

۶

روشهای جبران سازی سیستم های کنترل

اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با ایده جبران سازی و انواع جبران سازها
- ۲- معرفی جبران سازهای پس فاز، پیش فاز و پس - پیش فاز
- ۳- طراحی جبران سازها با استفاده از مکان ریشه
- ۴- طراحی جبران سازها با استفاده از روش پاسخ فرکانسی
- ۵- طراحی جبران سازها با استفاده از چارت نیکولز

۱-۶ مقدمه

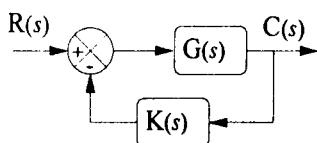
در فصلهای قبل با نمایش و تحلیل عملکرد سیستم‌های کنترل آشنا شدیم. مهندس کنترل پس از نمایش سیستم کنترل به صورت معادلات دیفرانسیل غیرخطی، تابع تبدیل، فضای حالت و ... به تحلیل سیستم خواهد پرداخت. توسط مدل بدست آمده از سیستم، و یا در صورت امکان با تحت آزمایش قرار دادن سیستم حلقه - باز اصلی، مشخصه‌های حوزه زمانی پاسخ سیستم به ورودیهای مختلف مانند ورودی پله (سرعت پاسخ، فزاینش حداکثر، زمان ستیغ، زمان استقرار ...)، خطاهای حالت - ماندگار، پایداری و پایداری نسبی، رسم مکان ریشه و در حوزه فرکانس با رسم نمودارهای بود، نایکوئیست و چارت نیکولز مشخصه‌هایی مانند حاشیه بهره، حاشیه فاز، پایداری نسبی، پهنای باند، فرکانس قطع و ... را مورد بررسی قرار می‌دهد. حال اگر یک یا چند پارامتر از مشخصه‌های سیستم، مانند پایداری، سرعت پاسخ، حاشیه‌های بهره و فاز و غیره مطلوب نباشند، طراح سیستم باید به گونه‌ای به مشخصه‌های مطلوب عملکرد سیستم دست یابد. با توجه به اینکه در اکثر سیستم‌ها، سخت‌افزار و ساختار درونی سیستم حلقه - باز مورد نظر غیرقابل تغییر و تعویض است، لذا در عمل نمی‌توان با تغییر پارامترهای خود سیستم به عملکرد مطلوب دسترسی پیدا کرد. از اینرو، مهندس طراح سیستم با بکارگیری روشهای طراحی^۱ و جبران‌سازی^۲، کنترل‌کننده مناسبی را جهت دستیابی به مشخصه‌های مورد نظر طراحی می‌کند. به سیستم‌های کمکی که وارد حلقه کنترل می‌گردند و رفتار مورد نظر حلقه - بسته را بدست می‌دهند، جبران‌ساز^۳ می‌گویند. در برخی از سیستم‌ها عمل جبران‌سازی با بستن یک حلقه فیدبک واحد به دور سیستم و تنظیم بهره حلقه - باز آن، به خوبی انجام می‌پذیرد. حال آنکه در بسیاری از سیستم‌های صنعتی که چند مشخصه مانند پایداری، سرعت بخشیدن به پاسخ و ... مورد نظر است، و یا اینکه سیستم از دینامیک پیچیده‌ای برخوردار است، با تنظیم یک بهره از سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد، مشخصه‌های تعیین شده برای سیستم حلقه - بسته بدست نخواهد آمد. در این چنین مواردی استفاده از جبران‌سازهای دینامیکی الزامی خواهد بود.

1- Design

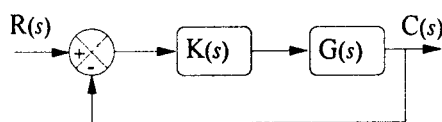
2- Compensation

3- Compensator

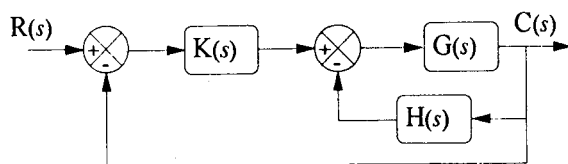
روشهای مختلفی برای وارد کردن جبران سازها در سیستم فیدبک وجود دارند. این روشها در شکل زیر آورده شده‌اند. اولین و متداولترین روش، استفاده از جبران ساز در مسیر پیشرو همراه با سیستم حلقه - باز است. به این روش، جبران سازی سری^۱ یا متوالی^۲ می‌گویند.



