

1.1 انواع معادلات دیفرانسیل

یک معادله دیفرانسیل معمولی معادله ای است که در آن متغیر مستقل، تابع (تابع یک متغیره) و مشتقات تابع نسبت به متغیر وجود دارد.

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معادله ای است شامل متغیرهای مستقل، تابع (تابعی با بیش از یک متغیر) و مشتقات جزئی تابع نسبت به متغیرهای مستقل.

در بررسی پدیده های طبیعی و فیزیکی به مدلسازی پدیده پرداخته می شود. اگر پدیده تنها به یک متغیر وابسته باشد، مدل ریاضی آن یک معادله دیفرانسیل معمولی خواهد بود، اما چون اکثر پدیده های به بیش از یک متغیر وابسته اند، مدل ریاضی آنها یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. مدل ریاضی مسائلی در مکانیک سیالات، انتقال حرارت، نظریه الکترومغناطیسی و هم چنین مسائلی در ارتباط با اپیدمی ها (برای مثال.....) و جریان ترافیک و تحلیل های اقتصادی به صورت یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است.

مثال 1:

فرض کنیم u تابعی از دو یا تعداد بیشتری متغیر t (زمان)، x, y باشد. در این مثال به معرفی و مطالعه چند معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می پردازیم:

1- معادله موج یک بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1.1)$$

2- معادله موج دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.1.1)$$

3- معادله گرما ی یک بعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.1.1)$$

4- معادله گرمای دوبعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.1.1)$$

5- معادله لاپلاس دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (5.1.1)$$

6- معادله لاپلاس در مختصات قطبی

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (6.1.1)$$

7- معادله پواسن دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (7.1.1)$$

عبارت $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ در بیشتر معادلات فوق ظاهر شده است. به این عبارت لاپلاسیان u گفته می شود و با $\nabla^2 u$ و یا Δu نشان داده می شود.

مرتبه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه بالاترین مرتبه مشتق جزئی ظاهر شده در معادله است. معادله دیفرانسیل را **خطی** گویند اگر تابع مجهول و مشتقات جزئی در آن همه از درجه یک باشند و حاصلضرب تابع در مشتقات و یا مشتقات در مشتقات نیز در معادله ظاهر نشوند، در غیر این صورت معادله را **غیر خطی** گویند. معادلات دیفرانسیل فوق همگی خطی و مرتبه دوم هستند. اما معادله دیفرانسیل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \quad (8.1.1)$$

خطی نیست، زیرا جمله $u \frac{\partial u}{\partial x}$ در معادله ظاهر شده است.

در حالت کلی می توان یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم از دو متغیر را به صورت زیر نشان داد:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (9.1.1)$$

که در آن G, F, E, C, B, A توابعی از دو متغیر y, x هستند. معادله را همگن گویند اگر $G = 0$ ، در غیر این صورت معادله را غیر همگن گویند. در تمام قسمت های بعد فرض می کنیم که مشتقات آمیخته تابع u از هر مرتبه ای با هم مساویند (برای مثال $u_{xy} = u_{yx}$, $u_{yxx} = u_{xyx} = u_{xxy}$ و غیره). تمام معادلات دیفرانسیل فوق به جز معادله پواسن معادلات خطی مرتبه دوم همگن هستند. در مدلسازی یک پدیده فیزیکی اغلب معادله دیفرانسیل با مجموعه ای از معادلات دیگر ظاهر می شود که رفتار جواب را در مرزهای ناحیه مورد نظر نشان می دهد. به این معادلات **شرایط مرزی** گفته می شود. معادله دیگری که برای تشریح یک پدیده فیزیکی ظاهر می شود مقدار اولیه در لحظه $t = 0$ ، یا **شرط اولیه** است. به معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی همراه با شرایط مرزی و شرایط اولیه یک مسئله مقدار اولیه – مرزی و یا به طور ساده مسئله مقدار مرزی می گویند.

۲.۱ بررسی پدیده های فیزیکی

بررسی پدیده های فیزیکی شامل دو قسمت می باشد

- 1- مدلسازی مسئله و تشکیل معادله حاکم بر رفتار پدیده
- 2- حل معادله با استفاده از شرایط حاکم بر آن

تعدادی از پدیده های فیزیکی مدلسازی شده اند، ولی در حالت کلی برای مدلسازی مسئله بایستی قوانین فیزیکی حاکم بر پدیده را در نظر گرفت. مدل ریاضی پدیده های فیزیکی و طبیعی بسته به پیچیدگی پدیده ممکن است به معادلات مختلفی از قبیل معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی، معادلات انتگرالی و یا ... تبدیل گردد.

۳.۱ مدلسازی معادله موج در حالت یک بعدی

یک تار کشسان که دو انتهای آن در دو نقطه ثابت شده، مانند یک سیم گیتار، را در نظر بگیرید. در لحظه ای که آنرا لحظه $t = 0$ می نامیم با ایجاد یک ضربه روی تار یک جابجایی کوچک در آن ایجاد می کنیم و سپس تار رها می شود تا در صفحه ارتعاش نماید. فرض می کنیم که $u(x, t)$ حرکت تار را در صفحه xu در لحظه t در نقطه ای به طول x نشان می دهد. در حالت خاص $u(x, 0)$ شکل اولیه تار را نشان می دهد. می خواهیم تابع $u = u(x, t)$ را به عنوان وضعیت تار در لحظه $t > 0$ و به ازای هر $0 < x < l$ محاسبه می کنیم. $u(x, t)$ را تابع مکان تار می نامیم. در اینجا فرض می کنیم که:

- 1- تار دارای دانسیته طولی ثابت باشد، به عبارت دیگر تار از جنسی همگن است.
- 2- تار کاملاً کشسان است و در مقابل کشش مقاومتی از خود نشان نمی دهد.
- 3- ارتعاشات تار بسیار کوچک بوده و در صفحه xu انجام می شود.

مدلسازی ارتعاشات آزاد تار

فرض می کنیم هیچ نیروی خارجی روی تار اعمال نمی شود و فرض می کنیم که وزن تار در مقایسه با کشش ایجاد شده در تار قابل صرفنظر کردن باشد. بنابراین در اولین تجربه، تنها نیروی موثر روی تار نیروی کشش است.

فرض کنیم T نمایشگر قدرمطلق کشش در حالت تعادل باشد. این کشش در تمام نقاط تار یکسان است و چون تغییر در طول تار در هنگام حرکت آن قابل صرفنظر کردن است، می توان فرض کرد که کشش در طول ارتعاش ثابت است. همچنین چون دو انتهای تار بسته شده است، کشش در هر نقطه به صورت مماس اثر می کند. اکنون قطعه ای از تار واقع بین دو نقطه A, B با طولهای x و $x + \Delta x$ را در نظر بگیرید. با به کار بردن قانون دوم نیوتن، نیروهای وارد بر این قطعه تار در اثر کشش برابر است با حاصلضرب شتاب مرکز ثقل این قطعه در جرم آن. این رابطه یک معادله برداری است. مولفه عمودی آن برابر است با:

$$T(x + \Delta x) \sin(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \sin(\theta) = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x}, t), \quad (1.3.1)$$

که در آن مرکز جرم این قطعه تار و $T(x, t) = |T(x, t)|$ است. از طرفی چون فرض بر این است که تار در امتداد افقی هیچ گونه حرکتی ندارد، بنابراین مجموع نیروهای وارد بر این قطعه برابر با صفر است:

$$-T(x, t) \cos(\theta) + T(x + \Delta x, t) \cos(\theta + \Delta\theta) = 0, \quad (2.3.1)$$

بنابراین:

$$T(x + \Delta x, t) \cos(\theta + \Delta\theta) = T(x, t) \cos(\theta) = k, \quad (3.3.1)$$

طرفین معادله (1.3.1) را بر (3.3.1) تقسیم می کنیم:

$$\frac{T(x + \Delta x) \sin(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \sin(\theta)}{k} = \frac{\rho}{k} \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x}, t), \quad (4.3.1)$$

$$\frac{T(x + \Delta x) \sin(\theta + \Delta\theta)}{T(x + \Delta x, t) \cos(\theta + \Delta\theta)} - \frac{T(x, t) \sin(\theta)}{T(x, t) \cos(\theta)} = \frac{\rho}{k} \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x}, t), \quad (5.3.1)$$

$$\tan(\theta + \Delta\theta) - \tan(\theta) = \frac{\rho}{k} \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x}, t), \quad (6.3.1)$$

چون $\tan(\theta)$ و $\tan(\theta + \Delta\theta)$ به ترتیب شیب خطوط مماس بر منحنی $u(x, t)$ را نقاط $(x + \Delta x, t)$ و (x, t) می باشد. در نتیجه،

$$\tan(\theta + \Delta\theta) = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}, \quad \tan(\theta) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad (7.3.1)$$

با استفاده از روابط (6.3.1) و (7.3.1) و تقسیم طرفین (4.3.1) بر Δx ، خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}}{\Delta x} = \frac{\rho}{k} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x}, t), \quad (8.3.1)$$

با میل دادن Δx به سمت صفر رابطه (8.3.1) به صورت زیر خواهد بود:

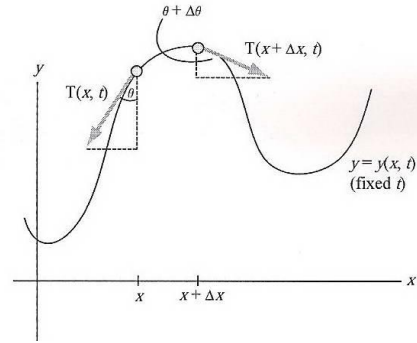
$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{k} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), \quad (9.3.1)$$

با قرار دادن $c^2 = \frac{k}{\rho}$ معادله اصلی موج به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (10.3.1)$$

چون فرض شده که دو انتهای تار در تمام لحظات ثابت باشد، شرایط مرزی به صورت زیر خواهند بود:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (11.3.1)$$



شکل (1.1)

شرایط اولیه مسئله تغییر مکان اولیه تار، و سرعت اولیه ی تار، سرعتی است که تار در لحظه $t = 0$ با آن رها می شود، به صورت زیر معرفی می شود.

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

f, g توابعی مفروض هستند که در شرایط خاصی صدق می کنند. برای مثال اگر تار در دو انتها ی خود ثابت باشد تابع مکان اولیه باید در شرط زیر صدق کند:

$$f(0) = f(l) = 0$$

اگر سرعت اولیه صفر باشد (تار از حالت سکون رها شود) ، $g(x) = 0$.

معادله موج همراه با شرایط اولیه و مرزی یک مسئله مقدار اولیه - مرزی برای تابع $u(x, t)$ را تشکیل می دهد. این اطلاعات برای تعیین جواب $u(x, t)$ به صورت یکتا کافی است.

ارتعاش تحت تاثیر یک نیروی خارجی

اگر علاوه بر ضربه اولیه ارتعاشات تار تحت تاثیر نیروهای خارجی نیز قرار داشته باشد مثلاً فرض کنیم مقدار نیروی وارد بر یک واحد طول در امتداد محور u ها باشد. در این حالت برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بایستی جمله $F(x, t)\Delta x$ به سمت چپ رابطه (۶.۳.۱) اضافه شود. در این صورت نظیر بحث های انجام شده در قسمت قبل معادله ارتعاش تار تحت تاثیر نیروهای خارجی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F(x, t)}{\rho}, \quad (12.3.1)$$

دو حالت خاص رابطه (12.3.1) جالب است. وقتی نیروی خارجی نیروی جاذبه g باشد. در این صورت معادله (12.3.1) به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g \quad (13.3.1)$$

حالت دیگر وقتی که نیروی خارجی نیروی مقاومت متناسب با سرعت لحظه ای (ارتعاش تار در یک سطح سیال) باشد. در این صورت معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (14.3.1)$$

که در آن k مقدار ثابت است.

حالت دیگری از مسئله وقتی است که دو انتهای تار در حال ارتعاش باشد. در این حالت شرایط مرزی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(0, t) = p(t), \quad u(l, t) = q(t)$$

در فضای دوبعدی معادله موج به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (15.3.1)$$

این معادله جابجایی عمودی $u(x, y, t)$ یک پوسته را نشان می دهد. برای مثال ارتعاشات سطح یک طبل.

در این قسمت هم باید شرایط اولیه و شرایط مرزی داده شوند تا یک جواب یکتا به دست آید. معمولاً تابع جواب روی مرز ثابت است (لبه سطح طبل) بنابراین در نقاط مرزی جابجایی نخواهیم داشت. به ازای هر (x, y) روی مرز و به ازای هر $t \geq 0$ داریم:

$$u(x, y, t) = 0$$

به علاوه باید سرعت اولیه و جابجایی اولیه داده شوند، این شرایط به صورت زیر خواهند بود:

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y)$$

که در آن توابعی معلومند.

ما همچنین این امکان را داریم که از معادله موج دو بعدی در مختصات قطبی استفاده کنیم. برای به دست آوردن معادله موج در دستگاه قطبی از روابط بین مختصات کارتزین و قطبی استفاده می‌کنیم:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta)$$

بنابراین:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

قرار دهید:

$$u(x, y) = u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = U(r, \theta)$$

محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{x}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) - \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{r^2} \right) + \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{y}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)$$

$$= \frac{y^2}{r^3} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2xy}{r^4} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{2xy}{r^3} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} + \frac{y^2}{r^4} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

با روش مشابهی می توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2xy}{r^4} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2xy}{r^3} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} + \frac{x^2}{r^4} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

از جمع این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

بنا بر این معادله موج دو بعدی در مختصات قطبی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right), \quad (16.3.1)$$

که در آن $U(r, \theta, t)$ جابجایی عمودی نقطه (r, θ) واقع روی پوسته در صفحه xy در زمان t را نشان می دهد.

در ادامه مسائل مقدار مرزی شامل معادله موج را با روشهای مختلف حل خواهیم کرد.

2.1 مسائل بخش

1- فرض کنید $u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)$. نشان دهید به ازای هر عدد مثبت n تابع $u_n(x, t)$ در معادله موج یک بعدی صدق می کند.

2- نشان دهید $u_{nm}(x, y, t) = \sin(nx) \cos(my) \cos(\sqrt{n^2 + m^2}ct)$ به ازای هر m, n صحیح مثبت در معادله موج دو بعدی صدق می کند.

3- فرض کنید f یک تابع دو بار مشتق پذیر یک متغیره باشد. نشان دهید تابع

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)]$$

در معادله موج یک بعدی صدق می کند.

4- نشان دهید تابع $u(x, t) = \sin(x) \cos(ct) + \frac{1}{c} \cos(x) \sin(ct)$ در معادله موج یک بعدی و شرایط مرزی و شرایط اولیه زیر صدق می کند:

$$u(0, t) = u(2\pi, t) = \frac{1}{c} \sin(ct), \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos(x), \quad 0 < x < 2\pi$$

5- مسئله مقدار اولیه - مرزی (معادله مشتق جزئی و شرایط مرزی و اولیه) را برای ارتعاش یک پوسته مستطیل شکل که ناحیه $0 \leq y \leq b, 0 \leq x \leq a$ را اشغال می کند فرمولبندی کنید، در صورتی که انحراف اولیه پوسته با ضابطه $f(x, y)$ و سرعت اولیه (در زمان صفر) با ضابطه $g(x, y)$ نشان داده شود و در تمام لحظات پوسته روی مرزهای ناحیه ثابت و بدون حرکت باشد.

6- فرمول های مربوط به مسئله مقدار مرزی - اولیه را برای حرکت تار کشسانی به طول l که در دو انتها ثابت شده و بعد از قرار دادن آن در وضعیت اولیه $f(x)$ رها می شود تا در صفحه xy ارتعاش کند بنویسید. مقاومت هوا که قدرمطلق آن در هر نقطه متناسب با مربع سرعت در آن نقطه است با حرکت سیم مقابله می کند.

7- معادله موج در فضای سه بعدی در مختصات کروی را بنویسید. به خاطر داشته باشید که روابط بین مختصات کروی و مختصات کارتزین به صورت زیر است:

$$x = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \quad y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad z = \rho \cos(\varphi)$$

که در آن ρ فاصله مبدا تا نقطه (x, y, z) ، θ زاویه بین جهت مثبت محور x ها و تصویر شعاع حامل (تصویر خط واصل بین مبدا تا نقطه (x, y, z))، روی صفحه مختصات و φ کوچکترین زاویه بین جهت مثبت محور z ها و شعاع حامل است که از سمت محور z ها به سمت شعاع حامل اندازه گیری می شود.

مسائل مقدار مرزی - اولیه را برای معادله موج و معادله انتقال حرارت در یک بازه بسته $[0, l]$ ، با حالت ساده ای شروع می کنیم و سپس حالت های پیچیده تر را بررسی خواهیم کرد.

