1.1 انواع معادلات دیفرانسیل

یک معادله دیفرانسیل معمولی معادله ای است که در آن متغیر مستقل، تابع (تابع یک متغیره) و مشتقات تابع نسبت به متغیر وجود دارد.

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی معادله ای است شامل متغیر های مستقل ، تابع (تابعی با بیش از یک متغیر) و مشتقات جزیی تابع نسبت به متغیر های مستقل.

در بررسی پدیده های طبیعی و فیزیکی به مدلسازی پدیده پرداخته می شود. اگر پدیده ه تنها به یک متغیر وابسته باشد، مدل ریاضی آن یک معادله دیفرانسیل معمولی خواهد بود، اما چون اکثر پدیده های به بیش از یک متغیر وابسته اند، مدل ریاضی آنها یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی است. مدل ریاضی مسائلی در مکانیک سیالات، انتقال حرارت، نظریه الکترومغناطیسی و هم چنین مسائلی در ارتباط با اپیدمی ها(برای مثال.....)و جریان ترافیک و تحلیل های اقتصادی به صورت یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی است.

مثال 1:

فرض کنیم u تابعی از دو یا تعداد بیشتری متغییر t (زمان)، y, x باشد. در این مثال به معرفی و مطالعه چند معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی می پردازیم:

1- معادله موج یک بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.1.1)$$

2- معادله موج دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (2.1.1)$$

3- معادله گرما ی یک بعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (3.1.1)$$

4- معادله گرمای دوبعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (4.1.1)$$

5- معادله لاپلاس دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (5.1.1)$$

6- معادله لاپلاس در مختصات قطبی

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = 0 \qquad (6.1.1)$$

7- معادله پوآسن دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \qquad (7.1.1)$$

عبارت $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ در بیشتر معادلات فوق ظاهر شده است. به این عبارت لاپلاسین u گفته می شود و با $\nabla^2 u$ و یا Δu نشان داده می شود.

مرتبه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه بالاترین مرتبه مشتق جزیی ظاهر شده در معادله است. معادله دیفرانسیل را **خطی** گویند اگر تابع مجهول و مشتقات جزیی در آن همه از درجه یک باشند و حاصلضرب تابع در مشتقات و یا مشتقات در مشتقات نیز در معادله ظاهر نشوند، در غیر این صورت معادله را **غیر خطی** گویند. معادلات دیفرانسیل فوق همگی خطی و مرتبه دوم هستند. اما معادله دیفرانسیل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \qquad (8.1.1)$$

خطی نیست، زیرا جمله $u\frac{\partial u}{\partial x}$ در معادله ظاهر شده است.

در حالت کلی می توان یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی مرتبه دوم از دو متغیر را به صورت زیر نشان داد:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \qquad (9.1.1)$$

که در آن G, F, E, C, B, A توابعی از دو متغیر y, x هستند. معادله را **همگن** گویند اگر $G = 0$ ، در غیر این صورت معادله را غیر همگن گویند. در تمام قسمت های بعد فرض می کنیم که مشتقات آمیخته تابع u از هر مرتبه ای با هم مساویند(برای مثال $u_{xy} = u_{yx}$, $u_{xxy} = u_{xyx} = u_{yxx}$ و غیره.)
تمام معادلات دیفرانسیل فوق به جز معادله پوآسن معادلات خطی مرتبه دوم همگن هستند.
در مدلسازی یک پدیده فیزیکی اغلب معادله دیفرانسیل با مجموعه ای از معادلات دیگر ظاهر می شود که رفتار جواب را در مرزهای ناحیه مورد نظر نشان می دهد. به این معادلات **شرایط مرزی** گفته می شود. معادله دیگری که برای تشریح یک پدیده فیزیکی ظاهر می شود مقدار اولیه در لحظه $t = 0$، یا **شرط اولیه** است. به معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی همراه با شرایط مرزی و شرایط اولیه یم مسئله مقدار اولیه – مرزی و یا به طور ساده مسئله مقدار مرزی می گویند.

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0 \qquad u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

این یک نمونه از یک مسئله مقدار مرزی- اولیه است. ابتدا جواب عمومی مسئله را به دست می آوریم و سپس شرط اولیه را برای پیدا کردن جواب خاص به کار می بریم. باید دقت شود که **جواب عمومی نه تنها به خود معادله بلکه به شرایط مرزی بستگی دارد.** به عبارت دیگر معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی دارای جوابهای عمومی متفاوتی است که با استفاده از شرایط مرزی متفاوت به دست می آید.
اگر شرایط مرزی روی u داده شود ، یعنی $u(l,t) = g(t), u(0,t) = f(t)$ آنگاه شرایط را **شرایط دیریکله** گویند. اگر شرایط مرزی روی مشتقات داده شوند، یعنی

$$u_x(l,t) = g(t), \; u_x(0,t) = f(t)$$

این شرایط را **شرایط نیومن** گویند. اگر شرایط مرزی روی ترکیبی از u و مشتق آن داده شود ، یعنی:

$$\alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = f(t), \;\; \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = g(t)$$

آنگاه شرایط را شرایط روبین گویند.

این سه حالت مهمترین شرایط مرزی است. اگر شرایط مرزی مشخص شده برابر با صفر باشد آنگاه به آنها شرایط همگن گویند.

۲.۱ بررسی پدیده های فیزیکی

بررسی پدیده های فیزیکی شامل دو قسمت می باشد

1- مدلسازی مسئله و تشکیل معادله حاکم بر رفتار پدیده

2- حل معادله با استفاده از شرایط حاکم بر آن

تعدادی از پدیده های فیزیکی مدلسازی شده اند، ولی در حالت کلی برای مدلسازی مسئله بایستی قوانین فیزیکی حاکم بر پدیده را در نظر گرفت. مدل ریاضی پدیده های فیزیکی و طبیعی بسته به پیچیدگی پدیده ممکن است به معادلات مختلفی از قبیل معادله دیفرانسیل با مشتق جزیی، معادلات انتگر الی و یا ....تبدیل گردد.

۳.۱ مدلسازی معادله موج در حالت یک بعدی

یک تار کشسان که دو انتهای آن در دو نقطه ثابت شده ، مانند یک سیم گیتار، را در نظر بگیرید. در لحظه ای که آنرا لحظه $t=0$ می نامیم با ایجاد یک ضربه روی تار یک جابجایی کوچک در آن ایجاد می کنیم و سپس تار رها می شود تا در صفحه ارتعاش نماید. فرض می کنیم که $u(x,t)$ حرکت تار را در صفحه xu در لحظه t در نقطه ای به طول x نشان می دهد. در حالت خاص $u(x,0)$ شکل اولیه تار را نشان می دهد. می خواهیم تابع $u=u(x,t)$ را به عنوان وضعیت تار در لحظه $t>0$ و به ازا هر $0<x<l$ محاسبه می کنیم. $u(x,t)$ را تابع مکان تارمی نامیم. در اینجا فرض می کنیم که:

1- تار دارای دانسیته طولی ثابت باشد، به عبارت دیگر تار از جنسی همگن است.

2- تار کاملا کشسان است و در مقابل کشش مقاومتی از خود نشان نمی دهد.

3- ارتعاشات تار بسیار کوچک بوده و در صفحه xu انجام می شود.

مدلسازی ارتعاشات آزاد تار

فرض می کنیم هیچ نیروی خارجی روی تار اعمال نمی شود و فرض می کنیم که وزن تار در مقایسه با کشش ایجاد شده در تار قابل صرفنظر کردن باشد. بنابراین در اولین تجربه، تنها نیروی موثر روی تار نیروی کشش است.

فرض کنیم T نمایشگر قدرمطلق کشش در حالت تعادل باشد. این کشش در تمام نقاط تار یکسان است و چون تغییر در طول تار در هنگام حرکت آن قابل صرفنظر کردن است، می توان فرض کرد که کشش

در طول ارتعاش ثابت است. همچنین چون دو انتهای تار بسته شده است، کشش در هر نقطه به صورت مماس اثر می کند. اکنون قطعه ای از تار واقع بین دو نقطه B, A با طولهای $x \quad x+\Delta x,$ را در نظر بگیرید. با به کار بردن قانون دوم نیوتن ، نیرو های وارد بر این قطعه تار در اثر کشش برابر است با حاصلضرب شتاب مرکز ثقل این قطعه در جرم آن. این رابطه یک معادله برداری است. مولفه عمودی آن برابر است با:

$$T(x+\Delta x)\sin(\theta+\Delta\theta)-T(x,t)\sin(\theta)=\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x},t), \quad (1.3.1)$$

که در ان $\bar{x}$ مرکز جرم این قطعه تار و $T(x,t)=|\boldsymbol{T}(x,t)|$ است.

از طرفی چون فرض بر این است که تار در امتداد افقی هیچ گونه حرکتی ندارد، بنابراین مجموع نیرو های وارد بر این قطعه برابر با صفر است:

$$-T(x,t)\cos(\theta)+T(x+\Delta x,t)\cos(\theta+\Delta\theta)=0, \qquad (2.3.1)$$

بنابراین:

$$T(x+\Delta x,t)\cos(\theta+\Delta\theta)=T(x,t)\cos(\theta)=k, \qquad (3.3.1)$$

طرفین معادله (1.3.1) را بر (3.3.1) تقسیم می کنیم:

$$\frac{T(x+\Delta x)\sin(\theta+\Delta\theta)-T(x,t)\sin(\theta)}{k}=\frac{\rho}{k}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x},t), \qquad (4.3.1)$$

$$\frac{T(x+\Delta x)\sin(\theta+\Delta\theta)}{T(x+\Delta x,t)\cos(\theta+\Delta\theta)}-\frac{T(x,t)\sin(\theta)}{T(x,t)\cos(\theta)}=\frac{\rho}{k}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x},t), \qquad (5.3.1)$$

$$\tan(\theta+\Delta\theta)-\tan(\theta)=\frac{\rho}{k}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x},t), \qquad (6.3.1)$$

چون $\tan(\theta+\Delta\theta)$ و $\tan(\theta)$ به ترتیب شیب خطوط مماس بر منحنی $u(x,t)$ را نقاط $(x+\Delta x,t)$ و (x,t) می باشد.در نتیجه،

$$\tan(\theta+\Delta\theta)=\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}, \qquad \tan(\theta)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \qquad (7.3.1)$$

با استفاده از روابط (6.3.1) و (7.3.1) و تقسیم طرفین (4.3.1) بر Δx ، خواهیم داشت:

$$\frac{\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\Delta x}=\frac{\rho}{k}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x},t), \qquad (8.3.1)$$

با میل دادن Δx به سمت صفر رابطه (8.3.1) به صورت زیر خواهد بود:

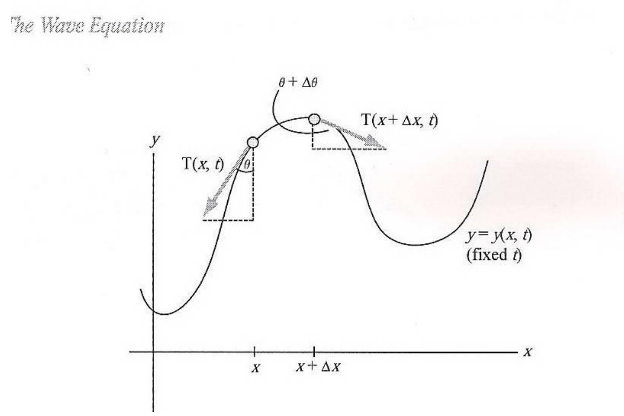
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\rho}{k}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \qquad (9.3.1)$$

با قرار دادن $c^2=\frac{k}{\rho}$ معادله اصلی موج به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (10.3.1)$$

چون فرض شده که دو انتهای تار در تمام لحظات ثابت باشد، شرایط مرزی به صورت زیر خواهند بود:

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \quad t\geq 0, \qquad (11.3.1)$$



شکل(1.1)

شرایط اولیه مسئله تغییر مکان اولیه تار، و سرعت اولیه ی تار، سرعتی است که تار در لحظه $t=0$ با آن رها می شود، به صورت زیر معرفی می شود.

$$u(x,0)=f(x), \quad 0\leq x\leq l$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x), \quad 0\leq x\leq l$$

g, f توابعی مفروض هستند که در شرایط خاصی صدق می کنند. برای مثال اگر تار در دو انتها ی خود ثابت باشد تابع مکان اولیه باید در شرط زیر صدق کند:

$$f(0) = f(l) = 0$$

اگر سرعت اولیه صفر باشد(تار از حالت سکون رها شود) ، $g(x) = 0$.

معادله موج همراه با شرایط اولیه و مرزی یک **مسئله مقداراولیه - مرزی** برای تابع $u(x,t)$ را تشکیل می دهد. این اطلاعات برای تعیین جواب $u(x,t)$ به صورت یکتا کافی است.

ارتعاش تحت تاثیر یک نیروی خارجی

اگر علاوه بر ضربه اولیه ارتعاشات تار تحت تاثیر نیروهای خارجی نیز قرار داشته باشدُ مثلا فرض کنیم $F(x,t)$ مقدار نیروی وارد بر یک واحد طول در امتداد محور u ها باشد. در این حالت برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی بایستی جمله $F(x,t)\Delta x$ به سمت چپ رابطه (۶.۳.۱) اضافه شود. در این صورت نظیر بحث های انجام شده در قسمت قبل معادله ارتعاش تار تحت تاثیر نیروهای خارجی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F(x,t)}{\rho}, \qquad (12.3.1)$$

دو حالت خاص رابطه (12.3.1) جالب است. وقتی نیروی خارجی نیروی جاذبه g باشد. در این صورت معادله (12.3.1) به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g \qquad (13.3.1)$$

حالت دیگر وقتی که نیروی خارجی نیروی مقاومت متناسب با سرعت لحظه ای(ارتعاش تار در یک سطح سیال) باشد. در این صورت معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\mathrm{k}\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (14.3.1)$$

که در آن k مقدار ثابت است.

حالت دیگری از مسئله وقتی است که دو انتهای تار در حال ارتعاش باشد. در این حالت شرایط مرزی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(0,t) = p(t), \quad u(l,t) = q(t)$$

در فضای دوبعدی معادله موج به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad (15.3.1)$$

این معادله جابجایی عمودی $u(x,y,t)$ یک پوسته را نشان می دهد. برای مثال ارتعاشات سطح یک طبل.

در این قسمت هم باید شرایط اولیه و شرایط مرزی داده شوند تا یک جواب یکتا به دست آید. معمولا تابع جواب روی مرز ثابت است(لبه سطح طبل) بنابراین در نقاط مرزی جابجایی نخواهیم داشت. به ازا هر (x,y) روی مرز و به ازا هر $t \geq 0$ داریم:

$$u(x,y,t) = 0$$

به علاوه باید سرعت اولیه و جابجایی اولیه داده شوند، این شرلیط به صورت زیر خواهند بود:

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = g(x,y)$$

که در آن g,f توابعی معلومند.

ما همچنین این امکان را داریم که از معادله موج دو بعدی در مختصات قطبی استفاده کنیم. برای به دست آوردن معادله موج در دستگاه قطبی از روابط بین مختصات کارتزین و قطبی استفاده می کنیم:

$$x = rcos(\theta), \quad y = rsin(\theta)$$

بنابراین:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$$

قرار دهید:

$$u(x,y) = u\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big) = U(r,\theta)$$

محاسبه می کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial U}{\partial \theta}= \frac{x}{r}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)-\frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^2}\right)+\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)-\frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)$$

$$=\frac{y^2}{r^3}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial U}{\partial \theta}+\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}-\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial \theta}+\frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

با روش مشابهی می توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2}{r^3}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial U}{\partial \theta}+\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial \theta}+\frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

از جمع این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

بنا براین معادله موج دو بعدی در مختصات قطبی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right), \qquad (16.3.1)$$

که در آن $U(r,\theta,t)$ جابجایی عمودی نقطه (r,θ) واقع روی پوسته در صفحه xy در زمان t را نشان می دهد.

در ادامه مسائل مقدار مرزی شامل معادله موج را با روشهای مختلف حل خواهیم کرد.

مسائل بخش 2.1

1- فرض کنید $u_n(x,t)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos(\frac{n\pi c}{l}t)$. نشان دهید به ازا هر عدد مثبت n تابع $u_n(x,t)$ در معادله موج یک بعدی صدق می کند.

2- نشان دهید $u_{nm}(x,y,t)=\sin(nx)\cos(my)\cos(\sqrt{n^2+m^2}ct$ به ازائ هر m,n صحیح مثبت در معادله موج دو بعدی صدق می کند.

3- فرض کنید f یک تابع دو بار مشتق پذیر یک متغیره باشد. نشان دهید تابع

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]$$

در معادله موج یک بعدی صدق می کند.

4- نشان دهید تابع $u(x,t)=\sin(x)\cos(ct)+\frac{1}{c}\cos(x)\sin(ct)$ در معادله موج یک بعدی و شرایط مرزی و شرایط اولیه زیر صدق می کند:

$$u(0,t)=u(2\pi,t)=\frac{1}{c}\sin(ct)\,,\quad t>0$$

$$\mathrm{u(x,0)}=\sin(\mathrm{x}),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\cos(x)\,,\qquad 0<x<2\pi$$

5- مسئله مقدار اولیه - مرزی (معادله مشتق جزیی و شرایط مرزی و اولیه) را برای ارتعاش یک پوسته مستطیل شکل که ناحیه $0\le x\le a$, $0\le y\le b,$ را اشغال می کند فرمولبندی کنید، در صورتی که انحراف اولیه پوسته با ضابطه $f(x,y)$ و سرعت اولیه (در زمان صفر) با ضابطه $g(x,y)$ نشان داده شود ودر تمام لحظات پوسته روی مرزهای ناحیه ثابت و بدون حرکت باشد.

6- فرمول های مربوط به مسئله مقدار مرزی - اولیه را برای حرکت تار کشسانی به طول l که در دو انتها ثابت شده و بعد از قرار دادن آن در وضعیت اولیه $f(x)$ رها می شود تا در صفحه xy ارتعاش کند بنویسید . مقاومت هوا که قدرمطلق آن در هر نقطه متناسب با مربع سرعت در آن نقطه است با حرکت سیم مقابله می کند.

7- معادله موج در فضای سه بعدی در مختصات کروی را بنویسید. به خاطر داشته باشید که روابط بین مختصات کروی و مختصات کارتزین به صورت زیر است:

$$x=\rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,,\quad y=\rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,,z=\rho\cos(\varphi)$$

که در آن ρ فاصله مبدا تا نقطه (x, y, z)، θ زاویه بین جهت مثبت محور x ها و تصویر شعاع حامل (تصویر خط واصل بین مبدا تا نقطه (x, y, z))، روی صفحه مختصات و φ کوچکترین زاویه بین جهت مثبت محور z ها و شعاع حامل است که از سمت محورر z ها به سمت شعاع حامل اندازه گیری می شود.

ابتدا به حل معادله موج و معادله انتقال حرارت در یک بازه بسته $[0, l]$ با روشهای متفاوت می پردازیم.در ابتدا با مسئله ساده ای شروع می کنیم و سپس حالت های پیچیده تر رت بررسی می کنیم. در مرحله اول برای حل مسئله از روش جداپذیری و سپس از روش تبدیلات استفاده خواهیم کرد.

1.2.1 ارتعاش تار با سرعت اولیه صفر

یک تار کشسان به طول l را در نظر بگیرید در حالت اول ساده ترین حالت را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که دو انتهای آن روی محور x ها در دو نقطه $x = 0 \quad x = l,$ بسته شده است. در ابتدا که آن را لحظه $t = 0$ می نامیم یک تغییر مکان اولیه در تار ایجاد کرده و آن را بدون سرعت اولیه رها می کنیم تا در صفحه xu ارتعاش نماید. می خواهیم در لحظه t ثابت تابع تغییر مکان $u(x, t)$ را به عنوان تابعی تنها از x به دست آوریم که نمودار آن یک منحنی روی صفحه xu را نشان می دهد و وضعیت تار را در لحظه t نشان می دهد.

مدل ریاضی مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0 \qquad (17.3.1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \qquad t > 0 \qquad (18.3.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq l \qquad (19.3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq l \qquad (20.3.1)$$

نمودار $f(x)$ مکان تار را درلحظه $t = 0$ ، قبل از رها شدن نشان می دهد.

روش فوریه یا **روش جداپذیری** یا **روش تفکیک متغیرها** سعی می کند جوابی برای مسئله به صورت $u(x,t)=X(x)T(t)$ بیابد. البته جواب تمام معادلات دیفرانسیل را نمی توان به صورت حاصل ضرب توابع با متغیر های مجزا بیان کرد، ولی معادلاتی که در این درس مورد مطالعه قرار می گیرند چنین خاصیتی دارند که جواب آنها به صورت ترکیب خطی چنین توابع با متغیر های جدا از هم می باشند. بنابراین سعی می کنیم تمام چنین جوابهایی با متغیرهای مجزا را یافته و سپس جواب عمومی معادله را بیابیم.

جوابی به صورت $u(x,t)=X(x)T(t)$ را در نظر گرفته و در معادله قرار می دهیم. خواهیم داشت:

$$XT''=c^2X''T \qquad (21.3.1)$$

طرفین رابطه را بر c^2XT تقسیم می کنیم:

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{c^2T}$$

طرف چپ این معادله تنها به x، و سمت راست آن تنها به t وابسته است. چون x,t متغیر های مستقل از یک دیگر هستند در نتیجه این نسبت نمی تواند به هیچ یک از این دو متغیر وابسته باشد و باید مقداری ثابت باشد. این مقدار ثابت را با k نشان می دهیم. خواهیم داشت:

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{c^2T}=k$$

بنابراین داریم:

$$X''-kX=0, \quad T''-kc^2T=0 \qquad (22.3.1)$$

یعنی معادله موج به دو معادله دیفرانسیل معمولی تفکیک شده است.

حالا شرایط مرزی را در نظر می گیریم. ابتدا داریم:

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0 \qquad (23.3.1)$$

در این رابطه اگر به ازا هر t داشته باشیم $T(t)=0$ ، در نتیجه

$$u(x,t)=0 \quad t\geq 0, \quad 0\leq x\leq l \qquad (24.3.1)$$

این جواب مسئله خواهد بود اگر و تنها اگر $f(x) = 0$. در واقع این به این معنی است که هیچ گونه ارتعاش و حرکتی در تار ایجاد نشده است و همواره بدون حرکت روی محور قرار دارد. به همین دلیل اگر نه نیروی خارجی روی تار اثر کند و نه تحت تاثیر سرعت اولیه قرار گیرد در تمام لحظات تار ثابت باقی می ماند.

بنابراین با شرایط داده شده در این مسئله بایستی که $T(t) \neq 0$. در نتیجه از این شرط مرزی نتیجه می شود که

$$X(0) = 0 \qquad (25.3.1)$$

متشابها از شرط مرزی دیگر نیز نتیجه می شود که:

$$u(l,t) = 0 \;=>\; X(l)T(t) = 0 \;=>\; X(l) = 0 \qquad (26.3.1)$$

بنابراین دو شرط روی تابع $X(x)$ وجود دارد و مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$X'' - kX = 0, \quad X(0) = X(l) = 0 \qquad (27.3.1)$$

به دنبال مقادیری از k هستیم تا جواب مخالف صفر برای مسئله به دست آوریم. چند حالت در نظر می گیریم:

$$k > 0, \quad k = 0 \quad k < 0,$$

در حالت اول فرض می کنیم که $k > 0$. بدون انکه خللی به کلیت امر وارد شود قرار می دهیم:

$$k = p^2, \quad p > 0$$

بنابراین معادله به صورت زیر تبدیل می شود:

$$X'' - p^2X = 0, \quad X(0) = 0, \; X(l) = 0 \qquad (28.3.1)$$

جواب معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$X(x) = Ae^{px} + Be^{-px} \qquad (29.3.1)$$

با اعمال شرایط $X(0) = 0, \; X(l) = 0$ روی تابع فوق خواهیم داشت:

$$X(x) = 0 \qquad (30.3.1)$$

یعنی تنها جواب این معادله با شرایط داده شده تابع صفر است که قابل قبول نمی باشد.