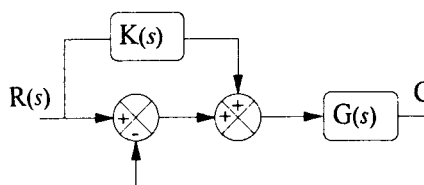
(ب)



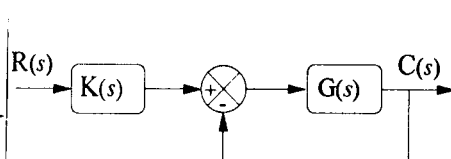
(الف)



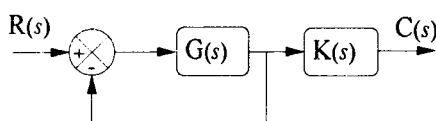
(ج)



(ه)



(د)



(و)

(الف) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز سری (ب) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز موازی (ج) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز سری - موازی (د) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز در مسیر ورودی (ه) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز در مسیر ورودی (و) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز در مسیر خروجی

این روش جبران‌سازی در شکل ۱-۶ (الف) نشان داده شده است. روش دوم وارد کردن جبران‌سازها، استفاده از جبران‌ساز در مسیر فیدبک است. به این روش، جبران‌سازی فیدبک یا موازی^۱ گفته می‌شود و در شکل ۱-۶ (ب) نشان داده شده است. همچنین می‌توان دو روش بالا را تلفیق نموده و از جبران‌ساز سری - فیدبک نشان داده شده در شکل ۱-۶ (ج) استفاده کرد. در بعضی از شرایط بهتر است که از جبران‌ساز در مسیر ورودی به سیستم فیدبک استفاده نمود که به دو صورت نشان داده شده در شکل‌های ۱-۶ (د) و (ه) اعمال می‌شود. سرانجام می‌توان از جبران‌سازها در مسیر خروجی سیستم نیز استفاده کرد که به آن جبران‌کردن خروجی یا بار^۲ گویند و در شکل ۱-۶ (و) نشان داده شده است.

علاوه بر روشهای ذکر شده می‌توان به روشهای جدید بنا نهاده شده بر مفاهیم فضای حالت نیز اشاره کرد. این روشهای تحلیل و طراحی سیستم‌ها را، بصورت مختصر در فصل ۷ بررسی خواهیم کرد. در این فصل، با توجه به سر راست بودن و کاربردی‌تر بودن روشهای طراحی جبران‌سازهای سری (شکل ۱-۶ (الف))، تنها به ارایه و توضیح این روشها خواهیم پرداخت. بدیهی است که در شرایط خاصی ممکن است یکی از روشهای ذکر شده در بالا بر روش سری ترجیح داده شود، لیکن جبران‌سازی سری با توجه به کاربرد وسیعتر آن، بیشتر از همه روشهای دیگر مورد استفاده قرار گرفته است. در هر صورت عوامل زیر در انتخاب، بین روشهای مختلف جبران‌سازی باید در نظر گرفته شوند:

۱- روشهای طراحی جبران‌کننده سری سر راست‌تر از روشهای طراحی سایر جبران‌سازها است. اگر چه ممکن است اعمال عملی برخی از جبران‌کننده‌ها ساده‌تر باشد.

۲- با توجه به ماهیت فیزیکی یک سیستم کنترل (الکتریکی، مکانیکی، هیدرولیکی و یا غیره)، ممکن است که برخی از روشهای جبران‌سازی ذکر شده قابل اجرا نباشند.

۳- اعمال جبران‌ساز از نقطه نظر اقتصادی مقرون به صرفه باشد. مواردی از قبیل اندازه، وزن، هزینه عناصر و تقویت‌کننده‌ها، همگی در ارزیابی اقتصادی جبران

ساز مهم هستند. دقت کنید که در برخی از کاربردها، مانند صنایع هواپیمایی، حجم و وزن جعبه کنترل فوق‌العاده مهم است و طراح باید یک محدوده حجم و وزن مشخصی را برای جبران ساز در نظر بگیرد.