1.2.1 ارتعاش تار با سرعت اولیه صفر

یک تار کشسان به طول l را در نظر بگیرید در حالت اول ساده ترین حالت را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که دو انتهای آن روی محور x ها در دو نقطه $x = 0, x = l$ بسته شده است. در ابتدا که آن را لحظه

$t = 0$ می‌نامیم یک تغییر مکان اولیه در تار ایجاد کرده و آن را بدون سرعت اولیه می‌کنیم تا در صفحه xu ارتعاش نماید. می‌خواهیم در لحظه t ثابت تابع تغییر مکان $u(x, t)$ را به عنوان تابعی تنها از x به دست آوریم که نمودار آن یک منحنی روی صفحه xu را نشان می‌دهد و وضعیت تار را در لحظه t نشان می‌دهد.

مدل ریاضی مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (17.3.1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad t > 0 \quad (18.3.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (19.3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (20.3.1)$$

نمودار $f(x)$ مکان تار را در لحظه $t = 0$ ، قبل از رها شدن نشان می‌دهد.

روش فوریه یا روش جدابپذیری یا روش تفکیک متغیرها سعی می‌کند جوابی برای مسئله به صورت $u(x, t) = X(x)T(t)$ بیابد. البته جواب تمام معادلات دیفرانسیل را نمی‌توان به صورت حاصل ضرب توابع با متغیرهای مجزا بیان کرد، ولی معادلاتی که در این درس مورد مطالعه قرار می‌گیرند چنین خاصیتی دارند که جواب آنها به صورت ترکیب خطی چنین توابع با متغیرهای جدا از هم می‌باشند. بنابراین سعی می‌کنیم تمام چنین جوابهایی با متغیرهای مجزا را یافته و سپس جواب عمومی معادله را بیابیم.

جوابی به صورت $u(x, t) = X(x)T(t)$ را در نظر گرفته و در معادله قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$XT'' = c^2 X''T \quad (21.3.1)$$

طرفین رابطه را بر $c^2 XT$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T}$$

طرف چپ این معادله تنها به x ، و سمت راست آن تنها به t وابسته است. چون x, t متغیر های مستقل از یک دیگر هستند در نتیجه این نسبت نمی تواند به هیچ یک از این دو متغیر وابسته باشد و باید مقداری ثابت باشد. این مقدار ثابت را با k نشان می دهیم. خواهیم داشت:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = k$$

بنابراین داریم:

$$X'' - kX = 0, \quad T'' - kc^2 T = 0 \quad (22.3.1)$$

یعنی معادله موج به دو معادله دیفرانسیل معمولی تفکیک شده است.

حالا شرایط مرزی را در نظر می گیریم. ابتدا داریم:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad (23.3.1)$$

در این رابطه اگر به از هر t داشته باشیم $T(t) = 0$ ، در نتیجه

$$u(x, t) = 0 \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (24.3.1)$$

این جواب مسئله خواهد بود اگر و تنها اگر $f(x) = 0$. در واقع این به این معنی است که هیچ گونه ارتعاش و حرکتی در تار ایجاد نشده است و همواره بدون حرکت روی محور قرار دارد. به همین دلیل اگر نه نیروی خارجی روی تار اثر کند و نه تحت تاثیر سرعت اولیه قرار گیرد در تمام لحظات تار ثابت باقی می ماند.

بنابراین با شرایط داده شده در این مسئله بایستی که $T(t) \neq 0$. در نتیجه از این شرط مرزی نتیجه می شود که

$$X(0) = 0 \quad (25.3.1)$$

متشابهها از شرط مرزی دیگر نیز نتیجه می شود که:

$$u(l, t) = 0 \Rightarrow X(l)T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0 \quad (26.3.1)$$

بنابراین دو شرط روی تابع $X(x)$ وجود دارد و مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$X'' - kX = 0, \quad X(0) = X(l) = 0 \quad (27.3.1)$$

به دنبال مقادیری از k هستیم تا جواب مخالف صفر برای مسئله به دست آوریم. چند حالت در نظر می گیریم:

$$k > 0, \quad k = 0 \quad k < 0,$$

در حالت اول فرض می کنیم که $k > 0$. بدون آنکه خلی به کلیت امر وارد شود قرار می دهیم:

$$k = p^2, \quad p > 0$$

بنابراین معادله به صورت زیر تبدیل می شود:

$$X'' - p^2X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (28.3.1)$$

جواب معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$X(x) = Ae^{px} + Be^{-px} \quad (29.3.1)$$

با اعمال شرایط $X(0) = 0, X(l) = 0$ روی تابع فوق خواهیم داشت:

$$X(x) = 0 \quad (30.3.1)$$

یعنی تنها جواب این معادله با شرایط داده شده تابع صفر است که قابل قبول نمی باشد.

در حالت دوم قرار می دهیم $k = 0$. در نتیجه معادله با شرایط داده شده روی تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$X''(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (31.3.1)$$

جواب معادله به صورت خطی خواهد بود.

$$X(x) = ax + b \quad (32.3.1)$$

بعد از اعمال شرایط فوق روی تابع به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$X(x) = 0 \quad (33.3.1)$$

بنابراین در این حالت نیز جواب قابل قبولی به دست نمی آید.

حالت سوم $k < 0$ در این حالت هم بدون آنکه به کلیت امر خللی وارد شود قرار می دهیم

$k = -p^2, p > 0$ در نتیجه داریم:

$$X'' + p^2X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (34.3.1)$$

این یک مسئله اشتراک لیویل است. یعنی به دنبال مقادیری از p هستیم که به ازای آن جواب مخالف صفری برای تابع $X(x)$ به دست آید. از حل معادله خواهیم داشت:

$$X(x) = A\cos(px) + B\sin(px) \quad (35.3.1)$$

با استفاده از اولین شرط روی تابع نتیجه می شود، $A = 0$. با استفاده از دومین شرط خواهیم داشت:

$$B\sin(pl) = 0 \quad (36.3.1)$$

در این رابطه اگر بتوان برای p مقادیری یافت که $\sin(pl) = 0$ در این صورت هم شرایط مسئله برقرار خواهد بود و ضمناً تابع جواب صفر نخواهد شد.

$$\sin(pl) = 0 \Rightarrow \sin(pl) = \sin(n\pi) \quad (37.3.1)$$

$$\Rightarrow pl = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad p = \frac{n\pi}{l} \quad (38.3.1)$$

در نتیجه داریم:

$$X(x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

به مقدار ویژه و به تابع $X(x)$ متناظر آن تابع ویژه مسئله گویند.

دقت کنید که در این جا ضریب B می تواند هر عدد مخالف صفر باشد. برای راحتی قرار می دهیم $B = 1$. از طرفی چون در معادله فوق سمت راست رابطه به پارامتر n وابسته است پس سمت چپ نیز وابسته به n خواهد شد.

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (39.3.1)$$

حالا به محاسبه $G(t)$ برمی گردیم. چون معادله از حالت سکون رها شده است،

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \Rightarrow X(x)T'(0) = 0 \Rightarrow T'(0) = 0 \quad (40.3.1)$$

معادله برای تابع $T(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$T''(t) + c^2KT(t) = 0, \quad T'(0) = 0 \quad (41.3.1)$$

که در آن

$$K = -p^2 = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

بنابراین

$$T''(t) + c^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T(t) = 0, \quad T'(0) = 0 \quad (42.3.1)$$

در نتیجه داریم:

$$T(t) = A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \quad (43.3.1)$$

$$T'(0) = B_n \frac{cn\pi}{l} = 0 \Rightarrow B_n = 0 \quad (44.3.1)$$

در نتیجه به ازای هر عدد صحیح مثبت n و هر ثابت مجهول A_n ،

$$T(t) = T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \quad (45.3.1)$$

اکنون به ازای هر عدد صحیح مثبت n توابعی به صورت زیر داریم:

$$u_n(x, t) = A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (46.3.1)$$

هر یک از این توابع در معادله موج و در شرایط مرزی، و در شرط اولیه $u_t(x, 0) = 0$ صدق می کند. به هریک از $u_n(x, t)$ ها یک مد ارتعاش گویند. در رابطه (1 - 51) اگر $u_n(x, t)$ را به از t ثابتی به عنوان تابعی تنها از x در نظر بگیریم $u_n(x, t)$ تابعی سینوسی خواهد بود و تابع $T_n(t)$ دامنه آن است. دامنه $T_n(t)$ با زمان تغییر می کند.

سوال: آیا روی تار نقطای وجود دارند که در هیچ لحظه ای هیچ گونه حرکت و ارتعاشی نداشته باشند؟

برای آنکه نقطای را بیابیم که به از هر t مقدار ارتعاش برابر با صفر باشد باید داشته باشیم:

$$u_n(x, t) = A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = 0$$

$$\frac{n\pi}{l}x = k\pi \Rightarrow x = k\frac{l}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

بنابراین در نقاط $x = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \dots, \frac{(n-1)l}{n}$ که گره نامیده می شوند در هیچ لحظه ارتعاشی وجود ندارد، یعنی u_n در $n-1$ نقطه به غیر از نقاط انتهایی دارای گره است. گره ها در تمام لحظات ثابت هستند. به از $n=1$ به $u_1(x, t)$ مد اصلی ارتعاش گویند.

رابطه (1 - 51) در معادله اصلی و شرایط مرزی صدق می کند. ولی لازم است که شرط $u(x, 0) = f(x)$ نیز برقرار باشد. اگر به از m ی، $f(x) = K \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ در این صورت

$$u(x, t) = K \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{l}\right) \quad (47.3.1)$$

جواب است. اما لزومی ندارد که همواره $f(x)$ به این صورت تعریف شود. برای مثال اگر از ابتدا تار از وسط به طرف بالا کشیده شود، تابع تغییر مکان اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ l-x & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases} \quad (48.3.1)$$

در این صورت شرط $u(x, 0) = f(x)$ هیچوقت به ازا یکی از $u_n(x, t)$ برقرار نخواهد بود، حتی اگر تلاش کنیم از ترکیب تعداد متناهی از $u_n(x, t)$ ها استفاده کنیم:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N u_n(x, t) \quad (49.3.1)$$

نمی توانیم A_1, A_2, \dots, A_n را طوری بیابیم تا $u(x, t)$ در رابطه $u(x, 0) = f(x)$ صدق کند. زیرا هر تابع $f(x)$ را نمی توان به صورت مجموع تعداد متناهی از توابع سینوسی نوشت. در چنین حالاتی به دلیل همگن بودن معادله اصلی و خاصیت خطی بودن معادله از خاصیت برهمه‌نی نامتناهی استفاده کنیم:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (50.3.1)$$

در این حالت شرط $u(x, t) = f(x)$ برقرار است، اگر ضرایب را طوری انتخاب کنیم که:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (51.3.1)$$

رابطه (51.3.1) بسط فوریه سینوسی تابع $f(x)$ را نشان می دهد که روی بازه $[-l, l]$ گسترش فرد یافته است. اگر

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\varphi) \sin\left(\frac{n\pi\varphi}{l}\right) d\varphi \quad (52.3.1)$$

بنابراین :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l f(\alpha) \sin\left(\frac{n\pi}{l}\alpha\right) d\alpha \right) \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (53.3.1)$$

این روش برای حالتی که تابع تغییر مکان اولیه $f(x)$ روی بازه $[0, l]$ تابعی پیوسته و دارای مشتق تکه ای پیوسته باشد و $f(0) = f(l) = 0$ قابل کاربرد است. این شرایط تضمین می کند که تابع $f(x)$ روی بازه $[0, l]$ به همگراست.

رابطه (53.3.1) را می توان به صورت دیگری هم نشان داد. با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}x + \frac{cn\pi}{l}t\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{l}x - \frac{cn\pi}{l}t\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x + ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x - ct)\right) \right] \end{aligned}$$

داریم

در نتیجه

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x + ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x - ct)\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x + ct)\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x - ct)\right) \end{aligned} \quad (54.3.1)$$

اگر به معادله (54.3.1) دقت کنیم مشاهده می کنیم که از دو معادله مشابه معادله (51.3.1) تشکیل شده است که فقط در زاویه با هم اختلاف دارند. به عبارت دیگر:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x + ct) + f^*(x - ct)] \quad (55.3.1)$$

که در آن گسترش فرد تابع f بر بازه $[-l, l]$ است.

دقت کنیم که $f^*(x + ct)$ همان $f^*(x)$ است که به اندازه ct به سمت چپ انتقال داده شده است و $f^*(x - ct)$ انتقال تابع $f^*(x)$ به سمت راست به اندازه $-ct$ است. یعنی موجهای $f^*(x + ct)$ و $f^*(x - ct)$ موجهایی هستند که به سمت چپ و راست در حال حرکت می باشند. به این امواج موجهای پیشرو و پسرو و یا موجهای رونده می گویند.

ارتعاش نخ با سرعت اولیه مفروض و تغییر مکان اولیه صفر

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که تار از وضعیت افقی خود (تغییر مکان اولیه صفر) با سرعت اولیه مفروضی، مثلاً $g(x)$ ، رها شود. مسئله مقدار مرزی برای تابع تغییر مکان عبارتست از:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (56.3.1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (57.3.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (58.3.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad (59.3.1) \quad 0 \leq x \leq l$$

مانند قبل با تفکیک متغیرها شروع می‌کنیم. قرار دهید $u(x, t) = X(x)T(t)$. چون معادله اصلی و شرایط اولیه نظیر حالت قبل است در نتیجه خواهیم داشت:

$$X''(x) + p^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0$$

ادامه بحث کاملاً مشابه بحثی است که در حالت اول هم انجام شد. نتیجه این بود که فرم توابع $T(t), X(x)$ به صورت زیر خواهند بود:

$$X(x) = X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (60.3.1)$$

$$T(t) = T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (61.3.1)$$

از شرط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$u(x, 0) = 0 \Rightarrow X(x)T(0) = 0 \Rightarrow T(0) = 0 \quad (62.3.1)$$

فرمول (62.3.1) را در فرمول (61.3.1) قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$T(0) = T_n(0) = a_n = 0, \quad (63.3.1)$$

بنابراین

$$T(t) = T_n(t) = b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (64.3.1)$$

بنابراین به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ هر یک از توابع

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad (65.3.1)$$

در معادله اصلی موج و شرایط مرزی و اولین شرط اولیه صدق می کند. برای به دست آوردن جواب نهایی این تابع باید در دومین شرط اولیه نیز صدق کند. برای برقراری این شرط، به دلیل همگن بودن، خطی بودن معادله اصلی، از خاصیت برهمه‌نی استفاده می کنیم و تابع را به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad (66.3.1)$$

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right) \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad (67.3.1)$$

$$u_t(0, t) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad (68.3.1)$$

$$b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right) = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx, \quad (69.3.1)$$

$$b_n = \frac{2}{l \left(\frac{cn\pi}{l}\right)} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx, \quad (70.3.1)$$

این رابطه بسط فوریه سینوسی تابع $g(x)$ بر بازه $[-l, l]$ است که تابع به صورت فرد گسترش داده شده است.

مثال

تاری از وضعیت تعادل (حالت افقی) با سرعت اولیه مفروض $g(x) = x \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right)$ رها می شود
 ، معادله (6.1) جواب مسئله است. ابتدا انتگرال زیر را محاسبه می کنیم:

$$\int_0^l g(\varphi) \sin\left(\frac{n\pi\varphi}{l}\right) d\varphi = \int_0^l \varphi \left(1 + \cos\left(\frac{\pi\varphi}{l}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi\varphi}{l}\right) d\varphi$$

$$= \begin{cases} \frac{l^2(-1)^n}{n\pi(n^2-1)} & n \neq 1 \\ \frac{3l^2}{4\pi} & n = 1 \end{cases}$$

در نتیجه جواب به صورت زیر خواهد بود

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi c} \left(\frac{3l^2}{4\pi}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{cn\pi t}{l}\right)$$

$$+ \frac{2}{\pi c} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{l^2(-1)^n}{n^2\pi(n^2-1)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{cn\pi t}{l}\right)$$

به از $l = \pi, c = 1$ جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x, t) = \frac{2}{3} \sin(x) \sin(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2(n^2-1)} \sin(\pi x) \sin(nt)$$

ارتعاش نخ با تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه

ارتعاش تاری با تغییر مکان اولیه $f(x)$ و سرعت اولیه $g(x)$ در نظر بگیرد.