در حالت دوم قرار می دهیم $k = 0$. در نتیجه معادله با شرایط داده شده روی تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$X''(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \qquad (31.3.1)$$

جواب معادله به صورت خطی خواهد بود.

$$X(x) = ax + b \qquad (32.3.1)$$

بعد از اعمال شرایط فوق روی تابع به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$X(x) = 0 \qquad (33.3.1)$$

بنابراین در این حالت نیز جواب قابل قبولی به دست نمی آید.

حالت سوم $k < 0$ در این حالت هم بدون آنکه به کلیت امر خللی وارد شود قرار می دهیم

$k = -p^2, \quad p > 0$. در نتیجه داریم:

$$X'' + p^2 X = 0, \quad X(0) = 0, \; X(l) = 0 \qquad (34.3.1)$$

این یک مسئله اشترم لیویل است. یعنی به دنبال مقادیری از p هستیم که به ازا آن جواب مخالف صفری برای تابع $X(x)$ به دست آید. از حل معادله خواهیم داشت:

$$X(x) = A cos(px) + B sin(px) \qquad (35.3.1)$$

با استفاده از اولین شرط روی تابع نتیجه می شود، $A = 0$. با استفاده از دومین شرط خواهیم داشت:

$$B sin(pl) = 0 \qquad (36.3.1)$$

در این رابطه اگر بتوان برای p مقادیری یافت که $sin(pl) = 0$ در این صورت هم شرایط مسئله بر قرار خواهد بود و ضمنا تابع جواب صفر نخواهد شد.

$$sin(pl) = 0 \quad => sin(pl) = \sin(n\pi) \qquad (37.3.1)$$

$$=> pl = n\pi, \quad n = 1,2,\dots, \quad p = \frac{n\pi}{l} \qquad (38.3.1)$$

در نتیجه داریم:

$$X(x) = Bsin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1,2,\dots$$

به p **مقدار ویژه** و به تابع $X(x)$ متناظر آن **تابع ویژه** مسئله گویند.

دقت کنید که در این جا ضریب B می تواند هر عدد مخالف صفر باشد. برای راحتی قرار می دهیم $B = 1$. از طرفی چون در معادله فوق سمت راست رابطه به پارامتر n وابسته است پس سمت چپ نیز وابسته به n خواهد شد.

$$X_n(x) = sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1,2,\dots \,(39.3.1)$$

حالا به محاسبه $G(t)$ برمی گردیم. چون معادله از حالت سکون رها شده است،

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad => X(x)T'(0) = 0 => T'(0) = 0 \qquad (40.3.1)$$

معادله برای تابع$T(t)$ *به صورت زیر خواهد بود:*

$$T''(t) + c^2KT(t) = 0, \; T'(0) = 0 \qquad (41.3.1)$$

که در آن

$$K = -p^2 = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

بنابراین

$$T''(t) + c^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T(t) = 0, \; T'(0) = 0 \qquad (42.3.1)$$

در نتیجه داریم:

$$\mathrm{T(t)} = A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + B_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \qquad (43.3.1)$$

$$T'(0) = B_n \frac{cn\pi}{l} = 0 \quad => \quad B_n = 0 \qquad (44.3.1)$$

در نتیجه به ازا هر عدد صحیح مثبت n و هر ثابت مجهول A_n ،

$$T(t) = T_n(t) = A_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \qquad (45.3.1)$$

اکنون به ازائ هر عدد صحیح مثبت n توابعی به صورت زیر داریم:

$$u_n(x,t) = A_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (46.3.1)$$

هر یک از این توابع در معادله موج و در شرایط مرزی ، و در شرط اولیه $u_t(x,0) = 0$ صدق می کند. به هریک از $u_n(x,t)$ ها یک مد ارتعاش گویند. در رابطه $(51-1)$ اگر $u_n(x,t)$ را به ازا t ثابتی به عنوان تابعی تنها از x در نظر بگیریم $u_n(x,t)$ تابعی سینوسی خواهد بود و تابع $T_n(t)$ دامنه آن است. دامنه $T_n(t)$ با زمان تغییر می کند.

سوال: آیا روی تار نقاطی وجود دارند که د ر هیچ لحظه ای هیچ گونه حرکت و ارتعاشی نداشته باشند؟

برای انکه نقاطی را بیابیم که به ازا هر t مقدار ارتعاش برابر با صفر باشد باید داشته باشیم:

$$u_n(x,t) = A_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = 0 \quad => \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = 0$$

$$\frac{n\pi}{l}x = k\pi \quad => x = k\frac{l}{\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots., n-1$$

بنابراین در نقاط $x = \frac{l}{\pi}, \frac{2l}{\pi}, \ldots., \frac{(n-1)l}{\pi}$ که گره نامیده می شوند در هیچ لحظه ارتعاشی وجود ندارد، یعنی u_n در $n-1$ نقطه به غیر از نقاط انتهایی دارای گره است. گره ها در تمام لحظات ثابت هستند . به ازا $n = 1$ به $u_1(x,t)$ مد اصلی ارتعاش گویند.

رابطه $(51-1)$ در معادله اصلی و شرایط مرزی صدق می کند. ولی لازم است که شرط $u(x,0)=f(x)$ نیز برقرار باشد. اگر به ازا ی m، $f(x)=K\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ در این صورت

$$u(x,t)=K\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{cn\pi t}{l}\right) \qquad (47.3.1)$$

جواب است. اما لزومی ندارد که همواره $f(x)$ به این صورت تعریف شود. برای مثال اگر از ابتدا تار از وسط به طرف بالا کشیده شود، تابع تغییر مکان اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<\frac{l}{2} \\ l-x & \frac{l}{2}\le x\le l \end{cases} \qquad (48.3.1)$$

در این صورت شرط $u(x,0)=f(x)$ هیچوقت به ازا یکی از $u_n(x,t)$ برقرار نخواهد بود، حتی اگر تلاش کنیم از ترکیب تعداد متناهی از $u_n(x,t)$ ها استفاده کنیم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}u_n(x,t) \qquad (49.3.1)$$

نمی توانیم $A_n,\dots,A_2,A_1$ را طوری بیابیم تا $u(x,t)$ در رابطه $u(x,0)=f(x)$ صدق کند.، زیرا هر تابع $f(x)$ را نمی توان به صورت مجموع تعداد متناهی از توابع سینوسی نوشت. در چنین حالاتی به دلیل همگن بودن معادله اصلی و خاصیت خطی بودن معادله از خاصیت برهمنهی نامتناهی استفاده کنیم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (50.3.1)$$

در این حالت شرط $\mathrm{u(x,t)=f(x)}$ برقرار است، اگر ضرایب را طوری انتخاب کنیم که:

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (51.3.1)$$

رابطه (51.3.1) بسط فوریه سینوسی تابع $f(x)$ را نشان می دهد که روی بازه $[-l,l]$ گسترش فرد یافته است. اگر

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\varphi) sin\left(\frac{n\pi\varphi}{l}\right) d\varphi \qquad (52.3.1)$$

بنابراین :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(\alpha) sin\left(\frac{n\pi}{l}\alpha\right) d\alpha\right) cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad (53.3.1)$$

این روش برای حالتی که تابع تغییر مکان اولیه $f(x)$ روی بازه $[0,l]$ تابعی پیوسته و دارای مشتق تکه ای پیوسته باشد و $f(0) = f(l) = 0$ قابل کاربرد است. این شرایط تضمین می کند که تابع $f(x)$ روی بازه $[0,l]$ به $f(x)$ همگراست.

رابطه (53.3.1) را می توان به صورت دیگری هم نشان داد. با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}x + \frac{cn\pi}{l}t\right) + sin\left(\frac{n\pi}{l}x - \frac{cn\pi}{l}t\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)\right]$$

درنتیجه داریم

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right) \qquad (54.3.1)$$

اگر به معادله (54.3.1) دقت کنیم مشاهده می کنیم که از دو معادله مشابه معادله (51.3.1) تشکیل شده است که فقط در زاویه با هم اختلاف دارند. به عبارت دیگر :

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)] \qquad (55.3.1)$$

که در آن f^* گسترش فرد تابع f بر بازه $[-l,l]$ و تابعی متناوب با دوره تناوب $2l$ است.

دقت کنیم که $f^*(x+ct)$ همان $f^*(x)$ است که به اندازه ct به سمت چپ انتقال داده شده است و $f^*(x-ct)$ انتقال تابع $f^*(x)$ به سمت راست به اندازه $-ct$ است. یعنی موجهای $f^*(x+ct)$ و $f^*(x-ct)$ موجهایی هستند که به سمت چپ و راست در حال حرکت می باشند. به این امواج موجهای پیشرو و پسرو و یا موجهای رونده می گویند.

ارتعاش نخ با سرعت اولیه مفروض و تغییر مکان اولیه صفر

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که تار از وضعیت افقی خود (تغییر مکان اولیه صفر) با سرعت اولیه مفروضی ، مثلا $g(x)$ ، رها شود. مسئله مقدار مرزی برای تابع تغییر مکان عبارتست از:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0<x<l, \quad t>0 \qquad (56.3.1)$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \qquad (57.3.1)$$

$$u(x,0)=0, \qquad (58.3.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x), \quad (59.3.1) \quad 0\le x\le l$$

مانند قبل با تفکیک متغیر ها شروع می کنیم. قرار دهید $u(x,t)=X(x)T(t)$. چون معادله اصلی و شرایط اولیه نظیر حالت قبل است در نتیجه خواهیم داشت:

$$X''(x)+p^2X(x)=0, \quad X(0)=X(l)=0$$

ادامه بحث کاملا مشابه بحثی است که در حالت اول هم انجام شد . نتیجه این بود که فرم توابع $T(t),X(x)$

به صورت زیر خواهند بود:

$$X(x) = X_n(x) = sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), n = 1,2,\dots (60.3.1)$$

$$T(t) = T_n(t) = a_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right), \quad n = 1,2,\dots. (61.3.1)$$

از شرط اولیه استفاده می کنیم:

$$u(x,0) = 0 \quad => X(x)T(0) = 0 \quad => T(0) = 0 \quad (62.3.1)$$

فرمول (62.3.1) را در فرمول (61.3.1) قرار می دهیم. خواهیم داشت:

$$T(0) = T_n(0) = a_n = 0, \quad (63.3.1)$$

بنابراین

$$T(t) = T_n(t) = b_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right), \quad n = 1,2,\dots, \quad (64.3.1)$$

بنابراین به ازا هر $n = 1,2,\dots$ هر یک از توابع

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = b_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (65.3.1)$$

در معادله اصلی موج و شرایط مرزی و اولین شرط اولیه صدق می کند. برای به دست آوردن جواب نهایی این تابع باید در دومین شرط اولیه نیز صدق کند. برای بر قراری این شرط، به دلیل همگن بودن، خطی بودن معادله اصلی، از خاصیت برهمنهی استفاده می کنیم و تابع را به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[cos\frac{n\pi}{l}(x-ct) - cos\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\cos\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right] - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\cos\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right], (66.3.1)$$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right) \sin\frac{n\pi}{l}(x-ct)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right) \sin\frac{n\pi}{l}(x+ct), \qquad (67.3.1)$$

$$u_t(0,t) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad (68.3.1)$$

این رابطه بسط فوریه سینوسی تابع $g(x)$ بر بازه $[-l,l]$ است که تابع به صورت فرد گسترش داده شده است

$$b_n\left(\frac{cn\pi}{l}\right) = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \qquad (69.3.1)$$

$$b_n = \frac{2}{l\left(\frac{cn\pi}{l}\right)}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \qquad (70.3.1)$$

از طرفی دقت کنید که:

$$\int_0^x g(y)dy = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right) sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right) dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right) \int_0^x sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right) dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)\left[1 - cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} cb_n \left[1 - cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right], \qquad (71.3.1)$$

$$\int_0^{x+ct} g(y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} cb_n - \sum_{n=1}^{\infty} cb_n cos\frac{n\pi}{l}(x+ct)$$

$$\int_0^{x+ct} g(y)dy - \int_0^{x-ct} g(y)dy = -\sum_{n=1}^{\infty} cb_n cos\frac{n\pi}{l}(x+ct) + \sum_{n=1}^{\infty} cb_n cos\frac{n\pi}{l}(x-ct)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} cb_n \left(cos\frac{n\pi}{l}(x-ct) - cos\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)$$

$$\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} cb_n cos\frac{n\pi}{l}(x-ct) - \sum_{n=1}^{\infty} cb_n cos\frac{n\pi}{l}(x+ct)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[cos\frac{n\pi}{l}(x-ct) - cos\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right] = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy, \qquad (72.3.1)$$

مثال

تاری از وضعیت تعادل (حالت افقی)با سرعت اولیه مفروض $g(x) = x\left(1 + cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right)$ رها می شود ،معادله (6.1) جواب مسئله است. ابتدا انتگرال زیر را محاسبه می کنیم:

$$\int_0^l g(\varphi) sin\left(\frac{n\pi\varphi}{l}\right) d\varphi = \int_0^l \varphi\left(1 + cos\left(\frac{\pi\varphi}{l}\right)\right) sin\left(\frac{n\pi\varphi}{l}\right) d\varphi$$

$$= \begin{cases} \dfrac{l^2(-1)^n}{n\pi(n^2-1)} & n \neq 1 \\ \dfrac{3l^2}{4\pi} & n = 1 \end{cases}$$

در نتیجه جواب به صورت زیر خواهد بود

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi c}\left(\frac{3l^2}{4\pi}\right) sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) sin\left(\frac{cn\pi t}{l}\right)$$

$$+ \frac{2}{\pi c}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{l^2(-1)^n}{n^2\pi(n^2-1)} sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) sin\left(\frac{cn\pi t}{l}\right)$$

به ازا $l = \pi,\ \ c = 1$ جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t) = \frac{2}{3}\sin(x)\sin(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2(n^2-1)} \sin(\pi x)\sin(nt)$$

ارتعاش نخ با تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه

ارتعاش تاری با تغییر مکان اولیه $f(x)$ و سرعت اولیه $g(x)$ در نظر بگیرید.

مسئله را به دو قسمت تقسیم می شود. در اولین قسمت مسئله ای با تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه صفر در نظر گرفته می شود و در قسمت دوم تغییر مکان اولیه برابر صفر و سرعت اولیه مخالف صفر خواهد بد. فرض کنید جواب اولین مسئله به صورت $u_1(x,t)$ و جواب مسئله دوم به صورت $u_2(x,t)$ باشد. قرار می دهیم:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

در این صورت $u(x,t)$ در معادله ارتعاش و شرایط مرزی صدق می کند. به علاوه

$$u(x,0) = u_1(x,0) + u_2(x,0) = f(x) + 0 = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) + \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = 0 + g(x) = g(x)$$

بنابراین $u(x,t)$ جواب مسئله با تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه مخالف صفر است،

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g^*(y)dy$$

که در آن f^* و g^* گسترش های توابع g, f ، بسته به شرایط مرزی این گسترش ها می تواند زوج یا فرد باشد، بر بازه $[-l,l]$ و توابعی متناوب با دوره تناوب $2l$ است

مثال

معادله موج را روی بازه $[0,l]$ با شرایط مرزی $u(0,t) = u(l,t) = 0$ ،و تغییر مکان اولیه

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ l - x & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$

و سرعت اولیه به صورت $g(x) = x\left(1 + cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right)$ حل می کنیم. در این صورت $u_1(x,t)$ جواب مسئله با تغییر مکان اولیه $f(x)$ و سرعت اولیه صفر ، و $u_2(x,t)$ جواب مسئله با تغییر مکان اولیه صفر و سرعت اولیه $g(x)$ است . جواب $u(x,t)$ مجموع جوابهای مثال های (1.1) و (3.1) است، بنابراین جواب به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi}sin(nx)cos(nt)+\frac{3}{2}\sin(x)\sin(nt)$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2(n^2-1)}\sin(\pi x)\sin(nt)$$

اکنون به حل معادله انتقال حرارت در حالت استاندارد می پردازیم:

4.1 حل معادله انتقال حرارت

ساده ترین حالتی که برای یک میله یک بعدی متناهی می توان در نظر گرفت و مسئله را مدلسازی کرد به صورت زیر است:

$$u_t=c^2u_{xx},\quad 0<x<l,\ \ t>0\qquad (1.4.1)$$

$$u(0,t)=0,\quad (2.5.1),\qquad u(l,t)=0,\quad (3.4.1)\ \ t\geq 0$$

$$u(x,0)=f(x),\quad 0\leq x\leq l\qquad (4.4.1)$$

روشی که برای حل به کار می بریم دقیقا همان روشی است که برای حل معادله موج به کار بردیم. قرار می دهیم $u(x,t)=X(x)T(t)$ و با قرار دادن آن در معادله اصلی خواهیم داشت:

$$XT'=c^2X''T$$

با تقسیم طرفین رابطه بر c^2XT به رابطه زیر می رسیم:

$$\frac{T'}{c^2T}=\frac{X''}{X}$$

همانطور که در بخش معادله موج دیدیم این تساوی فقط وقتی دارای جواب مخالف صفر خواهد بود که این نسبت مقدار ثابت منفی باشد، یعنی:

$$\frac{T'}{c^2T} = \frac{X''}{X} = K = -p^2, \quad p > 0$$

بنابراین معادلات زیر را برای دو تابع $T(t),\ X(x)$ خواهیم داشت:

$$X'' + p^2X = 0, \quad X(0) = 0, \ \ X(l) = 0, \quad (5.4.1)$$

$$T' + c^2p^2T = 0, \quad (6.4.1)$$

بنابراین

$$X(x) = X_p(x) = a_p \cos(px) + b_p \sin(px), \qquad (7.4.1)$$

$$X(0) = 0 \quad => a_p = 0, \quad (8.4.1)$$

$$X(l) = b_p \sin(pl) = 0 \quad => \sin(pl) = \sin(n\pi)$$

$$pl = n\pi \quad => p = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1,2, \dots (9.4.1)$$

$$X(x) = X_n(x) = b_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1,2, \dots . (10.4.1)$$

چون b_n می تواند هر عدد مخالف صفر باشد و مقدار آن در محاسبات تاثیری ندارد آنرا برابر با یک قرار می دهیم. از رابطه (6.4.1) هم تابع $T(t)$ محاسبه می شود:

$$T(t) = T_n(t) = c_n e^{-c^2n^2t}, \quad n = 1,2, \dots . \ (11.4.1)$$

بنابراین به ازا هر $n = 1,2, \dots$، هر یک از توابع

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n e^{-c^2n^2t} sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (12.4.1)$$

در معادله اصلی، شرایط مرزی صدق می کنند. برای برقراری شرط اولیه از خاصیت برهمنهی استفاده می کنیم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-c^2n^2t}sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad (13.4.1)$$

براب برقراری شرط اولیه باید داشته باشیم:

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad (14.4.1)$$

این بسط سینوسی تابع $f(x)$ بر بازه $[-l\,,l]$ است که تابع $f(x)$ بر ان به صورت فرد گسترش داده شده است و

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)s\,in\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \quad n=1,2,\dots\,(15.4.1)$$

تا اینجا وضعیت معادله ارتعاش و معادله انتقال حرارت را در حالت استاندارد و با شرایط مرزی یکسان، $u(l,t)=u(0,t)=0$، را بررسی کردیم. در این حالت دیدیم که فرم تابع $X(x)$ به صورت سینوسی بود. اصطلاحا گویند که جواب معادله(ارتعاش و انتقال حرارت به صورت سینوسی است. به عبارت دیگر اعلام فرم جواب به صورت سینوسی و یا کسینوسی از روی فرم تابع $X(x)$ مشخص می شود).

روش دیگری که می توان برای حل معادلات یک بعدی با طولهای متناهی استفاده کرد، حل معادله به کمک تبدیلات فوریه سینوسی و کسینوسی متناهی است.

5.1 حل معادلات به کمک تبدیلات فوریه متناهی

تبدیلات متناهی سینوسی و کسینوسی به صورت زیر تعریف می شوند:

اگر تابع $f(x)$ روی بازه $[0,\pi]$ تعریف شود در این صورت تبدیل سینوسی متناهی به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_s[f(t)]=F_s[n]=\int_0^{\pi}f(t)\sin(nt)\,dt, \qquad (1.5.1)$$

و تبدیل کسینوسی با ضابطه زیر تعریف می شود:

$$F_c[f(t)] = F_c[n] = \int_0^{\pi} f(t)\cos(\mathrm{nt})\,dt, \qquad (2.5.1)$$

و تبدیلات معکوس سینوسی و کسینوسی نیز با روابط زیر تعریف می شوند:

$$F_s^{-1}\big[F_s[n]\big] = f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} F_s[n]\sin(nt), \qquad (3.5.1)$$

$$F_c^{-1}\big[F_c[n]\big] = f(t) = \frac{F_c[0]}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} F_c[n]\cos(nt), \qquad (4.5.1)$$

و فرمول تبدیل مشتق مرتبه دوم تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$F_s[f''(t)] = \int_0^{\pi} f''(t)\sin(nt)\,dt = -n[(-1)^n f(\pi) - f(0)] - n^2 F_s[f(t)], \quad (5.5.1)$$

$$F_c[f''(t)] = \int_0^{\pi} f''(t)\cos(nt)\,dt = [(-1)^n f'(\pi) - f'(0)] - n^2 F_c[f(t)], \quad (6.5.1)$$

و اگر تابع $f(x)$ روی بازه $[0, l]$ تعریف شود در این صورت با تغییر متغیر $x = \frac{l}{\pi}t$ و با توجه به رابطه

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = g(t), \quad 0 \le x \le l \;\; => 0 \le t \le \pi$$

بنابراین تابع $g(t)$ تابعی است که متغیر آن در فاصله، $0 \le t \le \pi$، قرار دارد و تبدیل سینوسی و کسینوسی به صورت فوق تعریف می شود:

$$F_s[g(t)] = G_s[n] = \int_0^{\pi} g(t)\sin(nt)\,dt, \qquad (7.5.1)$$

با استفاده از تغییر متغیر $t = \frac{\pi}{l}x$خواهیم داشت:

$$F_s[g(t)] = F_s[f(x)] = \int_0^l f(x) sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) x \times \frac{\pi}{l} dx$$

بنابراین فرمول تبدیل سینوسی تابعی که بر بازه $[0, l]$ تعریف شده باشد به صورت زیر به دست می آید:

$$F_s[f(x)] = \frac{\pi}{l} \int_0^l f(x) sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) xdx, \qquad (8.5.1)$$

در این رابطه متغیر x می تواند با هر متغیر دیگری مانند t هم نشان داده شود.

