^{۲}}\,dxdy$$

$$=\iint_{R':r\le ۲a\sin\theta}\sqrt{۴a^{۲}-r^{۲}}\,rdrd\theta$$

$$=\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{۲a\sin\theta}\sqrt{۴a^{۲}-r^{۲}}\,rdrd\theta$$

$$=۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}-\frac{۱}{۳}(۴a^{۲}-r^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۰}^{۲a\sin\theta}d\theta$$

$$=۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۳}(۸a^{۳}-۸(a^{۲}-a^{۲}\sin^{۲}\theta)^{\frac{۳}{۲}}d\theta=\frac{۱۶}{۳}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(a^{۳}-a^{۳}\cos^{۳}\theta)d\theta$$

$$=\frac{۱۶a^{۳}}{۳}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(۱-\cos\theta(۱-\sin^{۲}\theta))d\theta=\frac{۱۶a^{۳}}{۳}(\theta-\sin\theta+\frac{۱}{۳}\sin^{۳}\theta)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$=\frac{۸a^{۳}}{۹}(۳\pi-۴)$$

یادآوری : تغییر متغیر در انتگرال های یگانه :

به خاطر می آوریم که در محاسبه انتگرال هایی به فرم $\int f(g(x))g'(x)dx$ از تغییر متغیر $du=g'(x)dx$ $\qquad$ $u=g(x)$ استفاده می کردیم. در این صورت انتگرال فوق به صورت ساده $\int f(u)du$ تبدیل می شد. سپس در جواب حاصل از این انتگرال مجددا به جای u ، $g(x)$ را جایگزین می کردیم.

مثال 1 :

مطلوبست محاسبه $\int x^{۲} \sin(x^{۳}) dx$

حل) در محاسبه این انتگرال قرار می دهیم $u = x^{۳}$ در نتیجه $du = ۳x^{۲}dx$ بنا براین :

$$\int x^{۲} \sin(x^{۳}) dx = \frac{۱}{۳}\int \sin u du = -\frac{۱}{۳}\cos u + c = -\frac{۱}{۳}\cos(x^{۳}) + c$$

مثال 2 :

مطلوبست محاسبه $\int \frac{۲zdz}{\sqrt[۳]{z^{۲}+۱}}$

حل) قرار می دهیم $u = z^{۲}+۱$ در نتیجه $du = ۲zdz$:

$$\int \frac{۲zdz}{\sqrt[۳]{z^{۲}+۱}} = \int \frac{du}{\sqrt[۳]{u}} = \int u^{-\frac{۱}{۳}} du = \frac{u^{-\frac{۱}{۳}+۱}}{-\frac{۱}{۳}+۱} + c$$

$$= \frac{۳}{۲}(z^{۲}+۱)^{\frac{۲}{۳}} + c$$

تغییر متغیر کلی در انتگرال های دوگانه

بعضی مواقع در حل انتگرال های دوگانه، مختصات قطبی هم کارایی ندارد. بنابراین لازم است به غیر از تغییر متغیر قطبی بتوان از حالت کلی تری که آن را تغییر متغیر کلی می نامیم استفاده کنیم.

فرض کنیم *x=x(u,v)* و *y=y(u,v)* توابعی یک به یک و مشتق پذیر است، و می‌توانیم *v,u* را بر حسب *y,x* به دست آوریم.

u= u(x,y), v=v(x,y)

مشتقات جزئی *v,u* نسبت به *y,x* و مشتقات جزئی *y,x* هم نسبت به *v,u* وجود دارد و همگی با هم صفر نمی شوند. در این صورت

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,dudv$$

که در اینجا R' تصویر R در صفحه uv است. همچنین $J(u,v)$ ژاکوبی یا ژاکوبین v,u خوانده می‌شودکه با نماد $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ هم نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

می‌توان ثابت کرد که $J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)}$

بطوریکه:

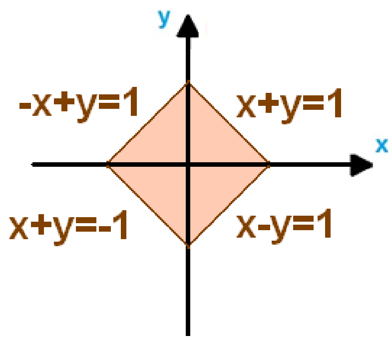
$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

مثال 1:

با تغییر متغیر $v = x - y$, $u = x + y$ مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_R e^{x-y}dxdy$ که در آن ناحیه

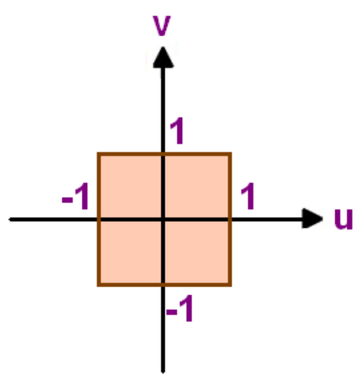
R به صورت $R: |x| + |y| \leq ۱$ تعریف می شود.

حل) در این حالت در صورت مسئله تغییر متغیر داده شده است و خواسته می شود که با این تغییر متغیر خاص مسئله را حل کنید. ناحیه R را رسم می کنیم و با تغییر متغیر داده شده مرزهای آن را یک به یک تصویر می کنیم.



شکل 70

$$x+y=1 \Rightarrow u=x+y=1 \Rightarrow u=1$$
$$x-y=1 \Rightarrow v=x-y=1 \Rightarrow v=1$$
$$x+y=-1 \Rightarrow u=x+y=-1 \Rightarrow u=-1$$
$$-x+y=1 \Rightarrow v=x-y=-1 \Rightarrow v=-1$$



شکل71

اکنون لازم است مقدار ژاکوبی را به دست آوریم.

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

در این مسئله تعیین x و y بر حسب u و v بسیار ساده است .

$$x = \frac{۱}{۲}(u + v)$$

$$y = \frac{۱}{۲}(u - v)$$

و در نتیجه

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{vmatrix} = -\frac{۱}{۲}$$

ولی همواره چنین نیست که بتوان به راحتی x و y را از uو v به دست آورد. با توجه به رابطه

$J(u,v) = \frac{۱}{J(x,y)}$ می توان مقدار $J(x,y)$ که به صورت زیر تعریف می شود را محاسبه کرده و با معکوس کردن آن مقدار $J(u,v)$ را به دست آورد.

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

دقت کنید که در این محاسبه الزامی به تعیین x و y بر حسب u و v نیست و با رابطه فوق به راحتی $J(u,v)$ به دست می آید.