۴- شرایط محیطی که جبران ساز در آن به کار گرفته خواهد شد، بر دقت و پایداری کمیت کنترل شده بشدت تأثیر می‌گذارد و انتخاب متغیر مناسب برای ورودی و خروجی بلوک جبران‌ساز می‌تواند یکی از عوامل تعیین کننده باشد. به عنوان مثال ممکن است که یک کمیت در سیستم، تحت تأثیر شدید شرایط جوی باشد و با تغییر دما تغییر کند و یا اینکه به کارگیری متغیر دیگری از نظر سخت‌افزار سیستم، مناسب‌تر باشد.

۵- مسئله نویز در سیستم کنترل نیز می‌تواند در انتخاب نوع جبران ساز تأثیر گذارد. به عنوان مثال در جبران سازهای سری که از یک بهره تقویت زیاد استفاده می‌کنند، مسئله نویز حادث‌تر از جبران سازهای فیدبک است که در آنها تقویت کننده‌ای با بهره بزرگ بکار گرفته نمی‌شود.

۶- نوع مشخصه عملکرد مطلوب در نظر گرفته شده برای سیستم حلقه - بسته نیز می‌تواند یکی از عوامل رجحان یک نوع جبران ساز بر دیگری باشد. اگر پاسخ سریعی از سیستم مطلوب باشد، جبران سازی فیدبک می‌تواند بهتر جوابگو باشد و یا اگر بخواهیم یک قسمت از دینامیک سیستم را از سایر قسمت‌ها مجزئ کنیم، در این حالت می‌توان از یک حلقه فیدبک داخلی در قسمت مورد نظر استفاده کرد. ۷- در کنار تمامی موارد بالا، باید تجربه و علاقه طراح به یک سیستم خاص جبران سازی و عناصر در دسترس برای بکارگیری در سیستم جبران ساز را نیز افزود.

مشخصه‌های عملکرد. مشخصه‌های عملکرد بسیاری، بسته به نیاز صنعت و کاربرد خاص سیستم کنترل، برای تعیین رفتار مطلوب سیستم کنترل وجود دارند. در جدول ۶-۱ خلاصه‌ای از مشخصه‌های عملکرد آورده شده است.

مراحل طراحی. اولین مرحله طراحی، بدست آوردن یک مدل ریاضی مناسب خطی از سیستم مورد نظر است. پس از مدلسازی و شبیه‌سازی سیستم، با روشهای ارایه شده، تحلیل مدل سیستم صورت می‌پذیرد و نقاط ضعف و قوت سیستم به طور کامل تعیین می‌گردند. با

جدول ۱-۶ خلاصه‌ای از مشخصه‌های مهم عملکرد که در صراحی جبران سازها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

(الف) سیستم حلقه - باز

مشخصه	حوزه	توضیح
۱- ساختار قطب و صفر	حوزه‌های زمان و فرکانس	نشان دهنده پایداری و رفتار حلقه - باز
۲- حاشیه بهره و حاشیه فاز	حوزه فرکانس	نشان دهنده پایداری حلقه - بسته و حاشیه پایداری

(ب) سیستم حلقه - بسته

مشخصه	حوزه	توضیح
۱- ساختار قطب و صفر	حوزه‌های زمان و فرکانس	نشان دهنده پایداری و رفتار حلقه - بسته
۲- مشخصه‌های پاسخ زمانی: اولین فرارفت، زمان استقرار، زمان ستیغ و مقدار فراجهش حداکثر	حوزه زمان	تأییدی از فرکانس طبیعی غیرمیرا و نسبت میرایی برای سیستم مرتبه دوم و یا قطبهای مؤثر سیستم‌های مرتبه بالاتر
۳- خطای حالت - ماندگار	حوزه زمان	تأییدی از نوع سیستم و ماهیت ورودی
۴- فرکانس تشدید، بالاترین مقدار تشدید، پهنای باند، فرکانس قطع و نرخ آن	حوزه فرکانس	تأییدی از فرکانس طبیعی غیرمیرا و نسبت میرایی برای سیستم مرتبه دوم و یا قطبهای غالب سیستم‌های مرتبه بالاتر، میزانی برای حذف نویز و دنبال روندگی در سیستم، میزانی برای تعیین حاشیه پایداری و سرعت پاسخ سیستم.