مسئله را به دو قسمت تقسیم می شود. در اولین قسمت مسئله ای با تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه صفر در نظر گرفته می شود و در قسمت دوم تغییر مکان اولیه برابر صفر و سرعت اولیه مخالف صفر خواهد بود. فرض کنید جواب اولین مسئله به صورت $u_1(x, t)$ و جواب مسئله دوم به صورت $u_2(x, t)$ باشد. قرار می دهیم:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

در این صورت $u(x, t)$ در معادله ارتعاش و شرایط مرزی صدق می کند. به علاوه

$$u(x, 0) = u_1(x, 0) + u_2(x, 0) = f(x) + 0 = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) + \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = 0 + g(x) = g(x)$$

بنابراین $u(x, t)$ جواب مسئله با تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه مخالف صفر است.

مثال

معادله موج را روی بازه $[0, l]$ با شرایط مرزی $u(0, t) = u(l, t) = 0$ و تغییر مکان اولیه

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ l - x & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

و سرعت اولیه به صورت $g(x) = x \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right)$ حل می کنیم. در این صورت $u_1(x, t)$ جواب مسئله با تغییر مکان اولیه $f(x)$ و سرعت اولیه صفر، و $u_2(x, t)$ جواب مسئله با تغییر مکان اولیه صفر و سرعت اولیه $g(x)$ است. جواب $u(x, t)$ مجموع جوابهای مثال های (1.1) و (3.1) است، بنابراین جواب به صورت زیر است:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi} \sin(nx) \cos(nt) + \frac{3}{2} \sin(x) \sin(nt) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2(n^2 - 1)} \sin(\pi x) \sin(nt)$$

مجددا مسئله مقدار اولیه – مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (1.4.1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (2.4.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (3.4.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad (4.4.1) \quad 0 \leq x \leq l$$

با استفاده از روش دالامبر که از تغییر متغیر $z = x + ct$, $v = x - ct$ استفاده می کند معادله موج به یک معادله با مشتقات آمیخته بر حسب z, v به دست می آید و با انجام عملیاتی روی آن در نهایت به جواب زیر که به جواب دالامبر برای معادله موج معروف است خواهیم رسید:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x + ct) + f^*(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s) ds, \quad (5.4.1)$$

که در آن g^*, f^* گسترش های فرد توابع g, f هستند. دقت شود که نوع گسترش توابع (زوج یا فرد بودن آنها) به شرایط مرزی داده شده بستگی خواهد داشت.

مثال

دقت کنید که می توان از جواب دالامبر در شرایط مسئله صدق می کند:

با استفاده از قوانین زنجیره ای در مشتقات جزیی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds, \right\}, \quad (6.4.1) \\ &= \frac{1}{2} [cf(x + ct) - cf(x - ct)] + \frac{1}{2} [g(x + ct) - g(x - ct)] \end{aligned}$$

با مشتقگیری مجدد نسبت به t خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{2} [f''(x + ct) + f''(x - ct)] + \frac{c}{2} [g'(x + ct) - g'(x - ct)]$$

به طور مشابه عمل مشتقگیری نسبت به x خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} [f''(x+ct) + f''(x-ct)] + \frac{1}{2} [g'(x+ct) - g'(x-ct)]$$

در نتیجه $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. بنابراین جواب دالامبر در معادله اصلی موج صدق می کند. برای آنکه نشان دهیم جواب دالامبر در شرایط مرزی و شرایط اولیه هم صدق می کند به این مطلب دقت می شود که f^*, g^* گسترش های فرد با دوره تناوب $2l$ هستند. برای مثال برای چک کردن شرط مرزی در نقطه $x = 0$ مقدار $x = 0$ را در (5.4.1) قرار می دهیم. خواهیم داشت:

$$u(0, t) = \frac{1}{2} [f^*(ct) + f^*(-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{+ct} g^*(s) ds = 0$$

زیرا f^*, g^* توابعی فرد هستند. صدق کردن جواب دالامبر در شرط مرزی بعدی بر عهده خواننده است.

اکنون به حل معادله انتقال حرارت در حالت استاندارد می پردازیم:

۵.۱ حل معادله انتقال حرارت

ساده ترین حالتی که برای یک میله یک بعدی متناهی می توان در نظر گرفت و مسئله را مدلسازی کرد به صورت زیر است:

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (1.5.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (2.5.1), \quad u(l, t) = 0, \quad (3.5.1) \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.5.1)$$

روشی که برای حل به کار می بریم دقیقا همان روشی است که برای حل معادله موج به کار بردیم. قرار می دهیم $u(x, t) = X(x)T(t)$ و با قرار دادن آن در معادله اصلی خواهیم داشت:

$$XT' = c^2 X''T$$

با تقسیم طرفین رابطه بر c^2XT به رابطه زیر می رسیم:

$$\frac{T'}{c^2T} = \frac{X''}{X}$$

همانطور که در بخش معادله موج دیدیم این تساوی فقط وقتی دارای جواب مخالف صفر خواهد بود که این نسبت مقدار ثابت منفی باشد، یعنی:

$$\frac{T'}{c^2T} = \frac{X''}{X} = K = -p^2, \quad p > 0$$

بنابراین معادلات زیر را برای دو تابع $T(t)$, $X(x)$ خواهیم داشت:

$$X'' + p^2X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (5.5.1)$$

$$T' + c^2p^2T = 0, \quad (6.5.1)$$

بنابراین

$$X(x) = X_p(x) = a_p \cos(px) + b_p \sin(px), \quad (7.5.1)$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow a_p = 0, \quad (8.5.1)$$

$$X(l) = b_p \sin(pl) = 0 \Rightarrow \sin(pl) = \sin(n\pi)$$

$$pl = n\pi \Rightarrow p = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.5.1)$$

$$X(x) = X_n(x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.5.1)$$

چون b_n می تواند هر عدد مخالف صفر باشد و مقدار آن در محاسبات تاثیری ندارد آنرا برابر با یک قرار می دهیم. از رابطه (6.5.1) هم تابع $T(t)$ محاسبه می شود:

$$T(t) = T_n(t) = c_n e^{-c^2n^2t}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.5.1)$$

بنابراین به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ ، هر یک از توابع

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = c_n e^{-c^2 n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (12.5.1)$$

در معادله اصلی، شرایط مرزی صدق می کنند. برای برقراری شرط اولیه از خاصیت برهمه‌نی استفاده می کنیم:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-c^2 n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad (13.5.1)$$

براب برقراری شرط اولیه باید داشته باشیم:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad (14.5.1)$$

این بسط سینوسی تابع $f(x)$ بر بازه $[-l, l]$ است که تابع $f(x)$ بر آن به صورت فرد گسترش داده شده است و

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15.5.1)$$

تا اینجا وضعیت معادله ارتعاش و معادله انتقال حرارت را در حالت استاندارد و با شرایط مرزی یکسان، $u(l, t) = u(0, t) = 0$ را بررسی کردیم. در این حالت دیدیم که فرم تابع $X(x)$ به صورت سینوسی بود. اصطلاحاً گویند که جواب معادله (ارتعاش و انتقال حرارت به صورت سینوسی است. به عبارت دیگر اعلام فرم جواب به صورت سینوسی و یا کسینوسی از روی فرم تابع $X(x)$ مشخص می شود). اکنون به بررسی جواب مسائلی می پردازیم که شرایط مرزی با شرایط بررسی شده متفاوت باشند. این حالات را در مسائل زیر بررسی می کنیم.

6.1 حل معادلات به کمک تبدیلات فوریه

روش دیگری که می توان برای حل معادلات یک بعدی با طولهای متناهی استفاده کرد، حل معادله به کمک تبدیلات فوریه سینوسی و کسینوسی متناهی است.

برای یادآوری تبدیلات متناهی سینوسی و کسینوسی به صورت زیر تعریف می شوند:

اگر تابع $f(x)$ روی بازه $[0, \pi]$ تعریف شود در این صورت تبدیل سینوسی متناهی به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_s[f(t)] = F_s[n] = \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad (1.6.1)$$

و تبدیل کسینوسی با ضابطه زیر تعریف می شود:

$$F_c[f(t)] = F_c[n] = \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad (2.6.1)$$

و تبدیلات معکوس سینوسی و کسینوسی نیز با روابط زیر تعریف می شوند:

$$F_s^{-1}[F_s[n]] = f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_s[n] \sin(nt), \quad (3.6.1)$$

$$F_c^{-1}[F_c[n]] = f(t) = \frac{F_c[0]}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_c[n] \cos(nt), \quad (4.6.1)$$

و فرمول تبدیل مشتق مرتبه دوم تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$F_s[f''(t)] = \int_0^{\pi} f''(t) \sin(nt) dt = -n[(-1)^n f(\pi) - f(0)] - n^2 F_s[f(t)], \quad (5.6.1)$$

$$F_c[f''(t)] = \int_0^{\pi} f''(t) \cos(nt) dt = [(-1)^n f'(\pi) - f'(0)] - n^2 F_c[f(t)], \quad (6.6.1)$$

و اگر تابع $f(x)$ روی بازه $[0, l]$ تعریف شود در این صورت تبدیل سینوسی متناهی به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_s[f(t)] = F_s[n] = \frac{\pi}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt, \quad (7.6.1)$$

و تبدیل کسینوسی با ضابطه زیر تعریف می شود:

$$F_c[f(t)] = F_c[n] = \frac{\pi}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt, \quad (8.6.1)$$

و تبدیلات معکوس سینوسی و کسینوسی نیز با روابط زیر تعریف می شوند:

$$F_s^{-1}[F_s[n]] = f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_s[n] \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right), \quad (9.6.1)$$

$$F_c^{-1}[F_c[n]] = f(t) = \frac{F_c[0]}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_c[n] \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right), \quad (10.6.1)$$

و فرمول تبدیل مشتق مرتبه دوم تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} F_s[f''(t)] &= \frac{\pi}{l} \int_0^l f''(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt \\ &= -\frac{n\pi}{l} [(-1)^n f(l) - f(0)] - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} F_s[f(t)], \end{aligned} \quad (11.6.1)$$

$$\begin{aligned} F_c[f''(t)] &= \frac{\pi}{l} \int_0^l f''(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt \\ &= [(-1)^n f'(l) - f'(0)] - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} F_c[f(t)], \end{aligned} \quad (12.6.1)$$

اکنون می خواهیم با استفاده از تبدیلات یک مسئله مقدار اولیه - مرزی را حل کنیم:

مسائل زیر را در نظر بگیرید:

-۱

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (13.6.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (14.6.1) \quad u(\pi, t) = 0, \quad (15.6.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (16.6.1) \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (17.6.1)$$

-۲

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (13.6.1)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad (18.6.1), \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad (18.6.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (16.6.1), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (17.6.1)$$

-۳

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (13.6.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (19.6.1), \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad (20.6.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (16.6.1), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (17.6.1)$$

در اینجا سه مسئله داده شده است. وقتی بخواهیم از تبدیلات برای حل مسئله استفاده کنیم ابتدا بایستی مشخص کنیم که از چه تبدیلی می توان استفاده کرد. اولاً چون متغیر x در فاصله $[0, \pi]$ تغییر می کند بنابراین تبدیلاتی که می توان روی این متغیر به کار برد تبدیلات سینوسی و کسینوسی متناهی است. ضمناً چون معادله شامل مشتق مرتبه دوم نسبت به x است در نتیجه بنا بر روابط تبدیل مشتق مرتبه دوم برای استفاده از تبدیل سینوسی لازم است مقادیر تابع در ابتدا و انتهای تار جزو داده های مسئله باشند. در مسئله اول این اطلاعات جزو داده های مسئله است و بنابراین می توان از تبدیل سینوسی روی متغیر x استفاده کرد.

در مسئله دوم اطلاعات داده شده مقدار مشتقات تابع جواب در نقاط انتهایی است. در نتیجه می توان از تبدیل کسینوسی روی متغیر x استفاده کرد. اما در مسئله ۳ داده های مسئله یکی مقدار تابع جواب در نقطه انتهایی چپ و یکی مقدار مشتق در نقطه راست است. بنابراین نمیتوان از هیچ کدام از تبدیلات برای حل مسئله استفاده کرد و تنها روش جدایی را می توان اعمال کرد.

مثال 1 مسئله زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (13.6.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (14.6.1) \quad u(\pi, t) = 0, \quad (15.6.1)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (16.6.1), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (17.6.1)$$

می خواهیم این مسئله را با استفاده از تبدیلات حل کنیم. چون متغیر x در فاصله منتهای تغییر می کند در نتیجه می توان از دو نوع تبدیل فوریه منتهای سینوسی و کسینوسی استفاده کرد. چون در معادله مشتق مرتبه دوم نسبت به x وجود دارد، برای استفاده از تبدیل سینوسی باید مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه، $u(0, t)$ و $u(l, t)$ ، جزو داده های مسئله باشد. برای استفاده از تبدیل کسینوسی بایستی مقادیر مشتقات نسبت به متغیر x ، $u_x(0, t)$ و $u_x(l, t)$ ، جزو داده های مسئله باشد.

بنابراین در این مسئله می توان از تبدیل سینوسی روی متغیر x استفاده کرد. این تبدیل را روی معادله به کار می بریم:

$$\begin{aligned} F_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] &= c^2 F_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = c^2 \{ -n[u(\pi, t) - u(0, t)] - n^2 U_s[n, t] \} \\ &= -n^2 U_s[n, t], \quad (21.6.1) \end{aligned}$$

از طرفی طبق قانون مشتق گیری از انتگرالهای وابسته به پارامتر، خواهیم داشت:

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [U_s(n, t)], \quad (22.6.1)$$

با قراردادن در معادله، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [U_s(n, t)] + c^2 n^2 U_s[n, t] = 0, \quad (23.6.1)$$

این رابطه یک معادله با مشتقات جزئی است، ولی چون فقط مشتق گیری نسبت به یک متغیر انجام می شود مانند معادله دیفرانسیل معمولی حل می شود:

$$U_s(n, t) = a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt), \quad (24.6.1)$$

در این رابطه بایستی ابتدا ضرایب نامعلوم را محاسبه کرده و سپس تبدیل معکوس گرفته شود. برای تعیین این ضرایب نامعلوم از تبدیل فوریه سینوسی شرایط اولیه مسئله استفاده می شود.

$$\begin{aligned} F_s[u(x, 0)] &= U_s(n, 0) \\ &= \int_0^\pi u(x, 0) \sin(nx) dx = \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx = F_s[n], \quad (25.6.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_s[u_t(x, 0)] &= \frac{\partial}{\partial t} U_s(n, 0) \\ &= \int_0^\pi u_t(x, 0) \sin(nx) dx = \int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx = G_s[n], \quad (26.6.1) \end{aligned}$$

در این روابط $F_s[n]$ و $G_s[n]$ مقادیر معلوم هستند. با استفاده از این مقادیر ضرایب نامعلوم a_n, b_n محاسبه می شوند.

$$U_s(n, 0) = a_n, \quad U_s(n, 0) = F_s[n] \Rightarrow a_n = F_s[n], \quad (27.6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U_s(n, 0) = cnb_n, \quad \frac{\partial}{\partial t} U_s(n, 0) = G_s[n] \Rightarrow b_n = \frac{G_s[n]}{cn}, \quad (28.6.1)$$

بنابراین تبدیل جواب $U_s(n, t)$ کاملاً مشخص می باشد. کافی است که از این تابع تبدیل معکوس گرفته شود:

$$u(x, t) = F_s^{-1}[U_s(n, t)] = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} U_s(n, t) \sin(nx)$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_s[n] \cos(nt) + \frac{G_s[n]}{cn} \sin(nt) \right] \sin(nx), \quad (29.6.1)$$

بنابراین جواب مسئله به این صورت به دست می آید.

برای حل مثال 2 نیز مشابه همین روش را دنبال می کنیم. با توجه به شرایط مرزی داده شده،
 $u_x(0, t), u_x(\pi, t)$ با استفاده از تبدیل کسینوسی متناهی روی x مسئله را حل خواهیم کرد.