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}=-۲ \Rightarrow J(u,v)=-\frac{۱}{۲}$$

$$\iint_R e^{x-y}dxdy=\iint_{R'} e^u \left|J(u,v)\right|dudv$$

$$=\int_{-۱}^{۱}\int_{-۱}^{۱} e^u \times \frac{۱}{۲}dudv=\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} e^u \Big|_{-۱}^{۱} dv$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}(e-e^{-۱})dv=۲\times\frac{۱}{۲}(e-e^{-۱})=e-e^{-۱}$$

برای استفاده از تغییر متغیر کلی حالات زیر وجود دارد:

1- در صورت مسئله گفته می‌شود که از تغییر متغیر *x=x(u,v)* و *y=y(u,v)* استفاده کنید.(مانند مثال 1)

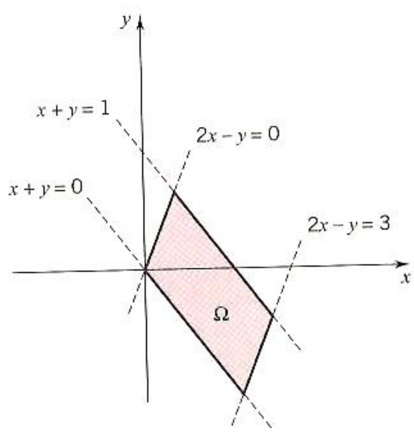
2- از روی حدود ناحیه انتگرال‌گیری تغییر متغیر حدس زده می‌شود. .(مانند مثال 2و3)

3- از روی تابع تحت انتگرال تغییر متغیر حدس زده می شود. .(مانند مثال4)

مثال 2: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

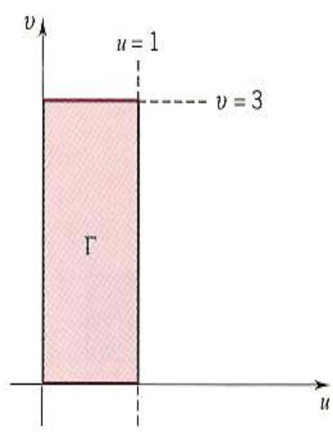
$$\iint_R (x+y)^2\,dxdy \qquad R: x+y=0, \quad x+y=1$$
$$2x-y=0, \quad 2x-y=3$$

مرزهای ناحیه *R* خطوط موازی هستند. اگر این انتگرال را در دستگاه مختصات دکارتی استفاده کنیم باید چند انتگرال را محاسبه کنیم.



شکل 72

اما اگر به موازی بودن مرزها توجه کنیم، می‌توانیم از تغییر متغیر زیر استفاده کنیم :



شکل 73

این تغییر متغیر ناحیه متوازی الاضلاع Ω را به ناحیه مستطیل شکل Γ در صفحه ***uv*** تبدیل می کند.

$$u = x + y, \quad v = 2x - y$$

$$x + y = 0 \Rightarrow u = 0 \quad 2x - y = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$x + y = 1 \Rightarrow u = 1 \quad 2x - y = 3 \Rightarrow v = 3$$

$$\mathrm{J(x, y)} = \frac{1}{\mathrm{J(u, v)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x + y = u \\ 2x - y = v \end{cases} \Rightarrow y = \frac{(2u - v)}{3}, \quad x = \frac{u + v}{3}$$

$$\iint_R (x + y)^2 dxdy = \iint_{R'} \frac{1}{3} u^2 dudv = \frac{1}{3} \iint_{R'} u^2 dudv$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^3 \int_0^1 u^2 dudv = \frac{1}{3} \int_0^3 dv \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}(3)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

نکته :

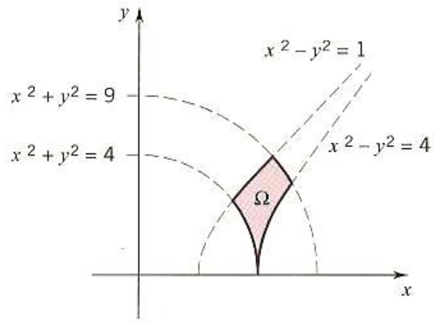
در تبدیل انتگرال از دستگاه مختصات کارتزین به دستگاه جدید حتما باید قدر مطلق ژاکوبی در نظر گرفته شود

زیرا مساحت جزیی dA به مساحت جزیی dA' تبدیل می شود که مقداری مثبت است.

مثال3 : مطلوبست انتگرال $\iint xydxdy$

روی ناحیه R که عبارتست از:

$$R: \; x^2 + \mathrm{y}^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 4$$



شکل 74

بااستفاده از تغییر متغیر ها به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = u \\ x^۲ - y^۲ = v \end{cases}$$

ناحیه جدید به صورت $v = ۴$ $\quad v = ۱$ $\quad u = ۹$ $\quad u = ۴$ تعریف خواهد شد.

و در نتیجه $u - v = 2y^2$ $\quad u + v = 2x^2,$

قرار می دهیم : $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{u^2 - v^2}}$

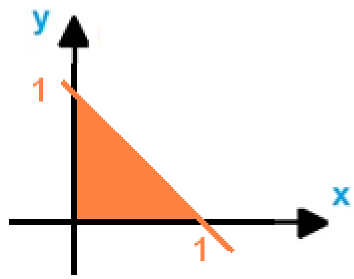
$$\int_{v=۱}^{۴} \int_{u=۴}^{۹} \sqrt{\frac{u+v}{۲}} \sqrt{\frac{u-v}{۲}} \frac{۱}{۴\sqrt{u^۲ - v^۲}} dudv$$

$$= \iint \frac{۱}{۸} dudv = \frac{۱}{۸}(area \quad of \quad R) = \frac{۱۵}{۸}$$

مثال 4 : مطلوبست محاسبه $\iint_R cos \frac{x-y}{x+y} dxdy$ که در آن

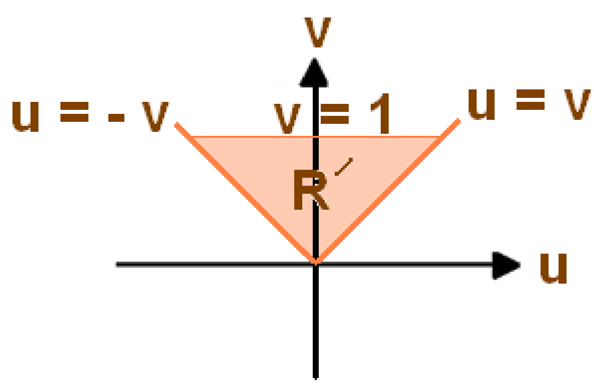
R : x=0 , y=0 , x+y=1

در این مسئله تغییر متغیر از روی تابع تحت انتگرال تشخیص داده می‌شود:



شکل 75

ابتدا مرزهای ناحیه را تصویر می کنیم:



شکل 76

$$x-y=u$$
$$x+y=v$$
$$x=۰\Rightarrow ۰-y=u\Rightarrow u=-v$$
$$۰+y=v$$
$$y=۰\Rightarrow x-۰=u\Rightarrow u=v$$
$$x+۰=v$$
$$x+y=۱\Rightarrow v=۱$$
$$R':\begin{cases} u=v \\ u=-v \\ v=۱ \end{cases}$$

$$\iint_R cos\frac{x-y}{x+y}dxdy=\iint_{R'} cos\frac{u}{v}\,|\,J(u,v)\,|\,dudv$$

$$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}$$

$$\iint_R cos\frac{x-y}{x+y}dxdy=\int_{-1}^{0}\int_{v=-u}^{v=1} cos\frac{u}{v}\times\frac{1}{2}dvdu+\int_0^1\int_{v=u}^{1} cos\frac{u}{v}\times\frac{1}{2}dvdu$$
$$=\int_0^1\int_{u=-v}^{u=+v} cos\frac{u}{v}\times\frac{1}{2}dvdu=\frac{1}{2}\int_0^1 v\,sin\frac{u}{v}\Big|_{u=-v}^{u=v}dv$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 v(sin1+sin1)dv=\frac{1}{2}sin1$$

تمرین :

1- $\iint_S xdxdy$ را بیابید، اگر S قرص $x^2+y^2\leq 2$ است.

2- مطلوبست محاسبه $\iint_R ydA$ که در آن *R* ناحیه محدود به نیمه بالایی کاردیوئید *r=1+cosϑ* است.

3- حجم محدود به دو سهموی $z = x^2 + y^2$ و $3z = 4 - x^2 - y^2$ را بیابید.

4- $\iint_{|x|+|y|\le a} e^{x+y} dxdy$ را محاسبه کنید.

5- $\iint_R (x^2 + y^2)dxdy$ که در آن *R* ناحیه واقع در ربع اول مختصات محدود به $x^2 - y^2 = 1, xy = 1, y = x, y = 0$.

6- مساحت ناحیه واقع در ربع اول مختصات محدود به منحنی‌های *y=2x, y=x, xy=4, xy=1* را محاسبه کنید.

7- حجم محدود به دو استوانهٔ $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2$ واقع در یک هشتم اول مختصات را بیابید.

8- $\iint_S (x+y)dxdy$ که در آن *S* ناحیه واقع در ربع اول مختصات واقع درون قرص $x^2 + y^2 \le a^2$ و زیر خط $y = \sqrt{3}x$ باشد.

خلاصه :

تعریف انتگرال دوگانه

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \Delta_i x \Delta_j y = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

کاربردهای انتگرال دوگانه

1- محاسبه حجم:

$$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

2- محاسبه مساحت قاعده :

$$A = \iint_R dx\,dy$$

3-محاسبه جرم ورقه ناهمگن:

$$M = \iint_R \rho(x,y)\,dx\,dy$$

4- گشتاورهای جرم نسبت به محورها

$$M_x = \iint_R y\rho(x,y)\,dx\,dy \quad \text{و} \quad M_y = \iint_R x\rho(x,y)\,dx\,dy$$

5- مرکز جرم ورقه ناهمگن

$$\overline{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{M_y}}{\mathrm{M}} \quad \text{و} \quad \overline{\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{M_x}}{\mathrm{M}}$$

6- گشتاورهای ماند نسبت به محورها

$$I_y = \iint_R x^2\rho(x,y)\,dx\,dy \quad \text{و} \quad I_x = \iint_R y^2\rho(x,y)\,dx\,dy$$

7- گشتاور نسبت به مبدأ

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x,y)\,dx\,dy$$

خواص انتگرال های دو گانه

اگر $\boldsymbol{G = g(x,y)}$ $\quad$ $\boldsymbol{F = f(x,y)},$ توابعی پیوسته روی ناحیه D باشند آنگاه

1- $$\iint_D kF(x,y,z)dV = k\iint_D F(x,y,z)dV$$

k یک عدد دلخواه است.

2- مجموع و تفاضل

$$\iint_D (F \pm G)dV = \iint_D FdV \pm \iint_D GdV$$

3-

$$\iint_D GdV \geq 0 \qquad if \quad F \geq 0 \quad on \quad D$$

4-

$$\iint_D FdV \geq \iint_D GdV \qquad if \quad F \geq G \quad on \quad D$$

5-اگر ناحیه انتگرالگیری به چند ناحیه تقسیم شود

$$D = D_1 + D_2 + \cdots \ldots + D_n$$

$$\iint_D FdV = \iint_{D_1} FdV + \iint_{D_2} FdV + \ldots. + \iint_{D_n} FdV$$

محاسبه انتگرال دوگانه :

استفاده از منظم بودن در امتداد محورy ها

$$V = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dydx$$

استفاده از منظم بودن در امتداد محورx ها

$$V = \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dxdy$$

به این انتگرال ها ، انتگرال های مکرر برای محاسبه انتگرال دوگانه گویند.

رابطه بین مختصات قطبی و مختصات کارتزین

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

منحنی های قطبی

در مختصات قطبی چند دسته منحنی بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

- دوایر
  - مرکز بر مبدا مختصات

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$r = a$

- مرکز بر محور x ها

$(x-a)^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{a}^2$

$r = 2a\cos(\theta)$

- مرکز بر محور y ها

$x^2 + (\mathrm{y}-a)^2 = a^2$

$r = 2a\sin(\theta)$

- منحنی هایی با معادلات $\begin{gathered} r = a \pm b\cos\theta \\ r = a \pm b\sin\theta \end{gathered}$ (در حالت خاص $a=b$ معروف به منحنی های دلگون)
- منحنی های چندپر

با معاد له $r = a\sin(n\theta)$ و یا $r = a\cos(n\theta)$

- منحنی های پروانه گون (لمینسکات) با معادلات $r^2 = a^2\cos 2\theta, \quad r^2 = a^2\sin 2\theta$

<u>تبدیل انتگرال دوگانه از دستگاه مختصات دکارتی به دستگاه مختصات قطبی</u>

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f[r\cos\theta, r\sin\theta]\, r dr d\theta$$

تغییر متغیر کلی در انتگرال های دوگانه

$$\iint_{R} f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,dudv$$

که در اینجا R' تصویر *R* در صفحه *uv* است. همچنین *J(u,v)* ژاکوبی یا ژاکوبین *v,u* خوانده می‌شودکه با نماد $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ هم نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

جدول مرجع انتگرالگیری:

$\int du = u + c$ $\int k du = ku + c$ $\int (du + dv) = \int du + \int dv$ $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$ $\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + c$ $\int \sin u du = -\cos u + c$ $\int \cos u du = \sin u + c$ $\int \sec^2 u du = \tan u + c$ $\int \csc^2 u du = -\cot u + c$ $\int \sec u \tan u du = \sec u + c$ $\int \csc u \cot u du = -\csc u + c$	$\int \tan u du = -\ln\|\cos u\| + c = \ln\|\sec u\| + c$ $\int \cot u du = \ln\|\sin u\| + c = -\ln\|\csc u\| + c$ $\int e^u du = e^u + c$ $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c \qquad (a > 0, a \neq 1)$ $\int \sinh u du = \cosh u + c$ $\int \cosh u du = \sinh u + c$ $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + c$ $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c$ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left\|\frac{u}{a}\right\| + c$ $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \sinh^{-1} \frac{u}{a} + c \qquad (a > 0)$ $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{u}{a} + c \qquad (u > a > 0)$

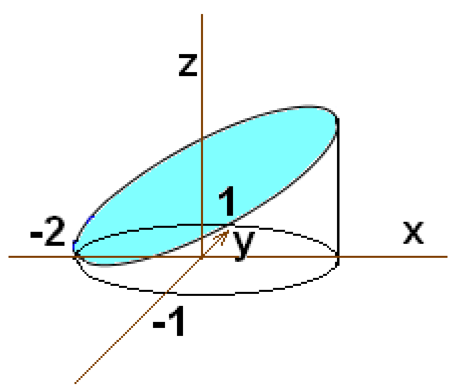
تمرینات حل شده :

1- حجم محدود به استوانه $x^{۲}+۴y^{۲}=۴$ و صفحه $z=۰$ و صفحه $z=۲+x$ را رسم و آن را محاسبه کنید:

حل)

برای رسم شکل ابتدا رویه استوانه ای را رسم می کنیم. این حجم از پایین به صفحه $z=۰$ محدود است و از بالا به وسیله صفحه $z=۲+x$ محدود می شود. می دانیم که وقتی استوانه و صفحه به طور مورب همدیگر را قطع می کنند، مقطع به شکل بیضی است. برای آن که شکل را به طور دقیق تر رسم کنیم، ابتدا محل تلاقی صفحه $z=۰$ و صفحه $z=۲+x$ را مشخص می کنیم، یعنی دو معادله را با هم حل می کنیم.

$$\begin{cases} z=۲+x \\ z=۰ \end{cases} \Rightarrow x=-۲$$



پس صفحه $z=۲+x$ صفحه $z=۰$ را در نقطه $(-۲,۰,۰)$ قطع می کند. از طرفی یال $x=۲$ در ارتفاع $z=۴$ توسط این صفحه قطع می شود. با این اطلاعات و داشتن شکل مقطع قسمتی از صفحه که در داخل استوانه قرار می گیرد و حجم را محدود می کند رسم می شود. مشخص است که در این حالت تصویر حجم پای استوانه یعنی بیضی $x^{۲}+۴y^{۲}\leq ۴$ است.

$$R: x^{۲} + ۴y^{۲} \le ۴$$

$$\frac{x^{۲}}{۴} + y^{۲} \le ۱$$

$$V = \iint\limits_{R: x^{۲}+۴y^{۲}\le ۴} (۲ + x)dxdy$$

در مسائلی که با بیضی ها کار می کنید می توانید با تغییر متغیر بیضی را به یک دایره واحد تبدیل کرد.

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} + ۱ \Rightarrow \frac{x}{a} = u \qquad \frac{y}{b} = v \Rightarrow u^{۲} + v^{۲} = ۱$$

بعد از تبدیل بیضی به دایره، به جای استفاده از مختصات دکارتی، از مختصات قطبی استفاده کنید. اما می توان این دو تغییر متغیر را نیز با هم اعمال کرد:

$$\frac{x}{a} = r\cos\theta, \qquad \frac{y}{b} = r\sin\theta \Rightarrow x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta$$

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱ \Rightarrow r^{۲} = ۱ \Rightarrow r = ۱$$

در این حالت ژاکوبی برابر است با :

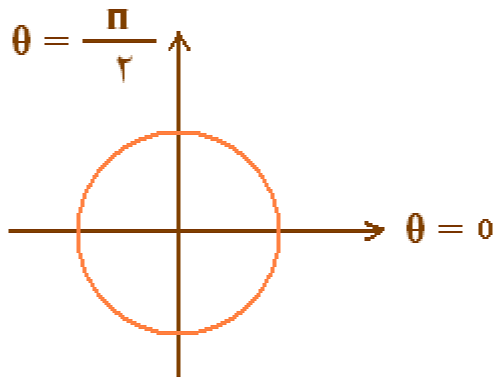
$$J(u,v) = abr$$

$$\frac{x}{۲} = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \qquad , J(r,\theta) = ۲r$$

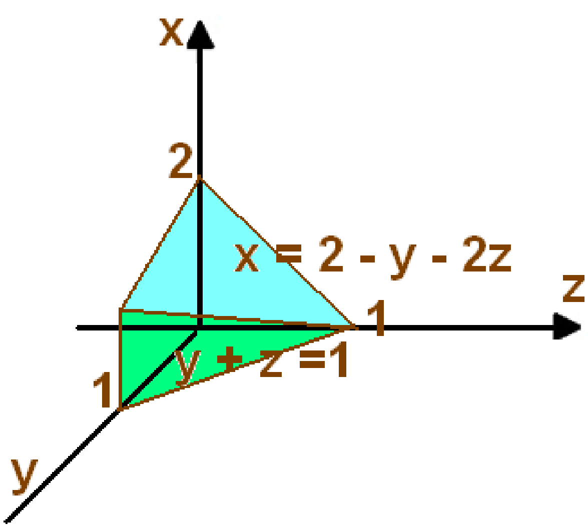
در این مسئله

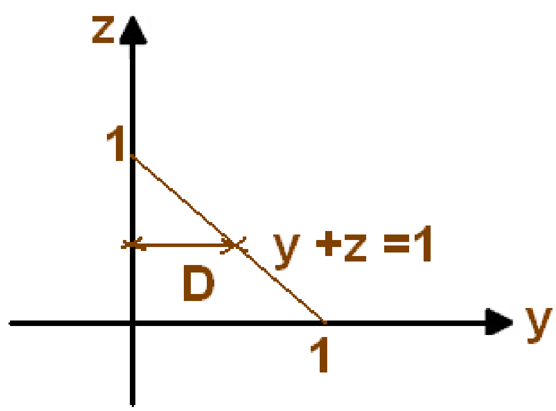
$$V = \iint\limits_{R} (۲ + x)dxdy = \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱} (۲ + r\cos\theta)۲rdrd\theta$$

$$= \int_{۰}^{۲\pi} ۴d\theta \int_{۰}^{۱} rdr + ۲\int_{۰}^{۲\pi} \cos\theta d\theta \int_{۰}^{۱} r^{۲}dr = ۴ \times ۲\pi \times \frac{۱}{۲} r^{۲}\Big|_{۰}^{۱} = ۴\pi$$



