



دانشگاه پیام نور

سیستمهای کنترل خطی

(رشته برق)

دکتر علی خاکی صدیق



سیستمهای کنترل خطی

(رشته برق)

دکتر علی خاکی صدیق



دانشگاه پیام نور

- عنوان: سیستمهای کنترل خطی
- مؤلف: دکتر علی خاکی صدیق
- ویراستار علمی: دکتر محمدحسن شناسا
- حروفچینی، صفحه‌آرایی و طراحی جلد: مدیریت تدوین
- لیتوگرافی، چاپ و صحافی: انتشارات دانشگاه پیام نور
- شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه
- نوبت و تاریخ چاپ: چاپ اول آبان ۱۳۷۹، چاپ دوم مهر ۱۳۸۱
- شابک ۸ - ۷۸۰ - ۴۵۵ - ۹۶۴
- ISBN 964 - 455 - 780 - 8
- کلیه حقوق برای دانشگاه پیام نور محفوظ است.
- قیمت در تمام کشور: ۲۵۵۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

دانشگاه پیام نور بر اساس نظام آموزش از راه دور و کلاسهای نیمه حضوری پی ریزی شده است و سطح فراگیر دانشجویی آن، تقریباً، سراسر کشور را در بر می گیرد. این دانشگاه بر آن است که تا حد امکان با بهره گیری از فن آوری پیشرفته ارتباطات و اطلاع رسانی، گذراندن دوره های درسی و دسترسی به منابع درسی را در منزل، اداره یا مکانهای مناسب دیگر میسر سازد. در نظام آموزش از راه دور کتاب درسی خودآموز از جمله مهمترین لوازم آموزشی است. هم اکنون دانشگاه پیام نور، ضمن تلاش برای دستیابی به فن آوری پیشرفته اطلاع رسانی و ارتقای کیفی آموزش به سطح معیار موجود در دنیا، هم خود را صرف تدوین کتاب درسی خودآموز به شرح زیر کرده است.

۱. طرح درسنامه

طرح درسنامه منبعی درسی است که، پس از داوری علمی، بدون طراحی آموزشی و ویرایش منتشر می شود. ضرورت تهیه به موقع کتاب در هر نیمسال و طولانی بودن فرایند ارزیابی کار صاحب اثر، در عمل، باعث می شود که دانشگاه به انتشار چنین منابعی اقدام کند. درسنامه، در واقع، نخستین ثمره تحقیقات صاحب اثر بر اساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصلهای شورای عالی برنامه ریزی وزارت فرهنگ و آموزش عالی است که با ظاهری آراسته، تمیز و منظم، و با طراحی کتاب، چاپ می شود و در اختیار دانشجو قرار می گیرد. دانشگاه به منظور تقدیر از زحمات صاحب اثر برای طرح درسنامه به تناسب مقررات خود حق الزحمه ای پرداخت می کند. صاحب اثر بعد از چهار نیمسال تحصیلی بر اساس بازخوردهای اصلاحی مدرسان، دانشجویان، دیگر صاحب نظران در این منابع تجدیدنظر می کند.

۲. طرح آزمایشی

پس از تجدیدنظر صاحب اثر، که با دریافت بازخوردها و اصلاح نارساییهای درسنامه صورت می‌گیرد، کتاب با کمک متخصصان، ویرایش و طراحی آموزشی می‌شود. طرح درسنامه به پیشنهاد دانشکدهٔ مربوط و از طریق مدیریت هماهنگی، تدوین و آماده‌سازی منابع درسی به صورت آزمایشی چاپ می‌شود. در هر حال، صاحب اثر در سلسله انتشارات آزمایشی نیز، همانند طرح درسنامه، پس از ۴ نیمسال تحصیلی با دریافت بازخوردهای مدرسان و دانشجویان در این منابع تجدیدنظر می‌کند.

۳. طرح قطعی

کتابهای آزمایشی پس از ۴ نیمسال، که صاحب اثر با دریافت نظرهای اصلاحی در کتاب تجدیدنظر می‌کند، در شورای انتشارات بررسی و در صورت تصویب به صورت قطعی چاپ می‌شوند. انتظار می‌رود که این کتابها، پس از ارزیابیهای مکرر حین تدریس و پس از ویرایش و طراحی آموزشی، از هر لحاظ خودآموز باشند و نیاز دانشجو را از لحاظ درک مطلب برآورده کنند. با وجود این، با توجه به تحولات سریع علم در دنیای امروز، بازخوردها، برخی اشکالات احتمالی، مؤلف باید در این کتابها نیز در حدود هر ۴ سال یک بار تجدیدنظر کند.

۴. متون آزمایشگاهی

این نوع کتابها دستورالعملهایی هستند که دانشجویان با استفاده از آنها و با راهنمایی مربیان می‌توانند کارهای عملی را در آزمایشگاه انجام دهند.

۵. کتابهای کمک درسی و فرادرسی

دانشگاه پیام نور، به منظور مشارکت در غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی در سراسر کشور، یادگیری بیشتر و مؤثرتر دانشجویان، و نیز به منظور فراهم آوردن منابعی برای پیشبرد سطح علمی پژوهندگان، محققان و مربیان، کتابهای کمک درسی و فرادرسی، منتشر می‌کند.

فهرست

پیشگفتار	یازده
۱. آشنایی با سیستم‌های کنترل	۱
۱-۱ اصول کنترل	۲
۲-۱ تاریخچه مختصر کنترل اتوماتیک	۷
۳-۱ چند مثال عملی از سیستم‌های کنترل	۱۱
۴-۱ تعاریف	۱۸
مسائل	۲۰
مراجع فصل اول	۲۲
کتابشناسی	۲۳
۲. نمایش سیستم‌های کنترل خطی	۲۵
۱-۲ مقدمه	۲۶
۲-۲ توابع تبدیل	۲۶
۳-۲ دیاگرام‌های بلوکی	۳۱
۱-۳-۲ اجزاء اصلی دیاگرام‌های بلوکی	۳۲
۲-۳-۲ عملیات جبری بلوک دیاگرامی	۳۳
۳-۳-۲ رسم دیاگرام بلوکی سیستم‌های فیزیکی	۳۶
۴-۲ نمودارهای گذر سیگنال	۳۹
۱-۴-۲ جبر نمودار گذر سیگنال	۴۲
۲-۴-۲ نمایش نمودار گذر سیگنال سیستم‌های خطی	۴۴
۵-۲ توصیف فضای حالت سیستم‌های کنترل	۵۲
۱-۵-۲ بدست آوردن معادلات حالت از تابع تبدیل	۵۴

۶۰	۲-۵-۲ انتخاب متغیرهای حالت
۶۶	۲-۵-۳ رابطه بین تابع تبدیل و معادله فضای حالت
۶۷	۲-۶ مدل سازی موتورهای DC
۷۳	مسائل
۸۳	مراجع فصل دوم
۸۴	کتابشناسی
۸۵	۳. تحلیل عملکرد گذرا و ماندگار سیستم های کنترل
۸۶	۱-۳ مقدمه
۸۷	۲-۳ ورودیهای استاندارد برای تحلیل عملکرد سیستم های کنترل
۹۱	۳-۳ پاسخ حالت ماندگار
۹۱	۳-۳-۱ پاسخ حالت ماندگار به ورودیهای پله، شیب و سهموی
۹۴	۳-۳-۲ ورودیهای سینوسی و چند جمله ای
۹۶	۳-۴ پاسخ حالت - گذرا
۹۷	۳-۴-۱ پاسخ میرای شدید
۹۸	۳-۴-۲ پاسخ میرای بحرانی
۱۰۰	۳-۴-۳ پاسخ میرای ضعیف
۱۱۳	۳-۵ اثرات اضافه کردن صفر و قطب به توابع تبدیل
۱۱۳	۳-۵-۱ قطبهای غالب توابع تبدیل
۱۱۵	۳-۵-۲ اثر قطبهای غالب اضافی
۱۱۷	۳-۵-۳ اثر صفراهای اضافی
۱۱۷	۳-۶ تحلیل خطای حالت ماندگار سیستم های کنترل
۱۱۹	۳-۶-۱ نوع سیستم
۱۲۱	۳-۶-۲ خطای حالت ماندگار
۱۲۶	۳-۷ اثرات فیدبک بر عملکرد سیستم های کنترل
۱۲۶	۳-۷-۱ اثرات فیدبک بر بهره و ثابت زمانی سیستم
۱۲۸	۳-۷-۲ اثر فیدبک بر اغتشاشات خارجی
۱۳۱	۳-۷-۳ اثر فیدبک بر حساسیت سیستم
۱۳۶	۳-۸ تحلیل پایداری
۱۳۷	۳-۸-۱ روش روث
۱۴۴	۳-۸-۲ روش هرولتز

۱۴۶	مسائل
۱۵۸	مراجع فصل سوم
۱۵۹	کتابشناسی

۱۶۱	۴. مکان ریشه
۱۶۲	۱-۴ مقدمه
۱۶۳	۲-۴ رسم ریشه‌های معادله مشخصه
۱۶۶	۳-۴ خواص اساسی مکان ریشه
۱۷۰	۴-۴ قواعد ترسیم مکان ریشه
۱۹۶	۵-۴ نمودارهای مسیرهای ریشه
۲۰۰	مسائل
۲۰۷	مراجع فصل چهارم
۲۰۹	کتابشناسی

۲۱۱	۵. تحلیل پاسخ فرکانسی
۲۱۲	۱-۵ مقدمه
۲۱۶	۲-۵ دیاگرام‌های بود
۲۲۱	۱-۲-۵ ترسیم نمودارهای بود
۲۴۲	۲-۲-۵ مراحل ترسیم دیاگرام‌های بود
۲۴۶	۳-۲-۵ سیستم‌های غیر می‌نیم فاز
۲۴۸	۴-۲-۵ سیستم‌های تأخیردار
۲۵۱	۵-۲-۵ شناسایی تابع تبدیل سیستم توسط دیاگرام بود
۲۵۶	۳-۵ نمودارهای نایکوئیست
۲۵۸	۱-۳-۵ نمودارهای نایکوئیست سیستم‌های نوع صفر، یک و دو
۲۶۴	۲-۳-۵ نمودار نایکوئیست سیستم‌های تأخیردار
۲۶۶	۳-۳-۵ خلاصه‌ای از قواعد کلی رسم نمودارهای نایکوئیست
۲۶۹	۴-۵ معیار پایداری نایکوئیست
۲۸۳	۵-۵ نمودارهای نایکوئیست معکوس
۲۸۷	۶-۵ اعمال معیار پایداری نایکوئیست به نمودارهای نایکوئیست معکوس
۲۹۳	۷-۵ مفاهیم حاشیه‌های بهره و فاز
۲۹۵	۸-۵ چارت نیکولز

۳۰۰	۵-۸-۱ پاسخ فرکانسی حلقه- بسته
۳۰۷	۵-۹ مشخصه‌های عملکرد سیستم براساس پاسخ فرکانسی
۳۱۶	مسائل
۳۲۲	مراجع فصل پنجم
۳۲۴	کتاب شناسی
۳۲۷	۶. روشهای جبران‌سازی سیستم‌های کنترل
۳۲۸	۶-۱ مقدمه
۳۳۳	۶-۲ انواع جبران سازها
۳۳۴	۶-۲-۱ جبران ساز پیش فاز
۳۳۶	۶-۲-۲ جبران ساز پس فاز
۳۴۰	۶-۲-۳ جبران ساز پس - پیش فاز
۳۴۲	۶-۲-۴ کنترل کننده‌های PI ، PD و PID
۳۴۶	۶-۳ طراحی جبران سازها با استفاده از مکان ریشه
۳۴۹	۶-۳-۱ طراحی جبران سازهای پیش فاز با استفاده از مکان ریشه
۳۵۴	۶-۳-۲ طراحی جبران سازهای پس فاز با استفاده از مکان ریشه
۳۶۰	۶-۳-۳ طراحی جبران سازهای پس - پیش فاز با استفاده از مکان ریشه
۳۶۹	۶-۴ طراحی جبران سازها با استفاده از روش پاسخ فرکانسی
۳۷۲	۶-۴-۱ طراحی جبران‌سازهای پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی
۳۷۶	۶-۴-۲ طراحی جبران‌سازهای پس فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی
۳۸۲	۶-۴-۳ طراحی جبران‌سازهای پس - پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی
۳۸۸	۶-۴-۴ جبران سازی با استفاده از چارت نیکولز
۳۹۲	مسائل
۳۹۹	مراجع فصل هفتم
۴۰۰	کتاب شناسی
۴۰۳	۷. تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت
۴۰۴	۷-۱ مقدمه
۴۰۶	۷-۲ حل معادلات حالت و خروجی
۴۱۲	۷-۳ معادله مشخصه
۴۱۷	۷-۴ کنترل پذیری و رؤیت پذیری

۴۱۷	۱-۴-۷ مفاهیم کنترل پذیری و رؤیت پذیری
۴۲۱	۲-۴-۷ آزمونهای کنترل پذیری و رؤیت پذیری
۴۲۷	۳-۴-۷ کنترل پذیری و رؤیت پذیری در توابع تبدیل
۴۲۹	۵-۷ طراحی سیستمهای کنترل در فضای حالت
۴۳۰	۱-۵-۷ جایابی قطب با فیدبک حالت
۴۳۵	۲-۵-۷ طراحی رؤیتگر
۴۳۷	۳-۵-۷ سیستم حلقه - بسته فیدبک حالت با رؤیتگر
۴۴۳	مسائل
۴۵۰	مراجع فصل هفتم
۴۵۱	کتابشناسی
۴۵۲	منابع
۴۵۴	واژه نامه فارسی - انگلیسی
۴۶۰	واژه نامه انگلیسی - فارسی
۴۶۵	فهرست راهنما

پیشگفتار

در این کتاب اصول تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل به رشته تحریر درآورده شده است. مخاطبان اصلی کتاب، دانشجویان تمامی رشته‌های مهندسی هستند که برای اولین بار با مفاهیم مهندسی کنترل آشنا خواهند شد. خوشبختانه در طی چند سال اخیر، کتابهای بسیاری در همین زمینه به فارسی ترجمه و تعداد کمتری تألیف شده‌اند. این کتاب به درخواست گروه برق دانشگاه پیام‌نور تألیف گردید و در چارچوب اهداف تألیف آن، مشخصه‌های خاصی مورد نظر بوده است. از جمله آن مشخصه‌ها، خودآموز بودن آن است. بدین معنی که با پرهیز از مطالب حاشیه‌ای، تنها آن دسته از موضوعاتی که در یک درس سه واحدی کارشناسی مورد نیاز است، با توضیحات و مثالهای گوناگون حل شده آورده شده‌اند. مسایل متنوع و بسیاری در پایان هر فصل گنجانده شده است که خواننده می‌تواند با حل آنها، مفاهیم طرح شده در فصل را عمیق‌تر درک نماید. مراجع کتاب در دو بخش دسته‌بندی شده‌اند. دسته اول مراجعی هستند که در پایان هر فصل آورده شده است و می‌توان جهت بررسی دقیق‌تر مطالب و همچنین مطالب حاشیه‌ای در ارتباط با مطالب ارائه شده در همان فصل، به آنها مراجعه کرد. دسته دوم، مراجع عمومی هستند که کتابهای درسی مهندسی کنترل را شامل می‌گردد و در ارائه مطالب کتاب از بسیاری از آنها استفاده شده است. همچنین، به منظور وسیع‌تر کردن دیدگاههای خواننده در رابطه با مطالب ارائه شده و مطالب مهمی که در حاشیه آنها وجود دارد، در پایان فصل، بخشی به عنوان کتاب‌شناسی آورده شده است. که مفاهیم تخصصی‌تر و پیشرفته‌تری در زمینه‌های مطرح شده در فصل در آن آورده شده است.

در تألیف کتاب از ارائه اثبات ریاضی قضایای مطرح شده خودداری شده است و خواننده علاقه‌مند به پیشینه ریاضی برخی مطالب ارائه شده می‌تواند به کتاب‌شناسی فصل مراجعه نماید.

پیشنیاز ریاضی مطالعه کتاب، آشنایی با معادلات دیفرانسیل معمولی، تبدیل لاپلاس، نظریه بردارها و ماتریس‌ها است. لیکن، به منظور کم کردن حجم کتاب، از ارائه آنها در ضمیمه‌های مستقل خودداری شده است و خواننده بایستی با این مفاهیم آشنایی داشته باشد. هم‌چنین، آشنایی با نرم‌افزارهای در دسترس تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل بویژه Matlab، برای استفاده بهینه از مطالب کتاب الزامی است. بکارگیری این نرم‌افزارها برای رسم دیاگرام‌های مختلف، انجام طراحیها و بررسی رفتار سیستم‌های حلقه - باز و حلقه - بسته اکیداً توصیه می‌گردد. در ضمن اغلب شبیه‌سازیهای این کتاب با نرم‌افزار Matlab انجام شده است. در ترجمه لغات سعی شده است که از معادله‌های متداول فارسی استفاده گردد و جهت مراجعه سریع در واژه‌گان پایان کتاب این معادله‌ها آورده شده‌اند.

مطالب کتاب در طی هفت فصل مستقل ارائه گردیده‌اند. در آغاز هر فصل نیز اهداف آن جهت اطلاع اجمالی آورده شده است. خواننده در فصل اول با مفاهیم و تعاریف اولیه سیستم‌های کنترل آشنا می‌گردد. فصل دوم به مدلسازی و نمایش سیستم‌های کنترل می‌پردازد. فصلهای سوم تا پنجم به تحلیل سیستم‌های کنترل از جنبه‌های گوناگون می‌پردازند. در فصل سوم، تحلیل عملکرد گذرا و ماندگار سیستم‌های کنترل مورد بحث قرار گرفته است. مفاهیم بسیار مهم قطب، صفر، خطا، اغتشاش، حساسیت و پایداری در این فصل ارائه شده‌اند. مکان ریشه به عنوان ابزاری قدرتمند در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل، در فصل چهارم مورد بررسی قرار گرفته است. تحلیل پاسخ فرکانسی، روشی دیگر جهت تحلیل سیستم‌های کنترل است، که با توجه به کاربردهای وسیع آن در تحلیل و طراحی سیستم‌های عملی، بسیار مورد توجه مهندسان کنترل قرار گرفته است. در فصل پنجم سه ابزار مهم دیاگرام‌های بود، نایکوئیست و چارت نیکولز به تفصیل آورده شده است. سیستم‌های تأخیردار، شناسایی سیستم‌های نامعلوم به روش پاسخ فرکانسی، معیار پایداری نایکوئیست، مفاهیم حاشیه بهره و فاز، مشخصه‌های عملکرد بر اساس پاسخ فرکانسی نیز از مطالب ارائه شده در فصل پنجم هستند. فصلهای ششم و هفتم به طراحی سیستم‌های کنترل پرداخته‌اند. فصل ششم، پس از معرفی جبران‌سازهای پس فاز، پیش فاز و پس - پیش فاز به ارائه روشهای طراحی این جبران‌سازها پرداخته است. در روشهای ارائه شده، از مکان ریشه، دیاگرام‌های بود و چارت نیکولز استفاده خواهد شد. در هر بخش، مثالهایی جهت روش‌تر نمودن مراحل طراحی گنجانده شده است که به همراه نتایج شبیه‌سازی سیستم‌های حلقه - باز و حلقه -

بسته، مشخصه‌های به دست آمده را روشنتر خواهند نمود. فصل هفتم، تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت را مورد بررسی قرار داده است. در این فصل، مفاهیم به صورت بسیار کلی و ساده بیان گردیده‌اند و از وارد شدن به مبانی ریاضی آنها اجتناب شده است. مثالهای گوناگونی نیز به منظور نمایش مفاهیم در هر بخش آورده شده است. خواننده می‌تواند بدون ایجاد گسستگی در موضوع، مطالب مربوط به رؤیت پذیری در بخش ۷-۴، طراحی رؤیتگر در بخش ۷-۵-۲ و طراحی سیستم‌های کنترل با رؤیتگر در بخش ۷-۵-۳ را حذف نماید. این مطالب در سرفصل ارائه شده دروس مهندسی کنترل در دوره کارشناسی مهندسی گنجانده نشده‌اند.

در تألیف این کتاب، همکاران بسیاری اینجانب را یاری نموده‌اند که از تمامی آنها تشکر و قدردانی می‌نمایم. بویژه جناب آقای دکتر حسن شناسا استادیار دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه گیلان که ویراستاری علمی کتاب را به عهده داشته‌اند و باتدریس متن اولیه آن، نظرات سودمندی در جهت بهبود کیفیت کتاب ارائه نموده‌اند. همچنین آقای مهندس کیان حائری با شبیه‌سازی در پاره‌ای از مثالها و آقای مهندس افاضلی در رسم برخی از شکلها، اینجانب را یاری نموده‌اند. همچنین از آقای مهندس نصری و دست‌اندرکاران مرکز نشر دانشگاه پیام‌نور و سرکار خانم شریلو بخاطر تایپ آن، صمیمانه قدردانی می‌کنم. در خاتمه از خانواده خود که در مدت طولانی تألیف این کتاب همواره مشوق و همفکر اینجانب بوده‌اند، کمال تشکر را دارم.

تابستان ۱۳۷۷

علی خاکی صدیق

دانشیار دانشکده برق

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۱

آشنایی با سیستم‌های کنترل

اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با ایده کنترل: کنترل به معنی عام و کنترل اتوماتیک
- ۲- معرفی سه استراتژی اصلی در سیستم‌های کنترل: کنترل حلقه - باز، کنترل پیش‌خور و کنترل حلقه - بسته
- ۳- مروری مختصر بر تاریخچه کنترل اتوماتیک
- ۴- معرفی چند سیستم کنترل اتوماتیک مهندسی
- ۵- تعاریف برخی لغات بکار گرفته شده در متن کتاب

۱-۱ اصول کنترل

در جامعه صنعتی و پیشرفته امروز سیستم‌های کنترل اتوماتیک جزء لاینفکی از زندگی روزمره ما بشمار می‌آیند. اگرچه تاریخچه اولین سیستم کنترل ساخت بشر را به چند صدسال قبل از میلاد نسبت می‌دهند، لیکن مسلم آنست که تحول اساسی در زمینه طراحی و ساخت سیستم‌های کنترل اتوماتیک، با طراحی و ساخت اولین گاورنر توسط جیمزوات در دوران انقلاب صنعتی رخ داده است. امروزه اکثر وسایل خانگی مانند ماشین لباس شویی، آبگرمکن، خشک‌کن، توستر، حرارت مرکزی ساختمانها و غیره و یا در اتومبیل‌ها، هواپیماهای مسافربری و جنگنده، کشتیهای بزرگ و کوچک، ربات‌ها، وسایل پیشرفته مهندسی و پزشکی و ... همگی از نوعی سیستم کنترل بهره‌مند هستند و عملکرد آنها بدون سیستم کنترل، به کلی مختل و یا بسیار ضعیف می‌گردد.

لغت «کنترل» را مهندسین، حسابدارها، افسران ارتش، مدیران کارخانه‌ها و صنایع، مربیان ورزشی، و بسیاری از افراد دیگر استفاده می‌کنند. اگرچه هر کدام از این افراد با زمینه‌های کاری بسیار متفاوت، در محیطهای مختلف، با اهداف و وسایل مختلف کار می‌کنند، لیکن همگی آنها به نوعی در محدوده‌های مختلف کاری اعمال کنترل کرده و ایده‌های اولیه این افراد از کنترل مشابهت‌هایی نیز دارد.

مهندسین کنترل، که مخاطبان اصلی این کتاب هستند، به اعمال کنترل در سیستم‌های مهندسی می‌پردازند. این سیستم‌ها و یا فرایندهای صنعتی می‌توانند موشکهای پیشرفته هدایت شونده، ماشین‌های کاغذ یا شیشه‌سازی، اقمار مصنوعی در فضا، نیروگاههای قدرت، پالایشگاههای نفت، موتورهای الکتریکی (و یا دیزلی)، ربات‌ها، آنتن‌های ردیاب و یا بسیاری از ماشین‌ها و فرایندهای دیگر باشند. تفاوت‌های عمده‌ای بین ساختار ایده‌های کنترلی مهندسین کنترل و سایر استفاده‌کنندگان از ایده کنترل، به طور عام وجود دارد. مهندسین کنترل ایده کنترل را در کنترل فرایندهای صنعتی بکار می‌گیرند. در واقع آنان (بر خلاف سایر موارد ذکر شده) خود کنترل کننده یک موشک، قمر مصنوعی و یا پالایشگاه نفت نیستند، بلکه سیستم‌های کنترل اتوماتیکی را طراحی می‌کنند و با اعمال این سیستم‌های طراحی شده، به کنترل سیستم مورد نظر خواهند پرداخت.

قبل از آنکه بتوان کنترل را به هر مفهوم در هر نوع سیستمی اعمال کرد باید یک هدف و

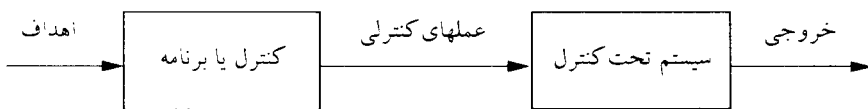
انگیزه مشخص برای اعمال کنترل وجود داشته باشد که ما آنرا مشخصه‌های عملکرد سیستم می‌نامیم. برای مثال مدیر کارخانه سعی دارد تا با اعمال یک سری قوانین و برقراری نظم خاص در کارخانه به تولید بیشتر یا کیفیت بهتر یا قیمت ارزانتر برسد. مربی ورزشی قصد دارد تا با انجام یکسری تمرینات و دستورات، بر تیم مقابل پیروز گردد. بدیهی است که برای انجام این عملیات و اجرای برنامه‌های مناسب، کنترل‌کننده باید آزادی عمل کافی در تغییر دادن سیستم تحت کنترل داشته باشد. مدیر کارخانه با ارایه برنامه‌هایی به قسمت‌های مختلف کارخانه انتظار انجام آنها را داشته و مربی ورزشی نیز به ورزشکاران تحت نظر خود دستوراتی را می‌دهد. باید توجه داشت که تقریباً هیچگاه در عمل آزادی کامل به کنترل‌کننده داده نمی‌شود و همواره محدودیتهایی در راه رسیدن به هدف و اجرای برنامه و اعمال کنترل وجود دارد که غیر قابل تغییر می‌باشند. مدیر کارخانه نمی‌تواند برای پایین آوردن قیمت از مواد اولیه ایده‌آل استفاده کند (به دلایل اقتصادی) و یا اینکه به کارگران مزدی پرداخت نکند و یا اینکه ابزار و ماشین آلات مورد نیاز را به‌طور آنی فراهم آورد، هم چنین مربی ورزشی نمی‌تواند از ورزشکاران انتظار داشته باشد که تمامی روز را بدون وقفه به انجام تمرینات بگذرانند و یا اینکه عکس‌العملهای خارق‌العاده‌ای از خود نشان دهند. تمامی این موارد محدودیتهای کنترل را شامل می‌شود و ماهیت این محدودیتها ممکن است به گونه‌ای باشند که دسترسی به کلیه اهداف تعیین شده را به طور سریع امکان پذیر نسازد. برای رسیدن به یک کارخانه مطلوب یا تیم ورزشی نمونه با مشخصه‌های عملکرد داده شده، مدیر کارخانه و یا مربی ورزشی ممکن است که ماهها و یا حتی سالها وقت لازم داشته باشد. هم چنین ممکن است که برآورده کردن کلیه مشخصات عملکرد نیز امکان پذیر نباشد که در اینصورت باید با بازنگری در اهداف سیستم، آنها را به اهدافی قابل دسترسی تغییر داد.

برای کنترل‌کننده (مدیر کارخانه یا مربی ورزشی) یا طراح سیستم کنترل (مهندس کنترل) بسیار مهم است که بتواند دنباله حوادث را پس از اعمال یکسری برنامه‌ها و دستورات پیش‌بینی کند. با این پیش‌بینی او قادر خواهد بود که دستورات خود را تعدیل کند و یا برنامه کلی سیستم را در جهت مطلوب تغییر دهد. این پیش‌بینی با در دست داشتن یک مدل از سیستم که نشان دهنده رفتار آن است، امکان پذیر است. مدلی که مدیر کارخانه از کارخانه خود دارد ممکن است شامل قابلیت مدیران و کارگران، ظرفیت و کیفیت تولید ماشین آلات

کارخانه و ... باشد. مدلی که مربی ورزشی استفاده می‌کند ممکن است شامل آب و هوا و شرایط محیطی برگزاری مسابقه، توانایی افراد تیم خود و تیم مقابل با بررسی بازیهای قبلی آنها و ... باشد. دقت کنید که ممکن است مدلسازی در این موارد ارادی نباشد لیکن کنترل کننده قطعاً به این چنین چارچوبی برای طراحی و برنامه‌ریزی نیاز داشته و آنرا حداقل در ذهن خویش خواهد ساخت.

سه استراتژی اساسی اعمال کنترل. سه استراتژی اساسی اعمال کنترل که کلیه روشهای کنترلی به نحوی جزء یکی از آنها هستند، عبارتند از: کنترل حلقه - باز^۱، کنترل پیش‌خور^۲ و کنترل فیدبک^۳ یا پس‌خور.

کنترل حلقه - باز. اگر هدف تعیین شده برای یک مدیر کارخانه بهینه کردن سطح تولید کارخانه تحت نظر او باشد، بر اساس عملکرد گذشته کارخانه و مدلی که از آن در دسترس دارد، یک برنامه معین برای عملیات کارخانه جهت رسیدن به هدف مشخص شده، تعیین می‌کند. این برنامه به صورت دستورات کنترلی به سیستم تحت کنترل (کارخانه و اجزاء آن) اعمال می‌گردد. موفقیت این استراتژی به دقت و صحت مدل و اطلاعات موجود در رابطه با عملکرد سیستم بستگی دارد و کنترل کننده فرض می‌کند که عوامل خارجی اثر چندانی بر عملکرد سیستم ندارند و هیچگونه بررسی در حین عمل از رفتار سیستم به عمل نمی‌آورد. اساس این استراتژی در شکل ۱-۱ نشان داده شده است.



شکل ۱-۱ کنترل حلقه - باز

استراتژی کنترل که در آن خروجی هیچ نقشی بر روی عمل کنترل ندارد، سیستم کنترل حلقه - باز نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، در کنترل حلقه - باز خروجی سیستم (تولید کارخانه، بازی

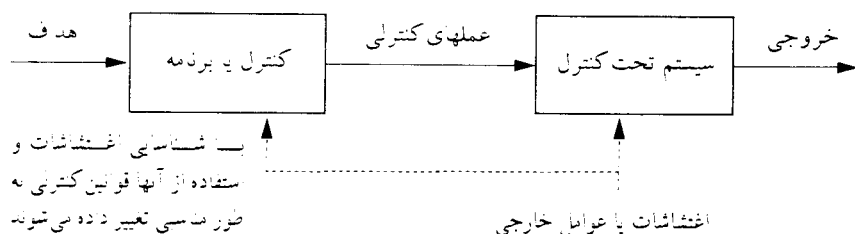
1- Open-loop control

2- Feedforward control

3- Feedback control

بازیگران و نتیجه آن) برای مقایسه با اهداف و مشخصه‌های مطلوب عملکرد داده شده به کار گرفته نمی‌شود.

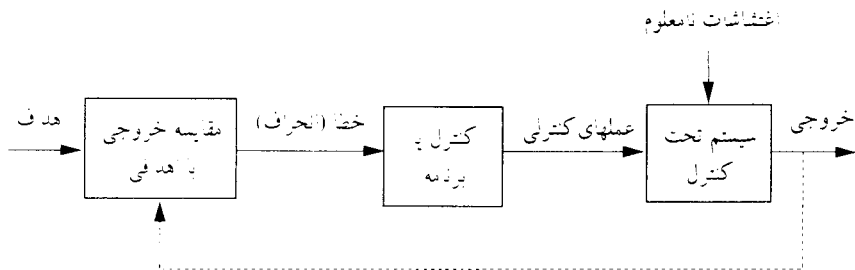
کنترل پیش‌خور. بدیهی است اگر عوامل خارجی بر سیستم تحت کنترل اثر قابل توجهی داشته باشد، نادیده گرفتن آنها توسط کنترل کننده، به اختلال در عملکرد سیستم منجر می‌گردد. ممکن است در شرایط خاصی، بتوانیم این عوامل خارجی را از بین برده و یا آنها را تضعیف کنیم، در غیر اینصورت برای اجتناب از اختلال در عملکرد سیستم، باید استراتژی کنترل را عوض کنیم. در واقع با تغییر و بهبود مدل، اثر این عوامل خارجی یا اغتشاشات را پیش‌بینی می‌کنیم و با در نظر گرفتن آنها قوانین کنترلی را مجدداً بررسی می‌نماییم. در این بررسیها، فرامین کنترل به گونه‌ای طراحی خواهند شد تا اثر این اغتشاشات را به حداقل برسانند. به این چنین استراتژی کنترلی که در آن عوامل خارجی در نظر گرفته شده، و اعمال کنترلی برای مقابله با آنها طراحی می‌شوند، کنترل پیش‌خور گفته می‌شود. شکل ۱-۲ نحوه عملیات در استراتژی کنترل پیش‌خور را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۲ کنترل پیش‌خور

کنترل فیدبک یا کنترل حلقه - بسته. کنترل پیش‌خور تنها در صورتی یک استراتژی کنترل کننده عملی است که اغتشاشات کم و یا معینی وجود داشته باشد و بتوان آنها را براحتی اندازه گرفت. لیکن اگر تعداد اغتشاشات بسیار زیاد و یا اینکه زمان وقوع و ماهیت آنها نامعلوم باشد، آنگاه از استراتژی کنترل پیش‌خور نمی‌توان استفاده کرد. در این حالت از استراتژی سوم کنترل استفاده می‌شود. در این استراتژی با مشاهده خروجی، انحراف رفتار کلی سیستم از رفتار مطلوب (مشخصه‌های عملکرد تعیین شده یا اهداف سیستم) را در نظر گرفته برای اصلاح این انحراف عمل می‌نماییم. اساس این استراتژی در شکل ۱-۳ نشان داده شده

است. دقت کنید که در اینجا نیز اغتشاشات خارجی وجود دارند و بر رفتار سیستم اثر می‌گذارند. اگر خروجی سیستم با مشخصه‌ها و اهداف تعیین شده مطابقت نداشته باشد، خطایی بوجود می‌آید و این خطا یا انحراف به سیستم کنترل اعمال می‌گردد و سیستم کنترل با توجه به خطا، فرمان کنترلی مناسبی را صادر می‌کند. همانطور که در شکل ۳-۱ مشاهده می‌گردد در این سیستم کنترل خروجی سیستم اندازه‌گیری شده و توسط یک مقایسه‌کننده با اهداف سیستم یا مشخصه‌های عملکرد تعیین شده مقایسه می‌گردد. خطای ایجاد شده از این مقایسه به سیستم کنترل برای صدور فرامین کنترلی مناسب، اعمال می‌گردد. به عنوان مثال، مدیر کارخانه می‌تواند دائماً مقدار تولید را اندازه‌گرفته و با میزان مطلوب مقایسه نماید و در صورتیکه بیشتر و یا کمتر از میزان مطلوب باشد، بر اساس آن دستورات لازم را جهت تصحیح خطای ایجاد شده صادر نماید.



شکل ۳-۱ کنترل فیدبک یا حلقه - بسته

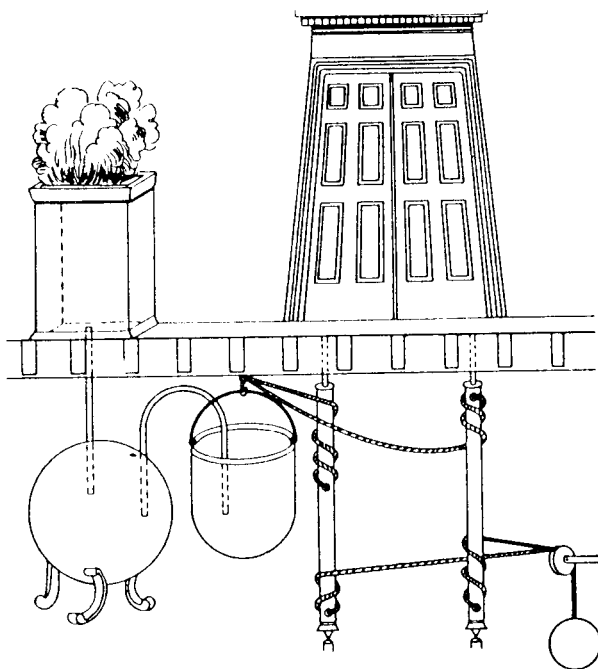
عبارت کنترل فیدبک برای توصیف این استراتژی به کار گرفته می‌شود. در کنترل فیدبک فرامین کنترلی اعمال شده به سیستم براساس مقدار و میزان خطای موجود در پاسخ سیستم محاسبه می‌شوند. بدین معنی که پس از مشاهده و اندازه‌گیری خروجی سیستم، این خروجی با مقدار مطلوب آن مقایسه می‌گردد و اختلاف به سیستم کنترل ارایه می‌شود. به جای عبارت کنترل فیدبک از عبارت کنترل حلقه - بسته^۱ نیز استفاده می‌شود. (عبارت حلقه - بسته در مقابل عبارت حلقه - باز بکار گرفته می‌شود).

1- Closed-loop control

توجه کنید که در استراتژی کنترل حلقه - بسته (برخلاف کنترل حلقه - باز و پیش‌خور)، اطلاع از یک مدل کاملاً دقیق از سیستم الزامی نیست. زیرا خطاهای ایجاد شده در خروجی سیستم تحت کنترل بدلیل اطلاعات ناکافی از مدل سیستم، با تصحیح کنترل‌کننده کاهش پیدا می‌کنند (همانند مواقعی که سیستم تحت اغتشاش قرار گیرد).

۲-۱ تاریخچه مختصر کنترل اتوماتیک

در رابطه با اولین سیستم کنترل اتوماتیک و یا طراح آن اطلاع دقیقی در دست نیست و در واقع با کندوکاو در زوایای تاریخ علم نمی‌توان شخص یا اشخاصی را پیدا کرد که بتوان پیدایش اولین سیستم کنترل را منسوب به آنها دانست. لیکن آنچه که مسلم است، اولین مثالهای عملی از سیستم‌های کنترل به سالهای قبل از میلاد مسیح برمی‌گردد. به عنوان نمونه یکی از اولین سیستم‌های کنترل حلقه - باز، برای باز کردن دربهای یک معبد بوده است. این سیستم کنترل بازکردن اتوماتیک درب، در شکل ۴-۱ نشان داده شده است. ورودی به سیستم همانطور که از



شکل ۴-۱ اولین سیستم کنترل برای بازکردن دربهای معبد

شکل ۱-۴ مشاهده می‌شود، روشن کردن آتشی بروی محراب بوده است. با گرم شدن هوای زیر آتش، هوای به حرکت درآمده آب را از مخزن به داخل سطلی هدایت می‌کرده است. با سنگین شدن سطل و حرکت آن به طرف پایین، توسط طنابهایی که به اهرم‌هایی وصل شده بودند، وزنه طرف مقابل به سمت بالا به حرکت درمی‌آمده است. به همین ترتیب می‌توان با خاموش کردن آتش، دربهای معبد را بست. با کم کردن آتش و سردتر شدن هوای داخل مخزن، فشار هوا کاهش پیدا می‌کند و آب از سطل به داخل مخزن منتقل می‌شود. بنابراین، سطل سبکتر شده و با سنگین تر بودن وزنه مخالف به سمت پایین حرکت می‌کند، که خود باعث بسته شدن درها می‌گردد. به نظر می‌رسد که با پایین آمدن حاکم معبد و حرکت به سوی درها، این درها به طور خودکار (با سیستم کنترلی بدور از چشم حاضران) باز و بسته می‌شدند و لذا برای آنان تجلی از قدرت خدایانشان بوده است!

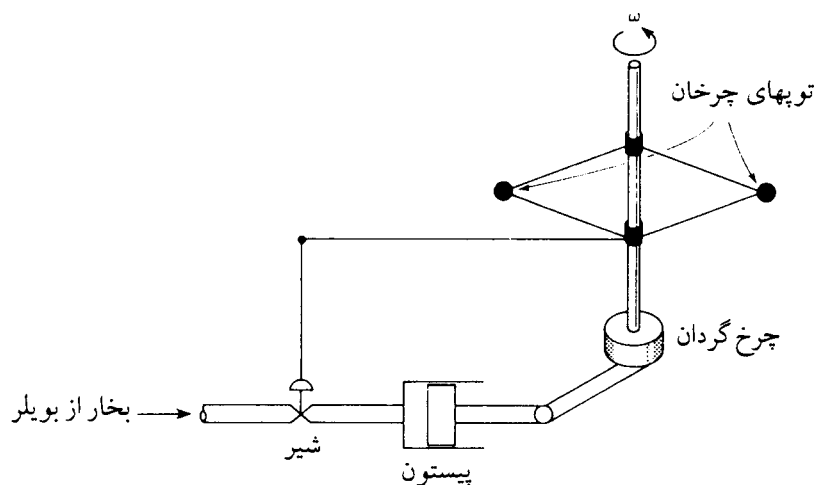
در بین سالهای ۱۷۶۷ تا ۱۷۸۸ (تاریخ دقیق آن معلوم نیست)، جیمز وات اولین سیستم کنترل اتوماتیک (بدون دخالت بشر) را برای کنترل سرعت اختراع کرد. این سیستم را گاورنر توپ گردان^۱ جیمز وات^۲ می‌نامند. گاورنر توپ گردان جیمزوات در شکل ۱-۵ نشان داده شده است. هدف این سیستم کنترل، ثابت نگه داشتن سرعت چرخش است. ایده کلی این سیستم کنترل بدین ترتیب است که با چرخش توپهای گردان، مقدار ورودی بخار به سیستم توسط شیر نشان داده شده در شکل ۱-۵ تعیین می‌گردد. در واقع هر چه این توپها سریعتر بچرخند، بخار کمتری وارد سیستم می‌گردد. همچنین و به طور همزمان نرخ فشار بخار به روی پیستون و چرخ گردان سرعت چرخش توپها را تعیین می‌کند. یکی از اشکالات فراوان این سیستم نوسانات سرعت چرخشی آن حول یک مقدار نامی سرعت است. در حدود سالهای ۱۸۶۸ ماکسول^۳ با پایه‌ریزی یک چارچوب نظری برای تحلیل سیستم، توانست با بکارگیری نظریه معادلات دیفرانسیل پایداری سیستم گاورنر جیمزوات را بررسی و دلایل نوسانات داخل سیستم را بر حسب عبارات ریاضی بخوبی بیان دارد. بدنبال مطالعات ماکسول یک مهندس روسی به نام ویشنگرادسکی^۴ پاسخ دقیقتری را برای پایداری یک گاورنر توپ گردان درجه سوم ارائه کرد. از اولین کاربردهای تئوریهای توسعه یافته کنترل

1- Flyball governer

2- James watt

3- Maxwell

4. Wischnegradsky



شکل ۵-۱ گاورنر توپ گردان جیمزوات

می توان از بکارگیری آنها برای مطالعه هدایت اتوماتیک کشتی توسط مینورسکی^۱ در سال ۱۹۲۲ نامبرد.

دهه های ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰ شاهد توسعه چشمگیر در زمینه کنترل اتوماتیک بوده است. این پیشرفتها بطور عمده در سایه ارتباط دادن علوم مخابرات و الکترونیک با کنترل اتوماتیک حاصل گردید. از افراد شاخص این زمانها می توان از هوی ساید^۲ در دهه ۱۹۲۰ و نایکوئیست^۳ در دهه ۱۹۳۰ نامبرد. هوی ساید توانست با ادامه مطالعات تئوری یک قرن پیش لاپلاس و فوریه، ابزار ریاضی مناسب را برای مطالعه سیستم های مخابراتی توسعه دهد و واحد بسیار مهم لگاریتمی را برای اهداف مهندسی بکار گیرد. نایکوئیست نیز که یک فیزیکدان به شمار می آمد، پس از مطالعات فراوان در رابطه با پدیده نویز به مسأله پایداری در آمپلی فایرهای تکرار کننده^۴ پرداخت و موفق شد که با استفاده از نظریه آنالیز مختلط، یکی از معتبرترین روشهای بررسی پایداری را پایه گذاری کند.

1- Minorsky

2- Heaviside

3- Nyquist

4- Repeater

در سال ۱۹۳۴، هیزن^۱ مقاله‌ای تحت عنوان "نظریه سرومکانیزم‌ها" در مجله انستیتوی فرانکلین انتشار داد و این اولین استفاده از لغت سرومکانیزم^۲ بود که بعدها برای توصیف بسیاری از سیستم‌های کنترل فیدبک بکار گرفته شد. می‌توان گفت که مقاله هیزن آغازی برای مطالعه بسیار جدی در این زمینه جدید مهندسی بود. لغت سرومکانیزم از دو لغت خدمتکار (یا برده) و مکانیزم مشتق شده است و لذا سرومکانیزم یک مکانیزم برده مانند را تنفی می‌کند.