از طرفین رابطه تبدیل کسینوسی می گیریم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F_c \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] &= c^2 F_c \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = [(-1)^n u_x(\pi, t) - u_x(0, t) - n^2 U_c(n, t)] \\ &= -c^2 n^2 U_c(n, t), \quad (30.6.1) \end{aligned}$$

$$F_c \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial^2 U_c(n, t)}{\partial t^2}, \quad (31.6.1)$$

$$\frac{\partial^2 U_c(n, t)}{\partial t^2} + c^2 n^2 U_c(n, t) = 0, \quad (32.6.1)$$

در نتیجه جواب معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$U_c(n, t) = a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt), \quad n \geq 0, \quad (33.6.1)$$

برای محاسبه ضرایب از تبدیل فوریه کسینوسی شرایط اولیه استفاده می شود:

$$\begin{aligned} F_c[u(x, 0)] &= U_c(n, 0) \\ &= \int_0^{\pi} u(x, 0) \cos(nx) dx = \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = F_c[n], \quad (34.6.1) \end{aligned}$$

$$F_c[u_t(x, 0)] = \frac{\partial U_c(n, 0)}{\partial t} = \int_0^{\pi} u_t(x, 0) \cos(nx) dx$$

$$= \int_0^\pi g(x) \cos(nx) dx = G_c[n], \quad n \geq 0, \quad (35.6.1)$$

$$U_c(n, 0) = a_n, \quad U_c(n, 0) = F_c[n], \quad a_n = F_c[n], \quad (36.6.1)$$

$$\frac{\partial U_c(n, 0)}{\partial t} = cnb_n, \quad \frac{\partial U_c(n, 0)}{\partial t} = G_c[n], \quad b_n = \frac{G_c[n]}{cn}, \quad (37.6.1)$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$U_c(n, t) = F_c[n] \cos(cnt) + \frac{G_c[n]}{cn} \sin(cnt), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t \geq 0, \quad (38.6.1)$$

با تعیین تبدیل معکوس کسینوسی جواب مسئله به دست می آید:

$$u(x, t) = F_c^{-1}[U_c(n, t)] = \frac{1}{\pi} U_c(0, t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} U_c(n, t) \cos(nx), \quad (39.6.1)$$

اما در مورد مسئله سوم، با توجه به شرایط مرزی داده شده،

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0$$

روی متغیر x نه تبدیل فوریه سینوسی و نه تبدیل کسینوسی متناهی می توان به کار برد، زیرا شرایط نه هر دو روی خود تابع و نه هر دو روی مشتق تابع نسبت به x داده شده است. در این حالت از روش جدایی مسئله قابل حل است که قبلا در این مورد توضیح داده شده است.

7.1 مسایل حل شده

مثال 1.7.1

مسئله مقدار مرزی – اولیه زیر را حل کنید:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1.7.1)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad (2.7.1) \quad u_x(1, t) = 0, \quad (3.7.1) \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x(1 - x), \quad (4.7.1) \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (5.7.1), \quad 0 \leq x \leq 1$$

حل: الف) در این حالت از روش فوریه یا روش جدایی استفاده می کنیم. یعنی به دنبال جوابی هستیم که متغیرهای آن از هم جدا باشند. قرار می دهیم: $u(x, t) = X(x)T(t)$. با قرار دادن این رابطه در معادله اصلی و تقسیم طرفین رابطه بر XT خواهیم داشت:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$$

که با همان استدلال قبلی این تساوی فقط وقتی برقرار خواهد بود که نسبت مقدار ثابتی باشد. پس داریم:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = k$$

$$X'' - kX = 0, \quad (6.7.1) \quad T'' - kT = 0, \quad (7.7.1)$$

از طرفی با استفاده از شرایط مرزی می توان شرایطی را روی تابع $X(x)$ به دست آورد. داریم:

$$u_x(0, t) = 0 \Rightarrow X'(0)T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0, \quad (8.7.1)$$

$$u_x(1, t) = 0 \Rightarrow X'(1)T(t) = 0 \Rightarrow X'(1) = 0, \quad (9.7.1)$$

بنابراین معادله و شرایط روی تابع $X(x)$ به صورت زیر خواهند بود:

$$X'' - kX = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(1) = 0, \quad (10.7.1)$$

مجددا مانند حالت قبلی برحسب مقادیر مختلف k ، مثبت، صفر و منفی، بحث خواهیم کرد.

حالت اول اگر $k > 0$. بدون آنکه به کلیت امر خللی وارد شود قرار می دهیم $k = p^2$,

در نتیجه داریم:

$$X'' - p^2X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(1) = 0, \quad (11.7.1)$$

$$X = a_p e^{px} + b_p e^{-px} \quad (12.7.1)$$

$$X'(0) = p(a_p - b_p) = 0 \Rightarrow a_p = b_p, \quad (13.7.1)$$

$$X'(1) = p(a_p e^p - b_p e^{-p}) = p a_p (e^p - e^{-p}) = 0, \quad (14.7.1)$$

در این رابطه از تساوی (13.7.1) استفاده شده است. چون عبارت داخل پرانتز نمی تواند صفر باشد بنابراین باید $a_p = 0$. در نتیجه $b_p = 0$ ، و بنابراین $X(x) = 0$ و $u(x, t) = 0$ ، که جواب غیر قابل قبول می باشد.

حالت دوم اگر $k = 0$ در این حالت دستگاه به صورت زیر تبدیل می شود:

$$X''(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(1) = 0, \quad (15.7.1)$$

جواب معادله به صورت خطی خواهد بود:

$$X(x) = ax + b, \quad X'(x) = a, \quad (16.7.1)$$

برای برقراری شرایط مرزی کافی است که $a = 0$. در نتیجه، $X(x) = b \neq 0$. یعنی b می تواند هر عدد حقیقی مخالف صفری باشد.

به ازای این مقدار k دستگاه بر حسب تابع $T(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$T''(t) = 0, \quad T'(0) = 0 \quad (17.7.1)$$

$$T(t) = ct + d, \quad T'(0) = c, \quad (18.7.1)$$

بنابراین کافی است که $c = 0$ و در نتیجه $T(t) = d \neq 0$

یعنی از این حالت $k = 0$ به جواب $u(x, t) = X(x)T(t) = bd \neq 0$ می رسیم.

حالت سوم $k < 0$ ، قرار می دهیم $k = -p^2$ ،

معادلات حاصل بر حسب $X(x)$ عبارت است از:

$$X''(x) + p^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(1) = 0, \quad (19.7.1)$$

خواهیم داشت:

$$X(x) = a_p \cos(px) + b_p \sin(px), \quad X'(x) = -pa_p \sin(px) + pb_p \cos(px)$$

$$X'(0) = pb_p = 0 \Rightarrow b_p = 0, \quad (20.7.1)$$

$$X'(1) = -pa_p \sin(p) = 0, \quad (21.7.1)$$

در اینجا به دنبال مقادیری از p هستیم تا شرط $X'(1) = 0$ را برقرار کند بدون آنکه لازم باشد که a_p مساوی صفر باشد.

$$\sin(p) = 0 \Rightarrow \sin(p) = \sin(n\pi) \Rightarrow p = n\pi, n = 1, 2, \dots, \quad (22.7.1).$$

$$p = p_n = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (23.7.1)$$

به این مقادیر p_n ها مقادیر ویژه مسئله گویند. بنابراین توابع ویژه متناظر با این مقادیر ویژه عبارتند از:

$$X(x) = X_n(x) = a_p \cos(n\pi x) = a_n \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (24.7.1)$$

مسئله متناظر با تابع $T(t)$ عبارت خواهد بود از :

$$T''(t) + (n\pi)^2 T(t) = 0, \quad T'(0) = 0, \quad (25.7.1)$$

$$T(t) = T_n(t) = c_n \cos(n\pi t) + d_n \sin(n\pi t), \quad (27.7.1)$$

برای برقراری شرط $T'(0) = 0$ بایستی $d_n = 0$. در نتیجه

$$T_n(t) = c_n \cos(n\pi t), \quad (28.7.1)$$

پس به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ داریم

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = a_n \cos(n\pi x)c_n \cos(n\pi t) \quad n = 1, 2, \dots, \quad (29.7.1)$$

دو ضریب ثابت قابل ادغام کردن و نام گذاری جدید است که آن را $\alpha_n = a_n c_n$ می نامیم.

$$u_n(x, t) = \alpha_n \cos(n\pi t) \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (30.7.1)$$

این توابع در معادله اصلی و شرایط مرزی صدق می کنند. ضمناً از قسمت $k = 0$ هم تابع

$u(x, t) = bd = \text{const}$ جواب مسئله بود که با اضافه کردن $n = 0$ به مجموعه توابع (2 - 43) می توان این تابع را به دسته توابع فوق اضافه کرد. بنابراین به از $n = 0, 1, 2, \dots$ توابع $u_n(x, t)$ در معادله اصلی و شرایط مرزی صدق می کنند. برای برقراری شرایط اولیه (5.7.1) - (4.7.1) با استفاده از همگن بودن و خطی بودن معادله (1.7.1) از خاصیت برهنه استفاده می کنیم:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(n\pi t) \cos(n\pi x), \quad (31.7.1)$$

ضریب α_n را طوری می یابیم تا داشته باشیم:

$$u(x, 0) = x(1 - x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(n\pi x), \quad (32.7.1)$$

در واقع این رابطه بسط فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ بر بازه $[-1, 1]$ است که تابع بر این بازه به صورت زوج گسترش داده شده باشد.

$$\alpha_n = 2 \int_0^1 x(1 - x) \cos(n\pi x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (33.7.1)$$

البته می توان اولین ضریب یعنی α_0 را به طور جداگانه نشان داد،

$$\alpha_0 = 2 \int_0^1 x(1 - x) dx, \quad \alpha_n = 2 \int_0^1 x(1 - x) \cos(n\pi x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (34.7.1)$$

در این صورت،

$$u(x, t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\pi t) \cos(n\pi x), \quad (35.7.1)$$

در این حالت تابع جواب، $u(x, t)$ ، دارای فرم کسینوسی است که ضرایب آن از فرمولهای (33.7.1) محاسبه می شوند:

(ب) در این حالت از روش تبدیلات استفاده می کنیم. چون شرایط مرزی روی مشتقات تابع در دو نقطه انتهایی داده شده است از تبدیل کسینوسی استفاده می کنیم:

$$F_c[u_{tt}] = F_c[u_{xx}] = [(-1)^n u_x(\pi, t) - u_x(0, t)] - n^2 F_c[u(x, t)], \quad (36.7.1)$$

قرار می دهیم:

$$F_c[u(x, t)] = U_c(n, t), \quad (37.6.1)$$

با استفاده از شرایط مرزی داریم:

$$F_c[u_{xx}] = -n^2 U_c(n, t), \quad (38.7.1)$$

$$F_c[u_{tt}] = \frac{\pi}{1} \int_0^1 u_{tt}(x, t) \cos\left(\frac{n\pi}{1} x\right) dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_c(n, t), \quad (39.7.1)$$

در نتیجه تبدیل معادله اصلی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 U_c(n, t)}{\partial t^2} + n^2 U_c(n, t) = 0, \quad (40.7.1)$$

تبدیل جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$U_c(n, t) = A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t), n = 0, 1, 2, \dots, \quad (41.7.1)$$

ابتدا به محاسبه B_n, A_n می پردازیم:

$$F_c[u(x, 0)] = U_c(n, 0) = \pi \int_0^1 x(1-x) \cos(nx) dx = A_n, \quad (42.7.1)$$

$$F_c[u_t(x, 0)] = 0 = \frac{\partial U_c(0, t)}{\partial t} = n\pi B_n \Rightarrow B_n = 0, \quad (43.7.1)$$

تبدیل معکوس فوریه را محاسبه می کنیم:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} U_c(0, t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} U_c(n, t) \cos(n\pi x), \quad (44.7.1)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} A_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\pi t)) \cos(n\pi x), \quad (45.7.1)$$

مثال 2.7.1

مطلوبست حل مسئله مقدار مرزی - اولیه زیر:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (46.7.1)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad (47.7.1) \quad u(1, t) = 0, \quad (48.7.1) \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x(1 - x), \quad (49.7.1) \quad u_t(x, 0) = x, \quad (50.7.1), \quad 0 \leq x \leq 1$$

حل: در این حالت با توجه به شرایط داده شده مشخص است که نمی توان از تبدیلات فوریه متناهی روی متغیر x استفاده کرد و بنابراین با استفاده از روش جدایی‌پذیری مسئله را حل خواهیم کرد. با قرار دادن

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

در معادله اصلی و تقسیم طرفین بر $X(x)T(t)$ خواهیم داشت :

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = k, \quad (51.7.1)$$

از طرفی از شرایط اولیه نتایج زیر برای تابع $X(x)$ به دست می آید.

این تساوی فقط و فقط وقتی به جواب مخالف صفر می رسد که $k = -p^2$, $p > 0$. بنابراین معادلات بر حسب توابع $X(x), T(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$X'' + p^2 X = 0, \quad (52.7.1) \quad T'' + c^2 p^2 T = 0, \quad (53.7.1)$$

از شرایط مرزی شرایطی را روی تابع $X(x)$ به دست می آوریم:

$$u_x(0, t) = 0 \Rightarrow X'(0)T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0, \quad (54.7.1)$$

$$u(1, t) = 0 \Rightarrow X(1)T(t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0, \quad (55.7.1)$$

بنابراین تابع $X(x)$ از معادله (52.7.1) و شرایط (54.7.1), (55.7.1) به دست می آیند.

$$X(x) = X_p(x) = a_p \cos(px) + b_p \sin(px), \quad (56.7.1)$$

$$X'(0) = pb_p = 0 \Rightarrow b_p = 0 \quad (57.7.1)$$

$$X(1) = -pa_p \sin(p) = 0 \Rightarrow \sin(p) = 0 \Rightarrow p = n\pi$$

$$p = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (58.7.1)$$

مقادیر ویژه مسئله به دست می آید. توابع ویژه متناظر با آنها عبارتند از:

$$X(x) = X_n(x) = a_n \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (59.7.1)$$

در این رابطه چون ضریب a_n می تواند هر عدد حقیقی مخالف صفری باشد برای راحتی مقدار آن را برابر با یک در نظر می گیریم. در این حالت گویند معادله دارای جوابی به فرم کسینوسی است.

اگر شرایط مرزی به جای (47.7.1), (48.7.1) به صورت $u(0, t) = 0$ و $u_x(1, t) = 0$ داده شود در فرم جواب تغییراتی اتفاق خواهد افتاد.

از این شرایط نتیجه می شود که:

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0, \quad (60.7.1)$$

$$u_x(1, t) = 0 \Rightarrow X'(1)T(t) = 0 \Rightarrow X'(1) = 0, \quad (61.7.1)$$

بنابراین تابع $X(x)$ از معادله و شرایط زیر محاسبه می شود:

$$X'' + p^2X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) = 0, \quad (62.7.1)$$

$$X(x) = X_p(x) = a_p \cos(px) + b_p \sin(px), \quad (63.7.1)$$

$$X(0) = a_p = 0, \quad (64.7.1)$$

$$X'(1) = pb_p \cos(p) = 0 \Rightarrow \cos(p) = 0 \Rightarrow p = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$p = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (65.7.1)$$

مقادیر ویژه مسئله به دست آمده است. بنابراین توابع ویژه متناظر با آن عبارت است از:

$$X(x) = X_n(x) = b_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (66.7.1)$$

دقت کنید که در این حالت نیز فرم جواب به صورت سینوسی است. ادامه حل مسئله مشابه مسائل قبلی است.

کدامیک از تبدیلات فوریه متناهی را می توان روی متغیر x به کار برد و چرا؟ دلیل بیاورید.

مثال 3.6.1

مطلوبست حل معادله زیر:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (67.7.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (68.7.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (69.7.1) \quad u_x(l, t) = -u(l, t), \quad (70.7.1) \quad t \geq 0$$

در این مسئله هم با توجه به شرایط مرزی داده شده از هیچکدام از تبدیلات فوریه متناهی روی متغیر x نمی توانیم استفاده کنیم، چرا؟، و در نتیجه، با استفاده از روش جدایی‌پذیری و قرار دادن $u(x, t) = X(x)T(t)$ خواهیم داشت:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k, \quad (71.7.1)$$

از شرایط مرزی داریم:

$$X(0) = 0, \quad (72.7.1), \quad X'(l) + X(l) = 0, \quad (73.7.1)$$

بر حسب مقادیر مختلف k (از نظر مثبت، صفر و منفی بودن) برای به دست آوردن جواب مخالف صفر بحث خواهیم کرد.