2- حجم جسم واقع در $\frac{۱}{۸}$ اول مختصات محدود به صفحات $x+y+۲z=۲$, $y+z=۱$ را رسم و آن را محاسبه کنید.





$$۰ \le z \le ۱$$

$$۰ \le y \le ۱ - z$$

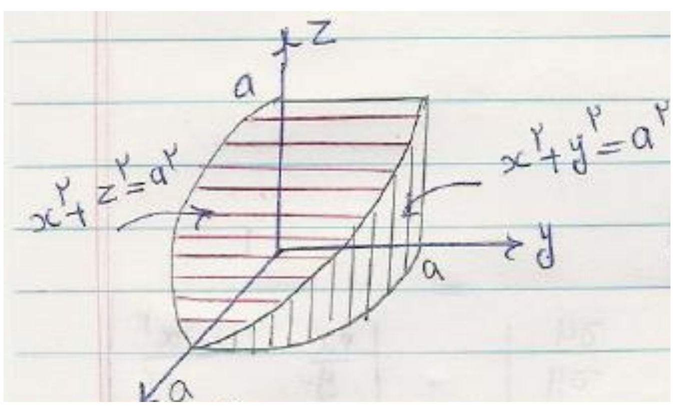
$$V=\iint_D (۲-y-۲z)dydz=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱-z}(۲-y-۲z)dydz$$

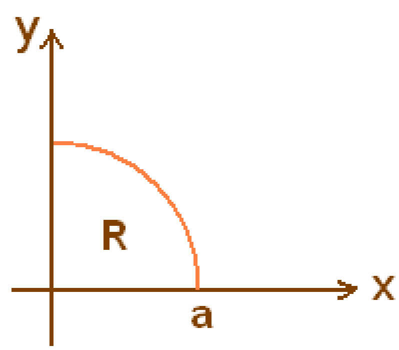
$$=\int_{۰}^{۱}(۲y-\frac{۱}{۲}y^{۲}-۲yz)\Big|_{۰}^{۱-z}dz=\int_{۰}^{۱}[۲(۱-z)-\frac{۱}{۲}(۱-z)^{۲}-۲z(۱-z)]dz$$

$$=\int_{۰}^{۱}[۲-۲z-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}z^{۲}+z-۲z+۲z^{۲}]dz$$

$$=\frac{۱}{۲}$$

3- مطلوبست تعیین حجم جسم واقع در $\frac{۱}{۸}$ اول مختصات و محدود به دو استوانه $\begin{cases} x^{۲}+z^{۲}=a^{۲} \\ x^{۲}+y^{۲}=a^{۲} \end{cases}$





$$V=\iint_D z\,dxdy=\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dydx$$

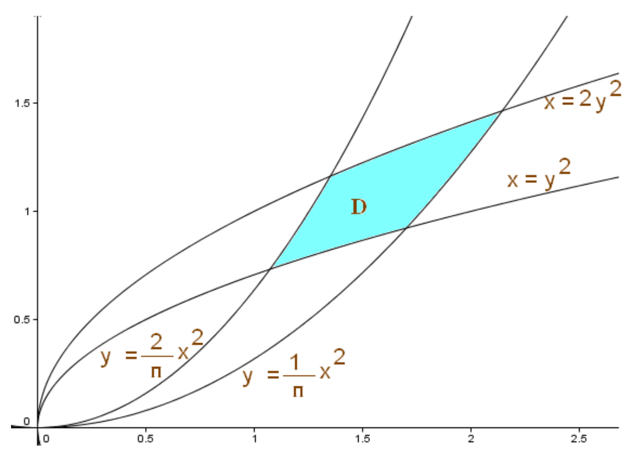
$$=\int_{x=0}^{x=a}\sqrt{a^2-x^2}\,y\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=a}(a^2-x^2)dx=a^2x-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^a$$

$$=a^3-\frac{1}{3}a^3=\frac{2}{3}a^3$$

4- مطلوبست محاسبه $\iint_D \frac{x^2\sin xy}{y}dxdy$ که در آن D ناحیه محدود به منحنی های زیر است:

$$D: x^2=\frac{\pi y}{2}\qquad x^2=\pi y\qquad y^2=\frac{x}{2}\qquad y^2=x$$



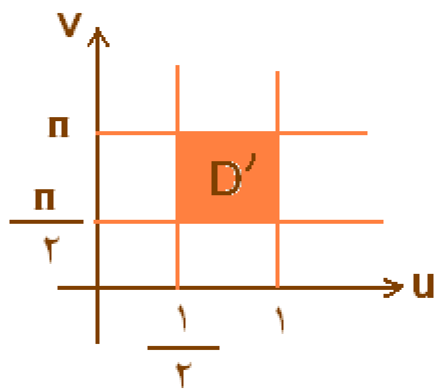
با توجه به معادلات مرزها ، تغییر متغیر زیر مناسب می باشد:

$$\frac{x^2}{y}=u\qquad \frac{y^2}{x}=v$$

این تغییر متغیر، مرزها را به صورت زیر تصویر می کند:

$$\begin{cases} \dfrac{x^{۲}}{y} = \dfrac{\pi}{۲} \\ \dfrac{x^{۲}}{y} = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{\pi}{۲} \\ u = \pi \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \dfrac{y^{۲}}{x} = \dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{y^{۲}}{x} = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{۱}{۲} \\ v = ۱ \end{cases}$$

در نتیجه تصویر یک مستطیل خواهد بود.



$$J(u,v)=\frac{۱}{J(x,y)}=\frac{۱}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{۱}{\begin{vmatrix}\frac{۲x}{y} & -\frac{x^۲}{y^۲}\\ -\frac{y^۲}{x^۲} & \frac{۲y}{x}\end{vmatrix}}$$

$$J(u,v)=\frac{۱}{\frac{۴yx}{xy}-\frac{x^۲y^۲}{x^۲y^۲}}=\frac{۱}{۴-۱}=\frac{۱}{۳}$$