با همین روش می توان نتیجه گرفت که تبدیل کسینوسی متناهی برای تابع تعریف شده بر بازه متناهی $[0, l]$ به صورت زیر خواهد بود.

$$F_c[f(t)] = F_c[n] = \frac{\pi}{\text{م}} \int_0^l f(t) \cos\left(\frac{\mathrm{n\pi t}}{l}\right) dt, \qquad (9.5.1)$$

ولی نشان دهید اگر چه بازه تعریف تابع در این حالت تغییر کرده است ولی نشان داده می شود که تبدیلات معکوس سینوسی و کسینوسی نیز با روابط زیر تعریف می شوند:

$$F_S^{-1}\big[F_s[n]\big] = f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_s[n] \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right), \qquad (10.5.1)$$

$$F_c^{-1}\big[F_c[n]\big] = f(t) = \frac{F_c[0]}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_c[n] \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right), \qquad (11.5.1)$$

و فرمول تبدیل مشتق مرتبه دوم تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} F_s[f''(t)] &= \frac{\pi}{l} \int_0^l f''(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt \\ &= -\frac{n\pi}{l}[(-1)^n f(l) - f(0)] - \frac{n^2\pi^2}{l^2} F_s[f(t)], \qquad (12.5.1) \end{aligned}$$

$$F_c[f''(t)] = \frac{\pi}{l}\int_0^l f''(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt$$
$$= [(-1)^n f'(l) - f'(0)] - \frac{n^2\pi^2}{l^2}F_c[f(t)], \quad (13.5.1)$$

اکنون می خواهیم با استفاده از تبدیلات یک مسئله مقدار اولیه – مرزی را حل کنیم:

مسائل زیر را در نظر بگیرید:

۱-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \quad (14.5.1)$$

$$u(0,t) = 0, \ \ (15.5.1) \ \ u(\pi,t) = 0, \quad (16.5.1)$$

$$u(x,0) = f(x), \ \ (17.5.1) \ \ u_t(x,0) = g(x), \quad (18.5.1)$$

۲-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \quad (14.5.1)$$

$$u_x(0,t) = 0, \ \ (19.5.1), \ \ u_x(\pi,t) = 0, \quad (20.5.1)$$

$$u(x,0) = f(x), \ \ (17.5.1), \ \ u_t(x,0) = g(x), \quad (18.5.1)$$

۳-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \quad (14.5.1)$$

$$u(0,t) = 0, \ \ (21.5.1), \ \ u_x(\pi,t) = 0, \quad (22.5.1)$$

$$u(x,0) = f(x), \ \ (17.5.1), \ \ u_t(x,0) = g(x), \quad (18.5.1)$$

در اینجا سه مسئله داده شده است. وقتی بخواهیم از تبدیلات برای حل مسئله استفاده کنیم ابتدا بایستی مشخص کنیم که از چه تبدیلی می توان استفاده کرد. اولا چون متغیر x در فاصله $[0,\pi]$ تغییر می کند بنابراین تبدیلاتی که می توان روی این متغیر به کار برد تبدیلات سینوسی و کسینوسی متناهی است. ضمنا چون معادله شامل مشتق مرتبه دوم نسبت به x است در نتیجه بنا بر روابط تبدیل مشتق مرتبه دوم برای استفاده از تبدیل سینوسی لازم است مقادیر تابع در ابتدا و انتهای تار جزو داده های مسپله باشند. در مسئله اول این اطلاعات جزو داده های مسئله است و بنابراین می توان از تبدیل سینوسی روی متغیر x استفاده کرد.

در مسئله دوم اطلاعات داده شده مقدار مشتقات تابع جواب در نقاط انتهایی است. در نتیجه می توان از تبدیل کسینوسی روی متغیر x استفاده کرد. اما در مسئله ۳ داده های مسئله یکی مقدار تابع جواب در نقطه انتهایی چپ و یکی مقدار مشتق در نقطه راست است. بنابراین نمیتوان از هیچ کدام از تبدیلات برای حل مسئله استفاده کرد و تنها روش جداپذیری را می توان اعمال کرد.

<u>مثال 1</u> مسئله زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \pi, \;\; t > 0, \qquad (14.5.1)$$

$$u(0,t) = 0, \;\; (15.5.1) \;\; u(\pi,t) = 0, \qquad (16.5.1)$$

$$u(x,0) = f(x) \;\; (17.5.1), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad (18.5.1)$$

این مسئله را با استفاده از تبدیلات حل می کنیم. چون متغیر x در فاصله متناهی تغییر می کند در نتیجه می توان از دو نوع تبدیل فوریه متناهی سینوسی و کسینوسی استفاده کرد. چون در معادله مشتق مرتبه دوم نسبت به x وجود دارد، و مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه، $u(0,t)$, و $u(l.t)$، جزو داده های مسئله باشد می توان از تبدیل سینوسی متناهی روی متغیر x استفاده کرد.

تبدیل سینوسی را روی معادله به کار می بریم:

$$F_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = c^2 F_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = c^2\{-n[u(\pi,t) - u(0,t)] - n^2 U_s[n,t]\}$$

$$= -n^2 U_s[n,t], \quad (23.5.1)$$

از طرفی طبق قانون مشتق گیری از انتگرالهای وابسته به پارامتر، خواهیم داشت:

$$F_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}[U_s(n,t)], \qquad (24.5.1)$$

با قراردادن در معادله، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[U_s(n,t)] + c^2n^2U_s[n,t] = 0, \qquad (25.5.1)$$

این رابطه یک معادله با مشتقات جزیی است ، ولی چون فقط مشتق گیری نسبت به یک متغیر انجام می شود مانند معادله دیفرانسیل معمولی حل می شود:

$$U_s(n,t) = a_n\cos(cnt) + b_n\sin(cnt), \qquad (26.5.1)$$

در این رابطه بایستی ابتدا ضرایب نامعلوم را محاسبه کرده و سپس تبدیل معکوس گرفته شود. برای تعیین این ضرایب نامعلوم ازتبدیل فوریه سینوسی شرایط اولیه مسئله استفاده می شود.

$$\begin{aligned} F_s[u(x,0)] &= U_s(n,0) \\ &= \int_0^\pi u(x,0)\sin(nx)dx = \int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx = F_s[n], \qquad (27.5.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_s[u_t(x,0)] &= \frac{\partial}{\partial t}U_s(n,0) \\ &= \int_0^\pi u_t(x,0)\sin(nx)\,dx = \int_0^\pi g(x)\sin(nx)\,dx = G_s[n], \qquad (28.5.1) \end{aligned}$$

در این روابط $F_s[n]$ و $G_s[n]$ مقادیر معلوم هستند. با استفاده از این مقادیر ضرایب نامعلوم b_n, a_n محاسبه می شوند.

$$U_s(n,0) = a_n,\ \ U_s(n,0) = F_s[n] \quad => a_n = F_s[n], \qquad (29.5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}U_s(n,0) = \mathrm{cn}b_{n,} \quad \frac{\partial}{\partial t}U_s(n,0) = G_s[n] \quad => b_n = \frac{G_s[n]}{cn}, \qquad (30.5.1)$$

بنابراین تبدیل جواب $U_s(n,t)$ کاملا مشخص می باشد. کافی است که از این تابع تبدیل معکوس گرفته شود:

$$u(x,t) = F_s^{-1}[U_s(n,t)] = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} U_s(n,t)\sin(nx)$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[F_s[n]\cos(nt) + \frac{G_s[n]}{cn}\sin(nt)\right]\sin(nx), \quad (31.5.1)$$

بنابراین جواب مسئله به این صورت به دست می آید.

برای حل مثال 2 نیز مشابه همین روش را دنبال می کنیم. با توجه به شرایط مرزی داده شده،

$u_x(0,t), \quad u_x(\pi,t)$ با استفاده از تبدیل کسینوسی متناهی روی x مسئله را حل خواهیم کرد.

از طرفین رابطه تبدیل کسینوسی می گیریم. خواهیم داشت:

$$F_c\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = c^2 F_c\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = [(-1)^n u_x(\pi,t) - u_x(0,t) - n^2 U_c(n,t)]$$

$$= -c^2 n^2 U_c(n,t), \quad (32.5.1)$$

$$F_c\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = \frac{\partial^2 U_c(n,t)}{\partial t^2}, \qquad (33.5.1)$$

$$\frac{\partial^2 U_c(n,t)}{\partial t^2} + c^2 n^2 U_c(n,t) = 0, \qquad (34.5.1)$$

در نتیجه جواب معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$U_c(n,t) = a_n\cos(cnt) + b_n\sin(cnt), \qquad n \geq 0, \qquad (35.5.1)$$

برای محاسبه ضرایب از تبدیل فوریه کسینوسی شرایط اولیه استفاده می شود:

$$F_c[u(x,0)] = U_c(n,0)$$

$$= \int_0^{\pi} u(x,0)\cos(nx)\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = F_c[n], \quad (36.5.1)$$

$$F_c[u_t(x,0)] = \frac{\partial U_c(n,0)}{\partial t} = \int_0^{\pi} u_t(x,0)\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx = G_c[n], \quad n \geq 0, \quad (37.5.1)$$

$$U_c(n,0) = a_n, \quad U_c(n,0) = F_c[n], \quad a_n = F_c[n], \quad (38.5.1)$$

$$\frac{\partial U_c(n,0)}{\partial t} = cnb_n, \quad \frac{\partial U_c(n,0)}{\partial t} = G_c[n], \quad b_n = \frac{G_c[n]}{cn}, \quad (39.5.1)$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$U_c(n,t) = F_c[n]\cos(cnt) + \frac{G_c[n]}{cn}\sin(cnt), \quad n = 0,1,2,\dots, \quad t \geq 0, \quad (40.5.1)$$

با تعیین تبدیل معکوس کسینوسی جواب مسئله به دست می آید:

$$u(x,t) = F_c^{-1}[U_c(n,t)] = \frac{1}{\pi}U_c(0,t) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} U_c(n,t)\cos(nx), \quad (41.5.1)$$

اما در مورد مسئله سوم ، با توجه به شرایط مرزی داده شده ،

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0$$

روی متغیر x نه تبدیل فوریه سینوسی و نه تبدیل کسینوسی متناهی می توان به کار برد ، زیرا شرایط نه هر دو روی خود تابع و نه هر دو روی مشتق تابع نسبت به x داده شده است. در این حالت از روش جداپذیری مسئله قابل حل است که قبلا در این مورد توضیح داده شده است.

<u>6.1 مسایل حل شده</u>

<u>مثال ۱.6.1</u>

مسئله مقدار مرزی – اولیه زیر را حل کنید:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1.6.1)$$

$$u_x(0,t) = 0, \ (2.6.1) \quad u_x(1,t) = 0, \quad (3.6.1) \ \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = x(1-x), \quad (4.6.1) \ \ u_t(x,0) = 0, \ (5.6.1), \ \ 0 \leq x \leq 1$$

حل: الف) در این حالت از روش فوریه یا روش جداپذیری استفاده می کنیم. یعنی به دنبال جوابی هسیتیم که متغیر های آن از هم جدا باشند. قرار می دهیم:$u(x,t) = X(x)T(t)$. با قرار دادن این رابطه در معادله اصلی و تقسیم طرفین رابطه بر XT خواهیم داشت:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$$

که با همان استدلال قبلی این تساوی فقط وقتی برقرار خواهد بود که نسبت مقدار ثابتی باشد. پس داریم:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = k$$

$$X'' - kX = 0, \quad (6.6.1) \quad T'' - kT = 0, \quad (7.6.1)$$

از طرفی با استفاده از شرایط مرزی می توان شرایطی را روی تابع $X(x)$ به دست آورد. داریم:

$$u_x(0,t) = 0 \quad => X'(0)T(t) = 0 \quad => X'(0) = 0, \quad (8.6.1)$$

$$u_x(1,t) = 0 \quad => X'(1)T(t) = 0 \quad => X'(1) = 0, \quad (9.6.1)$$

بنابراین معادله و شرایط روی تابع $X(x)$ به صورت زیر خواهند بود:

$$X'' - kX = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(1) = 0, \quad (10.6.1)$$

مجددا مانند حالت قبلی برحسب مقادیر مختلف k ، مثبت، صفر و منفی ، بحث خواهیم کرد.

حالت اول اگر $k > 0$. بدون انکه به کلیت امر خللی وارد شود قرار می دهیم $k = p^2, \quad p > 0$

در نتیجه داریم:

$$X'' - p^2 X = 0, \quad X'(0) = 0, \qquad X'(1) = 0, \qquad (11.6.1)$$

$$X = a_p e^{px} + b_p e^{-px} \qquad (12.6.1)$$

$$X'(0) = p\left(a_p - b_p\right) = 0 \quad => a_p = b_p, \qquad (13.6.1)$$

$$X'(1) = p\left(a_p e^{p} - b_p e^{-p}\right) = p a_p (e^{p} - e^{-p}) = 0, \qquad (14.6.1)$$

(در این رابطه از تساوی (13.6.1) استفاده شده است.) چون عبارت داخل پرانتز نمی تواند صفر باشد بنابراین باید $a_p = 0$. در نتیجه $b_p = 0$ ، و بنابراین $X(x) = 0$ و $u(x,t) = 0$، که جواب غیر قابل قبول می باشد.

حالت دوم اگر $\mathrm{k} = 0$ در این حالت دستگاه به صورت زیر تبدیل می شود:

$$X''(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \qquad X'(1) = 0, \qquad (15.6.1)$$

جواب معادله به صورت خطی خواهد بود:

$$X(x) = ax + b, \quad X'(x) = a, \qquad (16.6.1)$$

برای برقراری شرایط مرزی کافی است که $a = 0$. در نتیجه، $X(x) = b \neq 0$. یعنی b می تواند هر عدد حقیقی مخالف صفری باشد.

به ازا این مقدار k دستگاه بر حسب تابع $T(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$T''(t) = 0, \quad T'(0) = 0 \qquad (17.6.1)$$

$$T(t) = ct + d, \quad T'(0) = c, \qquad (18.6.1)$$

بنابراین کافی است که $c = 0$ و در نتیجه $T(t) = d \neq 0$

یعنی از این حالت $k = 0$ به جواب $u(x,t) = X(x)T(t) = bd \neq 0$ می رسیم.

حالت سوم $k < 0$، قرار می دهیم $k = -p^2, \quad p > 0$.

معادلات حاصل بر حسب $X(x)$ عبارت است از:

$$X''(x) + p^2X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \qquad X'(1) = 0, \quad (19.6.1)$$

خواهیم داشت:

$$X(x) = a_p \cos(px) + b_p \sin(px), \quad X'(x) = -pa_p \sin(px) + pb_p \cos(px)$$

$$X'(0) = pb_p = 0 \quad => b_p = 0, \qquad (20.6.1)$$

$$X'(1) = -pa_p \sin(p) = 0, \qquad (21.6.1)$$

در اینجا به دنبال مقادیری از p هستیم تا شرط $X'(1) = 0$ را برقرار کند بدون انکه لازم باشد که a_p مساوی صفر باشد.

$$\sin(p) = 0 \ => \sin(p) = \sin(n\pi) \ => p = n\pi, n = 1,2, \dots, \quad (22.6.1).$$

$$p = p_n = n\pi, \qquad n = 1,2, \dots . (23.6.1)$$

به این مقادیر p_n ها مقادیر ویژه مسئله گویند. بنابراین توابع ویژه متناظر با این مقادیر ویژه عبارتند از:

$$X(x) = X_n(x) = a_p \cos(n\pi x) = a_n \cos(n\pi x), \quad n = 1,2, \dots , \qquad (24.6.1)$$

مسئله متناظر با تابع $T(t)$ عبارت خواهد بود از :

$$T''(t) + (n\pi)^2T(t) = 0, \quad T'(0) = 0, \quad (25.6.1)$$

$$T(t) = T_n(t) = c_n cos(n\pi t) + d_n sin(n\pi t), \quad (27.6.1)$$

برای برقراری شرط $T'(0) = 0$ بایستی $d_n = 0$. در نتیجه

$$T_n(t) = c_n cos(n\pi t), \qquad (28.6.1)$$

پس به ازا هر $n = 1,2, \dots$، داریم

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = a_n \cos(n\pi x)c_n cos(n\pi t) \quad n = 1,2, \dots , \qquad (29.6.1)$$

دو ضریب ثابت قابل ادغام کردن و نام گذاری جدید است که آن را $\alpha_n = a_n c_n$ می نامیم.

$$u_n(x,t) = \alpha_n cos(n\pi t)cos(n\pi x), \quad n = 1,2,\ldots, \quad (30.6.1)$$

این توابع در معادله اصلی و شرایط مرزی صدق می کنند. ضمنا از قسمت $k = 0$ هم تابع

$u(x,t) = bd = const$ جواب مسئله بود که با اضافه کردن $n = 0$ به مجموعه توابع $(2-43)$ می توان این تابع را به دسته توابع فوق اضافه کرد. بنابراین به ازا $n = 0,1,2,\ldots$ توابع $u_n(x,t)$ در معادله اصلی و شرایط مرزی صدق می کنند. برای برقراری شرایط اولیه $(5.6.1)-(4.6.1)$ با استفاده از همگن بودن و خطی بودن معادله $(1.6.1)$از خاصیت بر همنهی استفاده می کنیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n cos(n\pi t)cos(n\pi x), \quad (31.6.1)$$

ضریب α_n را طوری می یابیم تا داشته باشیم:

$$u(x,0) = x(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n cos(n\pi x), \quad (32.6.1)$$

در واقع این رابطه بسط فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ بر بازه $[-1\,,1]$ است که تابع بر این بازه به صورت زوج گسترش داده شده باشد.

$$\alpha_n = 2\int_0^1 x(1-x)cos(n\pi x)dx, \quad n = 0,1,2,\ldots. \quad (33.6.1)$$

البته می توان اولین ضریب یعنی α_0 را به طور جداگانه نشان داد،

$$\alpha_0 = 2\int_0^1 x(1-x)dx, \quad \alpha_n = 2\int_0^1 x(1-x)cos\,(n\pi x)dx, \quad n = 1,2,\ldots \,(34.6.1)$$

در این صورت،

$$u(x,t)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n cos(n\pi t)cos(n\pi x), \quad (35.6.1)$$

در این حالت **<u>تابع جواب،$u(x,t)$ ، دارای فرم کسینوسی</u>** است که ضرایب آن از فرمولهای (33.6.1) محاسبه می شوند.:

ب) در این حالت از روش تبدیلات استفاده می کنیم. چون شرایط مرزی روی مشتقات تابع در دو نقطه انتهایی داده شده است از تبدیل کسینوسی استفاده می کنیم:

$$F_c[u_{tt}]=F_c[u_{xx}]=[(-1)^n u_x(\pi,t)-u_x(0,t)]-n^2F_c[u(x,t)], \quad (36.6.1)$$

قرار می دهیم:

$$F_c[u(x,t)]=U_c(n,t), \quad (37.6.1)$$

با استفاده از شرایط مرزی داریم:

$$F_c[u_{xx}]=-n^2U_c(n,t), \quad (38.6.1)$$

$$F_c[u_{tt}]=\frac{\pi}{1}\int_0^1 u_{tt}(x,t)\cos\left(\frac{n\pi}{1}x\right)dx=\frac{\partial^2}{\partial t^2}U_c(n,t), \quad (39.6.1)$$

در نتیجه تبدیل معادله اصلی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 U_c(n,t)}{\partial t^2}+n^2U_c(n,t)=0, \quad (40.6.1)$$

تبدیل جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$U_c(n,t)=A_n cos(n\pi t)+B_n sin(n\pi t), n=0,1,2,\ldots, \quad (41.6.1)$$

ابتدا به محاسبه B_n, A_n می پردازیم:

$$F_c[u(x,0)]=U_c(n,0)=\pi\int_0^1 x(1-x)\cos(nx)\,dx=A_n, \quad (42.6.1)$$

$$F_c[u_t(x,0)] = 0 = \frac{\partial U_c(0,t)}{\partial t} = n\pi B_n \quad => B_n = 0, \quad (43.6.1)$$

تبدیل معکوس فوریه را محاسبه می کنیم:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} U_c(0,t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} U_c(n,t) cos(n\pi x), \quad (44.6.1)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} A_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n cos(n\pi t)\big) cos(n\pi x), \quad (45.6.1)$$

مثال 2.6.1

مطلوبست حل مسئله مقدار مرزی – اولیه زیر:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (46.6.1)$$

$$u_x(0,t) = 0, \ (47.6.1) \quad u(1,t) = 0, \quad (48.6.1) \ \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = x(1-x), \quad (49.6.1) \ \ u_t(x,0) = x, \ (50.6.1), \quad 0 \leq x \leq 1$$

حل: در این حالت با توجه به شرایط داده شده مشخص است که نمی توان از تبدیلات فوریه متناهی روی متغیر x استفاده کرد و بنابراین با استفاده از روش جداپذیری مسئله را حل خواهیم کرد. با قرار دادن

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

در معادله اصلی و تقسیم طرفین بر $X(x)T(t)$ خواهیم داشت :

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = k, \quad (51.6.1)$$

از طرفی از شرایط اولیه نتایج زیر برای تابع $X(x)$ به دست می آید.

این تساوی فقط و فقط وقتی به جواب مخالف صفر می رسد که $p > 0$, $k = -p^2$. بنابراین معادلات بر حسب توابع $X(x), T(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$X'' + p^2X = 0, \quad (52.6.1) \quad T'' + c^2p^2T = 0, \quad (53.6.1)$$

از شرایط مرزی شرایطی را روی تابع $X(x)$ به دست می آوریم:

$$u_x(0,t) = 0 \quad => \mathrm{X}'(0)\mathrm{T}(\mathrm{t}) = 0 \quad => \mathrm{X}'(0) = 0, \quad (54.6.1)$$

$$u(1,t) = 0 \quad => X(1)T(t) = 0 \quad => X(1) = 0, \quad (55.6.1)$$

بنابراین تابع $X(x)$ از معادله (52.6.1) و شرایط (54.7.1), (55.7.1) به دست می آیند.

$$X(x) = X_p(x) = a_p\cos(px) + b_p\sin(px), \quad (56.6.1)$$

$$X'(0) = pb_p = 0 => b_p = 0 \quad (57.6.1)$$

$$X(1) = -pa_p\sin(p) = 0 \quad => \sin(p) = 0 \quad => p = n\pi$$

$$p = n\pi, \quad n = 1,2, ... \quad (58.6.1)$$

مقادیر ویژه مسئله به دست می آید. توابع ویژه متناظر با آنها عبارتند از:

$$X(x) = X_n(x) = \ a_n\cos(n\pi x)\,, \quad n = 1,2, ... \ (59.6.1)$$

در این رابطه چون ضریب a_n می تواند هر عدد حقیقی مخالف صفری باشد برای راحتی مقدار آن را برابر با یک در نظر می گیریم. در این حالت گویند معادله دارای جوابی به **فرم کسینوسی** است.

اگر شرایط مرزی به جای (47.6.1), (48.6.1) به صورت $u(0,t) = 0$ و $u_x(1,t) = 0$ داده شود در فرم جواب تغییراتی اتفاق خواهد افتاد.

از این شرایط نتیجه می شود که:

$$u(0,t) = 0 \ \ => X(0)T(t) = 0 \ \ => X(0) = 0, \quad (60.6.1)$$

$$u_x(1,t) = 0 \quad => X'(1)T(t) = 0 \ \ => X'(1) = 0, \quad (61.6.1)$$

بنابراین تابع $X(x)$ از معادله و شرایط زیر محاسبه می شود:

$$X'' + p^2 X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) = 0, \quad (62.6.1)$$

$$X(x) = X_p(x) = a_p \cos(px) + b_p \sin(px), \quad (63.6.1)$$

$$X(0) = a_p = 0, \quad (64.6.1)$$

$$X'(1) = p b_p \cos(p) = 0 \quad => \cos(p) = 0 \quad => p = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$p = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1,2, \ldots. \quad (65.6.1)$$

مقادیر ویژه مسئله به دست آمده است. بنابراین توابع ویژه متناظر با آن عبارت است از:

$$X(x) = X_n(x) = b_n sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right), \quad n = 1,2, \ldots \quad (66.6.1)$$

دقت کنید که در این حالت نیز فرم جواب به صورت **سینوسی** است. ادامه حل مسئله مشابه مسائل قبلی است.