نظیر حالت های قبل از حالت مثبت جواب مخالف صفر به دست نمی آید. در حالت $k = 0$ مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$X''(x) = 0, \quad (74.7.1)$$

$$X(0) = 0, \quad (72.7.1), \quad X'(l) + X(l) = 0, \quad (73.7.1)$$

در این صورت جواب به صورت زیر است:

$$X(x) = ax + b, \quad (75.7.1)$$

از رابطه (72.7.1) $b = 0$. از رابطه (63.6.1) نتیجه می شود که:

$$a + al = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow X(x) = 0, \quad (74.7.1)$$

از حالت $k < 0$ و قرار دادن $k = -p^2$, $p > 0$ و شرایط زیر را خواهیم داشت:

$$X'' + p^2 X = 0, \quad (75.7.1)$$

$$X(0) = 0, \quad (72.7.1), \quad X'(l) + X(l) = 0, \quad (73.7.1)$$

در نتیجه جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$X(x) = X_p(x) = A_p \cos(px) + B_p \sin(px), \quad (76.7.1)$$

$$(72.7.1) \Rightarrow A_p = 0, \quad (63.6.1) \Rightarrow B_p(\sin(pl) + p \cos(pl)) = 0, \quad (77.7.1)$$

به دنبال مقادیری از p هستیم تا رابطه :

$$\sin(pl) + p\cos(pl) = 0, \quad (78.7.1)$$

این معادله به صورت تحلیلی حل نمی شود. ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم :

$$\tan(pl) = -p, \quad (79.7.1)$$

اکنون ابتدا دو منحنی $y = \tan(pl)$ و $y = -p$ را در یک دستگاه محورهای مختصات y, p رسم کنید. با توجه به مثبت بودن p از روی منحنی ها دیده می شود که بینهایت نقطه همدیگر را قطع می کنند. طول نقاط تقسیم را با $z_n, n = 1, 2, \dots$ که $z_1 < z_2 < z_3 < \dots < z_n < \dots$

در نتیجه: $p = z_n, n = 1, 2, \dots$ مقادیر ویژه مسئله و توابع ویژه متناظر با آن عبارتند از:

$$X(x) = X_n(x) = \sin(z_n x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (80.7.1)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{T'}{T} = k = -p^2 = -z_n^2$$

$$T_n(t) = A_n e^{-z_n^2 t}, \quad (81.7.1)$$

بنابراین به از هر $n = 1, 2, \dots$ تابع

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-z_n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad (82.7.1)$$

از خاصیت برهمه‌نی استفاده می کنیم و ثابت باقیمانده، A_n ، را طوری محاسبه می کنیم تا جواب در شرط اولیه هم صدق کند:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-z_n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad (83.7.1)$$

برای برقراری شرط اولیه باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (84.7.1)$$

بنابراین بایستی که:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \quad (85.7.1)$$

نمودار $y = \tan(pl)$ توابع $y = -p$ در صفحه yp .

جمع‌بندی از مطالب فوق را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

1- مسائل مربوط به موج را می‌توان با استفاده از روش جدایی‌پذیری حل کرد. در این حالت قرار می‌دهیم:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

2- معادله با مشتقات جزئی موج به دو معادله دیفرانسل معمولی با شرایطی تبدیل می‌شود

3- ابتدا معادله بر حسب $X(x)$ را با استفاده از شرایط مرزی داده شده حل می‌کنیم. در این حالت به دنبال

جوابی هستیم که مخالف صفر باشد. (جواب با معنی)

4- فرم کلی جواب معادله موج از روی فرم تابع $X(x)$ به دست می‌آید. دیدیم که اگر شرایط مرزی به

صورت $u(0, t) = u(l, t) = 0$ باشد، و در این حالت فرض شده

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

فرم جواب به صورت زیر خواهد بود

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

به عبارت دیگر تابع جواب به فرم سینوسی است. به قوس تابع سینوس دقت داشته باشید.

5- اگر شرایط مرزی به صورت $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ مجدداً فرض می شود که

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

در این حالت نتیجه گرفتیم که فرم جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x, t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad \alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

در این حالت فرم جواب به صورت کسینوسی است.

6- اگر شرایط مرزی به صورت $u_x(0, t) = 0, u(l, t) = 0$ و شرایط اولیه همان شرایط اولیه دو حالت

قبلی باشد، جواب به صورت

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

بنابراین جواب مجدداً به صورت کسینوسی است.

7- اگر شرایط مرزی به صورت $u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0$ و شرایط اولیه همان شرایط اولیه دو

حالت قبلی باشد، جواب به صورت،

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} x\right)$$

در این حالت نیز مشاهده می شود که جواب به صورت سینوسی است. البته قوس سینوس در این حالت با

قوس سینوس و کسینوس در حالت های قبلی متفاوت است. باید دقت داشت که توابعی که در این چهار

حالت پیش آمدن و فرم جواب بر حسب آنها بیان شد در واقع توابع ویژه مسائلی بودند که در اثر استفاده از روش جدا پذیری در مسیر حل مسئله ایجاد می شوند. بنابراین جواب مسئله موج می تواند بر حسب توابع ویژه دیگری هم که در مسائل تولید می شوند ارائه گردد. اما اگر توابع ویژه به دست آمده توابعی متفاوت با توابع معمولی باشند که به راحتی متعامد بودن آنها محرز نیست بایستی در مورد متعامد بودن آن اقدام کرد.

8.1 حالات غیر استاندارد

تا اینجا با حالت استاندارد مسئله سروکار داشته ایم. اکنون به معرفی حالات غیر استاندارد می پردازیم

حالت غیر استاندارد وقتی اتفاق می افتد که یا معادله اصلی غیر همگن باشد و یا شرایط مرزی (از هر نوع) غیر صفر باشد، و یا هر دو حالت تواما اتفاق بیفتند. در حالتی که مسئله در حالت استاندارد نباشد نمی توان مستقیما از روش جداپذیری استفاده کرد.

کلی ترین فرم غیر استاندارد مسئله وقتی است که هم معادله غیر همگن باشد و شرایط مرزی مسئله صفر نباشد.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (1.8.1)$$

$$u(0, t) = p(t), \quad (2.8.1), \quad u(l, t) = q(t), \quad t \geq 0, \quad (3.8.1)$$

دقت کنید که شرایط مرزی لزوما روی خود تابع داده نمی شود، یعنی فرض بر این است که هر شرط مرزی که داده می شود مخالف صفر باشد. شرایط اولیه مسئله همان شرایط حالت استاندارد است.

$$u(x, 0) = f(x), \quad (4.8.1), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.8.1)$$

این مسئله گویای این مطلب است که ارتعاش ایجاد شده نه تنها در اثر تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه بوده است بلکه یک نیروی خارجی در ایجاد ارتعاش نیز اثر داشته است.

در این حالت مسئله به چند حالت جزئی تقسیم می شود. ساده ترین حالت آن است که تابع $F(x, t)$ فقط به متغیر x بستگی داشته باشد و $q(t) = 0, p(t) = 0$. بنابراین مسئله به صورت زیر خواهد بود:

حالت اول: مطلوبست حل مسئله مقدار مرزی – اولیه زیر:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (6.8.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (7.8.1), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (8.8.1), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u(0, t) = 0, \quad (9.8.1), \quad u(l, t) = 0, \quad (10.8.1), \quad t \geq 0$$

جوابی به صورت زیر را در نظر می گیریم:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x), \quad (11.8.1)$$

در این رابطه تابع $w(x)$ را تابع کمکی گویند و آن را طوری می یابیم تا معادله اصلی بر حسب $v(x, t)$ معادله ای همگن باشد و شرایط مرزی مسئله بر حسب متغیر جدید برابر با صفر گردد. بنابراین ابتدا مشتقات جزئی لازم را محاسبه می کنیم:

$$u_{tt}(x, t) = v_{tt}(x, t), \quad u_{xx}(x, t) = v_{xx}(x, t) + w''(x), \quad (12.8.1)$$

با جایگزینی (12.8.1) در رابطه (6.8.1) خواهیم داشت:

$$v_{tt}(x, t) = c^2(v_{xx}(x, t) + w''(x)) + F(x)$$

برای همگن شدن معادله بر حسب $v(x, t)$ باید تابع کمکی را طوری تعیین کنیم که داشته باشیم:

$$c^2 w''(x) + F(x) = 0, \quad (13.8.1)$$

در این حالت معادله اصلی به صورت زیر خواهد بود:

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}, \quad (14.8.1)$$

از طرفی با قرار دادن رابطه (11.4.1) در شرایط اولیه و شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$u(x, 0) = v(x, 0) + w(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad v(x, 0) = f(x) = w(x), \quad (15.8.1)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = v_t(x, 0), \quad \Rightarrow \quad v_t(x, 0) = g(x), \quad (16.8.1)$$

$$u(0, t) = v(0, t) + w(0) = 0, \quad (17.8.1)$$

$$u(l, t) = v(l, t) + w(l) = 0, \quad (18.8.1)$$

اکنون اگر $w(x)$ جواب مسئله زیر باشد،

$$c^2 w'' + F = 0, \quad w(0) = 0, \quad w(l) = 0$$

انگاه تابع $v(x, t)$ در مسئله زیر صدق می کند:

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (19.8.1)$$

$$v(x, t) = f(x) - w(x), \quad v_t(x, t) = g(x), \quad (20.8.1)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad (21.8.1)$$

در این حالت مسئله به یک مسئله استاندارد تبدیل شده و $v(x, t)$ به راحتی با استفاده از روش جدایی در مشخص می شود. سپس با اضافه کردن تابع کمکی $w(x)$ که قبلاً محاسبه شده است جواب مسئله اولیه به دست می آید.

حالت دوم اگر معادله اصلی همگن ولی شرایط مرزی مخالف صفر باشند.

مسئله با مقدار اولیه مرزی زیر را حل کنید:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (22.8.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (23.8.1), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (24.8.1), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u(0, t) = p(t), \quad (25.8.1), \quad u(l, t) = q(t), \quad (26.8.1), \quad t \geq 0$$

حل: در این حالت ابتدا با تغییر متغیر باید شرایط مرزی را صفر کرد. قرار می دهیم:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (27.8.1)$$

تابع کمکی $w(x, t)$ را طوری انتخاب می کنیم که $v(0, t), v(l, t)$ برابر با صفر باشند. دقت کنید که انتخاب تابع کمکی به شرایط مرزی داده شده بستگی دارد. در این حالت که شرایط مرزی روی تابع u داده شده است

کافی است که تابع کمکی را به صورت یک تابع خطی بر حسب x انتخاب کنیم. در صورتی که مثلاً شرایط مرزی روی u_x داده شود، کافی است تابع کمکی را به صورت تابع درجه دوم انتخاب می‌کنیم.

در این مسئله طبق شرایط (25.8.1) و (26.8.1) تابع کمکی به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود:

$$w(x, t) = ax + b, \quad (28.8.1)$$

ثابت‌های a, b را طوری تعیین می‌کنیم تا شرایط مرزی روی متغیر جدید $v(x, t)$ صفر شود:

$$u(0, t) = v(0, t) + b, \quad (29.8.1)$$

$$p(t) = 0 + b \quad \Rightarrow \quad b = p(t), \quad (30.8.1)$$

$$u(l, t) = v(l, t) + al + p(t)$$

$$q(t) = 0 + al + p(t) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{q(t) - p(t)}{l}, \quad (31.8.1)$$

$$w(x, t) = \frac{q(t) - p(t)}{l}x + p(t), \quad (32.8.1)$$

$$u_{tt} = v_{tt} + w_{tt} = v_{tt} + \frac{q''(t) - p''(t)}{l}x + p''(t), \quad (33.8.1)$$

$$u_{xx} = v_{xx}, \quad (34.8.1)$$

$$v(x, 0) = u(x, 0) - w(x, 0) = f(x) - \frac{q(0) - p(0)}{l}x - p(0) = F(x), \quad (35.8.1)$$

$$v_t(x, 0) = u_t(x, 0) - w_t(x, 0)$$

$$= g(x) - \frac{q'(0) - p'(0)}{l}x - p'(0) = G(x), \quad (36.8.1)$$

در نتیجه مسئله بر حسب متغیر جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$v_{tt} + \frac{q''(t) - p''(t)}{l} x + p''(t) = c^2 v_{xx}$$

با قرار دادن $\frac{q''(t) - p''(t)}{l} x + p''(t) = H(x, t)$ ، خواهیم داشت:

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + H(x, t), \quad (37.8.1)$$

$$v(0, t) = 0, \quad (38.8.1), \quad v(l, t) = 0, \quad (39.8.1)$$

$$v(x, 0) = F(x), \quad (40.8.1), \quad v_t(x, 0) = G(x), \quad (41.8.1)$$

مسئله (37.8.1) تا (41.8.1) را به عنوان سومین حالت غیر استاندارد دنبال می کنیم.

حالت سوم:

مسئله مقدار مرزی اولیه زیر را حل می کنیم:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x, t) \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (42.8.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (43.8.1), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (44.8.1), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u(0, t) = 0, \quad (45.8.1), \quad u(l, t) = 0, \quad (46.8.1),$$

حل: در این مسئله با توجه به روش جدا پذیری و شرایط مرزی داده شده صفر، اگر قرار دهیم

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

از شرایط مرزی نتیجه می شود که:

$$X(x) = X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (47.8.1)$$

سپس با توجه به اینکه معادله غیر همگن است و جواب آن شامل دو قسمت جواب قسمت همگن با اضافه یک جواب خصوصی معادله غیر همگن است، و با توجه به شرایط مسئله مشخص است که جواب قسمت همگن به صورت سینوسی است قرار می دهیم:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (48.8.1)$$

و تابع $T_n(t)$ را طوری می یابیم تا $\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ جواب معادله غیر همگن باشد. (با توجه به همگرایی سری امکان مشتقگیری جمله به جمله از سری وجود دارد). بنابراین داریم:

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (49.8.1)$$

$$u_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (50.8.1)$$

با جایگزینی در معادله خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n''(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = F(x, t), \quad (51.8.1)$$

سمت چپ عبارت یک بسط سینوسی است، بنابراین سمت راست را نیز به صورت بسط سینوسی قرار می دهیم:

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (52.8.1)$$

که در آن

$$h_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad (53.8.1)$$

بنابراین برای برقراری رابطه (51.8.1) بایستی که داشته باشیم:

$$T_n''(t) + c^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) = h_n(t), \quad (54.8.1)$$

اکنون به یک معادله درجه دوم غیر همگن رسیدیم. جواب معادله شامل جواب معادله همگن وابسته باضافه یک جواب معادله غیر همگن وابسته است. جواب معادله همگن به صورت زیر است:

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t\right), \quad (55.8.1)$$

برای تعیین جواب خصوصی معادله غیر همگن با توجه به وضعیت $h_n(t)$ می توان از روشهای مختلف عمل کرد. اگر $h_n(t)$ به صورت مقدار ثابت یا عبارتهای چند جمله ای باشد و یا عبارتی شامل خطوط مثلثاتی و تابع نمایی و یا ترکیباتی از این توابع باشد می توان از روش ضرایب نامعین جواب خصوصی را به دست آورد. در غیر این صورت می توان از روش تبدیل لاپلاس برای تعیین جواب خصوصی اقدام کرد. فرض می کنیم جواب خصوصی را با روش مناسبی محاسبه کرده ایم و آن را با $T_{np}(t)$ نشان دهیم. در این صورت جواب معادله (54.8.1) به صورت زیر خواهد بود:

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) + T_{np}(t), \quad (56.8.1)$$

در نتیجه جواب مسئله اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) + T_{np}(t) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (57.8.1)$$

ضرایب نامعین a_n, b_n را با استفاده از شرایط اولیه به دست می آید.

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + T_{np}(0) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (58.8.1)$$

ضریب a_n از رابطه زیر به دست می آید:

$$a_n + T_{np}(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad (59.8.1)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \frac{cn\pi}{l} + T'_{np}(0) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (60.8.1)$$

و ضریب b_n از رابطه زیر به دست می آید:

$$b_n \frac{cn\pi}{l} + T'_{np}(0) = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad (61.8.1)$$

روش محاسبه جواب خصوصی با استفاده از روش تبدیل لاپلاس

برای تعیین جواب خصوصی معادله

$$T_{np}''(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_{np}(t) = h_n(t), \quad (62.8.1)$$

تبدیل لاپلاس را روی طرفین معادله به کار می بریم. خواهیم داشت:

$$L \left[T_{np}''(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_{np}(t) \right] = L[h_n(t)], \quad (63.8.1)$$

با استفاده از خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس، خواهیم داشت:

$$L[T_{np}''(t)] = s^2 L[T_{np}(t)] - sT_{np}(0) - T'_{np}(0), \quad (64.8.1)$$

مقادیر $T_n(0)$ و $T'_n(0)$ مقادیر ثابت نسبت به t هستند و تنها به n وابسته می باشند. بنابراین رابطه فوق به صورت زیر تبدیل می شود.

$$s^2 L[T_{np}(t)] - sT_{np}(0) - T'_{np}(0) + \frac{(cn\pi)^2}{l^2} L[T_{np}(t)] = L[h_n(t)], \quad (65.8.1)$$

$$\left(s^2 + \frac{(cn\pi)^2}{l^2}\right) L[T_{np}(t)] = L[h_n(t)] + sT_{np}(0) + T'_{np}(0)$$

$$L[T_{np}(t)] = \frac{L[h_n(t)]}{s^2 + \frac{(cn\pi)^2}{l^2}} + \frac{sT_{np}(0)}{s^2 + \frac{(cn\pi)^2}{l^2}} + \frac{T'_{np}(0)}{s^2 + \frac{(cn\pi)^2}{l^2}}, \quad (66.8.1)$$

این رابطه تبدیل جواب خصوصی است که باید تبدیل معکوس آن را محاسبه کنیم تا جواب خصوصی به دست آید.