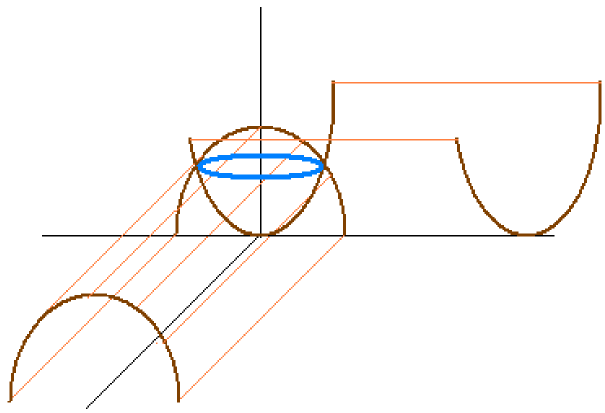
$$I=\iint_D \frac{x^۲\sin(xy)}{y}dxdy=\iint_{D'} u\sin uv\left|J(u,v)\right|dudv$$

$$=\frac{۱}{۳}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} u\sin uv dvdu=-\frac{۱}{۳}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} \cos uv\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱}du$$

$$=\frac{۱}{۳}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}(\cos\frac{u}{۲}-\cos u)du=\frac{۱}{۳}(۲\sin\frac{u}{۲}-\sin u)\Big|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

5- حجم واقع در زیر رویه استوانه ای $z=۱-y^۲$ و بالای رویه استوانه ای $z=x^۲$ را بیابید:

$$\begin{cases} z=x^۲\\ z=۱-y^۲\end{cases}\Rightarrow x^۲+y^۲=۱$$



وقتی معادله دو رویه را با هم حل می کنیم و یکی از دو متغیر بین این دو معادله حذف می شود، به معادله ای می رسیم که شامل دو متغیر است.

اگر این معادله در فضای سه بعدی در نظر گرفته شود ، یک رویه استوانه ایست که منحنی تلاقی دو رویه روی آن هم قرار دارد. اگر این معادله را در فضای دو بعدی در نظر بگیریم محل تلاقی رویه استوانه ای با صفحه ایست که متغیرهای آن در معادله ظاهر شده است. یعنی وقتی به معادله $x^۲ + y^۲ = ۱$ می رسیم و آن را به عنوان یک معادله در فضای دو بعدی در نظر می گیریم، این محل تلاقی رویه استوانه ای با معادله $x^۲ + y^۲ = ۱$ با صفحه xy است. تصویر حجم محدود به این دو رویه ناحیه $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ است.

$$V = \iint_D (۱ - y^۲ - x^۲)dxdy$$

به تابع تحت انتگرال دقت کنید که تفاضل دو رویه است.

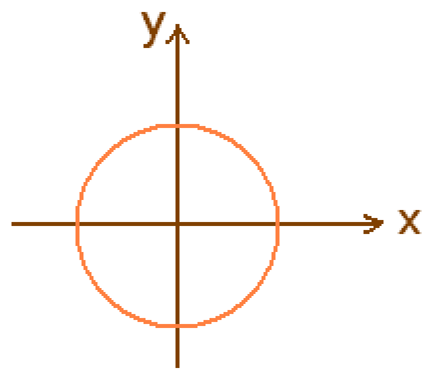
نکته:

یک رویه حجم را از بالا محدود کرده و یک رویه هم حجم را از پایین محدود کرده است. بنابراین اگر حجمی از بالا به رویه $z = f(x, y)$ و از پایین به رویه $z = g(x, y)$ محدود شده باشد ، تابع تحت انتگرال که ارتفاع را در این حجم نشان می دهد ، تفاضل دو رویه است.

$$V = \iint_D (f(x, y) - g(x, y))dxdy$$

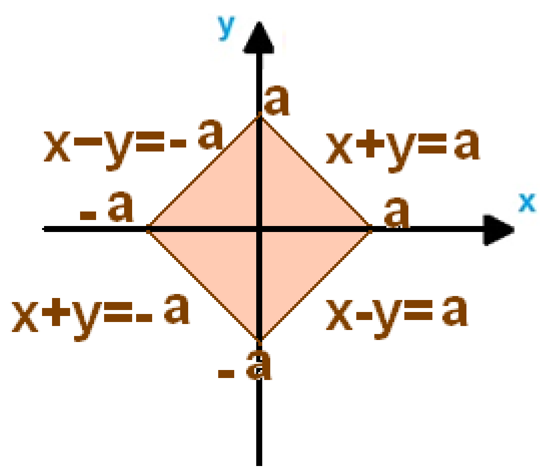
$$V = \iint_{x^۲+y^۲\leq۱} (۱ - y^۲ - x^۲)dxdy$$

چون تصویر یک دایره است ، راحت تر است که از مختصات قطبی استفاده شود.



$$\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱}(۱-r^{۲})r\,dr\,d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}\left.\frac{۱}{۲}r^{۲}-\frac{۱}{۴}r^{۴}\right|_{۰}^{۱}d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}\right)d\theta=\frac{۱}{۴}\times۲\pi=\frac{\pi}{۲}$$

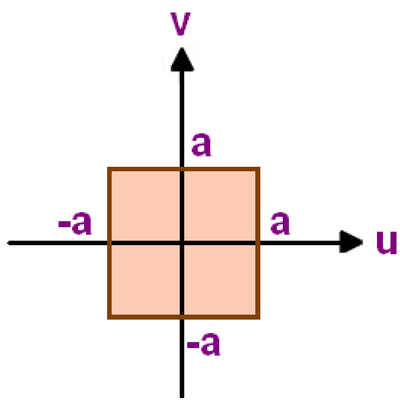
6- مطلوبست محاسبه $\iint\limits_{|x|+|y|\le a} e^{x+y}\,dxdy$:



در این حالت تغییر متغیر زیر مناسب خواهد بود. این تغییر متغیر از روی معادلات مرزها قابل تشخیص است:

$$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x+y=a \\ x-y=-a \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u=a \\ u=-a \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x-y=a \\ x+y=-a \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v=a \\ v=-a \end{matrix}$$



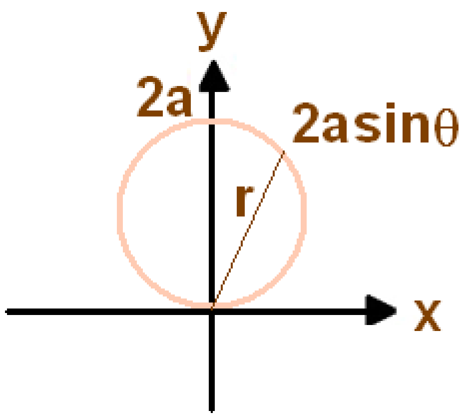
$$J(u,v)=\frac{۱}{J(x,y)}=\frac{۱}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=-\frac{۱}{۲}$$