کدامیک از تبدیلات فوریه متناهی را می توان روی متغیر x به کار برد و چرا؟ دلیل بیاورید.

مثال 3.6.1

مطلوبست حل معادله زیر:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (67.6.1)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l, \quad (68.6.1)$$

$$u(0,t) = 0, \quad (69.6.1) \qquad u_x(l,t) = -u(l,t), \quad (70.6.1) \quad t \ge 0$$

در این مسئله هم با توجه به شرایط مرزی داده شده از هیچکدام از تبدیلات فوریه متناهی روی متغیر x نمی توانیم استفاده کنیم، چرا؟، و در نتیجه ، با استفاده از روش جداپذیری و قرار دادن $u(x,t)=X(x)T(t)$، خواهیم داشت:

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=k, \qquad (71.6.1)$$

از شرایط مرزی داریم:

$$X(0)=0, \quad (72.6.1), \quad X'(l)+X(l)=0, \quad (73.6.1)$$

بر حسب مقادیر مختلف k (از نظر مثبت، صفر و منفی بودن) برای به دست آوردن جواب مخالف صفر بحث خواهیم کرد.

نظیر حالت های قبل از حالت مثبت جواب مخالف صفر به دست نمی آید. در حالت $k=0$ مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$X''(x)=0, \qquad (74.6.1)$$

$$X(0)=0, \quad (72.6.1), \quad X'(l)+X(l)=0, \quad (73.6.1)$$

در این صورت جواب به صورت زیر است:

$$X(x)=ax+b, \qquad (75.6.1)$$

از رابطه (72.6.1) $b=0$. از رابطه (63.6.1) نتیجه می شود که:

$$a+al=0 \quad => a=0 => X(x)=0, \qquad (74.6.1)$$

از حالت $k<0$ و قرار دادن $k=-p^2, \quad p>0$ معادله و شرایط زیر را خواهیم داشت:

$$X''+p^2X=0, \qquad (75.6.1)$$

$$X(0)=0, \quad (72.6.1), \quad X'(l)+X(l)=0, \quad (73.6.1)$$

در نتیجه جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$X(x) = X_p(x) = A_p \cos(px) + B_p \sin(px), \qquad (76.6.1)$$

$$(72.6.1) => A_p = 0, \ \ (73.6.1) => B_p(\sin(pl) + pcos(pl)) = 0, \qquad (77.6.1)$$

به دنبال مقادیری از p هستیم تا رابطه :

$$\sin(pl) + pcos(pl) = 0, \qquad (78.6.1)$$

این معادله به صورت تحلیلی حل نمی شود. ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم :

$$\tan(pl) = -p, \qquad (79.6.1)$$

اکنون ابتدا دو منحنی $y = \tan(pl)$ و $y = -p$ را در یک دستگاه محورهای مختصات y, p رسم کنید. با توجه به مثبت بودن p از روی منحنی ها دیده می شود که بینهایت نقطه همدیگر را قطع می کنند. طول نقاط تقسیم را با $z_{n,} \quad n = 1,2, \ldots$ که $z_1 < z_2 < z_3 < \cdots < z_n < \cdots$.

در نتیجه: $p = z_n, \qquad n = 1,2, \ldots.$ مقادیر ویژه مسئله و توابع ویژه متناظر با آن عبارتند از:

$$X(x) = X_n(x) = \sin(z_n x), \qquad n = 1,2, \ldots., \quad (80.6.1)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{T'}{T} = k = -p^2 = -z_n^2$$

$$T_n(t) = A_n e^{-z_n^2 t}, \qquad (81.7.1)$$

بنابراین به ازا هر $n = 1,2, \ldots$ تابع

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = A_n e^{-z_n^2 t} sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \qquad (82.6.1)$$

از خاصیت برهمنهی استفاده می کنیم و ثابت باقیمانده، A_n را طوری محاسبه می کنیم تا جواب در شرط اولیه هم صدق کند:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-z_n^2 t}sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\qquad (83.6.1)$$

برای برقراری شرط اولیه باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\qquad (84.6.1)$$

بنابراین بایستی که:

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,in\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,\qquad (85.6.1)$$

نمودار توابع $y=\tan(pl)$ $y=-p,$ در صفحه yp.

جمعبندی از مطالب فوق را می توان به صورت زیر ارائه کرد:

1- مسائل مربوط به موج را می توان با استفاده از روش جداپذیری حل کرد. در این حالت قرار می دهیم:

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

2- معادله با مشتقات جزیی موج به دو معادله دیفرانسل معمولی با شرایطی تبدیل می شود

3- ابتدا معادله بر حسب $X(x)$ را با استفاده از شرایط مرزی داده شده حل می کنیم. در این حالت به دنبال جوابی هسیتم که مخالف صفر باشد.(جواب با معنی)

4- فرم کلی جواب معادله موج از روی فرم تابع $X(x)$ به دست می آید. دیدیم که اگر شرایط مرزی به صورت $u(0,t)=u(l,t)=0$ باشد، و در این حالت فرض شده

$$u(x,0)=f(x), \qquad u_t(x,0)=0$$

فرم جواب به صورت زیر خواهد بود

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \quad n=1,2,\dots.$$

به عبارت دیگر تابع جواب به فرم سینوسی است. به قوس تابع سینوس دقت داشته باشید.

5- اگر شرایط مرزی به صورت $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$. مجددا فرض می شود که

$$u(x,0)=f(x), \qquad u_t(x,0)=0$$

در این حالت نتیجه گرفتیم که فرم جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\alpha_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx, \quad \alpha_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \qquad n=1,2,\dots$$

در این حالت فرم جواب به صورت کسینوسی است.

6- اگر شرایط مرزی به صورت $u_x(0,t)=0, u(l,t)=0$ و شرایط اولیه همان شرایط اولیه دو حالت قبلی باشد، جواب به صورت

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

بنابراین جواب مجددا به صورت کسینوسی است.

7- اگر شرایط مرزی به صورت $u(0,t)=0, u_x(l,t)=0$ و و شرایط اولیه همان شرایط اولیه دو حالت قبلی باشد، جواب به صورت،

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)$$

در این حالت نیز مشاهده می شود که جواب به صورت سینوسی است. البته قوس سینوس در این حالت با قوس سینوس و کسینوس در حالت های قبلی متفاوت است. باید دقت داشت که توابعی که در این چهار حالت پیش آمدن و فرم جواب بر حسب آنها بیان شد در واقع توابع ویژه مسائلی بودند که در آثر استفاده از روش جدا پذیری در مسیر حل مسئله ایجاد می شوند. بنابراین جواب مسئله موج می تواند بر حسب توابع ویژه دیگری هم که در مسائل تولید می شوند ارائه گردد. اما اگر توابع ویژه به دست آمده توابعی متفاوت با توابع معمولی باشند که به راحتی متعامد بودن آنها محرز نیست بایستی در مورد متعامد بودن آن اقدام کرد.

7.1 حالات غیر استاندارد

تا اینجا با حالت استاندارد مسئله سروکار داشته ایم. اکنون به معرفی حالات غیر استاندارد می پردازیم

حالت غیر استاندارد وقتی اتفاق می افتد که یا معادله اصلی غیر همگن باشد و یا شرایط مرزی(از هر نوع) غیر صفر باشد، و یا هر دو حالت تواما اتفاق بیفتد. در حالتی که مسئله در حالت استاندارد نباشد نمی توان مستقیما از روش جداپذیری استفاده کرد.

کلی ترین فرم غیر استاندارد مسئله وقتی است که هم معادله غیر همگن باشد و شرایط مرزی مسئله صفر نباشد.

$$u_{tt}=c^2u_{xx}+F(x,t)\,,0<x<l, \qquad t>0 \qquad (1.7.1)$$

$$u(0,t)=p(t),\ \ (2.7.1), \qquad u(l,t)=q(t), \quad t\geq 0, \quad (3.7.1)$$

دقت کنید که شرایط مرزی لزوما روی خود تابع داده نمی شود، یعنی فرض بر این است که هر شرط مرزی که داده می شود مخالف صفر باشد. شرایط اولیه مسئله همان شرایط حالت استاندارد است.

$$u(x,0)=f(x),\ \ (4.7.1),\ \ u_t(x,0)=g(x), \quad 0\leq x\leq l, \quad (5.7.1)$$

این مسئله گویای این مطلب است که ارتعاش ایجاد شده نه تنها در اثر تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه بوده است بلکه یک نیروی خارجی در ایجاد ارتعاش نیز اثر داشته است.

در این حالت مسئله به چند حالت جزئی تقسیم می شود. ساده ترین حالت آن است که تابع $F(x,t)$ فقط به متغیر x بستگی داشته باشد و $q(t)=0,\ p(t)=0$. بنابراین مسئله به صورت زیر خواهد بود:

حالت اول: مطلوبست حل مسئله مقدار مرزی – اولیه زیر:

$$u_{tt}=c^2u_{xx}+\mathrm{F(x)},\quad 0<x<l,\ \ t>0,\quad (6.7.1)$$

$$u(x,0)=f(x),\quad (7.7.1),\quad u_t(x,0)=g(x),\qquad (8.7.1),\qquad 0\le x\le l$$

$$u(0,t)=0,\qquad (9.7.1),\ \ u(l,t)=0,\quad (10,7,1),\quad t\ge 0$$

جوابی به صورت زیر را در نظر می گیریم:

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x),\qquad (11.7.1)$$

در این رابطه تابع $w(x)$ را تابع کمکی گویند و آن را طوری می یابیم تا معادله اصلی بر حسب $v(x,t)$ معادله ای همگن باشد و شرایط مرزی مسئله بر حسب متغیر جدید برابر با صفر گردد. بنابراین ابتدا مشتقات جزیی لازم را محاسبه می کنیم:

$$u_{tt}(x,t)=v_{tt}(x,t),\ \ u_{xx}(x,t)=v_{xx}(x,t)+w''(x),\qquad (12.7.1)$$

با جایگزینی (12.78.1) در رابطه (6.7.1) خواهیم داشت:

$$v_{tt}(x,t)=c^2\big(v_{xx}(x,t)+w''(x)\big)+F(x)$$

برای همگن شدن معادله بر حسب $v(x,t)$ باید تابع کمکی را طوری تعیین کنیم که داشته باشیم:

$$c^2w''(x)+F(x)=0,\qquad (13.7.1)$$

در این حالت معادله اصلی به صورت زیر خواهد بود:

$$v_{tt}=c^2v_{xx},\qquad (14.7.1)$$

از طرفی با قرار دادن رابطه (11.7.1) در شرایط اولیه و شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x) = f(x) \qquad => v(x,0) = f(x) = w(x), \quad (15.7.1)$$

$$u_t(x,0) = g(x) = v_t(x,0), \qquad => v_t(x,0) = g(x), \quad (16.7.1)$$

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0) = 0, \qquad (17.7.1)$$

$$u(l,t) = v(l,t) + w(l) = 0, \qquad (18.7.1)$$

اکنون اگر $w(x)$ جواب مسئله زیر باشد،

$$c^2 w" + F = 0, \qquad w(0) = 0, \quad w(l) = 0$$

انگاه تابع $v(x,t)$ در مسئله زیر صدق می کند:

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}, \qquad 0 < x < l, \;\; t > 0, \qquad (19.7.1)$$

$$v(x,t) = f(x) - w(x), \qquad v_t(x,t) = g(x), \qquad (20.7.1)$$

$$v(0,t) = 0, \qquad v(l,t) = 0, \qquad (21.7.1)$$

در این حالت مسئله به یک مسئله استاندارد تبدیل شده و $v(x,t)$ به راحتی با استفاده از روش جداپذیری مشخص می شود. سپس با اضافه کردن تابع کمکی $w(x)$ که قبلا محاسبه شده است جواب مسئله اولیه به دست می آید.

حالت دوم اگر معادله اصلی همگن ولی شرایط مرزی مخالف صفر باشند.

مسئله با مقدار اولیه مرزی زیر را حل کنید:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < l, \;\; t > 0, \quad (22.7.1)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad (23.7.1), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad (24.7.1), \qquad 0 \le x \le l$$

$$u(0,t) = p(t), \qquad (25.7.1), \;\; u(l,t) = q(t), \quad (26.7.1), \quad t \geq 0$$

حل: در این حالت ابتدا با تغییر متغیر باید شرایط مرزی را صفر کرد. قرار می دهیم:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \quad (27.7.1)$$

تابع کمکی $w(x,t)$ را طوری انتخاب می کنیم که $v(0,t), v(l,t)$ برابر با صفر باشند. دقت کنید که انتخاب تابع کمکی به شرایط مرزی داده شده بستگی دارد. در این حالت که شرایط مرزی روی تابع u داده شده است کافی است که تابع کمکی را به صورت یک تابع خطی بر حسب x انتخاب کنیم. در صورتی که مثلا شرایط مرزی روی u_x داده شود ، کافی است تابع کمکی را به صورت تابع درجه دوم انتخاب می کنیم.

در این مسئله طبق شرایط (25.7.1) و (26.7.1) تابع کمکی به صورت خطی در نظر گرفته می شود:

$$w(x,t) = ax + b, \qquad (28.7.1)$$

ثابت های b, a را طوری تعیین می کنیم تا شرایط مرزی روی متغیر جدید $v(x,t)$ صفر شود:

$$u(0,t) = v(0,t) + b, \quad (29.7.1)$$

$$p(t) = 0 + b \quad => b = p(t), \quad (30.7.1)$$

$$u(l,t) = v(l,t) + al + p(t)$$

$$q(t) = 0 + al + p(t) \quad => a = \frac{q(t) - p(t)}{l}, \quad (31.7.1)$$

$$w(x,t) = \frac{q(t) - p(t)}{l} x + p(t), \quad (32.7.1)$$

$$u_{tt} = v_{tt} + w_{tt} = v_{tt} + \frac{q''(t) - p''(t)}{l} x + p''(t), \quad (33.7.1)$$

$$u_{xx} = v_{xx}, \quad (34.7.1)$$

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = f(x) - \frac{q(0) - p(0)}{l} x - p(0) = F(x), \quad (35.7.1)$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - w_t(x,0)$$

$$= g(x) - \frac{q'^{(0)} - p'^{(0)}}{l} x - p'^{(0)} = G(x), \qquad (36.7.1)$$

در نتیجه مسئله بر حسب متغیر جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$v_{tt} + \frac{q''(t) - p''(t)}{l} x + p''(t) = \mathrm{c}^2 v_{xx}$$

با قرار دادن $\frac{q''(t)-p''(t)}{l} x + p''(t) = H(x,t)$، خواهیم داشت:

$$v_{tt} = \mathrm{c}^2 v_{xx} + H(x,t), \qquad (37.7.1)$$

$$v(0,t) = 0, \quad (38.7.1), \quad v(l,t) = 0, \quad (39.7.1)$$

$$v(x,0) = F(x), \quad (40.7.1), \quad v_t(x,0) = G(x), \quad (41.7.1)$$

مسئله (37.7.1) تا (41.7.1) را به عنوان سومین حالت غیر استاندارد دنبال می کنیم.

<u>حالت سوم:</u>

مسئله مقدار مرزی اولیه زیر را حل می کنیم:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \mathrm{F}(x,t) \quad 0 < x < l, \ \ t > 0, \quad (42.7.1)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad (43.7.1), \quad u_t(x,0) = g(x), \qquad (44.7.1), \qquad 0 \le x \le l$$

$$u(0,t) = 0, \qquad (45.7.1), \ \ u(l,t) = 0, \quad (46,7,1),$$

حل: در این مسئله با توجه به روش جدا پذیری و شرایط مرزی داده شده صفر ، اگر قرار دهیم

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

از شرایط مرزی نتیجه می شود که:

$$X(x) = X_n(x) = sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n = 1,2, \dots, \quad (47.7.1)$$

سپس با توجه به اینکه معادله غیر همگن است و جواب آن شامل دو قسمت جواب قسمت همگن باضافه یک جواب خصوصی معادله غیر همگن است، و با توجه به شرایط مسئله مشخص است که جواب قسمت همگن به صورت سینوسی است قرار می دهیم :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (48.7.1)$$

و تابع $T_n(t)$ را طوری می یابیم تا $\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) s\, in\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ جواب معادله غیر همگن باشد. (با توجه به همگرایی سری امکان مشتقگیری جمله به جمله از سری وجود دارد). بنابراین داریم:

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T''_n(t) s\, in\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (49.7.1)$$

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2\pi^2}{l^2} T_n(t) s\, in\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (50.7.1)$$

با جایگزینی در معادله خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t) + \frac{c^2n^2\pi^2}{l^2} T_n(t)\right) sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = F(x,t), \quad (51.7.1)$$

سمت چپ عبارت یک بسط سینوسی است، بنابراین سمت راست را نیز به صورت بسط سینوسی قرار می دهیم:

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (52.7.1)$$

که در آن

$$h_n(\mathrm{t}) = \frac{2}{l}\int_0^l F(x,t)sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \qquad (53.7.1)$$

بنابراین برای برقراری رابطه (51.7.1) بایستی که داشته باشیم:

$$T_n''(t) + c^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t) = h_n(\mathrm{t}), \qquad (54.7.1)$$

اکنون به یک معادله درجه دوم غیر همگن رسیدیم. جواب معادله شامل جواب معادله همگن وابسته باضافه یک جواب معادله غیر همگن وابسته است. جواب معادله همگن به صورت زیر است:

$$T_n(t) = a_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right), \qquad (55.7.1)$$

برای تعیین جواب خصوصی معادله غیر همگن با توجه به وضعیت $h_n(\mathrm{t})$ می توان از روشهای مختلف عمل کرد. اگر $h_n(\mathrm{t})$ به صورت مقدار ثابت یا عبارتهای چند جمله ای باشد و یا عبارتی شامل خطوط مثلثاتی و تابع نمایی و یا ترکیباتی از این توابع باشد می توان از روش ضرایب نامعین جواب خصوصی را به دست آورد. در غیر این صورت می توان از روش تبدیل لاپلاس برای تعیین جواب خصوصی اقدام کرد. فرض می کنیم جواب خصوصی را با روش مناسبی محاسبه کرده ایم و آن را با $T_{np}(t)$ نشان دهیم. در این صورت جواب معادله (54.7.1) به صورت زیر خواهد بود:

$$T_n(t) = a_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + T_{np}(t), \qquad (56.7.1)$$

در نتیجه جواب مسئله اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + T_{np}(t)\right)sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (57.7.1)$$

ضرایب نامعین b_n, a_n را با استفاده از شرایط اولیه به دست می آید.

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + T_{np}(0)\right)sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (58.7.1)$$

ضریب a_n از رابطه زیر به دست می آید:

$$a_n + T_{np}(0) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \qquad (59.7.1)$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \frac{cn\pi}{l} + T'_{np}(0)\right) sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (60.7.1)$$

و ضریب b_n از رابطه زیر به دست می آید:

$$b_n \frac{cn\pi}{l} + T'_{np}(0) = \frac{2}{l}\int_0^l g(x) sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \qquad (61.7.1)$$

<u>روش محاسبه جواب خصوصی با استفاده از روش تبدیل لاپلاس</u>

برای تعیین جواب خصوصی معادله

$$T_{np}''(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_{np}(t) = h_n(\mathrm{t}), \quad (62.7.1)$$

تبدیل لاپلاس را روی طرفین معادله به کار می بریم. خواهیم داشت:

$$L\left[T_{np}''(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_{np}(t)\right] = L[h_n(\mathrm{t})], \quad (63.7.1)$$

با استفاده از خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس، خواهیم داشت:

$$L\left[T_{np}''(t)\right] = s^2 L\left[T_{np}(t)\right] - sT_{np}(0) - T'_{np}(0), \quad (64.7.1)$$

مقادیر $T_n(0)$ و $T'_n(0)$ مقادیر ثابت نسبت به t هستند و تنها به n وابسته می باشند. بنابراین رابطه فوق به صورت زیر تبدیل می شود.

$$s^2L\left[T_{np}(t)\right]-sT_{np}(0)-T'_{np}(0)+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}L\left[T_{np}(t)\right]=L[h_n(\mathrm{t})], \quad (65.7.1)$$

$$\left(s^2+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}\right)L\left[T_{np}(t)\right]=L[h_n(\mathrm{t})]+sT_{np}(0)+T'_{np}(0)$$

$$L\left[T_{np}(t)\right]=\frac{L[h_n(\mathrm{t})]}{s^2+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}}+\frac{sT_{np}(0)}{s^2+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}}+\frac{T'_{np}(0)}{s^2+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}}, \quad (66.7.1)$$

این رابطه تبدیل جواب خصوصی است که باید تبدیل معکوس آن را محاسبه کنیم تا جواب خصوصی به دست آید. برای محاسبه تبدیل معکوس خواهیم داشت:

$$T_{np}(t)=L^{-1}\left[\frac{L[h_n(\mathrm{t})]}{s^2+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}}+\frac{sT_{np}(0)}{s^2+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}}+\frac{T'_{np}(0)}{s^2+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}}\right], \quad (67.7.1)$$

طبق خاصیت خطی بودن تبدیل معکوس می توان جمله به جمله تبدیل معکوس را محاسبه کرد.

$$L^{-1}\left[\frac{L[h_n(\mathrm{t})]}{s^2+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}}\right]=L^{-1}\left\{L[h_n(\mathrm{t})]\times\frac{1}{s^2+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}}\right\}, \quad (68.7.1)$$

دو عبارت داخل کروشه دو تبدیل لاپلاس است و برای تعیین تبدیل معکوس این حاصل ضرب از خاصیت پیچش استفاده می شود.

$$L^{-1}\left[\frac{L[h_n(\mathrm{t})]}{s^2+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}}\right]=L^{-1}\left[L[h_n(\mathrm{t})]\right]*L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}}\right]$$

$$=h_n(\mathrm{t})*\frac{l}{cn\pi}sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right), \quad (69.7.1)$$

$$L^{-1}\left[\frac{sT_{np}(0)}{s^2+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}}\right]=T_{np}(0)cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right),\quad (70.7.1)$$

$$L^{-1}\left[\frac{T'_{np}(0)}{s^2+\frac{(cn\pi)^2}{l^2}}\right]=\frac{lT'_{np}(0)}{cn\pi}sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right),\quad (71.7.1)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$T_{np}(t)=h_n(\mathrm{t})*\frac{l}{cn\pi}sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)+T_{np}(0)cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)+\frac{lT'_{np}(0)}{cn\pi}sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right),\quad (72.7.1)$$

این جواب خصوصی معادله (62.7.1) خواهد بود. این جواب را به جواب عمومی معادله همگن اضافه می کنیم:

$$T_n(t)=\left(a_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)+b_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\right)+h_n(\mathrm{t})*\frac{l}{cn\pi}sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)+T_{np}(0)cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)+\frac{lT'_{np}(0)}{cn\pi}sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right),\quad (73.7.1)$$

رابطه را به صورت زیر باز نویسی می کنیم:

$$T_n(t)=\left(a_n+T_{np}(0)\right)cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)+\left(b_n+\frac{lT'_{np}(0)}{cn\pi}\right)sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)+h_n(\mathrm{t})*\frac{l}{cn\pi}sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right),\quad (74.7.1)$$

نام گذاری جدید کرده و قرار می دهیم:

$$\alpha_n=a_n+T_{np}(0),\qquad \beta_n=b_n+\frac{lT'_{np}(0)}{cn\pi}$$

در نتیجه داریم :

$$T_n(t) = \alpha_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + \beta_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + h_n(\mathrm{t}) * \frac{l}{cn\pi} sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right), \quad (75.7.1)$$

به این ترتیب جواب خصوصی به دست آمده است. ضرایب نامعین α_n و β_n با در نظر گرفتن شرایط اولیه محاسبه می شوند. بنابراین جواب معادله یه صورت زیر خواهد بود. ضمنا برای خلاصه نویسی از نماد $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ استفاده می کنیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n cos\lambda_n t + \beta_n sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t h_n(\tau) sin[\lambda_n(t-\tau)] d\tau \right\} sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (76.7.1)$$

برای محاسبه ضرایب مجمول از شرایط اولیه استفاده می کنیم:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (77.7.1)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\, sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \quad (78.7.1)$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \lambda_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (79.7.1)$$

$$\beta_n = \left(\frac{2}{l\lambda_n}\right)\int_0^l g(x) sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \quad (80.7.1)$$

بنابراین جواب مسئله اولیه از رابطه (76.7.1) به دست می آید که ضرایب نامعلوم آن نیز طبق روابط (78.7.1) و (80.7.1) قابل محاسبه هستند

حالت چهارم:

اگر ارتعاش تار علاوه بر تغییر مکان اولیه تحت تاثیر یک نیروی خارجی قرار دارد و دو انتهای نخ هم وابسته به زمان دارای ارتعاش می باشند.