جنگ دوم جهانی زمینه بسیار مناسب را برای پیشرفتهای آینده در زمینه مهندسی کنترل اتوماتیک آماده کرد. در این دوران با صرف هزینه‌های بسیار زیاد بر روی پروژه‌های نظامی مانند ردیابی آنتن، کنترل توپ ضد هواپیما و اتوپایوت‌های پیشرفته برای هواپیماهای جنگی به شکوفایی مهندسی کنترل کمک بسیار زیادی شد. زیرا در این پروژه‌ها، سیستم کنترل طراحی شده می‌بایست سرعت و دقت را به عنوان دو مشخصه عملکرد پاسخ، به خوبی برآورده سازد. البته در بین سالهای ۱۹۴۰ تا ۱۹۴۵ بسیاری از پیشرفتهای چشمگیر بدست آمده در زمینه کنترل اتوماتیک بدلیل ماهیت نظامی تحقیقات انجام شده محرمانه تنفی می‌شدند و در دسترس عموم محققین در این زمینه قرار نمی‌گرفتند. در سالهای بعد از جنگ و برداشتن مقررات امنیتی دوران جنگ، حجم وسیعی از اطلاعات در اختیار دانشمندان این رشته قرار گرفت و دستاوردهای بسیار زیادی نیز در این زمینه بدست آمد. از سال ۱۹۴۵ تاکنون در کمی بیش از نیم قرن، صدها کتاب و هزاران مقاله و گزارشهای فنی در این زمینه نوشته شده است. همچنین سیستم‌های کنترل به بسیاری از سیستم‌های صنعتی با ماهیتها و کاربردهای فوق‌العاده متفاوت با موفقیت اعمال گردیده‌اند.

تا قبل از سالهای دهه ۱۹۶۰ (سالهای ۱۹۳۵ تا اواخر ۱۹۵۰) روشهای اصلی در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل، روشهای پاسخ فرکانسی مانند بود^۳ و روشهای تبدیل لاپلاس همراه با روش مکان ریشه توسط ایوانز^۴ بودند. در سالهای ۱۹۶۰ به بعد با پیشرفتهای حاصله در پروژه آپولو و مسافرت به کره ماه، روشهای مدرن فضای حالت که توسط کالمن^۵، باسی^۶ و چند نفر دیگر معرفی گردیده بودند، با موفقیت در چندین پروژه، به کار گرفته شدند. این تاریخ تولد کنترل مدرن^۷ را رقم می‌زند. با توسعه سریع در طراحی و ساخت کامپیوترهای بزرگ، بسیاری

1- Hazen

2- Servomechanism

3- Bode

4- Evans

5- Kalman

6- Bucy

7- Modern control

از محاسبات که تا آن زمان انجام آنها غیرممکن به نظر می‌رسید، با این کامپیوترها بسادگی انجام داده می‌شدند. در این دهه روشها و الگوریتمهای پیچیده و مشکل بهینه‌سازی به کمک همین کامپیوترها پیشرفت شایانی نمودند.

دهه ۱۹۷۰ شاهد پیشرفتهای بیشتری در زمینه کامپیوتر با معرفی میکروپروسورها بود. توسط میکروپروسورها اعمال تکنیک‌های بسیار پیچیده کنترلی به سادگی و ارزانی امکان پذیر گشت. کنترل دیجیتال^۱ و سیستم‌های کنترل دیجیتال مستقیم^۲ در این دوران رونق فراوانی پیدا کردند. دهه‌های ۱۹۷۰ به بعد، شاهد پیشرفتهای بسیار زیادی در زمینه نظریه سیستم‌های کنترل چند متغیره^۳، کنترل تطبیقی^۴، کنترل مقاوم^۵، کنترل هوشمند^۶ و غیره نیز بوده است.

۳-۱ چند مثال عملی از سیستم‌های کنترل

در این بخش چند مثال عملی از کاربرد سیستم‌های کنترل در قسمتهای مختلف صنعت ارایه می‌شود.

آنتن‌های ردیاب. در صنعت مخابرات آنتن‌هایی وجود دارند که توسط یک ماهواره با هم در ارتباط می‌باشند. داده‌های مختلف، همانطور که در شکل ۱-۶ نشان داده شده است، از یک آنتن فرستاده شده و توسط آنتن دیگری دریافت می‌گردند. ماهواره سیگنالی را که حاوی داده‌ها است از یک آنتن دریافت کرده و آن را به آنتن دیگری که در نقطه دیگری روی زمین قرار دارد ارسال می‌کند. برای برقراری و تداوم این ارتباط رادیویی، دو آنتن مستقر بر روی زمین همواره باید به سمت قمر مصنوعی قرار گرفته باشند و برای این کار بکارگیری یک سیستم کنترل مؤثر الزامی است. مسأله کنترل در این حالت حرکت دادن دقیق آنتن به طرف جهت و زاویه مناسب است. شکل ۱-۷ یک آنتن ماهواره مخابراتی را نشان می‌دهد. حرکتهای چرخشی این آنتن به طرف بالا یا پایین یا چرخش حول محور عمود بر زمین است. برای

1- Digital control

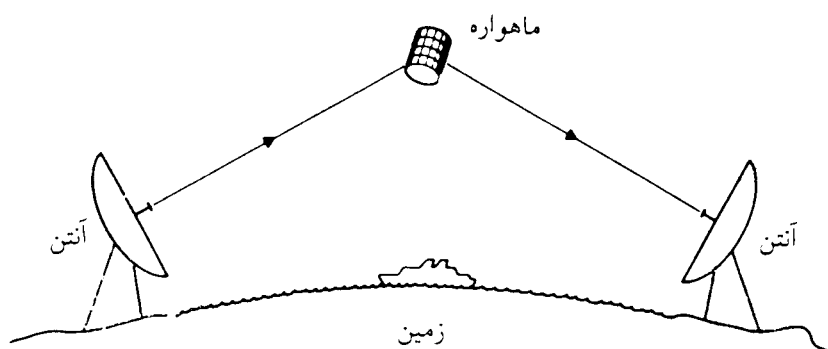
2- Direct digital control

3- Multivariable control

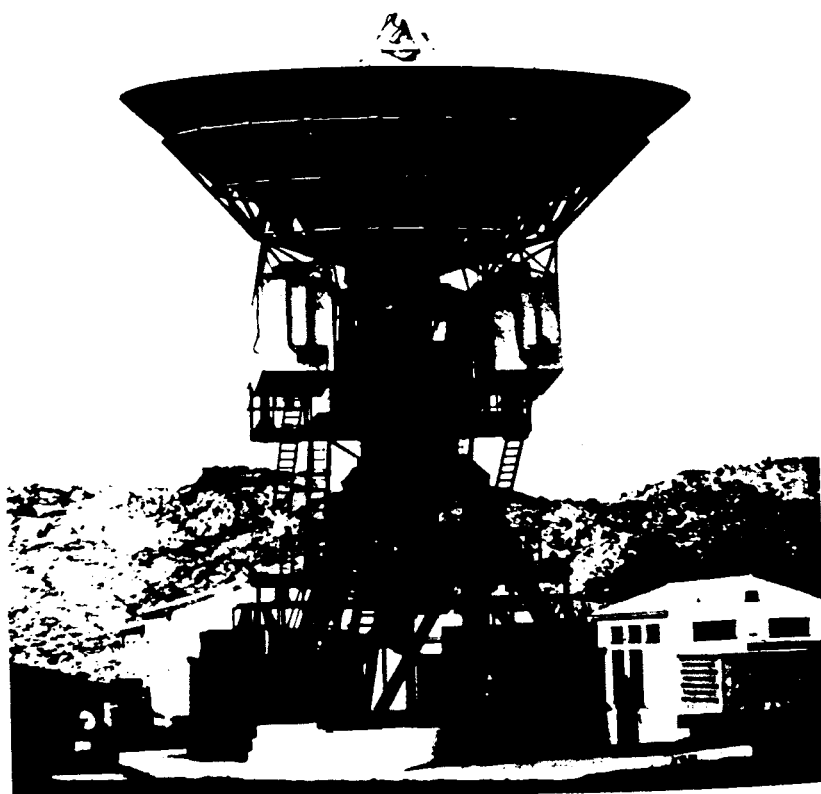
4- Adaptive control

5- Robust control

6- Intelligent control

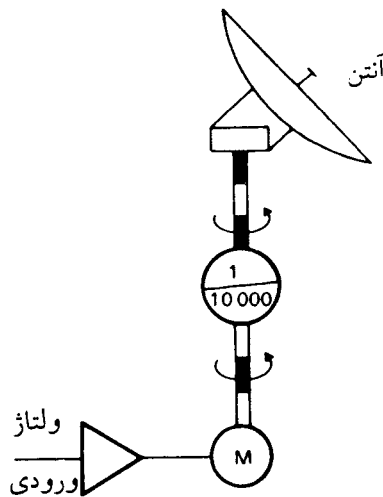


شکل ۶-۱ ارتباط دو آنتن برای ارسال و دریافت داده توسط یک ماهواره.



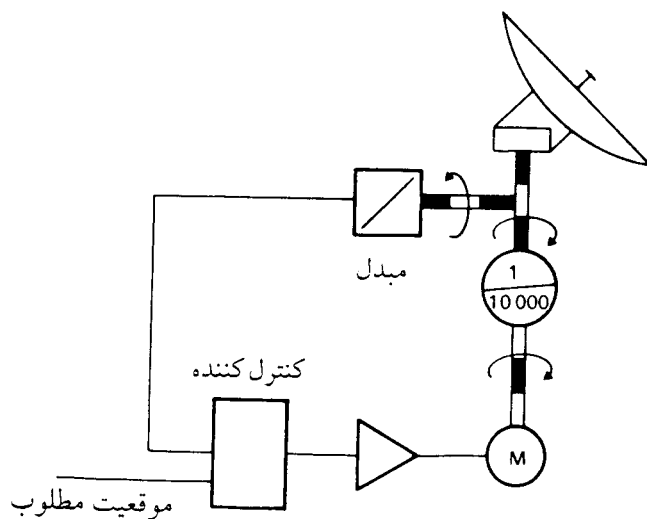
شکل ۷-۱ یک آنتن ماهواره مخابراتی

هر کدام از این دو حرکت یک سیستم کنترل وجود دارد. سیستم‌های کنترل موجود در آنتن بسیار شبیه به هم عمل می‌کنند و لذا در اینجا تنها به بررسی یکی از این سیستم‌ها می‌پردازیم. محرک، یا وسیله‌ای که آنتن را می‌چرخاند یک موتور الکتریکی است که در شکل ۸-۱ با یک دایره که در وسط آن حرف M نوشته شده نشان داده شده است. شفت موتور با یک خط راه‌راه نشان داده شده است و پیکان روی آن جهت حرکت چرخش را نشان می‌دهد. شفت موتور یک جعبه دنده که به صورت دایره دوم رسم شده است را به حرکت در می‌آورد. نسبت دنده ۱۰۰۰۰ به ۱ بر روی آن نشان داده شده است. شفت بعد از جعبه دنده، باعث چرخش آنتن می‌شود. قدرت محرکه موتور از یک تقویت‌کننده قدرت الکتریکی تأمین می‌شود که با یک مثلث نشان داده شده است. ولتاژ اعمال شده به ورودی تقویت‌کننده قدرت باعث چرخش آنتن حول محور افقی می‌شود. بدیهی است که آنتن باید در برابر تغییرات ایجاد شده توسط جریان باد همواره به سمت ماهواره نشانه رود و از اینرو کنترل حلقه - باز برای این سیستم مناسب نیست. یک سیستم کنترل حلقه - بسته برای کنترل موقعیت چرخشی آنتن در شکل ۹-۱ نشان داده شده است. یک مبدل موقعیت بر روی آنتن برای اندازه‌گیری موقعیت خروجی θ_0 که جهت افقی آنتن بوده، سوار شده است. مبدل موقعیت چرخشی با یک بلوک مربعی در



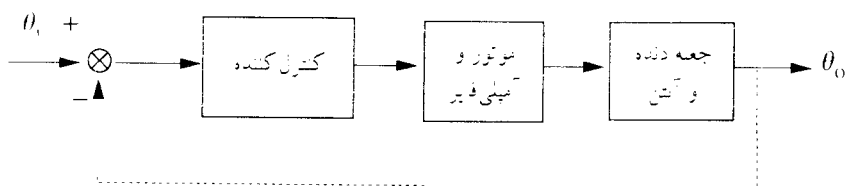
شکل ۸-۱ دیاگرام سیستم محرک آنتن

سمت چپ شفت محرک آنتن نشان داده شده است. سیستم کنترل نیز در شکل ۹-۱ آورده شده است.



شکل ۹-۱ سیستم حلقه - بسته آنتن

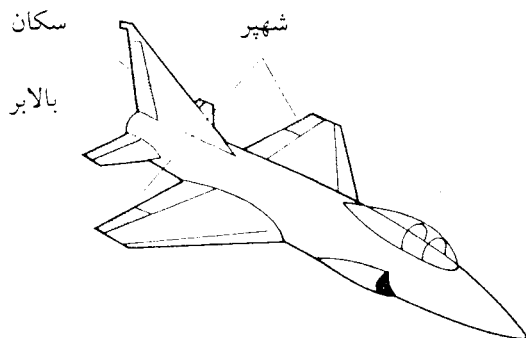
خروجی مبدل، ولتاژی متناسب با زاویه افقی θ_0 است. ولتاژ به بلوک کنترل پس از مقایسه با زاویه مطلوب θ_0 ارسال می‌گردد. در صورتیکه خطای موقعیت بین θ_1 و θ_0 وجود داشته باشد، یک ولتاژ خطا متناسب با تفاضل $(\theta_1 - \theta_0)$ توسط یک مقایسه کننده تولید می‌گردد. براساس این ولتاژ خطا، فرامین کنترلی از سیستم کنترل ارسال می‌گردد که با ایجاد گشتاوری برای کاهش خطا، آنتن را در جهت مناسب به چرخش درمی‌آورد. دیاگرام بلوکی سیستم کنترل موقعیت آنتن در شکل ۱۰-۱ نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۱ دیاگرام بلوکی سیستم کنترل ردیاب موقعیت.

کنترل پرواز هواپیما. شکل ۱۱-۱ یک هواپیما و سطوح کنترلی^۱ آن را نشان می‌دهد. سطوح کنترل یک هواپیما همانطور که در شکل ۱۱-۱ نشان داده شده‌اند، عبارتند از بالابر^۲، شهپر^۳ و سکان^۴. این سطوح نیروها و ممانهای لازم را جهت بحرکت در آوردن هواپیما در جهتهای مورد نظر خلبان، فراهم می‌کنند. در واقع بالابر حرکت فواز^۵ (حرکت به طرف بالا یا پایین در طول محور افقی هواپیما)، شهپر حرکت چرخشی و سکان حرکت به طرف زاویه راست و یا چپ هواپیما را تولید می‌کند. کنترل چهارمی که در این نوع هواپیماها بکار گرفته می‌شود، تغییر در پیشران^۶ است که از موتورهای هواپیما بدست می‌آید. بدیهی است که برای کنترل پرواز یک هواپیما، کلیه این امکانات کنترلی بکار گرفته می‌شوند و در جنگنده‌های پیشرفته‌تر سطوح کنترلی دیگری نیز به آنها افزوده شده‌اند. پرواز دقیق و مطمئن یک هواپیما بستگی کامل به دقت و کارایی سیستم کنترل آن دارد و در صورت از کار افتادن یک یا چند ابزار کنترلی، پرواز هواپیما بسیار مشکل و خطرناک خواهد بود.

علاوه بر سطوح کنترلی که برای هدایت هواپیما از آنها استفاده می‌شود، کلیه هواپیماها سنسورهای حرکتی دارند که مقیاسی از تغییرات در متغیرهای حرکت که در اثر عوامل مختلفی ایجاد می‌شوند را فراهم می‌آورند. سیگنال‌های این سنسورها توسط یک واحد نمایش در



شکل ۱۱-۱ هواپیما با سطوح کنترلی آن

1- Control surfaces

3- Aileron

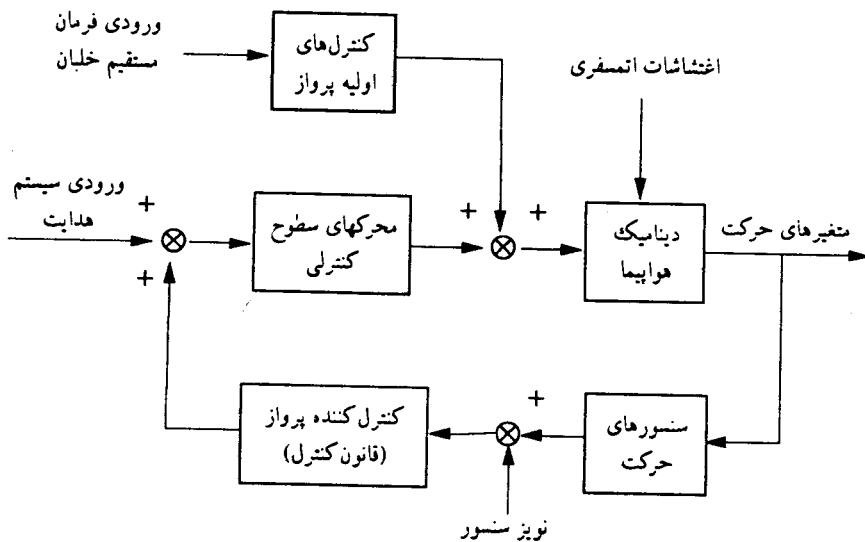
5- Pitch

2- Elevator

4- Rudder

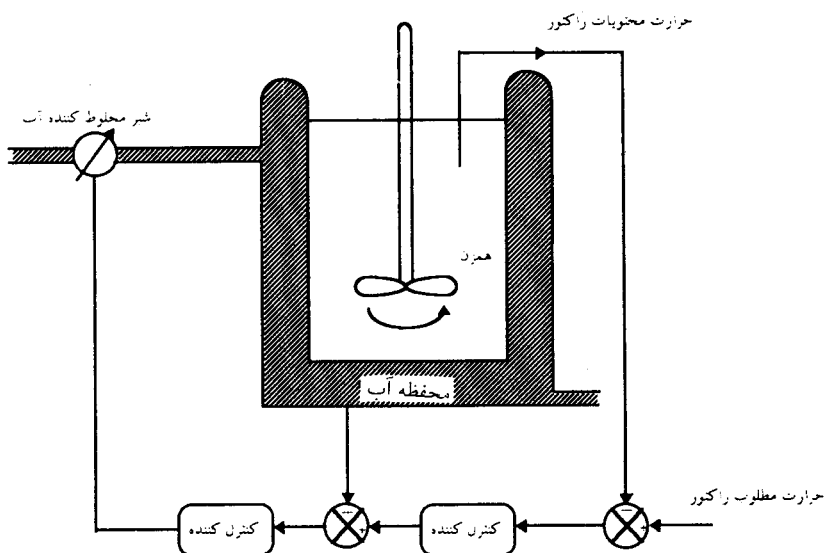
6- Thrust

اختیار خلبان گذاشته شده است و از طرف دیگر به سیستم کنترل پرواز فیدبک می‌شوند. ساختار کلی یک سیستم کنترل پرواز در شکل ۱-۱۲ نشان داده شده است. هدف کنترل کننده، مقایسه حرکت دستور داده شده (حرکت مورد نظر خلبان) با حرکت اندازه‌گیری شده است. در صورت بروز خطا، دستور کنترلی لازم توسط کنترل کننده برای تصحیح خطای ایجاد شده صادر می‌گردد. فرامین کنترلی با ارسال سیگنال‌های فرمان به محرکها، باعث انحرافات در سطوح کنترلی شده که خود موجب اعمال نیرو یا ممان کنترلی مناسب می‌شوند. لذا با تولید این نیرو یا ممان کنترلی، هواپیما بر مسیر صحیح و مطلوب حرکتی قرار خواهد گرفت. مسأله مورد بررسی در این کتاب علاوه بر تحلیل سیستم، طراحی کنترل کننده نشان داده شده در شکل ۱-۱۲ می‌باشد.



شکل ۱-۱۲ ساختار کلی یک سیستم کنترل پرواز

کنترل درجه حرارت یک راکتور حفاظ‌دار. شکل ۱-۱۳ یک راکتور را نمایش می‌دهد که برای کنترل درجه حرارت محتویات آن، از یک پوشش محتوی آب گرم استفاده می‌شود. اگرچه با اندازه‌گیری درجه حرارت داخل راکتور و پس خوراندن مستقیم آن می‌توان با



شکل ۱۳-۱ کنترل درجه حرارت راکتور

یک کنترل کننده، شیر آب گرم ورودی به حفاظ دربرگرفته راکتور را کنترل کرد، لیکن با اعمال دو حلقه کنترل به صورت نشان داده شده در شکل ۱۳-۱ می توان در عمل کنترل بهتری بدست آورد. درجه حرارت حفاظ پوششی راکتور در یک حلقه داخلی کنترل می شود. مقدار مطلوب درجه حرارت این محفظه، خروجی کنترل کننده اول می باشد. ورودی کنترل کننده اول نیز خطای ایجاد شده از مقایسه درجه حرارت مطلوب راکتور و درجه حرارت محتویات آن می باشد. برای مؤثر بودن سیستم کنترلی آرایه شده، پاسخ محفظه دربرگیرنده راکتور در مقایسه با پاسخ محتویات راکتور به تغییرات و تنظیم های کنترلی، باید بسیار سریعتر باشد. با تنظیم کنترل کننده دوم هر گونه خطای ایجاد شده بین درجه حرارت محفظه و درجه حرارت مطلوب آن به سرعت با اجرای فرامین کنترلی مناسب توسط شیر کنترلی با کم و زیاد کردن ورودی آب گرم به درون محفظه از بین خواهد رفت. وظیفه کنترل کننده اول نیز صفر کردن خطای ایجاد شده بین درجه حرارت مطلوب و درجه حرارت راکتور از طریق تعیین یک ورودی مطلوب برای کنترل کننده دوم است.

۴-۱ تعاریف

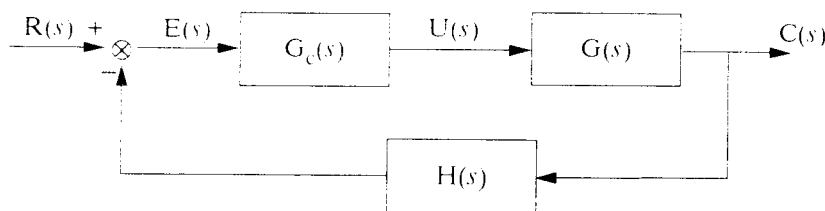
در این بخش برخی از تعاریف و اصطلاحات را که در مطالعه سیستم‌های کنترل به آنها برخورد خواهیم داشت، جهت مراجعه سریع خواننده ارایه می‌کنیم (شکل ۱-۱۴ را ببینید).

سیستم. مجموعه‌ای از عناصر است که با هم عمل می‌کنند تا کار معینی را انجام دهند به طوریکه انجام این کار توسط هیچکدام از عناصر به تنهایی امکان‌پذیر نباشد. سیستم تحت کنترل $G(s)$ را دستگاه^۱ یا فرایند^۲ نامیده و در این کتاب با عنوان سیستم، نامیده شده است. ورودی مرجع. ورودی مرجع $R(s)$ که نقطه نشانه^۳ یا خروجی مطلوب^۴ نیز نامیده می‌شود، نشان دهنده پاسخ مطلوب سیستم است. به عبارت دیگر هدف یا مشخصه عملکرد مطلوب سیستم موقعی برآورده می‌گردد که خروجی سیستم به این مقدار برسد.

خروجی سیستم. خروجی سیستم $C(s)$ که خروجی کنترل شده^۵ نیز نامیده می‌شود، سیگنالی است که از سیستم تحت کنترل بدست می‌آید و مایل به اندازه‌گیری و کنترل آن می‌باشیم. خروجی در حقیقت پاسخ واقعی سیستم در هر واحد زمانی است.

خطای سیستم. سیگنال خطای $E(s)$ ، تفاوت بین خروجی مطلوب سیستم (ورودی مرجع) و خروجی واقعی آن است. در شکل ۱-۱۴، $E(s)$ برای $H(s)=1$ تعریف می‌شود.

کنترل کننده. کنترل کننده $G_c(s)$ عنصری است که برای تعیین سیگنال کنترلی مناسب جهت اعمال به سیستم بکار گرفته می‌شود.



شکل ۱-۱۴ یک سیستم کنترل

1- Plant

2- Process

3- Set-point

4- Desired output

5- Controlled output

عنصر فیدبک. عنصری است که در مسیر خروجی به مقایسه کننده قرار می گیرد. اگر $H(s)=1$ باشد، سیستم را حلقه - بسته با فیدبک واحد می نامند. اگر $H(s) \neq 1$ باشد، سیستم حلقه - بسته با فیدبک غیر واحد خواهد بود. در این حالت خطای سیستم تفاضل ورودی مرجع و خروجی واقعی سیستم است و نه تفاضل خروجی عنصر فیدبک و ورودی مرجع. ورودی کنترل. ورودی کنترل $U(s)$ که عمل کنترلی^۱ یا سیگنال کنترلی^۲ نیز نامیده می شود، خروجی سیستم کنترل و ورودی اعمال شده به سیستم تحت کنترل است. مسیر پیشرو. مسیر از سیگنال خطا $E(s)$ تا خروجی $C(s)$ را مسیر پیشرو می نامند و $G_c(s)$ و $G(s)$ را شامل می گردد.

مسیر فیدبک. مسیری از خروجی است که از $H(s)$ عبور می کند.

اغتشاش یا نویز. سیگنال اغتشاش^۳ یا نویز، یک سیگنال ورودی به سیستم است که در هر نقطه ای بجز ورودی مرجع می تواند وارد سیستم گردد و اثر نامعینی بر روی عملکرد طبیعی سیستم بگذارد.

سیستم خطی و سیستم غیر خطی. سیستم خطی سیستمی است که اصل جمع آثار^۴ در آن صادق باشد. اصل جمع آثار بیان می دارد که خروجی یک سیستم خطی $y(t)$ ناشی از ورودیهای مختلف مانند $x_1(t), \dots, x_r(t), \dots, x_n(t)$ که همزمان عمل می کنند، برابر با مجموع پاسخها بر اثر عمل کردن هر ورودی به تنهایی است. به عبارت دیگر اگر $y_i(t)$ پاسخ ناشی شده از $x_i(t)$ باشد، آنگاه

$$y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t)$$

سیستمی را غیر خطی^۵ گویند که اصل جمع آثار در آن صادق نیست. تقریباً اکثریت سیستمها بجز سیستمهای ساده، در عمل غیر خطی هستند. لیکن این سیستمها را عموماً می توان در حول یک نقطه کار معین خطی کرد و از مدل خطی شده برای تحلیل و طراحی سیستم در گستره خطی استفاده نمود.

1- Control action

2- Control signal

3- Disturbance signal

4- Superposition principle

5- Nonlinear

سیستم تغییر ناپذیر با زمان و تغییر پذیر با زمان. سیستم تغییر ناپذیر با زمان^۱ سیستمی است که در آن پارامترها و مشخصه‌های سیستم با زمان تغییر پیدا نمی‌کنند و حال آنکه در سیستم تغییر پذیر با زمان^۲، پارامترها و مشخصه‌های سیستم با زمان تغییر پیدا می‌کنند.

سیستم زمان - پیوسته و سیستم زمان - گسسته. سیستم زمان - پیوسته^۳ سیستمی است که در آن سیگنال‌ها، تابع پیوسته‌ای از زمان می‌باشند. سیستم زمان - گسسته^۴ سیستمی است که در آن سیگنال‌ها به صورت گسسته، پالسی ظاهر شده و به عبارت دیگر سیگنال‌ها بر خلاف حالت پیوسته تنها در لحظه‌های مختلف زمانی مقدار پیدا می‌کنند.

سرومکانیزم. به آن از دسته سیستم‌های مکانیکی اطلاق می‌شود که در آنما خطای حالت - ماندگار برای یک سیگنال ثابت ورودی صفر است. به عبارت دیگر در سیستم‌های سرو^۵ حالت دنبال روندگی ورودی مرجع توسط خروجی وجود دارد. در این سیستم‌ها خروجی الزاماً باید ورودی مرجع را دنبال کند.

رگلاتور^۶. به سیستم‌هایی اطلاق می‌شود که در آنها خروجی حالت - ماندگار برای سیگنال ثابت، مقداری ثابت دارد. در این سیستم‌ها حالت دنبال روندگی در پاسخ سیستم وجود ندارد.

سیستم کنترل حلقه - باز. سیستمی که در آن خروجی اثری بر روی سیگنال ورودی ندارد.

سیستم کنترل حلقه - بسته. سیستمی است که در آن خروجی به گونه‌ای بر ورودی اثر می‌گذارد که خروجی در مقداری مطلوب باقی بماند.

در این کتاب تنها سیستم‌های خطی، تغییر ناپذیر با زمان و زمان - پیوسته در نظر گرفته خواهند شد.

مسایل

۱-۱- در یک ناوایی مشخصه عملکرد مطلوب سیستم میزان برشتگی نان است. ورودی به سیستم که توسط یک شیر کنترل می‌شود، نرخ گازوییل وارد شده به منبع تولید

1- Time invariant

2- Time varying

3- Continuous-time

4- Discrete-time

5- Servo

6- Regulator

حرارت برای گرم کردن تنور است. دو نوع سیستم کنترل حلقه - باز و حلقه - بسته برای سیستم کنترل نانوایی را توسط نانوا توضیح دهید.

۲-۱- کدامیک از بندهای (الف) تا (و) برای کنترل حلقه - باز، کنترل حلقه - بسته و کنترل پیش خور الزامی است؟

(الف) یک مدل برای تعیین اثرات اعمال کنترل.

(ب) یک مدل برای تعیین اثرات عوامل خارجی.

(ج) یک هدف.

(د) اندازه‌گیری اثرات عوامل خارجی.

(ه) اندازه‌گیری اثر کنترل.

(و) مقایسه بین هدف و اثر کنترل.

۳-۱- از یک ترموستات برای کنترل درجه حرارت آب گرم یک مخزن استفاده می‌شود. اگر آب را از موقعیکه سرد است گرم کنند، با استفاده از رسم درجه حرارت آب بر حسب زمان، اساس عملکرد چنین وسیله‌ای را توضیح دهید. چرا از یک سیستم ساده حلقه - باز به جای این سیستم استفاده نمی‌شود؟

۴-۱- کنترل سیگنال‌های ترافیک را در چهارراه به دو روش حلقه - باز و حلقه - بسته توضیح دهید.

۵-۱- یک سیستم کنترل دست ربات را با رسم شکل‌های مناسب توضیح دهید.

۶-۱- در یک سیستم کنترل سطح مایع، چه مشکلاتی ممکن است با استفاده از کنترل حلقه - باز رخ دهد؟ آیا می‌توان این مشکلات را با بکارگیری یک روش حلقه - بسته بر طرف کرد.

۷-۱- اساس کار سیستم کنترل آسانسورها را توضیح دهید.

۸-۱- به سیستمی که چند ورودی و چند خروجی داشته باشد، سیستم چند متغیره گویند. یک سیستم عملی را مثال بزنید که تعداد ورودی و خروجیهای آن از یک بیشتر است.

مراجع فصل اول

- [1-1] Bennett, S., *A history of control engineering 1800-1930*, Peter peregrinus Ltd, 1986.
- [1-2] Bode, H. W., *Feedback - The history of an idea*, in selected papers on mathematical trends in control theory, Dover, New York, pp 106-123, 1964.
- [1-3] Maskrey, R. H. and Thayer, W. J., *A brief history of electrohydraulic servomechanisms*, ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and control, pp 110-116, 1978.
- [1-4] Mayr, O., *Origins of feedback control*, MIT press, Cambridge, Mass., 1971.
- [1-5] Singh, M., *Encyclopedia of systems and control*, Pergamon press, 1987.
- [1-6] IEEE Standard dictionary of Electrical and Electronics terms, Wiley - Interscience, New York, 1972.
- [1-7] Black, H.S., *Inverting the negative feedback amplifier*, IEEE Spectrum, pp 55-60, 1977.
- [1-8] Hazen, H. L., *Theory of servomechanisms*, J. Franklin Institute, 218, pp 543-580, 1934
- [1-9] Maxwell, J. C., *On governors*, Proceedings of the Royal Society (London), 16, pp 270-283, 1868.
- [1-10] Minorsky, N., *Control prolems*, J. Franklin Institute., 232, p. 451, 1941.

کتاب شناسی

در اکثر کتابهای مهندسی کنترل مقدمه‌ای در رابطه با مفاهیم کنترل، تعاریف و تاریخچه کنترل وجود دارد. مرجع [1] تعاریف و اصطلاحات مهندسی کنترل را برحسب استاندارد IEEE ارایه کرده است. در مراجع [1] تا [5] می‌توان مثالهای عملی از سیستم‌های کنترل را پیدا کرد. مرجع [11] مثالهای عملی از کنترل در مهندسی پزشکی دارد. واحد (1) از مرجع [24] مقدمه‌ای جامع بر مهندسی کنترل است. مراجع [1-1] تا [1-4] در رابطه با تاریخچه مهندسی کنترل فوق‌العاده سودمند می‌باشند. مرجع [1-5] دایرةالمعارفی از کلیه مباحث کنترلی تا سال ۱۹۸۷ است که در رابطه با مقدمه‌ای بر کنترل و تاریخچه آن بسیار جامع است. مرجع [1-6] کتاب لغت استاندارد IEEE در مهندسی برق و الکترونیک است. مراجع [1-7] الی [1-10] نیز تنها چند نمونه از نمونه‌های زیاد مقالات کلاسیک و پایه در نظریه کنترل اتوماتیک محسوب می‌شوند.

۲

نمایش سیستم‌های کنترل خطی

اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با مفهوم تابع تبدیل و بدست آوردن توابع تبدیل سیستم‌های کنترل و اجزاء آنها.
 - ۲- رسم دیاگرام‌های بلوکی و نمودارهای گذر سیگنال برای یک سیستم کنترل و بررسی چگونگی کاربرد آنها.
 - ۳- آشنایی با نمایش سیستم توسط متغیرهای حالت و مفاهیم اولیه فضای حالت.
 - ۴- مدلسازی سیستم‌های فیزیکی.
 - ۵- آشنایی با مدلسازی موتورهای DC، به عنوان یک نمونه سیستم صنعتی.
- توجه: قبل از مطالعه این فصل آشنایی با تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن الزامی است.

۱-۲ مقدمه

در مسایل عملی مهندسی کنترل، قبل از شروع تحلیل سیستم به منظور طراحی سیستم کنترل، در دست داشتن یک مدل دقیق ریاضی از سیستم الزامی است. در واقع اولین قدم در راه طراحی سیستم کنترل برای یک سیستم، مدلسازی آن سیستم توسط بیان مشخصه‌های آن با معادلات ریاضی است. لذا بدست آوردن مدل ریاضی سیستم که نمایانگر مشخصه‌های آن است، از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار می‌باشد.

بدون شک توصیف کامل عملکرد و عملیات سیستم فیزیکی برحسب معادلات ریاضی، یک مجموعه بسیار پیچیده از تعداد زیادی معادله و روابط ریاضی را به همراه خواهد داشت که به علت پیچیدگی بیش از اندازه برای تحلیل و طراحی سیستم مناسب نخواهد بود. از طرف دیگر، مدل ریاضی سیستم فیزیکی نباید بیش از اندازه ساده باشد، ساده سازی بیش از اندازه موجب میشود که مشخصه‌های مهم سیستم در مدل آن وارد نشود و تحلیل انجام شده بر اساس مدل، غلط یا غیرکافی باشد و هم‌چنین سیستم کنترل طراحی شده براساس این چنین مدلی نامناسب خواهد بود. بنابراین در تعیین مدل ریاضی یک سیستم فیزیکی، باید مشخصه‌های مهم و اساسی سیستم در مدلسازی در نظر گرفته شوند و در این انتخاب مقدار متناهی تجربه و دید عملی لازم است.

برای سیستم‌های دینامیکی مورد بررسی در این کتاب، معادلات دیفرانسیل یک صورت مناسب برای توصیف ریاضی سیستم است.

۲-۲ توابع تبدیل

همانطور که در مقدمه اشاره شد، برای تحلیل درست و دقیق یک سیستم، بدست آوردن مدل آن لازم است. این مدل می‌تواند توسط روشهای پیشرفته شناسایی سیستم^۱ از داده‌های ورودی - خروجی^۲ سیستم، یا با ترکیب اطلاعات اجزاء جداگانه تشکیل دهنده سیستم بدست آورده شود. در هر دو صورت، با تعیین مدل می‌توان پاسخ^۳ سیستم به ورودیهای وارده به آن را بدست آورد. به عبارت دیگر، خروجی مدل ریاضی سیستم در پاسخ به ورودی اعمال

1- System identification

2- Input-output data

3- Response

شده به آن باید با خروجی سیستم واقعی در پاسخ به همان ورودی، یکسان باشد. مدل ریاضی را می توان به صورت تابعی در نظر گرفت که به ازاء ورودیهای مختلف، خروجیهای متناظر با سیستم واقعی را نشان می دهد. این چنین تابعی را تابع تبدیل^۱ می نامند.

در سیستم های دینامیکی رابطه بین ورودی سیستم $u(t)$ و خروجی سیستم $y(t)$ را می توان به صورت یک معادله دیفرانسیل به صورت زیر نوشت

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y(t) = (b_mD^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0)u(t) \quad (1-2-2)$$

که در آن

$$Dy(t) = \frac{d}{dt}y(t), D^2y(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t), \dots$$

هم چنین ضرایب $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ و $b_0, b_1, \dots, b_m$ مقادیر حقیقی هستند که توسط مشخصه های سیستم تعیین می گردند، مرتبه های n و m نیز مستقیماً با ساختار سیستم ارتباط دارند.

توجه کنید که با مشخص کردن اعداد صحیح n و m ، همراه با ضرایب $a_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ و $b_j, j = 0, 1, \dots, m$ برای یک دسته داده شده مقادیر اولیه در $t = t_0$ پاسخ سیستم برای هر $t > t_0$ را می توان با حل معادله دیفرانسیل داده شده با معادله (۱-۲-۲) بدست آورد. لیکن حل این معادله دیفرانسیل در حالت کلی کار ساده ای نیست و با بزرگ شدن اعداد صحیح n و m مشکل خواهد بود. به این دلیل برای پیدا کردن پاسخ سیستم های فیزیکی و صنعتی از این روش نمی توان استفاده نمود.

یک راه حل بسیار ساده، استفاده از تبدیل لاپلاس است. با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله (۱-۲-۲) و فرض شرایط اولیه صفر در $t = t_0$ داریم

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)U(s) \quad (2-2-2)$$

که در آن $U(s)$ و $Y(s)$ نیز به ترتیب مقادیر تبدیل شده سیگنال های ورودی $u(t)$ و خروجی $y(t)$ هستند.

معادله (۲-۲-۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (۳-۲-۲)$$

که در آن $G(s)$ مستقل از سیگنال‌های ورودی و خروجی، تابعی است که ورودی $U(s)$ را به خروجی $Y(s)$ تبدیل می‌کند (یا انتقال می‌دهد). بنابراین در حالت کلی، تابع تبدیل را می‌توان به صورت نسبت دو چند جمله‌ای با شرایط اولیه صفر به صورت زیر در نظر گرفت

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (۴-۲-۲)$$

درجه چند جمله‌ای مخرج $G(s)$ را مرتبه سیستم^۱ نامیده و سیستم را یک سیستم مرتبه m/n می‌نامند. ضرایب a_i ها و b_i ها در تابع تبدیل $G(s)$ ، ثابت و تغییرناپذیر با زمان هستند. کاربرد ایده تابع تبدیل به سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان محدود می‌شود.

در اینجا مراحل بدست آوردن تابع تبدیل یک سیستم فیزیکی را بیان می‌کنیم:

۱- معادله دیفرانسیل سیستم را بنویسید.

۲- با فرض صفر بودن کلیه شرایط اولیه، تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل را پیدا کنید.

۳- نسبت خروجی $Y(s)$ به ورودی $U(s)$ را پیدا کنید. این نسبت، تابع تبدیل است.

مثال ۱-۲-۲

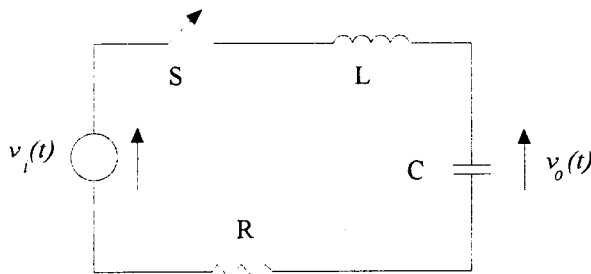
مدار سری RLC نشان داده شده در شکل ۱-۲ را در نظر بگیرید. فرض کنید که تا قبل از بسته شدن کلید S در زمان $t = t_0 = 0$ ، جریان $i(t)$ وجود ندارد و هم چنین خازن C نیز شارژ نشده باقی می‌ماند. مطلوب است تابع تبدیل مدار با ولتاژ ورودی $v_i(t)$ و ولتاژ خروجی $v_o(t)$ را برای $t \geq t_0$ تعیین کنیم.

نخست معادله دیفرانسیل مدار را با استفاده از قانون ولتاژ کیرشوف^۳ می‌نویسیم. با استفاده از این قانون ولتاژ ورودی $v_i(t)$ باید برابر مجموع افت ولتاژهای دو سر سلف، خازن و مقاومت باشد. یعنی آنکه

1- System order

2- n-th order system

3- Kirchhoff's voltage law



شکل ۱-۲ مدار RLC سری با ورودی $v_i(t)$

$$v_i(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + Ri(t)$$

برای از بین بردن عبارت انتگرالی، با مشتق‌گیری از طرفین معادله بالا داریم

$$Dv_i(t) = (LD^2 + RD + \frac{1}{C})i(t)$$

اکنون با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله بالا داریم

$$CsV_i(s) = (LCs^2 + RCs + 1)I(s)$$

یا

$$I(s) = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s)$$

تابع تبدیل بدست آمده، ولتاژ ورودی $V_i(s)$ را به جریان $I(s)$ ارتباط می‌دهد. در مرحله بعد

باید تابع تبدیل بین جریان و ولتاژ خروجی $V_o(s)$ را بدست آوریم.

ولتاژ دو سر خازن C ، که ولتاژ خروجی نیز هست، عبارتست از

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

یا

$$Dv_o(t) = \frac{1}{C} i(t)$$

که تبدیل لاپلاس آن عبارتست از

$$V_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

با جایگزینی برای $I(s)$ از معادله بالا، تابع تبدیل بین ولتاژ خروجی و ورودی چنین است

$$V_o(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s)$$

مثال ۲-۲-۲

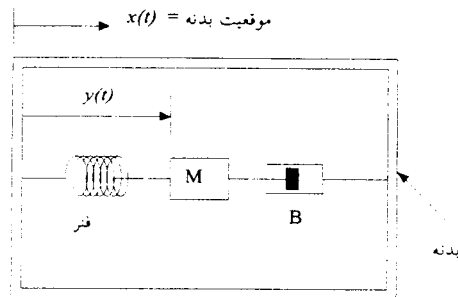
سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۲-۲ یک شتاب‌سنج^۱ ساده است. موقعیت جرم M نسبت به شتاب‌سنج $y(t)$ متناسب با شتاب بدنه است. تابع تبدیل بین شتاب ورودی $A(s)$ و خروجی $Y(s)$ را پیدا کنید.

معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم، از مساوی قرار دادن مجموع نیروهای عمل‌کننده بر روی جرم M ، با شتاب اینرسی آن بدست می‌آید. از قانون دوم نیوتن داریم

$$-B \frac{dy(t)}{dt} - Ky(t) = M \frac{d^2}{dt^2} (y(t) - x(t))$$

یا

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = Ma(t)$$



شکل ۲-۲ شتاب‌سنج مثال ۲-۲-۲

که در آن $a(t)$ شتاب ورودی است. با فرض شرایط اولیه صفر، پس از تبدیل لایلاس داریم

$$(Ms^2 + Bs + K)Y(s) = MA(s)$$

بنابراین تابع تبدیل شتاب‌سنج عبارتست از

$$\frac{Y(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2 + (B/M)s + K/M}$$

در اینجا، چند نکته مهم را در رابطه با توابع تبدیل عنوان می‌کنیم:

- ۱- تابع تبدیل یک سیستم، یک مدل ریاضی از آن سیستم است که رابطه بین متغیر ورودی و متغیر خروجی را بیان می‌دارد.
- ۲- تابع تبدیل یک خاصیت از خود سیستم است و مستقل از اندازه و ماهیت ورودی به آن می‌باشد.
- ۳- توابع تبدیل سیستم‌های فیزیکی مختلف می‌توانند یکسان باشند. در واقع توابع تبدیل ارتباط بین ورودی و خروجی را بدست می‌دهند و هیچ‌گونه اطلاعاتی در رابطه با ساختار داخلی سیستم در اختیار ما نمی‌گذارد.
- ۴- با در دست داشتن تابع تبدیل یک سیستم، می‌توان از ماهیت سیستم توسط بررسی پاسخهای آن به ورودیهای مختلف، اطلاعات مفیدی به دست آورد.