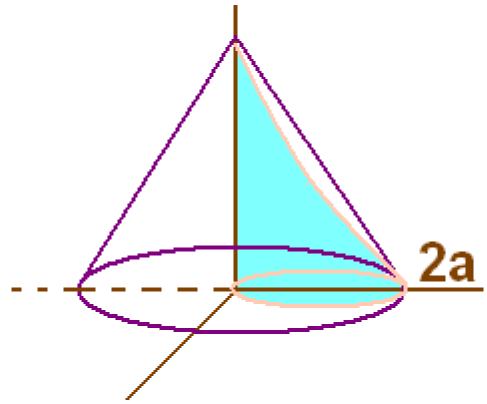
$$\iint\limits_{|x|+|y|\le a} e^{x+y}dxdy=\iint\limits_{D'} e^{u}\times\frac{۱}{۲}dudv=\frac{۱}{۲}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{u}dudv$$

وقتی که حدود انتگرال مقادیر ثابت باشد و متغیرهای تابع تحت انتگرال از هم جدا شود ، می توان انتگرال را به صورت حاصلضرب دو انتگرال یگانه محاسبه کرد.

$$\frac{۱}{۲}\int_{-a}^{a}dv\int_{-a}^{a}e^{u}du=\frac{۱}{۲}\times ۲a\times e^{u}\Big|_{-a}^{a}=a(e^{a}-e^{-a})=۲a\sinh a$$

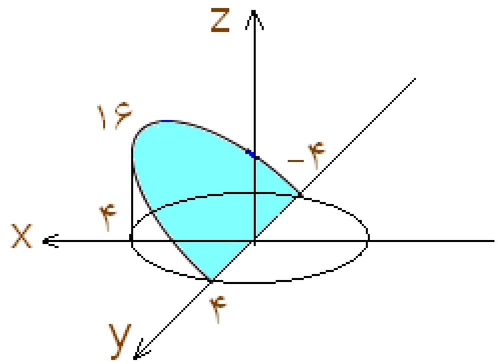
7- حجم واقع در بالای صفحه xy و درون مخروط $z=۲a-\sqrt{x^۲+y^۲}$ و درون استوانه $x^۲+y^۲=۲ay$ را محاسبه کنید:


y
2a
2asinθ
r
x


2a

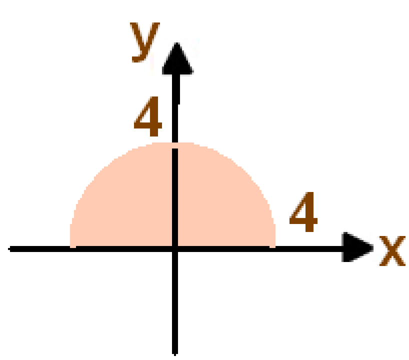
$$0 \le \theta \le \pi$$
$$0 \le r \le 2a\sin\theta$$
$$V = \iint_R (2a - \sqrt{x^2 + y^2})dxdy$$
$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2a\sin\theta} (2a - r)rdrd\theta$$
$$= \int_0^{\pi} (ar^2 - \frac{1}{3}r^3)\Big|_0^{2a\sin\theta} d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \left[a(2a\sin\theta)^2 - \frac{1}{3}(2a\sin\theta)^3 \right] d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} 4a^3\sin^2\theta - \frac{8a^3}{3}\sin^3\theta)d\theta$$
$$= 4a^3\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta - \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi} \sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta$$
$$= 2a^3(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_0^{\pi} - \frac{8a^3}{3}(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta)\Big|_0^{\pi}$$
$$= 2a^3(\pi) - \frac{8a^3}{3} \times 2(1 - \frac{1}{3})$$
$$= 2\pi a^3 - \frac{32a^3}{9} = a^3(2\pi - \frac{32}{9})$$

8- مطلوبست محاسبه حجم جسم محدود به صفحات $z = 0$, $z = 4x$ و استوانه $x^2 + y^2 = 16$.



ابتدا محل تلاقی صفحه $z=۰$, $z=۴x$ را مشخص می کنیم. از حل این دو معادله به معادله $x=۰$ می رسیم. یعنی این دو صفحه همدیگر را روی محور y ها قطع می کنند. شکل ، حجم زیر صفحه $z=۴x$ و بالای صفحه $z=۰$ و داخل استوانه $x^۲+y^۲=۱۶$ را نشان می دهد. مشخص است که تصویر حجم ، نیم دایره $x^۲+y^۲=۱۶$ و $y\geq ۰$ می باشد.

$$V=\iint_D ۴xdxdy$$



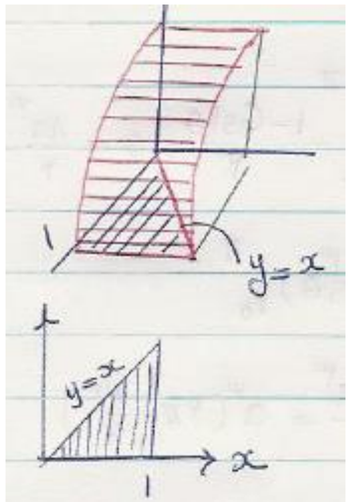
چون تصویر ، نیم دایره است، مختصات قطبی مناسب تر از مختصات دکارتی است (از تقارن استفاده شده است)

$$V=۴\times۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{۴} r\cos\theta rdrd\theta=۴\times۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos\theta d\theta\int_۰^{۴} r^۲dr$$

$$=۴\times۲(\sin\theta)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}\times\frac{۱}{۳}r^۳\Big|_۰^{۴}=۸\times\frac{۶۴}{۳}$$

دقت کنید اگر از تقارن استفاده نشود ، به دلیل تقارن (تصویر) نسبت به محور y ها و مثبت و منفی بودن x در این ناحیه ، حاصل صفر خواهد شد.

9- حجم زیر استوانه $z=۱-x^{۲}$ و بالای ناحیه $۰\le x\le ۱$ $\quad ۰\le y\le x$ را محاسبه کنید:



$$V=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{x}(۱-x^{۲})dydx=\int_{۰}^{۱}x(۱-x^{۲})dx$$

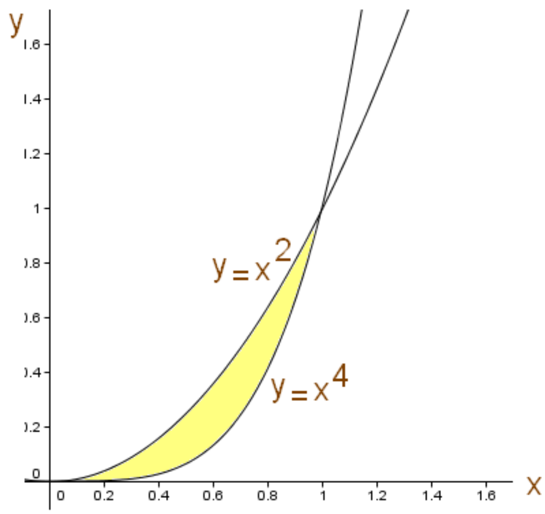
$$=\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{۴}x^{۴}\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۲}$$