برای محاسبه تبدیل معکوس خواهیم داشت:

$$T_{np}(t) = L^{-1} \left[\frac{L[h_n(t)]}{s^2 + \frac{(cn\pi)^2}{l^2}} + \frac{sT_{np}(0)}{s^2 + \frac{(cn\pi)^2}{l^2}} + \frac{T'_{np}(0)}{s^2 + \frac{(cn\pi)^2}{l^2}} \right], \quad (67.8.1)$$

طبق خاصیت خطی بودن تبدیل معکوس می توان جمله به جمله تبدیل معکوس را محاسبه کرد.

$$L^{-1} \left[\frac{L[h_n(t)]}{s^2 + \frac{(cn\pi)^2}{l^2}} \right] = L^{-1} \left\{ L[h_n(t)] \times \frac{1}{s^2 + \frac{(cn\pi)^2}{l^2}} \right\}, \quad (68.8.1)$$

دو عبارت داخل کروشه دو تبدیل لاپلاس است و برای تعیین تبدیل معکوس این حاصل ضرب از خاصیت پیچش استفاده می شود.

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{L[h_n(t)]}{s^2 + \frac{(cn\pi)^2}{l^2}} \right] &= L^{-1}[L[h_n(t)]] * L^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + \frac{(cn\pi)^2}{l^2}} \right] \\ &= h_n(t) * \frac{l}{cn\pi} \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t\right), \quad (69.8.1) \end{aligned}$$

$$L^{-1} \left[\frac{sT_{np}(0)}{s^2 + \frac{(cn\pi)^2}{l^2}} \right] = T_{np}(0) \cos \left(\frac{cn\pi}{l} t \right), \quad (70.8.1)$$

$$L^{-1} \left[\frac{T'_{np}(0)}{s^2 + \frac{(cn\pi)^2}{l^2}} \right] = \frac{lT'_{np}(0)}{cn\pi} \sin \left(\frac{cn\pi}{l} t \right), \quad (71.8.1)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$T_{np}(t) = h_n(t) * \frac{l}{cn\pi} \sin \left(\frac{cn\pi}{l} t \right) + T_{np}(0) \cos \left(\frac{cn\pi}{l} t \right) + \frac{lT'_{np}(0)}{cn\pi} \sin \left(\frac{cn\pi}{l} t \right), \quad (72.8.1)$$

این جواب خصوصی معادله (62.8.1) خواهد بود. این جواب را به جواب عمومی معادله همگن اضافه می کنیم:

$$T_n(t) = \left(a_n \cos \left(\frac{cn\pi}{l} t \right) + b_n \sin \left(\frac{cn\pi}{l} t \right) \right) + h_n(t) * \frac{l}{cn\pi} \sin \left(\frac{cn\pi}{l} t \right) + T_{np}(0) \cos \left(\frac{cn\pi}{l} t \right) + \frac{lT'_{np}(0)}{cn\pi} \sin \left(\frac{cn\pi}{l} t \right), \quad (73.8.1)$$

رابطه را به صورت زیر باز نویسی می کنیم:

$$T_n(t) = \left(a_n + T_{np}(0) \right) \cos \left(\frac{cn\pi}{l} t \right) + \left(b_n + \frac{lT'_{np}(0)}{cn\pi} \right) \sin \left(\frac{cn\pi}{l} t \right) + h_n(t) * \frac{l}{cn\pi} \sin \left(\frac{cn\pi}{l} t \right), \quad (74.8.1)$$

نام گذاری جدید کرده و قرار می دهیم:

$$\alpha_n = a_n + T_{np}(0), \quad \beta_n = b_n + \frac{lT'_{np}(0)}{cn\pi}$$

در نتیجه داریم :

$$T_n(t) = \alpha_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + h_n(t) * \frac{l}{cn\pi} \sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right), \quad (75.8.1)$$

به این ترتیب جواب خصوصی به دست آمده است. ضرایب نامعین α_n و β_n با در نظر گرفتن شرایط اولیه محاسبه می شوند. بنابراین جواب معادله به صورت زیر خواهد بود. ضمناً برای خلاصه نویسی از نماد $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ استفاده می کنیم:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t h_n(\tau) \sin[\lambda_n(t - \tau)] d\tau \right\} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (76.8.1)$$

برای محاسبه ضرایب مجمول از شرایط اولیه استفاده می کنیم:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (77.8.1)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \quad (78.8.1)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (79.8.1)$$

$$\beta_n = \left(\frac{2}{l\lambda_n}\right) \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \quad (80.8.1)$$

بنابراین جواب مسئله اولیه از رابطه (76.7.1) به دست می آید که ضرایب نامعلوم آن نیز طبق روابط (78.8.1) و (80.8.1) قابل محاسبه هستند

حالت چهارم:

اگر ارتعاش تار علاوه بر تغییر مکان اولیه تحت تاثیر یک نیروی خارجی قرار دارد و دو انتهای نخ هم وابسته به زمان دارای ارتعاش می باشند.

مسئله مقدار مرزی - اولیه زیر را حل کنید

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + H(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (81.8.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (82.8.1)$$

$$u(0, t) = p(t), \quad u(l, t) = q(t), \quad (83.8.1)$$

این حالت باید سعی کنیم با تغییر متغیر

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (84.8.1)$$

مسئله را به یک مسئله با شرایط مرزی صفر تبدیل کنیم. بنابراین باید تابع کمکی را طوری بیابیم تا

$$v(0, t) = 0, \quad (85.8.1), \quad v(l, t) = 0, \quad (86.8.1)$$

بنابراین با توجه به شرایط مرزی داده شده تابع کمکی را به صورت خطی، درجه دوم و غیر انتخاب می کنیم. در این حالت مانند حالت سوم با انتخاب تابع کمکی به صورت خطی نتیجه می گیریم که تابع،

$$w(x, t) = \frac{q(t) - p(t)}{l} x + p(t), \quad (87.8.1)$$

باعث صفر شدن شرایط مرزی می گردد. با این تابع کمکی مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$u_{tt} = v_{tt} + w_{tt} = v_{tt} + \frac{q''(t) - p''(t)}{l} x + p''(t), \quad (88.8.1)$$

$$u_{xx} = v_{xx}, \quad (89.8.1)$$

$$v(0, t) = 0, \quad (90.8.1), \quad v(l, t) = 0, \quad (91.8.1)$$

$$v(x, 0) = u(x, 0) - w(x, 0) = f(x) - \frac{q(0) - p(0)}{l}x - p(0)$$

$$= k(x), \quad (92.8.1)$$

$$v_t(x, 0) = u_t(x, 0) - w_t(x, 0) = g(x) - \frac{q'(0) - p'(0)}{l}x - p'(0)$$

$$= h(x), \quad (93.8.1)$$

با قرار دادن،

$$F(x, t) = H(x, t) - \left(\frac{q(t) - p(t)}{l}x + p(t) \right), \quad (94.8.1)$$

بنابراین مسئله به صورت زیر باز نویسی می شود:

$$v_{tt} = v_{xx} + F(x, t), \quad (95.8.1)$$

$$v(0, t) = 0, \quad (90.8.1), \quad v(l, t) = 0, \quad (91.8.1)$$

$$v(x, 0) = k(x), \quad (92.8.1) \quad , \quad v_t(x, 0) = h(x), \quad (93.8.1)$$

این همان حالت سوم است که قبلاً مورد بحث قرار گرفت. بنابراین با روش بیان شده جواب مسئله، $v(x, t)$ قابل محاسبه می شود و سپس با اضافه کردن تابع کمکی $w(x, t)$ به آن جواب مسئله اولیه به دست می آید.

بازدید شده در تاریخ 92/12/21.

مثال 1.8.1

مطلوبست حل مسئله زیر:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0$$

بنابراین جواب معادله کمکی از حل معادله زیر به دست می آید:

$$c^2 w'' + h = 0, \quad (22.7.1)$$

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad (23.7.1)$$

$$w(x) = \frac{h}{2c^2} (lx - x^2), \quad (24.7.1)$$

و تابع $v(x, t)$ بایستی در مسئله زیر صدق کند:

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (25.7.1)$$

$$v(x, 0) = -\frac{h}{2c^2} (lx - x^2), \quad v_t(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (26.7.1)$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad (27.7.1)$$

طبق بحث های قبلی جواب مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad (28.7.1)$$

بنابراین:

$$v(x, 0) = -\frac{h}{2c^2} (lx - x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

که ضریب a_n از رابطه زیر به دست می آید:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l -\frac{h}{2c^2} (lx - x^2) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx$$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4l^2 h}{n^3 \pi^3 c^2} & n = 2k - 1, \\ 0 & n = 2k \end{cases}, \quad (29.7.1)$$

بنابراین جواب مسئله اصلی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x)$$

$$= \frac{hx}{2c^2}(l - x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4l^2 h}{\pi^3 c^2} \right) \frac{\cos\left(\frac{c(2n-1)\pi}{l} t\right)}{(2n-1)^3} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{l} x\right), \quad (30.7.1)$$

مثال 2.7.1

مسئله مقدار مرزی - اولیه زیر را حل کنید:

$$u_{tt} = u_{xx} + h, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad h = \text{const}, \quad (65.7.1)$$

$$u(x, 0) = x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (66.7.1)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (67.7.1)$$

$$u(0, t) = t, \quad t \geq 0, \quad (68.7.1)$$

$$u(1, t) = \sin(t), \quad t \geq 0, \quad (69.7.1)$$

حل: در اینجا از روابط (51.7.1), (64.7.1) و $c = 1$ و $\lambda_n = n\pi$ استفاده خواهیم کرد.

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t), \quad U(x, t) = t + x(\sin(t) - t), \quad (70.7.1)$$

بنابراین $v(x, t)$ بایستی در روابط زیر صدق کند:

$$v_{tt} - v_{xx} = h + x\sin(t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (71.7.1)$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (72.7.1)$$

$$v(x, 0) = x(1 - x), \quad v_t(x, 0) = -1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (73.7.1)$$

طبق رابطه (397.1) داریم:

$$\begin{aligned} h_n(t) &= 2 \int_0^1 (h + x \sin(t)) \sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{2h}{n\pi} [1 - (-1)^n] + \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(t) = a + b \sin(t), \quad (74.7.1) \end{aligned}$$

برای راحتی قرار داده شده:

$$a = \frac{2h}{n\pi} [1 - (-1)^n], \quad b = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

هم چنین داریم:

$$a_n = 2 \int_0^1 x(1 - x) \sin(n\pi x) dx = \frac{4}{(n\pi)^3} [1 - (-1)^n], \quad (75.7.1)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{2}{(n\pi)^2} [1 - (-1)^n], \quad (76.7.1)$$

اکنون انتگرال موجود در فرمول (42.4.1) را محاسبه می کنیم. برای سادگی انتگرال را با $\varphi_n(t)$ نشان می

دهیم:

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \frac{1}{n\pi} \int_0^t (a + b \sin \tau) \sin[n\pi(t - \tau)] d\tau \\ &= \frac{1}{n\pi} \left\{ \frac{a}{n\pi} (1 - \cos n\pi t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{4} [(\sin(2t) - 2t) \cos(n\pi t) - \cos(2t - 1) \sin(n\pi t)] \right\}, \quad (77.7.1) \end{aligned}$$

بنابراین جواب مسئله (73.7.1) – (71.7.1) به صورت زیر خواهد بود:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t) + \varphi_n(t)] \sin(n\pi x), \quad (78.7.1)$$

در نتیجه جواب مسئله (69.7.1) – (65.4.1) برابر است با

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t), \quad (79.7.1)$$

که در آن $v(x, t)$ از رابطه (78.7.1) و $U(x, t)$ از رابطه (51.7.1) به دست می آید.

مثال 3.7.1

جواب مسئله زیر را به دست آورید:

$$u_t - 2u_{xx} = h, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (80.7.1)$$

$$u(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (81.7.1)$$

$$u(0, t) = \sin(t), \quad t \geq 0, \quad (82.7.1)$$

$$u_x(1, t) + u(1, t) = 2, \quad t \geq 0, \quad (83.7.1)$$

حل: در این مسئله شرایط مرزی داده شده کمی با شرایط مرزی داده شده در مسائل قبلی متفاوت است. اما روش حل مسئله کاملاً مشابه روش قبلی است، یعنی با استفاده از تغییر متغیر سعی می شود که شرایط مرزی مسئله را صفر کرد. البته باید دقت کرد که شرط مرزی به هر صورتی در مسئله داده شده همان صورت حفظ شود فقط مقدار شرط مرزی صفر گردد. این مطلب در جریان حل مسئله روشن خواهد شد.

قرار می دهیم:

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t), \quad (84.7.1)$$

تابع کمکی $U(x, t)$ را طوری می یابیم که شرایط مرزی روی تابع $v(x, t)$ صفر شود یعنی داشته باشیم:

$$v(0, t) = 0, \quad v_x(1, t) + v(1, t) = 0, \quad (85.7.1)$$

مشتقات جزئی لازم را محاسبه کرده و در مسئله (83.7.1) – (80.7.1) قرار می دهیم. خواهیم داشت:

$$v_t - 2v_{xx} = h - U_t - 2U_{xx}, \quad (86.7.1)$$

$$v(x, 0) = u(x, 0) - U(x, 0) = x - U(x, 0), \quad (87.7.1)$$

$$v(0, t) = u(0, t) - U(0, t) = 0, \quad \Rightarrow U(0, t) = \sin(t), \quad (88.7.1)$$

$$v_x(1, t) + v(1, t) = u_t(1, t) + u(1, t) - U_t(1, t) - U(1, t) = 0$$

$$U_x(1, t) + U(1, t) = u_x(1, t) + u(1, t) = 2, \quad (89.7.1)$$

بنابراین تابع کمکی باید طوری انتخاب شود که در شرایط (88.7.1) و (89.7.1) صدق کند.

دقت کنید که ارائه یک تابع کمکی در اینجا برای حل مسئله کافی است. وقتی شرایط مرزی روی خود تابع و مشتقات مرتبه اول آن داده شده باشد می توان از یک تابع خطی بر حسب x استفاده کرد. بنابراین قرار می دهیم:

$$U(x, t) = ax + b, \quad (90.7.1)$$

ثابت های a, b (ثابت بر حسب x) را طوری می یابیم تا شرایط (88.7.1) و (89.7.1) برقرار شود.

$$U(0, t) = b = \sin(t), \quad (91.7.1)$$

$$U_x(1, t) + U(1, t) = a + a + b = 2a + \sin(t) = 2$$

$$a = \frac{2 - \sin(t)}{2}, \quad (92.7.1)$$

$$U(x, t) = \frac{2 - \sin(t)}{2}x + \sin(t), \quad (93.7.1)$$

بنابراین مسئله بر حسب $v(x, t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$v_t - 2v_{xx} = h + \frac{(x-2)}{2}\cos(t), \quad (94.7.1)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad (95.7.1)$$

$$v(0, t) = 0, \quad (96.7.1), \quad v_x(1, t) + v(1, t) = 0, \quad (97.7.1), \quad t \geq 0$$

چون شرایط مرزی با حالت های قبلی متفاوت است از حالت کلی که قبلا بحث شد استفاده نمی کنیم و روش جدا پذیری را از ابتدا اعمال می کنیم. ابتدا باید فرم جواب را با استفاده از شرایط مرزی بیابیم.