تعیین مشخصه‌های عملکرد و رفتار مطلوب و ایده‌آل سیستم حلقه - بسته، طراح با روش سعی و خطا به طراحی جبران سازی می‌پردازد که رفتار مطلوب حلقه - بسته را فراهم آورد. در این مرحله، باید با انجام آزمایشات مکرر و طراحیهای مختلف، پارامترهای گوناگون جبران ساز را به گونه‌ای تغییر داد تا رفتار مناسب حلقه - بسته حاصل شود. با آزمون پایداری و اطمینان از پایداری سیستم حلقه - بسته و بدست آوردن سایر مشخصه‌های پاسخ سیستم، طراح با اعمال جبران ساز به سیستم اصلی و بستن حلقه آن، سیستم را مورد آزمایش قرار می‌دهد. با توجه به در نظر گرفتن مسایل عملی از قبیل عناصر غیرخطی در سیستم، محرکها، سنسورها، برخی دینامیک‌های مدل نشده و نامعینی در مدلسازی و شبیه‌سازی سیستم حلقه - باز و جبران ساز، بدیهی است که رفتار سیستم حلقه - بسته واقعی با رفتار مدل آن مقداری

تفاوت داشته باشد. لذا ممکن است که اولین نتیجه طراحی چندان مطلوب نباشد و مشخصه‌های عملکرد را برآورده نسازد. در اینجا طراح سیستم کنترل با سعی و خطا به بهینه‌سازی مدل طراحی شده پرداخته تا اینکه به سیستم مطلوب حلقه - بسته دست پیدا کند. در این مرحله، طراح باید هر آزمایشی را بر روی سیستم به طور دقیق تحلیل و بررسی کند و نتایج هر مرحله را در بهینه‌سازی مراحل بعد به کار گیرد. طراح باید اطمینان پیدا کند که سیستم نهایی، مشخصه‌های عملکرد را برآورده می‌سازد، علاوه بر آن از نظر اقتصادی مقرون به صرفه است و از نظر کار قابل اعتماد می‌باشد.

تذکر این نکته حایز اهمیت است که در طراحی سیستم‌های کنترل با روشهای مکان ریشه، و یا پاسخ فرکانسی (که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند)، جبران ساز و نتیجه نهایی منحصر بفرد نیست. منحصر بفرد نبودن نتیجه طراحی بدین دلیل است که بهترین پاسخ یا پاسخ بهینه به مسئله طراحی تعریف نشده است و برای دستیابی به طراحی بهینه باید از روشهای پیشرفته‌تری استفاده کرد که از محدوده این کتاب خارج است.

مشخصه‌های کلی که یک سیستم طراحی شده باید داشته باشند، عبارتند از: خطاهای کوچک در پاسخ به سیگنال ورودی (برای این منظور میرایی سیستم باید مناسب باشد)، حساسیت کم به تغییرات کوچک در پارامترهای سیستم، از بین بردن اثر اغتشاشات نامطلوب وارده به سیستم و همچنین کم کردن اثر نویز ورودی (مانند نویز سنسورها).

۲-۶ انواع جبران سازها

متداولترین جبران سازها که در صنعت نیز کاربرد فراوانی دارند عبارتند از: جبران سازهای پیش فاز^۱، پس فاز^۲ و پس - پیش فاز^۳. جبران ساز پیش فاز بطور عمده برای بهبود بخشیدن به رفتار گذرای پاسخ بکار گرفته می‌شود و تأثیر اندکی بر روی خطای حالت - ماندگار پاسخ دارد. این جبران ساز ممکن است موجب تشدید اثرات نویزهای فرکانس بالا گردد. جبران ساز پس فاز برای بهبود بخشیدن خطای حالت - ماندگار به کار گرفته می‌شود. لیکن باعث افزایش زمان پاسخ گذاری سیستم می‌گردد. جبران ساز پس فاز اثرات نویزهای فرکانس بالا را کاهش

1- Phase lead

2- Phase lag

3- Phase lag-lead

می‌دهد. جبران ساز پس - پیش فاز اثرات هر دو جبران سازی پس و پیش فاز را با هم ترکیب می‌کند. بکارگیری جبران ساز پس فاز یا پیش فاز درجه دینامیکی سیستم را، در صورتیکه حذف صفر و قطب صورت نگیرد، یک درجه بالا می‌برد و در صورت عدم حذف صفر و قطب، جبران ساز پس - پیش فاز دو درجه به درجه دینامیکی سیستم اضافه می‌کند. این دو درجه افزایش در درجه دینامیکی، موجب پیچیده‌تر شدن سیستم می‌گردد و کنترل رفتار گذرای آن را مشکل‌تر می‌سازد.