مسئله مقدار مرزی – اولیه زیر را حل کنید

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + H(x,t), \quad 0 < x < l, \;\; t > 0, \quad (81.7.1)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \le x \le l, \quad (82.7.1)$$

$$u(0,t) = p(t), \quad u(l,t) = q(t), \quad (83.7.1)$$

این حالت باید سعی کنیم با تغییر متغیر

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \quad (84.7.1)$$

مسئله را به یک مسئله با شرایط مرزی صفر تبدیل کنیم. بنابراین باید تابع کمکی را طوری بیابیم تا

$$v(0,t) = 0, \quad (85.7.1), \quad v(l,t) = 0, \quad (86.7.1)$$

بنابراین با توجه به شرایط مرزی داده شده تابع کمکی را به صورت خطی، درجه دوم و غیر انتخاب می کنیم.
در این حالت مانند حالت سوم با انتخاب تابع کمکی به صورت خطی نتیجه می گیریم که تابع،

$$w(x,t) = \frac{q(t) - p(t)}{l} x + p(t), \quad (87.7.1)$$

باعث صفر شدن شرایط مرزی میگردد. با این تابع کمکی مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$u_{tt} = v_{tt} + w_{tt} = v_{tt} + \frac{q''(t) - p''(t)}{l} x + p''(t), \quad (88.7.1)$$

$$u_{xx} = v_{xx}, \quad (89.7.1)$$

$$v(0,t) = 0, \quad (90.7.1), \;\; v(l,t) = 0, \quad (91.7.1)$$

$$v(x,0)=u(x,0)-w(x,0)=f(x)-\frac{q(0)-p(0)}{l}x-p(0)$$

$$=k(x),\quad (92.7.1)$$

$$v_t(x,0)=u_t(x,0)-w_t(x,0)=g(x)-\frac{q'(0)-p'(0)}{l}x-p'(0)$$

$$=h(x),\qquad (93.7.1)$$

با قرار دادن،

$$F(x,t)=H(x,t)-\left(\frac{q(t)-p(t)}{l}x+p(t)\right),\quad (94.7.1)$$

بنابراین مسئله به صورت زیر باز نویسی می شود:

$$v_{tt}=v_{xx}+F(x,t),\quad (95.7.1)$$

$$v(0,t)=0,\quad (90.7.1),\quad v(l,t)=0,\quad (91.7.1)$$

$$v(x,0)=k(x),\quad (92.7.1)\quad ,\quad v_t(x,0)=h(x),\quad (93.7.1)$$

این همان حالت سوم است که قبلا مورد بحث قرار گرفت. بنابراین با روش بیان شده جواب مسئله، $v(x,t)$ قابل محاسبه می شود و سپس با اضافه کردن تابع کمکی $w(x,t)$ به آن جواب مسئله اولیه به دست می آید.

<u>مثال 1.7.1</u>

مطلوبست حل مسئله زیر:

$$u_{tt}=c^2u_{xx}+h,\quad 0<x<l,\ \ t>0$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le l$$

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\ge 0$$

بنابراین جواب معادله کمکی از حل معادله زیر به دست می آید:

$$c^2 w'' + h = 0, \qquad (94.7.1)$$

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0, \qquad (95.7.1)$$

$$w(x) = \frac{h}{2c^2}(lx - x^2), \qquad (96.7.1)$$

و تابع $v(x,t)$ بایستی در مسئله زیر صدق کند:

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}, \qquad 0 < x < l, \;\; t > 0, \qquad (97.7.1)$$

$$v(x,0) = -\frac{h}{2c^2}(lx - x^2), \qquad v_t(x,t) = 0, \qquad 0 \le x \le l, \qquad (98.7.1)$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \qquad (99.7.1)$$

طبق بحث های قبلی جواب مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad (100.7.1)$$

بنابراین:

$$v(x,0) = -\frac{h}{2c^2}(lx - x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

که ضریب a_n از رابطه زیر به دست می آید:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l -\frac{h}{2c^2}(lx - x^2) sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{4l^2 h}{n^3\pi^3 c^2} & n = 2k-1 \\ 0 & n = 2k \end{cases}, \qquad (101.7.1)$$

بنابراین جواب مسئله اصلی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

$$= \frac{hx}{2c^2}(l-x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4l^2h}{\pi^3c^2}\right)\frac{cos\left(\frac{c(2n-1)\pi}{l}t\right)}{(2n-1)^3}sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{l}x\right), \quad (102.7.1)$$

مثال 2.7.1

مسئله مقدار مرزی – اولیه زیر را حل کنید:

$$u_{tt} = u_{xx} + h, \quad 0 < x < 1, \;\; t > 0, \;\; h = const, \;\; (103.7.1)$$

$$u(x,0) = x(1-x), \quad 0 \le x \le 1, \quad (104.7.1)$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad (105.7.1)$$

$$u(0,t) = t, \quad t \ge 0, \quad (106.7.1)$$

$$u(1,t) = \sin(t), \quad t \ge 0, \quad (107.7.1)$$

حل: با استفاده از تغییر متغیر خواهیم داشت:

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t), \quad U(x,t) = t + x(\sin(t) - t), \quad (108.7.1)$$

بنابراین $v(x,t)$ بایستی در روابط زیر صدق کند:

$$v_{tt} - v_{xx} = h + xsin(t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (109.7.1)$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t \ge 0, \quad (110.7.1)$$

$$v(x,0) = x(1-x), \quad v_t(x,0) = -1, \;\; 0 \le x \le 1, \quad (111.7.1)$$

طبق رابطه (109.7.1) داریم:

$$h_n(t) = 2\int_0^1 \big(h + xsin(t)\big)sin(n\pi x)dx$$

$$= \frac{2h}{n\pi}[1 - (-1)^n] + \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(t) = \mathrm{a} + bsin(t), \quad (112.7.1)$$

برای راحتی قرار داده شده:

$$a = \frac{2h}{n\pi}[1 - (-1)^n], \quad b = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

هم چنین داریم:

$$a_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{4}{(n\pi)^3}[1 - (-1)^n], \qquad (113.7.1)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx = \frac{2}{(n\pi)^2}[1 - (-1)^n], \qquad (114.7.1)$$

اکنون انتگرال موجود در فرمول (42.4.1) را محاسبه می کنیم. برای سادگی انتگرال را با $\varphi_n(t)$ نشان می دهیم:

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n\pi}\int_0^t (a + bsin\tau)sin[n\pi(t-\tau)]d\tau$$

$$= \frac{1}{n\pi}\Big\{\frac{a}{n\pi}(1 - cosn\pi t)$$
$$+ \frac{b}{4}[(\sin(2t) - 2t)\cos(n\pi t) - \cos(2t - 1)\sin(n\pi t)]\Big\}, \quad (115.7.1)$$

بنابراین جواب مسئله (113.7.1) – (111.7.1) به صورت زیر خواهد بود:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\pi t)+b_n\sin(n\pi t)+\varphi_n(t)]\sin(n\pi x), \quad (116.7.1)$$

در نتیجه جواب مسئله $(103.4.1)-(107.7.1)$ برابر است با

$$u(x,t)=v(x,t)+U(x,t), \qquad (117.7.1)$$

که در آن $v(x,t)$ از رابطه $(116.7.1)$ و $U(x,t)$ از رابطه $(108.7.1)$ به دست می آید.

مثال 3.7.1

جواب مسئله زیر را به دست آورید:

$$u_t-2u_{xx}=h, \quad 0<x<1, \quad t>0, \quad (118.1)$$

$$u(x,0)=x, \quad 0\le x\le 1, \quad (119.7.1)$$

$$u(0,t)=\sin(t), \quad t\ge 0, \quad (120.7.1)$$

$$u_x(1,t)+u(1,t)=2, \quad t\ge 0, \quad (121.7.1)$$

حل: در این مسئله شرایط مرزی داده شده کمی با شرایط مرزی داده شده در مسائل قبلی متفاوت است. اما روش حل مسئله کاملا مشابه روش قبلی است، یعنی با استفاده از تغییر متغیر سعی می شود که شرایط مرزی مسئله را صفر کرد. البته باید دقت کرد که شرط مرزی به هر صورتی در مسئله داده شده همان صورت حفظ شود فقط مقدار شرط مرزی صفر گردد. این مطلب در جریان حل مسئه روشن خواهد شد.

قرار می دهیم:

$$u(x,t)=v(x,t)+U(x,t), \qquad (122.7.1)$$

تابع کمکی$U(x,t)$ را طوری می یابیم که شرایط مرزی روی تابع $v(x,t)$ صفر شود یعنی داشته باشیم:

$$v(0,t)=0, \quad v_x(1,t)+v(1,t)=0, \quad (123.7.1)$$

مشتقات جزیی لازم را محاسبه کرده و در مسئله $(121.7.1) - (118.7.1)$ قرار می دهیم. خواهیم داشت:

$$v_t - 2v_{xx} = h - U_t - 2U_{xx}, \qquad (124.7.1)$$

$$v(x,0) = u(x,0) - U(x,0) = x - U(x,0), \quad (125.7.1)$$

$$v(0,t) = u(0,t) - U(0,t) = 0, \qquad => U(0,t) = \sin(t), \quad (126.7.1)$$

$$v_x(1,t) + v(1,t) = u_t(1,t) + u(1,t) - U_t(1,t) - U(1,t) = 0$$

$$U_x(1,t) + U(1,t) = u_x(1,t) + u(1,t) = 2, \qquad (127.7.1)$$

بنابراین تابع کمکی باید طوری انتخاب شود که در شرایط $(126.7.1)$ و $(127.7.1)$ صدق کند.

دقت کنید که ارائه یک تابع کمکی در اینجا برای حل مسئله کافی است. وقتی شرایط مرزی روی خود تابع و مشتقات مرتبه اول آن داده شده باشد می توان از یک تابع خطی بر حسب x استفاده کرد. بنابراین قرار می دهیم:

$$U(x,t) = ax + b, \qquad (128.7.1)$$

ثابت های b, a (ثابت برحسب x) را طوری می یابیم تا شرایط $(126.7.1)$ و $(127.7.1)$ برقرار شود.

$$U(0,t) = b = \sin(t), \quad (129.7.1)$$

$$U_x(1,t) + U(1,t) = a + a + b = 2a + \sin(t) = 2$$

$$a = \frac{2 - \sin(t)}{2}, \qquad (130.7.1)$$

$$U(x,t) = \frac{2 - \sin(t)}{2} x + \sin(t), \qquad (131.7.1)$$

بنابراین مسئله بر حسب $v(x,t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$v_t - 2v_{xx} = h + \frac{(x-2)}{2} \cos(t), \qquad (132.7.1)$$

$$v(x,0) = 0, \qquad (133.7.1)$$

$$v(0,t)=0,\quad (134.7.1),\quad v_x(1,t)+v(1,t)=0,\quad (135.7.1),\quad t\geq 0$$

چون شرایط مرزی با حالت های قبلی متفاوت است از حالت کلی که قبلا بحث شد استفاده نمی کنیم و روش جدا پذیری را از ابتدا اعمال می کنیم. ابتدا باید فرم جواب را با استفاده از شرایط مرزی بیابیم.

در معادله همگن وابسته قرار می دهیم $v(x,t)=X(x)T(t)$. خواهیم داشت:

$$XT'-2X''T=0$$

طرفین را بر $2XT$ تقسیم می کنیم:

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{2T}$$

طبق بحث های انجام شده این نسبت فقط بایستی مقدار ثابتی باشد. بنابراین معادله بر حسب X به صورت زیر خواهد بود:

$$X''-kX=0,\qquad (136.7.1)$$

ضمنا از روی روابط (134.7.1) و (135.7.1) نتیجه می شود که:

$$v(0,t)=0=X(0)T(t)\quad => X(0)=0,\quad (137.7.1)$$

$$v_x(1,t)+v(1,t)=0=\big(X'(1)+X(1)\big)T(t)\quad => X'(1)+X(1)=0,\quad (138.7.1)$$

بنابراین تابع $X(x)$ی مورد نظر است که در معادله و شرایط زیر صدق کند.

$$X''-kX=0,\qquad (136.7.1)$$

$$X(0)=0,\quad (137.7.1)$$

$$X'(1)+X(1)=0,\quad (138.7.1)$$

بر حسب مقادیر مختلف k از نظر مثبت صفر و منفی بودن بحث می کنیم. فقط از حالت منفی به جواب مخالف صفر می رسیم. قرار می دهیم $k=-p^2,\quad p>0$

$$X(x) = X_p(x) = \mathrm{a}_p \cos(px) + b_p sin(px), \quad (139.7.1)$$

$$X(0) = \mathrm{a}_p = 0, \quad (140.7.1)$$

$$X'(1) + X(1) = pb_p \cos(p) + b_p \sin(p) = 0$$

در این رابطه نباید b_p برابر با صفر باشد. بنابراین مقادیری از p مورد نظر است که رابطه را برقرار کند بدون انکه b_p برابر با صفر باشد. پس p باید در رابطه زیر صدق کند:

$$pcos(p) + \sin(p) = 0 \quad => \tan(p) = -p, \quad (141.7.1)$$

این معادله را به صورت تحلیل حل نمی کنیم. اگر نمودار دو تابع $y = -p$ و $y = \tan(p)$ را به ازا $p > 0$ رسم کنید دیده می شود که این دو تابع در بی نهایت نقطه همدیگر را قطع می کنند. طول نقاط تقاطع را با z_n نمایش وی دهیم. در این صورت جواب های این معادله در رابطه زیر صدق می کنند:

$$z_1 < z_2 < z_3 < \cdots.$$

در نتیجه جواب مسئله $(136.7.1) - (138.7.1)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$X_n(x) = \sin(\mathrm{z}_n x)\,, n = 1,2, \ldots, \quad (142.7.1)$$

اکنون که فرم تابع $X_n(x)$ به دست امد می توان شکل جواب مسئله اصلی را بر حسب آن بیان کرد. یعنی به دنبال جوابی از مسئله اصلی خواهیم بود که به شکل زیر باشد:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(\mathrm{z}_n x), \quad (143.7.1)$$

این بدین معنی است که جواب مسئله به صورت بسط سینوسی توابع $\sin(\mathrm{z}_n x)$ است. (چون در مورد متعامد بودن این توابع بر بازه $[-1,1]$ قبلا بحث نشده است توصیه می شود در این مورد بررسی گردد).

با قرار دادن این رابطه در معادله (132.7.1) خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T'_n + 2z_n^2 T_n]\sin(z_n x) = h + \frac{x-2}{2}\cos(t)$$

چون سمت چپ معادله به صورت یک بسط سینوسی است سمت راست را هم به صورت بسط سینوسی می نویسیم:

$$h + \frac{x-2}{2}\cos(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin(z_n x)$$

که در ان

$$h_n(t) = 2\int_0^1 \left(h + \frac{x-2}{2}\cos(t)\right)\sin(z_n x)\,dx = a + bcos(t), \quad (144.7.1)$$

جواب مسئله به صورت زیر به دست می آید:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n e^{-2{z_n}^2 t} + \varphi_n(t)\right\}\sin(z_n x), \quad (145.7.1)$$

که در آن:

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{z_n}\int_0^1 \big(a + bcos(\tau)\big) sin[z_n(t-\tau)]d\tau, \quad (146.7.1)$$

ضریب a_n از رابطه زیر به دست می آید:

$$v(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n + \varphi_n(0)\big)\sin(z_n x) \quad \Rightarrow a_n = -\varphi_n(0), \quad (147.7.1)$$

و جواب مسئله اولیه برابر است با:

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$$

که $v(x,t)$ از رابطه (146.7.1) و $U(x,t)$ از رابطه (131.7.1) به دست می آید.

8.1 -حرکت موج در یک محیط نامتناهی

اگر در بررسی حرکت موج با فاصله های زیاد سروکار داشته باشیم (امواج صوتی از میان اقیانوس یا تابش پس زمینه کیهانی در سراسر جهان) ، حرکت موج با معادله موج روی بازه نامتناهی $-\infty < x < \infty$ مدلسازی می شود. در این حالت ، مرزی وجود ندارد، بنابراین شزط مرزی موجود نیست. اما ما به دنبال جوابهای کراندار هستیم.

تحلیل مسئله کاملا مشابه حالت حرکت موج روی بازه بسته است، به جز انکه $\int_{-\infty}^{\infty} \dots .\, dw$ جایگزین $\sum_{n=1}^{\infty} \dots$ می شود. همان طور که روی بازه های متناهی انجام دادیم، دو حالت بدون سرعت اولیه و با سرعت اولیه را در نظر می گیریم.

حالت اول: با سرعت اولیه صفر

مسئله مقدار اولیه- مرزی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (1.8.1)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad (2.8.1), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad (3.8.1), \quad -\infty < x < \infty$$

متغییر را به صورت زیر از هم جدا می کنیم:

$$u(x,t) = F(x)G(t), \quad (4.8.1)$$

نظیر حالت حرکت موج روی بازه محدود داریم:

$$F'' + kF = 0, G'' + kc^2 G = 0, \quad (5.8.1)$$

سه حالت برای k در نظر گرفته می شود.

حالت اول: اگر $k = 0$ در این صورت $F(x) = ax + b$

در این حالت تابع $F(x)$ کراندار است اگر $a = 0$. بنابراین به ازا $k = 0$ تابع $F(x) = b \neq 0$.

حالت دوم : اگر $k<0$ در این حالت قرار می دهیم $p>0$ $\quad$ $k=-p^2,$

در این حالت $F(x)=c_1e^{px}+c_2e^{-px}$. چون $x\to\infty$ برای کراندار بودن بایستی $c_1=0$. هم چنین چون $x\to-\infty$ برای کراندار بودن بایستی $c_2=0$. پس مسئله دارای جواب مخالف صفر نیست.

حالت سوم: اگر $k>0$. در این حالت قرار می دهیم $p>0$ $\quad$ $k=p^2,$

در این حالت $F(x)=c_1\cos(px)+c_2\sin(px)$. تابع به ازا هر $p>0$ کراندار است. هر $k=p^2$ یک مقدار ویژه است و تابع ویژه متناظر با آن به صورت زیر است:

$$F_p(x)=c_1\cos(px)+c_2\sin(px)\,,\quad \mathrm{p}>0,\quad (6.8.1)$$

برای ادغام حالت اول و سوم $p=0$ را به مجموعه فوق اضافه می کنیم.

معادله را برای تابع $G(t)$ حل می کنیم. داریم:

$$G''+c^2p^2G=0,\quad (7.8.1)$$

جواب معادله به صورت زیر است:

$$G_p(t)=\mathrm{a}\cos(cpt)+b\sin(cpt),\quad (8.8.1)$$

اما چون

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x)G'(0)=F(x)pcb=0\quad => b=0,\quad (9.8.1)$$

در نتیجه $G_p(t)=\mathrm{a}\cos(cpt)$. بنابراین به ازا هر $\mathrm{p}>0$ توابع زیر را داریم:

$$u_p(x,t)=F_p(x)G_p(t)=\left[a_p\cos(px)+b_p\sin(px)\right]\cos(pct),\quad (10.8.1)$$

که در معادله موج و شرط اولیه $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$ صدق می کند. لازم است که شرط اولیه $u(x,0)=f(x)$ نیز برقرار باشد. در حالت مسئله روی بازه کراندار ، از خاصیت برهمنهی استفاده کردیم، $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$.

اکنون مقادیر ویژه روی کل اعداد حقیقی مثبت قرار دارند، بنابراین خاصیت برهمنهی به شکل $\int_0^\infty u_p(x,t)dp$ خواهد بود. پس جواب نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t) = \int_0^\infty \left[a_p\cos(px) + b_p\sin(px)\right]\cos(pct)\,dp \qquad (11.8.1)$$

لازم است که شرط اولیه برقرار باشد:

$$u(x,0) = \int_0^\infty \left[a_p\cos(px) + b_p\sin(px)\right]dp = f(x), \quad (12.81)$$

این انتگرال فوریه تابع $f(x)$ است، بنابراین ضرایب به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos(\alpha p)\,d\alpha, \qquad (13.8.1)$$

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\sin(\alpha p)\,d\alpha, \qquad (14.8.1)$$

با انتخاب این ضرایب معادله (11.8.1) جواب مسئله است.

<u>مثال 1.81.</u>

مسئله زیر را حل می کنیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (15.8.1)$$

$$u(x,0) = e^{-|x|}, (16.8.1), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad (17.8.1), -\infty < x < \infty$$

با استفاده از شرط اولیه ضرایب فوریه را محاسبه کنید. ابتدا،

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-|\mu|}\cos(p\mu)\,d\mu = \frac{2}{\pi(1+p^2)}, \quad (18.8.1)$$

چون $sin(p\mu)$ $e^{-|\mu|}$ تابع فردی از μ است ، $b_p = 0$. بنابراین جواب به صورت زیر است:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+p^2}\cos(px)\cos(pct)\,dp, \quad (19.8.1)$$

بعضی مواقع جواب (11.8.1) به صورت دیگری نشان داده می شود. اگر به جای ضرایب انتگرال، انتگرال های مربوطه را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$u(x,t) = \int_0^{\infty}\left[a_p\cos(px) + b_p\sin(px)\right]\cos(pct)\,dp$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\left(\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos(\alpha p)\,d\alpha\right]\right)\cos(px) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\sin(\alpha p)\,d\alpha\right)\sin(px)\right]\cos(pct)\,dp$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}[\cos(p\alpha)\cos(px) + \sin(p\alpha)\sin(px)]f(\alpha)\cos(pct)\,dpd\alpha, \quad (20.8.1)$$

با به کار بردن روابط مثلثاتی داریم:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}[\cos(\mathrm{p}(\alpha - \mathrm{x}))]f(\alpha)\cos(pct)\,dpd\alpha, \quad (21.8.1)$$

از این فرم جواب وقتی تبدیلات فوریه را به کار می بریم استفاده می کنیم.