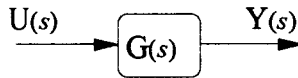
۳-۲ دیاگرام‌های بلوکی

در بخش ۲-۲ توصیف ریاضی سیستم را برحسب نمایش تابع تبدیل بررسی کردیم. اگر تنها با سیستم‌های ساده همچون مثالهای قبل سروکار داشته باشیم، ضرورتی برای نمایشهای دیگر از سیستم احساس نخواهیم کرد. لیکن اگر سیستم ساده قبل، جزئی از یک مجموعه از سیستم‌ها باشد که با هم ارتباط خاصی داشته باشند، آنگاه تابع تبدیل کل سیستم، تابع پیچیده‌ای خواهد بود که به ارتباط بین این سیستم‌ها بستگی خواهد داشت. اگر چه می‌توان با ارتباط بین سیستم‌های مختلف به صورت کاملاً جبری برخورد کرد، لیکن با زیاد شدن اجزاء سیستم، ارتباط دادن معادله‌های مختلف با سیستم‌هایی که آنها را نمایش می‌دهند، بسیار مشکل خواهد بود. یک راه حل این مشکل، نمایش دادن سیستم مورد نظر توسط دیاگرام بلوکی^۱ است، که یک نمایش گرافیکی می‌باشد. با استفاده از این نمایش، بسادگی می‌توان سیستم‌های (یا کنترل‌کننده‌های) دیگری را به مجموع سیستم کنترل اضافه و یا کم کرد. یک مزیت استفاده از دیاگرام‌های بلوکی آن است که می‌توان با سرعت و دقت زیاد، ترکیبهای مختلفی برای سیستم کنترل در نظر گرفت.

۱-۳-۲ اجزاء اصلی دیاگرام‌های بلوکی

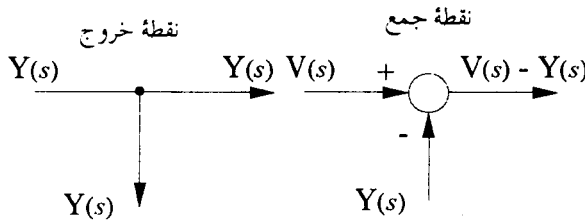
توصیف سیستم توسط تابع تبدیل که در بخش ۲-۲ معرفی گردید، به صورت دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۳-۲ نمایش داده می‌شود. از اینرو دیاگرام بلوکی شکل ۳-۲ و معادله $Y(s) = G(s)U(s)$ نمایشهای مختلف از یک سیستم هستند و دقیقاً یک معنی را بیان می‌کنند.

همانطور که از شکل ۳-۲ مشاهده می‌گردد، سیگنال‌های $U(s)$ و $Y(s)$ بر حسب یک جهت که به پیکانها داده شده است، نشان داده شده‌اند و بلوک نیز مدل سیستم که با $G(s)$ نشان داده شده است را دربرمی‌گیرد.



شکل ۳-۲ دیاگرام بلوکی یک تابع تبدیل

دو جزء اصلی دیگر یک نمایش دیاگرام بلوکی، نقطه جمع^۱ و نقطه خروج^۲ هستند. این دو نقطه در شکل ۴-۲ نشان داده شده‌اند.



شکل ۴-۲ نقاط جمع و خروج

نقطه جمع که معمولاً با یک دایره نمایش داده می‌شود (در بعضی از کتابها از علامتهای Σ یا $\times$ در داخل دایره استفاده می‌شود) می‌تواند هر چند تعداد سیگنال ورودی داشته باشد، هر

1- Summing point

2- Take-off point

کدام از این سیگنال‌ها یک علامت + یا - را با خود دارند که نشان دهنده عمل جمع یا تفریق آن سیگنال با سایر سیگنال‌ها است. نقطه جمع تنها یک خروجی دارد که به سایر قسمت‌های دیاگرام بلوکی وارد می‌شود. در صورت لزوم استفاده از یک متغیر در چندین محل، می‌توان از تعداد مناسبی نقاط خروج استفاده نمود.

۲-۳-۲ عملیات جبری بلوک دیاگرامی

دیاگرام‌های بلوکی سیستم‌های کنترل عملی اغلب بسیار پیچیده هستند. این دیاگرام‌های بلوکی عموماً چندین حلقه فیدبک و پیش‌خور و چندین ورودی دارند. با استفاده از روش سیستماتیک کاهش بلوک‌ها و حلقه‌ها، می‌توان این دیاگرام‌های بلوکی را به صورت ساده تبدیل کرد و توابع تبدیل قسمت‌های مختلف و یا تابع تبدیل کل سیستم را بدست آورد. یک دسته از عملیات جبری دیاگرام بلوکی در جدول ۱-۲ آورده شده‌اند. برای تمرین، با بکارگیری قواعد اجزاء اصلی دیاگرام‌های بلوکی، قواعد ۱ تا ۱۳ جدول ۱-۲ را می‌توانید بسادگی اثبات کنید.

مراحل زیر را می‌توان برای کاهش دیاگرام‌های بلوکی بکار بست. در این مراحل از قواعد جدول ۱-۲ استفاده شده است.

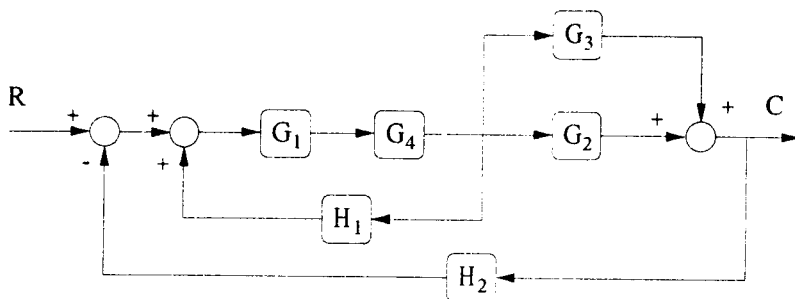
مرحله ۱: با استفاده از قاعده ۴ جدول ۱-۲، کلیه بلوک‌های سری را ترکیب کنید.
 مرحله ۲: با استفاده از قاعده ۵ جدول ۱-۲، کلیه بلوک‌های موازی را ترکیب کنید.
 مرحله ۳: با استفاده از قاعده ۱۳ جدول ۱-۲، کلیه حلقه‌های فیدبک جزئی را حذف کنید.

مرحله ۴: با استفاده از قواعد ۶ و ۷ جدول ۱-۲، نقاط جمع را به طرف چپ و نقاط خروج را به طرف راست حلقه اصلی انتقال دهید.

مرحله ۵: مراحل ۱ تا ۴ را در صورت لزوم تکرار کنید، تا دیاگرام بلوکی به صورت استاندارد فیدبک تبدیل شود.

مثال ۱-۳-۲

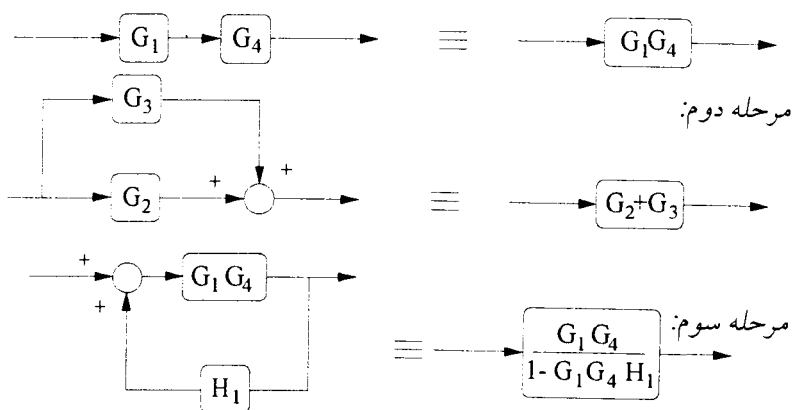
دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۲-۵ را به صورت یک حلقه فیدبک تبدیل کنید.



شکل ۵-۲ دیاگرام بلوکی مثال ۱-۳-۲

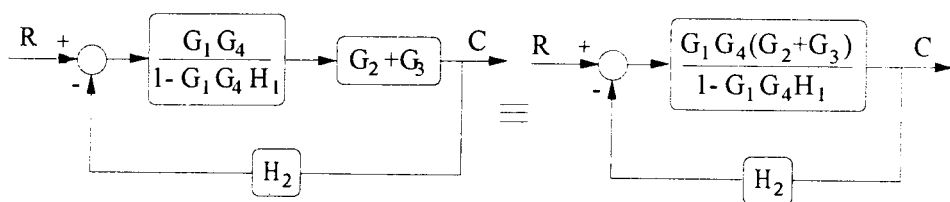
اکنون مراحل کاهش دیاگرام بلوکی را اجرا می‌کنیم.

مرحله اول:



مرحله چهارم: در این مثال موردی ندارد

مرحله پنجم:



	دیاگرامهای بلوکی اصلی	دیاگرامهای بلوکی معادل
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

جدول ۱-۲ قواعد جبر دیاگرام بلوکی

توجه کنید که در صورت لزوم با اعمال قاعده ۱۳ از جدول ۱-۲، می توان تابع تبدیل حلقه - بسته را بدست آورد.

۲-۳-۳ رسم دیاگرام بلوکی سیستم های فیزیکی

در اینجا مراحل رسم دیاگرام بلوکی برای یک سیستم را ارایه می کنیم:

مرحله ۱: معادلات توصیف کننده رفتار هر عنصر را بنویسید.

مرحله ۲: تبدیل لاپلاس معادلات بدست آمده از مرحله اول را بگیرید (شرایط اولیه را صفر فرض کنید).

مرحله ۳: هر کدام از معادلات تبدیل لاپلاس گرفته شده را به صورت یک بلوک مجزا رسم کنید.

مرحله ۴: بلوک های بدست آمده در مرحله ۳ را در یک دیاگرام بلوکی کامل، ترکیب کنید.

مثال ۲-۳-۲

مدار RC نشان داده شده در شکل ۲-۶ (الف) را در نظر بگیرید. دیاگرام بلوکی مدار را رسم کنید.

نخست معادلات مدار را می نویسیم. داریم

$$i = \frac{e_i - e_o}{R}$$

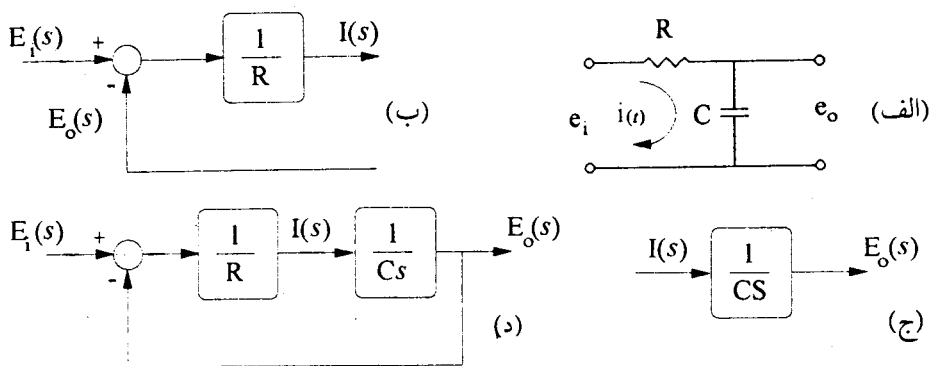
$$e_o = \frac{\int i dt}{C}$$

تبدیل لاپلاس این معادله ها، با شرط صفر بودن شرایط اولیه، عبارتند از

$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R}$$

$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

معادله $I(s)$ یک عمل جمع را نشان می دهد و دیاگرام بلوکی متناظر آن در شکل ۲-۶ (ب) نشان داده شده است. معادله $E_o(s)$ دیاگرام بلوکی شکل ۲-۶ (ج) را نشان می دهد. در آخرین



شکل ۶-۲ (الف) مدار RC (ب) دیاگرام بلوکی معادله $I(s)$

(ج) دیاگرام بلوکی معادله $E_o(s)$ (د) دیاگرام بلوکی مدار RC

مرحله با سرهم کردن این دو عنصر، دیاگرام بلوکی کلی نشان داده شده در شکل ۶-۲ (د) را بدست می آوریم.

مثال ۳-۳-۲

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۷-۲ را در نظر بگیرید. برای این سیستم یک دیاگرام بلوکی رسم کنید. با ساده کردن دیاگرام بلوکی بدست آمده، تابع تبدیل بین $X_o(s)$ و $X_i(s)$ را پیدا کنید. فرض کنید که جابجایی x_o از موقعیت تعادل هنگامیکه $x_i = 0$ است، اندازه گرفته می شود.

نخست معادلات دیفرانسیل اجزاء سیستم را می نویسیم. مجموع نیروهای عمل کننده بر روی جرم m را به صورت F تعریف کنید. معادلات سیستم عبارتند از

$$mD^2x_o = F$$

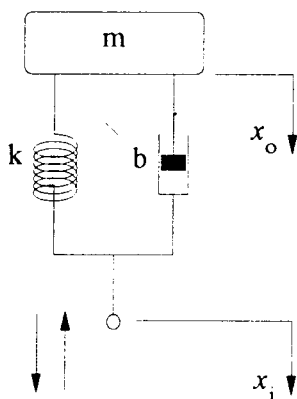
$$F = -b(Dx_o - Dx_i) - k(x_o - x_i)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از این معادله ها، با فرض شرایط اولیه صفر، داریم

$$ms^2X_o(s) = F(s)$$

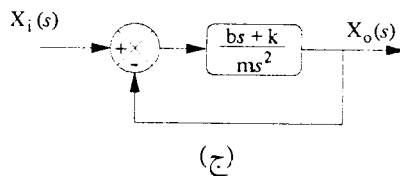
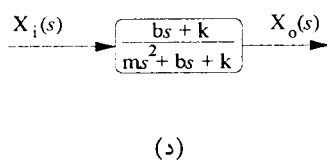
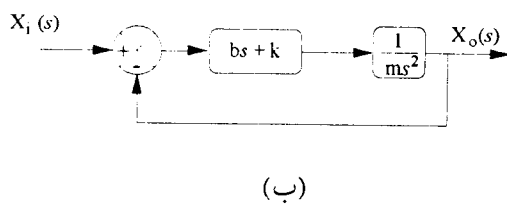
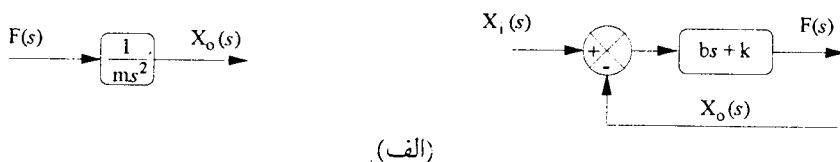
$$F(s) = -b[sX_o(s) - sX_i(s)] - k[X_o(s) - X_i(s)]$$

$$= (bs+k)[X_i(s) - X_o(s)]$$



شکل ۷-۲ سیستم مکانیکی مثال ۳-۳-۲

از معادلات تبدیل لاپلاس گرفته شده، عناصر دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۸-۲



شکل ۸-۲ (الف) عناصر یک دیاگرام بلوکی. (ب) دیاگرام بلوکی حاصل از ترکیب عناصر. (ج) و (د) دیاگرام‌های بلوکی ساده شده.

(الف) را بدست می آوریم. با سرهم کردن مناسب این دو دیاگرام بلوکی، همانطور که در شکل ۸-۲ (ب) نشان داده شده است، دیاگرام بلوکی سیستم بدست می آید. با استفاده از قواعد ۴ و ۱۳ از جدول ۸-۲، دیاگرام بلوکی ورودی - خروجی و تابع تبدیل تبدیل سیستم، همانند شکل ۸-۲ (ج) و (د)، بدست می آید. لذا داریم

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$$

۴-۲ نمودارهای گذر سیگنال

نمایش ترسیمی سیستم های کنترل به صورت دیاگرام های بلوکی در بخش ۳-۲ ارایه شد. یک روش دیگر برای نمایش ترسیمی سیستم های کنترل، روش نمودار گذر سیگنال^۱ است. باید توجه داشت که هر دو روش حاوی اطلاعات مشابهی در رابطه با سیستم می باشند و لذا از این نظر مزیتی بر یکدیگر نخواهند داشت.

نمودار گذر سیگنال، نمایشی تصویری از دستگاه معادلات جبری است که سیستم را توصیف می کنند. لذا باید برای اعمال روش نمودار گذر سیگنال در تحلیل سیستم های کنترل، نخست معادلات دیفرانسیل خطی سیستم را به معادلات جبری در تبدیل کرد. در واقع، همانند دیاگرام های بلوکی، نمودارهای گذر سیگنال انتقال سیگنال را در سیستم به صورت تصویری نمایش می دهند. لیکن رسم آن ساده تر از رسم دیاگرام های بلوکی است و بنابراین کار کردن با آن ساده تر می باشد.

یک نمودار گذر سیگنال از یک شبکه تشکیل می شود، که در آن گره ها توسط شاخه های جهت داده شده به هم متصل می باشند. هر گره نشان دهنده یک متغیر سیستم است و هر شاخه بین دو گره به صورت یک ضرب کننده سیگنال عمل می کند. در هر شاخه سیگنال فقط در یک جهت حرکت می کند و این جهت توسط پیکانی که بروی شاخه سوار است نشان داده می شود. برای مثال معادله ساده $x_i = f_{ij} x_j$ را در نظر بگیرید، که در آن x_j و x_i می توانند توابعی از زمان، فرکانس مختلط و یا هر کمیت دیگری باشند، f_{ij} نیز یک عمل ریاضی است که x_j را به x_i انتقال می دهد. نمودار گذر سیگنال این معادله ساده در شکل ۹-۲ نشان داده شده است.



شکل ۹-۲ گراف جریان سیگنال معادله $x_i = t_{ij}x_j$

قبل از آنکه به بحث بیشتری در رابطه با نمودارهای گذر سیگنال و کاربرد آنها بپردازیم، به تعاریف مقدماتی زیر توجه کنید.

گره^۱: گره نقطه‌ای است که یک متغیر یا سیگنال را نشان می‌دهد.

انتقال^۲: انتقال یک بهره حقیقی یا بهره مختلط بین دو گره است. این چنین بهره‌هایی را می‌توان برحسب تابع تبدیل بین دو گره بیان کرد.

شاخه^۳: شاخه یک پاره خط جهت داده شده است که دو گره را به هم متصل می‌کند. بهره یک شاخه، انتقال است.

گره ورودی^۴ یا منبع^۵: یک گره ورودی یا منبع گره‌ای است که تنها شاخه‌هایی به آن متصل است که از آن خارج می‌شوند. این گره متناظر با یک متغیر مستقل است.

گره خروجی^۶ یا سینک^۷: یک گره خروجی یا سینک گره‌ای است که تنها شاخه‌هایی به آن متصل است که به آن وارد می‌شوند. این گره متناظر با یک متغیر وابسته است.

گره مخلوط^۸: یک گره مخلوط گره‌ای است که شاخه‌هایی دارد که هم به آن وارد و هم از آن خارج می‌شوند.

مسیر^۹: مسیر یک پیمایش از شاخه‌های متصل در جهت پیکانهای شاخه است. اگر هیچ‌گره‌ای بیش از یکبار قطع نشود، مسیر باز است. اگر مسیر در گره‌ای که آغاز شده است، خاتمه یابد و هیچ‌گره‌ای دیگری بیش از یک بار قطع نشود، مسیر بسته است. اگر مسیری بعضی از گره‌ها را بیش از یک بار قطع کند و در گره‌ای غیر از گره‌ای که از آن آغاز کرده خاتمه یابد، نه باز است و نه بسته.

1- Node

2- Transmittance

3-Branch

4- Input node

5- Source

6- Output node

7- Sink

8- Mixed node

9- Path

خواص نمودارهای گذر سیگنال. چند خاصیت مهم از نمودارهای گذر سیگنال عبارتند از:

۱- یک شاخه نشان دهنده وابستگی تابعی^۱ یک سیگنال به سیگنال دیگر است. سیگنال

تنها در جهتی عبور خواهد کرد که توسط پیکان شاخه مشخص گردیده است.

۲- یک گره، سیگنال‌های کلیه شاخه‌های ورودی به آن را با هم جمع می‌کند و این مجموع

را به کلیه شاخه‌هایی که از آن خارج می‌شوند، انتقال می‌دهد.

۳- هر شاخه با انتقال واحد، یک گره مانند x را به گره دیگری، نشان داده شده با α وصل

می‌کند. این شاخه‌ها را می‌توان برای تبدیل یک گره مخلوط به یک گره خروجی

(سینک) استفاده کرد.

۴- نمودار گذر سیگنال یک سیستم داده شده منحصر بفرد نمی‌باشد. با نوشتن معادلات

سیستم به صورتهای مختلف می‌توان نمودارهای گذر سیگنال متفاوتی برای یک

سیستم رسم کرد.

۱-۴-۲ جبر نمودار گذر سیگنال

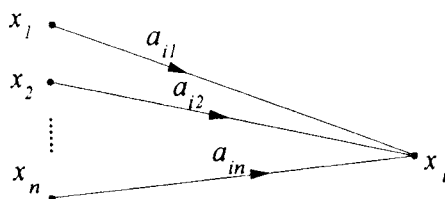
۱- قاعده جمع

مقدار متغیر در یک گره برابر است با مجموع کلیه سیگنال‌هایی که به آن گره وارد می‌شوند. به

عبارت دیگر، معادله زیر

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

توسط نمودار گذر جریان سیگنال در شکل ۱۱-۲ نشان داده شده است.

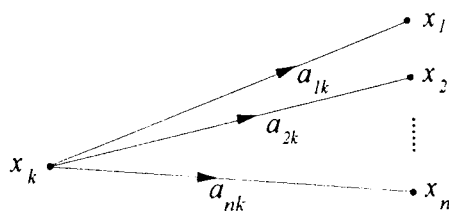


شکل ۱۱-۲ نمودار گذر سیگنال $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$

۲- قاعده انتقال

هنگامی که از یک گره، همانطور که در شکل ۱۲-۲ نشان داده شده است، شاخه‌هایی خارج شوند مقدار متغیر در آن گره با ضرب در بهره بین دو گره (تابع تبدیل یا انتقال) به گره بعد انتقال پیدا می‌کند. به عبارت دیگر متغیرهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ در گره‌های نشان داده شده در شکل ۱۲-۲ عبارتند از

$$x_i = a_{ik} x_k \quad (i = 1, \dots, n)$$



شکل ۱۲-۲ نمودار گذر سیگنال (k ثابت) $i = 1, 2, \dots, n$ $x_i = a_{ik} x_k$

۳- قاعده ضرب

یک اتصال سری از $n-1$ شاخه با انتقالهای $a_{n(n-1)}, \dots, a_{23}, a_{32}, a_{21}$ را می‌توان با یک شاخه، با انتقال جدید برابر با حاصلضرب کلیه انتقالهای قبلی، جایگزین کرد. یعنی

$$x_n = a_{21} a_{32} a_{23} \dots a_{n(n-1)} x_1$$

برای نمایش تصویری قاعده ضرب به شکل ۱۳-۲ مراجعه کنید.



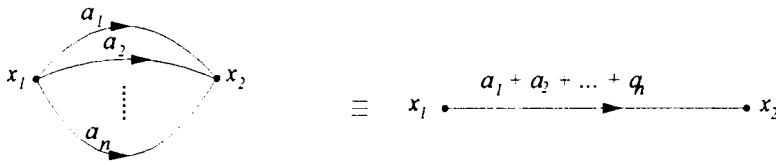
شکل ۱۳-۲ قاعده ضرب

۴- قاعده شاخه‌های موازی

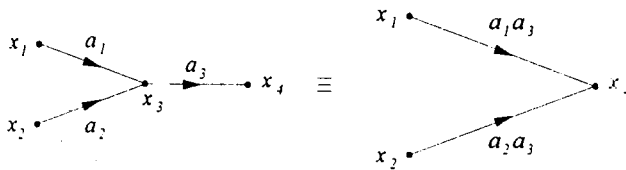
شاخه‌های موازی را می‌توان همانند شکل ۱۴-۲، با جمع کردن انتقالهای آنها با یک شاخه معادل جایگزین کرد.

۵- قاعده حذف گره مخلوط

یک گره مخلوط را می‌توان همانند شکل ۱۵-۲ حذف کرد.



شکل ۲-۱۴ قاعده شاخه‌های موازی



شکل ۲-۱۵ قاعده حذف گره مخلوط

۶- قاعده حذف حلقه

یک حلقه را می‌توان همانند شکل ۲-۱۶ حذف کرد. توجه کنید که

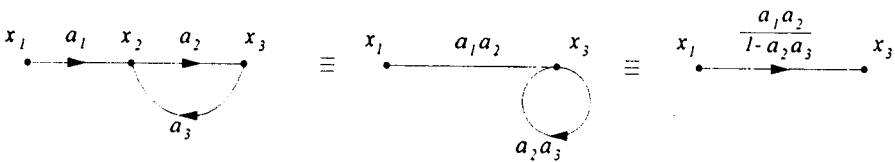
$$x_3 = a_3 x_2, \quad x_2 = a_2 x_1 + a_3 x_3$$

از اینرو

$$x_3 = a_1 a_2 x_1 + a_3 a_2 x_3$$

یا

$$x_3 = \frac{a_1 a_2}{1 - a_2 a_3} x_1$$



شکل ۲-۱۶ قاعده حذف حلقه

۲-۴-۲ نمایش نمودار گذر سیگنال سیستم‌های خطی

از نمودارهای گذر سیگنال به طور گسترده‌ای برای تحلیل سیستم‌های خطی استفاده

می‌شود. نمودار را می‌توان از معادلات سیستم و یا بطور مستقیم از سیستم فیزیکی ترسیم

کرد. با بکارگیری قواعد جبری بخش ۲-۴-۱ می‌توان رابطه بین متغیر خروجی و ورودی را بدست آورد.

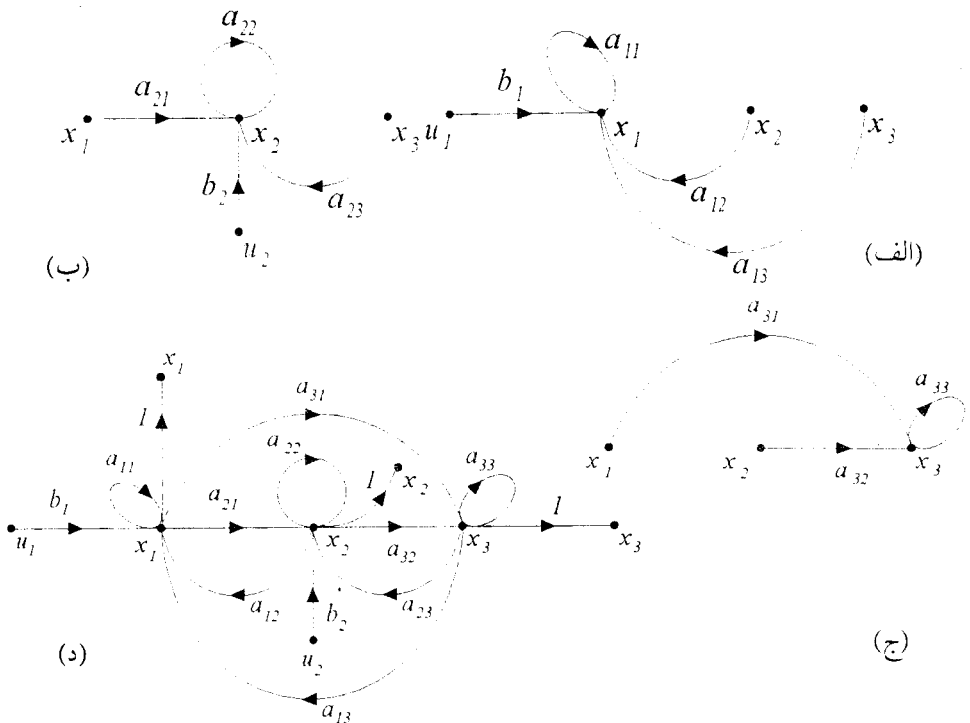
سیستم تعریف شده با مجموعه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u_1 \quad (۱-۴-۲)$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u_2 \quad (۲-۴-۲)$$

$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \quad (۳-۴-۲)$$

که در آن u_1 و u_2 متغیرهای ورودی و x_1 ، x_2 و x_3 متغیرهای خروجی هستند. نمایش نمودار گذر سیگنال سیستمی که با این معادلات توصیف شده است را می‌توان به صورت زیر بدست آورد: نخست گره‌های x_1 ، x_2 و x_3 را مانند شکل ۲-۱۷ (الف) جایابی کنید. توجه کنید که a_{ij}



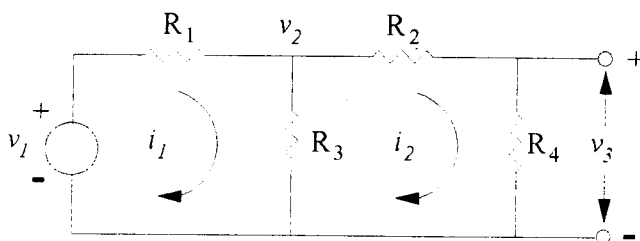
شکل ۲-۱۷ نمودارهای گذر سیگنال نشان دهنده (الف) معادله (۱-۴-۲)، (ب) معادله (۲-۴-۲)، (ج) معادله (۳-۴-۲)؛ (د) نمودار گذر سیگنال کامل نشان دهنده سیستم تعریف شده با معادله‌های (۱-۴-۲) تا (۳-۴-۲)

انتقال بین x_1 و x_2 است. توجه کنید که معادله (۲-۴-۱) بیان می‌دارد که x_1 برابر با مجموع چهار سیگنال $a_{12}x_2$ ، $a_{13}x_3$ ، $a_{14}x_4$ و b_1u_1 است. نمودار گذر سیگنال نشان دهنده این معادله در شکل ۲-۱۷ (الف) نشان داده شده است. معادله (۲-۴-۲) بیان می‌دارد که x_2 برابر با مجموع $a_{21}x_1$ ، $a_{22}x_2$ ، $a_{23}x_3$ و b_2u_2 است. نمودار گذر سیگنال متناظر در شکل ۲-۱۷ (ب) نشان داده شده است. به طور مشابهی، نمودار گذر سیگنال متناظر با معادله (۲-۴-۳) در شکل ۲-۱۷ (ج) نشان داده شده است.

نمودار گذر سیگنال نشان دهنده معادله‌های (۲-۴-۱)، (۲-۴-۲) و (۲-۴-۳) با ترکیب شکل‌های ۲-۱۷ (الف)، (ب) و (ج) بدست می‌آید. سرانجام، نمودار گذر سیگنال کامل برای دستگاه معادلات داده شده در شکل ۲-۱۷ (د) نشان داده شده است.

مثال ۲-۴-۲

یک نمودار گذر سیگنال برای سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۱۸ رسم کنید. همانطور که از شکل ۲-۱۸ مشاهده می‌شود، این سیستم چهار متغیر دارد که عبارتند از: v_1 ، v_2 ، v_3 و i_1 .



شکل ۲-۱۸ سیستم مثال ۲-۴-۲

i_1 معادلات حاکم بر این سیستم عبارتند از:

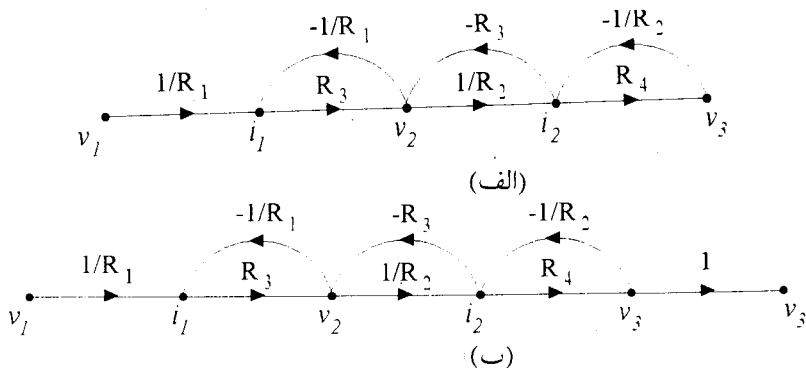
$$i_1 = \left(\frac{1}{R_1} \right) v_1 - \left(\frac{1}{R_1} \right) v_2$$

$$v_2 = R_1 i_1 - R_3 i_2$$

$$i_2 = \left(\frac{1}{R_2} \right) v_2 - \left(\frac{1}{R_2} \right) v_3$$

$$v_3 = R_4 i_2$$

دقت کنید که معادله‌ای برای v_1 ، گره ورودی، نوشته نشده است. با قرار دادن پیچ گره برای چهار متغیر و یک گره ورودی و وصل کردن شاخه‌های مناسب از معادلات حاکم بر سیستم، نمودار گذر سیگنال نشان داده شده در شکل ۱۹-۲ (الف) بدست خواهد آمد. اگر بخواهیم v_3 را به صورت یک گره خروجی نشان دهیم، با اضافه کردن یک شاخه با انتقال واحد، نمودار گذر سیگنال نشان داده شده در شکل ۱۹-۲ (ب) بدست خواهد آمد.



شکل ۱۹-۲ نمودار گذر سیگنال سیستم شکل ۱۸-۲

فرمول بهره میسن برای نمودارهای گذر سیگنال. در بسیاری از کاربردهای عملی و صنعتی، مطلوب است که تابع تبدیل (رابطه بین ورودی و خروجی) سیستم را با بکارگیری نمودار گذر سیگنال آن بدست آوریم. در نمودار گذر سیگنال، انتقال بین گره ورودی و گره خروجی، بهره کلی یا انتقال کلی نمودار بین دو گره است. برای پیدا کردن این انتقال یا بهره می‌توان از عملیات جبری ارایه شده در بخش ۱-۴-۲ برای کاهش نمودار گذر سیگنال استفاده کرد.

لیکن برای نمودارهای گذر سیگنال با تعداد زیادی گره، شاخه و حلقه، این کار مشکل شده و احتمال اشتباه در محاسبات بسیار بالا می‌رود. یک راه حل عملی و سیستماتیک برای این مسأله، استفاده از فرمول بهره میسن^۱ است.

فرمول بهره میسن، به صورت زیر است

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k \quad (۴-۴-۲)$$

که در آن

P_k = بهره مسیر یا انتقال k امین مسیر پیشرو

Δ = دترمینان نمودار

= (مجموعه کلیه بهره‌های تک حلقه‌های مجزا) - ۱

(مجموع حاصلضربهای بهره کلیه ترکیبهای ممکن از دو حلقه‌های مجزا) +

... (مجموع حاصلضربهای بهره کلیه ترکیبهای ممکن از سه حلقه‌های مجزا) -

$$= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

$\sum_a L_a$ = مجموع کلیه بهره‌های تک حلقه‌های مجزا

$\sum_{b,c} L_b L_c$ = مجموع حاصلضربهای بهره کلیه ترکیبهای ممکن از دو حلقه‌های مجزا

$\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$ = مجموع حاصلضربهای بهره کلیه ترکیبهای ممکن از سه حلقه‌های مجزا

Δ_k = کوفاکتور^۱، دترمینان k امین مسیر پیشرو نمودار، پس از حذف حلقه‌هایی است

که با آن مسیر پیشرو گره مشترک دارند. یعنی آنکه، کوفاکتور Δ_k از Δ بعد از

حذف حلقه‌هایی که مسیر P_k را قطع می‌کنند، بدست می‌آید.

توجه کنید که جمعهای بالا بروی کلیه مسیرهای ممکن از ورودی به خروجی گرفته شده

است. برخلاف آنکه ممکن است استفاده از این فرمول در اولین برخورد مشکل به نظر رسد، با

اندکی تمرین مشخص خواهد شد که کاربرد آن بسیار ساده‌تر است از آنچه که به نظر می‌رسد.

به مثالهای زیر برای روشنتر شدن این مطلب توجه کنید.

مثال ۲-۴-۳

سیستم فیدبک نشان داده شده در شکل ۲-۲۰ را در نظر بگیرید. در این شکل برای $+H$

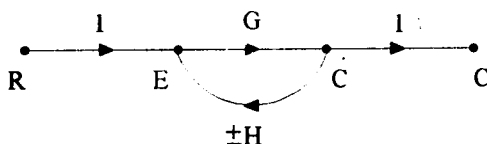
فیدبک مثبت و برای $-H$ فیدبک منفی خواهیم داشت. در این نمودار تنها یک مسیر پیشرو

وجود دارد. از اینرو

$$P_1 = G$$

و لذا $P_1 = P_2 = \dots = 0$. هم چنین تنها یک حلقه وجود دارد. بنابراین

$$L_1 = \pm GH$$



شکل ۲-۲۰ نمودار گذر سیگنال مثال ۲-۴-۳

واضح است که در این مثال $L_1 = L_2 = \dots = 0$ دترمینان نمودار عبارتست از

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (L_1) \\ &= 1 \mp GH\end{aligned}$$

کوفاکتور Δ_1 از Δ بعد از حذف حلقه‌هایی که مسیر P_1 را قطع می‌کنند (با آن گره مشترک دارند)، بدست می‌آید. بنابراین

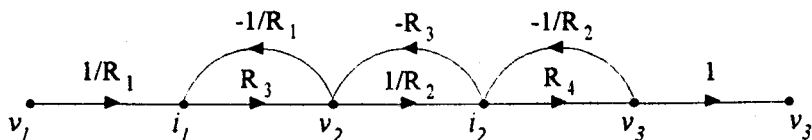
$$\Delta_1 = 1$$

سرانجام، تابع تبدیل حلقه - بسته $C(s)/R(s)$ عبارتست از

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= P = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1) \\ &= \frac{G}{1 \mp GH}\end{aligned}$$

مثال ۲-۴-۴

نمودار گذر سیگنال سیستم مثال ۲-۴-۲ که در شکل ۲-۱۸ رسم شده است را در نظر بگیرید. این نمودار گذر سیگنال، در شکل ۲-۲۱ داده شده است. با استفاده از نمودار شکل ۲-۲۱ تابع تبدیل حلقه - بسته را تعیین کنید.



شکل ۲-۲۱ نمودار گذر سیگنال مثال ۲-۴-۴

در اینجا مطلوب است که بهره ولتاژ $G = v_2/v_1$ را تعیین کنیم. در این نمودار تنها یک مسیر پیشرو نشان داده شده در شکل ۲-۲۲ وجود دارد.

از شکل ۲۲-۲ داریم که بهره مسیر پیشرو عبارتست از

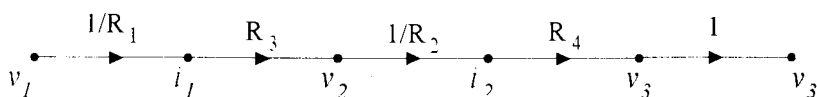
$$P_1 = \frac{1}{R_1} \cdot R_3 \cdot \frac{1}{R_2} \cdot R_4$$

$$= \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2}$$

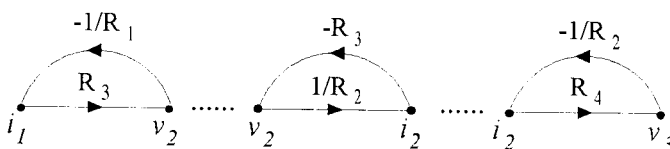
در این گراف سه حلقه به صورت نشان داده شده در شکل ۲۳-۲ وجود دارد

بهره‌های حلقه‌های گراف از شکل ۲۳-۲ عبارتند از:

$$L_1 = -\frac{R_3}{R_1} \quad L_2 = -\frac{R_3}{R_2} \quad L_3 = -\frac{R_4}{R_2}$$



شکل ۲۲-۲



شکل ۲۳-۲

همانطور که از شکل ۲۱-۲ مشاهده می‌شود، تنها دو حلقه غیر مجزا وجود دارد (دو حلقه که

گره مشترکی ندارند) و لذا داریم

$$L_1 L_3 = \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2}$$

بنابراین، دترمینان نمودار Δ عبارتست از:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3$$

$$= 1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2}$$

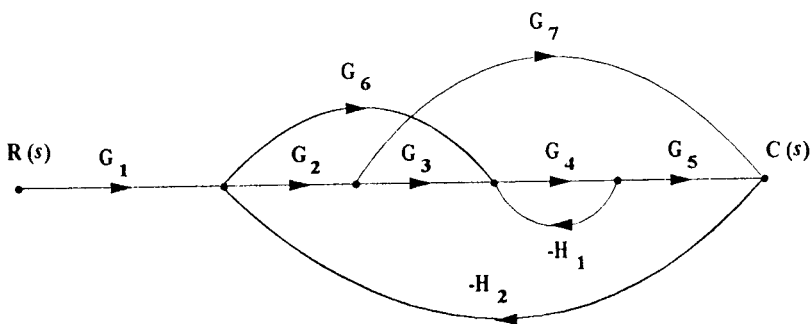
$$= \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4}{R_1 R_2}$$

از آنجائیکه کلیه حلقه‌ها مسیر پیشرو P_1 را قطع می‌کنند، $\Delta_1 = 1$ سرانجام

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4}$$

مثال ۵-۴-۲

سیستم نشان داده شده در شکل ۲۴-۲ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته $C(s)/R(s)$ را با استفاده از قانون بهره میسن بدست آورید.



شکل ۲۴-۲ نمودار گذر سیگنال برای سیستم مثال ۵-۴-۲

در این سیستم، سه مسیر پیشرو بین ورودی $R(s)$ و خروجی $C(s)$ وجود دارد. بهره‌های مسیر پیشرو عبارتند از

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

$$P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5$$

$$P_3 = G_1 G_2 G_7$$

در نمودار گذر سیگنال نشان داده شده، چهار حلقه وجود دارد و بهره‌های آنها عبارتند از

$$L_1 = -G_4 H_1$$

$$L_2 = -G_2 G_7 H_2$$

$$L_3 = -G_6 G_4 G_5 H_1$$

$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$$

توجه کنید که دو حلقه L_1 و L_2 همدیگر را قطع نمی‌کنند (و یا گره مشترکی ندارند). از اینرو، دترمینان Δ بدین صورت داده می‌شود

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2$$

کوفاکتور Δ_1 با حذف حلقه‌هایی که مسیر P_1 را قطع می‌کنند، بدست می‌آید. بنابراین، با حذف L_1, L_2, L_3 و L_4 ، بدست می‌آوریم

$$\Delta_1 = 1$$

به طور مشابهی، کوفاکتور Δ_2 عبارتست از

$$\Delta_2 = 1$$

کوفاکتور Δ_3 با حذف حلقه‌هایی که مسیر P_3 را قطع می‌کنند، بدست می‌آید. بنابراین، با حذف L_1, L_2 و L_4 داریم

$$\Delta_3 = 1 - L_1$$

تابع تبدیل حلقه - بسته $C(s)/R(s)$ عبارتست از

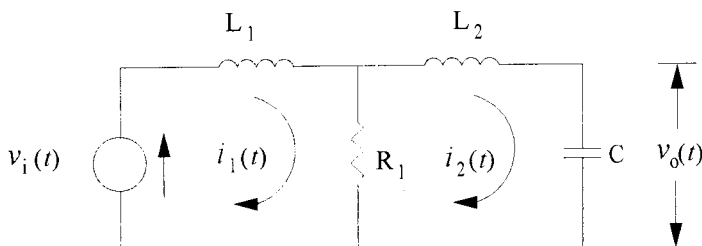
$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} = P &= \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3) \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_4 G_5 + G_1 G_4 G_5 (1 + G_2 H_1)}{1 + G_2 H_1 + G_1 G_4 H_2 + G_2 G_4 G_5 H_2 + G_1 G_2 G_4 G_5 H_2 + G_2 H_1 G_1 G_4 H_2} \end{aligned}$$

۵-۲ توصیف فضای حالت سیستم‌های کنترل

در بخشهای قبل به توصیف ورودی - خروجی سیستم به صورت تابع تبدیل در حوزه s پرداختیم. مدل‌سازی سیستم با تابع تبدیل، براساس معادلات دیفرانسیل توصیف کننده رابطه بین ورودی و خروجی اجزاء دینامیکی تشکیل دهنده سیستم است. هدف از این بخش معرفی متغیر دیگری به نام حالت سیستم است و با بکارگیری این متغیر، توصیف فضای حالت سیستم را ارائه خواهیم کرد.

برای مثالی از حالت یک سیستم، یک مسابقه فوتبال را در نظر بگیرید، که در آن ورودی سیستم تلاشی است که تیم‌ها در بازی بکار می‌برند، خروجی نیز تعداد گل‌های بدست آمده در پایان مسابقه است. یک انتخاب برای حالت سیستم می‌تواند نتیجه مسابقه در هر لحظه از زمان در طول مسابقه باشد. همانطور که مشخص است از رابطه ورودی - خروجی سیستم تنها یک دید کلی از مسابقه پیدا می‌کنیم، در حالیکه با بکارگیری حالت سیستم می‌توان از جزئیات مسابقه در هر لحظه از زمان در طول مسابقه اطلاع پیدا کرد. برای مثال دیگر، مدار RLC شکل

۲۵-۲ را در نظر بگیرید. از روشهای بخشهای قبل می‌توان یک رابطه ورودی - خروجی برای این مدار با ورودی $v_i(t)$ و خروجی $v_o(t)$ پیدا کرد و تابع تبدیل آنرا تعیین نمود. این تابع تبدیل تنها تغییرات $v_o(t)$ را برای ولتاژهای مختلف $v_i(t)$ نشان خواهد داد. لیکن با مشاهده این رابطه نمی‌توان به تغییرات جریانهای ورودی $i_1(t)$ و $i_2(t)$ در دو حلقه مدار پی برد. در واقع برای زیر نظر داشتن تغییرات جریانهای دو حلقه (که به عنوان متغیرهای حالت سیستم



شکل ۲۵-۲ مدار RLC

می‌توانند در نظر گرفته شوند) باید از توصیفی از سیستم استفاده نمود که متغیرهایی از داخل و ساختار داخلی سیستم را نیز شامل شود. این چنین امکانی با استفاده از مدلسازی فضای حالت بدست خواهد آمد. در حالت کلی "حالت" یک مجموعه از مقادیر است، که اگر همراه با ورودی سیستم معلوم باشد (مقادیر آنها در دسترس باشد)، آنگاه می‌توان از رفتار و تغییرات حالت‌های آینده و خروجی به طور دقیق اطلاع حاصل کرد.