جبران سازهای دیگری نیز وجود دارند که بعضاً در صنعت به کار گرفته می‌شوند، برای بررسی این جبران سازها به بخش کتابشناسی همین فصل مراجعه شود.

۱-۲-۶ جبران ساز پیش فاز

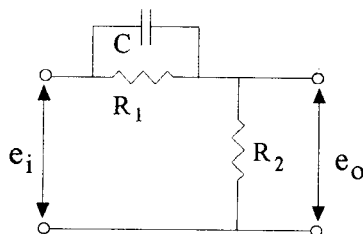
جبران ساز پیش فاز استاندارد دارای تابع تبدیل زیر است

$$G_c(s) = \alpha \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \quad (1-2-6)$$

که در آن $0 < \alpha < 1$ و T یک عدد حقیقی مثبت است. در بسیاری از مواقع، همراه با تابع تبدیل جبران ساز داده شده با معادله (۱-۲-۶)، یک بهره قابل تنظیم K_c نیز برای بهبود بخشیدن به عملکرد جبران ساز بکار گرفته می‌شود. در این صورت تابع تبدیل جبران ساز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \quad (2-2-6)$$

شکل ۱-۶ تحقق فیزیکی جبران ساز پیش فاز داده شده با معادله (۱-۲-۶) را به صورت یک مدار الکتریکی نشان می‌دهد (برای دیگر تحققات فیزیکی جبران ساز، به مسایل ۱-۶ و ۲-۶ مراجعه کنید) از شکل ۱-۶ داریم که تابع تبدیل بین خروجی $E_o(s)$ و ورودی $E_i(s)$ عبارتست از



- شکل ۱-۶ مدار پیش فاز الکتریکی

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 C s + 1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C s + 1} \quad (۳-۲-۶)$$

با تعریف

$$R_1 C = T, \quad \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \alpha < 1$$

از معادله (۳-۲-۶)، بدست می آوریم

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \alpha \cdot \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}$$

که همانند معادله (۱-۲-۶) می باشد.

مشخصه های جبران سازهای پیش فاز. تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز را می توان از

معادله (۱-۲-۶) به صورت زیر نوشت

$$G_c(s) = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (۴-۲-۶)$$

بنابراین جبران ساز پیش فاز یک قطب در $s = -1/(\alpha T)$ و یک صفر در $s = -1/T$ دارد. از آنجاییکه $0 < \alpha < 1$ می باشد، صفر جبران ساز همواره در سمت راست قطب آن بر روی محور حقیقی منفی در صفحه مختلط قرار دارد. برای مقدار کوچک α ، قطب جبران ساز در قسمت چپ صفحه مختلط بسیار دور از محور موهومی قرار می گیرد. حداقل مقدار α با تحقق فیزیکی جبران ساز پیش فاز محدود می شود.

تابع تبدیل پاسخ فرکانسی جبران ساز پیش فاز عبارتست از

$$G_c(j\omega) = K_c \alpha \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (۵-۲-۶)$$

نمودار بود جبران ساز پیش فاز برای $\alpha = 0.1$ و $K_c = 1$ در شکل ۲-۶ نشان داده شده است. فرکانس های شکست برای جبران ساز پیش فاز عبارتند از $\omega = 1/T$ و $\omega = 1/(\alpha T) = 10/T$ از شکل ۲-۶ مشاهده می شود که جبران ساز پیش فاز یک فیلتر بالاگذر^۱ است. به عبارت دیگر

فرکانس‌های بالا را عبور داده ولی فرکانس‌های پایین را تضعیف می‌کند. دقت کنید که این مشخصه برای پدیده نویز که عموماً دارای فرکانس‌های بالا می‌باشد، مناسب نیست. با توجه به قسمت فاز نمودار بود شکل ۶-۲، مشاهده می‌شود که حداکثر پیش فاز، زاویه ϕ_m در ω_r رخ می‌دهد که میانگین هندسی دو فرکانس شکست است، به عبارت دیگر

$$\log \omega_m = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T} \right) \quad \text{و از اینرو}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} \quad (۶-۲-۶)$$

نمودار نایکوئیست جبران ساز پیش فاز داده شده با معادله (۶-۲-۵) در شکل ۶-۳ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۶-۳ نشان داده شده است. حداکثر پیش فاز، زاویه ϕ_m زاویه بین مماسی است که از مبدا به نمودار نایکوئیست (یک نیم‌دایره) رسم می‌شود. همچنین داریم که زاویه فاز در $\omega = \omega_m$ ، عبارتست از

$$\sin \phi_m = \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (۷-۲-۶)$$

از معادله (۷-۲-۶)، می‌توان حداکثر زاویه پیش فاز برای یک α داده شده را محاسبه کرد.