تغییر مکان اولیه صفر

مسئله زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (15.8.1)$$

$$u(x,0) = 0, \qquad (22.8.1), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ (23.8.1), -\infty < x < \infty$$

حل: با روشی مشابه حالت قبل به نتیجه زیر می رسیم:

$$F_p(x) = c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px)\,, \quad \mathrm{p} > 0, \quad (6.8.1)$$

واز حالت اول بحث در قسمت قبل هم به نتیجه $F(x) = b \neq 0$ رسیدیم. بنابراین کافی است که $p = 0$ نیز به مجموعه جوابهای رابطه (6.9.1) اضافه محاسبه میشود.

در مورد تابع $G(t)$ به نتیجه زیر می رسیم:

$$G_p(t) = \mathrm{a}_p \cos(cpt) + b_p sin(cpt), \quad (8.8.1)$$

از رابطه (22.8.1) نتیجه می شود که:

$$G(0) = 0, \quad (24.8.1)$$

$$\mathrm{G}(0) = a_p = 0, \quad (25.8.1)$$

$$G_p(t) = b_p sin(cpt), \quad (26.8.1)$$

$$u_p(x,t) = F_p(x)G_p(t) = [c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px)] \sin(pct), \quad p \geq 0 \quad (27.8.1)$$

قرار می دهیم:

$$u(x,t) = \int_0^\infty u_p(x,t)dp = \int_0^\infty [c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px)] sincptdp, \quad (28.8.1)$$

برای تعیین ضرایب مجهول از شرط (23.8.1) استفاده می شود:

$$u_t(0,t) = g(x) = \int_0^\infty cp[c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px)]dp, \quad (29.8.1)$$

$$cpc_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cos(px)\, dx, \qquad (30.8.1)$$

$$cpc_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin(px)\, dx, \qquad (31.8.1)$$

با استفاده از روابط (30.8.1) و (31.8.1) ضرایب در رابطه (28.8.1) مشخص و جواب مسئله به دست می آید.

اگر در حالت طولهای نامتناهی هم انحراف اولیه و هم سرعت اولیه مخالف صفر نباشد ، آیا می توان از روش جداپذیری استفاده کرد، چرا؟

9.1. حرکت موج در ناحیه نیم متناهی

معادله موج را روی نیم خط $0 \le x < \infty$. مسئله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x < \infty, \quad t > 0, \quad (1.9.1)$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \ge 0, \qquad (2.9.1)$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad (3.9.1) \;\; u_t(x,0) = g(x), \qquad (4.9.1) \quad 0 \le x < \infty$$

نظیر مسئله برای حالت محدود x ابتدا حالت $g(x) = 0$ را در نظر می گیریم. متغیر ها را با قرار دادن $u(x,t) = F(x)G(t)$ از هم جدا می کنیم و نتیجه به صورت زیر به دست می آید:

$$F''(x) + \lambda F(x) = 0, \qquad (5.9.1), \qquad T'' + \lambda c^2 T = 0, \quad (6.9.1)$$

در این حالت برای تعیین جواب بایستی از یک شرط مرزی و کراندار بودن جواب در انتهای سمت راست استفاده کنیم. چون

$$u(0,t) = 0 \quad => F(0)G(t) = 0 \quad => F(0) = 0, \quad (7.9.1)$$

در نتیجه داریم:

$$F''(x) + \lambda F(x) = 0, \qquad F(0) = 0$$

در نتیجه با توضیحاتی مانند بحث قبلی نتیجه می شود که:

$$F_\omega = b_\omega \sin(\omega x), \qquad (8.9.1)$$

چون ارتعاش از حالت سکون آغاز شده است، در نتیجه:

$$u_t(x,0) = F(x)G'(0) = 0 \quad => G'(0) = 0, \qquad (9.9.1)$$

بنابراین مسئله برای تابع $G(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$G'' + c^2\omega^2 G = 0, \qquad (10.10.1), \quad G'(0) = 0$$

بنابراین به ازا هر $\omega \geq 0$ تابع ،

$$u_\omega(x,t) = b_\omega \sin(\omega x)\cos(c\omega t), \qquad (11.9.1)$$

در معادله موج و شرط مرزی و شرط اولیه صدق می کند. برای انکه این تابع در شرط $u(x,0) = f(x)$ صدق کند از خاصیت بر همنهی استفاده می کنیم:

$$u(x,t) = \int_0^\infty u_\omega(x,t)d\omega = \int_0^\infty b_\omega \sin(\omega x)\cos(c\omega t)\, d\omega, \qquad (12.9.1)$$

بنابراین

$$u(x,0) = \int_0^\infty b_\omega \sin(\omega x)\, d\omega = f(x), \qquad (13.9.1)$$

در نتیجه بایستی که:

$$b_\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\alpha)\sin(\alpha\omega)\, d\alpha, \qquad (14.9.1)$$

این ضریب انتگرال فوریه تابع $f(x)$ روی بازه $[0,\infty)$ است. این جواب مسئله با شرط سرعت اولیه صفر است. با توضیحاتی مشابه این در حالتی که تغیر مکان اولیه برابر صفر باشد، $f(x)=0$ ، وسرعت اولیه مخالف صفر ، $u_t(x,0)=g(x)$، مسئله به راحتی قابل حل است.

مثال1.9.1

مسئله زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad 0\le x<\infty,\quad t>0,\qquad (15.9.1)$$

$$u(0,t)=0,\quad t\ge 0,\quad (16.9.1)\qquad u_t(x,0)=g(x),\qquad (17.9.1)\quad 0\le x<\infty$$

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x) & 0\le x\le 4\\ 0 & x>4\end{cases},\qquad (18.9.1)$$

برای جواب لازم است ابتدا ضرایب را محاسبه کنیم:

$$b_\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\alpha)\sin(\omega\alpha)\,d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^4 \sin(\pi\alpha)\sin(\omega\alpha)\,d\alpha$$

$$=8\sin(\omega)\cos(\omega)\frac{2cos^2(\omega)-1}{\omega^2-\pi^2},\qquad (19.9.1)$$

بنابراین جواب به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\int_0^\infty 8\sin(\omega)\cos(\omega)\frac{2cos^2(\omega)-1}{\omega^2-\pi^2}\sin(\omega x)\cos(4\omega t)\,d\omega,\qquad (20.9.1)$$

1.9.1. حل معادله با استفاده از تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی

در این حالت از تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی برای حل معادله استفاده می کنیم. در این حالت فرض می کنیم که تغییر مکان اولیه ، $f(x)$ مساوی صفر ولی سرعت اولیه مخالف صفر باشد، $g(x)\neq 0$. مسئله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x < \infty, \quad t > 0, \qquad (21.9.1)$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \ge 0, (22.9.1)$$

$$u(x,0) = 0 \;\; (23.9.1), \;\; u_t(x,0) = g(x), \quad (24.9.1)\; 0 \le x < \infty$$

در این حالت اگر x به عنوان متغییر و t به عنوان پارامتر در نظر گرفته می شود. با توجه به شرایط مسئله (وجود $u(0,t)$ در داده های مسئله) تبدیل فوریه سینوسی را می توان روی متغییر x به کار می بریم. در صورتی که در داده های اولیه مسئله $u_x(0,t)$ وجود داشته باشد از تبدیل فوریه کسینوسی روی متغیر x استفاده می شود. تبدیل فوریه سینوسی را روی معادله به کار می بریم:

$$F_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = c^2 F_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right], \qquad (25.9.1)$$

$$F_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\widehat{u_s}(\omega,t), \qquad (26.9.1)$$

$$F_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = -c^2\omega^2\widehat{u_s}(\omega,t) + \omega c^2 u(0,t) = -c^2\omega^2\widehat{u_s}(\omega,t), \qquad (27.9.1)$$

بنابراین معادله تبدیل یافته به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 \widehat{u_s}(\omega,t)}{\partial t^2} + c^2\omega^2\widehat{u_s}(\omega,t) = 0, \qquad (28.9.1)$$

جواب عمومی مسئله به صورت زیر است:

$$\widehat{u_s}(\omega,t) = a_\omega \cos(\omega c t) + b_\omega \sin(\omega c t), \qquad (29.9.1)$$

در نتیجه،

$$a_\omega = \widehat{u_s}(\omega,0) = F_s[u(x,0)](\omega) = F_s[0] = 0, \quad (30.9.1)$$

و

$$\frac{\partial \widehat{u_s}}{\partial t}(\omega,0) = \omega c b_\omega = \widehat{g_s}(\omega), \qquad => \qquad b_\omega = \frac{1}{\omega c}\widehat{g_s}(\omega), \qquad (32.9.1)$$

در نتیجه تبدیل سینوسی جواب مسئله به صورت زیر به دست می آید:

$$\widehat{u_s}(\omega,t) = \frac{1}{\omega c}\widehat{g_s}(\omega)\sin(\omega c t), \qquad (33.9.1)$$

جواب مسئله با گرفتن تبدیل معکوس سینوسی به دست می آید:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\omega c}\widehat{g_s}(\omega)\sin(\omega x)\sin(\omega c t)d\omega, \qquad (34.9.1)$$

اگر در داده های مسئله به جای سرعت اولیه تغییر مکان اولیه داده شود و سرعت اولیه برابر صفر باشد ، مجددا مسئله با روش مشابهی حل خواهد شد. اگر به جای شرط مرزی $u(0,t)$ شرط $u_x(0,t)$ داده شود در این صورت به جای تبدیل سینوسی فوریه از تبدیل فوریه کسینوسی استفاده می شود. در حالتی که در مسئله هم تغییر مکان اولیه و هم سرعت اولیه مخالف صفر باشد جواب مسئله به صورت مجموع جواب های دو حالت فوق خواهد بود.

10.1 مسائل

در مسائل 1 تا 5 معادله موج را روی نیم خط با c و تغییر مکان و سرعت اولیه داده شده حل کنید. ابتدا روش جدا پذیری را در نظر بگیرید و سپس ار تبدیلات فوریه استفاده نمایید:

-1

$$c = 3, \quad g(x) = 0, \quad f(x) = \begin{cases} x(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

-2

$$c = 3, \quad f(x) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 4 \\ 2 & 4 < x \le 11 \\ 0 & 11 < x \end{cases}$$

-3

$$c = 2, f(x) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} \cos(x) & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \\ 0 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \quad x > \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

-4

$$c = 6, \quad f(x) = -2e^{-x}, \quad g(x) = 0$$

-5

$$c = 14, \quad f(x) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} x^2(3-x) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

11.1 روش تبدیل لاپلاس

روش لاپلاس یکی دیگر از روشهایی است که برای حل معادله موج چه بر بازه های محدود و یا روی بازه های نیم متناهی می توان استفاده کرد. در این جا به حل مسئله در دو حالت می پردازیم.

مسئله در حالت نیم متناهی

مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A \qquad x > 0, \ t > 0, \quad (1.11.1)$$

$$u(x,0) = 0, (2.11.1), \quad u_t(x,0) = 0, \quad (3.11.1), \qquad x \geq 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.11.1)$$

که در آن A مقدار ثابت و مثبت است. چون خط از سمت راست بی کران است، شرط

$$lim_{x\to\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0, \qquad (5.11.1)$$

را نیز در نظر می گیریم.

این مسئله یک تار نامتناهی واقع روی قسمت مثبت محور نامنفی را مدلسازی می کند که از سمت چپ ثابت شده می باشد. تار به سمت پایین کشیده می شود و سپس تحت نیروی ثابت A رها می گردد.

تبدیل لاپلاس را روی متغییر t معادله موج به کار می بریم. در این روش متغییر x یک متغییر مستقل از t است. در این صورت خواهیم داشت:

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = L\left(c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A\right) = c^2 L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - L(A), \quad (6.11.1)$$

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = s^2 L[u(x,t)] - su(x,0) - u_t(x,0) = s^2 U(x,s), \quad (7.11.1)$$

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2}, (8.11.1) \qquad L(A) = \frac{A}{s}, \qquad (9.11.1)$$

بنابراین معادله تبدیل یافته به صورت زیر خواهد بود:

$$s^2 U(x,s) = c^2\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - \frac{A}{s}$$

$$\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2}U(x,s) = \frac{A}{c^2 s}, \qquad (10.11.1)$$

این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیر همگن است. جواب عمومی معادله شامل جماب عمومی معادله همگن به اضافه یک جواب خصوصی معادله غیر همگن است. چون طرف دوم معادله نسبت به متغییر x ثابت است بنابراین جواب خصوصی معادله غیر همگن نیز مقداری ثابت نسبت به متغییر x خواهد بود. قرار می دهیم:

$$U_P(x,s) = k, \qquad (11.11.1)$$

با قرار دادن این تابع در معادله مقدار k را محاسبه خواهیم کرد.

$$-\frac{s^2}{c^2}k = \frac{A}{c^2 s} \quad => k = -\frac{A}{s^3}, \qquad (12.11.1)$$

و جواب عمومی معادله همگن عبارت است از:

$$U_{gh}(x,s) = k_1 e^{\frac{sx}{c}} + k_2 e^{-\frac{sx}{c}}, \qquad (13.11.1)$$

بنابراین جواب مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$U_g(x,s) = U_{gh}(x,s) + U_P(x,s) = k_1 e^{\frac{sx}{c}} + k_2 e^{-\frac{sx}{c}} - \frac{A}{s^3}, \qquad (14.11.1)$$

برای محاسبه ضرایب نا معلوم k_2, k_1 از شرایط مسئله استفاده می کنیم. برای استفاده از شرط مرزی ابتدا بایستی تبدیل لاپلاس آن را محاسبه نماییم:

$$U(0,s) = L[u(0,t)] = L[0] = 0, \quad (15.11.1)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$k_1 + k_2 = \frac{A}{s^3}, \quad (16.11.1)$$

بنابراین:

$$U(x,s) = k_1 e^{\frac{sx}{c}} + \left(\frac{A}{s^3} - k_1\right) e^{-\frac{sx}{c}} - \frac{A}{s^3}, \quad (17.11.1)$$

اکنون از حد شرط مرزی استفاده می کنیم. ابتدا تبدیل را روی این شرط اعمال می کنیم:

$$L\left[lim_{x\to\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right] = lim_{x\to\infty} L\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right] = lim_{x\to\infty} U'(x,s) = 0, \quad (18.11.1)$$

و از طرفی،

$$U'(x,s) = \frac{s}{c} e^{\frac{sx}{c}} - \frac{s}{c}\left(\frac{A}{s^3} - k_1\right) e^{-\frac{sx}{c}}, \quad (19.11.1)$$

چون وقتی $x \to \infty$ ، $e^{\frac{sx}{c}} \to \infty$ در نتیجه برای کراندار بودن جواب بایستی ضریب برابر با صفر باشد. بنابراین $k_1 = 0$. در نتیجه داریم:

$$U(x,s) = \left(\frac{A}{s^3}\right) e^{-\frac{sx}{c}} - \frac{A}{s^3}, \quad (20.11.1)$$

جواب تبدیل معکوس لاپلاس این تابع است:

$$u(x,t) = L^{-1}\left[\left(\frac{A}{s^3}\right) e^{-\frac{sx}{c}} - \frac{A}{s^3}\right], \quad (21.11.1)$$

$$L^{-1}\left[\frac{A}{s^3}\right] = \frac{A}{2} t^2, \quad (22.11.1)$$

و با استفاده از قضیه انتقال خواهیم داشت:

$$L^{-1}\left[\left(\frac{A}{s^3}\right) e^{-\frac{sx}{c}}\right] = \frac{A}{2}\left(t - \frac{x}{c}\right)^2 H\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad (23.11.1)$$

که در آن $H(x)$ تابع هویساید می باشد. بنابراین جواب عبارت است از:

$$u(x,t) = \frac{A}{2}\left(t - \frac{x}{c}\right) H\left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{A}{2} t^2, \quad (24.11.1)$$

چون

$$\left(t-\frac{x}{c}\right)H\left(t-\frac{x}{c}\right)=\begin{cases}0 & x>ct\\ \left(t-\frac{x}{c}\right)^2 & x\le ct\end{cases},\qquad (25.11.1)$$

در این صورت

$$u(x,t)=\begin{cases}-\frac{At^2}{2} & x>ct\\ \frac{A}{2}\frac{x^2}{c^2}-\frac{A}{2}xt & x\le ct\end{cases},\qquad (26.11.1)$$

مسائل 1.11.1

1- با استفاده از تبدیل لاپلاس جوال مسئله زیر را به دست آورید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+K\qquad x>0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\quad x>0$$

$$u(0,t)=f(t),\ \ lim_{x\to\infty}u(x,t)=0,\quad t\ge 0$$

2- با استفاده از تبدیل لاپلاس مسئله مقدار مرزی زیر را حل کنید:

$$9\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=0\qquad x>0,\qquad t>0$$

$$u(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\quad x>0,\quad u(2,t)=f(t)$$

$$u(0,t)=0,\ \ lim_{x\to\infty}u(x,t)=0,\quad t\ge 0$$

3- مسئله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-At\qquad x>0,\ \ t>0,\quad A=const$$

$$u(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\quad x>0$$

$$u(0,t)=f(t),\ \ lim_{x\to\infty}u(x,t)=0,\quad t\ge 0$$

4- از تبدیل لاپلاس استفاده کنید و نشان دهید تابع

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)]$$

جواب مسئله زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x > 0, \ \ t > 0$$

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x > 0$$

$$u(0,t) = f(t), \ \ lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0, \quad t \geq 0$$

5- مسئله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Axt \qquad x > 0, \ \ t > 0, \quad A = const$$

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x > 0$$

$$u(0,t) = e^{-t}, \ \ lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0, \quad t \geq 0$$

12.1 روش دالامبر

در این بخش روش دالامبر را برای حل معادله موج به کار می بریم.

مسئله زیر را در نظر می گیریم:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad (1.12.1)$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad (2.12.1)$$

$$u_t(x,0) = g(x), \qquad (3.12.1)$$

برای به دست آوردن جواب تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم:

$$z = x + ct, \quad v = x - ct, \quad (4.12.1)$$

$$x = \frac{1}{2}(z + v), \quad t = \frac{1}{2c}(z - v), \quad (5.12.1)$$

$$u(x, t) = u\left(\frac{1}{2}(z + v), \frac{1}{2c}(z - v)\right) = U(z, v), \quad (6.12.1)$$

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} U(z, v) = U_z z_t + U_v v_t = c(U_z - U_v)$$

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}[c(U_z - U_v)] = c[U_{zz} z_t + U_{zv} v_t + U_{vz} z_t + U_{vv} v_t]$$

$$= c^2[U_{zz} - 2U_{zv} + U_{vv}], \quad (7.12.1)$$

به طور مشابه:

$$u_{xx} = [U_{zz} + 2U_{zv} + U_{vv}], \quad (8.12.1)$$

با قرار دادن روابط (7.12.1) و (7.12.1) در معادله اصلی ارتعاش خواهیم داشت:

$$U_{zv} = 0, \quad (9.12.1)$$

از رابطه (9.12.1) نسبت به z انتگرال می گیریم . چون مشتق U_v نسبت به متغیر z برابر با صفر است بنابراین U_v مستقل از z است.

$$U_v = \int U_{zv}\, dz = \int \frac{\partial}{\partial z}(U_v)\, dz = w(v), \quad (10.12.1)$$

اکنون از U_v نسبت به v انتگرال گیری می کنیم:

$$U(z, v) = \int U_v dv = \int w(v) dv = p(v) + q(z), \quad (11.12.1)$$

متغیر ها را به متغیر های x, t بر می گردانیم:

$$u(x,t) = U(z,v) = p(v) + q(z) = p(x+ct) + q(x-ct), \quad (12.12.1)$$

برای به دست آوردن جواب مسئله ، بایستی توابع q,p را برحسب شرایط اولیه به دست آورد. از روی شرایط (2.12.1) و (3.12.1) خواهیم داشت:

$$p(x) + q(x) = f(x), \qquad (13.12.1)$$

$$cp'(x) - cq'(x) = g(x), \ , \quad (14.12.1)$$

از رابطه (14.12.1) در فاصله $[0,x]$ انتگرالگیری می کنیم:

$$\int_0^x \big(p'(\omega) - q'(\omega)\big) d\omega = \frac{1}{c}\int_0^x g(\omega) d\omega$$

$$p(x) - p(0) - q(x) + q(0) = \frac{1}{c}\int_0^x g(\omega) d\omega$$

$$p(x) - q(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(\omega) d\omega + p(0) - q(0)$$

$$= \frac{1}{c}\int_0^x g(\omega) d\omega + k, \ \ k = p(0) - q(0), \ \ (15.12.1)$$

از روابط زیر می توان مقادیر $q(x), p(x)$ را بر حسب $g(x), f(x)$ محاسبه کرد.

$$p(x) + q(x) = f(x)$$

$$p(x) - q(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(\omega) d\omega + k$$

$$p(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(\omega) d\omega + \frac{k}{2}, \quad (16.12.1)$$

$$q(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(\omega)d\omega - \frac{k}{2}, \quad (17.12.1)$$

چون

$$u(x,t) = p(x+ct) + q(x-ct)$$

$$= \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(\omega)d\omega + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(\omega)d\omega - \frac{k}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\omega)d\omega, \quad (18.12.1)$$

اکنون برای حالت های مختلف طولهای متناهی، نیم متناهی و نامتناهی بحث خواهیم کرد.

1.12.1. شرایط مرزی

مسئله این است که جواب به دست آمده در رابطه (18.12.1) تا زمانی که $[x-ct, x+ct]$ در دامنه g, f قرار می گیرد، رابطه (18.12.1) معنی دار است. پس در حالتی که دامنه g, f تمام اعداد حقیقی باشد جواب (18.12.1) مشکلی ندارد. ولی اگر دامنه این توابع کل اعداد حقیقی نباشد لازم است ملاحظاتی را در نظر بگیریم. در این حالات باید از شرایط مرزی استفاده کنیم تا جواب مسئله به دست آید.

طول نامتناهی

اگر $-\infty < x < \infty$ توابع g, f بر کل اعداد حقیقی تعریف می شود. در این حالت جواب (18.12.1) با معنی است:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\omega)d\omega, \quad (19.12.1)$$

طول نیم متناهی

اگر g, f به ازا $x \geq 0$ تعریف شده باشد، در این صورت جواب (18.12.1) خوش تعریف نیست. وقتی $c > 0, t > 0$ آنگاه $f(x-ct)$ به ازا $x - ct < 0$ و یا $\mathrm{t} > \frac{x}{c}$ تعریف نشده است. این مشکل روی انتگرال تابع g نیز(جایی که تابع g تعریف نشده است) تاثیر دارد.