حالت یک سیستم لزوماً منحصر بفرد نیست. برای نمونه، در مثال مسابقه فوتبال متغیرهای حالت می‌توانند روحیات تیم در طول مسابقه باشند و همانطور که در این مثال مشهود است، برخلاف خروجی و ورودی، حالت همیشه یک متغیر قابل اندازه‌گیری نیست. برای یک سیستم می‌توان تعداد بسیار زیادی نمایش فضای حالت در نظر گرفت و این نمایشها به متغیرهای حالت انتخاب شده بستگی خواهند داشت.

در اینجا، حالت^۱، متغیرهای حالت^۲، بردار حالت^۳، و فضای حالت^۴ را تعریف می‌کنیم. حالت. حالت یک سیستم دینامیکی کوچکترین مجموعه از متغیرها (به نام متغیرهای

1- State

2- State variables

3- State vector

4- State space

حالت) است که اطلاع از این متغیرها در زمان $t = t_0$ همراه با اطلاع از ورودی برای $t \geq t_0$ رفتار سیستم را برای هر زمان $t \geq t_0$ به طور کامل توصیف می‌کند.

بنابراین، حالت یک سیستم دینامیکی در زمان t توسط حالت در زمان t_0 و ورودی برای $t \geq t_0$ به طور منحصر بفردی تعیین می‌شود و مستقل از حالت و ورودی قبل از t_0 است. در این کتاب t_0 عموماً برابر صفر در نظر گرفته خواهد شد.

توجه کنید که مفهوم و ایده حالت به هیچ وجه منحصر به سیستم‌های فیزیکی نیست و قابل اعمال به سیستم‌های بیولوژیکی، اقتصادی، اجتماعی و سایر سیستم‌ها نیز است.

متغیرهای حالت. متغیرهای حالت یک سیستم دینامیکی، متغیرهایی هستند که کوچکترین مجموعه متغیرها را تشکیل داده و حالت سیستم دینامیکی را تعیین می‌کنند. اگر حداقل n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ لازم است تا رفتار یک سیستم دینامیکی را بطور کامل توصیف کند، آنگاه n چنین متغیرهایی یک مجموعه از متغیرهای حالت هستند.

بردار حالت. اگر n متغیر حالت برای توصیف کامل رفتار یک سیستم داده شده کافی باشد، آنگاه این n متغیرهای حالت را می‌توان به صورت n مولفه‌های یک بردار x در نظر گرفت. این چنین برداری را یک بردار حالت می‌نامند. بنابراین، بردار حالت برداری است که حالت سیستم $x(t)$ را برای زمان $t > t_0$ با دادن حالت در $t = t_0$ و ورودی $u(t)$ برای $t \geq t_0$ بطور منحصر بفردی تعیین می‌کند.

فضای حالت. فضای n -بعدی که محورهای مختصات آن شامل محور $x_1, x_2, \dots, x_n$ محور x_n است، فضای حالت نامیده می‌شود. هر حالت در فضای حالت به صورت یک نقطه نمایش داده می‌شود.

۲-۵-۱ بدست آوردن معادلات حالت از تابع تبدیل

سیستمی را با یک ورودی و یک خروجی در نظر بگیرید. فرض کنید که خروجی این سیستم نه تنها به ورودی آن بلکه به نرخ تغییر خروجی نیز بستگی داشته باشد. یعنی آنکه

$$y(t) = \frac{1}{a} \dot{y}(t) - \frac{b}{a} u(t) \quad (1-5-2)$$

که در آن a و b مقادیر اسکالر، $y(t)$ خروجی سیستم در زمان t و $u(t)$ ورودی سیستم در زمان t است. هم‌چنین $\dot{y}(t) = \frac{d}{dt} y(t) = Dy(t)$ معادله (۱-۵-۲) را به صورت زیر نیز می‌توان

نوشت

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bu(t) \quad (۲-۵-۲)$$

حال اگر حالت $x_1(t)$ را به صورت خروجی $y(t)$ تعریف کنیم، آنگاه

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) + bu(t) \quad (۳-۵-۲)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad \text{و}$$

معادلات بالا یک صورت بسیار ساده از معادلات حالت و خروجی و یا توصیف فضای حالت سیستم می‌باشند. اکنون این توصیف را به حالت‌های کلی‌تری تعمیم می‌دهیم. نمایشهای ماتریسی. یک حالت کلی‌تر از معادله (۲-۵-۲)، عبارتست از

$$D^T \dot{y}(t) + a_1 D^T y(t) + a_2 Dy(t) + a_3 y(t) = b_1 u(t) \quad (۴-۵-۲)$$

اکنون متغیرهای زیر را تعریف کنید

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = Dx_1(t) = Dy(t)$$

$$x_3(t) = Dx_2(t) = D^2 y(t)$$

آنگاه معادله (۴-۵-۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} u(t) \quad (۵-۵-۲)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad \text{و}$$

یا، به عبارت کلی‌تر

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \quad (۶-۵-۲)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t)$$

که در آن A ماتریس ضریب بردار حالت $x(t)$ است که آنرا ماتریس حالت^۱ می نامند، B را ماتریس ورودی^۲، C را ماتریس خروجی^۳ و D را ماتریس انتقال مستقیم^۴ می نامند. انتقال مستقیم یک رابطه مستقیم بین خروجی و ورودی سیستم را نشان می دهد.

اکنون حالت کلی تر را در نظر می گیریم، که در آن مشتقات ورودی نیز در معادله دیفرانسیل سیستم حضور دارند. به عنوان مثال، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$D^r y(t) + a_r D^{r-1} y(t) + a_{r-1} D^{r-2} y(t) + \dots + a_1 y(t) = b_r D^r u(t) + b_{r-1} D^{r-1} u(t) + \dots + b_1 u(t) \quad (۷-۵-۲)$$

یا

$$(D^r + a_r D^{r-1} + a_{r-1} D^{r-2} + \dots + a_1) y(t) = (b_r D^r + b_{r-1} D^{r-1} + \dots + b_1) u(t) \quad (۸-۵-۲)$$

اکنون متغیر $z(t)$ را چنان تعریف می کنیم که

$$u(t) = (D^r + a_r D^{r-1} + a_{r-1} D^{r-2} + \dots + a_1) z(t) \quad (۹-۵-۲)$$

$$y(t) = (b_r D^r + b_{r-1} D^{r-1} + \dots + b_1) z(t)$$

و سپس حالتها را می توان به صورت زیر تعریف کرد

$$x_1(t) = z(t)$$

$$x_2(t) = Dz(t)$$

$$x_3(t) = D^2 z(t)$$

که نمایشی بدین صورت می دهند

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (۱۰-۵-۲)$$

و

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} x(t)$$

که در آن

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

1- State matrix

2- Input matrix

3- Output matrix

4- Direct transmission

از معادله (۸-۵-۲)، مشاهده می‌شود که صورت کلی تابع تبدیل عبارتست از

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y(t) = (b_mD^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0)u(t) \quad (۱۱-۵-۲)$$

که در آن $m < n$. در این صورت بردار n -بعدی حالت برابر است با

$$\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]$$

با فرض شرایط اولیه صفر و گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله (۱۱-۵-۲)، داریم

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (۱۲-۵-۲)$$

که معادلات حالت و خروجی را در حالت کلی بدین صورت می‌دهد

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (۱۳-۵-۲)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

توجه کنید که معادلات بالا، تنها یک نمایش از تعداد بی‌شماری نمایشهای ممکن فضای حالت تابع تبدیل (۱۲-۵-۲) است. با نمایشهای دیگر فضای حالت، در بخش بعد آشنا خواهیم شد. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، نمایشهای مختلف فضای حالت از سیستم، به روش تعریف متغیرهای حالت بستگی دارد.

مثال ۲-۵-۱

تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 3s + 5}{s^3 + s^2 + 2s + 1}$$

از معادله‌های (۲-۵-۱۲) و (۲-۵-۱۳)، نمایش فضای حالت این سیستم عبارتست از

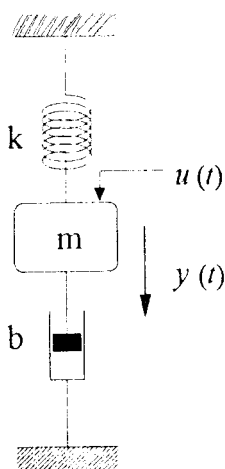
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

و

$$y(t) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

مثال ۲-۵-۲

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۲-۲۶ را در نظر بگیرید. در این سیستم $u(t)$ ورودی به سیستم (نیروی خارجی) و $y(t)$ خروجی سیستم (جابجایی فنر) می‌باشند.



شکل ۲-۲۶ سیستم مکانیکی.

از قانون دوم نیوتن، معادله دیفرانسیل سیستم به صورت زیر است

$$m D^2 y + b D y + k y = u$$

با تعریف متغیرهای حالت به صورت زیر

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

بدست می آوریم

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-ky - by) + \frac{1}{m}u$$

یا

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

معادله خروجی نیز عبارتست از

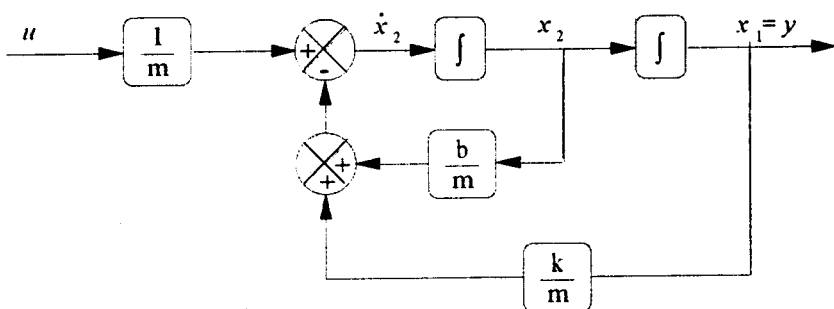
$$y = x_1$$

بنابراین معادله حالت و خروجی سیستم با تعریف بردار حالت $x^T(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]$ به صورت زیر است

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

دیاگرام بلوکی سیستم در شکل ۲۷-۲ رسم شده است.



شکل ۲۷-۲ دیاگرام بلوکی سیستم نشان داده شده در شکل ۲۶-۲

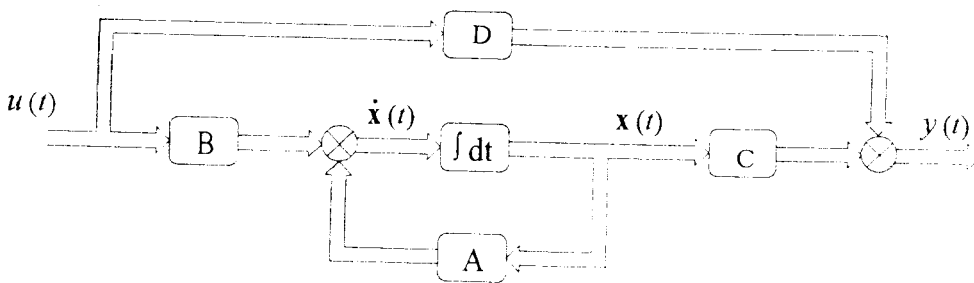
در دو مثال قبل، معادلات حالت و خروجی بدست آمده (توصیف فضای حالت سیستم) به صورت کلی زیر هستند

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (۱۴-۵-۲)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (۱۵-۵-۲)$$

در واقع معادله (۱۴-۵-۲)، معادله حالت و معادله (۱۵-۵-۲)، معادله خروجی سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

از آنجا که توصیف فضای حالت سیستم توسط متغیرهای حالت آن، از رفتار و ساختار داخلی سیستم نیز تصویری دقیق و روشن به مهندس طراح سیستم کنترل ارائه می‌دهد، آنرا توصیف داخلی^۱ سیستم نیز نامیده‌اند. و از آنجاییکه توصیف تابع تبدیل سیستم تنها یک نمایش ورودی - خروجی از سیستم است، آنرا توصیف خارجی^۲ سیستم نامیده‌اند. یک نمایش دیاگرام بلوکی از سیستم داده شده با معادلات (۱۴-۵-۲) و (۱۵-۵-۲) در شکل ۲-۲۸ نشان داده شده است. در این شکل خط‌های دابل نشان دهنده برداری بودن متغیرها هستند.



شکل ۲-۲۸ دیاگرام بلوکی سیستم خطی زمان پیوسته تغییرناپذیر با زمان

۲-۵-۲ انتخاب متغیرهای حالت

اولین قدم در راه بکارگیری مفاهیم فضای حالت، جهت تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل، انتخاب متغیرهای حالت سیستم است. همانطور که قبلاً اشاره شد، متغیرهای حالت

نشان دهنده ساختار یک سیستم، منحصر بفرد نیست و به هیچ وجه نیز راه منحصر بفردی برای تعیین آنها وجود ندارد. این مطلب را به خوبی در مثال مسابقه فوتبال مشاهده کردیم. دو دسته متغیرهای حالت انتخاب شده در آن مثال به ترتیب، نتیجه مسابقه در طول مسابقه و روحیات تیم در طول مسابقه بودند. هرکدام از این دو دسته متغیرهای حالت به نوبه خود می‌توانند اطلاعات مفیدی از ساختار داخلی مسابقه بدست دهند. در حالت کلی برای سیستم‌های فیزیکی، روشهای مختلفی برای تعیین متغیرهای حالت در دسترس می‌باشند که برای بررسی بیشتر آنها می‌توانید به مراجع و کتابشناسی فصل هفتم مراجعه نمایید. در اینجا، انتخاب متغیرهای حالت بر اساس متغیرهای فیزیکی^۱ ارایه خواهد شد.

انتخاب متغیرهای حالت در روش متغیرهای فیزیکی بر اساس عناصر نگهدارنده - انرژی^۲ سیستم بنا نهاده شده است. جدول ۱-۲ بعضی از عناصر متداول نگهدارنده - انرژی را که در سیستم‌های فیزیکی وجود دارند، همراه با معادلات انرژی متناظر نشان می‌دهد. متغیر فیزیکی در معادله انرژی برای هر عنصر نگهدارنده - انرژی می‌تواند به عنوان متغیر حالت سیستم انتخاب شود. البته باید دقت کرد، همانطور که در تعریف متغیرهای حالت یک سیستم در اول بخش آورده شده است، این مجموعه کوچکترین مجموعه متغیرهای لازم برای تعیین حالت می‌باشد. به عبارت دیگر اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ متغیرهای حالت یک سیستم باشند، آنگاه n حداقل تعداد متغیرهای لازم برای توصیف کامل ساختار داخلی آن سیستم خواهد بود. به این چنین مدلی، مدل حالت می‌نیمال گویند. در اکثر کاربردهای عملی، مدل‌های حالت غیر می‌نیمال، ارزش چندانی ندارد. مدل حالت می‌نیمال، با انتخاب متغیرهای فیزیکی ناوابسته به عنوان

جدول ۱-۲ عناصر نگهدارنده - انرژی

متغیر فیزیکی	انرژی	عنصر
ولتاژ v	$Cv^2/2$	خازن C
جریان i	$Li^2/2$	سلف L
سرعت انتقالی v	$Mv^2/2$	جرم M
سرعت چرخشی ω	$J\omega^2/2$	ممان اینرسی J
جابجایی x	$kx^2/2$	فنر k

متغیرهای حالت، بدست آورده می شود. متغیرهای حالت ناوابسته^۱، متغیرهای حالتی هستند که نمی توان آنها را بر حسب متغیرهای حالت تعیین شده دیگر بیان کرد. به عنوان نمونه اگر برای سه متغیر حالت x_1, x_2, x_3 نوشتن یک متغیر مانند x_1 بر حسب دو متغیر دیگر، مانند $x_1 = \alpha x_2 + \beta x_3$ (و α و β اسکالرهای غیر صفر)، امکان پذیر باشد این سه متغیر را وابسته و در غیر این صورت ناوابسته می گویند.

به مثالهای زیر برای تعیین مدل حالت می نیمال توجه کنید.

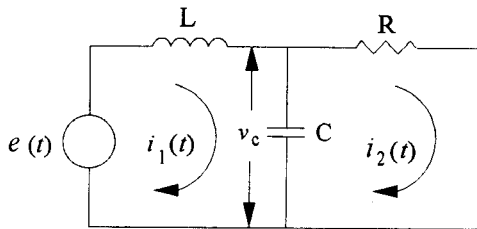
مثال ۳-۵-۲

سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۲۹ را در نظر بگیرید. با انتخاب متغیرهای حالت فیزیکی مناسب، معادلات حالت و خروجی سیستم را بنویسید. ورودی سیستم ولتاژ $e(t)$ و خروجی آن ولتاژ خازن $v_c(t)$ است.

معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدار عبارتند از

$$e(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + v_c(t)$$

$$0 = Ri_2(t) - v_c(t)$$



شکل ۲-۲۹ مدار الکتریکی مثال ۳-۵-۲

با انتخاب متغیرهای حالت به صورت $x_1 = i_1(t)$ و $x_2 = v_c(t)$ ، از معادله اول داریم

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}e(t)$$

معادله ولتاژ خازن عبارتست از

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int (i_1(t) - i_2(t)) dt$$

و بنابراین

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}(i_1(t) - i_2(t))$$

$$= \frac{1}{C} \left(i_1(t) - \frac{1}{R} v_c(t) \right)$$

با جایگزینی برای $v_c(t)$ و $i_1(t)$ بدست می آوریم

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C} x_1(t) - \frac{1}{RC} x_2(t)$$

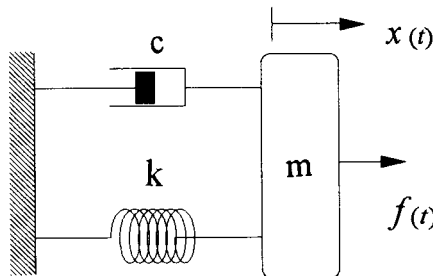
اکنون با نوشتن معادله بردار ماتریسی برای x_1 و x_2 با توجه به اینکه $y(t) = x_1(t)$ داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

مثال ۲-۵-۴

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۲-۳۰ را در نظر بگیرید. در این سیستم نیروی ورودی $f(t)$ است و خروجی سیستم، جابجایی جرم $x(t)$ است. معادلات حالت و خروجی



شکل ۲-۳۰ سیستم مکانیکی

سیستم را بنویسید. نخست معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم را بدست می آوریم. از قانون دوم نیوتن داریم که برابند کلیه نیروهای خارجی عمل کننده بر m برابر با $mD^2x(t)$ می باشد، با فرض آنکه جرم از حالت سکون در $x(t)=0$ به طرف پایین به حرکت در آورده می شود،

نیروهای عمل کننده بر آن از طرف فنر و میرا کننده c ، در جهت بالا کشیدن آن، به ترتیب عبارتند از $kx(t)$ و $D\dot{x}(t)$. بنابراین داریم

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t) - c \frac{dx(t)}{dt} + f(t)$$

با انتخاب متغیرهای حالت به صورت $x_1(t) = x(t)$ (جابجایی فنر و جرم) و $\dot{x}_1(t) = \dot{x}(t)$ (سرعت جرم)، معادلات حالت و خروجی سیستم عبارت خواهند بود از

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

مثال ۲-۵-۵

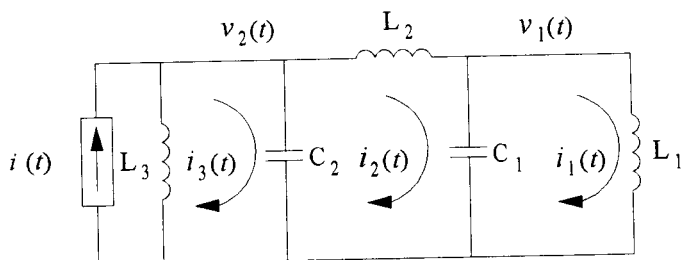
مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل ۲-۳۱ را در نظر بگیرید. معادلات حالت و خروجی آن را برای ورودی جریان و خروجی $v_1(t)$ بنویسید.

در این مدار پنج عنصر نگهدارنده انرژی وجود دارد. این پنج عنصر عبارتند از سلف‌های L_1, L_2, L_3 و خازن‌های C_1 و C_2 . لذا می‌توان پنج متغیر حالت فیزیکی برای آن در نظر گرفت. معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدار عبارتند از

$$\begin{aligned} v_1(t) &= L_1 \frac{d}{dt} i_1(t) \\ v_2(t) &= L_2 \frac{d}{dt} i_2(t) + v_1(t) \\ v_3(t) &= L_3 \frac{d}{dt} i_3(t) \\ i_2(t) &= C_1 \frac{d}{dt} v_1(t) + i_1(t) \\ i(t) &= i_2(t) + C_2 \frac{d}{dt} v_2(t) + i_3(t) \end{aligned}$$

با نوشتن معادله حلقه در برگیرنده L_1, L_2, L_3 و انتگرال‌گیری از آن داریم

$$L_1 i_1(t) = L_2 i_2(t) + L_3 i_3(t) + k$$



شکل ۳۱-۲ مدار الکتریکی

که در آن ثابت k تابعی از شرایط اولیه است. این معادله نشان می دهد که سه متغیر جریان در سلف ها (با فرض معلوم بودن شرایط اولیه)، مستقل نمی باشند و در واقع یکی از این جریانها را می توان به صورت ترکیب خطی از دیگران نوشت. بنابراین این مدار تنها چهار متغیر حالت فیزیکی ناوابسته دارد. این چهار متغیر را به صورت زیر انتخاب می کنیم

$$x_1(t) = v_1(t) \quad , \quad x_2(t) = v_2(t) \quad , \quad x_3(t) = i_1(t) \quad , \quad x_4(t) = i_2(t)$$

دقت کنید که دو متغیر حالت $x_3(t)$ و $x_4(t)$ را می توانستیم به صورتهای دیگر (به عنوان نمونه با استفاده از $i_1(t)$ و $i_2(t)$) نیز بنویسیم. با حذف جریان وابسته انتخاب شده $i_3(t)$ و استفاده از معادلات مدار (با فرض صفر بودن شرایط اولیه جریانها)، داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ \cdot & \cdot & -\frac{L_1}{L_3 C_2} & -\frac{L_2 + L_3}{L_3 C_2} \\ \frac{1}{L_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_2} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \frac{1}{C_2} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

۳-۵-۲ رابطه بین تابع تبدیل و معادلات فضای حالت

در اینجا نشان خواهیم داد که چگونه از معادله فضای حالت، تابع تبدیل یک سیستم را بدست می‌آوریم. یک سیستم با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \quad (۱۶-۵-۲)$$

این سیستم می‌تواند با معادلات زیر در فضای حالت نمایش داده شود:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۱۷-۵-۲)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (۱۸-۵-۲)$$

که در آن $x(t)$ بردار حالت، $u(t)$ ورودی، و $y(t)$ خروجی است. تبدیل لاپلاس معادله‌های (۱۷-۵-۲) و (۱۸-۵-۲) عبارتست از

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (۱۹-۵-۲)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (۲۰-۵-۲)$$

با توجه به اینکه تابع تبدیل برای شرایط اولیه صفر تعریف شده است، لذا در معادله

$$(۱۹-۵-۲)، x(0) \text{ را برابر صفر قرار می‌دهیم. آنگاه داریم}$$

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) \quad \text{یا}$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

با پیش ضرب کردن طرفین معادله در $(sI - A)^{-1}$ ، بدست می‌آوریم

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) \quad (۲۱-۵-۲)$$

جایگزینی معادله (۲۱-۵-۲) در معادله (۲۰-۵-۲)، می‌دهد

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D] U(s) \quad (۲۲-۵-۲)$$

با مقایسه معادله‌های (۲۲-۵-۲) و (۱۶-۵-۲)، داریم

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (۲۳-۵-۲)$$

این معادله، رابطه بین تابع تبدیل سیستم و ماتریس‌های A ، B ، C و D را نشان می‌دهد.

مثال ۲-۵-۶

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۲-۲۶ را در نظر بگیرید. معادله‌های فضای

حالت این سیستم در مثال ۲-۵-۲ بدست آورده شده‌اند. از مثال ۲-۵-۲، داریم

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0.$$

با جایگزینی A, B, C و D در معادله (۲-۵-۲۳)، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= [1 \quad 0] \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} + 0 \\ &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

از آنجاییکه

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

داریم

$$\begin{aligned} G(s) &= [1 \quad 0] \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ms^2 + bs + k} \end{aligned}$$

که تابع تبدیل سیستم است. توجه کنید که این تابع تبدیل را می‌توانستیم مستقیماً از معادله دیفرانسیل سیستم

$$m D^2 y + b D y + k y = u$$

پس از گرفتن تبدیل لاپلاس با شرایط اولیه صفر بدست آوریم.

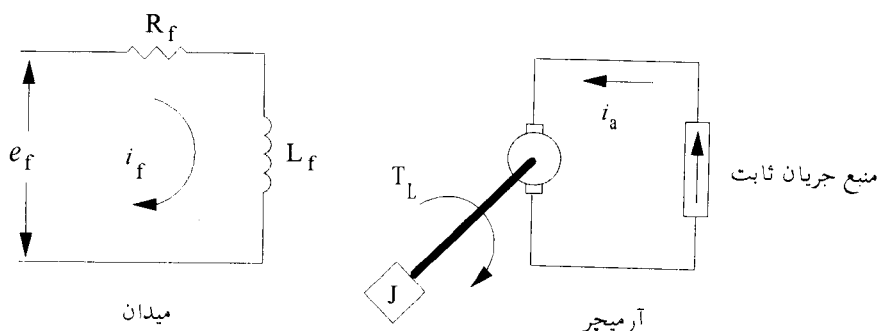
۲-۶ مدل‌سازی موتورهای DC

در این بخش با بکارگیری مفاهیم و ابزار توسعه یافته مدل‌سازی در بخشهای قبل، به

مدلسازی موتورهای DC می‌پردازیم. موتورهای DC برای تبدیل کردن یک سیگنال ورودی الکتریکی به یک سیگنال خروجی مکانیکی بکار گرفته می‌شوند. این موتورها از لحاظ نحوه عملکرد به دو دسته کنترل میدان^۱ و کنترل آرمیچر^۲ تقسیم می‌شوند. در اینجا مدلسازی این دو دسته از موتورهای DC مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

کنترل میدان. در کنترل میدان، همانطور که در شکل ۲-۳۲ نشان داده شده است، جریان آرمیچر ثابت نگه داشته شده است و در میدان از یک ولتاژ قابل تنظیم به عنوان ورودی به سیستم استفاده می‌شود. ولتاژ اعمال شده به میدان $e_f(t)$ است. گشتاور ایجاد شده توسط موتور متناسب با حاصلضرب جریان آرمیچر $i_a(t)$ و فلو^۳ میدان ϕ است. بنابراین

$$T(t) = K_f \phi i_a(t) \quad (۱-۶-۲)$$



شکل ۲-۳۲ موتور DC با کنترل میدان

که در آن K_f برای هر موتوری ثابت است و به مجموع هادیهای^۴ آرمیچر، تعداد قطبهای میدان و غیره بستگی دارد. ولتاژ اعمال شده به میدان $e_f(t)$ برای کاربردهای معمولی از خروجی یک آمپلی فایر یا یک ژنراتور DC در کار بردهایی که قدرت بیشتر مورد نیاز است، تأمین می‌گردد. در مدار میدان، مقاومت سیستم پیچها R_f و هدایت با L_f نشان داده می‌شوند.

یک منحنی از فلو ϕ بر حسب جریان میدان i_f در شکل ۲-۳۳ نشان داده شده است. در محدوده‌ای که جریان میدان i_f به اندازه‌ای نرسیده است که باعث اشباع در میدان شود، رابطه ϕ

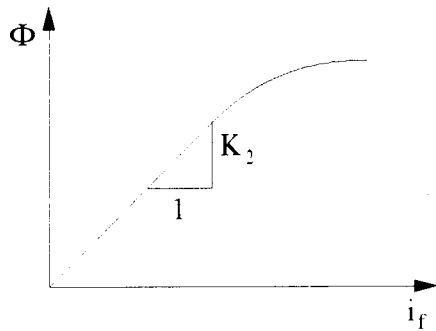
1- Field control

2- Armature control

3- Flux

4- Conductors

و i_f خطی است. و بعد از اشباع از رابطه خطی تبعیت نمی‌کند. موتورهای مورد استفاده در سیستم‌های کنترل عموماً بر روی محدوده خطی بالا عمل خواهند کرد. لذا



شکل ۲-۳۳ نمودار فلو بر حسب جریان میدان

$$\phi = K_f i_f \quad (2-6-2)$$

که در آن، K_f شیب قسمت خطی منحنی نشان داده شده در شکل ۲-۳۳ است. با جایگزینی از معادله (۲-۶-۱) در معادله (۲-۶-۲)، داریم

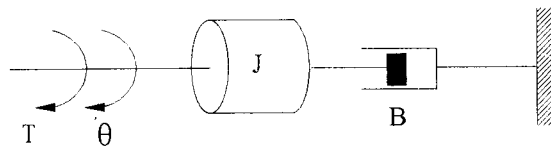
$$T = K_1 K_f i_a i_f = K_m i_a i_f \quad (2-6-3)$$

که در آن $K_m = K_1 K_f$.

اگر همانطور که در شکل ۲-۳۴ نشان داده شده است، بار از یک ممان اینرسی و میراکننده تشکیل شده باشد و گشتاور بار T_L باشد، معادله گشتاور آرمیچر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$T = BD\dot{\theta} + JD\ddot{\theta} + T_L \quad (2-6-4)$$

که در آن θ موقعیت زاویه‌ای آرمیچر یا شفت موتور^۱ است. معادله ولتاژ مدار میدان عبارتست از



شکل ۲-۳۴ مدل بار

$$L_f Di_f + R_f i_f = e_f \quad (۵-۶-۲)$$

و بنابراین

$$i_f = \frac{e_f}{R_f(\tau_f D + 1)} \quad (۶-۶-۲)$$

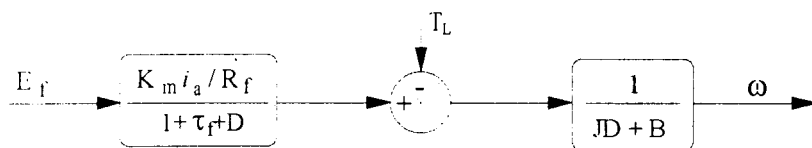
که در آن $\tau_f = L_f/R_f$ ثابت زمانی مدار میدان است. با جایگزینی T از معادله (۴-۶-۲) و i_f از معادله (۶-۶-۲) در معادله (۳-۶-۲) و به دست آوردن θ ، داریم

$$\theta = \frac{1}{JD^2 + BD} \left[\frac{(K_m i_a / R_f) e_f}{1 + \tau_f D} - T_L \right] \quad (۷-۶-۲)$$

سرعت زاویه‌ای ω را می‌توان با مشتق‌گیری از معادله (۷-۶-۲) بدست آورد

$$\omega = D\theta = \frac{1}{JD + B} \left[\frac{(K_m i_a / R_f) e_f}{1 + \tau_f D} - T_L \right] \quad (۸-۶-۲)$$

نمایش دیاگرام بلوکی سیستم در شکل ۳۵-۲ نشان داده شده است.



شکل ۳۵-۲ دیاگرام بلوکی یک موتور DC با کنترل میدان

برای به دست آوردن معادلات فضای حالت با فرض $T_L = 0$ ، از معادله‌های (۸-۶-۲) و

(۶-۶-۲) داریم

$$JD^2 \theta = K_m i_a i_f - BD\theta \quad (۹-۶-۲)$$

و

$$e_f = R_f i_f + L_f Di_f \quad (۱۰-۶-۲)$$

با تعریف متغیرهای حالت $x_1 = D\theta$ و $x_2 = i_f$ برای اعضاء نگهدارنده انرژی سیستم و $u(t) = e_f$

با $y(t) = D\theta$ معادله‌های فضای حالت زیر را از معادله‌های (۹-۶-۲) و (۱۰-۶-۲) برای

سیستم بدست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_m i_a}{J} \\ 0 & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_f} \end{bmatrix} u(t)$$

(۱۱-۶-۲)

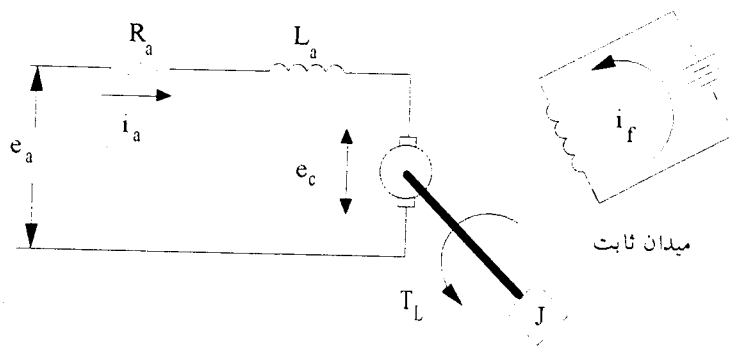
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

کنترل آرمیچر. در موتورهای DC با کنترل آرمیچر، سرعت توسط تنظیم ولتاژ اعمال شده به آرمیچر کنترل می‌شود. این ولتاژ معمولاً توسط یک ژنراتور فراهم می‌شود. یک موتور DC با کنترل آرمیچر در شکل ۲-۳۶ نشان داده شده است. هنگامیکه موتور آرمیچر در حال چرخش است ولتاژی برابر e_c متناسب با حاصلضرب فلو و سرعت القاء می‌شود. از آنجاییکه پلار تیه این ولتاژ مخالف ولتاژ اعمال شده است، به آن نیروی محرک الکتریکی بازگشتی یا emf برگشتی^۱ می‌گویند. از آنجاییکه جریان میدان ثابت است، فلو ثابت بوده و بنابراین e_c متناسب با ω می‌باشد. بنابراین

$$e_c = K_\phi \phi \omega \quad (۱۲-۶-۲)$$

که در آن K_ϕ یک ثابت است و برای هر موتوری مقداری مشخص دارد. با جایگزینی برای ϕ از معادله (۲-۶-۲) در معادله (۱۲-۶-۲)، داریم

$$e_c = K_v K_\phi i_f \omega = K_c i_f \omega \quad (۱۳-۶-۲)$$



شکل ۲-۳۶ موتور DC با کنترل آرمیچر

که در آن $K_c = K_p K_f$. معادله ولتاژ برای مدار آرمیچر عبارتست از

$$\begin{aligned} e_a - e_c &= R_a i_a + L_a D i_a \\ &= R_a (\tau_a D + 1) i_a \end{aligned} \quad (۱۴-۶-۲)$$

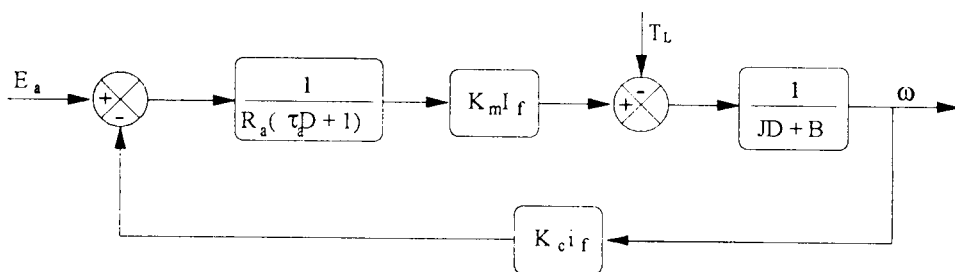
که در آن $\tau_a = L_a / R_a$ ، ثابت زمانی سیستم می‌باشد. گشتاور ایجاد شده توسط موتور عبارتست از

$$T = K_m i_f i_a \quad (۱۵-۶-۲)$$

و معادله بالانس گشتاور برای خروجی شفت عبارتست از

$$T = (BD + JD^2) \theta + T_L \quad (۱۶-۶-۲)$$

از معادله‌های (۱۴-۶-۲)، (۱۵-۶-۲) و (۱۶-۶-۲)، دیاگرام بلوکی سیستم به صورت نشان داده شده در شکل ۳۷-۲ است.



شکل ۳۷-۲ دیاگرام بلوکی یک موتور DC با کنترل آرمیچر

برای بدست آوردن نمایش فضای حالت سیستم، با فرض $T_L = 0$ ، از معادله‌های

(۲-۶-۲) و (۱۴-۶-۲)، همچنین از معادله‌های (۱۵-۶-۲) و (۱۶-۶-۲)، به ترتیب داریم

$$e_a = R_a i_a + L_a D i_a + K_c i_f D \theta \quad (۱۷-۶-۲)$$

$$K_m i_f i_a = BD \theta + JD^2 \theta \quad (۱۸-۶-۲)$$

با تعریف متغیرهای حالت فیزیکی $x_1 = i_a$ و $x_2 = D \theta$ (متغیرهای اعضای نگهدارنده انرژی در

سیستم)، از معادله‌های (۱۷-۶-۲) و (۱۸-۶-۲)، بدست می‌آوریم

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{K_c i_f}{L_a} x_2(t) - \frac{R_a}{L_a} x_1(t) + \frac{e_a}{L_a} \quad (۱۹-۶-۲)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{K_m i_f}{J} x_1(t) - \frac{B}{J} x_2(t) \quad (۲۰-۶-۲)$$

با متغیرهای e_a و $D\theta$ به عنوان متغیرهای ورودی و خروجی سیستم، از معادله‌های (۲-۶-۱۹) و (۲-۶-۲۰) داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_c i_f}{L_a} \\ \frac{K_m i_f}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (2-6-21)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

مسایل

۱-۲. معادلات دیفرانسیل و شرایط اولیه حاکم بر سیستمی عبارتند از:

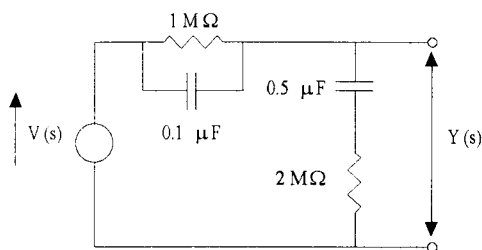
$$y(0) = 1, \quad Dy(0) = 4, \quad D^2y(t) + 6Dy(t) + 13y(t) = 5u(t) \quad (\text{الف})$$

$$y(0) = 1, \quad Dy(0) = 2, \quad D^2y(t) + 3Dy(t) + 4y(t) = 7u(t) + 2t \quad (\text{ب})$$

$$y(0) = 4, \quad Dy(0) = 5, \quad D^2y(t) + 3Dy(t) + 4y(t) = 6 \sin \omega t \quad (\text{ج})$$

توابع تبدیل متناظر سیستم را تعیین کنید. پاسخهای سیستم را بر حسب تبدیل لاپلاس پیدا کنید.

۲-۲. تابع تبدیل مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل ۲-۳۸ را بدست آورید.



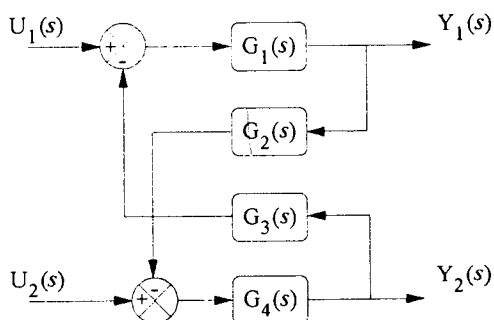
شکل ۲-۳۸ مدار الکتریکی مسئله ۲-۲

۳-۲. سیستم دو ورودی و دو خروجی نشان داده شده در شکل ۲-۳۹ را در نظر بگیرید. در

این سیستم ورودیها به ترتیب $U_1(s)$ ، $U_2(s)$ و خروجیها $Y_1(s)$ و $Y_2(s)$ می باشند.
الف - خروجی $Y_1(s)$ را بر حسب ورودیها بدست آورید.

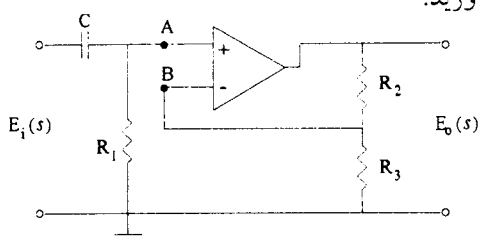
ب - خروجی $Y_2(s)$ را بر حسب ورودیها بدست آورید.

اثر برابر ساختن $G_1 G_4$ و $(G_2 G_3)^{-1}$ چیست؟ با فرض $G_1 G_4 \neq (G_2 G_3)^{-1}$ ، مقدار G_s را چنان پیدا کنید که $Y(s) = G_s U_1(s)$ ، که در آن $Y(s) = Y_1(s) + G_s Y_2(s)$.

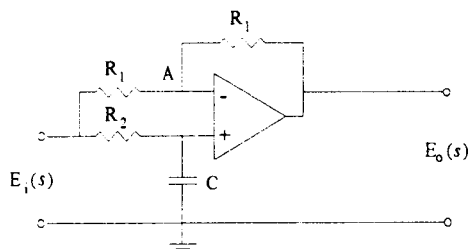


شکل ۳۹-۲ سیستم دو ورودی و دو خروجی مسئله ۳-۲

۴-۲- تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ مدارهای op-amp نشان داده شده در شکلهای ۴۰-۲ و ۴۱-۲ را بدست آورید.

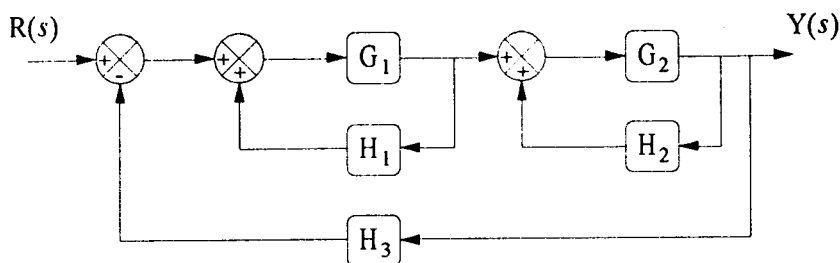


شکل ۴۰-۲ مدار تقویت کننده عملیاتی (op-amp)

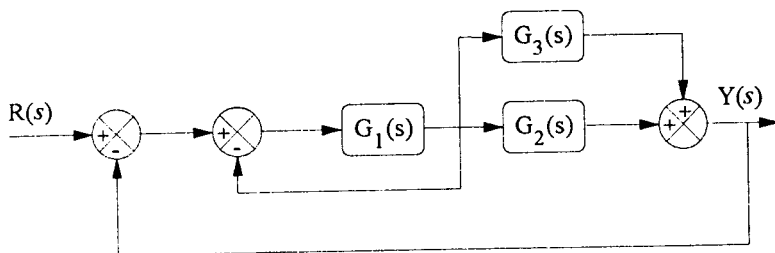


شکل ۴۱-۲ مدار تقویت کننده عملیاتی (op-amp)

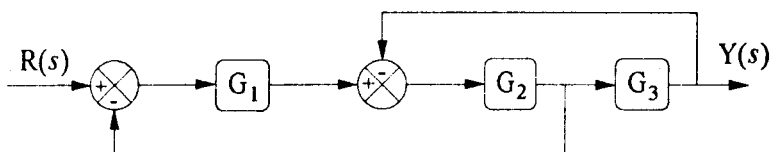
۵-۲. (الف) - با ساده کردن دیاگرام‌های بلوکی شکل‌های ۴۲-۲، ۴۳-۲، ۴۴-۲ و ۴۵-۲ تابع تبدیل کلی آنها را بدست آورید.



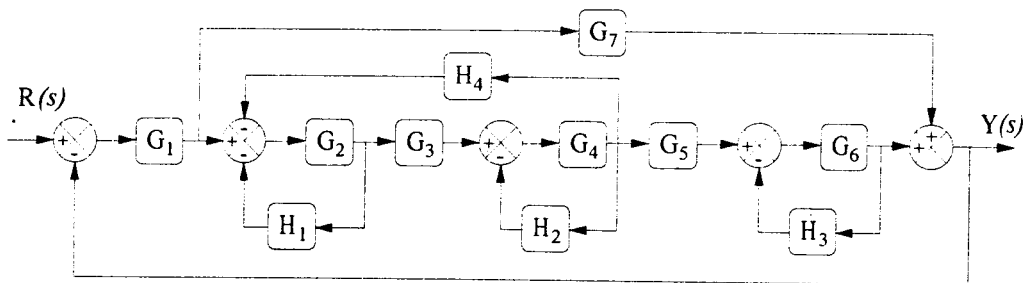
شکل ۴۲-۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۵-۲



شکل ۴۳-۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۵-۲



شکل ۴۴-۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۵-۲



شکل ۴۵-۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۵-۲

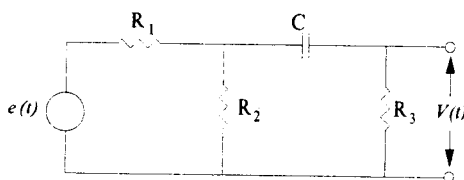
(ب) - با رسم نمودار گذر جریان متناظر دیاگرام‌های بلوکی قسمت الف - و استفاده از قانون میسن تابع تبدیل کلی دیاگرام‌های بلوکی را بدست آورید.