10- ناحیه D را رسم کنید و ترتیب انتگرالگیری را عوض کنید:

الف) $\int_{۰}^{۱}\int_{x^{۴}}^{x^{۲}}f(x,y)dydx$

ب) $\int_{۱}^{۴}\int_{x}^{۲x}f(x,y)dydx$

الف) $x^{۴}\le y\le x^{۲} \qquad ۰\le x\le ۱$



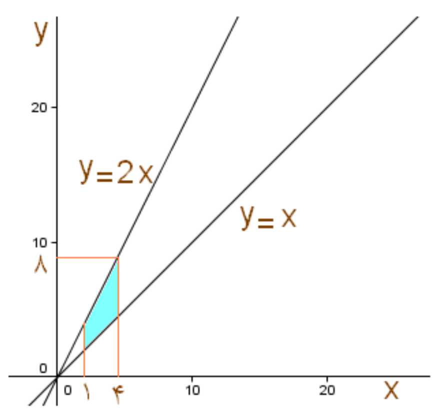
در این حالت از منظم بودن در امتداد محور y ها استفاده شده است.برای تغییر ترتیب انتگرالگیری ، چون ناحیه در امتداد محور x ها هم منظم است ، بنابراین ابتدا تغییرات y را مشخص می کنیم. در این حالت $\cdot \leq y \leq ۱$ سپس y ثابتی در فاصله $[\cdot,۱]$ انتخاب کرده و خطی به موازات محور x ها رسم می کنیم. این خط ابتدا به منحنی $y = x^۲ \Rightarrow x = \sqrt{y}$ و سپس به منحنی $y = x^۴$ و یا $x = \sqrt[۴]{y}$ می رسد. بنابراین

$$\sqrt{x} < y < \sqrt[۴]{x}$$

$$\int_{\cdot}^{۱} \int_{x^۴}^{x^۲} f(x,y)dydx = \int_{\cdot}^{۱} \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[۴]{x}} f(x,y)dxdy$$

ب)

$$\int_{۱}^{۴} \int_{x}^{۲x} f(x,y)dydx$$



برای تغییر ترتیب از منظم بودن در امتداد محور x ها استفاده می کنیم. باید دقت کنیم که اگرچه $۱ \le y \le ۸$ ولی ناحیه از سمت راست و چپ به دو منحنی محدود است.

$$۱ \le y \le ۲ \qquad ۱ \le x \le y$$

$$۲ \le y \le ۴ \qquad \frac{y}{۲} \le x \le y$$

$$۴ \le y \le ۸ \qquad \frac{y}{۲} \le x \le ۴$$

$$\int_{۱}^{۴}\int_{x}^{۲x} f(x,y)dydx = \int_{۱}^{۲}\int_{۱}^{y} f(x,y)dxdy + \int_{۲}^{۴}\int_{\frac{y}{۲}}^{y} f(x,y)dxdy + \int_{۴}^{۸}\int_{\frac{y}{۲}}^{۴} f(x,y)dxdy$$

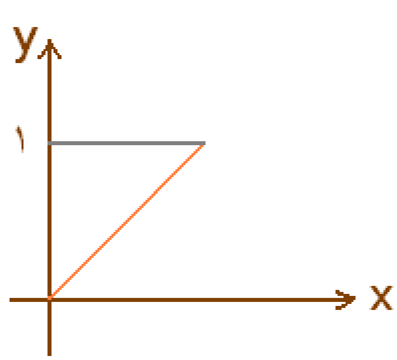
11- انتگرال های زیر را رسم کنید:

الف) $\int_{۰}^{۱}\int_{x}^{۱} x^{۲}e^{y^{۴}}dydx$

ب) $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{\cos^{-۱}y} e^{\sin x}dxdy$

باید حتما تغییر ترتیب انتگرالگیری اعمال شود ، زیرا $\int_{x}^{۱} e^{y^{۴}}dy$ و یا $\int_{۰}^{\cos^{-۱}y} e^{\sin x}dx$ امکان پذیر نیست. پس باید ابتدا نواحی انتگرالگیری را رسم کرده و سپس تغییر ترتیب انتگرالگیری را انجام دهیم:

الف)



$$۰ \le x \le ۱ \qquad x \le y \le ۱$$

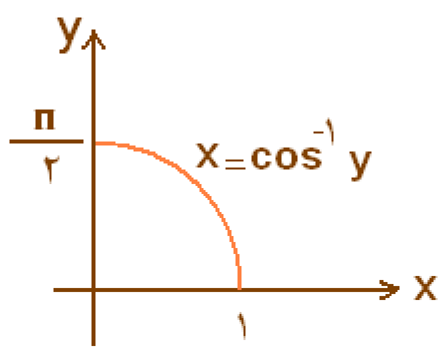
$$۰ \le y \le ۱ \qquad ۰ \le x \le y$$

$$\int_{۰}^{۱} \int_{x}^{۱} x^{۲} e^{y^{۴}} dydx = \int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{y} x^{۲} e^{y^{۴}} dxdy$$

$$= \int_{۰}^{۱} \left. \frac{۱}{۳} x^{۳} \right|_{۰}^{y} e^{y^{۴}} dy = \frac{۱}{۳} \int_{۰}^{۱} y^{۳} e^{y^{۴}} dy$$

$$\left. \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴} e^{y^{۴}} \right|_{۰}^{۱} = \frac{۱}{۱۲}(e-۱)$$

ب)



$$0 \le y \le 1 \qquad 0 \le x \le \cos^{-1} y$$

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \qquad 0 \le y \le \cos x$$

$$\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} e^{\sin x} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos y} e^{\sin x} dydx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{\sin x} dx = e^{\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (e-1)$$

واژه نامه :

Moment of interia	**گشتاور ماند**	**Double integral**	**انتگرال دو گانه**
Rectangular region	**ناحیه منظم**	**Single integral**	**انتگرال یگانه**
Iterated integral	**انتگرال مکرر**	**Norm of the partition**	**نرم افراز**
Repeated integral	**انتگرال مکرر**	**Volume**	**حجم**
Polar coordinate	**مختصات قطبی**	**Area**	**مساحت**
symmetry	**تقارن**	**Mass**	**جرم**
Polar graph	**منحنی قطبی**	**Torque**	**گشتاور جرم**
Cardioid	**منحنی دلگون**	**Center of mass**	**مرکز جرم**
Rose	**منحنی چندپر**	**Reverse the order of integration**	**تغییر ترتیب انتگراگیری**
lemniscate	**منحنی پروانه گون**	**Sobstitution**	**تغییر متغیر**
		jacobian	**ژاکوبین**