شرایط مرزی در این حالت به دو صورت اتفاق می افتد:

$$1)\ u(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \qquad 2)\ u_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0$$

<u>انتهای ثابت</u>

اگر انتهای تار ثابت باشد، $u(0,t) = 0$ ، پس:

$$0 = u(0,t) = p(ct) + q(-ct), \qquad (20.12.1)$$

با قرار دادن $\omega = -ct$، داریم:

$$q(\omega) = -p(-\omega), \qquad \omega \leq 0, \qquad (21.12.1)$$

با این رابطه تابع q برای مقادیر منفی هم تعریف می شود. به همین ترتیب تابع p هم برای مقادیر منفی هم تعریف می شود. اگر $\omega = ct$،

$$p(-\omega) = -q(\omega), \quad (22.12.1)$$

از معادلات (16.12.1) و (17.12.1) و استفاده کرده و با توجه به رابطه (21.6.1) خواهیم داشت:

$$q(\omega) = \frac{1}{2}f(\omega) - \frac{1}{2c}\int_0^{\omega} g(s)ds, \qquad (23.12.1)$$

$$-p(-\omega) = -\frac{1}{2}f(-\omega) - \frac{1}{2c}\int_0^{-\omega} g(s)ds$$

$$-\frac{1}{2}f(-\omega) + \frac{1}{2c}\int_0^{\omega} g(-s)ds, \qquad (24.12.1)$$

با استفاده از روابط (23.12.1) و (24.12.1)، برای بر قراری (21.12.1) باید داشته باشیم:

$$p(\omega) = -p(-\omega), \quad q(\omega) = -q(-), \qquad (25.12.1)$$

به عبارت دیگر باید توابع g, f حول $x = 0$ به صورت تابع فرد گسترش داده شود.

اگر انتهای تار آزاد باشد، $u_x(0,t) = 0, \ \ t \geq 0$ داریم:

$$0 = u_x(0,t) = p'(ct) + q'(-ct), \quad (26.12.1)$$

با قرار دادن $\omega = -ct$ و باز نویسی معادله داریم:

$$q'(\omega) = -p'(\omega), \quad \omega \leq 0, \qquad (27.12.1)$$

از معادلات (16.12.1) و (17.12.1) استفاده می کنیم و $q'(\omega), p'(-\omega)$ را تشکیل می دهیم:

$$q'(\omega) = \frac{1}{2}f'(\omega) - \frac{1}{2c}g(\omega), \qquad (28.12.1)$$

$$-p'(-\omega) = -\frac{1}{2}f'(-\omega) - \frac{1}{2c}g(-\omega), \qquad (29.12.1)$$

با توجه به این دو عبارت می بینیم که رابطه (27.12.1) برقرار است اگر:

$$f'(\omega) = -f'(-\omega), \quad g(\omega) = -g(-\omega), \quad (30.12.1)$$

این بدین معنی است که تابع f' باید حول $\mathrm{x} = 0$ تابعی فرد است. پس از روابط (30.12.1) نتیجه می شود که g, f حول $x = 0$ توابعی زوجند.

<u>طولهای متناهی</u>

تار با طول l مفروض است. بنابراین تا زمانیکه $0 \leq x - ct, x + ct \leq l$،

اگر $u(0,t) = 0$ خواهیم داشت:

$$0 = u(0,t) = p(ct) + q(-ct)$$

و اگر $u_x(0,t) = 0$ خواهیم داشت:

$$0 = u_x(0,t) = p'(ct) + q'(-ct)$$

یا به عبارتی برای انتهای ثابت، $u(0,t) = 0$، در $x = 0$

$$q(\omega) = -p(-\omega), \quad \omega \leq 0, \quad (31.12.1)$$

و برای انتهای آزاد، $u_x(0,t) = 0$، در $x = 0$،

$$q'(\omega) = -p'(-\omega), \quad \omega \leq 0, \quad (32.12.1)$$

همین مسئله را برای انتهای $x = l$ درنظر می گیریم:

<u>شرایط در</u> $x = l$

شرط در $x = l$ به صورت $u(l,t) = 0$ داده می شود. پس،

$$0 = u(l,t) = p(l+ct) + q(l-ct), \quad (33.12.1)$$

با قرار دادن $\omega = l + ct$، معادله به صورت زیر باز نویسی می شود:

$$p(\omega) = -q(2l-\omega), \quad \omega \geq l, \quad (34.12.1)$$

این معادله برد تابع p را به $l \leq \omega \leq 2l$ افزایش می دهد. با استفاده از معادلات (16.12.1) و (17.12.1) برای q, p داریم:

$$p(\omega) = \frac{1}{2}f(\omega) + \frac{1}{2c}\int_0^{\omega} g(s)ds, \quad (35.12.1)$$

$$-q(2l-\omega) = -\frac{1}{2}f(2l-\omega) + \frac{1}{2c}\int_0^{2l-\omega} g(s)ds$$

$$= -\frac{1}{2}f(2l-\omega) - \frac{1}{2c}\int_{2l}^{\omega} g(2l-\omega)d\omega, \qquad (36.12.1)$$

از مقایسه این دو عبارت می بینیم که رابطه (34.12.1) وقتی برقرار خواهد بود که داشته باشیم:

$$f(2l-\omega) = -f(\omega), \qquad (37.12.1)$$

$$\int_0^{\omega} g(s)ds = -\int_{2l}^{\omega} g(2l-\omega)d\omega, \qquad (38.12.1)$$

با مشتقگیری از رابطه (38.12.1) نسبت به ω داریم:

$$g(2l-\omega) = -g(\omega), \qquad (39.12.1)$$

از این روابط روی g, f نتیجه می شود که دامنه این توابع به $l \leq \omega \leq 2l$ افزایش می یابد و در این فاصله توابع حول $x = l$ به صورت یک تابع فرد گسترش می یابد. این و ضعیت بسیار مشابه وضعیت برای نقطه نقطه ثابت در $x = 0$ است.

<u>نقطه ثابت</u>

برای حالت نقطه آزاد در $x = l$، $u_x(l,t) = 0$، بنابراین داریم:

$$0 = u_x(l,t) = p'(l_{ct}) + q'(l-ct), \qquad (40.12.1)$$

با قرار دادن $\omega = l + ct$، این معادله را می توان به صورت زیر نوشت:

$$p'(\omega) = -q'(2l-\omega), \quad \omega \geq l, \qquad (41.12.1)$$

با استفاده از (161.12.1) و (17.12.1) برای توابع q, p خواهیم داشت:

$$p'(\omega) = \frac{1}{2}f'(\omega) + \frac{1}{2c}g(\omega), \qquad (42.12.1)$$

$$-q'(2l-\omega)=-\frac{1}{2}f'(2l-\omega)+\frac{1}{2c}g(2l-\omega), \quad (43.12.1)$$

از مقایسه این عبارات نتیجه می شود که رابطه (32.12.1) وقتی برقرار است اگر

$$f'(\omega)=-f'(2l-\omega), \quad g(\omega)=g(2l-\omega), \quad (44.12.1)$$

این بدین معنی است که لازمست f' تابعی فرد نسبت به $x=l$ باشد. بنابراین g,f توابعی زوج نسبت به $x=l$هستند.

جمعبندی

اگر کلیه حالات را در نظر بگیریم، دو انتهای تار ثابت باشد، دو انتها آزاد باشد، یک انتها ثابت و یک انتها آزاد باشد، در این صورت برای هر حالت نتایجی که روی توابع g,f خواهیم داشت به صورت زیر است:

1- دو انتهای ثابت:

$$f(x)=-f(-x), \quad -l\le x\le 0, \quad f(x)=-f(2l-x), \quad l\le x \le 2l, \quad (45.12.1)$$

بنابراین:

$$f(x+2l)=-f\big(2l-(x+2l)\big)=-f(-x)=f(x)$$

در نتیجه لازمست g,f به صورت توابع فرد متناوب با دوره تناوب $2l$ گسترش داده شود.

2- دو انتهای آزاد

دراین شرایط داریم:

$$f(x)=f(-x), \quad -l\le x\le 0, \quad f(x)=f(2l-x), \quad l<x \le 2l, \quad (46.12.1)$$

بنابراین:

$$f(x+2l)=f\big(2l-(x+2l)\big)=f(-x)=f(x)$$

در نتیجه لازمست g,f توابع زوج متناوب با دوره تناوب $2l$ گسترش داده شود.

3- یک انتهای ثابت و یک انتها ی آزاد

درحالت اول فرض کنیم که $u_x(l,t)=0,\ u(0,t)=0$. بنابراین در $x=0$ تار ثابت و در $x=l$ تار آزاد است. چون در انتهای چپ تار ثابت است در نتیجه توابع g,f بایستی گسترش زوج داده شود و توابع گسترش داده شده بایستی دارای دوره تناوب $2l$ باشند. اما در نقطه انتهایی راست ، $x=l$، چون تار آزاد است بایستی توابع g,f گسترش زوج داده شوند و ضمنا دارای دوره تناوب $2l$ باشند

$$f(x)=-f(-x),\quad -l\le x\le 0,\qquad f(x)=f(2l-x),\quad l\le x\le 2l,\qquad (47.12.1)$$

و بالعکس اگر تار در $x=0$ آزاد و در $x=l$ ثابت باشد، باید در سمت چپ گسترش زوج و در راست گسترش فرد در نظر گرفته شود:

$$f(x)=f(-x),\quad -l\le x\le 0,\qquad f(x)=-f(2l-x),\quad l\le x\le 2l,\qquad (48.12.1)$$

مثال1:

مطلوبست حل مسئله زیر:

$$u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<1,t>0$$
$$u(x,0)=1,\quad 0\le x\le 1$$
$$u_t(x,0)=sin^3\pi x,\ \ 0\le x\le 1$$
$$u_x(0,t)=u_x(1,t)=0$$

مطلوبست محاسبه $u(\frac{1}{2},2)$

حل:

$$F(x)=F(-x),\quad -1\le x<0,\ \ F(x+2)=F(x),\quad 1\le x<2$$

$$u\left(\frac{1}{2},2\right)=\frac{1}{2}\left[F\left(\frac{5}{2}\right)+F\left(-\frac{3}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}G(s)ds$$

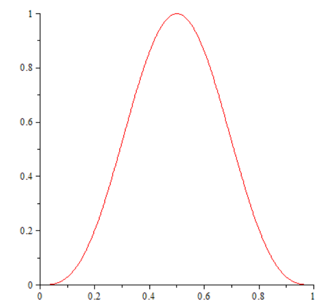
که در آن G,F گسترش های زوج توابع g,f حول نقاط انتهایی$x=1,x=0$ می باشند. دوره تناوب این توابع 2 می باشد .

$$F(x) = 1, \quad G(x) = |sin^3\pi x|$$

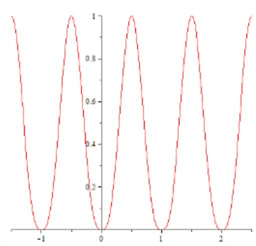
بنابراین در گسترش زوج تابع داریم:

$$G(x) = \begin{cases} sin^3\pi x, & 0 < x < 1 \\ -sin^3\pi x, & -1 < x < 0 \\ -sin^3\pi x, & 1 < x < 2 \\ sin^3\pi x, & -2 < x < -1 \\ sin^3\pi x, & 2 < x < 3 \\ -sin^3\pi x, & -3 < x < -2 \end{cases}$$

نمودار تابع $g(x) = sin^3\pi x$ در فاصله $[0,1]$ در شکل زیر نشان داده می شود.



نمودار تابع $G(x)$ به صورت زیر است.



بنابراین داریم:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} |sin^3\pi s|ds$$

$$= \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} |sin^3\pi s|ds$$

$$+ \int_{-1}^{0} |sin^3\pi s|ds + \int_{0}^{1} |sin^3\pi s|ds + \int_{1}^{2} |sin^3\pi s|ds$$

$$+ \int_{2}^{\frac{5}{2}} |sin^3\pi s|ds$$

$$= \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} sin^3\pi x dx$$

$$+ \int_{-1}^{0} -sin^3\pi x dx$$

$$+ \int_{0}^{1} sin^3\pi x dx + \int_{1}^{2} -sin^3\pi x dx + \int_{2}^{\frac{5}{2}} sin^3\pi x dx = \frac{16}{3\pi}$$

در نتیجه داریم:

$$u\left(\frac{1}{2}, 2\right) = 1 + \frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(s)ds = 1 + \frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} |sin^3\pi s|ds = 1 + \frac{8}{3\pi}$$

مثال 2:

مطلوبست محاسبه $u(\frac{1}{4}, 2)$ اگر:

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x < 1. t > 0$$

$$u(x, 0) = x(1 - x), \; u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \ge 0$$

طبق روش دالامبر جواب معادله به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[F\left(\frac{1}{4}+2\right)+F(\frac{1}{4}-2)\right]+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}-2}^{\frac{1}{4}+2}G(s)ds$$

چون شرایط مرزی روی تابع داده شده است، بایستی توابع $f(x)=u(x,0)$ و $g(x)=$ $u_t(x,0)$ حول نقاط انتهایی 1,0 دارای گسترش فرد باشند و دوره تناوب این گسترش ها برابر با 2 می باشد.این گسترش ها را با G,F نشان می دهیم ، پس داریم:

$$F(x)=-F(-x),\quad -1\leq x\leq 0,\quad F(x+2)=F(x),\quad 1\leq x<2$$

$$G(x)=-G(-x),\quad -1\leq x\leq 0,\quad G(x+2)=G(x),\quad 1\leq x<2$$

چون $g(x)=0$ در نتیجه $G(x)=0$ و خواهیم داشت:

$$\int_{x-t}^{x+t}G(s)ds=0$$

نمودار تابع $F(x)$ در فاصله $[-3,3]$ در زیر رسم شده است.

بنابراین:

$$u\left(\frac{1}{4},2\right)=\frac{1}{2}\left[F\left(\frac{1}{4}+2\right)+F(\frac{1}{4}-2)\right]$$

چون F تابعی متناوب با دوره تناوب 2 می باشد، در نتیجه:

$$F\left(\frac{1}{4}+2\right)=F\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}$$

$$F\left(\frac{1}{4}-2\right)=F\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}$$

$$u\left(\frac{1}{4},2\right)=\frac{3}{16}$$

مثال3:

مطلوبست محاسبه $u(\frac{3}{4},\frac{7}{2})$

$$u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<1, t>0$$
$$u(x,0)=x^2(1-x)^2,\quad 0\le x\le 1$$
$$u_t(x,0)=1,\ \ 0\le x\le 1$$
$$u_x(0,t)=u_x(1,t)=0$$

حل:

با توجه به شرایط مرزی توابع $f(x)=u(x,0)$ و $g(x)=u_t(x,0)$ در نقاط ابتدایی و انتهایی باید به صورت توابعی زوج و متناوب با دوره تناوب 2 گسترش داده می شود. گسترش این توابع را به ترتیب با $G(x), F(x)$ نشان می دهیم. بنابراین :

$$F(x)=F(-x),\quad -1\le x\le 0,\quad F(x+2)=F(x),$$
$$G(-x)=G(x),\ \ -1\le x\le 0,\qquad G(x+2)=G(x),$$

چون طبق روش دالامبر جواب به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[F(x+t)+F(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}G(s)ds$$

بنابراین

$$f(x)=x^2(1-x)^{2,},\qquad g(x)=1,\quad -1\le x\le 1$$
$$G(x)=1$$

در نتیجه داریم:

$$u\left(\frac{3}{4},\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[F\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{2}\right)+F\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{4}-\frac{7}{2}}^{\frac{3}{4}+\frac{7}{2}}G(s)\,ds$$
$$=\frac{1}{2}\left[F\left(\frac{17}{4}\right)+F\left(-\frac{11}{4}\right)\right]+\frac{1}{2}\int_{-\frac{11}{4}}^{\frac{17}{4}}G(s)ds$$

در نتیجه:

$$\int_{-\frac{11}{4}}^{\frac{17}{4}} G(s)ds = \int_{-\frac{11}{4}}^{\frac{17}{4}} ds = \frac{17}{4} - \left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{28}{4} = 7$$

$$F\left(\frac{17}{4}\right) = F\left(2\times 2 + \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\times\frac{9}{16}$$

$$F\left(-\frac{11}{4}\right) = F\left(-2-\frac{3}{4}\right) = F\left(-\frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}\left(1-\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\frac{9}{16}\times\frac{1}{16}$$

در نتیجه:

$$u\left(\frac{3}{4},\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{16^2}+\frac{9}{16^2}\right)+\frac{7}{2} = \frac{9}{256}+\frac{7}{2} = \frac{905}{256}$$

بخش ($\mathbf{12.1}$) مسائل

در هر یک از مسائل 1 تا 6 جواب مسئله موج زیر را با استفاده از زوش دالامبر بنویسید:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx,}, \quad -\infty < x < \infty,\ \ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ \ u_t(x,0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

1- $g(x) = -x, \quad f(x) = x^2, \quad c = 1$

2- $g(x) = \cos(x), \quad f(x) = x^2 - 2x, \quad c = 4$

3- $g(x) = 1 - x^2, \quad f(x) = \cos(\pi x), \quad c = 7$

4- $g(x) = x^2, \quad f(x) = \sin(2x), \quad c = 5$

5- $g(x) = x, \quad f(x) = e^x, \quad c = 14$

1.2 حل مسائل ارتعاش و انتقال حرارت روی پوسته ها

1- پوسته های مستطیل شکل

2- پوسته های مستدیر

1.1.2 حل مسئله ارتعاش روی پوسته های مستطیل شکل

معادله ارتعاش روی یک پوسته مستطیل شکل به صورت زیر است:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < a, \; 0 < y < b, t > 0 \quad (1.1.2)$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad (2.1.2), \quad u(a, y, t) = 0, \; 0 \le y \le b, t \ge 0, \quad (3.1.2)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \; (4.1.2), \; u(x, b, t) = 0, \quad 0 \le x \le a, \quad t \ge 0, \quad (5.1.2)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, (6.1.2),$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y), \quad 0 \le x \le a, \; 0 \le y \le b, \; (7.1.2)$$

نظیر حالت یک بعدی برای حل مسئله هم می توان از روش جداپذیری و هم از روش تبدیلات استفاده کرد. در اینجا مسئله را با روش جداپذیری مسئله را حل می کنیم. قرار می دهیم:

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t), \quad (8.1.2)$$

فرمول فوق را در معادله (1.1.2) قرار می دهیم، نتیجه می شود:

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{F''}{F} + \frac{G''}{G}, \quad (9.1.2)$$

$$\frac{T''}{c^2T} - \frac{G''}{G} = \frac{F''}{F} = k, \quad (10.1.2)$$

مانند حالت یک بعدی چون متغیر های دو طرف رابطه فوق مجزا هستند این نسبت باید مقداری ثابت باشد، در نتیجه این نسبت را با k نشان می دهیم و بر حسب مقادیر مختلف k بحث خواهیم کرد تا به مقدار مخالف صفری برای تابع F برسیم. مشابه حالت یک بعدی نتیجه می شود که فقط از حالت $k < 0$ به نتیجه مخالف صفر خواهیم رسید.

$$k = -p^2, \quad p > 0, \quad (11.1.2)$$

$$F'' + p^2F = 0, \quad (12.1.2)$$

از رابطه (2.1.2) و (3.1.2) نتیجه می شود که:

$$X(0) = 0, \quad (13.1.2), \quad X(a) = 0, \quad (14.1.2)$$

از معادلات (12.1.2) تا (14.1.2) نتیجه می شود که:

$$p = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1,2, \dots., \quad (15.1.2)$$

$$X(x) = X_n(x) = sin\frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1,2, \dots., \quad (16.1.2)$$

رابطه (15.1.2) را در(10.1.2) قرار می دهیم:

$$\frac{T''}{c^2T} - p^2 = \frac{Y''}{Y} = \alpha, \quad (17.1.2)$$

مجددا بر حسب مقادیر مختلف α بحث می شود تا جواب مخالف صفری برای تابعG به دست آورد. مشابه بحث قبلی نتیجه می شود که:

$$\alpha = -q^2, \quad q > 0, \quad (18.1.2)$$

$$q = \frac{m\pi}{b}, \quad m = 1,2, \dots, \quad (19.1.2)$$

$$Y(y) = Y_m(y) = sin\frac{m\pi}{b}y, \quad m = 1,2, \dots., \quad (20.1.2)$$

رابطه (20.1.2) را در رابطه (17.1.2) قرار می دهیم، خواهیم داشت:

$$T''(t) + c^2\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2} + \frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)T(t) = 0, \quad (21.1.2)$$

برای سادگی قرار می دهیم:

$$\lambda_{nm}^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2} + \frac{m^2\pi^2}{l^2}, \quad (22.1.2)$$

در نتیجه داریم:

$$T(t) = T_{nm}(t) = A_{nm}\cos(\lambda_{nm}t) + B_{nm}\sin(\lambda_{nm}t), \quad (23.1.2)$$

در نتیجه داریم:

$$u_{nm}(x,y,t) = (A_{nm}\cos(\lambda_{nm}t) + B_{nm}\sin(\lambda_{nm}t))\, sin\frac{m\pi}{b}y\, sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$n = 1,2, \dots, m = 1,2, \dots.., \quad (24.1.2)$$

به ازا هر $n = 1,2, \dots, m = 1,2, \dots.$, تابع $u_{nm}(x, y, t)$ در معادلات (1.1.2) تا (5.1.2) صدق می کند . برای بر قراری روابط (6.1.2) و (7.1.2) باید از خاصیت برهمنهی استفاده نماییم:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(x, y, t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} \cos(\lambda_{nm} t) + B_{nm} \sin(\lambda_{nm} t)) \, sin \frac{m\pi}{b} y \, sin \frac{n\pi}{a} x, \qquad (25.1.2)$$

برای محاسبه ضرایب از فرمولهای (6.1.2) و (7.1.2) استفاده می کنیم:

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \, sin \frac{m\pi}{b} y \, sin \frac{n\pi}{a} x = f(x, y), \quad (26.1.2)$$

بنابراین داریم:

$$A_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) sin \frac{m\pi}{b} y \, sin \frac{n\pi}{a} x dx dy, \qquad (27.1.2)$$

$$B_{nm} = \frac{4}{ab\lambda_{nm}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) sin \frac{m\pi}{b} y \, sin \frac{n\pi}{a} x dx dy, \qquad (28.1.2)$$

2.1.2 حل مسئله روی پوسته های مستدیر

برای بررسی مسئله ارتعاش روی پوسته های مستدیر معادله ارتعاش را در دستگاه مختصات قطبی در نظر می گیریم:

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right), \qquad (1.2.1.2)$$

در حالت اول فرض می کنیم که تابع $u(r, \theta, t)$ به θ بستگی نداشته باشد . در نتیجه معادله ارتعاش به صورت زیر خواهد بود:

$$u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right), \quad (2.2.1.2)$$

اگر پوسته را با مرکز مبدا مختصات و شعاع R در نظر بگیریم ، در نتیجه روی مرز پوسته هیچ گونه ارتعاشی در هیچ زمانی صورت نمی گیرد، بنابراین داریم:

$$u(r,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.2.1.2)$$

شرایط اولیه مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$u(r,0) = f(r), \quad (4.2.1.2), \quad u_t(r,0) = g(r), \quad (5.2.1.2)$$

برای حل مسئله از روش جداپذیری استفاده می کنیم:

$$u(r,t) = F(r)G(t), \quad (6.2.1.2)$$

پس از قرار دادن در معادله اصلی و تقسیم طرفین رابطه بر $c^2F(r)G(t)$ به رابطه زیر می رسیم:

$$\frac{\ddot{G}(t)}{c^2G(t)} = \frac{F''(r) + \frac{1}{r}F'(r)}{F(r)} = k, \quad (7.2.1.2)$$

روی مقادیر مختلف k بحث می کنیم و به دنبال جواب مخالف صفر برای تابع $F(r)$ هستیم. بنابراین حالات مختلف $k > 0, \quad k = 0, \quad k < 0$ را مورد بررسی قرار می دهیم.