۶-۲- مدار نشان داده شده در شکل ۴۶-۲ را در نظر بگیرید. که در آن ورودی سیستم و خروجی آن به ترتیب عبارتند از $e(t)$ و $v(t)$

الف - دیاگرام بلوکی مدار را رسم کنید.

ب - نمودار گذر سیگنال مدار را رسم کنید.

ج - با ساده کردن دیاگرام بلوکی و استفاده از قانون میسن، تابع تبدیل مدار را پیدا کنید.

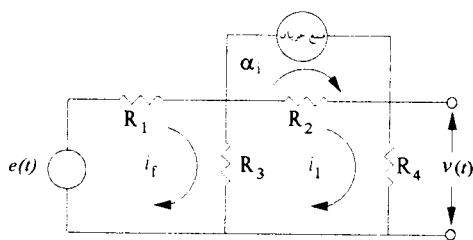


شکل ۴۶-۲ مدار مسئله ۶-۲

۷-۲- مدار نشان داده شده در شکل ۴۷-۲ را در نظر بگیرید. که در آن ورودی سیستم $e(t)$ و خروجی آن $v(t)$ می‌باشند. α نیز ثابت است.

الف - نمودار گذر سیگنال مدار را رسم کنید.

ب - تابع تبدیل مدار را پیدا کنید.

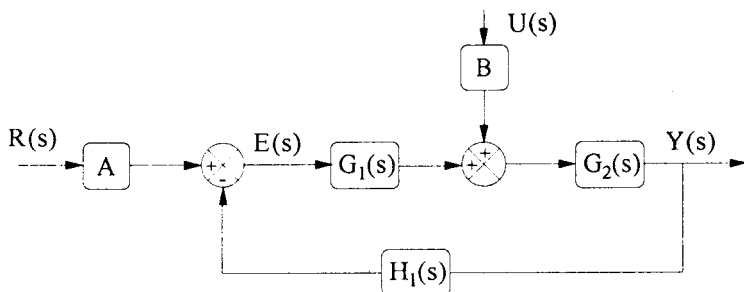


شکل ۴۷-۲ مدار مسئله ۷-۲

۸-۲- دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۴۸-۲ را در نظر بگیرید.

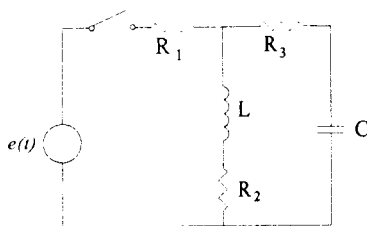
الف - نمودار گذر سیگنال معادل آنرا رسم کنید.

ب - توابع تبدیل $Y(s)/U(s)$ ، $Y(s)/R(s)$ و $E(s)/U(s)$ را پیدا کنید.



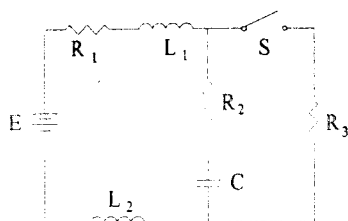
شکل ۴۸-۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۸-۲

۹-۲- معادلات حالت مدار نشان داده شده در شکل ۴۹-۲ را بعد از آنکه کلید بسته شد، بنویسید.



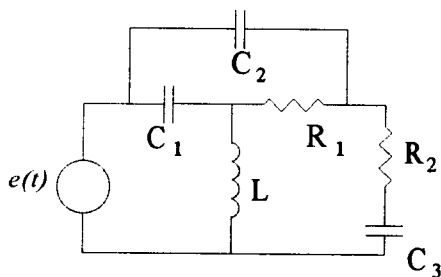
شکل ۴۹-۲ مدار مسئله ۹-۲

۱۰-۲- مدار نشان داده شده در شکل ۵۰-۲ با کلید بسته در حالت ماندگار عمل می‌کند. در زمان $t=0$ کلید باز می‌شود، معادلات حالت مدار را بنویسید



شکل ۵۰-۲ مدار مسئله ۱۰-۲

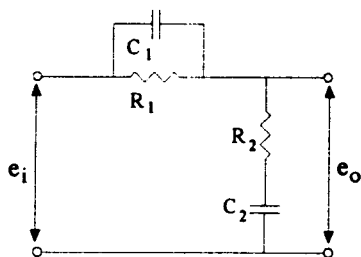
۱۱-۲- مدار نشان داده شده در شکل ۵۱-۲ را در نظر بگیرید. اگر ورودی مدار $e(t)$ و خروجی آن ولتاژ دو سه خازن C_3 باشد، معادلات حالت و خروجی آنرا بنویسید.



شکل ۵۱-۲ مدار مسئله ۱۱-۲

۱۲-۲- مدار نشان داده شده در شکل ۵۲-۲ را در نظر بگیرید.

الف - با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، معادلات حالت و خروجی مدار را بنویسید.
ب - با استفاده از معادلات حالت و خروجی بدست آمده از الف - و همچنین، مستقیماً از معادلات دیفرانسیل مدار، تابع تبدیل آنرا بدست آورید.

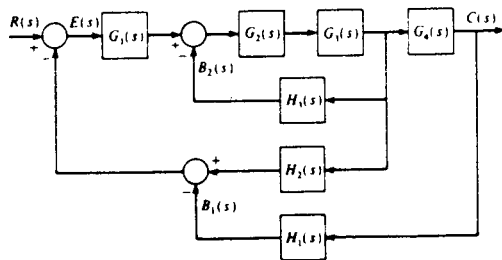


شکل ۵۲-۲ مدار مسئله ۱۲-۲

۱۳-۲- دیاگرام بلوکی سیستمی در شکل ۵۳-۲ نشان داده شده است.

الف - نمودار گذریگنال آنرا رسم کنید.

ب - با بکارگیری قانون میسن تابع تبدیل سیستم را بدست آورید.



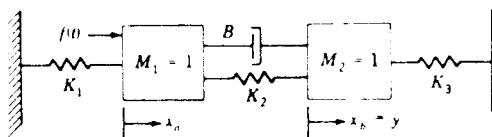
شکل ۵۳-۲ دیاگرام بلوکی مسند ۱۳-۲

۱۴-۲- سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۵۴-۲ را در نظر بگیرید.

(الف) - تابع تبدیل بین ورودی $f(t)$ و خروجی $y(t)$ را بدست آورید.

(ب) - با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، معادلات حالت و خروجی سیستم را

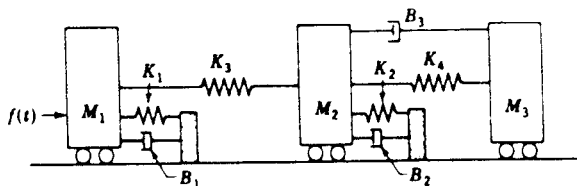
بنویسید.



شکل ۵۴-۲ سیستم مکانیکی مسند ۱۴-۲

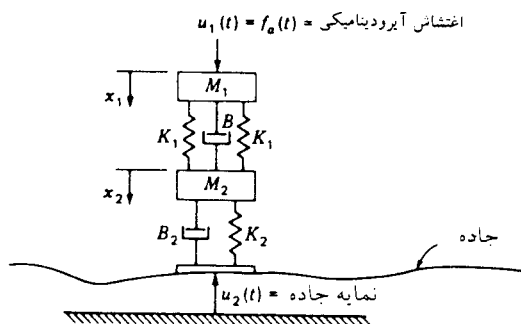
۱۵-۲- معادلات حالت و خروجی سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۵۵-۲ را بدست

آورید.



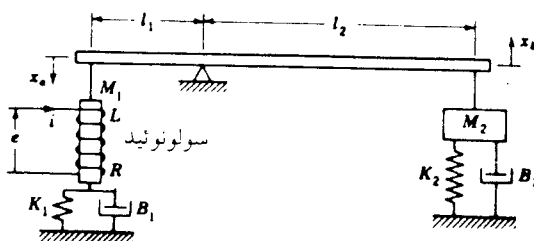
شکل ۵۵-۲ سیستم مکانیکی مسند ۱۵-۲

۱۶-۲. مدل سیستم فنر عمودی یک اتومبیل در شکل ۵۶-۲ نشان داده شده است. (الف) - معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم را بنویسید. (ب) - با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، معادلات حالت و خروجی سیستم را بدست آورید. خروجیهای سیستم جابجایی جرم‌ها M_1, M_2 می‌باشند. (ج) - تابع تبدیل بین $\hat{u}_r, \hat{x}_1$ را که در آن $\hat{u}_r = (B_r D + K_r)u$ ، نیروی اعمال شده توسط جاده می‌باشد را پیدا کنید.



شکل ۵۶-۲ مدل سیستم فنر عمودی یک اتومبیل

۱۷-۲. یک محرک الکترومغناطیسی، یک سولنوئید^۱ را شامل می‌گردد که یک نیروی مغناطیسی متناسب با جریان کویل^۲، $f = K_i i$ ایجاد می‌کند. کویل یک مقاومت و یک هدایت^۳ دارد، به شکل ۵۷-۲ مراجعه کنید.



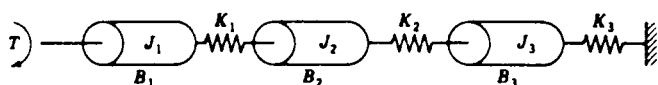
شکل ۵۷-۲ یک محرک الکترومغناطیسی

الف - معادلات دیفرانسیل سیستم را بنویسید.

- 1- Solenoid
3- Inductance

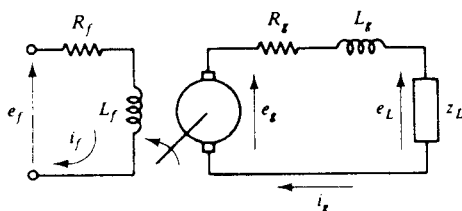
- 2- Coil

- ب - با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، معادلات حالت سیستم را بنویسید.
- ۱۸-۲- برای سیستم ممان اینرسی، میراکننده و فنر نشان داده شده در شکل ۵۸-۲، (الف) - معادلات دیفرانسیل سیستم را بنویسید. (ب) - معادلات حالت را بنویسید.



شکل ۵۸-۲ سیستم مسئله ۱۸-۲

- ۱۹-۲- شکل شماتیک یک ژنراتور DC در شکل ۵۹-۲ نشان داده شده است. با فرض اینکه ولتاژ ژنراتور ایجاد شده e_g متناسب با جریان میدان است و هم چنین با $Z_1 = \text{امپدانس بار}$ ، توابع تبدیل $E_g(s)/E_f(s)$ و $E_f(s)/E_g(s)$ را پیدا کنید.



شکل ۵۹-۲ یک ژنراتور DC

- ۲۰-۲- دینامیک بسیاری از سیستم‌های صنعتی توسط یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), u(t)]$$

که در آن $\mathbf{x}(t)$ بردار n بعدی حالت و $u(t)$ ورودی سیستم، $\mathbf{f}(\cdot)$ نیز یک تابع غیر خطی است. برای اعمال تحلیل و تئوری‌های موجود سیستم‌های خطی به سیستم‌های غیر خطی، لازم است که یک مدل خطی از اینگونه دستگاه معادلات غیر خطی در حول نقطه کار^۱ بدست آوریم. اگر نقطه کار را با $(\mathbf{x}_0, u_0)$ نشان دهیم، بابت سری تیلور

معادله دیفرانسیل غیر خطی سیستم حول نقطه کار و صرف نظر کردن از عبارات درجه

دوم و بالاتر، داریم

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}_*, u_*) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, u) \right|_{(\mathbf{x}_*, u_*)} (x_j - x_{*,j}) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u}(\mathbf{x}, u) \right|_{(\mathbf{x}_*, u_*)} (u - u_*)$$

که در آن $i = 1, 2, \dots, n$ با تعریف

$$\Delta x_i = x_i - x_{*,i}, \quad \Delta u = u - u_*$$

داریم

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{*,i}$$

از آنجایی که

$$\dot{x}_{*,i} = f_i(\mathbf{x}_*, u_*)$$

داریم

$$\Delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, u) \right|_{(\mathbf{x}_*, u_*)} \Delta x_j + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u}(\mathbf{x}, u) \right|_{(\mathbf{x}_*, u_*)} \Delta u$$

معادله فوق را می توان به صورت بردار - ماتریسی زیر نوشت

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta u$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های A و B در نقطه کار محاسبه شده‌اند و این معادلات، مدل خطی شده سیستم را حول نقطه نامی نشان می‌دهند.

اگر معادلات غیر خطی حاکم بر سیستمی به صورت زیر باشند

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - \sin x_2(t) + u_1(t) = f_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) - u_1(t) + x_1(t)e^{-x_2(t)} = f_2(t)$$

معادلات خطی شده آن حول نقطه نامی (۰,۰) را بدست آورید.

مراجع فصل دوم

- [2-1] Marshall J.E., *Control of time delay systems*, IEEE Control Engineering series 10, 1978.
- [2-2] Nash p., *System modelling and optimization*, Peter peregrinus Ltd, 1981.
- [2-3] Nicholson H (ed), *Modelling of dynamical systems*, Vol. 1, Peter peregrinus Ltd, 1980.
- [2-4] Wellstead P.E., *Introduction to physical system modelling*, Academic press, 1979.
- [2-5] Ziegler, B., *Theory of Modelling and simulation*, John wiley, 1976.
- [2-6] Mclean D., *Automatic flight control systems*, Englewood cliffs, N.J: Prentice. Hall , 1990.

کتاب شناسی

مراجع [1] تا [7] به طور تفصیلی، توابع تبدیل سیستم‌های فیزیکی و قواعد کاهش توابع تبدیل را در فصول مختلف مورد بررسی قرار داده‌اند. مراجع [15] و [11]، توابع تبدیل سیستم‌های غیر مهندسی برق را (مانند بیومهندسی در مرجع [11]) مورد بررسی قرار داده‌اند. توابع تبدیل سیستم‌های کنترل فرایند، به طور مشخص در [15] بحث شده‌اند.

برای برخورد عملی‌تر با توابع تبدیل و دیاگرام‌های بلوکی، همراه با مدارهای الکتریکی متناظر سیستم‌های مورد بررسی، و همچنین مدارهای عملی و کاربردی به مرجع [18] مراجعه شود. برای مثالهای متنوع در زمینه رسم دیاگرام‌های بلوکی سیستم‌های عملی به مرجع [2] مراجعه شود.

نمودار گذر سیگنال و قانون میسن در مراجع [1] تا [4] و همچنین [6] و [11] به تفصیل آورده شده‌اند.

برای مدلسازی سیستم‌های متفرقه (مدارهای الکتریکی، سیستم‌های مکانیکی، سیستم‌های هیدرولیکی و سیستم‌های حرارتی) توسط متغیرهای حالت و انتخاب متغیرهای فیزیکی حالت می‌توان از مرجع [1] استفاده نمود. مدلسازی سیستم‌های تاخیردار^۱ در مرجع [2-1] و مرجع [3] آورده شده است.

مدلسازی سیستم‌های فیزیکی، به طور تخصصی در مراجع [2-2] تا [2-5]، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این مراجع روشهای مختلف مدلسازی سیستم‌های فیزیکی (در بدست آوردن توابع تبدیل یا متغیرهای حالت) همراه با شبیه‌سازی آنها، آورده شده‌اند. برای بدست آوردن مدارهای معادل الکتریکی و یا مکانیکی سیستم‌ها به هر کدام از مراجع [2-2] تا [2-5] و برای برخورد ساده‌تر به مراجع [1]، [2]، [3] و [4] مراجعه کنید.

برای بدست آوردن توابع تبدیل و رسم دیاگرام‌های بلوکی موتورهای AC، ژنراتورها و سایر سرومکش‌انیزم‌ها می‌توان به مراجع [1]، [2]، [5]، [8]، [9]، [10]، [14] و [18] مراجعه کرد. برای مدلسازی توابع تبدیل و نمایش فضای حالت دینامیک پرواز و رسم دیاگرام‌های بلوکی متناظر به مرجع [2-6] مراجعه شود.

۳

تحلیل عملکرد گذرا و ماندگار سیستم‌های کنترل

اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با ورودیهای استاندارد سیستم‌های کنترل و نقش آنها.
- ۲- پاسخ سیستم‌های کنترل: الف - حالت - گذرا. ب - حالت - ماندگار.
- ۳- معرفی سیستم‌های مرتبه اول و مرتبه دوم.
- ۴- آشنایی با مشخصه‌های حالت گذرا و ماندگار پاسخ سیستم‌های مرتبه دوم.
- ۵- نقش قطب و صفر تابع تبدیل در پاسخ سیستم.
- ۶- آشنایی با مفهوم خطا در سیستم‌های کنترل.
- ۷- اثرات فیدبک در سیستم‌های کنترل: مقایسه سیستم حلقه - باز و حلقه - بسته از نظر اغتشاش و حساسیت.
- ۸- آشنایی با مفهوم پایداری.
- ۹- بررسی روشهای تعیین پایداری سیستم‌های کنترل.

۱-۳ مقدمه

در فصل دوم، روشهای مختلف مدلسازی سیستمهای کنترل را بررسی کردیم. مهندس کنترل با بکارگیری مدل بدست آمده و شبیه سازی آن، سیستم کنترل را طراحی می کند. بنابراین، طراح قبل از شروع به طراحی، بایستی با انجام یک سری تحلیلها و آزمایشات بر روی سیستم صنعتی مورد نظر، به بررسی رفتار آن بپردازد. به عبارت دیگر، آیا عملکرد سیستم بدون کنترل، قابل قبول است؟ با طرح این سؤال منطقی، ارایه دقیق و کاملی از عملکرد سیستم لازم به نظر می رسد.

در این فصل با بکارگیری سیگنالهای استاندارد تست، اعمال آنها به سیستمهای کنترل و بررسی پاسخ سیستم به آنها، بعضی از معیارهای اصلی عملکرد سیستمها را ارایه خواهیم کرد. در تحلیل پاسخ حالت گذرا و ماندگار سیستمهای کنترل عموماً از این سیگنالهای استاندارد برای آزمودن سیستم استفاده می گردد. در واقع، اعمال این سیگنالها ساده است و با بررسی نتایج بدست آمده از آنها، تحلیل رفتار سیستم نیز ب راحتی انجام می پذیرد و حال آنکه تحلیل سیستم با اعمال سیگنالهای پیچیده به آن، چندان ساده نیست. هم چنین، بسیاری از سیگنالهای پیچیده در سیستمهای کنترل را می توان به صورت ترکیبی از سیگنالهای استاندارد نوشت.

خروجی سیستم نشان داده شده در شکل ۱-۳، تحت سیگنالهای استاندارد ورودی، از دو قسمت تشکیل می شود. قسمت اول، عکس العمل اولیه سیستم به ورودی اعمال شده است. به عبارت دیگر، قسمت اول پاسخ، اولین رفتار سیستم در زمانهای اولیه به ورودی



شکل ۱-۳ سیستم با ورودیهای استاندارد

اعمال شده است که آنرا پاسخ گذاری^۱ سیستم می نامند. قسمت دوم، عکس العمل ماندگار سیستم می باشد. عکس العمل ماندگار سیستم را پاسخ حالت ماندگار^۲ سیستم می نامند و

1- Transient response

2- Steady-state response

عمدتاً از آن قسمت پاسخ تشکیل شده است که پس از از بین رفتن پاسخ گذرا باقی می ماند. تحلیل این دو قسمت، در تحلیل عملکرد سیستم نقش بسزایی را ایفا می کند.

بسیاری از سیستم های کنترل در صنعت را می توان به صورت مدل های مرتبه دوم تقریب زد. لذا در این فصل مشخصه های مهم پاسخ حالت گذرا را با بکارگیری پاسخ پله یک سیستم مرتبه دوم ارایه خواهیم کرد.

پاسخ حالت ماندگار سیستم کنترل نیز بسیار مهم است، زیرا نشان می دهد که با گذشت زمان، پاسخ سیستم به چه سمتی میل می کند. در بسیاری از سیستم های کنترل، پاسخ حالت ماندگار با مقایسه با ورودی مرجع نشانی از دقت آن سیستم است. اگر پاسخ حالت ماندگار با ورودی فرمان داده شده به سیستم دقیقاً مطابقت نداشته باشد، سیستم دارای خطای حالت ماندگار است.

اغتشاش وارده به سیستم می تواند در عملکرد حالت گذرا و ماندگار آن تاثیر زیادی داشته باشد. هم چنین حساسیت سیستم به تغییر پارامترها و یا نویز در سیستم، از مشخصه های مهم سیستم است. اثر فیدبک بر این دو پارامتر نیز در این فصل بررسی شده است.

در آخرین قسمت این فصل، مهم ترین مشخصه سیستم کنترل یعنی پایداری آن مورد بررسی قرار گرفته است. پس از ارایه رابطه بین قطبهای سیستم و پاسخ حالت - گذاری آن، مشاهده می شود که پاسخ تنها در حالتی به سمت بی نهایت میل نخواهد کرد که ریشه های معادله مشخصه سیستم و یا قطبهای آن غیر مثبت بوده و یا قسمت های حقیقی غیر مثبت داشته باشند.

۲-۳ ورودیهای استاندارد برای تحلیل عملکرد سیستم های کنترل

ورودی یک سیستم صنعتی در حین کار نوعاً تصادفی^۱ است. به عنوان مثال در یک سیستم دنبال کننده رادار ممکن است که موقعیت و سرعت هدف به طور کاملاً تصادفی تغییر کند و یا در سیستم هایی که ورودی آنها به مقدار زیادی تحت تاثیر اغتشاشات تصادفی قرار می گیرد. لیکن برای سیستم های ساده و برای بدست آوردن یک سری اطلاعات مهم و اساسی

در رابطه با سیستم، سیگنال‌های استاندارد را به سیستم اعمال و پاسخ سیستم به آنها را مطالعه می‌کنیم. با این کار می‌توان رفتار سیستم را تا حد زیادی به ورودیهای ناشناس دیگر نیز حدس زد.

استاندارد سازی سیگنال‌های ورودی نیز هنگامی که می‌خواهیم چند سیستم را با توجه به خروجی آنها مقایسه کنیم، بسیار مهم است. در اینجا چند سیگنال اساسی را که در تحلیل سیستم‌های کنترل نقش عمده‌ای دارند و بسیاری از سیگنال‌های دیگر را می‌توان با ترکیب آنها به وجود آورد، بررسی می‌کنیم.

ورودی تابع پله^۱، ورودی پله ساده‌ترین نوع ورودی می‌باشد. این ورودی را می‌توان برای نمونه با سوییچ کردن یک ولتاژ در یک مدار الکتریکی یا یک چرخش ناگهانی در شفت مکانیکی در نظر گرفت. اگر اندازه دامنه ورودی واحد باشد آنرا پله واحد^۲ می‌نامند. ورودی پله در حالت کلی به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۳ الف می‌باشد. نمایش ریاضی ورودی پله با دامنه R عبارتست از

$$u(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (۱-۲-۳)$$

که در آن R یک ثابت حقیقی است، یا

$$u(t) = R u_{-1}(t) \quad (۲-۲-۳)$$

که در آن $u_{-1}(t)$ ورودی پله واحد است. تبدیل لاپلاس ورودی پله داده شده با معادله (۱-۲-۳) عبارتست از

$$U(s) = R/s \quad (۳-۲-۳)$$

ورودی تابع ضربه^۳، ورودی ضربه، سیگنالی است که برای یک دوره زمانی تقریباً صفر با دامنه زیاد اعمال شود. اگر سیگنالی برای یک دوره زمانی کوتاه δt به طول انجامد، آنگاه برای $\delta t \rightarrow 0$ سیگنال یک ضربه خواهد شد. در واقع ورودی ضربه را می‌توان به عنوان مشتق ساده ورودی پله در نظر گرفت. بنابراین تبدیل لاپلاس این ورودی عبارت است از

$$U(s) = 1 \quad (۴-۲-۳)$$

1- Step-function

2- Unit step

3- Impulse function

اعمال سیگنالی که برای گستره زمانی δt و $\delta t \rightarrow 0$ به طول انجامد و دامنه بی‌نهایت بزرگ داشته باشد در عمل غیر ممکن است و لذا در کاربردهای عملی این سیگنال را با سیگنالی که دامنه واحد داشته و برای یک مدت زمانی بسیار کوتاه δt وجود داشته باشد، تقریب می‌زنند. شکل سیگنال تقریبی در شکل ۲-۳ (ب) آورده شده است.

ورودی تابع شیب^۱. اگر از ورودی پله انتگرال گرفته شود، سیگنالی بدست خواهد آمد که دامنه آن یک تغییر ثابت نسبت به زمان خواهد داشت و یا به عبارت دیگر به طور خطی از صفر نسبت به زمان اضافه خواهد شد. ورودی شیب را ورودی سرعت^۲ نیز می‌نامند. ورودی شیب در حالت کلی به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۳ (ج) می‌باشد. نمایش ریاضی ورودی شیب عبارتست از

$$u(t) = \begin{cases} Rt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (5-2-3)$$

که در آن R یک ثابت حقیقی است. اگر $R=1$ باشد، ورودی را ورودی شیب واحد^۳ می‌نامند. هم‌چنین داریم

$$u(t) = Rt u_{-1}(t) \quad (6-2-3)$$

تبدیل لاپلاس ورودی شیب بدین صورت داده می‌شود

$$U(s) = R/s^2 \quad (7-2-3)$$

ورودی تابع سهموی^۴. ورودی سهموی با انتگرال تابع شیب بدست می‌آید. ورودی سهموی را ورودی شتاب^۵ نیز می‌گویند. نمایش ریاضی ورودی سهموی عبارتست از

$$u(t) = \begin{cases} Rt^2/2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (8-2-3)$$

که در آن R یک ثابت حقیقی است و یا

$$u(t) = Rt^2/2 u_{-1}(t) \quad (9-2-3)$$

1- Ramp function

2- Velocity input

3- Unit-ramp input

4- Parabolic function

5- Acceleration input

تبدیل لاپلاس این ورودی بدین صورت داده می‌شود

$$U(s) = R/s^3 \quad (10-2-3)$$

در شکل آن نیز در شکل ۲-۳ (د) نشان داده شده است.

ورودی تابع چند جمله‌ای^۱ بدیهی است که با ترکیب ورودیهای پله، شیب و سهموی

می‌توان یک سیگنال ورودی برای $t \geq 0$ به صورت زیر نوشت

$$u(t) = R_1 + R_2 t + R_3 t^2/2 \quad (11-2-3)$$

در واقع به سادگی مشاهده می‌شود که می‌توان عبارات انتگرال گرفته شده بیشتری را وارد

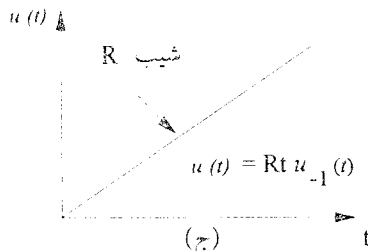
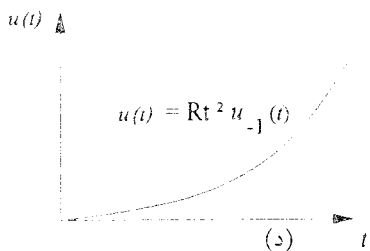
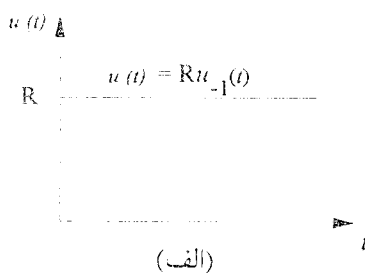
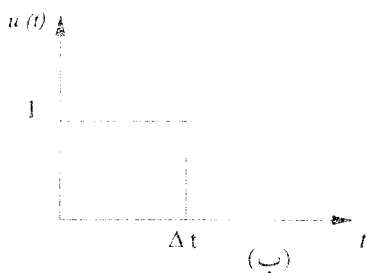
معادله داده شده در (۱۱-۲-۳) کرد و ورودی کلی زیر را برای $t \geq 0$ تشکیل داد

$$u(t) = R_1 + R_2 t + R_3 t^2/2 + R_4 t^3/3! + \dots + R_p t^p/p! \quad (12-2-3)$$

عبارت بالا را تابع چند جمله‌ای نامیده و برای $t < 0$ نیز صفر می‌باشد.

ورودی تابع سینوسی^۲ ورودی سینوسی به صورت داده شده در زیر است

$$u(t) = \begin{cases} U \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (13-2-3)$$



شکل ۲-۳ سیگنال‌های استاندارد ورودی (الف) تابع پله، (ب) تابع ضربه، (ج) تابع شیب، (د) تابع سهموی.

این ورودی، در تحلیل پاسخ حالت ماندگار سیستم‌های خطی، نقش بسزایی را ایفا می‌نماید. تذکر این نکته مهم است که خروجی حالت ماندگار سیستم‌های خطی به ورودی سینوسی، یک تابع سینوسی است.

۳-۳ پاسخ حالت ماندگار

همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، پاسخ سیستم از دو قسمت حالت گذرا و ماندگار تشکیل شده است. اگر پاسخ سیستم به ورودی $r(t)$ را با $c(t)$ نشان دهیم، داریم

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t) \quad (۱-۳-۳)$$

که در آن $c_{tr}(t)$ قسمت حالت گذرای پاسخ و $c_{ss}(t)$ قسمت حالت ماندگار پاسخ هستند. می‌توان قسمت حالت ماندگار پاسخ را به عنوان پاسخی دانست که با گذشت زمان و پس از ازین رفتن پاسخ حالت گذرا به جای می‌ماند و پاسخ سیستم را تشکیل می‌دهد. بنابراین

$$c_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \quad (۲-۳-۳)$$

۱-۳-۳ پاسخ حالت ماندگار به ورودیهای پله، شیب و سهموی

سیستم داده شده با تابع تبدیل مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{k}{s + a_0} \quad (a_0 > 0) \quad (۳-۳-۳)$$

که در آن k بهره سیستم است. خروجی سیستم برای ورودی $R(s)$ به صورت زیر داده می‌شود

$$C(s) = G(s) R(s) \quad (۴-۳-۳)$$

برای ورودی پله واحد داریم $R(s) = 1/s$ و لذا معادله‌های (۳-۳-۳) و (۴-۳-۳) نتیجه

می‌دهند

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{k}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{k/a_0}{s} - \frac{k/a_0}{s + a_0} \end{aligned} \quad (۵-۳-۳)$$

عکس تبدیل لاپلاس معادله (۵-۳-۳) می‌دهد

$$c(t) = \frac{k}{a_0} - \frac{k}{a_0} \exp(-a_0 t) \quad (۶-۳-۳)$$

پاسخ زمانی داده شده با معادله (۶-۳-۳) در شکل ۳-۳ نشان داده شده است. برای بدست آوردن پاسخ حالت ماندگار می توان مستقیماً از معادله (۶-۳-۳) استفاده کرد و یا قضیه مقدار نهایی تبدیل لاپلاس را بکار گرفت. از معادله (۶-۳-۳) داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \frac{k}{a_0} \quad (۷-۳-۳)$$

هم چنین از قضیه مقدار نهایی داریم

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \quad (۸-۳-۳)$$

معادله (۸-۳-۳)، برای سیستم مرتبه اول در نظر گرفته شده خواهد داد

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s+a_0} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{a_0} \quad (۹-۳-۳)$$

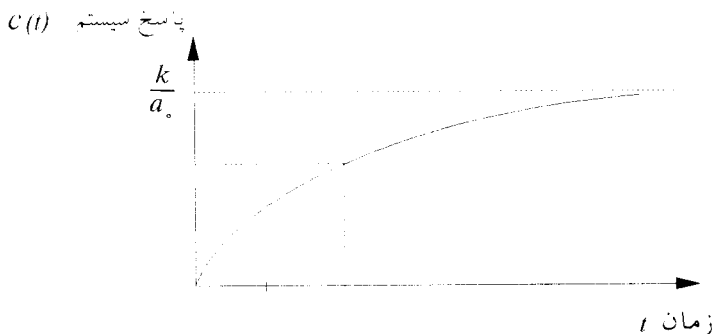
که با پاسخ داده شده با معادله (۷-۳-۳)، و نشان داده شده در شکل ۳-۳ مطابقت دارد. برای ورودی شیب واحد به سیستم داده شده با معادله (۳-۳-۳)، از معادله (۴-۳-۳) داریم

$$C(s) = \frac{k}{s+a_0} \cdot \frac{1}{s^2} \quad (۱۰-۳-۳)$$

پاسخ حالت ماندگار برای این ورودی نیز همانند ورودی پله واحد از قضیه مقدار نهایی بدست می آید. بنابراین

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s+a_0} \cdot \frac{1}{s^2} = \infty \quad (۱۱-۳-۳)$$

از معادله (۱۱-۳-۳) داریم که پاسخ سیستم های مرتبه اول برای ورودی شیب به سمت بی نهایت میل خواهد کرد. برای تمرین نشان دهید که پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی شیب واحد عبارتست از



شکل ۳-۳ پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی پله واحد

$$c(t) = \frac{k}{a_0} \left[t - \frac{1}{a_0} + \frac{\exp(-a_0 t)}{a_0} \right] \quad (۱۲-۳-۳)$$

و با پاسخ بدست آمده از قضیه مقدار نهایی مطابقت دارد.

به طور مشابهی می توان نشان داد که پاسخ سیستم مرتبه اول برای ورودی سهموی و ورودیهای مرتبه بالاتر به سمت بی نهایت میل خواهد کرد. در واقع برای ورودی سهموی با اعمال قضیه مقدار نهایی داریم

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s + a_0} \frac{1}{s^3} = \infty \quad (۱۳-۳-۳)$$

پاسخ بدست آمده سیستم مرتبه اول داده شده با معادله (۳-۳-۳)، برای ورودی پله واحد را در نظر بگیرید. مقادیر k و a_0 مقدار حالت ماندگار پاسخ را تعیین می کنند. اما با اندکی تامل مشاهده می شود که a_0 نه تنها در تعیین حالت ماندگار پاسخ سیستم برای ورودی پله واحد نقش دارد، بلکه سرعت رسیدن به حالت ماندگار را نیز تعیین می کند. در واقع برای $t = \frac{1}{a_0}$ داریم $c(\frac{1}{a_0}) = \frac{k}{a_0} (1 - e^{-1})$ و لذا هر چه a_0 بزرگتر شود، پاسخ سیستم سریعتر به حالت ماندگار خواهد رسید. بنابراین a_0 نقش مهمی را در رفتار سیستم ایفاء می کند. به $1/a_0$ ثابت زمانی^۱ سیستم مرتبه اول می گویند. هر چه ثابت زمانی سیستم کوچکتر باشد پاسخ آن سریعتر خواهد بود.

تابع تبدیل یک سیستم مرتبه دوم در حالت کلی بدین صورت است

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (۱۴-۳-۳)$$

توجه کنید که مرتبه دوم بودن تابع تبدیل معادله (۱۴-۳-۳) به واسطه عبارت مرتبه دوم در مخرج آن است. برای بدست آوردن پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودی پله واحد، از قضیه مقدار نهایی داریم

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0} \frac{1}{s} = \frac{k}{a_0} \quad (۱۵-۳-۳)$$

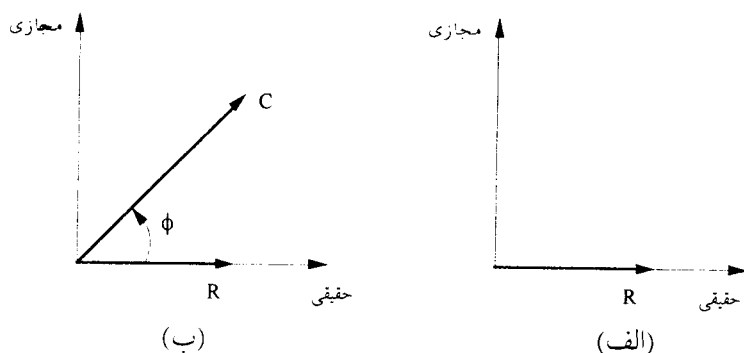
که مشابه نتیجه بدست آمده برای سیستم مرتبه اول است. پاسخ سیستم مرتبه دوم به ورودی

پله پیچیده‌تر از پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی پله است. این پاسخ به محل ریشه‌های مخرج تابع تبدیل بستگی دارد و در بخش ۳-۴ مفصلاً بررسی خواهد شد.

۲-۳-۳ ورودیهای سینوسی و چند جمله‌ای

در بخش قبل، برای تعیین پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودیهای پله، شیب و سهموی از تبدیل لاپلاس و قضیه مقدار نهایی استفاده شد. همانطور که مشاهده شد، برای بکارگیری این قضیه باید یک مقدار حدی وجود داشته باشد که سیگنال به آن به ازاء $t \rightarrow \infty$ همگرا شود، در تحلیل پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودی سینوسی اینچنین حالتی وجود ندارد و لذا نمی‌توان از قضیه مقدار نهایی استفاده کرد.

برای ورودی سینوسی داده شده با معادله (۳-۲-۱۳)، نمایش دیاگرام فازور^۱ آن در شکل ۳-۴ (الف) نشان داده شده است. با فرض پایداری سیستم خطی (پایداری را در بخش ۳-۸ بحث خواهیم کرد)، پاسخ حالت ماندگار سیستم خطی به ورودی سینوسی یک تابع سینوسی خواهد بود. بنابراین اگر خروجی حالت ماندگار را در پاسخ به ورودی سینوسی با $c(t)$ نشان دهیم، یک تابع سینوسی با دامنه C و انتقال فاز ϕ خواهد بود. نمایش دیاگرام فازور خروجی حالت ماندگار نیز در شکل ۳-۴ (ب)، نشان داده شده است.



شکل ۳-۴ (الف) نمایش دیاگرام فازور $r(t) = R \cos \omega t$: (ب) نمایش دیاگرام فازور

$c(t) = C \cos(\omega t + \phi)$ که در آن $c(t)$ پاسخ حالت ماندگار است.

یک ورودی چند جمله‌ای کلی با معادله (۳-۲-۱۲) داده شده است. فرض کنید که معادله دیفرانسیل سیستمی که این ورودی به آن اعمال خواهد شد به صورت داده شده در زیر باشد

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) c(t) = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0) r(t) \quad (3-2-16)$$

که در آن ضرایب ثابت a_i و b_i مشخصه‌های سیستم را تعیین می‌کنند (فصل دوم). با اعمال یک ورودی داده شده با معادله (۳-۲-۱۲) به سیستم داده شده با معادله (۳-۲-۱۶)، باید پاسخ حالت ماندگار به اندازه کافی عبارات توان t را در بر داشته تا تساوی در معادله دیفرانسیل سیستم برقرار گردد.

مثال ۳-۳-۱

برای $n=2$ و $m=1$ ، معادله دیفرانسیل سیستم عبارتست از

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0) c(t) = (b_1 D + b_0) r(t)$$

ورودی به سیستم نیز به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$r(t) = R_0 + R_1 t + R_2 \frac{t^2}{2}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} (a_2 D^2 + a_1 D + a_0) c(t) &= (b_1 D + b_0) [R_0 + R_1 t + R_2 \frac{t^2}{2}] \\ &= b_1 R_1 + b_0 R_0 + (b_1 R_2 + b_0 R_1) t + b_0 R_2 \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

اگر پاسخ حالت ماندگار را در حالت کلی به صورت زیر بیان کنیم

$$c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{c_k t^k}{k!}$$

با قرار دادن $c(t)$ در معادله بالا برای آنکه در دو طرف معادله تساوی داشته باشیم، باید قرار دهیم $k=2$ و یا

$$c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 \frac{t^2}{2!}$$

بنابراین

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0) c(t) = a_2 c_2 + a_1 c_1 + a_0 c_0 + (a_1 c_2 + a_0 c_1) t + \frac{a_0 c_2}{2} t^2$$

ضرایب خروجی حالت ماندگار c_0 ، c_1 و c_2 را از حل دستگاه معادله‌های زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
 a_0 c_2 &= b_0 R_2 \\
 a_1 c_2 + a_0 c_1 &= b_1 R_2 + b_0 R_1 \\
 a_2 c_2 + a_1 c_1 + a_0 c_0 &= b_2 R_2 + b_1 R_1
 \end{aligned}$$

توجه کنید که مقدار k به درجه سیگنال ورودی بستگی خواهد داشت.

۴-۳ پاسخ حالت - گذرا

در بخش ۳-۳، پاسخ حالت ماندگار سیستم، به عنوان آن قسمت از پاسخ کلی سیستم که به ازاء $t \rightarrow \infty$ باقی خواهد ماند، تعریف شد. به طریق مشابهی، می توان پاسخ حالت گذرای سیستم را آن قسمت از پاسخ کلی سیستم در نظر گرفت که به ازاء $t \rightarrow \infty$ صفر خواهد شد. برای آنکه پاسخ سیستم قسمتی داشته باشد که به ازاء $t \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل کند و دامنه آن با افزایش زمان به سمت بی نهایت میل نکند، سیستم باید مشخصه خاصی به نام «پایداری» را برآورده سازد که در بخش ۳-۸ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در اینجا برای بررسی پاسخ حالت گذرا، فرض می کنیم که اولاً سیگنال ورودی به سیستم پله واحد است و ثانیاً سیستم مرتبه دوم است. اگر چه می توان به جای ورودی پله واحد از سایر ورودیها مانند ورودی شیب یا سهموی نیز استفاده کرد، لیکن اطلاعات بیشتری از آنچه توسط ورودی پله واحد بدست می آید، از اعمال این ورودیها بدست نخواهد آمد. لذا با توجه به ساده تر بودن صورت عملی اعمال ورودی پله و اینکه در عمل مشخصه های بدست آمده از تحلیل پاسخ ورودی پله برای تحلیل حالت ماندگار بسیار غنی هستند، این ورودی در تحلیل بسیاری از سیستم های عملی و صنعتی استفاده می شود. استفاده از یک تابع تبدیل مرتبه دوم در تحلیل پاسخ حالت گذرا نیز به هیچ وجه محدود کننده نیست، زیرا اگرچه ممکن است بسیاری از سیستم های عملی و صنعتی مرتبه سوم یا بالاتر باشند، لیکن می توان آنها را به خوبی با یک مدل مرتبه دوم تقریب زد. در اکثریت موارد، مدل مرتبه دوم مدل غالب سیستم است و به عبارت دیگر، صورت کلی پاسخ سیستم توسط قسمت مرتبه دوم آن تعیین می گردد.

پاسخ یک سیستم مرتبه دوم به ورودی پله، بسته به موقعیت قطبهای آن (ریشه های چند جمله ای مرتبه دوم در مخرج تابع تبدیل) می تواند به یکی از سه صورت زیر باشد:

۱- پاسخ میرای شدید^۱

۲- پاسخ میرای بحرانی^۲

۳- پاسخ میرای ضعیف^۳

توجه کنید که پاسخ نشان داده شده در شکل ۳-۳ برای سیستم مرتبه اول در پاسخ به ورودی پله واحد، تنها صورت پاسخ حالت گذرا و ماندگار یک سیستم مرتبه اول است. با تغییر دادن محل قطب سیستم مرتبه اول، ثابت زمانی آن تغییر می‌کند و در نهایت سرعت پاسخ کم یا زیاد خواهد شد، لیکن صورت کلی آن همانند شکل ۳-۳ خواهد بود.

۳-۴-۱ پاسخ میرای شدید

اگر تابع تبدیل سیستم دو ریشه حقیقی (دو قطب حقیقی) داشته باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{k}{(s + \alpha)(s + \beta)} \quad (1-4-3)$$

پاسخ سیستم داده شده با معادله (۱-۴-۳)، به ورودی پله واحد عبارتست از

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{k}{(s + \alpha)(s + \beta)} \frac{1}{s} \\ &= \frac{k}{\alpha\beta} \left[\frac{1}{s} + \frac{\beta}{(\alpha - \beta)} \frac{1}{s + \alpha} + \frac{\alpha}{(\beta - \alpha)} \frac{1}{s + \beta} \right] \end{aligned} \quad (2-4-3)$$

با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله (۲-۴-۳) بدست می‌آوریم

$$c(t) = k \left\{ \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{(\alpha - \beta)} \left[\frac{\exp(-\alpha t)}{\alpha} - \frac{\exp(-\beta t)}{\beta} \right] \right\} \quad (3-4-3)$$

(عملیات تبدیل به کسرهای جزئی (۲-۴-۳) و عکس تبدیل لاپلاس (۳-۴-۳) را انجام دهید.) با فرض مثبت بودن اعداد حقیقی α و β از معادله (۳-۴-۳) داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \frac{k}{\alpha\beta} = \frac{k}{a_0} \quad (a_0 = \alpha\beta) \quad (4-4-3)$$

توجه کنید که این نتیجه با نتیجه بدست آمده از اعمال قضیه مقدار نهایی در معادله

(۱۵-۳-۳) مطابقت دارد. هم چنین توجه کنید که در $t=0$ داریم

$$c(t) \Big|_{t=0} = k \left\{ \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{(\alpha-\beta)} \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right] \right\} = 0 \quad (۵-۴-۳)$$

و

$$\frac{dc(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (۶-۴-۳)$$

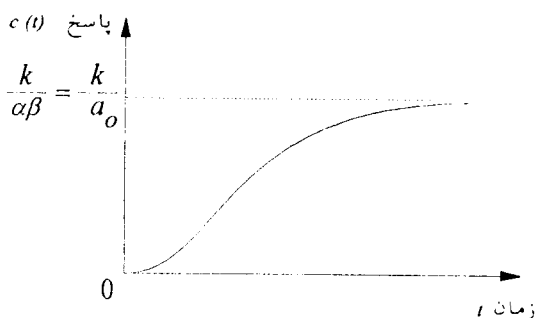
پاسخ کلی سیستم برای حالت میرای شدید در شکل ۳-۵ نشان داده شده است. نکته قابل توجه در این پاسخ آن است که همانند پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی پله، سیگنال خروجی همواره از یک طرف به مقدار نهایی خویش میل می کند، به عبارت دیگر هیچگاه قبل از حالت دایمی به مقدار نهایی خودش نمی رسد.