در معادله همگن وابسته قرار می دهیم $v(x, t) = X(x)T(t)$. خواهیم داشت:

$$XT' - 2X''T = 0$$

طرفین را بر $2XT$ تقسیم می کنیم:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{2T}$$

طبق بحث های انجام شده این نسبت فقط بایستی مقدار ثابتی باشد. بنابراین معادله بر حسب X به صورت زیر خواهد بود:

$$X'' - kX = 0, \quad (98.7.1)$$

ضمنا از روی روابط (96.7.1) و (97.7.1) نتیجه می شود که:

$$v(0, t) = 0 = X(0)T(t) \Rightarrow X(0) = 0, \quad (99.7.1)$$

$$v_x(1, t) + v(1, t) = 0 = (X'(1) + X(1))T(t) \Rightarrow X'(1) + X(1) = 0, \quad (100.7.1)$$

بنابراین تابع $X(x)$ مورد نظر است که در معادله و شرایط زیر صدق کند.

$$X'' - kX = 0, \quad (98.7.1)$$

$$X(0) = 0, \quad (99.7.1)$$

$$X'(1) + X(1) = 0, \quad (100.7.1)$$

بر حسب مقادیر مختلف k از نظر مثبت صفر و منفی بودن بحث می کنیم. فقط از حالت منفی به جواب مخالف صفر می رسیم. قرار می دهیم $p > 0$, $k = -p^2$,

$$X(x) = X_p(x) = a_p \cos(px) + b_p \sin(px), \quad (101.7.1)$$

$$X(0) = a_p = 0, \quad (102.7.1)$$

$$X'(1) + X(1) = pb_p \cos(p) + b_p \sin(p) = 0$$

در این رابطه نباید b_p برابر با صفر باشد. بنابراین مقادیری از p مورد نظر است که رابطه را برقرار کند بدون آنکه b_p برابر با صفر باشد. پس p باید در رابطه زیر صدق کند:

$$p \cos(p) + \sin(p) = 0 \Rightarrow \tan(p) = -p, \quad (103.7.1)$$

این معادله را به صورت تحلیل حل نمی کنیم. اگر نمودار دو تابع $y = \tan(p)$ و $y = -p$ را به از $p > 0$ رسم کنید دیده می شود که این دو تابع در بی نهایت نقطه همدیگر را قطع می کنند. طول نقاط تقاطع را با z_n نمایش می دهیم. در این صورت جواب های این معادله در رابطه زیر صدق می کنند:

$$z_1 < z_2 < z_3 < \dots$$

در نتیجه جواب مسئله (100.7.1) – (98.7.1) به صورت زیر خواهد بود:

$$X_n(x) = \sin(z_n x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (104.7.1)$$

اکنون که فرم تابع $X_n(x)$ به دست آمد می توان شکل جواب مسئله اصلی را بر حسب آن بیان کرد. یعنی به دنبال جوابی از مسئله اصلی خواهیم بود که به شکل زیر باشد:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(z_n x), \quad (105.7.1)$$

این بدین معنی است که جواب مسئله به صورت بسط سینوسی توابع $\sin(z_n x)$ است. (چون در مورد متعامد بودن این توابع بر بازه $[-1, 1]$ قبلاً بحث نشده است توصیه می شود در این مورد بررسی گردد).

با قرار دادن این رابطه در معادله (94.7.1) خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + 2z_n^2 T_n] \sin(z_n x) = h + \frac{x-2}{2} \cos(t)$$

چون سمت چپ معادله به صورت یک بسط سینوسی است سمت راست را هم به صورت بسط سینوسی می نویسیم:

$$h + \frac{x-2}{2} \cos(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \sin(z_n x)$$

که در آن

$$h_n(t) = 2 \int_0^1 \left(h + \frac{x-2}{2} \cos(t) \right) \sin(z_n x) dx = a + b \cos(t), \quad (106.7.1)$$

جواب مسئله به صورت زیر به دست می آید:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n e^{-2z_n^2 t} + \varphi_n(t) \} \sin(z_n x), \quad (106.7.1)$$

که در آن:

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{z_n} \int_0^1 (a + b \cos(\tau)) \sin[z_n(t - \tau)] d\tau, \quad (107.7.1)$$

ضریب a_n از رابطه زیر به دست می آید:

$$v(x, 0) = 0 = \sum (a_n + \varphi_n(0)) \sin(z_n x) \Rightarrow a_n = -\varphi_n(0), \quad (1.8.7.1)$$

و جواب مسئله اولیه برابر است با:

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t)$$

که $v(x, t)$ از رابطه (107.7.1) و $U(x, t)$ از رابطه (93.7.1) به دست می آید.

تاریخ بازدید 92/12/21

9.1 حرکت موج در یک محیط نامتناهی

اگر در بررسی حرکت موج با فاصله های زیاد سروکار داشته باشیم (امواج صوتی از میان اقیانوس یا تابش پس زمینه کیهانی در سراسر جهان) ، حرکت موج با معادله موج روی بازه نامتناهی $-\infty < x < \infty$ مدلسازی می شود. در این حالت ، مرزی وجود ندارد، بنابراین شرط مرزی موجود نیست. اما ما به دنبال جوابهای کراندار هستیم.

تحلیل مسئله کاملا مشابه حالت حرکت موج روی بازه بسته است، به جز آنکه $\int_{-\infty}^{\infty} \dots dw$ جایگزین $\sum_{n=1}^{\infty} \dots$ می شود. همان طور که روی بازه های متناهی انجام دادیم، دو حالت بدون سرعت اولیه و با سرعت اولیه را در نظر می گیریم.

حالت اول: با سرعت اولیه صفر

مسئله مقدار اولیه- مرزی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (1.9.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (2.9.1), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (3.9.1), \quad -\infty < x < \infty$$

متغیر را به صورت زیر از هم جدا می کنیم:

$$u(x, t) = F(x)G(t), \quad (4.9.1)$$

نظیر حالت حرکت موج روی بازه محدود داریم:

$$F'' + kF = 0, G'' + kc^2G = 0, \quad (5.9.1)$$

سه حالت برای k در نظر گرفته می شود.

حالت اول: اگر $k = 0$ در این صورت $F(x) = ax + b$

در این حالت تابع $F(x)$ کراندار است اگر $a = 0$. بنابراین به ازای $k = 0$ تابع $F(x) = b \neq 0$.

حالت دوم: اگر $k < 0$ در این حالت قرار می دهیم $k = -p^2$, $p > 0$

در این حالت $F(x) = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px}$. چون برای کراندار بودن بایستی $c_1 = 0$. هم چنین چون $x \rightarrow -\infty$ برای کراندار بودن بایستی $c_2 = 0$. پس مسئله دارای جواب مخالف صفر نیست.

حالت سوم: اگر $k > 0$. در این حالت قرار می دهیم $k = p^2$, $p > 0$

در این حالت $F(x) = c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px)$. تابع به ازای هر $p > 0$ کراندار است. هر $k = p^2$ یک مقدار ویژه است و تابع ویژه متناظر با آن به صورت زیر است:

$$F_p(x) = c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px), \quad p > 0, \quad (6.9.1)$$

برای ادغام حالت اول و سوم $p = 0$ را به مجموعه فوق اضافه می کنیم.

معادله را برای تابع $G(t)$ حل می کنیم. داریم:

$$G'' + c^2 p^2 G = 0, \quad (7.9.1)$$

جواب معادله به صورت زیر است:

$$G_p(t) = a \cos(cpt) + b \sin(cpt), \quad (8.9.1)$$

اما چون

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = F(x)G'(0) = F(x)pcb = 0 \quad \Rightarrow b = 0, \quad (9.9.1)$$

در نتیجه $G_p(t) = \text{acos}(cpt)$. بنابراین به از هر $p > 0$ توابع زیر را داریم:

$$u_p(x, t) = F_p(x)G_p(t) = [a_p \cos(px) + b_p \sin(px)] \cos(pct), \quad (10.9.1)$$

که در معادله موج و شرط اولیه $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ صدق می کند. لازم است که شرط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ نیز برقرار باشد. در حالت مسئله روی بازه کراندار، از خاصیت برهمه‌نی استفاده کردیم، $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$. اکنون مقادیر ویژه روی کل اعداد حقیقی مثبت قرار دارند، بنابراین خاصیت برهمه‌نی به شکل $\int_0^{\infty} u_p(x, t) dp$ خواهد بود. پس جواب نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} [a_p \cos(px) + b_p \sin(px)] \cos(pct) dp \quad (11.9.1)$$

لازم است که شرط اولیه برقرار باشد:

$$u(x, 0) = \int_0^{\infty} [a_p \cos(px) + b_p \sin(px)] dp = f(x), \quad (12.9.1)$$

این انتگرال فوریه تابع $f(x)$ است، بنابراین ضرایب به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$a_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cos(\alpha p) d\alpha, \quad (13.9.1)$$

$$b_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \sin(\alpha p) d\alpha, \quad (14.9.1)$$

با انتخاب این ضرایب معادله (11.9.1) جواب مسئله است.

مثال 1.9.1

مسئله زیر را حل می کنیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (15.9.1)$$

$$u(x, 0) = e^{-|x|}, \quad (16.9.1), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (17.9.1), \quad -\infty < x < \infty$$

با استفاده از شرط اولیه ضرایب فوریه را محاسبه کنید. ابتدا،

$$a_p = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-|\mu|} \cos(p\mu) d\mu = \frac{2}{\pi(1+p^2)}, \quad (18.9.1)$$

چون $e^{-|\mu|} \sin(p\mu)$ تابع فردی از μ است، $b_p = 0$. بنابراین جواب به صورت زیر است:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1+p^2} \cos(px) \cos(pct) dp, \quad (19.9.1)$$

بعضی مواقع جواب (11.9.1) به صورت دیگری نشان داده می شود. اگر به جای ضرایب انتگرال، انتگرال های مربوطه را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^\infty [a_p \cos(px) + b_p \sin(px)] \cos(pct) dp \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\left(\int_{-\infty}^\infty f(\alpha) \cos(\alpha p) d\alpha \right) \cos(px) \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{-\infty}^\infty f(\alpha) \sin(\alpha p) d\alpha \right) \sin(px) \right] \cos(pct) dp \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty [\cos(p\alpha) \cos(px) + \sin(p\alpha) \sin(px)] f(\alpha) \cos(pct) dp d\alpha, \quad (20.9.1) \end{aligned}$$

با به کار بردن روابط مثلثاتی داریم:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [\cos(p(\alpha - x))] f(\alpha) \cos(pct) dp d\alpha, \quad (21.9.1)$$

از این فرم جواب وقتی تبدیلات فوریه را به کار می بریم استفاده می کنیم.

تغییر مکان اولیه صفر

مسئله زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (15.9.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (22.9.1), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad (23.9.1), \quad -\infty < x < \infty$$

حل: با روشی مشابه حالت قبل به نتیجه زیر می رسیم:

$$F_p(x) = c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px), \quad p > 0, \quad (6.9.1)$$

واز حالت اول بحث در قسمت قبل هم به نتیجه $F(x) = b \neq 0$ رسیدیم. بنابراین کافی است که $p = 0$ نیز به مجموعه جوابهای رابطه (6.9.1) اضافه محاسبه میشود.

در مورد تابع $G(t)$ به نتیجه زیر می رسیم:

$$G_p(t) = a_p \cos(cpt) + b_p \sin(cpt), \quad (8.9.1)$$

از رابطه (22.9.1) نتیجه می شود که:

$$G(0) = 0, \quad (24.9.1)$$

$$G(0) = a_p = 0, \quad (25.9.1)$$

$$G_p(t) = b_p \sin(cpt), \quad (26.9.1)$$

$$u_p(x, t) = F_p(x)G_p(t) = [c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px)] \sin(pct), \quad p \geq 0 \quad (27.9.1)$$

قرار می دهیم:

$$u(x, t) = \int_0^\infty u_p(x, t) dp = \int_0^\infty [c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px)] \sin(pct) dp, \quad (28.9.1)$$

برای تعیین ضرایب مجهول از شرط (23.9.1) استفاده می شود:

$$u_t(0, t) = g(x) = \int_0^\infty cp[c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px)] dp, \quad (29.9.1)$$

$$cp c_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty g(x) \cos(px) dx, \quad (30.9.1)$$

$$cp c_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty g(x) \sin(px) dx, \quad (31.9.1)$$

با استفاده از روابط (30.9.1) و (31.9.1) ضرایب در رابطه (28.9.1) مشخص و جواب مسئله به دست می آید.

10.1 حرکت موج در ناحیه نیم متناهی

معادله موج را روی نیم خط $0 \leq x < \infty$. مسئله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad t > 0, \quad (1.10.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.10.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (3.10.1) \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (4.10.1) \quad 0 \leq x < \infty$$

نظیر مسئله برای حالت محدود x ابتدا حالت $g(x) = 0$ را در نظر می گیریم. متغیرها را با قرار دادن $u(x, t) = F(x)G(t)$ از هم جدا می کنیم و نتیجه به صورت زیر به دست می آید:

$$F''(x) + \lambda F(x) = 0, \quad (5.10.1), \quad T'' + \lambda c^2 T = 0, \quad (6.10.1)$$

در این حالت برای تعیین جواب بایستی از یک شرط مرزی و کراندار بودن جواب در انتهای سمت راست استفاده کنیم. چون

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow F(0)G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0, \quad (7.10.1)$$

در نتیجه داریم:

$$F''(x) + \lambda F(x) = 0, \quad F(0) = 0$$

در نتیجه با توضیحاتی مانند بحث قبلی نتیجه می شود که:

$$F_\omega = b_\omega \sin(\omega x), \quad (8.10.1)$$

چون ارتعاش از حالت سکون آغاز شده است، در نتیجه:

$$u_t(x, 0) = F(x)G'(0) = 0 \Rightarrow G'(0) = 0, \quad (9.10.1)$$

بنابراین مسئله برای تابع $G(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$G'' + c^2 \omega^2 G = 0, \quad (10.10.1), \quad G'(0) = 0$$

بنابراین به از هر $\omega \geq 0$ تابع ،

$$u_\omega(x, t) = b_\omega \sin(\omega x) \cos(c\omega t), \quad (11.10.1)$$

در معادله موج و شرط مرزی و شرط اولیه صدق می کند. برای آنکه این تابع در شرط $u(x, 0) = f(x)$ صدق کند از خاصیت برهمه‌نی استفاده می کنیم:

$$u(x, t) = \int_0^\infty u_\omega(x, t) d\omega = \int_0^\infty b_\omega \sin(\omega x) \cos(c\omega t) d\omega, \quad (12.10.1)$$

بنابراین

$$u(x, 0) = \int_0^{\infty} b_{\omega} \sin(\omega x) d\omega = f(x), \quad (13.10.1)$$

در نتیجه بایستی که:

$$b_{\omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\alpha) \sin(\alpha \omega) d\alpha, \quad (14.10.1)$$

این ضریب انتگرال فوریه تابع $f(x)$ روی بازه $[0, \infty)$ است. این جواب مسئله با شرط سرعت اولیه صفر است. با توضیحاتی مشابه این در حالتی که تغییر مکان اولیه برابر صفر باشد، $f(x) = 0$ ، و سرعت اولیه مخالف صفر، $u_t(x, 0) = g(x)$ ، مسئله به راحتی قابل حل است.

مثال 1.10.1

مسئله زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad t > 0, \quad (15.10.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (16.10.1) \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (17.10.1) \quad 0 \leq x < \infty$$

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & x > 4 \end{cases}, \quad (18.10.1)$$

برای جواب لازم است ابتدا ضرایب را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} b_{\omega} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\alpha) \sin(\omega \alpha) d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^4 \sin(\pi \alpha) \sin(\omega \alpha) d\alpha \\ &= 8 \sin(\omega) \cos(\omega) \frac{2 \cos^2(\omega) - 1}{\omega^2 - \pi^2}, \quad (19.10.1) \end{aligned}$$

بنابراین جواب به صورت زیر است:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} 8 \sin(\omega) \cos(\omega) \frac{2 \cos^2(\omega) - 1}{\omega^2 - \pi^2} \sin(\omega x) \cos(4\omega t) d\omega, \quad (20.10.1)$$

1.4.1 حل معادله با استفاده از تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی

در این حالت از تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی برای حل معادله استفاده می کنیم. در این حالت فرض می کنیم که تغییر مکان اولیه ، $f(x)$ مساوی صفر ولی سرعت اولیه مخالف صفر باشد، $g(x) \neq 0$. مسئله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad t > 0, \quad (21.10.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (22.10.1)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (23.10.1), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (24.10.1) \quad 0 \leq x < \infty$$

در این حالت اگر x به عنوان متغیر و t به عنوان پارامتر در نظر گرفته می شود. با توجه به شرایط مسئله (وجود $u(0, t)$ در داده های مسئله) تبدیل فوریه سینوسی را می توان روی متغیر x به کار می بریم. در صورتی که در داده های اولیه مسئله $u_x(0, t)$ وجود داشته باشد از تبدیل فوریه کسینوسی روی متغیر x استفاده می شود. تبدیل فوریه سینوسی را روی معادله به کار می بریم:

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = c^2 F_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right], \quad (25.10.1)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{u}_s(\omega, t), \quad (26.10.1)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = -c^2 \omega^2 \widehat{u}_s(\omega, t) + \omega c^2 u(0, t) = -c^2 \omega^2 \widehat{u}_s(\omega, t), \quad (27.10.1)$$

بنابراین معادله تبدیل یافته به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}_s(\omega, t)}{\partial t^2} + c^2 \omega^2 \widehat{u}_s(\omega, t) = 0, \quad (28.10.1)$$

جواب عمومی مسئله به صورت زیر است:

$$\widehat{u}_s(\omega, t) = a_\omega \cos(\omega ct) + b_\omega \sin(\omega ct), \quad (29.10.1)$$

در نتیجه،

$$a_\omega = \widehat{u}_s(\omega, 0) = F_s[u(x, 0)](\omega) = F_s[0] = 0, \quad (30.10.1)$$

و

$$\frac{\partial \widehat{u}_s}{\partial t}(\omega, 0) = \omega c b_\omega = \widehat{g}_s(\omega), \quad \Rightarrow \quad b_\omega = \frac{1}{\omega c} \widehat{g}_s(\omega), \quad (32.10.1)$$

در نتیجه تبدیل سینوسی جواب مسئله به صورت زیر به دست می آید:

$$\widehat{u}_s(\omega, t) = \frac{1}{\omega c} \widehat{g}_s(\omega) \sin(\omega ct), \quad (33.10.1)$$

جواب مسئله با گرفتن تبدیل معکوس سینوسی به دست می آید:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega c} \widehat{g}_s(\omega) \sin(\omega x) \sin(\omega ct) d\omega, \quad (34.10.1)$$

اگر در داده های مسئله به جای سرعت اولیه تغییر مکان اولیه داده شود و سرعت اولیه برابر صفر باشد ، مجددا مسئله با روش مشابهی حل خواهد شد. اگر به جای شرط مرزی $u(0, t)$ شرط $u_x(0, t)$ داده شود در این صورت به جای تبدیل سینوسی فوریه از تبدیل فوریه کسینوسی استفاده می شود. در حالتی که در مسئله هم تغییر مکان اولیه و هم سرعت اولیه مخالف صفر باشد جواب مسئله به صورت مجموع جواب های دو حالت فوق خواهد بود.