حالت اول: $k > 0$ بدون انکه به کلیت امر خللی وارد شود قرار می دهیم $k = \omega^2, \quad \omega > 0$. در نتیجه سمت راست معادله (7.2.1.2) خواهد بود:

$$F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) - \omega^2F(r) = 0, \quad (8.2.1.2)$$

از شرط مرزی هم خواهیم داشت:

$$F(R) = 0, \quad (9.2.1.2)$$

معادله (8.2.1.2) همراه با شرط (9.2.1.2) تنها به جواب صفر خواهد رسید(عمل کنید و به نتیجه برسید).

حالت دوم : $k = 0$

در این حالت مسئله زیر را حل می کنیم:

$$F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) = 0, \qquad (10.2.1.2), \qquad F(R) = 0, \qquad (9.2.1.2)$$

$$\frac{F''(r)}{F'(r)} = -\frac{1}{r}, \qquad (11.2.1.2)$$

$$Ln|F'(r)| = -Ln|r| = Ln\left|\frac{1}{r}\right|$$

$$F'(r) = \frac{1}{r}, \qquad F(r) = cLn|r| + d, \qquad (12.2.1.2)$$

برای محاسبه ضرایب نامعلوم چون $lim_{r\to 0}Ln|r| = -\infty$ در نتیجه بایستی$c = 0$. از طرفی مقدار ثابت d از شرط مرزی استفاده می کنیم:

$$F(R) = d = 0 \quad => F(r) = 0, \ , \qquad (13.2.1.2)$$

حالت سوم: $k < 0$ قرار می دهیم: $k = -\omega^2, \quad \omega > 0$. در نتیجه معادله (7.2.1.2) به صورت زیر خواهد بود:

$$F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) + \omega^2 F(r) = 0, \qquad (14.2.1.2)$$

$$F(R) = 0, \qquad (9.2.1.2)$$

معادله (14.2.1.2) را به صورت زیر باز نویسی می کنیم:

$$r^2F''(r) + rF'(r) + r^2\omega^2F(r) = 0, \qquad (15.2.1.2)$$

به خاطر بیاورید که معادله بسل مرتبه ϑ به صورت زیر است:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \vartheta^2)y = 0$$

در حالتی که $\vartheta = 0$ معادله بسل مرتبه صفر به دست می آید که جوابهای آن توابع بسل مرتبه صفر نوع اول و دوم می باشد. این توابع با $Y_0(x),\ J_0(x)$ نشان داده می شود. جواب عمومی معادله بسل مرتبه صفر برابر است با $y = c_1J_0(x) + c_2Y_0(x)$. باید توجه داشت که تابع $Y_0(x)$ با میل کردن x به سمت صفر به منفی بی نهایت میل می کند.

به معادله (16.2.1.2) برمی گردیم. این معادله مشابه معادله بسل مرتبه صفر است، اما برای تبدیل به یک معادله بسل بایستی تغیر متغیری در نظر بگیریم تا ضریب ω^2 در معادله وجود نداشته باشد. تغیر متغیر زیر را در نظر می گیریم:

$$s = r\omega, \quad (16.2.1.2)$$

$$F(r) = F\left(\frac{s}{\omega}\right) = H(s), \quad (17.2.1.2)$$

دقت کنید که تابع $F\left(\frac{s}{\omega}\right)$ تابع مرکبی از s است که به عنوان تابع ساده ای از s از نماد $H(s)$ استفاده شده است. مشتقات موجود در معادله بر حسب r را به مشتق گیری بر حسب s تبدیل می کنیم:

$$\frac{d}{dr}F(r) = \frac{d}{dr}H(s) = \frac{d}{ds}H(s)\frac{ds}{dr} = \omega\dot{H}(s), \quad (18.2.1.2)$$

$$F''(r) = \frac{d}{dr}\big(F'(r)\big) = \frac{d}{dr}\Big(\omega\dot{H}(s)\Big) = \frac{d}{ds}\Big(\omega\dot{H}(s)\Big)\frac{ds}{dr}$$

$$= \omega\ddot{H}(s)\omega = \omega^2\ddot{H}(s), \quad (19.2.1.2)$$

با قرار دادن روابط (18.2.1.2), (19.2.1.2) در (15.2.1.2) معادله زیر را خواهیم داشت:

$$r^2F''(r) + rF'(r) + r^2\omega^2F(r) = \frac{s^2}{\omega^2}\omega^2\ddot{H}(s) + \frac{s}{\omega}\omega\dot{H}(s) + s^2H(s) = 0$$

$$s^2\ddot{H}(s) + s\dot{H}(s) + s^2H(s) = 0, \qquad (20.2.1.2)$$

معادله فوق معادله بسل مرتبه صفر است. بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$H(s) = c_1J_0(s) + c_2Y_0(s), \qquad (21.2.1.2)$$

متغیر را به r بر می گردانیم. خواهیم داشت:

$$H(s) = F(r) = c_1J_0(\omega r) + c_2Y_0(\omega r), \qquad (22.2.1.2)$$

چون روی پوسته $r \to 0$ در نتیجه $lim_{r\to 0}Y_0(\omega r) = -\infty$. بنابراین برای آنکه جواب بی کران نباشد بایستی که $c_2 = 0$. بنابراین:

$$F(r) = c_1J_0(\omega r), \qquad (23.2.1.2)$$

بااستفاده از شرط مرزی نتیجه می شود که$F(R) = 0$. برای برقراری این رابطه داریم:

$$c_1J_0(\omega R) = 0, \qquad (24.2.1.2)$$

اگر صفر های تابع بسل مرتبه صفر را با $j_1,\ j_2, j_3, \dots ..$ نشان دهیم که در رابطه

$$j_1 < j_2 < j_3 < \cdots \dots$$

در این صورت،

$$\omega \mathrm{R} = j_n, \quad n = 1,2, \dots . , \quad \omega = \omega_n = \frac{j_n}{R}$$

$$F(r) = F_n(r) = c_1J_0\left(\frac{j_n}{R}r\right), \quad n = 1,2, \dots \quad (25.2.1.2)$$

در رابطه فوق چون c_1 می تواند هر عدد مخالف صفری باشد و مقدار آن در جواب تاثیری ندارد برای راحتی آن را برابر با یک، $c_1 = 1$ در نظر می گیریم. به معادله (7.2.1.2) بر می گردیم و تابع $G(t)$ را محاسبه می کنیم:

$$G''(t) + c^2\omega^2G(t) = 0, \quad \omega = \omega_n = \frac{j_n}{R}, \qquad (26.2.1.2)$$

$$G(t) = G_n(t) = a_n cos\left(\frac{cj_n}{R}t\right) + b_n sin\left(\frac{cj_n}{R}t\right), n = 1,2, \dots \qquad (27.2.1.2)$$

در نتیجه به ازا هر $n = 1,2, \dots$،

$$u(r,t) = u_n(r,t) = \left(a_n cos\left(\frac{cj_n}{R}t\right) + b_n sin\left(\frac{cj_n}{R}t\right)\right) J_0\left(\frac{j_n}{R}r\right)$$

این توابع در معادله اصلی و شرط مرزی صدق می کند. چون هر کدام از توابع جواب معادله اصلی است و معادله نیز خصی ، همگن و با ضرایب ثابت است بنابراین از خاصیت برهمنهی استفاده می کنیم.

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos\left(\frac{cj_n}{R}t\right) + b_n sin\left(\frac{cj_n}{R}t\right)\right) J_0\left(\frac{j_n}{R}r\right), (28.2.1.2)$$

این جواب در معادله اصلی و شرط مرزی صدق می کند. ثابتهای باقیمانده را طوری محاسبه می کنیم تا شرایط اولیه نیز برقرار باشند:

$$u(r,0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n) J_0\left(\frac{j_n}{R}r\right), \qquad (29.2.1.2)$$

در اینجا لازم است در ارتباط با متعامد بودن توابع بسل مرتبه صفر یک یادآوری داشته باشیم:

قضیه:

توابع بسل مرتبه صفر $\{J_0(j_n x)\}$ بر حسب تابع وزن x بر بازه $[0,1]$ متعامدند، به عبارت دیگر:

$$\int_0^1 x J_0(j_n x) J_0(j_m x) dx = 0, \qquad (30.2.1.2)$$

با استفاده از این خاصیت تعامد می توان بسط توابع را بر حسب این توابع به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(j_n x), \quad (31.2.1.2) \quad c_n = \frac{\int_0^1 x f(x) J_0(j_n x) dx}{\int_0^1 x\, {J_0}^2(j_n x) dx}, \qquad (32.2.1.2)$$

بنابراین اگر در رابطه (29.2.1.2) قرار دهیم $s = \frac{r}{R}$ رابطه به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$f(sR) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n) J_0(j_n s), \qquad (29.2.1.2)$$

در نتیجه ضرایب به صورت زیر به دست می آیند:

$$a_n = \frac{2\int_0^1 sf(sR)J_0(j_n s)ds}{\int_0^1 sJ_0^2(j_n s)ds}, \qquad (30.2.1.2)$$

با روشی مشابه ضریب b_n محاسبه می شود:

$$u_t(r,0) = g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c j_n}{R} J_0\left(\frac{j_n}{R} r\right), \qquad (31.2.1.2)$$

با روشی مشابه ضریب b_n قابل محاسبه است:

$$b_n = \frac{2R}{cj_n} \frac{\int_0^1 sg(sR)J_0(j_n s)ds}{\int_0^1 sJ_0^2(j_n s)ds}, \qquad (32.2.1.2)$$

1.3 حل مسئله دیریکله روی یک دیسک

مسئله دیریکله را روی یک دیسک به مرکز مبدا و شعاع R حل می کنیم:

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0, \quad 0 \le r < R, \qquad -\pi \le \theta < \pi, \qquad (33.2.1.2)$$

$$u(R,\theta) = f(\theta), \quad -\pi \le \theta \le \pi, \qquad (34.2.1.2)$$

برای تعیین جواب بایستی دو شرط به مسئله اضافه کنیم تا جواب منحصر بفردی برای مسئله به دست آوریم. ابتدا فرض می کنیم که جواب بایستی کراندار باشد، یک شرط واقعی فیزیکی. شرط دوم شرط متناوب بودن:

$$u(r,\pi) = u(r,-\pi), \qquad (35.2.1.2), \qquad u_\theta(r,\pi) = u_\theta(r,-\pi), \qquad (36.2.1.2)$$

این شرایط به این دلیل است که مختصات قطبی یک نقطه را هم میتوان به صورت (r,π) و هم به صورت $(r,-\pi)$ در نظر گرفت.

معادله لاپلاس در دستگاه قطبی به ضورت زیر است:

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, \quad (37.2.1.2)$$

با قرار دادن $u(r,\theta)=F(r)G(\theta)$ در رابطه (37.2.1.2) خواهیم داشت:

$$\left(F''(r)+\frac{1}{r}F'(r)\right)G(\theta)=\frac{1}{r^2}F(r)\ddot{G}(\theta), \quad (38.2.1.2)$$

$$-\frac{F''(r)+\frac{1}{r}F'(r)}{\frac{1}{r^2}F(r)}=\frac{\ddot{G}(\theta)}{G(\theta)}=k, \quad (39.2.1.2)$$

از شرایط (35.2.1.2) و (36.2.1.2) نتیجه می شود که:

$$u(r,\pi)=u(r,-\pi) \;\; => F(r)G(\pi)=F(r)G(-\pi),$$

$$=> G(\pi)=G(-\pi), \quad (40.2.1.2)$$

$$u_\theta(r,\pi)=u_\theta(r,-\pi) \;\; => \; F(r)\dot{G}(\pi)=F(r)\dot{G}(-\pi),$$

$$=> \dot{G}(\pi)=\dot{G}(-\pi), \quad (41.2.1.2)$$

برای به دست آوردن جواب مخالف صفر و کراندار که در شرایط (35.2.1.2) و(36.2.1.2) صدق کند بر حسب مقادیر مختلف k بحث می کنیم.

$$k<0, \;\; k=0, \;\; k>0$$

حالت اول: $k>0$. بدون آنکه به کلیت امر خللی وارد شود قرار می دهیم $k=\omega^2, \quad \omega>0$. در این صورت معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\ddot{G}(\theta)+\omega^2G(\theta)=0, \quad (40.2.1.2)$$

$$G(\pi)=G(-\pi), \quad (40.2.1.2), \quad \dot{G}(\pi)=\dot{G}(-\pi), \quad (41.2.1.2)$$

این یک مسئله اشترم لیویل متناوب است.

$$G(\theta) = G_\omega(\theta) = a_\omega \cos(\omega\theta) + b_\omega \sin(\omega\theta), \quad (42.2.1.2)$$

$$\dot{G}(\theta) = -\omega a_\omega \sin(\omega\theta) + \omega b_\omega \cos(\omega\theta), \quad (43.2.1.2)$$

برای برقراری شرایط تناوب بایستی داشته باشیم:

$$a_\omega \cos(\omega\pi) + b_\omega \sin(\omega\pi) = a_\omega \cos(-\omega\pi) + b_\omega \sin(-\omega\pi) = a_\omega \cos(\omega\pi) - b_\omega \sin(\omega\pi), \quad => \quad b_\omega \sin(\omega\pi) = 0 \ (44.2.1.2)$$

$$-\omega a_\omega \sin(\omega\pi) + \omega b_\omega \cos(\omega\pi) = -\omega a_\omega \sin(-\omega\pi) + \omega b_\omega \cos(-\omega\pi)$$

$$= \omega a_\omega \sin(\omega\pi) + \omega b_\omega \cos(\omega\pi) => a_\omega \sin(\omega\pi) = 0, \quad (45.2.1.2)$$

بنابراین از دو رابطه (44.2.1.2) و (45.2.1.2) نتیجه می شود که اگر $\sin(\omega\pi) \neq 0$ در این صورت بایستی $a_\omega = 0,\ b_\omega = 0$ که در این صورت به جواب بدیهی صفر می رسیم که غیر قابل قبول است. اما اگر

$$\sin(\omega\pi) = 0, \quad \omega\pi = n\pi, \quad \omega = n, \ \ n = 1,2, \ldots.$$

در این صورت لزومی ندارد که ضرایب برابر با صفر باشند و می توانند هر دو عدد دلخواه باشند. بنابراین

$$k = \omega^2 = n^2, \quad n = 1,2, \ldots, \quad (46.2.1.2)$$

مقادیر ویژه مسئله اشترم لیویل هستند. توابع ویژه متناظر با این مقادیر ویژه عبارتند از:

$$G(\theta) = G_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta), \qquad n = 1,2, \ldots, (47.2.1.2)$$

حالت دوم اگر $k = 0$ در این صورت داریم:

$$\ddot{G}(\theta) = 0, \quad (48.2.1.2)$$

$$G(\theta) = a\theta + b, \quad (49.2.1.2), \quad \dot{G}(\theta) = a, \quad (50.2.1.2)$$

برای برقراری شرایط تناوب، داریم:

$$a\pi + b = a(-\pi) + b, \quad => a = 0,$$

شرط دوم نیز همواره برقرار است. پس به ازا $k = 0$ ، $G(\theta) = b \neq 0$

حالت سوم: اگر $k < 0$ در این حالت قرار می دهیم $k = -\omega^2, \quad \omega > 0$. در معادله (39.2.1.2) قرار می دهیم:

$$\ddot{G}(\theta) - \omega^2 G(\theta) = 0, \quad (51.2.1.2)$$

$$G(\pi) = G(-\pi), \quad (40.2.1.2), \quad \dot{G}(\pi) = \dot{G}(-\pi), \quad (41.2.1.2)$$

$$G(\theta) = ae^{\omega\theta} + be^{-\omega\theta}, \quad (52.2.1.2)$$

از رابطه (40.2.1.2) و (52.2.1.2) نتیجه می شود که:

$$ae^{\omega\pi} + be^{-\omega\pi} = ae^{-\omega\pi} + be^{\omega\pi}, \quad => \ a(e^{\omega\pi} - e^{-\omega\pi}) = b(e^{\omega\pi} - e^{-\omega\pi})$$

$$=> a = b, \quad (53.2.1.2)$$

از رابطه (41.2.1.2) و (52.2.1.2) و (53.2.1.2) نتیجه می شود که:

$$\omega a(e^{\omega\pi} - e^{-\omega\pi}) = 0, \quad => e^{\omega\pi} - e^{-\omega\pi} \neq 0, \quad a = 0 \quad => b = 0,$$
$$G(\theta) = 0, \quad (54.2.1.2)$$

بنابراین از این حالت جوا ب مخالف صفر به دست نمی آید.

در نتیجه از دو حالت اول و دوم نتیجه می شود که از ترکیب دو حالت می توان توابع زیر را به عنوان توابع ویژه مسئله در نظر گرفت:

$$G(\theta) = G_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta), \quad n = 0,1,2, \dots, \quad (55.2.1.2)$$

اکنون به رابطه (39.2.1.2) بر می گردیم. داریم:

$$-\frac{F''(r)+\frac{1}{r}F'(r)}{\frac{1}{r^2}F(r)}=k=n^2, \qquad n=0,1,2,\dots, \quad (56.2.1.2)$$

$$r^2\mathrm{F}''(\mathrm{r})+\mathrm{rF}'(\mathrm{r})-n^2F(r)=0, \qquad (57.2.1.2)$$

این معادله اویلر است که با تغییر متغیر $r=e^t$ قابل حل است:

$$\mathrm{F}(\mathrm{r})=\mathrm{F}(e^t)=g(t), \quad (58.2.1.2)$$

$$F'(r)=\frac{d}{dr}F(r)=\frac{d}{dr}g(t)=\frac{d}{dt}g(t)\frac{dt}{dr}=g'(t)*\frac{1}{r}$$

$$=>rF'(r)=g'(t), \quad (59.2.1.2)$$

$$F''(r)=\frac{d}{dr}F'(r)=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}g'(t)\right)=-\frac{1}{r^2}g'(t)+\frac{1}{r^2}g''(t)$$

$$r^2F''(t)=-g'(t)+g''(t), \qquad (60.2.1.2)$$

در نتیجه معادله (57.2.1.2) به صورت زیر خواهد بود:

$$g''(t)-n^2g(t)=0, \quad (61.2.1.2)$$

$$g(t)=ae^{nt}+be^{nt}, \quad (62.2.1.2)$$

تغییر متغیر را به حالت اول برمی گردانیم، $t=Ln(r)$، خواهیم داشت:

$$g(t)=F(r)=ar^n+br^{-n}, \quad n=0,1,2,\dots, \quad (63.2.1.2)$$

چون $lim_{r\to 0}r^{-n}=-\infty$ در نتیجه برای کراندار بودن جواب بایستی $b=0$. بنابراین:

$$F(r)=ar^n, \quad n=0,1,2,\dots, \quad (64.2.1.2)$$

در این حالت ضریب a در ادامه بحث تاثیری ندارد و می تواند هر عدد دلخواه حقیقی مخالف صفر باشد که رای راحتی آنرا مساوی یک قرار می دهیم. در نتیجه جواب به صورت زیر خواهد بود که در شرایط اضافه شده به مسئله صدق می کند.

$$u(r,\theta)=u_n(r,\theta)=r^n(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta),\quad n=0,1,2,\dots,\quad (65.2.1.2)$$

چون به ازا هر $n=0,1,2,\dots,$ توابع $u_n(r,\theta)$ در معادله اصلی که یک معادله همگن با ضرایب ثابت است صدق می کند در این صورت با استفاده از خاصیت برهمنهی جواب حاصل نیز در معادله اصلی و شرایط اضافه شده به مسئله صدق می کند.

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n\cos(n\theta)+b_nr^n\sin(n\theta),\quad (66.2.1.2)$$

برای محاسبه ضرایب به صورت زیر عمل می کنیم:

$$u(R,\theta)=f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nR^n\cos(n\theta)+b_nR^n\sin(n\theta),\quad (67.2.1.2)$$

این رابطه بسط فوریه تابع $f(\theta)$ بر بازه $[-\pi,\pi]$است. بنابراین:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)d\alpha$$

$$a_nR^n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha$$

$$b_nR^n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha$$

بنابراین،

$$a_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha$$

$$b_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha$$

در نتیجه با قرار دادن این فرمول ها در معادله :(67.2.1.2) خواهیم داشت:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha\cos(n\theta) + \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha\sin(n\theta)\right), \quad (68.2.1.2)$$

این رابطه می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos\big(n(\alpha-\theta)\big)\,d\alpha$$

یا

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos\big(n(\alpha-\theta)\big)\right] f(\alpha)d\alpha, \quad (69.2.1.2)$$

3.1.2 فرمول انتگرال پواسن

جواب معادله لاپلاس روی یک دیسک را می توان به صورت انتگرال پوآسن نمایش داد. دیسکی به مرکز مبدا و شعاع واحد حول مبدا مختصات در نظر بگیرید، و فرض کنید که $u(1,\theta) = f(\theta)$. جواب مسئله لاپلاس برای یک دیسک با شعاع 1 به صورت زیر خواهد بود:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos\big(n(\alpha-\theta)\big)\right] f(\alpha)d\alpha, \quad (1.3.1.2)$$

کمیت زیر را به عنوان هسته پوآسن معرفی می کنیم:

$$P(r,\varsigma) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\varsigma)\right], \quad (2.3.1.2)$$

بر حسب ایت تابع جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$u(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\zeta-\theta) f(\zeta) d\zeta, \qquad (3.3.1.2)$$

ابتدا مجموع را در هسته پوآسن محاسبه می کنیم و در جواب قرار می دهیم.

فرض کنیم z یک عدد مختلط باشد. در مختصات قطبی این عدد به صورت $z = re^{i\zeta}$ نشان داده می شود که برای نقاط داخل دیسک $r < 1$ و ζ شناسه عدد z است. طبق فرمول اویلر

$$z^n = r^n e^{in\zeta} = r^n \cos(n\zeta) + r^n \sin(n\zeta), \qquad (4.3.1.2)$$

در نتیجه مقدار $r^n \cos(n\zeta)$ که در هسته پوآسن ظاهر می شود قسمت حقیقی z^n است.

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\varsigma) = Re\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)$$

اکنون فرض می کنیم که $|z| = r < 1$. بنابراین مجموع را می توانیم با استفاده از مجموع سری هندسی نتیجه گیری کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$$

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = Re\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right) = Re\left(1 + 2\frac{z}{1-z}\right)$$

$$= Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = Re\left(\frac{1+re^{i\zeta}}{1-re^{i\zeta}}\right)$$

برای محاسبه قسمت حقیقی عبارت فوق، داریم:

$$\frac{1+re^{i\zeta}}{1-re^{i\zeta}}=\frac{1+re^{i\zeta}}{1-re^{i\zeta}}\left(\frac{1-re^{-i\zeta}}{1-re^{-i\zeta}}\right)=\frac{1-r^2+r\left(e^{i\zeta}-e^{-i\zeta}\right)}{1+r^2-r(e^{i\zeta}+e^{-i\zeta})}$$

$$=\frac{1-r^2+2irsin(\zeta)}{1+r^2-2rcos(\zeta)}, \quad (5.3.1.2)$$

در این صورت قسمت حقیقی برابر است با:

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta)=\frac{1-r^2}{1+r^2-2rcos(\zeta)}, \qquad (6.3.1.2)$$

در نتیجه جواب معادله لاپلاس روی دیسک واحد به صورت زیر است:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2rcos(\zeta-\theta)}f(\zeta)d\zeta, \qquad (7.3.1.2)$$

این فرمول انتگرال پوآسن است. برای دیسکی با شعاع R با تغییر متغیر به رابطه زیر می رسیم:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rrcos(\zeta-\theta)}f(\zeta)d\zeta, \qquad (8.3.1.2)$$