۳-۴-۲ پاسخ میرای بحرانی

اگر قطبهای حقیقی یک تابع تبدیل سیستم مرتبه دوم در یک مکان بر روی محور حقیقی منفی قرار گرفته باشند، داریم

$$G(s) = \frac{k}{(s + \alpha)^2} \quad (۷-۴-۳)$$

این حالت را می توان یک حالت حدی برای حالت پاسخ میرای شدید در بخش ۳-۴-۱ در نظر گرفت. اگر به تابع تبدیل داده شده با معادله (۷-۴-۳) یک ورودی پله واحد اعمال گردد،



شکل ۳-۵ پاسخ میرای شدید برای ورودی پله

داریم

$$C(s) = \frac{k}{(s + \alpha)^2} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{k}{\alpha^2} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s + \alpha)} - \frac{\alpha}{(s + \alpha)^2} \right] \quad (۸-۴-۳)$$

و با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله (۸-۴-۳)، بدست می آوریم

$$c(t) = \frac{k}{\alpha^2} \{ 1 - \exp(-at) - at \exp(-at) \}$$

$$= \frac{k}{\alpha^2} \{ 1 - [1 + at] \exp(-at) \} \quad (۹-۴-۳)$$

عملیات تبدیل به کسرهای جزئی (۸-۴-۳) و عکس تبدیل لاپلاس (۹-۴-۳) را انجام دهید. با فرض $\alpha > 0$ داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \frac{k}{\alpha^2} = \frac{k}{a_0} \quad (۱۰-۴-۳)$$

که در آن $a_0 = \alpha^2$ برای تعیین شرایط اولیه پاسخ از معادله (۹-۴-۳)، بدست می آوریم

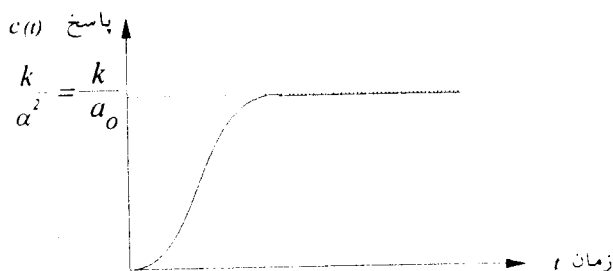
$$c(t) \big|_{t=0} = 0 \quad (۱۱-۴-۳)$$

و

$$\frac{dc(t)}{dt} \big|_{t=0} = 0 \quad (۱۲-۴-۳)$$

پاسخ زمانی کلی سیستم برای حالت میرای بحرانی در شکل ۶-۳ نشان داده شده است.

در صورتیکه فرارفت از مقدار حالت ماندگار پاسخ $\frac{k}{\alpha^2}$ مجاز نباشد (به عبارت دیگر پاسخ در هیچ زمانی مقداری بیش از $\frac{k}{\alpha^2}$ را اختیار نکند)، پاسخ میرای سریعترین پاسخی است که می توان برای یک سیستم مرتبه دوم بدست آورد. این خاصیت در برخی از



شکل ۶-۳ پاسخ میرای بحرانی برای ورودی پله

سیستم‌های عملی و صنعتی بسیار مهم است. به عنوان مثال در یک روبات جوشکار، فرارفت از مقدار نهایی می‌تواند بسیار خطرناک باشد و حال آنکه کندی سرعت و زمان بری زیاد در رسیدن به حالت نهایی (مانند حالت میرای شدید) نیز اصلاً مطلوب نیست، لذا در این صورت می‌توان از حالت میرای بحرانی استفاده نمود.

۳-۴-۳ پاسخ میرای ضعیف

مشخصه اصلی پاسخ میرای ضعیف آن است که بر خلاف دو حالت قبلی، در اثر اعمال ورودی پله، خروجی از مقدار نهایی خودش (مقدار حالت ماندگار پاسخ) فرا رفته و بالا می‌زند. در این حالت دو ریشه (قطب) مخرج تابع تبدیل سیستم اعداد مختلط هستند. وجود قطبهای مختلط باعث می‌شود که پاسخ به ورودی پله نوسانی گردد. سرعت از بین رفتن این نوسانات بستگی به مقدار میرایی تابع تبدیل خواهد داشت. اگر پاسخ میرا نشود، در تئوری این نوسانات همواره باقی خواهند ماند اما در عمل هر سیستمی همواره مقداری میرایی پاسخ خواهد داشت. با افزایش مقدار میرایی، نوسانات سریعتر از بین می‌روند و با افزایش بیشتر میرایی به پاسخ میرایی بحرانی می‌رسیم که در آن نوسانات امکان شروع شدن را پیدا نمی‌کنند.

تابع تبدیل سیستم مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{k}{(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)}$$

$$= \frac{k}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{k}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \quad (13-4-3)$$

با اعمال ورودی پله واحد به سیستم داده شده با معادله (۱۳-۴-۳)، بدست می‌آوریم

$$C(s) = \frac{k}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\frac{1}{s} - \frac{(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{\alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right] \quad (14-4-3)$$

و با عکس تبدیل لاپلاس از معادله (۱۴-۴-۳)، داریم

$$c(t) = \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ 1 - \exp(-\alpha t) \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \exp(-\alpha t) \sin \beta t \right\} \quad (15-4-3)$$

یا

$$c(t) = \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{k \exp(-\alpha t)}{\beta (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \left\{ \frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \cos \beta t + \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \sin \beta t \right\} \quad (۱۶-۴-۳)$$

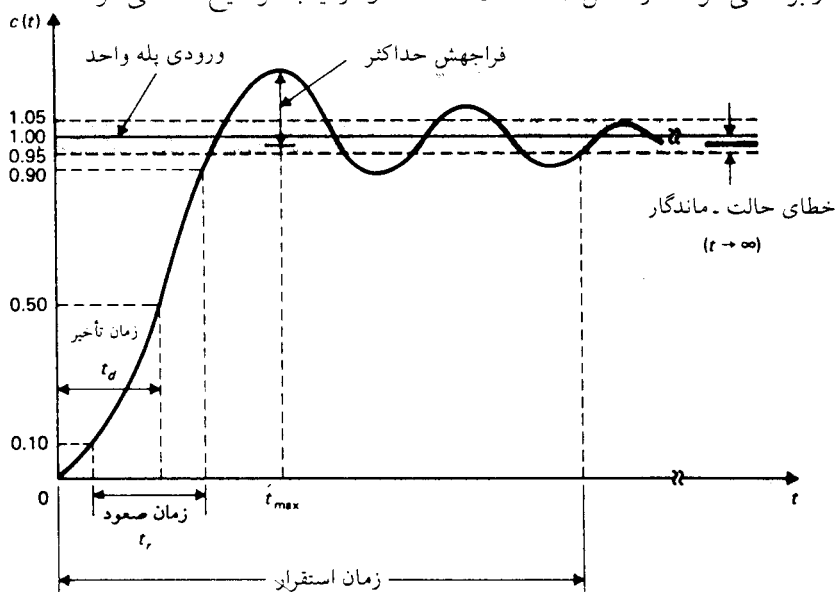
با تعریف

$$\theta = \tan^{-1} \beta / \alpha \quad (۱۷-۴-۳)$$

داریم

$$c(t) = \frac{k}{(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ 1 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{\beta} \exp(-\alpha t) \sin(\beta t + \theta) \right\} \quad (۱۸-۴-۳)$$

پاسخ، همانطور که از معادله (۱۸-۴-۳) مشاهده می‌شود، یک موج سینوسی با فرکانس β همراه با یک عبارات میراکننده نمایی با عامل α و یک مقدار حالت ماندگار داده شده با $\frac{k}{(\alpha^2 + \beta^2)}$ است. شکل ۷-۳ پاسخ پله واحد یک سیستم مرتبه دوم را نشان می‌دهد. معیارهای عملکرد که معمولاً در حوزه زمان برای بررسی و تحلیل سیستم‌های کنترل خطی بکار برده می‌شوند، در شکل ۷-۳ نشان داده شده و در اینجا توضیح داده می‌شوند:



شکل ۷-۳ پاسخ پله واحد یک سیستم کنترل مرتبه دوم

۱- فراجش حداکثر^۱. اگر حداکثر مقدار خروجی سیستم $C(t)$ پس از اعمال ورودی یله را با C_{max} نشان دهیم و C_{ss} نیز مقدار حالت ماندگار آن بوده و $C_{max} \geq C_{ss}$ باشد، آنگاه فراجش حداکثر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{فراجش حداکثر} = C_{max} - C_{ss} \quad (3-4-19)$$

در بسیاری از موارد فراجش حداکثر را به صورت درصدی از مقدار حالت ماندگار پاسخ پله سیستم نمایش می‌دهند. یعنی آنکه

$$\text{درصد فراجش حداکثر} = \frac{\text{فراجش حداکثر}}{C_{ss}} \times 100\% \quad (3-4-20)$$

یکی از مشخصه‌های عملکرد یک سیستم در حوزه زمان، فراجش حداکثر آن است. در واقع فراجش حداکثر بسیار زیاد در عمل مطلوب نیست زیرا باعث کاهش میزان پایداری سیستم می‌گردد.

۲- زمان تاخیر^۲. زمان تاخیر به زمانی گفته می‌شود که لازم است تا پاسخ پله به ۵۰٪ مقدار نهایی خودش برسد.

۳- زمان صعود^۳. زمان صعود به زمانی گفته می‌شود که لازم است تا پاسخ از ۱۰ به ۹۰ درصد یا از ۵ به ۹۵ درصد یا از ۰ به ۱۰۰ درصد مقدار نهایی خودش برسد. برای سیستم‌های میرای ضعیف معمولاً از ۰ تا ۱۰۰ درصد و برای سیستم‌های میرای شدید اکثراً از ۱۰ تا ۹۰ درصد استفاده می‌شود.

۴- زمان استقرار^۴. زمان استقرار به مدت زمانی گفته می‌شود که لازم است تا پاسخ به یک محدوده مشخص شده حول مقدار نهایی پاسخ رسیده و پس از آن نیز در آن محدوده باقی بماند. این محدوده عموماً برحسب درصدی از مقدار نهایی پاسخ مانند ۲٪ و یا ۵٪ آن بیان می‌شود.

چهار کمیت تعریف شده در بالا معیارهای مستقیمی برای سنجش عملکرد و مشخصه‌های یک سیستم کنترل هستند. اندازه‌گیری آنها در عمل سراسر است و به سادگی نیز تعریف می‌شوند.

1- Maximum overshoot

2- Delay time

3- Rise time

4- Settling time

متداولترین نحوه نوشتن تابع تبدیل یک سیستم مرتبه دوم به صورت زیر است

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (21-4-3)$$

که در آن ξ را نسبت میرایی^۱ و ω_n را فرکانس طبیعی میرا نشده^۲ سیستم می نامند. از مقایسه معادله های (21-4-3) و (13-4-3) داریم $\xi = \frac{\alpha}{\omega_n}$ و $\omega_n^2 = \alpha^2 + \beta^2$. به نکات زیر در رابطه با نسبت میرایی و فرکانس طبیعی میرا نشده توجه کنید:

۱- برای $\beta \rightarrow 0$ ، قطبهای سیستم مرتبه دوم در (13-4-3) به سمت قطبهای یک سیستم میرایی بحرانی میل خواهند کرد و در این صورت برای نسبت میرایی داریم $\xi \rightarrow 1$. از طرف دیگر اگر $\alpha \rightarrow 0$ عامل میرایی نمایی در معادله (18-4-3) به صفر میل می کند و به سمت یک پاسخ نوسانی بدون میرایی (نوسانی خالص) میل خواهیم کرد، در این صورت برای نسبت میرایی داریم $\xi \rightarrow 0$. از اینرو برای یک پاسخ میرای ضعیف داریم $0 < \xi < 1$ که در آن با افزایش ξ به سمت ۱، میرایی در سیستم قوی تر خواهد شد. مقادیر $\xi > 1$ متناظر با حالت میرای شدید می باشند (بخش 3-4-1 را ببینید).

۲- اگر نسبت میرای صفر باشد، آنگاه $\alpha = 0$ و $\xi = 0$ و در این حالت نوسانات میرانشده و غیر افزایشی با فرکانس ω_n همواره باقی خواهند ماند.

پاسخ سیستم داده شده با معادله (21-4-3) به ورودی پله واحد عبارتست از

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (22-4-3)$$

با استفاده از عکس تبدیل لاپلاس می توان نشان داد که خروجی سیستم عبارتست از

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \cos^{-1} \xi) \quad t \geq 0 \quad (23-4-3)$$

معادله (23-4-3) دقیقاً همان معادله (18-4-3) است که مقادیر زیر در آن جایگزین شده اند

$$k = \alpha^2 + \beta^2, \quad \alpha = -\xi\omega_n, \quad \beta = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}, \quad \phi = \cos^{-1} \xi$$

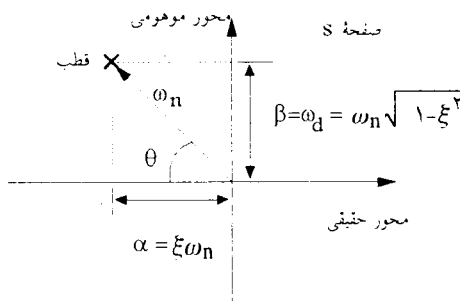
(صحت این روابط را با فرض $k = \alpha^2 + \beta^2$ تایید کنید.) همانطور که اشاره شد ω_n فرکانس طبیعی میراننده سیستم برای $\xi = 0$ است. از رابطه سوم در روابط بالا داریم به ازاء $0 < \xi < 1$ قسمتهای موموی ریشه‌ها اندازه‌ای به مقدار زیر دارند

$$\beta = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (24-4-3)$$

اگر $\xi \neq 0$ باشد، پاسخ سیستم $c(t)$ یک تابع غیر متناوب است و β تعریف شده با معادله (24-4-3) یک فرکانس نیست. لیکن به خاطر اهمیتی که β دارد آنرا با ω_d نشان داده و فرکانس طبیعی میرا شده^۱ یا فرکانس شرطی^۲ می‌نامند.

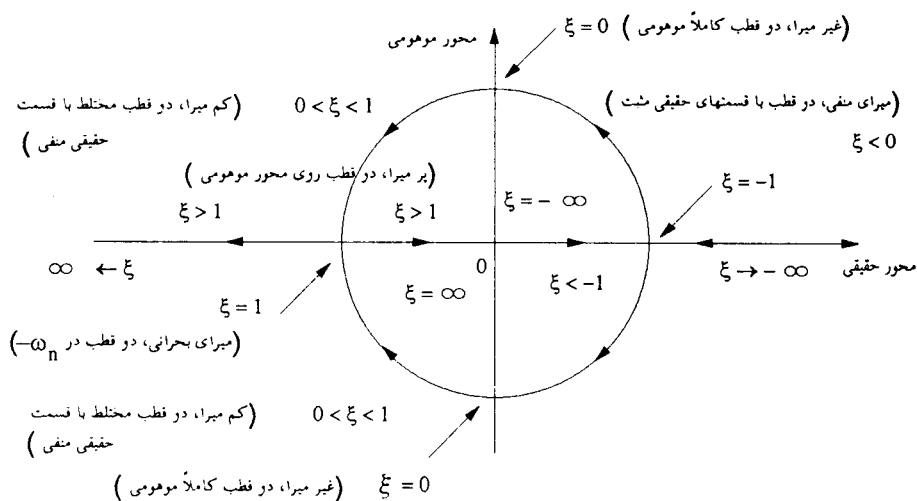
شکل ۸-۳ رابطه بین موقعیت قطبهای سیستم و α ، ξ ، ω_n و β را نشان می‌دهد. برای ریشه‌های مختلط مزدوج نشان داده شده، ω_n فاصله شعاعی از ریشه‌ها به مبدا صفحه s است. عامل میرایی α قسمت حقیقی ریشه‌ها، فرکانس طبیعی میرا شده β قسمت موهومی ریشه‌ها، نسبت میرایی ξ برابر با کسینوس زاویه بین خط شعاعی به ریشه‌ها و محور منفی است، هنگامیکه ریشه‌ها در سمت چپ صفحه s قرار گرفته باشند و یا

$$\xi = \cos \theta \quad (25-4-3)$$

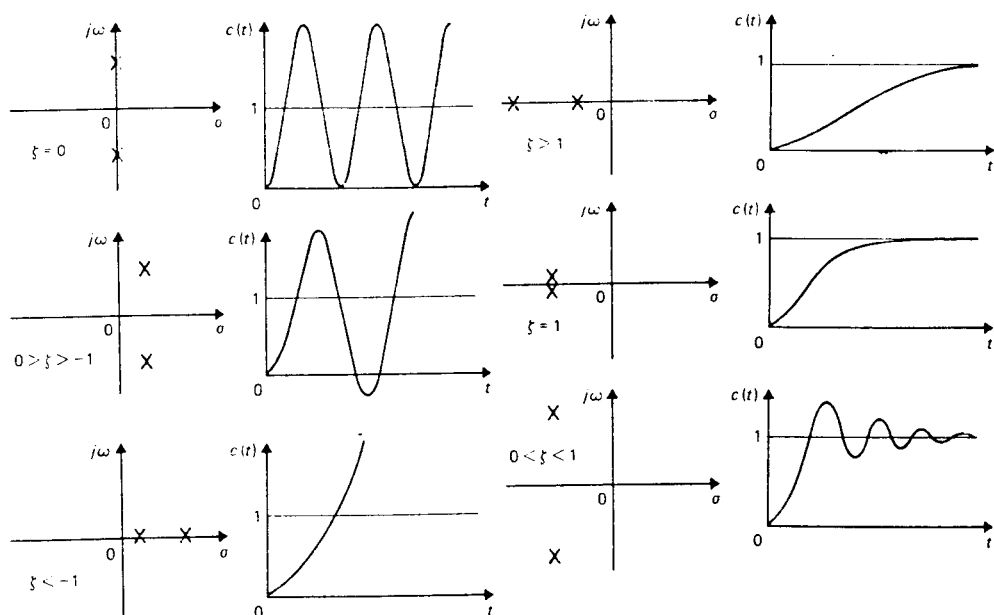


شکل ۸-۳ رابطه بین قطبهای سیستم مرتبه دوم α ، ξ ، ω_n و β

اثر قطبهای سیستم بر روی سیستم مرتبه دوم در شکلهای ۹-۳ و ۱۰-۳ نشان داده شده است. در شکل ۹-۳ ω_n ثابت فرض شده است و نسبت میرایی ξ از 0 تا ∞ تغییر می‌کند.



شکل ۹-۳ مکان ریشه قطبهای سیستم مرتبه دوم داده شده با معادله (۳-۴-۲۱) هنگامیکه ω_n ثابت فرض شده است و نسبت میرایی از $-\infty$ تا ∞ تغییر می‌کند.



شکل ۱۰-۳ مقایسه بین پاسخهای سیستم به ازاء موقعیتهای مختلف قطبهای سیستم مرتبه دوم.

شکل ۳-۱۰ پاسخهای پله واحد یک سیستم مرتبه دوم متناظر با مقادیر مختلف قطبهای سیستم را نشان می‌دهد.

در سیستم‌های عملی کنترل، تنها سیستم‌هایی که نسبت میرایی آنها مثبت اند (سیستم‌های پایدار) کاربرد دارند. شکل ۳-۱۱ پاسخهای سیستم مرتبه دوم داده شده با معادله (۳-۴-۲۳) به ورودی پله واحد را برای مقادیر مختلف نسبت میرایی بر حسب زمان نرمالیزه شده $\omega_n t$ نشان می‌دهد. همانطور که از شکل ۳-۱۱ مشاهده می‌شود، با کاهش ξ مقدار فراجهش حداکثر بزرگتر شده و پاسخ نوسانی تر می‌گردد. برای مقادیر $\xi \geq 1$ پاسخ پله واحد، نوسانی نشان نمی‌دهد (حالت میرای بحرانی و شدید).

در اینجا فراجهش حداکثر، زمان تاخیر، زمان صعود و زمان استقرار را برای یک سیستم مرتبه دوم داده شده با معادله (۳-۴-۲۱)، بدست می‌آوریم. نخست فراجهش حداکثر را تعیین می‌کنیم. زمانی را که پاسخ به حداکثر فراجهش می‌رسد، زمان ستیغ^۱ می‌نامند. برای تعیین زمان ستیغ از $c(t)$ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و آنرا مساوی با صفر قرار می‌دهیم. با مشتق گرفتن و پس از دو مرحله ساده سازی (این مراحل را انجام دهید)، بدست می‌آوریم

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_p) \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \exp(-\xi \omega_n t_p)$$

و بنابراین

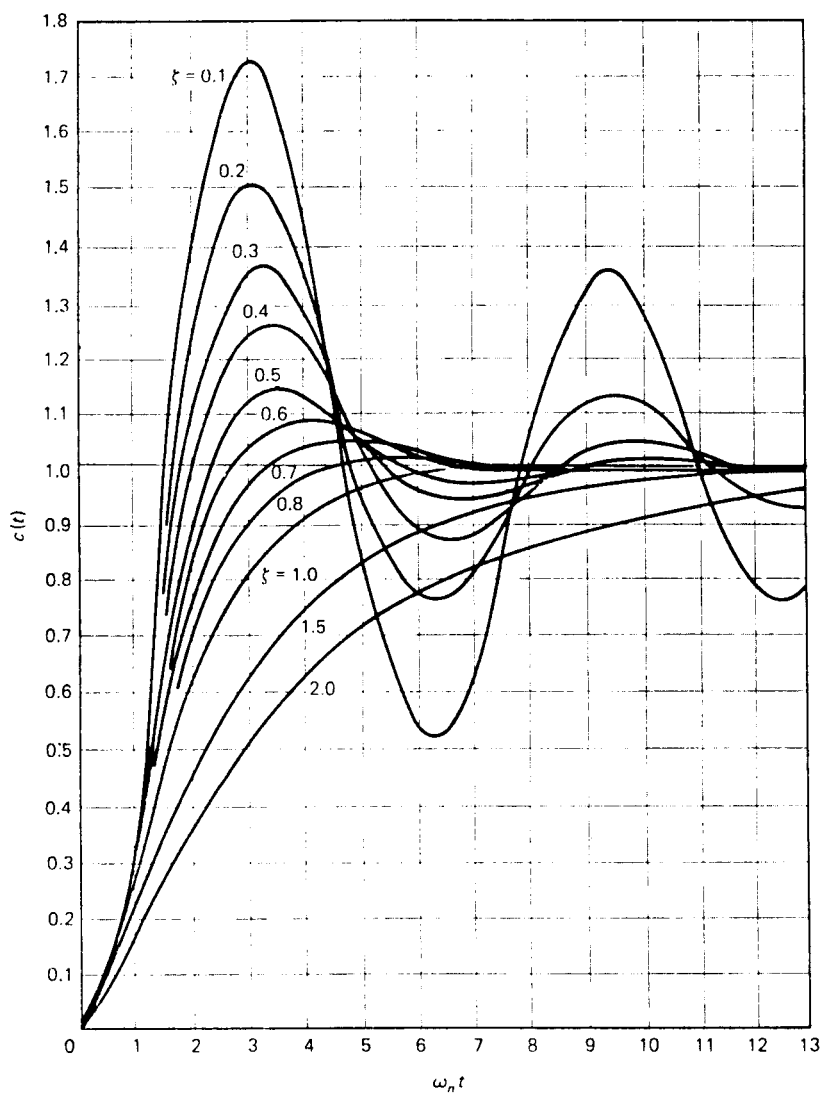
$$\sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_p) = 0$$

و یا

$$\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

زمان ستیغ برابر با زمان اولین فراجهش است و لذا

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (3-4-26)$$



شکل ۱۱-۳ پاسخهای پله واحد سیستم مرتبه دوم با مقادیر مختلف نسبت میرایی.

اگر مقدار فراجش حداکثر را با M_p نشان دهیم، بنابر تعریف M_p داریم
 $M_p = c(t_p) - 1$

$$= -\exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\pi + \cos^{-1} \xi)$$

$$= \exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}) \quad (27-4-3)$$

بنابراین از معادله (27-4-3) درصد فراجش حداکثر برابر با $10 \cdot \exp\left(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)$ است.

تعیین دقیق روابط تحلیلی برای محاسبه زمان تاخیر، حتی برای سیستم‌های ساده مرتبه دوم ساده نیست. توجه کنید که برای محاسبه زمان تاخیر، باید در معادله (23-4-3) به جای $c(t)$ مقدار 0.5 را جایگذاری کرد و معادله را برای t حل نمود. روشهای تقریبی ساده‌تری برای محاسبه زمان تاخیر وجود دارد که در اینجا از ذکر آنها صرفنظر می‌کنیم و در صورت تمایل به مطالعه بیشتر در این زمینه به بخش مراجع آخر همین فصل مراجعه کنید.

بنابر تعریف، زمان صعود t_r می‌تواند برای سیستم‌های میرای ضعیف به عنوان زمانی تلقی گردد که خروجی در پاسخ به ورودی پله واحد از 0 به 1 می‌رسد. لذا از معادله (23-4-3) داریم

$$c(t_r) = 1 = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_r + \cos^{-1} \xi) \quad (28-4-3)$$

از معادله (28-4-3) داریم

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_r + \cos^{-1} \xi) = 0 \quad (29-4-3)$$

با توجه به اینکه $\exp(-\xi\omega_n t_r)$ همواره غیر صفر است و با جایگزینی $\beta = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ و $\xi = \cos^{-1} \theta$ از معادله (29-4-3)، بدست می‌آوریم

$$\beta t_r + \theta = n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (30-4-3)$$

برای زمان صعود داریم $n=1$ و لذا معادله (30-4-3)، می‌دهد

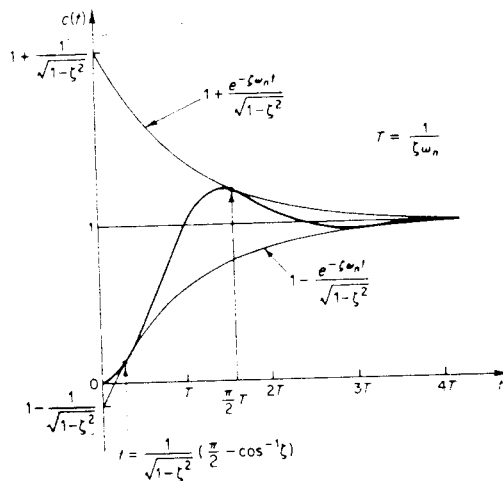
$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\beta} \quad (31-4-3)$$

معادله (۳-۴-۳۱) زمان لازم را برای رسیدن پاسخ از ۰ به ۱ در پاسخ به ورودی پله واحد تعیین می‌کند. برای تعیین زمان لازم برای رسیدن پاسخ از ۱۰ تا ۹۰ درصد مقدار نهایی خود از روابط دیگری باید استفاده کرد که برای مطالعه بیشتر می‌توانید به مراجع آخر این فصل مراجعه کنید.

برای سیستم‌های میرای ضعیف مرتبه دوم، پاسخ گذاری سیستم به ورودی پله واحد از معادله (۳-۴-۲۳) عبارتست از

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \cos^{-1}\xi) \quad (t \geq 0)$$

منحنیهای $\pm \left(e^{-\xi\omega_n t} / \sqrt{1-\xi^2} \right)$ منحنیهای پوش پاسخ گذرا برای ورودی پله واحد هستند. همانطور که از شکل ۳-۱۲ مشاهده می‌شود، منحنی پاسخ $c(t)$ همواره در داخل یک جفت از منحنیهای پوش باقی می‌ماند. ثابت زمانی این منحنیهای پوش $1/\xi\omega_n$ است. نرخ صفر شدن پاسخ حالت گذرا، به مقدار ثابت زمانی $1/\xi\omega_n$ بستگی دارد. برای یک ω_n داده شده، زمان استقرار به مقدار ξ بستگی دارد. از شکل ۳-۱۱ مشاهده می‌گردد که برای مقدار ثابت ω_n و برای گستره ξ بین ۰ تا ۱، زمان استقرار t_s با کاهش ξ افزایش می‌یابد. برای یک سیستم میرای شدید بدلیل شروع کند پاسخ، زمان استقرار طولانی می‌شود.



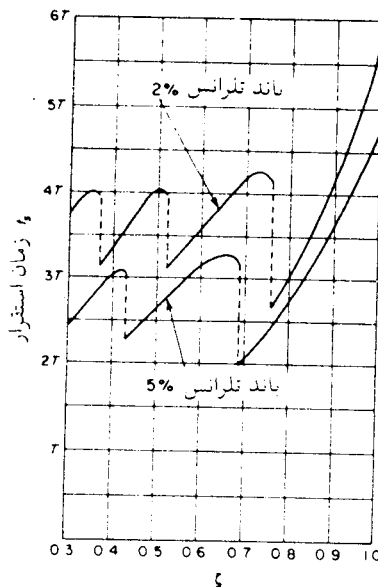
شکل ۳-۱۲ منحنیهای پوش برای منحنی پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم

زمان استقرار متناظر با یک باند تolerانس $\pm 0.2\%$ یا $\pm 0.5\%$ را می توان برحسب ثابت زمانی $T = \frac{1}{\xi \omega_n}$ از منحنیهای شکل ۳-۱۱، برای مقادیر مختلف ξ اندازه گرفت. نتایج این اندازه گیری در شکل ۳-۱۳ نشان داده شده اند. برای مقادیر $0.9 > \xi > 0.0$ ، اگر از معیار 0.2% استفاده گردد، t_s تقریباً چهار برابر ثابت زمانی سیستم است. اگر از معیار 0.6% استفاده گردد، t_s تقریباً سه برابر ثابت زمانی سیستم است. توجه کنید که، تقریباً حداقل زمان استقرار را برای معیار 0.2% در حدود $\xi = 0.76$ ، و برای معیار 0.5% در حدود $\xi = 0.68$ ، خواهیم داشت. برای مقایسه بین پاسخهای سیستمها، معمولاً زمان استقرار t_s را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$t_s = 4T = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad (\text{معیار } 0.2\%) \quad (3-4-32)$$

یا

$$t_s = 3T = \frac{3}{\xi \omega_n} \quad (\text{معیار } 0.5\%) \quad (3-4-33)$$



شکل ۳-۱۳ زمان استقرار برحسب منحنیهای ξ

مثال ۳-۴-۱

توابع تبدیل منورهای الکتریکی را در فصل دوم بدست آوردیم. تابع تبدیل از ولتاژ میدان به موقعیت شفت یک موتور DC با کنترل میدان به صورت زیر داده شده است

$$G(s) = \frac{0.5}{s(0.25s + 1)}$$

خروجی دستگاه اندازه‌گیری موقعیت شفت با سیگنالی به همان صورت مقایسه می‌شود و سیگنال خطای e ، نشان داده شده در شکل ۳-۱۴ را تشکیل می‌دهد. با بکارگیری یک آمپلی‌فایر قدرت پاسخ سریع و یک کنترل‌کننده بهره ثابت، حلقه سیستم را می‌توان تا یک آمپلی‌فایر با بهره k بست. تابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2k}{s^2 + 4s + 2k}$$

برای ورودی پله واحد، خروجی سیستم (موقعیت شفت) عبارتست از

$$C(s) = \frac{2k}{s(s^2 + 4s + 2k)}$$

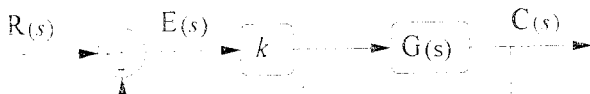
خروجی سیستم را برای مقادیر $k=1$ ، $k=2$ و $k=8$ با بسط کسره‌های جزئی و عکس تبدیل لاپلاس به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$c(t) = 1 - 1/20 e^{-0.586t} + 0.207 e^{-3.414t} \quad k=1$$

$$c(t) = 1 - 2te^{-2t} - e^{-2t} \quad k=2$$

$$c(t) = 1 + 1/154 e^{-2t} \cos\left(3/464t + \frac{5\pi}{6}\right) \quad k=8$$

نمودارهای پاسخ پله واحد این سیستم برای مقادیر بهره ۱، ۲ و ۸ در شکل ۳-۱۵ نشان داده

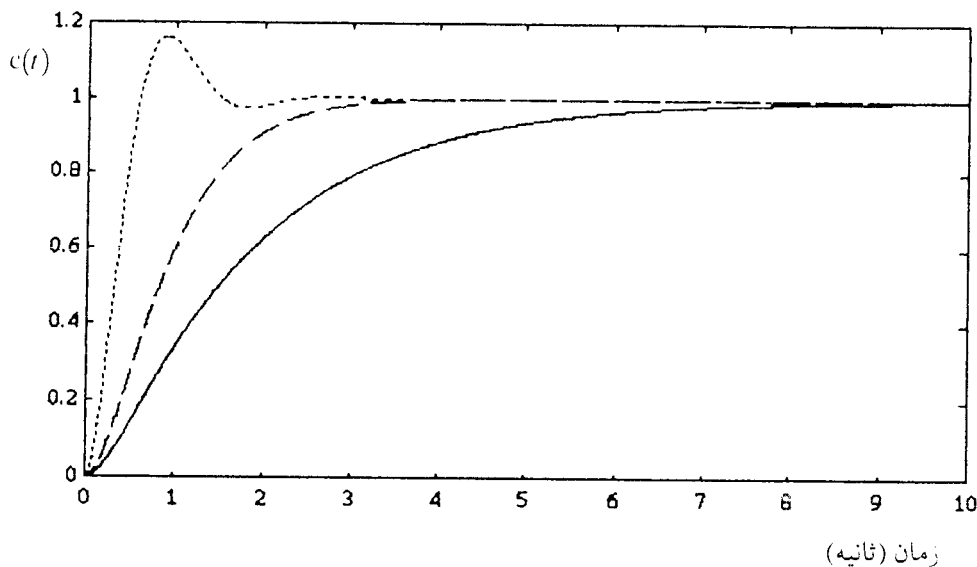


شکل ۳-۱۴ موتور DC مثال ۳-۴-۱

شده‌اند. همانطور که از شکل ۳-۱۵ مشاهده می‌شود برای مقادیر بزرگتر بهره k پاسخ سریعتر شده است. البته با افزایش بیشتر k پاسخ سیستم دچار نوسانات شدید می‌شود و مقدار فرارفت و زمان استقرار ممکن است که از حد قابل قبول خارج شوند. مقدار حالت نهایی پاسخ برای هر سه مقدار k ، همانطور که از شکل ۳-۱۵ مشاهده می‌شود، یکسان است. در واقع از قضیه مقدار نهایی داریم

$$C_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = 1$$

مشخصه‌های پاسخ گذرا مانند فراجهش حداکثر، زمان صعود و زمان استقرار را می‌توان مستقیماً از منحنی پاسخ محاسبه نمود و یا اینکه به روش تحلیلی از معادلات بدست آمده استفاده کرد و آنها را محاسبه نمود. قطبهای سیستم حلقه - بسته برای $k < 2$ عبارتند از $\pm \sqrt{4-2k}$ ، قطبها بر روی محور حقیقی منفی قرار دارند و متناظر با حالت $\xi > 1$ یا پاسخ میرای شدید است. برای $k = 2$ ، دو قطب در -2 قرار می‌گیرند و متناظر با حالت $\xi = 1$ یا پاسخ میرای بحرانی است. برای $k > 2$ ، ریشه‌ها مختلط مزدوج هستند و متناظر با حالت $\xi < 1$ یا پاسخ میرای ضعیف است. برای نمونه در بهره $k = 8$ قطبهای سیستم در $-2 \pm 3/4j$ قرار



شکل ۳-۱۵ پاسخ پله واحد سیستم مثال ۳-۴-۱ برای مقادیر مختلف بهره k
 $k=1$: — , $k=2$: --- , $k=8$: ...

می‌گیرند و در این حالت معرج تابع تبدیل حلقه - بسته عبارتست از $s^2 + 4s + 16$. با مقایسه این چند جمله‌ای با چند جمله‌ای استاندارد $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ ، بدیهی است که $\omega_n = 4$ و $\xi = 0.5$. بنابراین $\theta = 60^\circ$ و $\beta = 3/46$. بدین ترتیب مشخصه‌های پاسخ حالت - گذرا عبارتند از:

زمان ستیغ t_p :

$$t_p = \frac{\pi}{\beta} = 0.91 \quad (\text{ثانیه})$$

فراجش حداکثر M_p :

$$M_p = \exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}) = 0.163$$

و لذا درصد فراجش حداکثر 16.3% است.

زمان صعود t_r :

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\beta} = 0.6054 \quad (\text{ثانیه})$$

(توجه کنید θ برحسب رادیان برابر با $1/0.47$ می‌باشد)

زمان استقرار t_s : برای معیار 2% ، زمان استقرار برابر است با

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 2 \quad (\text{ثانیه})$$

و برای معیار 5% برابر است با

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 1/5 \quad (\text{ثانیه})$$

۵-۳ اثرات اضافه کردن صفر و قطب به توابع تبدیل

۱-۵-۳ قطبهای غالب توابع تبدیل

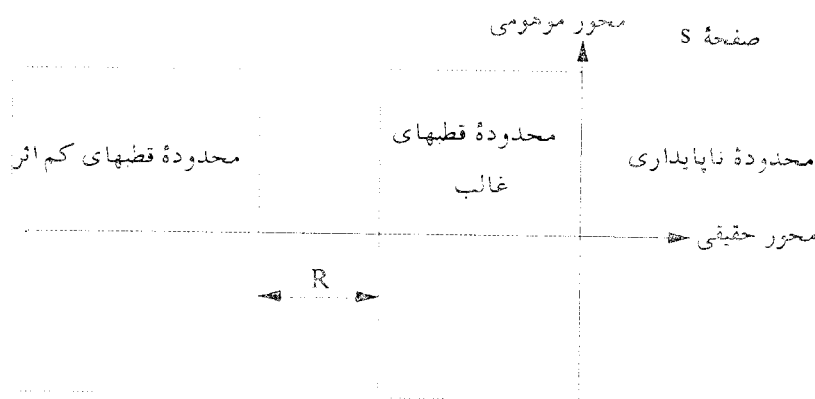
از مطالب ارایه شده در بخش ۳-۴ این نتیجه مهم حاصل می‌شود که، موقعیت قطبهای تابع تبدیل در صفحه s اثر مستقیم بر روی پاسخ گذاری آن دارد. در شکل ۳-۱۰ نشان داده شده است که موقعیت قطبها در یک سیستم مرتبه دوم، پاسخهای کاملاً متفاوت حالت گذرا را بدست می‌دهند. در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل، پیدا کردن آن دسته از قطبهای سیستم که بیشترین اثر را بر پاسخ دارند اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد. به این قطبها، قطبهای غالب^۱

1- Dominant poles

سیستم می‌گویند. در بحث سیستم‌های مرتبه دوم اشاره شد که بسیاری از سیستم‌های عملی را می‌توان به صورت یک تابع تبدیل مرتبه دوم مدل کرد. در واقع، در این مدل‌سازی از این واقعیت استفاده می‌گردد که قطبهای غالب این گونه سیستم‌ها، همان دو قطب در نظر گرفته شده در تابع تبدیل مرتبه دوم مدل آنها هستند.

از آنجاییکه اکثریت سیستم‌های کنترل در عمل از مرتبه‌ای بالا برخوردار هستند، لذا پیدا نمودن و تدوین دستورالعملی که این سیستم‌ها را توسط مدل‌های مرتبه پایین‌تر (مانند مدل مرتبه دوم) تقریب بزنند، بسیار سودمند است. در کلیه کار بردهای عملی، می‌توان صفحه δ را به دو قسمت تشکیل شده از قطبهای غالب و قطبهای کم اثر^۱ تقسیم کرد. این تقسیم بندی در شکل ۳-۱۶ نشان داده شده است. توجه کنید که اندازه و مقادیر معینی برای مختصات قسمتهای مختلف شکل ۳-۱۶ ارایه نشده است. زیرا در سیستم‌های مختلف این مختصات تفاوت می‌کند و در واقع هر سیستمی مختصات مربوط به خود را در شکل ۳-۱۶ خواهد داشت.

قاعده کلی آن است، قطبهایی که در صفحه δ در سمت چپ محور موهومی قرار دارند و به آن نزدیکتر هستند، پاسخ گذاری کندی خواهند داشت (با سرعت کمی صفر خواهند شد)، حال آنکه قطبهایی که در سمت چپ محور موهومی δ قرار دارند و نسبت به قطبهای غالب



شکل ۳-۱۶ محدوده‌های قطبهای غالب و کم اثر در صفحه δ

بسیار دورتر از محور موهومی هستند، پاسخ گذرای سریع دارند و با سرعت بیشتری صفر خواهند شد. قطبهای دسته اول در محدوده قطبهای غالب قرار گرفته و قطبهای دسته دوم در محدوده قطبهای کم اثر قرار می گیرند. مطلب مهم، تشخیص فاصله R بین این دو محدوده است. از نقطه نظر عملی و کاربردی سیستم های کنترل، اگر اندازه قسمت حقیقی قطبی حداقل ۵ تا ۱۰ برابر قسمت حقیقی قطب غالب یا قطبهای مختلف مزدوج غالب باشد، آن قطب را (از نظر تاثیر بر پاسخ گذرا) از جمله قطبهای کم اثر به حساب می آورند.

اگر سیستمی مرتبه ای بالاتر از مرتبه دو داشته باشد، نمی توان نسبت میرایی ξ و فرکانس طبیعی میرا نشده ω_n را به طور صریح برای آن تعریف نمود. لیکن اگر بتوان دینامیک سیستم را با یک جفت قطب غالب مزدوج تقریب زد، آنگاه از ξ و ω_n برای مشخص کردن قطبهای سیستم استفاده می شود و نسبت میرایی را در این حالت، نسبت میرایی نسبی^۱ می نامند.

مثال ۳-۵-۱

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1}{(s+8)(s^2 + 2s + 2)}$$

در این تابع تبدیل، قطب در $s_p = -8$ ، برابر قسمت حقیقی قطبهای مختلط مزدوج در $s_{1,2} = -1 \pm j$ است. لذا می توان دینامیک سیستم را با اصلاح بهره حالت ماندگار با قسمت مرتبه دوم آن مدل کرد و در اینصورت نسبت میرایی نسبی سیستم ۰/۷۰۷ است.

۳-۵-۲ اثر قطبهای غالب اضافی

در بخش ۳-۴، پاسخ سیستم مرتبه دوم مفصلاً بررسی شد. در این بخش، اثر اضافه کردن یک قطب غالب در $s = p_3$ را به تابع تبدیل سیستم مرتبه دوم بررسی می کنیم. در این حالت داریم

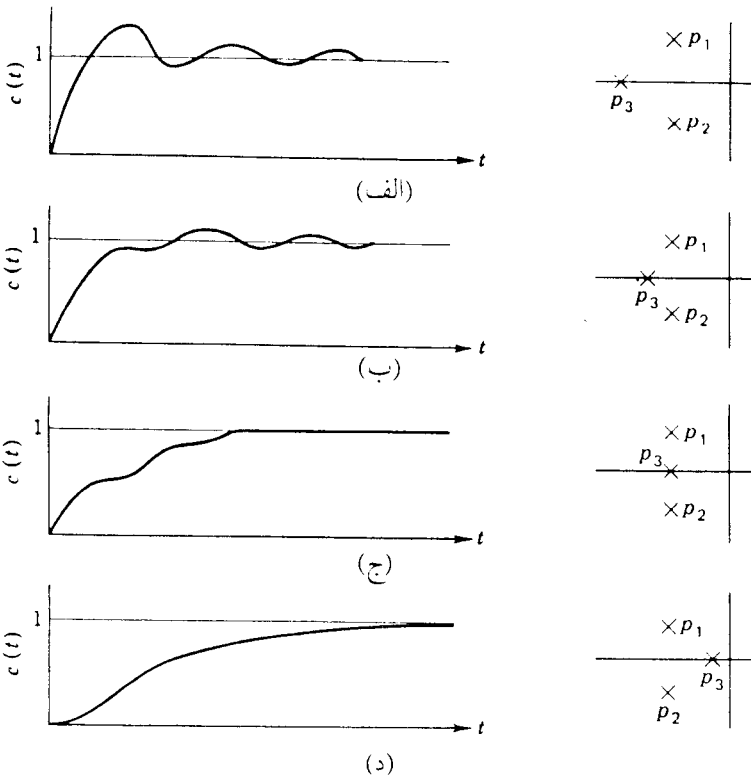
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s - p_3)} \quad (3-5-1)$$

که در آن $k = -\omega_n^2 p_3$ بهره ثابت است. اگر به معادله (۳-۵-۱) ورودی پله واحد اعمال کنیم

$(R(s) = 1/s)$ آنگاه با بسط کسرهای جزیی و عکس تبدیل لاپلاس، بدست خواهیم آورد

$$c(t) = 1 + 2A_1 e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \theta) + A_3 e^{p_3 t} \quad (۳-۵-۲)$$

که در آن A_1 و A_3 ثابتهای بدست آمده از بسط کسرهای جزیی هستند. (عملیات تبدیل معادله (۳-۵-۱) به کسرهای جزیی و گرفتن عکس تبدیل لاپلاس را انجام دهید و ثابتهای A_1 و A_3 را در معادله (۳-۵-۲) در حالت کلی بدست آورید.) عبارت گذرای ناشی از قطب اضافه شده p_3 به تابع تبدیل سیستم به صورت $A_3 e^{p_3 t}$ است، که در آن A_3 همواره منفی است. بنابراین حداکثر فراجش M_p کاهش یافته و زمان استقرار سیستم ممکن است که کاهش و یا افزایش یابد. این اثر معمولی یک قطب غالب اضافی است. شکل ۳-۱۷ چهار حالت موقعیت قطب غالب اضافی را نشان می دهد. با حرکت قطب p_3 به سمت راست، اندازه A_3



شکل ۳-۱۷ پاسخهای سیستم مرتبه سوم بر حسب موقعیت قطب سوم اضافه شده.