10.1 مسائل

در مسائل 1 تا 5 معادله موج را روی نیم خط با c و تغییر مکان و سرعت اولیه داده شده حل کنید. ابتدا روش جدا پذیری را در نظر بگیرید و سپس از تبدیلات فوریه استفاده نمایید:

$$c = 3, \quad g(x) = 0, \quad f(x) = \begin{cases} x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad -2$$

$$c = 3, \quad f(x) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 4 \\ 2 & 4 < x \leq 11 \\ 0 & 11 < x \end{cases} \quad -3$$

$$c = 2, \quad f(x) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} \cos(x) & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \\ 0 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \quad x > \frac{5\pi}{2} \end{cases} \quad -4$$

$$c = 6, \quad f(x) = -2e^{-x}, \quad g(x) = 0 \quad -5$$

$$c = 14, \quad f(x) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} x^2(3-x) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

11.1 روش تبدیل لاپلاس

روش لاپلاس یکی دیگر از روشهایی است که برای حل معادله موج چه بر بازه های محدود و یا روی بازه های نیم متناهی می توان استفاده کرد. در این جا به حل مسئله در دو حالت می پردازیم.

مسئله در حالت نیم متناهی

مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (1.11.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (2.11.1), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (3.11.1), \quad x \geq 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.11.1)$$

که در آن A مقدار ثابت و مثبت است. چون خط از سمت راست بی کران است، شرط

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0, \quad (5.11.1)$$

را نیز در نظر می گیریم.

این مسئله یک تار نامتناهی واقع روی قسمت مثبت محور نامنفی را مدلسازی می کند که از سمت چپ ثابت شده می باشد. تار به سمت پایین کشیده می شود و سپس تحت نیروی ثابت A رها می گردد. تبدیل لاپلاس را روی متغیر t معادله موج به کار می بریم. در این روش متغیر x یک متغیر مستقل از t است. در این صورت خواهیم داشت:

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = L\left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A\right) = c^2 L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - L(A), \quad (6.11.1)$$

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = s^2 L[u(x, t)] - su(x, 0) - u_t(x, 0) = s^2 U(x, s), \quad (7.11.1)$$

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2}, \quad (8.11.1) \quad L(A) = \frac{A}{s}, \quad (9.11.1)$$

بنابراین معادله تبدیل یافته به صورت زیر خواهد بود:

$$s^2 U(x, s) = c^2 \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2} - \frac{A}{s}$$

$$\frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2} U(x, s) = \frac{A}{c^2 s}, \quad (10.11.1)$$

این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیر همگن است. جواب عمومی معادله شامل جماب عمومی معادله همگن به اضافه یک جواب خصوصی معادله غیر همگن است. چون طرف دوم معادله نسبت به متغیر x ثابت است بنابراین جواب خصوصی معادله غیر همگن نیز مقداری ثابت نسبت به متغیر x خواهد بود. قرار می دهیم:

$$U_p(x, s) = k, \quad (11.11.1)$$

با قرار دادن این تابع در معادله مقدار k را محاسبه خواهیم کرد.

$$-\frac{s^2}{c^2} k = \frac{A}{c^2 s} \Rightarrow k = -\frac{A}{s^3}, \quad (12.11.1)$$

و جواب عمومی معادله همگن عبارت است از:

$$U_{gh}(x, s) = k_1 e^{\frac{sx}{c}} + k_2 e^{-\frac{sx}{c}}, \quad (13.11.1)$$

بنابراین جواب مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$U_g(x, s) = U_{gh}(x, s) + U_p(x, s) = k_1 e^{\frac{sx}{c}} + k_2 e^{-\frac{sx}{c}} - \frac{A}{s^3}, \quad (14.11.1)$$

برای محاسبه ضرایب نا معلوم k_2, k_1 از شرایط مسئله استفاده می کنیم. برای استفاده از شرط مرزی ابتدا بایستی تبدیل لاپلاس آن را محاسبه نماییم:

$$U(0, s) = L[u(0, t)] = L[0] = 0, \quad (15.11.1)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$k_1 + k_2 = \frac{A}{s^3}, \quad (16.11.1)$$

بنابراین:

$$U(x, s) = k_1 e^{\frac{sx}{c}} + \left(\frac{A}{s^3} - k_1\right) e^{-\frac{sx}{c}} - \frac{A}{s^3}, \quad (17.11.1)$$

اکنون از حد شرط مرزی استفاده می کنیم. ابتدا تبدیل را روی این شرط اعمال می کنیم:

$$L\left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} L\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} U'(x, s) = 0, \quad (18.11.1)$$

و از طرفی،

$$U'(x, s) = \frac{s}{c} e^{\frac{sx}{c}} - \frac{s}{c} \left(\frac{A}{s^3} - k_1\right) e^{-\frac{sx}{c}}, \quad (19.11.1)$$

چون وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $e^{\frac{sx}{c}} \rightarrow \infty$ در نتیجه برای کراندار بودن جواب بایستی ضریب برابر با صفر باشد. بنابراین $k_1 = 0$ در نتیجه داریم:

$$U(x, s) = \left(\frac{A}{s^3}\right) e^{-\frac{sx}{c}} - \frac{A}{s^3}, \quad (20.11.1)$$

جواب تبدیل معکوس لاپلاس این تابع است:

$$u(x, t) = L^{-1}\left[\left(\frac{A}{s^3}\right) e^{-\frac{sx}{c}} - \frac{A}{s^3}\right], \quad (21.11.1)$$

$$L^{-1}\left[\frac{A}{s^3}\right] = \frac{A}{2} t^2, \quad (22.11.1)$$

و با استفاده از قضیه انتقال خواهیم داشت:

$$L^{-1}\left[\left(\frac{A}{s^3}\right) e^{-\frac{sx}{c}}\right] = \frac{A}{2} \left(t - \frac{x}{c}\right)^2 H\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad (23.11.1)$$

که در آن $H(x)$ تابع هویساید می باشد. بنابراین جواب عبارت است از:

$$u(x, t) = \frac{A}{2} \left(t - \frac{x}{c}\right) H\left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{A}{2} t^2, \quad (24.11.1)$$

چون

$$\left(t - \frac{x}{c}\right) H\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} 0 & x > ct \\ \left(t - \frac{x}{c}\right)^2 & x \leq ct \end{cases}, \quad (25.11.1)$$

در این صورت

$$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{At^2}{2} & x > ct \\ \frac{Ax^2}{2c^2} - \frac{A}{2}xt & x \leq ct \end{cases}, \quad (26.11.1)$$

مسائل 1.11.1

1- با استفاده از تبدیل لاپلاس جوال مسئله زیر را به دست آورید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x > 0$$

$$u(0, t) = f(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t \geq 0$$

2- با استفاده از تبدیل لاپلاس مسئله مقدار مرزی زیر را حل کنید:

$$9 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0 \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad u(2, t) = f(t)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t \geq 0$$

3- مسئله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - At \quad x > 0, \quad t > 0, \quad A = \text{const}$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x > 0$$

$$u(0, t) = f(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t \geq 0$$

4- از تبدیل لاپلاس استفاده کنید و نشان دهید تابع

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)]$$

جواب مسئله زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x > 0$$

$$u(0, t) = f(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t \geq 0$$

5- مسئله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Axt \quad x > 0, \quad t > 0, \quad A = \text{const}$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x > 0$$

$$u(0, t) = e^{-t}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t \geq 0$$

12.1 روش دالامبر

در این بخش روش دالامبر را برای حل معادله موج روی اعداد حقیقی به کار می‌بریم.

مسئله ای که به حل آن می‌پردازیم به صورت زیر است:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (1.12.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (2.12.1), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (3.12.1) \quad -\infty < x < \infty$$

از $u(x, t)$ به عنوان تابع مکان موج استفاده می کنیم. به ازای هر t ثابت تابع $u = u(x, t)$ در صفحه u, x وضعیت موج را در لحظه t نمایش می دهد.

این مسئله مقدار مرزی- اولیه را مسئله کوشی برای معادله موج گویند. خطوط $x - ct = k_1$ و

$x + ct = k_2$ را مشخصه های معادله موج در صفحه xt می گویند. این خطوط در صفحه xt دارای شیب $\frac{1}{c}$ و $-\frac{1}{c}$ می باشند. با استفاده از این مشخصه ها و تغییر متغیر های زیر،

$$\xi = x - ct, \quad (4.12.1), \quad \eta = x + ct, \quad (5.12.1)$$

این تغییر متغیر قابل نمایش به صورت زیر خواهد بود:

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad (6.12.1) \quad t = \frac{1}{2c}(-\xi + \eta), \quad (7.12.1)$$

تعریف کنید:

$$U(\xi, \eta) = u\left(\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right), \left(\frac{-\xi + \eta}{2c}\right)\right), \quad (8.12.1)$$

طبق قوانین زنجیره ای مشتقگیری می کنیم:

$$u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = U_\xi + U_\eta$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} \xi_x + U_{\xi\eta} \eta_x + U_{\eta\xi} \xi_x + U_{\eta\eta} \eta_x$$

$$= U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \quad (9.12.1)$$

به طور مشابه،

$$u_{tt} = c^2(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}), \quad (10.12.1)$$

با جایگزینی این مقادیر در معادله موج خواهیم داشت:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}) - c^2(U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta})$$

$$U_{\xi\eta} = 0, \quad (11.12.1)$$

این معادله به سادگی قابل حل است. چون $(U_{\xi})_{\eta} = 0$ ، یعنی U_{ξ} نسبت به η مستقل است، در نتیجه U_{ξ} تنها تابعی از ξ است:

$$U_{\xi} = h(\xi), \quad (12.12.1)$$

بنابراین:

$$U(\xi, \eta) = \int h(\xi) d\xi + G(\eta), \quad (13.12.1)$$

در این انتگرال گیری ξ متغیر انتگرال گیری است ثابت انتگرال گیری می تواند به متغیر η بستگی داشته باشد. در این حالت انتگرال $\int h(\xi) d\xi$ تابعی از ξ خواهد بود، بنابراین تابع $U(\xi, \eta)$ به صورت مجموع یک تابع از ξ و یک تابع از η خواهد بود:

$$U(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta), \quad (14.12.1)$$

این تابع به ازای هر دو تابع F, G که دو بار مشتق پذیر باشند در معادله موج تبدیل یافته صدق می کند و بالعکس هر جواب معادله تبدیل یافته قابل نمایش به این صورت خواهد بود. بر حسب t, x این بدین معنی است که هر جواب معادله موج به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (15.12.1)$$

تا اینجا فقط با معادله موج پیش رفته ایم. اکنون می خواهیم توابع F, G را طوری بیابیم که شرایط اولیه نیز برقرار باشند. یعنی بایستی F, G را طوری محاسبه کنیم تا داشته باشیم:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

بنابراین باید:

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = f(x) \quad (16.12.1)$$

$$u_t(x, 0) = -cF'(x) + cG'(x) = g(x) \quad (17.12.1)$$

با انتگرالگیری از (17.12.1) و مرتب کردن جملات خواهیم داشت:

$$-F(x) + g(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(\omega) d\omega - F(0) + G(0), \quad (18.12.1)$$

از رابطه (16.12.1) و رابطه (18.12.1) نتیجه می شود که:

$$2G(x) = f(x) + \frac{1}{c} \int_0^x g(\omega) d\omega - F(0) + G(0), \quad (19.12.1)$$

در نتیجه:

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\omega) d\omega - \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}G(0), \quad (20.12.1)$$

بنابراین با استفاده از روابط (18.12.1) و (20.12.1) خواهیم داشت:

$$F(x) = f(x) - G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\omega) d\omega + \frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{2}G(0), \quad (21.12.1)$$

از روابط (20.12.1) و (21.12.1) جواب معادله به دست می آید:

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

$$= \frac{1}{2}f(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(\omega) d\omega + \frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{2}G(0)$$

$$+ \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(\omega) d\omega - \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}G(0)$$

از جمع این روابط و ادغام دو انتگرال خواهیم داشت:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\omega) d\omega \quad (22.12.1)$$

این جواب دالامبر به مسئله کوشی برای معتدله موج است روی محور حقیقی است. این یک جواب صریح بر حسب تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه تار است.

مثال 1.12.1

مسئله مقدار مرزی – اولیه زیر را حل کنید:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (23.12.1)$$

$$u(x, 0) = e^{-|x|}, \quad (24.12.1) \quad u_t(x, 0) = \cos(4x), \quad (25.12.1) \quad -\infty < x < \infty$$

طبق روابط بالا داریم:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (e^{-|x-2t|} + e^{-|x+2t|}) + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \cos(4\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2} (e^{-|x-2t|} + e^{-|x+2t|}) + \frac{1}{16} (\sin(4(x+2t)) - \sin(4(x-2t))) \\ &= \frac{1}{2} (e^{-|x-2t|} + e^{-|x+2t|}) + \frac{1}{8} \sin(4x) \cos(8t), \quad (26.12.1) \end{aligned}$$

1.12.1 امواج پیشرو و پسرو

جواب را به صورت زیر بنویسید:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left(f(x - ct) - \frac{1}{c} \int_0^{x-ct} g(\omega) d\omega \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(f(x + ct) + \frac{1}{c} \int_0^{x+ct} g(\omega) d\omega \right) = \varphi(x - ct) + \beta(x + ct), \quad (27.12.1) \end{aligned}$$

که در آن

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\omega)d\omega, \quad (28.12.1)$$

$$\beta(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\omega)d\omega, \quad (29.12.1)$$

را موج پیشرو می نامیم. نمودار این تابع از انتقال نمودار تابع $\varphi(x)$ به اندازه ct به سمت راست به دست می آید و به همین دلیل ممکن است تصور شود که موج با سرعت c به سمت راست در حال حرکت است. $\beta(x + ct)$ را موج پسرو می نامیم. نمودار آن از روی نمودار $\beta(x)$ که به اندازه ct به سمت چپ حرکت کرده است حاصل می شود و به این دلیل تصور می شود که موج به سمت چپ حرکت کرده است. این مطلب باعث می شود که فکر کنیم که نمودار موج $u(x, t)$ در هر لحظه t مجموع یک موج در حال حرکت به سمت راست و یک موج در حال حرکت به سمت چپ است.

مثال 2.12.1

فرض کنید $c = 1$, $g(x) = 0$ و $f(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & |x| < 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases}$$

جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) + \beta(x + ct) = \frac{1}{2}(f(x - t) + f(x + t))$$

در هر لحظه t وضعیت موج مجموع تغییر مکان اولیه است که t واحد به سمت راست و t واحد به سمت چپ حرکت کرده است.

12.1 مسائل

در هر یک از مسائل 1 تا 6 جواب مسئله موج زیر را با استفاده از روش دالامبر بنویسید:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$g(x) = -x, \quad f(x) = x^2, \quad c = 1 \quad -1$$

$$g(x) = \cos(x), \quad f(x) = x^2 - 2x, \quad c = 4 \quad -2$$

$$g(x) = 1 - x^2, \quad f(x) = \cos(\pi x), \quad c = 7 \quad -3$$

$$g(x) = x^2, \quad f(x) = \sin(2x), \quad c = 5 \quad -4$$

$$g(x) = x, \quad f(x) = e^x, \quad c = 14 \quad -5$$

$$g(x) = 3, \quad f(x) = -5x + x^2, \quad c = 12 \quad -6$$