بزرگتر شده و فراجاهش کوچکتر می‌شود. با نزدیکتر شدن به قطبهای مختلط (از طرف چپ)، اولین فراجاهش در پاسخ، کمتر از مقدار نهایی آن خواهد شد. بزرگترین فراجاهش در این حالت (شکل ۳-۱۷ ب))، می‌تواند در دومین فراجاهش (و یا حتی سومین و غیره) باشد. اگر قطب سوم دقیقاً در قسمت حقیقی قطبهای مختلط مزدوج قرار گیرد (شکل ۳-۱۷ ج))، پاسخ سیستم بدون فراجاهش خواهد بود، که متناظر با حالت میرایی بحرانی است. اگر قطب اضافه شده در قسمت راست قطبهای مختلط مزدوج قرار گیرد، پاسخ میرای شدید می‌شود (شکل ۳-۱۷ د)).

۳-۵-۳ اثر صفرهای اضافی

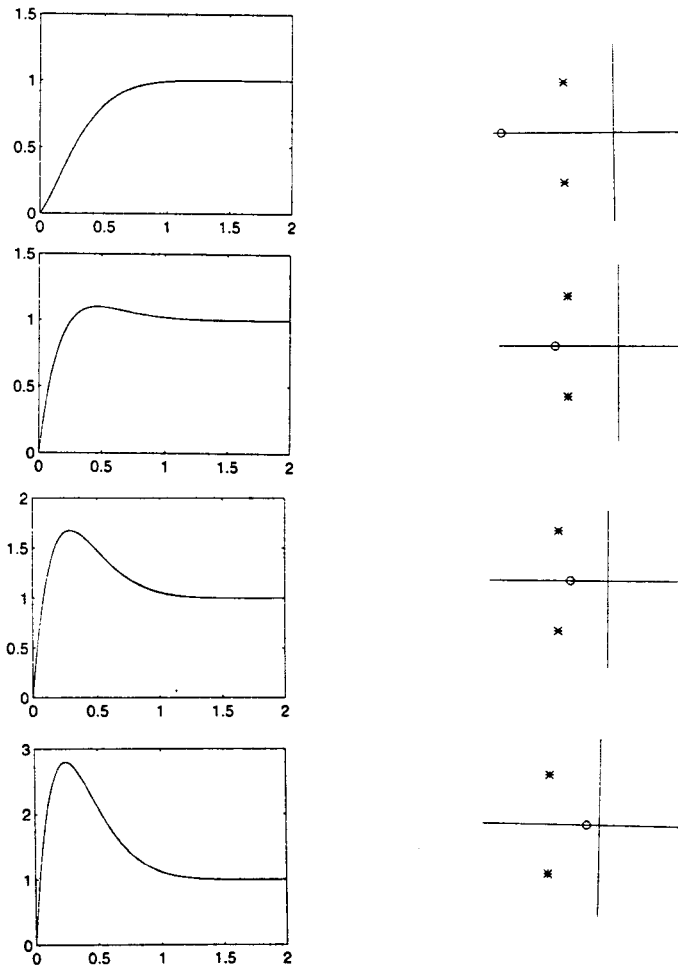
شکل ۳-۱۸ پاسخهای پله واحد سیستم حلقه - بسته با تابع تبدیل

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(s-z_1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-5-3)$$

را برای موقعیتهای مختلف صفر اضافه شده نشان می‌دهد. همانطور که از حالت‌های مختلف شکل ۳-۱۸ مشاهده می‌شود، اثر اضافه کردن صفر در z_1 ، حداکثر فراجاهش سیستم را افزایش داده و زمان صعود را کاهش می‌دهد. هم چنین مشاهده می‌گردد که اگر z_1 به سمت صفر میل کند، همزمان دامنه فراجاهش حداکثر افزایش می‌یابد و تا زمانی که ξ مثبت باشد، سیستم در محدوده پایداری باقی خواهد ماند.

۳-۶ تحلیل خطای حالت ماندگار سیستم‌های کنترل

خطای حالت ماندگار^۱، معیاری از دقت سیستم کنترل است، هنگامیکه یک نوع خاص ورودی به آن اعمال می‌گردد. دنبال کردن ورودی مرجع توسط خروجی سیستم، از اهداف مهم سیستم است. در سیستم‌های عملی و صنعتی، به دلایل مختلفی از قبیل اصطکاک و ... خطای حالت ماندگار تقریباً هیچگاه دقیقاً صفر نمی‌شود. در مسئله طراحی، یکی از اهداف سیستم کنترل، حداقل کردن و یا نگه داشتن خطا در یک حد قابل قبول است. اندازه این حد خطا و دقت سیستم کنترل، به مقدار زیادی به ماهیت و هدف سیستم کنترل بستگی دارد. برای



شکل ۳-۱۸ پاسخهای سیستم مرتبه دوم بر حسب موقعیت صفر اضافه شده.

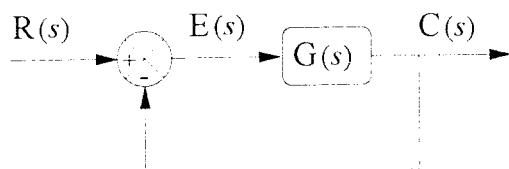
نمونه در کنترل سطح مایع یک مخزن بزرگ، خطامی تواند در حد چند سانتیمتر باشد ولی در یک سیستم کنترل روبات جوشکار و یا یک تلسکوپ بزرگ فضایی، خطا باید در حد چند میکرو رادیان باشد. ماهیت خطا نیز همانند مقدار آن به ماهیت و هدف سیستم کنترل بستگی خواهد داشت. برای مثال، در یک سیستم کنترل سرعت، مقدار خطای حالت ماندگار تفاضل سرعت واقعی و سرعت مطلوب بوده که بر حسب سرعت است و حال آنکه در یک سیستم کنترل موقعیت، خطای حالت ماندگار بر حسب موقعیت خواهد بود.

۱-۶-۳ نوع سیستم

در بررسی نوع سیستم، ساختار فیدبک واحد نشان داده شده در شکل ۱۹-۳، مورد استفاده قرار می‌گیرد و نوع سیستم با توجه به تابع تبدیل حلقه - باز آن تعریف می‌گردد. اگر دیاگرام بلوکی اصلی سیستم به صورتی غیر از صورت نشان داده شده در شکل ۱۹-۳ باشد، با اعمال روشهای جبری دیاگرام بلوکی (بخش ۲-۳-۲) دیاگرام بلوکی سیستم، به صورت فیدبک واحد تبدیل می‌شود. در حالت کلی، $G(s)$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$G(s) = \frac{k(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)}{s^q(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)} \quad (1-6-3)$$

که در آن q ، m و n اعداد صحیح مثبت و b_0 ، a_0 غیر صفر هستند. در بسیاری از موارد می‌توان صورت و مخرج را در معادله (۱-۶-۳) به ترتیب به m و n عامل تجزیه کرد و آنها را به صورت حاصلضرب عوامل نوشت. ریشه‌های صورت و مخرج در معادله (۱-۶-۳) را به ترتیب صفرها و قطبهای سیستم می‌نامیم. k بهره ثابت و عدد صحیح $q=0,1,2,\dots$ نوع



شکل ۱۹-۳ سیستم فیدبک واحد

سیستم^۱ را نشان می‌دهد. بنابراین $q=0$ یک سیستم نوع صفر، $q=1$ یک سیستم نوع یک و $q=2$ یک سیستم نوع ۲ را نشان می‌دهد. مرتبه سیستم برابر با $q+n$ است.

مثال ۱-۶-۳

سیستم‌های نشان داده شده در دیاگرام‌های بلوکی شکل ۲۰-۳ (الف) و (ب) را در نظر بگیرید. سیستم شکل ۲۰-۳ (الف) یک سیستم نوع دو مرتبه سوم است. برای تعیین نوع

سیستم شکل ۳-۲۰ (ب) نخست لازم است که آنرا به صورت فیدبک واحد تبدیل کنیم .
توجه کنید که

$$H(s) = \frac{3}{s+3} , \quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

بنابراین

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

که در آن $N(s)$ و $D(s)$ دو چند جمله‌ای در s می‌باشند. در این مثال با جایگزینی برای $G(s)$ و $H(s)$ داریم

$$D(s) = s^3 + 4s^2 + 3s + 3 , \quad N(s) = s + 3$$

مطلوب است که دیاگرام بلوکی شکل ۳-۲۰ (ب) را به صورت فیدبک واحد تبدیل کنیم. با تعریف یک تابع تبدیل معادل $G_{eq}(s)$ ، داریم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_{eq}(s)}{1+G_{eq}(s)} \left(= \frac{N(s)}{D(s)} \right)$$

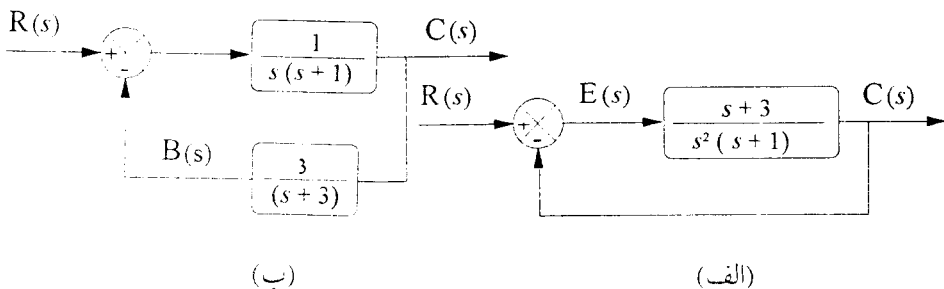
از اینرو

$$G_{eq}(s) = \frac{N(s)}{D(s) - N(s)}$$

با جایگزینی برای $N(s)$ و $D(s)$ در این مثال بدست می‌آوریم

$$G_{eq}(s) = \frac{s+3}{s(s^2+4s+3)}$$

و لذا سیستم نوع یک و مرتبه سوم است.



شکل ۳-۲۰ سیستم‌های مثال ۳-۶-۱

نکته مهم: در سیستم‌های فیدبک غیر واحد، مانند سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۲۰ (ب)، خطای در نظر گرفته شده برای سیستم به صورت $E(s) = R(s) - C(s)$ تعریف می‌شود و حال آنکه در بعضی از کتب کنترل مانند مرجع [۳]، خطای سیستم را به صورت $E(s) = R(s) - B(s)$ تعریف می‌کنند. تحلیل‌های ارایه شده در این دو حالت، تنها در صورتی معادل هستند که $H(s) = 1$ باشد.

سیستم حلقه - بسته شکل ۳-۱۹ را در نظر بگیرید. داریم

$$C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s) \quad (۲-۶-۳)$$

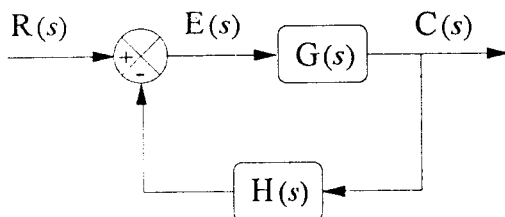
برای یک سیستم فیدبک غیر واحد نشان داده شده در شکل ۳-۲۱، داریم

$$C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} R(s) \quad (۳-۶-۳)$$

اگر بخواهیم دیاگرام بلوکی سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۲۱ را به صورت دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۳-۱۹ تبدیل کنیم، تابع تبدیل حلقه - باز معادل از معادله‌های (۲-۶-۳) و (۳-۶-۳)، به صورت زیر داده می‌شود

$$\text{تابع تبدیل حلقه - باز معادل} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)-1} \quad (۴-۶-۳)$$

اگر $H(s) = 1$ باشد، معادله (۴-۶-۳) همان معادله (۳-۶-۳) است، به‌طور مشابهی می‌توان به صورت داده شده در مثال ۳-۶-۱ نیز عمل کرد.



شکل ۳-۲۱ سیستم با فیدبک غیر واحد

۳-۶-۲ خطای حالت ماندگار

سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد نشان داده شده در شکل ۳-۱۹ را در نظر بگیرید، که

در آن خطا عبارتست از

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s) \quad (۵-۶-۳)$$

همانطور که از معادله (۵-۶-۳) مشاهده می شود، خطا به ورودی اعمال شده به سیستم بستگی خواهد داشت.

خطای کلی سیستم از دو قسمت تشکیل می شود: قسمت اول، خطای حالت ماندگار سیستم است که به صورت زیر نوشته می شود

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (۶-۶-۳)$$

قسمت دوم خطا، خطای گذرا است که مستقیماً مربوط به پاسخ گذاری سیستم است. بنابراین

$$\text{خطای گذرا} = e(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (۷-۶-۳)$$

خطای حالت ماندگار سیستم با ورودی پله: اگر به سیستم نشان داده شده در شکل ۱۹-۳ یک ورودی پله اعمال گردد، خطای حالت ماندگار سیستم از معادله های (۵-۶-۳) و (۶-۶-۳) بدین صورت بدست می آید

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{R}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{1+G(s)} \end{aligned} \quad (۸-۶-۳)$$

با تعریف ثابت خطای - پله^۱ به صورت

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (۹-۶-۳)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{R}{1+K_s} \quad (۱۰-۶-۳)$$

برای یک سیستم نوع صفر K_s یک عدد ثابت است و برای سیستم های نوع یک و بالاتر K_s نامتناهی است.

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty \quad (۱۱-۶-۳)$$

بنابراین با جایگزینی این مقادیر در معادله (۳-۶-۱۰)، نتیجه می‌گیریم که خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی پله مقدار ثابت و خطای حالت ماندگار سیستم نوع یک و بالاتر به ورودی پله برابر صفر است،

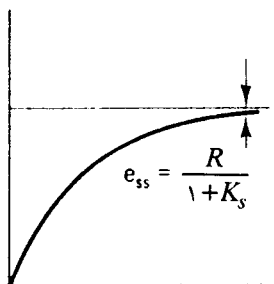
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (۳-۶-۱۲)$$

شکل ۳-۲۲ خطای حالت ماندگار یک سیستم نوع صفر را به ورودی پله نشان می‌دهد.

مثال ۳-۶-۲

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{5}{s+3}$$



شکل ۳-۲۲ خطای حالت ماندگار ناشی از اعمال ورودی پله به سیستم نوع صفر

ثابت خطای - پله عبارتست از

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{5}{3}$$

و لذا خطای حالت ماندگار عبارتست از

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{1+5/3} = 0.375$$

توجه کنید که برای سیستم‌های نوع صفر، با بزرگ شدن ثابت خطای پله K_s ، خطای حالت ماندگار کاهش خواهد یافت. به عنوان نمونه در مثال ۳-۶-۲، با جایگزینی بهره ۱۵ در $G(s)$ به جای ۵ بسادگی می‌توان نشان داده که خطای حالت ماندگار ۰/۱۶۷ خواهد شد. لیکن در حالت کلی ممکن است که افزایش K_s باعث ناپایداری سیستم نیز گردد. خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی شیب: اگر به سیستم نشان داده شده در شکل

۱۹-۳ یک ورودی شیب اعمال گردد، خطای حالت ماندگار سیستم از معادله‌های (۳-۶-۵) و (۳-۶-۶) بدین صورت بدست می‌آید

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{R}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s+G(s)}\end{aligned}\quad (۳-۶-۱۳)$$

با تعریف ثابت خطای^۱ -شیب^۱ به صورت

$$K_r = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (۳-۶-۱۴)$$

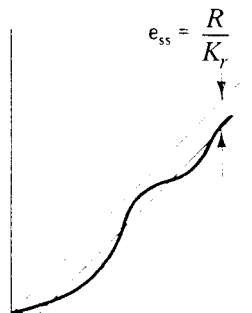
داریم

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{R}{K_r} \quad (۳-۶-۱۵)$$

برای سیستم نوع صفر، معادله (۳-۶-۱۴) صفر خواهد بود و لذا خطای حالت ماندگار داده شده با معادله (۳-۶-۱۵)، بی‌نهایت است. برای سیستم نوع یک، ثابت خطای شیب K_r یک عدد ثابت خواهد بود و بنابراین از معادله (۳-۶-۱۵) داریم که خطای حالت ماندگار نیز ثابت خواهد بود. برای سیستم‌های نوع بالاتر از یک، ثابت خطای شیب K_r برابر بی‌نهایت است و لذا خطای حالت ماندگار صفر خواهد شد.

شکل ۳-۲۳ خطای حالت ماندگار سیستم نوع یک به ورودی شیب را نشان می‌دهد.

خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی سهموی: اگر به سیستم نشان داده شده در شکل ۱۹-۳ ورودی سهموی اعمال گردد، خطای حالت ماندگار سیستم از معادله‌های (۳-۶-۵) و



شکل ۳-۲۳ خطای حالت ماندگار ناشی از اعمال ورودی شیب به سیستم نوع یک

1- Ramp-error constant

(۳-۶-۶)، بدین صورت بدست می آید

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{R}{s^2} \quad (۳-۶-۱۶)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^2 + s^2 G(s)}$$

با تعریف ثابت خطای - سهموی^۱ به صورت

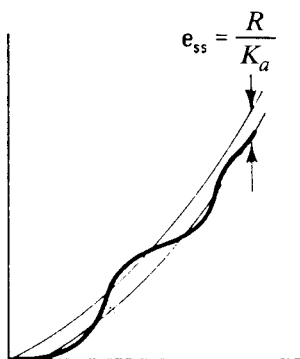
$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (۳-۶-۱۷)$$

داریم

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{R}{K_a} \quad (۳-۶-۱۸)$$

برای سیستم‌های نوع صفر و نوع یک، ثابت خطای سهموی صفر می‌شود و لذا خطای حالت ماندگار بی‌نهایت می‌گردد. برای سیستم‌های نوع دو، ثابت غیر صفر می‌شود و خطای حالت ماندگار R/K_a می‌گردد. برای سیستم‌های نوع سه و بالاتر، ثابت خطای - سهموی بی‌نهایت است و لذا خطای حالت ماندگار صفر می‌گردد. شکل ۳-۲۴، خطای حالت ماندگار یک سیستم نوع دو را به ورودی سهموی نشان می‌دهد.

تحلیل ارایه شده در بالا را می‌توان برای سایر ورودیها نیز به طور مشابهی ادامه داد. در جدول ۳-۱ نتایج بدست آمده خلاصه شده‌اند.



شکل ۳-۲۴ خطای حالت ماندگار ناشی از اعمال ورودی سهموی به سیستم نوع دو.

جدول ۱-۳ خطای حالت ماندگار بر حسب نوع سیستم و ورودی اعمال شده به آن

نوع سیستم	ورودی تابع پله	ورودی تابع شیب	ورودی تابع سهموی
۰	$\frac{R}{1+K_s}$	∞	∞
۱	۰	$\frac{R}{K_r}$	∞
۲	۰	۰	$\frac{R}{K_u}$
۳	۰	۰	۰

۷-۳ اثرات فیدبک بر عملکرد سیستم‌های کنترل

در بخش‌های قبل با تحلیل عملکرد حالت - گذرا و حالت ماندگار در سیستم‌های کنترل آشنا شدیم. در این بخش به بررسی اثرات فیدبک بر عملکرد سیستم‌های کنترل خواهیم پرداخت.

۱-۷-۳ اثرات فیدبک بر بهره و ثابت زمانی سیستم

سیستم مرتبه اول داده شده با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

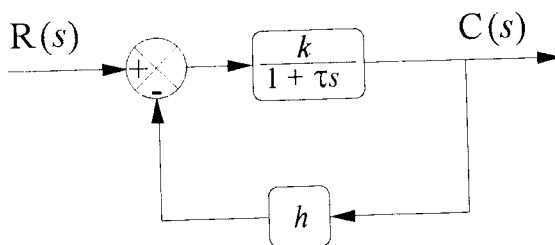
$$G(s) = \frac{k}{1+\tau s} \quad (1-7-3)$$

همانطور که در بخش ۱-۳-۳ اشاره شد، ثابت τ (یا $1/a$) در بخش ۱-۳-۳ ثابت زمانی سیستم است و سرعت پاسخ سیستم را تعیین می‌کند. در واقع هر چه ثابت زمانی کوچکتر باشد، پاسخ سیستم سریعتر خواهد بود و لذا، در بسیاری از مواقع در عمل ثابت زمانی‌های کوچکتر مطلوبتر می‌باشند. ثابت k نیز بهره سیستم حلقه - باز است. با بکارگیری فیدبک، سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۲۵-۳ بدست خواهد آمد. تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} = T(s) &= \frac{k/(1+\tau s)}{1+[hk/(1+\tau s)]} \\ &= \frac{k/(1+hk)}{1+[\tau/(1+hk)]s} \end{aligned} \quad (2-7-3)$$

سیستم حلقه - بسته نیز یک سیستم مرتبه اول است که می‌تواند به صورت زیر بازنویسی گردد

$$T(s) = \frac{k_c}{1+\tau_c s} \quad (3-7-3)$$



شکل ۲۵-۳ سیستم مرتبه اول با فیدبک.

که در آن بهره سیستم و ثابت زمانی آن به ترتیب عبارتند از

$$k_c = \frac{k}{1+hk} \quad (۴-۷-۳)$$

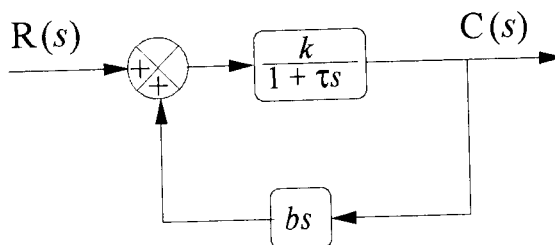
و

$$\tau_c = \frac{\tau}{1+hk} \quad (۵-۷-۳)$$

همانطور که از معادله‌های (۴-۷-۳) و (۵-۷-۳) مشخص است، اثر فیدبک کوچکتر کردن بهره و ثابت زمانی سیستم است. اگر بخواهیم ثابت زمانی را کم کنیم، در حالیکه بهره سیستم تغییری نکند، می‌توان از سیستم فیدبک نشان داده شده در شکل ۲۶-۳ استفاده کرد. از شکل ۲۶-۳، تابع تبدیل حلقه - بسته سیستم بدست می‌آید. داریم

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{k}{(\tau - bk)s + 1} \\ &= \frac{k}{\tau_c s + 1} \end{aligned} \quad (۶-۷-۳)$$

که در آن τ_c ثابت زمانی سیستم حلقه - بسته است. دقت کنید که با انتخاب b می‌توان ثابت زمانی را به هر مقدار مطلوب تبدیل کرد.



شکل ۲۶-۳ سیستم فیدبک مثبت با مشتق‌گیر

۲-۷-۳ اثر فیدبک بر اغتشاشات خارجی

تقریباً در اکثر کاربردهای عملی و صنعتی سیستم‌های کنترل، ورودیهای خارجی و غیر قابل پیش‌بینی وارد سیستم می‌شوند که اثرات منفی نیز بر روی عملکرد سیستم بر جای خواهند گذاشت. در بعضی از این موارد، این اثرات ممکن است چندان مهم نباشند و طراح نیازی به بررسی جداگانه آنها نداشته باشد و حال آنکه در موارد دیگری ممکن است که طراحی موفق عملی سیستم کنترل، بدون در نظر گرفتن این اثرات امکان پذیر نباشد. این ورودیهای خارجی و غیر قابل پیش‌بینی را اغتشاشات خارجی^۱ می‌نامند و به دو صورت در سیستم رخ می‌دهند:

(الف) یک ثابت غیر صفر ثابت که آنها را اغتشاشات بار^۲ یا افست^۳ می‌نامند و (ب) یک سیگنال نویز تصادفی^۴.

شکل ۲۷-۳ مدل اغتشاشات خارجی را نشان می‌دهد. خروجی سیستم حلقه - باز عبارتست از

$$C_o(s) = C_{1o}(s) + C_{2o}(s) \quad (۷-۷-۳)$$

که در آن $C_{1o}(s)$ ، آن قسمت از خروجی است که به ورودی $R(s)$ مربوط می‌باشد و برابر است با

$$C_{1o}(s) = G_1(s)G_r(s)R(s) \quad (۸-۷-۳)$$

و $C_{2o}(s)$ آن قسمت از خروجی است که به وردی اغتشاش $N(s)$ مربوط می‌باشد و برابر است با

$$C_{2o}(s) = G_r(s)N(s) \quad (۹-۷-۳)$$

حال به بررسی اثر فیدبک بر سیستم نشان داده شده در شکل ۲۷-۳ می‌پردازیم. با اعمال فیدبک بر روی این سیستم، سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۲۸-۳ را خواهیم داشت. خروجی سیستم حلقه - بسته عبارتست از

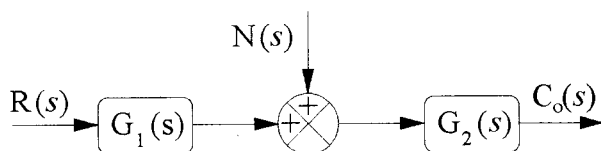
$$C_c(s) = C_{1c}(s) + C_{2c}(s) \quad (۱۰-۷-۳)$$

1- External disturbances

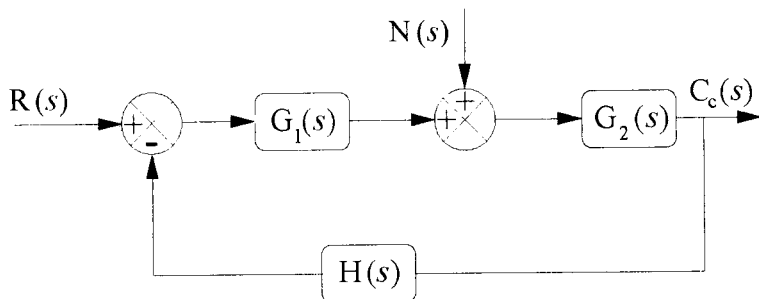
2- Load disturbances

3- Offset

4- Random noise



شکل ۳-۲۷ سیستم تحت تاثیر اغتشاشات خارجی.



شکل ۳-۲۸ سیستم تحت تاثیر اغتشاشات خارجی با فیدبک.

که در آن $C_{1c}(s)$ و $C_{rc}(s)$ ، به ترتیب قسمتهای خروجی متناظر با ورودیهای $R(s)$ و $N(s)$ می باشند و عبارتند از (توجه کنید که $C_{1c}(s)$ و $C_{rc}(s)$ به ترتیب با صفر قرار دادن $N(s)$ و $R(s)$ در دیاگرام بلوکی تعیین می گردند)

$$C_{1c}(s) = \frac{G_1(s)G_r(s)}{1 + G_1(s)G_r(s)H(s)} R(s) \quad (۱۱-۷-۳)$$

و

$$C_{rc}(s) = \frac{G_r(s)}{1 + G_1(s)G_r(s)H(s)} N(s) \quad (۱۲-۷-۳)$$

حال اگر دو خروجی را که توسط اغتشاش در سیستم حلقه - باز داده شده با معادله (۳-۷-۹) و در سیستم حلقه - بسته داده شده با معادله (۳-۷-۱۲) ایجاد شده اند، با هم مقایسه کنیم

داریم

$$\frac{C_{rc}(s)}{C_{rc}(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_r(s)H(s)} \quad (۱۳-۷-۳)$$

و لذا عنصر اغتشاش در خروجی با عامل $[1 + G_1(s)G_r(s)H(s)]$ کم شده است، که اثر فیدبک را به خوبی نشان می دهد.

در سیستم‌های مخابراتی به ورودی $R(s)$ سیگنال گفته شده و یکی از مشخصه‌های مهم سیستم، نسبت سیگنال به نویز^۱ (SNR) می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$SNR = \frac{\text{خروجی بر اثر سیگنال}}{\text{خروجی بر اثر نویز}} \quad (۱۴-۷-۳)$$

برای سیستم حلقه - باز داریم

$$SNR_o = \frac{C_{1o}(s)}{C_{2o}(s)} = G_1(s) \frac{R(s)}{N(s)} \quad (۱۵-۷-۳)$$

و برای سیستم حلقه - بسته داریم

$$SNR_c = \frac{C_{1c}(s)}{C_{2c}(s)} = G_1(s) \frac{R(s)}{N(s)} \quad (۱۶-۷-۳)$$

بنابراین از معادله‌های (۱۵-۷-۳) و (۱۶-۷-۳) مشاهده می‌شود که فیدبک به تنهایی این نسبت را تغییر نمی‌دهد. برای تغییر نسبت سیگنال به نویز نه تنها باید فیدبک اعمال کرد بلکه باید ورودی و تابع تبدیل $G_1(s)$ را نیز تنظیم کنیم. اگر همراه با فیدبک ورودی $R(s)$ را به $\tilde{R}(s)$ و تابع تبدیل $G_1(s)$ را به $\tilde{G}_1(s)$ چنان تغییر دهیم که

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1c}(s) &= \frac{\tilde{G}_1(s)G_2(s)}{1 + \tilde{G}_1(s)G_2(s)H(s)} \tilde{R}(s) \\ &= G_1(s)G_2(s)R(s) = C_{1o}(s) \end{aligned} \quad (۱۷-۷-۳)$$

خواهیم داشت

$$C_{2c}(s) = \frac{G_2(s)}{1 + \tilde{G}_1(s)G_2(s)H(s)} N(s) \quad (۱۸-۷-۳)$$

و نسبت سیگنال به نویز در این حالت برابر است با

$$SNR_{\tilde{c}} = \frac{\tilde{C}_{1c}(s)}{C_{2c}(s)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{G_1(s)G_2(s)R(s)}{\left[G_2(s)N(s) / (1 + \tilde{G}_1(s)G_2(s)H(s)) \right]} \\ &= G_1(s) \frac{R(s)}{N(s)} [1 + \tilde{G}_1(s)G_2(s)H(s)] \end{aligned} \quad (۱۹-۷-۳)$$

از معادله‌های (۳-۷-۱۵) و (۳-۷-۱۹) داریم

$$\frac{SNR_{\tilde{c}}}{SNR_0} = 1 + \tilde{G}_1(s)G_r(s)H(s) \quad (۳-۷-۲۰)$$

بنابراین اگر فیدبک با تغییر مناسب $R(s)$ و $G_1(s)$ همراه باشد، SNR سیستم افزایش خواهد یافت.

۳-۷-۳ اثر فیدبک بر حساسیت سیستم

در طراحی کنترل کننده برای یک سیستم، معمولاً فرض می‌شود که مدل سیستم و مدل کنترل کننده طراحی شده دقیق بوده و نمایشهای کاملی از تحقق فیزیکی و واقعی آنها هستند. این فرض، خطاهای موجود در مدلسازی و مراحل مختلف ساخت، و هم چنین خطاهای اندازه‌گیری را نادیده می‌گیرد. علاوه بر آن، در کلیه سیستم‌های کنترل اثرات مختلفی مانند تغییرات محیط، فرسودگی، عدم دسترسی به برخی پارامترهای سیستم و غیره موجب آن می‌گردند که همواره در صدی نامعینی^۱ در رابطه با مدل‌های در دست و طراحی شده وجود داشته باشد.

بررسی این مطالب که عملکرد سیستم به چه اندازه‌ای نسبت به بعضی از تغییرات یا خطاهای موجود در پارامترهای آن، حساس می‌باشد در طراحی سیستم‌های عملی کنترل فوق‌العاده مهم است. به این بررسی، بررسی حساسیت^۲ سیستم گفته می‌شود.

در سیستم‌های حلقه - باز داریم

$$C(s) = G(s)R(s) \quad (۳-۷-۲۱)$$

و لذا تغییرات احتمالی $G(s)$ و یا خطاهای مدلسازی تابع تبدیل مستقیماً بر خروجی آن تاثیر می‌گذراند و حال آنکه در سیستم‌های فیدبک داریم

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (۳-۷-۲۲)$$

این تغییرات و خطاها مستقیماً بر خروجی تاثیر نمی‌گذارند. برای سیستم حلقه - بسته داده شده با معادله (۳-۷-۲۲) اگر داشته باشیم $1 \gg G(s)H(s)$ ، آنگاه

$$C(s) \approx \frac{1}{H(s)} R(s) \quad (۳-۷-۲۳)$$

و لذا خروجی تنها از $H(s)$ تاثیر می پذیرد و می توان آنرا به گونه ای مناسب به طور دلخواه انتخاب نمود. البته باید توجه داشت که انتخاب $H(s)$ به گونه ای که $G(s)H(s) \gg 1$ باشد، همواره عملی نیست و در بسیاری از موارد به پاسخ نوسانی و یا حتی ناپایدار (بخش ۳-۸) می انجامد. در هر صورت معادله (۳-۷-۲۲) نشان می دهد که افزایش $G(s)H(s)$ اثر $G(s)$ و در نتیجه تغییرات آنرا بر خروجی کم می کند. بنابراین با فیدبک می توان اثر تغییرات پارامترهای سیستم حلقه - باز بر خروجی را کم کرد.

برای بررسی اثر تغییرات پارامترهای سیستم، فرض کنید که تغییر پارامترها را با $\Delta G(s)$ نشان دهیم. در این صورت تابع تبدیل واقعی سیستم عبارتست از $G(s) + \Delta G(s)$. در سیستم حلقه - باز تغییر خروجی به صورت زیر خواهد بود

$$\Delta C(s) = \Delta G(s)R(s) \quad (۳-۷-۲۴)$$

در سیستم های حلقه - بسته این تغییرات به صورت زیر در خروجی نشان داده خواهد شد

$$C(s) + \Delta C(s) = \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + [G(s) + \Delta G(s)]H(s)} R(s) \quad (۳-۷-۲۵)$$

و لذا تغییر در خروجی عبارتست از

$$\Delta C(s) = \frac{\Delta G(s)}{[1 + G(s)H(s) + \Delta G(s)H(s)][1 + G(s)H(s)]} R(s) \quad (۳-۷-۲۶)$$

در اکثر مواقع داریم $G(s)H(s) \gg \Delta G(s)H(s)$ ، و لذا از معادله (۳-۷-۲۶) داریم

$$\Delta C(s) \approx \frac{\Delta G(s)}{[1 + G(s)H(s)]^2} R(s) \quad (۳-۷-۲۷)$$

معادله (۳-۷-۲۷) نشان می دهد که تغییر خروجی سیستم با عامل $[1 + G(s)H(s)]^2$ کاهش یافته است و این عامل در بسیاری از موارد بسیار بزرگتر از یک است. در واقع همانطور که بعداً نیز خواهیم دید، عامل $1 + G(s)H(s)$ نقش مهمی را در مشخصه سیستم های کنترل فیدبک ایفا می کند.

بنابر تعریف، حساسیت سیستم برابر است با نسبت درصد تغییر در تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته به درصد تغییر در تابع تبدیل حلقه - باز. با نشان دادن تابع تبدیل حلقه - بسته به

صورت $T(s)$ ، درصد تغییر در تابع تبدیل حلقه - بسته عبارتست از $\Delta T(s)/T(s)$ و هم چنین در صد تغییر در تابع تبدیل حلقه - باز عبارتست از $\Delta G(s)/G(s)$. بنابراین از تعریف حساسیت سیستم داریم

$$S_G^T = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)} \quad (28-7-3)$$

که در آن، S_G^T تابع حساسیت است. حد معادله (28-7-3) عبارتست از

$$S_G^T = \frac{\partial T(s)/T(s)}{\partial G(s)/G(s)} = \frac{\partial \ln T(s)}{\partial \ln G(s)} \quad (29-7-3)$$

با جایگزینی $T(s) = C(s)/R(s)$ از معادله (22-7-3) در معادله (29-7-3)، بدست می آوریم

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} = \frac{1}{[1+G(s)H(s)]^2} \frac{G(s)}{G(s)/[1+G(s)H(s)]} \\ = \frac{1}{1+G(s)H(s)} \quad (30-7-3)$$

از معادله (30-7-3) مشاهده می گردد که با افزایش $G(s)H(s)$ می توان حساسیت سیستم های کنترل را نسبت به تغییرات مدل سیستم حلقه - باز کم کرد.

به طور مشابهی، می توان نشان داد که حساسیت سیستم حلقه - بسته به تغییرات در عنصر فیدبک $H(s)$ عبارتست از

$$S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{H}{T} = \left[\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \right]^2 \frac{-H(s)}{G(s)/[1+G(s)H(s)]} \quad (31-7-3)$$

معادله (31-7-3) نشان می دهد که برای $G(s)H(s) \rightarrow \infty$ داریم $S_H^T \rightarrow 1$ ، و لذا در انتخاب $H(s)$ باید دقت کرد که ثابت بوده و یا تغییرات آن با محیط و سایر عوامل دیگر حداقل باشد. سرانجام، حساسیت پاسخ سیستم حلقه - بسته نسبت به تغییرات در مدل حلقه - باز $G(s)$

را بررسی می کنیم. داریم

$$S_G^C = \frac{\partial C(s)}{\partial G(s)} \frac{G(s)}{C(s)} = \frac{R(s)}{[1+G(s)H(s)]^2} \frac{[1+G(s)H(s)]}{R(s)} \\ = \frac{1}{1+G(s)H(s)} \quad (32-7-3)$$

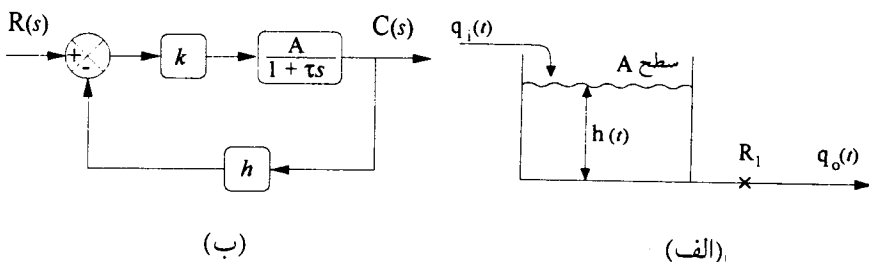
که همانند معادله (۳-۷-۳) است و با افزایش $G(s)H(s)$ این حساسیت کاهش می یابد.

مثال ۳-۷-۱

تابع تبدیل یک مخزن حاوی مایع با ورودی مایع $q_i(t)$ ، خروجی مایع $q_o(t)$ ، ارتفاع سطح مایع $h(t)$ و سطح مخزن A_1 که در شکل ۳-۲۹ (الف) نشان داده شده است، عبارت است از

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_1}{A_1 R_1 s + 1}$$

که در آن R_1 مقاومت شیر خروجی مخزن است. دیاگرام بلوکی سیستم کنترل ارتفاع مایع این سیستم در شکل ۳-۲۹ (ب) نشان داده شده است. تابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارتست از



شکل ۳-۲۹ (الف) یک مخزن مایع، (ب) سیستم کنترل ارتفاع مایع

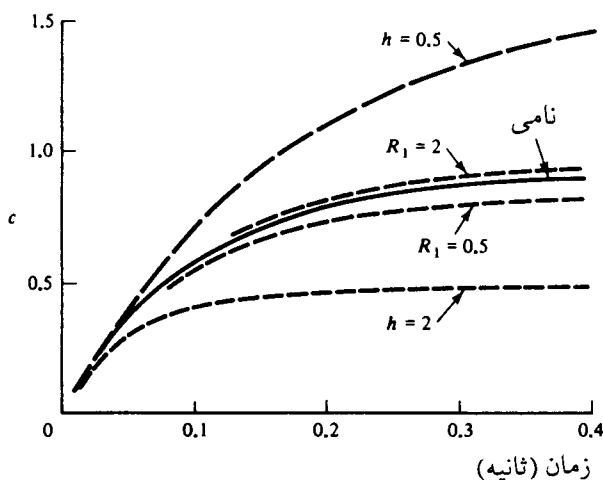
$$T(s) = \frac{kA}{\tau s + 1 + kAh}$$

که در آن $A = K_v R_1$ ، بهره شیر کنترلی است و هم چنین $\tau = A_1 R_1$ است. بهره h در فیدبک شکل ۳-۲۹ (ب) نیز بهره حس کننده ارتفاع مایع در مخزن است. در این سیستم کنترل، بهره های R_1 و h به ترتیب می توانند به دلایل عوامل سد کننده، تنظیم غیر دقیق و خرابی حس کننده تغییر کنند. برای نشان دادن این تغییرات، پاسخ پله واحد سیستم را هنگامیکه پارامترهای R_1 و h از مقادیر نامی خود دو برابر بیشتر و نصف می شوند را مقایسه و حساسیت سیستم را به این تغییرات بررسی می کنیم. با فرض مقادیر عددی $K_v = 1$ ، $A_1 = 1$ و مقادیر نامی $R_1 = 1$ و $h_1 = 1$ پاسخ سیستم را بر حسب پارامترهای R_1 و h برای پله واحد بدست می آوریم. داریم

$$c(t) = \frac{9}{9h + 1/R_1} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(9h + \frac{1}{R_1} \right) t \right] \right\}$$

شکل ۳-۳۰ پاسخ سیستم $c(t)$ را برای مقادیر نامی داده شده R_1 ، h و همچنین مقادیر $R_1=2$ ، $h=2$ ، $R_1=0.5$ و $h=0.5$ نشان می‌دهد. با کاهش بهره k تغییرات نشان داده شده در شکل ۳-۳۰ بیشتر خواهند شد. همانطور که از شکل ۳-۳۰ مشاهده می‌گردد، تغییرات پاسخ نسبت به پاسخ نامی هنگامی که R_1 از ۱ به ۲ تغییر پیدا می‌کند کمتر از هنگامی است که R_1 از ۱ به ۰.۵ تغییر پیدا می‌کند. اگر $h=0$ و کنترل سیستم حلقه - باز باشد، تغییرات به صورت تناسبی در مقادیر حالت ماندگار پاسخ ظاهر خواهند شد.

اکنون حساسیت سیستم حلقه - بسته را نسبت به تغییر پارامترهای A ، h و τ بررسی می‌کنیم. این حساسیتها را به ترتیب با S_A^T ، S_h^T و S_τ^T نشان می‌دهیم. داریم .



شکل ۳-۳۰ تغییرات پارامترها در مثال ۳-۷-۱

$$S_A^T = \frac{\partial T/T}{\partial A/A} = \frac{\partial T}{\partial A} \cdot \frac{A}{T} = \frac{A}{T} \cdot \frac{k(\tau s + 1)}{(\tau s + 1 + kAh)^2} = \frac{\tau s + 1}{\tau s + 1 + kAh}$$

$$S_h^T = \frac{\partial T/T}{\partial h/h} = \frac{\partial T}{\partial h} \cdot \frac{h}{T} = \frac{h}{T} \cdot \frac{-(kA)}{(\tau s + 1 + kAh)^2} = \frac{-kAh}{\tau s + 1 + kAh}$$

$$S_\tau^T = \frac{\partial T/T}{\partial \tau/\tau} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \cdot \frac{\tau}{T} = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{-kAs}{(\tau s + 1 + kAh)^2} = \frac{-\tau s}{\tau s + 1 + kAh}$$

همانطور که از معادله‌های بالا مشاهده می‌شود، حساسیتهای S_A^T و S_T^T با افزایش h کاهش یافته و حال S_H^T آنکه به سمت ۱ میل می‌کند.

۸-۳ تحلیل پایداری

یکی از مهمترین مشخصه‌های سیستم پایداری^۱ آن است. به سیستمی پایدار گویند که اگر ورودی یا اغتشاشات با دامنه محدود به آن اعمال گردد، پاسخ بدست آمده دامنه‌ای محدود داشته باشد.

تابع تبدیل سیستم را در حالت کلی زیر در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (۱-۸-۳)$$

رابطه بین قطبهای سیستم (ریشه‌های معادله مشخصه داده شده در مخرج تابع تبدیل (۱-۸-۳)) و حالت گذرای سیستم مرتبه دوم را در بخش ۳-۴ بررسی کردیم. این نتایج را می‌توان در حالت کلی به صورت زیر بیان کرد:

۱- اگر قطبهای تابع تبدیل در حوزه s در سمت چپ محور موهومی قرار گیرند، پاسخ گذرای سیستم میراثونده است و با گذشت زمان به صفر میل کرده و سیستم پایدار است.

۲- چنانچه یک یا چند زوج قطب (غیر تکراری) تابع تبدیل بر روی محور موهومی قرار گیرند و سایر قطبها در سمت چپ محور موهومی باشند، پاسخ سیستم به صورت نوسانات سینوسی میرا نشده خواهد بود.

۳- حتی اگر تنها یک قطب تابع تبدیل در سمت راست محور موهومی قرار گیرد، دامنه پاسخ سیستم نسبت به زمان افزایش خواهد یافت و سیستم ناپایدار است.

برای بررسی پایداری سیستم می‌توان چند جمله‌ای مخرج تابع تبدیل (معادله مشخصه) را به صورت حاصلضرب فاکتورهای ریشه‌های آن به صورت زیر نوشت:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = k(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n) \quad (۲-۸-۳)$$

که در آن $p_1, \dots, p_n$ قطبهای سیستم هستند. با بررسی این قطبها می توان ماهیت پایداری سیستم را تعیین نمود. در عمل محاسبه ریشه های چند جمله ای $(3-8-2)$ برای چند جمله ای های درجه بالا بسادگی امکان پذیر نیست. بنابراین، در این بخش به بررسی روشهایی خواهیم پرداخت که ماهیت پایداری سیستم را بدون نیاز به حل معادله مشخصه و تعیین دقیق محل قطبهای آن، تعیین کنند. از تئوری چند جمله ای ها می دانیم که شرط لازم برای اینکه تمامی ریشه های یک چند جمله ای دارای قسمت حقیقی منفی باشند، آن است که اولاً تمامی ضرایب چند جمله ای هم علامت بوده و ثانیاً هیچکدام صفر نباشند. لازم بتذکر است که دو شرط فوق الذکر اگر چه لازم هستند لیکن کافی نمی باشند و ممکن است چند جمله ای با دارا بودن این شرایط، دارای ریشه هایی با قسمت حقیقی غیر منفی باشد.

در این بخش روشهای روث و هرویتز را برای تعیین پایداری آرایه می کنیم. روشهای مکان ریشه و پاسخ فرکانسی برای تعیین پایداری در فصلهای بعد بررسی خواهند شد.

۱-۸-۳ روش روث

در این روش از آرایه روث^۱ برای تعیین پایداری استفاده می شود. آرایه روث با استفاده از ضرایب معادله مشخصه a_i ($i=0, 1, \dots, n$) داده شده در معادله $(3-8-1)$ تشکیل می شود. نحوه تشکیل این آرایه در زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{c|cccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & & & & \\
 s^1 & g_1 & & & & \\
 s^0 & k_1 & & & &
 \end{array}$$

همانطور که مشخص است، اعداد ردیفهای اول و دوم (متناظر با s^n و s^{n-1}) از ضرایب معادله

مشخصه، a_i ها، به ترتیب نشان داده شده انتخاب می‌شوند. اعداد ردیف سوم از معادله‌های زیر بدست می‌آیند:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

⋮

و اعداد ردیف چهارم نیز به صورت زیر تعیین می‌گردند:

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - b_4 a_{n-1}}{b_1}$$

⋮

و سپس تمامی ردیفها را به همین ترتیب پر می‌کنیم. بعد از تکمیل شدن آرایه روث، می‌توان نشان داد که تعداد قطبهای سمت راست معادله مشخصه برابر با تعداد تغییر علامتها در ستون اول آرایه روث است، بنابراین تنها سیستمی پایدار است که تمامی اعداد ستون اول جدول هم علامت باشند. توجه کنید که در روش روث تنها تعداد قطبهای ناپایدار سیستم (در صورت وجود) تعیین می‌شوند و این روش قادر به تعیین موقعیت این قطبها نیست.

مثال ۳-۸-۱

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 15 = 0$$

آرایه روث برای این چند جمله‌ای عبارتست از:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 11 & 15 \\ s^3 & 6 & 6 & \\ s^2 & 10 & 15 & \\ s^1 & -3 & & \\ s^0 & 15 & & \end{array}$$

در ستون اول آرایه بالا یک تغییر علامت از ۱۵ به ۳- و تغییر علامت دیگری از ۳- به ۱۵ داریم. بنابراین این چند جمله‌ای دو ریشه در سمت راست محور موهومی دارد. لذا سیستمی که معادله مشخصه آن، چند جمله‌ای داده شده باشد بدلیل داشتن دو قطب ناپایدار، ناپایدار است.

مثال ۳-۸-۲

معادله مشخصه سیستمی عبارتست از

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k = 0$$

که در آن k بهره سیستم است. مطلوب است که پایداری سیستم را برای تغییرات بهره k بررسی کنیم. توجه کنید که محل ریشه‌های این چند جمله‌ای به مقدار بهره ثابت k بستگی خواهد داشت. آرایه روث را برای این چند جمله‌ای تشکیل می‌دهیم. داریم

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 3 & 1+k \\ s^1 & \frac{1-k}{3} & \\ s^0 & 1+k & \end{array}$$

با توجه به آرایه تشکیل شده روث، برای اینکه تغییر علامتی در ستون اول آرایه رخ ندهد باید نامعادله‌های زیر را داشته باشیم

$$1+k > 0, \quad 1-k > 0$$

بنابراین برای پایداری سیستم باید داشته باشیم

$$-1 < k < 1$$

ساده کردن آرایه روث. اعداد سطرهای مختلف آرایه روث را می توان در اعداد مثبت ضرب و یا آنها را بر اعداد مثبت تقسیم کرد و این عمل در جواب نهایی پایداری تأثیری نمی گذارد. با این عمل می توان از بزرگی اعداد و در نتیجه از حجم زیاد عملیات جبری به مقدار متناهی کم کرد.

موارد خاص در تشکیل آرایه های روث. اگر در تشکیل آرایه روث در اولین ستون یک عدد صفر ظاهر شود، تکمیل آرایه روث امکان پذیر نخواهد بود زیرا در ادامه تشکیل آرایه تقسیم بر صفر لازم خواهد بود. در صورتیکه یکی از اعداد ستون اول آرایه روث صفر باشد و سایر اعداد آن سطر همگی صفر نباشند، می توان از یکی از دو روش زیر برای تکمیل آرایه روث استفاده کرد:

۱- در معادله اصلی بجای s ، از $\frac{1}{x}$ استفاده کنید و سپس معادله را برای x بررسی و آرایه را برای چند جمله ای بر حسب x تشکیل دهید.

۲- معادله اصلی را در فاکتور معلوم $(s+1)$ ضرب کنید و سپس آرایه روث را برای معادله بدست آمده تشکیل دهید. این عمل ریشه شناخته شده $s=-1$ را به معادله اصلی اضافه می کند.

مثال ۳-۸-۳

چند جمله ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 6 = 0$$

آرایه روث را تشکیل می دهیم. داریم

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 6 \\ s^3 & 1 & 3 & \\ s^2 & 0 & 6 & \end{array}$$

همانطور که مشاهده می شود، اولین عنصر از سومین سطر صفر بوده و عنصر بعد از آن غیر صفر است. دقت کنید که ادامه تشکیل چهارمین سطر آرایه امکان پذیر نیست. با جایگزینی $s = \frac{1}{x}$ در معادله داده شده بدست می آوریم

$$6x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$$

آرایه روث برای این معادله عبارتست از

$$\begin{array}{c|ccc} x^4 & 6 & 3 & 1 \\ x^3 & 3 & 1 & \\ x^2 & -1 & 1 & \\ x^1 & -4 & & \\ x^0 & 1 & & \end{array}$$

بدیهی است که در این حالت در تشکیل آرایه روث با مشکلی مواجه نشده و در واقع از آرایه بالا مشاهده می شود که معادله داده شده دو ریشه ناپایدار دارد.

مثال ۳-۸-۴

چند جمله ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 2 = 0$$

اولین سه ردیف آرایه روث عبارتند از

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 2 \\ s^3 & 3 & 6 & \\ s^2 & 0 & 2 & \end{array}$$

بنابراین در سومین ردیف اولین عنصر ۰ است. اگر چند جمله ای داده شده را در عامل $(s+1)$

ضرب کنیم داریم

$$(s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 2)(s+1) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 8s + 2$$

آرایه روث را برای چند جمله ای جدید تشکیل می دهیم:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 5 & 8 \\ s^4 & 4 & 8 & 2 \\ s^3 & 3 & 7/5 & \\ s^2 & -2 & 2 & \\ s^1 & 10/5 & & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

از آرایه تشکیل شده داریم که به علت تغییر علامت در اولین ستون، معادله داده شده ناپایدار است و علاوه بر آن تعداد قطبهای ناپایدار آن دو می باشد. توجه کنید که عامل ضرب شده

تنهایک ریشه در ۱-، در سمت چپ محور موهومی در صفحه s دارد و لذا دو ریشه ناپایدار، ریشه‌های معادله اصلی هستند.

دومین مورد خاص در تشکیل آرایه روث هنگامی رخ می‌دهد که کلیه عناصر یک سطر از آرایه روث صفر شوند. صفر شدن کلیه عناصر سطر، توسط جفت ریشه‌های مختلط مزدوج که قسمت حقیقی آنها لزوماً غیر صفر نیست و (یا) توسط جفت ریشه‌های حقیقی با علامتهای متضاد بوجود می‌آید. در صورت ایجاد یک سطر صفر در آرایه روث برای تکمیل آن می‌توان به طریق زیر عمل کرد: با استفاده از سطر قبلی (سطر ماقبل سطر صفر)، یک معادله کمکی^۱ تشکیل دهید. از معادله کمکی (سطر ماقبل سطر صفر) مشتق بگیرید. اعداد بدست آمده از مشتق معادله کمکی را بجای سطر صفر جایگزین کنید.

مثال ۳-۸-۵

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^4 + s^3 + 11s^2 + 9s + 18 = 0$$

آرایه روث برای این چند جمله‌ای عبارتست از

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 11 & 18 \\ s^3 & 1 & 9 & \\ s^2 & 2 & 18 & \\ s^1 & 0 & & \end{array}$$

در این آرایه سطر متناظر با s یک سطر صفر است. سطر قبلی را برای سادگی محاسبات در $\frac{1}{s}$ ضرب می‌کنیم و معادله سطر قبل چنین خواهد شد:

$$s^2 + 9 = 0$$

وجود یک ردیف صفر در آرایه روث نشان می‌دهد که معادله مشخصه ریشه‌هایی دارد که منفی‌های یکدیگرند.

ریشه‌های معادله کمکی عبارتند از

$$s = \pm 3j$$

این ریشه‌ها، ریشه‌های معادله اصلی نیز هستند. با توجه به موهومی محض بودن این ریشه‌ها

داریم که پاسخ سیستم، مولفه نوسانی سینوسی خواهد داشت.

برای تکمیل نمودن آرایه روث، از معادله کمکی مشتق می‌گیریم. داریم

$$2s + 0 = 0$$

ضرایب این معادله در ردیف متناظر با s به جای ردیف صفر جایگزینی می‌شوند و لذا

$$\begin{array}{c|c} s^1 & 2 \\ s^0 & 9 \end{array}$$

بنابراین با توجه به اینکه تغییر علامتی در اولین ستون آرایه روث رخ نمی‌دهد، معادله مشخصه ریشه‌ای با قسمت حقیقی مثبت ندارد.

مثال ۳-۸-۶

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 2s + 10 = 0$$

اولین پنج ردیف آرایه روث عبارتند از

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 2 \\ s^4 & 2 & 9 & 10 \\ s^3 & -1/5 & -3 & \\ s^2 & 5 & 10 & \\ s^1 & 0 & & \end{array}$$

ردیف پنجم یک ردیف صفر است، لذا از معادله ردیف چهارم به عنوان معادله کمکی استفاده می‌کنیم. داریم

$$5s^2 + 10 = 0 \quad \text{یا} \quad s^2 + 2 = 0$$

با مشتق گرفتن از معادله کمکی بدست می‌آوریم

$$2s + 0 = 0$$

بنابراین آرایه روث را تکمیل می‌کنیم

$$\begin{array}{c|c} s^1 & 2 \\ s^0 & 10 \end{array}$$

دو تغییر علامت در اولین ستون آرایه وجود دارد و لذا چند جمله‌ای دو ریشه ناپایدار دارد.

مثال ۳-۸-۷

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^5 + 2s^4 + 15s^3 + 30s^2 - 20s - 40 = 0.$$

از تغییر علامت در ضرایب چند جمله‌ای می‌توان نتیجه گرفت که چند جمله‌ای داده شده ناپایدار است. با استفاده از روش روٹ، تعداد ریشه‌های ناپایدار تعیین می‌شوند. آرایه روٹ عبارتست از

$$\begin{array}{c|cc} s^5 & 1 & 15 & -20 \\ s^4 & 2 & 30 & -40 \\ s^3 & . & . & \end{array}$$

برای تکمیل آرایه از معادله کمکی ردیف دوم استفاده می‌کنیم. داریم

$$2s^4 + 30s^2 - 40 = 0 \quad \text{یا} \quad s^4 + 15s^2 - 20 = 0.$$

با مشتق‌گیری از معادله کمکی بدست می‌آوریم

$$4s^3 + 30s - 0 = 0 \quad \text{یا} \quad 2s^3 + 15s - 0 = 0.$$

بنابراین در ادامه آرایه روٹ داریم

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 2 & 15 \\ s^2 & 15/2 & -20 \\ s^1 & 30.5/2 & \\ s^0 & -20 & \end{array}$$

بنابراین چند جمله‌ای داده شده تنها یک ریشه ناپایدار دارد.

۳-۸-۲ روش هرویتز

روش متداول دیگر بررسی پایداری سیستم، روش هرویتز است. در این روش a_n (اولین ضریب معادله مشخصه) مثبت فرض می‌شود. دترمینان کلی سیستم را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \begin{bmatrix} a_n & \text{اگر } n \text{ فرد است} \\ a_1 & \text{اگر } n \text{ زوج است} \end{bmatrix} & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-2} & \dots & \begin{bmatrix} a_1 & \text{اگر } n \text{ فرد است} \\ a_n & \text{اگر } n \text{ زوج است} \end{bmatrix} & \dots & \dots \\ \vdots & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & a_n & a_{n-2} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_n \end{vmatrix}$$

دترمینان‌های دیگر Δ_i ($i=1,2,\dots,n-1$) را به عنوان دترمینان‌های کهاد اصلی^۱ به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$\Delta_1 = a_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} \\ a_n & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-3} & a_{n-4} \\ \vdots & a_{n-1} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

تمامی ریشه‌های معادله مشخصه در سمت چپ محور موهومی قرار می‌گیرند و سیستم پایدار است اگر و فقط اگر $\Delta_i > 0$ ($i=1,2,\dots,n$).

مثال ۳-۸-۸

برای معادله مشخصه

$$s^3 + 4s^2 + 7s + 12 = 0$$

دترمینان‌های سیستم را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 192 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 16 \quad \Delta_1 = 4$$

بنابراین سیستم با این معادله مشخصه پایدار است.

مثال ۳-۸-۹

معادله مشخصه سیستمی عبارتست از

$$s^2 + ks + k - 1 = 0$$

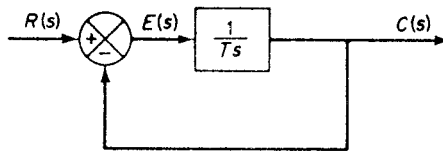
برای بررسی پایداری سیستم به روش هروتیز داریم

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix} = k(k-1) \quad \Delta_1 = k$$

بنابراین، برای پایداری باید داشته باشیم $k > 0$ و $k > 1$ یعنی $k > 1$ شرط پایداری سیستم است.

مسایل

۳-۱- دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۳-۳۱ را در نظر بگیرید. پاسخ سیستم را برای ورودی ضربه واحد بدست آورید و رسم کنید.



شکل ۳-۳۱ سیستم حلقه - بسته مسئله ۳-۱

۳-۲- تابع تبدیل یک سیستم مرتبه دوم عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

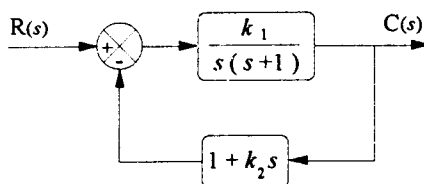
(الف) پاسخ ضربه واحد این سیستم را برای مقادیر مختلف $0 < \xi < 1$ ، $\xi = 1$ و $\xi > 1$ به

صورت تحلیلی بدست آورید. همچنین نشان دهید که پاسخهای بدست آمده

با مشتقگیری از پاسخهای متناظر برای پاسخ پله واحد نیز می توانستند تعیین گردند.

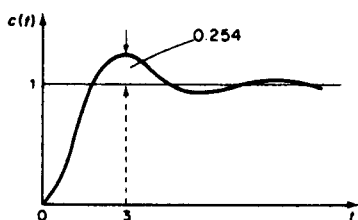
(ب) پاسخهای بدست آمده را در (الف) برای زمان نرمالیزه شده $\omega_n t$ برحسب $C(t)/\omega_n$ برای مقادیر ξ به ترتیب $1/3$ ، $0/5$ ، $0/7$ و $1/0$ رسم کنید.۳-۳- سیستم فیدبک نشان داده شده در شکل ۳-۳۲ را در نظر بگیرید. مقادیر بهره k_1 و k_2 را به گونه ای تعیین کنید که فراجش حداکثر به پله واحد $0/2$ و زمان ستیغ ۱ ثانیه

باشد. با این مقادیر بهره، زمان صعود و زمان استقرار را بدست آورید.

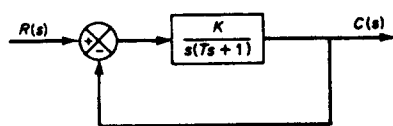


شکل ۳-۳۲ سیستم حلقه - بسته مسئله ۳-۳

۳-۴. خروجی سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۳۳ (الف)، در اعمال ورودی پله واحد به صورت نشان داده شده در شکل ۳-۳۳ (ب) می باشد. مقادیر k و T را از منحنی پاسخ تعیین کنید.



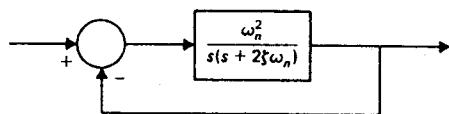
(ب)



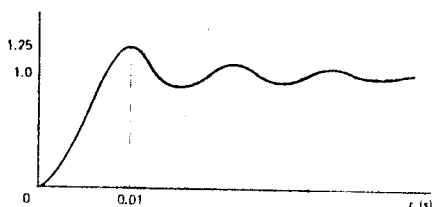
(الف)

شکل ۳-۳۳ (الف) سیستم حلقه - بسته (ب) پاسخ پله واحد

۳-۵. دیاگرام بلوکی یک سیستم کنترل حلقه - بسته و پاسخ پله واحد آن در شکل های ۳-۳۴ (الف) و (ب) نشان داده شده اند. پارامترهای سیستم را تعیین کنید.



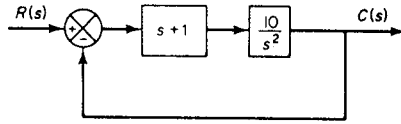
(الف)



(ب)

شکل ۳-۳۴ (الف) سیستم حلقه - بسته (ب) پاسخ پله واحد

۳-۶- پاسخهای حالت گذرا و حالت ماندگار سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۳-۳۵ را برای ورودی پله واحد بدست آورید.



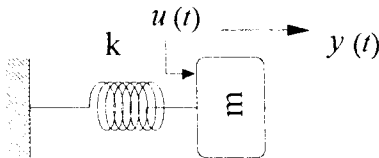
شکل ۳-۳۵ سیستم حلقه - بسته

۳-۷- تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{1638(s^2 + 2/6s + 1/65)}{s(s^2 + 40s + 300)(s^2 + 4/65s + 0/45)}$$

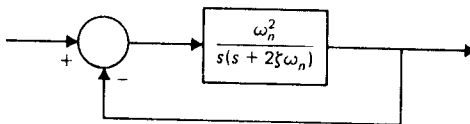
قطبهای غالب و نسبت میرایی سیستم حلقه - بسته را با فیدبک واحد تعیین کنید.

۳-۸- سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۳-۳۶ را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم یک ضربه واحد اعمال گردد، نوسانات حاصله را تعیین کنید.



شکل ۳-۳۶ سیستم مکانیکی مسئله ۳-۸

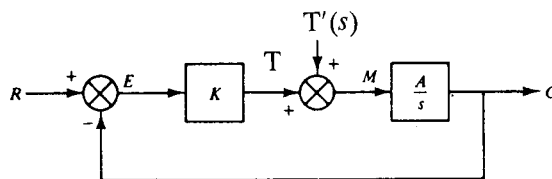
۳-۹- سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۳۷ را در نظر بگیرید



شکل ۳-۳۷ یک سیستم حلقه - بسته

برای مقادیر پارامترهای $\xi = 0.4$ و $\omega_n = 5$ (رادیان بر ثانیه)، زمان صعود، زمان ستیغ، فزاجش حداکثر و زمان استقرار سیستم را در پاسخ به ورودی پله واحد تعیین کنید.

۳-۱۰- سیستم کنترل سرعت نشان داده شده در شکل ۳-۳۸ را در نظر بگیرید. سیستم تحت گشتاور اغتشاشی $T'(s)$ عمل می‌کند. $T(s)$ گشتاور محرکه سیستم می‌باشد. اگر $T'(s) = 0$ باشد، خروجی سیستم ورودی مرجع را دنبال می‌کند. پاسخ حالت ماندگار سیستم را برای ورودی مرجع صفر و گشتاور اغتشاشی پله واحد بدست آورید.



شکل ۳-۳۸ سیستم کنترل سرعت.

۳-۱۱- تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3(s+2)}{(s+4)(s+1)^2}$$

پاسخ سیستم به ورودی پله واحد را بدست آورید.

۳-۱۲- تابع تبدیل یک سیستم حلقه - باز عبارتست از

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

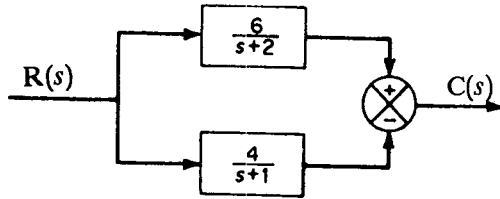
اگر به تابع تبدیل بالا، قطبهایی در $0/2$ ، $0/5$ ، -1 و -10 اضافه کنیم، پاسخ سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد را به ورودی پله واحد بدست آورده، رسم کنید. نتایج بدست آمده را با نتایج بخش ۳-۵-۲ مقایسه کنید.

۳-۱۳- تابع تبدیل یک سیستم حلقه - باز عبارتست از

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

اگر به تابع تبدیل بالا، صفرهایی در $0/1$ ، $0/5$ ، -2 و -10 اضافه کنیم، پاسخ سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد را به ورودی پله واحد بدست آورده، رسم کنید. نتایج بدست آمده را با نتایج بخش ۳-۵-۳ مقایسه کنید.

۱۴-۳. سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۳۹ را در نظر بگیرید. نشان دهید که تابع تبدیل سیستم $C(s)/R(s)$ یک صفر ناپایدار دارد (به سیستمی که صفر ناپایدار داشته باشد سیستم غیر می نیمم فاز^۱ گفته می شود). پاسخ سیستم را برای ورودی پله واحد بدست آورده، رسم کنید.

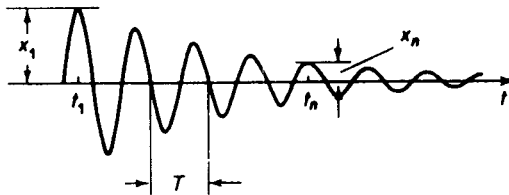


شکل ۳-۳۹ سیستم مسئله ۳-۱۴

۱۵-۳. تابع تبدیل یک سیستم نوسانی مرتبه دوم عبارتست از

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

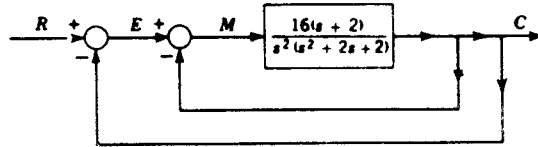
با بکارگیری نمودار پاسخ سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۴۰، نسبت میرایی آنرا تعیین کنید.



شکل ۳-۴۰ نوسان میرا

۱۶-۳. سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۴۱ را در نظر بگیرید. (الف) توابع تبدیل $C(s)/E(s)$ و $C(s)/R(s)$ را تعیین و نوع سیستم را مشخص کنید. (ب) ضرایب خطای

پله، شیب و سهوی را پیدا کنید. (ج) مقدار حالت ماندگار خروجی را برای ورودی $r(t) = 10$ پیدا کنید.



شکل ۳-۴۱ سیستم مسند ۳-۱۶

۳-۱۷- برای یک سیستم با فیدبک واحد، دو تابع تبدیل حلقه - باز زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{10(s+8)}{s^2(s+5)(s^2+2s+2)} \quad \text{و} \quad G(s) = \frac{12(s+4)}{s(s+1)(s+3)(s^2+2s+10)}$$

(الف) ثابتهای خطای پله، شیب و سهوی را تعیین کنید.

(ب) خطای حالت ماندگار پاسخ سیستم را برای ورودیهای زیر بدست آورید:

$$r_1(t) = 5t^2, \quad r_2(t) = 16 + 2t$$

۳-۱۸- تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم کنترل حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(T_1s + T_2)}$$

خطای حالت ماندگار پاسخ به ورودی شیب واحد را تعیین و تاثیر تغییرات

پارامترهای T_1, k و T_2 را بر خطای - حالت ماندگار پاسخ بررسی کنید.

۳-۱۹- (الف) ثابتهای خطا را برای سیستم مرتبه دوم زیر پیدا کنید

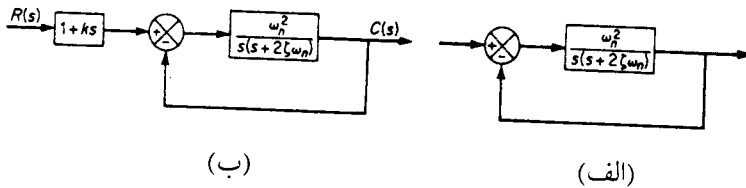
$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

(ب) با اضافه کردن یک قطب در p_1 تغییرات ثابتهای خطا را بررسی کنید.

۳-۲۰- سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۴۲ (الف) را در نظر بگیرید. (الف) نشان دهید که

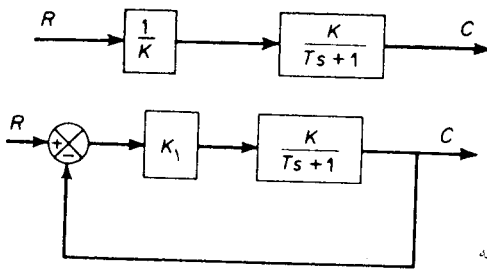
خطای حالت ماندگار به ورودی شیب واحد $\frac{2\xi}{\omega_n}$ است. (ب) با انتخاب مناسب k و

ضرب کردن ورودی در عامل $(1+ks)$ به صورت نشان داده شده در شکل ۳-۴۲ (ب)، نشان دهید که می توان خطای حالت ماندگار را صفر کرد.



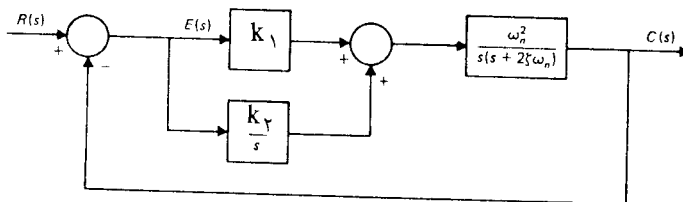
شکل ۳-۴۲ (الف) سیستم کنترل حلقه - بسته (ب) سیستم کنترل حلقه - بسته با عامل افزوده شده

۳-۴۱- سیستم کنترل حلقه - باز و حلقه - بسته نشان داده شده در شکل‌های ۳-۴۳ (الف) و (ب) را در نظر بگیرید. خطای حالت ماندگار را با فرض k_1 و k_2 خیلی بزرگتر از یک، برای ورودی پله واحد مقایسه کنید.



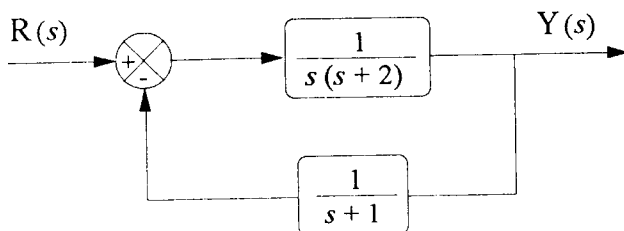
شکل ۳-۴۳ (الف) سیستم حلقه - باز (ب) سیستم حلقه - بسته

۳-۴۲- سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۳-۴۴ را در نظر بگیرید. (الف) برای $k_v = 0$ ، خطای حالت ماندگار را به ورودی پله با دامنه R بدست آورید. (ب) برای $k_v \neq 0$ ، خطای حالت ماندگار را به ورودی پله با دامنه R بدست آورید. (ج) خطای حالت ماندگار را برای ورودی شیب، $R(t) = Rt$ بدست آورید.



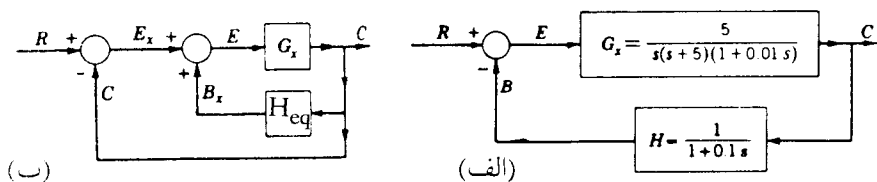
شکل ۳-۴۴ سیستم کنترل حلقه - بسته مسئله ۳-۴۲.

۳-۲۳. خطای حالت ماندگار $C(s)$ - $R(s)$ سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۴۵ را برای ورودی شیب بدست آورید.



شکل ۳-۴۵ سیستم کنترل فیدبک غیر واحد.

۳-۲۴. سیستم کنترل فیدبک غیر واحد نشان داده شده در شکل ۳-۴۶ (الف) را در نظر بگیرید. برای تحلیل خطا مطلوب است که سیستم را به شکل فیدبک نشان داده شده در شکل ۳-۴۶ (ب) تبدیل کنیم. (الف) تابع تبدیل $H_{eq}(s)$ را به گونه ای پیدا کنید که دو دیاگرام بلوکی معادل باشند. (ب) نوع سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۴۶ (ب) را تعیین کنید. (ج) ضرایب خطای سیستم را بدست آورید. (د) خطاهای حالت ماندگار سیستم، $e_{ss}(t)$ و $e_{eq,ss}(t)$ را برای ورودی پله واحد بدست آورید.



شکل ۳-۴۶ (الف) سیستم کنترل فیدبک غیر واحد (ب) سیستم کنترل معادل.

۳-۲۵. مسئله ۳-۲۴ را با جایگزینی تابع تبدیل $H(s) = \frac{s+3}{s+1}$ در مسیر فیدبک نشان داده شده در شکل ۳-۴۶ (الف) تکرار کنید.

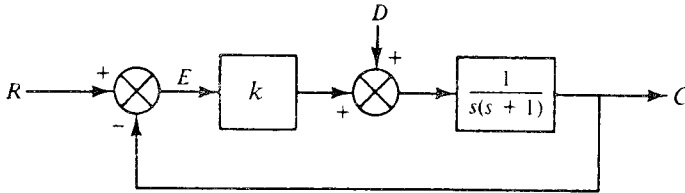
۳-۲۶. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم کنترل حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

که در آن $r(t) = 3t$ (الف) برای $k=3$ خطای حالت ماندگار را بدست آورید. (ب)

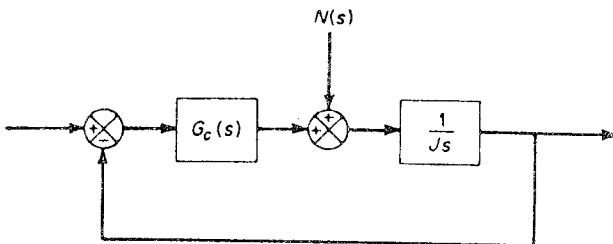
مطلوب است که خطای حالت ماندگار سیستم برای ورودی شیب کمتر یا مساوی $1/5$ باشد. مقدار می نیمم k را برای برآورده ساختن این شرط تعیین کنید.

۲۷-۳. سیستم نشان داده شده در شکل ۴۷-۳ را در نظر بگیرید. اثر k بر اغتشاش وارده به سیستم چیست؟



شکل ۴۷-۳ سیستم کنترل مسئله ۲۷-۳

۲۸-۳. سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۴۸-۳ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل $G(s)$ را به گونه ای انتخاب کنید که اغتشاش $N(s)$ مدل شده توسط پله واحد، حداقل اثر را بر روی عملکرد سیستم داشته باشد.



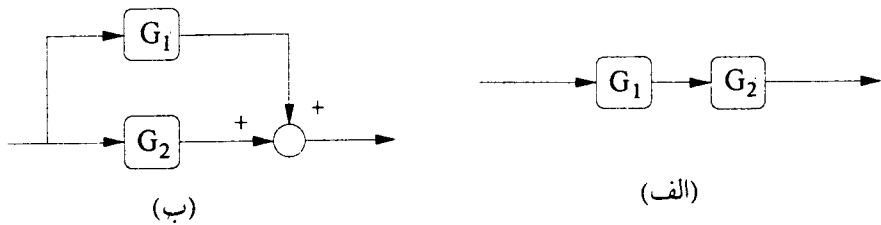
شکل ۴۸-۳ سیستم کنترل مسئله ۲۸-۳

۲۹-۳. حساسیت تابع تبدیل حلقه - باز $G(s)$ را نسبت به تغییرات در پارامتر τ برای

$$G(s) = e^{-\tau s} \hat{G}(s)$$

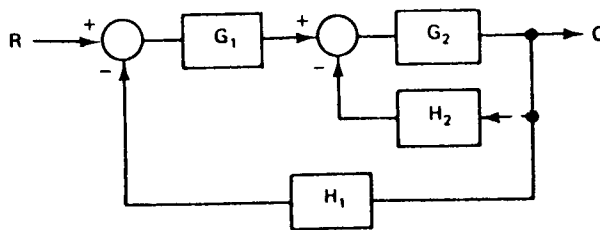
پیدا کنید.

۳۰-۳. حساسیت سیستم های نشان داده شده در شکل ۴۹-۳ (الف) و (ب) را برای تغییرات پارامتر p در حالت های (۱) p در $G_1(s)$ و (۲) p در $G_2(s)$ ، پیدا کنید.



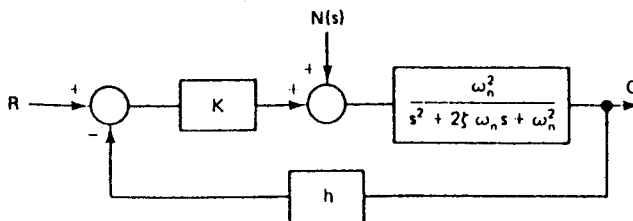
شکل ۳-۴۹ (الف) سیستم سری (ب) سیستم موازی

۳-۳۱- دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۳-۵۰ را در نظر بگیرید. حساسیت سیستم حلقه - بسته را برای تغییرات p در تابع تبدیل $G_1(s)$ بدست آورید.



شکل ۳-۵۰ دیاگرام بلوکی مسئله ۳-۳۱.

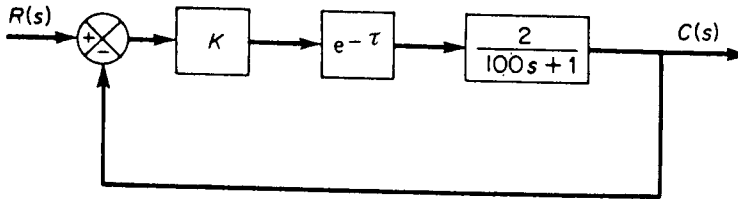
۳-۳۲- سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۳-۵۱ را در نظر بگیرید. (الف) حساسیت سیستم حلقه - بسته را به تغییرات در پارامترهای ω_n ، k و ξ پیدا کنید. (ب) اثرات اغتشاش را برای سیستم حلقه - باز ($h=0$) و حلقه - بسته تعیین و مقایسه کنید.



شکل ۳-۵۱ سیستم کنترل مسئله ۳-۳۲

۳-۳۳- سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۵۲ را در نظر بگیرید. حساسیت سیستم حلقه -

بسته را نسبت به تغییرات در زمان تاخیر τ بدست آورید.



شکل ۵۲-۳ سیستم فیدبک مسئله ۳-۳۳

۳-۳۴. با بکارگیری معیار روث، تعداد ریشه‌های ناپایدار چند جمله‌ای‌های زیر را تعیین کنید:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s + 5 = 0. \quad (\text{الف})$$

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 2s + 2 = 0. \quad (\text{ب})$$

$$s^3 - 4s^2 - 7s + 10 = 0. \quad (\text{ج})$$

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 2s + 10 = 0. \quad (\text{د})$$

$$s^3 + 3s^2 + s + 3 = 0. \quad (\text{ه})$$

$$s^4 + s^3 + s^2 + s + 2 = 0. \quad (\text{و})$$

۳-۳۵. با بکارگیری معیار روث، گستره پایداری را برای تغییرات k در چند جمله‌ای‌های زیر

تعیین کنید:

$$s^3 + 3ks^2 + (k+3)s + 5 = 0. \quad (\text{الف})$$

$$s^3 + 1/4s^2 + s + k = 0. \quad (\text{ب})$$

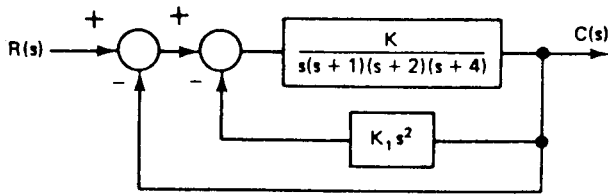
۳-۳۶. تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k \left(1 - \frac{T}{4}s \right)^2}{s \left(1 + \frac{T}{4}s \right)^2}$$

پایداری سیستم حلقه - بسته را به ازاء تغییرات بهره k و ثابت T بررسی کنید.

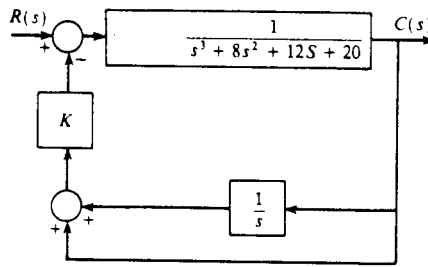
۳-۳۷. سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۵۳-۳ را در نظر بگیرید. محدوده پایداری را

برای سیستم حلقه - بسته بر حسب k و k_1 بدست آورید.



شکل ۳-۵۳ سیستم حلقه - بسته مسئله ۳-۳۷

۳-۳۸. سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۳-۵۴ را در نظر بگیرید. محدوده پایداری را برای سیستم حلقه - بسته به ازاء بهره k بدست آورید.



شکل ۳-۵۴ سیستم حلقه - بسته مسئله ۳-۳۸

۳-۳۹. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k(2s+1)}{s(4s+1)(s+1)^2}$$

ورودی اعمال شده به سیستم $r(t) = 1+t$ می باشد. (الف) مطلوب است که برای $r(t)$ داده شده خطای حالت ماندگار کمتر یا مساوی ۱/۰ باشد. حداقل بهره k که این مقدار را بر آورده می سازد، پیدا کنید.

(ب) با بکارگیری معیار روث پایداری سیستم را برای بهره بدست آمده در (الف) بررسی کنید.

۳-۴۰. پایداری معادله های زیر را با استفاده از روش هرویتز بررسی کنید.

$$s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 8s + 16 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$s^3 + 8s^2 + 14s + 24 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$s^3 + 5s^2 + 8s + 5 + k = 0 \quad (\text{ج})$$

مراجع فصل سوم

- [3-1] Frank, P. M., *Introduction to system sensitivity Theory*, Academic press, 1981.
- [3-2] Trimmer, J. D. *Response of physical systems*, Wiley, NewYork, 1969.
- [3-3] Singh, V., *Comments on the Routh-Hurwitz criterion*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-26, pp.612, 1981.
- [3-4] Porter B., *Stability criteria for linear dynamical systems*, Academic press, NewYork, 1968.
- [3-5] Krishnamurthi V., *Implications of Routh stability criteria*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-25, pp. 559-595, 1980.
- [3-6] Khatwani, K. J., *On Routh-Hurwitz criterion*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-26, pp 583-584, 1981.
- [3-7] Pillai, S. K., *On the ϵ -Method of the Routh-Hurwitz criterion*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol AC-26, pp.584, 1981.
- [3-8] Bongionro J. J., Jr, *A recursive algorithm for computing the partial fraction expansion of rational functions having multiple poles*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-29, pp 650-652, 1984.
- [3-9] Davison E. J., *A method for simplifying linear dynamical systems*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-11, pp-93-101, 1966.
- [3-10] Hisa T. C., *On the simplification of linear systems*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC. 17, pp 372-374, 1972.
- [3-11] Vidyasagar M., *On undershoot and non-minimum phase zeros*, IEEE Trans. Autom. Control Vol AC-31, pp 440, 1986.
- [3-12] Gantmacher F. R., *The theory of matrices*. Chelsea Publishing Company, 1960.

کتاب شناسی

پاسخ سیستم‌های کنترل به ورودیهای استاندارد را می‌توان مستقیماً از حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم بدون استفاده از تبدیل لاپلاس بدست آورد. برای این نحوه برخورد با بررسی پاسخهای حالت گذرا و حالت ماندگار به مرجع [1] مراجعه نمایید. پاسخ گذرای سیستم‌های مرتبه سوم و بالاتر را می‌توان در مرجع [2] پیدا کرد. در مراجع [1]، [2]، [3] و [4] مثالهای عملی از سیستم‌های مرتبه دوم آورده شده‌اند. در محاسبه پاسخ حالت گذرا با استفاده از تابع تبدیل در حوزه s باید تابع تبدیل را به صورت کسرهای متوالی تبدیل کرد. روشهای محاسبه مانده‌ها در کسرهای متوالی در این کتاب مورد بررسی قرار نگرفته‌اند، برای اطلاعات بیشتر به مراجع [1] تا [4] و [6] مراجعه شود. یک مقاله تخصصی در زمینه بسط کسرهای جزئی، مرجع [3-8] از مراجع همین فصل است.

همانطور که در این فصل اشاره شده است، بسیاری از سیستم‌های صنعتی را می‌توان به صورت توابع تبدیل مرتبه دوم و یا مرتبه اول نمایش داد. یک راه ساده سازی مدل یک سیستم مرتبه بالاتر، تعیین قطبهای غالب و غیر غالب و حذف قطبهای غیر غالب آن می‌باشد. در مراجع [3] و [4]، بطور مختصر ساده سازی سیستم‌ها مورد بحث قرار گرفته است. برای بررسی بیشتر می‌توان به مراجع [3-9] و [3-10] همین فصل مراجع کرد. در ارتباط با مشخصه‌های پاسخ گذرای سیستم‌های مرتبه دوم مانند زمان صعود به مرجع [25] نیز مراجعه نمایید.

اگر سیستمی دارای صفر ناپایدار باشد آنرا، غیر می‌نیم فاز نامیده و رفتار حالت گذرای آن با یک سیستم می‌نیم فاز (سیستمی که تمامی صفرهای آن پایدار می‌باشند) متفاوت است. این پدیده در مرجع [3-11] مفصلاً مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی پاسخ سیستم‌های فیزیکی به‌طور مفصل در [3-2] آمده است.

بکارگیری فیدبک برای کاهش اثر اغتشاشات خارجی و حساسیت بخوبی در [2]، [4]، [5]، [12] و [25] بحث شده است. برای بررسی بیشتر حساسیت در سیستم‌های کنترل به مرجع [3-1] همین فصل مراجعه شود.

خطاها در تحلیل سیستم کنترل نقش مهمی دارند و به همین دلیل در تمامی کتابهای کنترل کلاسیک، مفصلاً مورد بحث قرار گرفته‌اند. نکته قابل توجه این است که خطای حالت ماندگار

در سیستم‌های کنترل با فیدبک غیر واحد خطای بین خروجی سیستم و ورودی مرجع است و در برخی از منابع کنترل کلاسیک خطای بین خروجی بلوک در مسیر فیدبک و ورودی مرجع به عنوان خطا تلقی گردیده است. در این کتاب و اکثریت کتابهای کنترل کلاسیک حالت اول در نظر گرفته شده است، لیکن در مراجعی مانند [5] حالت دوم در نظر گرفته شده است. برای مطالعه بیشتر در مورد خطای سیستم‌های کنترل با فیدبک غیر واحد به مرجع [1] مراجعه شود هم‌چنین در [25] این نکته در تعریف خطا مورد بحث قرار گرفته است و تأثیر آن بر روی تعریف نوع سیستم و خطای حالت ماندگار آورده شده است. نوع سیستم در این مرجع به خوبی تعریف و برای ردیابی و ورودیهای اغتشاشی تعریف شده است.

بررسی پایداری به روشهای مختلفی امکان‌پذیر است. علاوه بر روش روٹ و هرویتز می‌توان از روش کسرهای متوالی^۱ نیز نامبرد. این روش در مرجع [6] آمده است. برای برخورد با حالت خاص اولین عنصر در یک سطر از آرایه روٹ می‌توان از روش^۴ استفاده کرد، که در مراجع [3] و [4] آمده است. توجه کنید که روش^۴ در مواجهه با معادلاتی که ریشه‌های موهومی محض دارند ممکن است که پاسخ درستی ندهد. روش روٹ برای پایداری در مراجع [3-3]، [3-5]، [3-6]، [3-7] مفصلاً بحث شده است. برای بررسی کلی‌تر پایداری به مرجع [3-4] همین فصل مراجعه شود. اثبات ریاضی روشهای روٹ و هرویتز در مرجع [3-12] آمده است.