چارت نیکولز جبران ساز پیش فاز داده شده با معادله (۶-۲-۱)، برای $\alpha = 0.1$ و $K_c = 1$ نیز در شکل ۶-۴ رسم شده است.

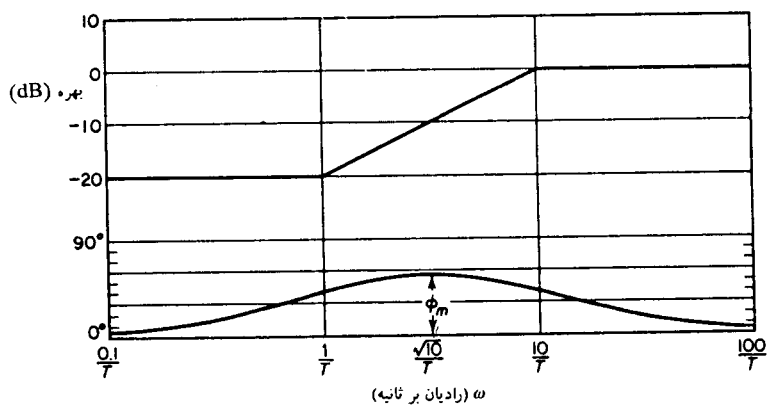
۶-۲-۶ جبران ساز پس فاز

جبران ساز پس فاز استاندارد، دارای تابع تبدیل زیر می‌باشد

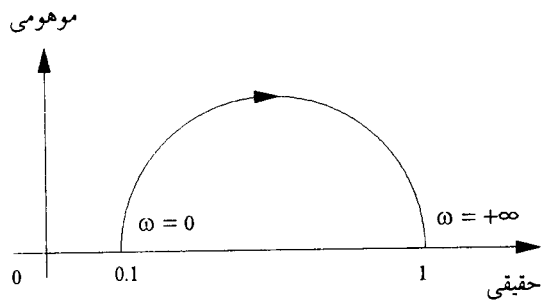
$$G_c(s) = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts} \quad (۸-۲-۶)$$

که در آن $\beta > 1$ و T یک عدد حقیقی مثبت است. همانند جبران ساز پیش فاز در اینجا نیز در بسیاری از مواقع همراه با جبران ساز داده شده با معادله (۶-۲-۸)، یک بهره قابل تنظیم K_c برای بهبود عملکرد جبران ساز بکار گرفته می‌شود. در این صورت تابع تبدیل جبران ساز پس فاز عبارتست از

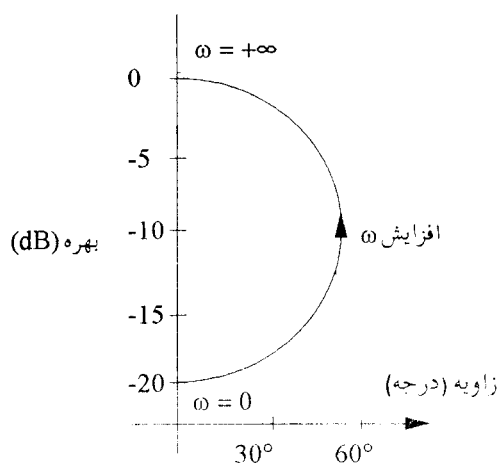
$$G_c(s) = K_c \frac{1+Ts}{1+\beta Ts}$$



شکل ۲-۶ نمودار بود جبران ساز پیش فاز معادله (۲-۲-۶) که در آن $K_c = 1$ و $\alpha = 0.1$



شکل ۳-۶ نمودار نایکوئیست جبران ساز پیش فاز معادله (۲-۲-۶) که در آن $K_c = 1$ و $\alpha = 0.1$

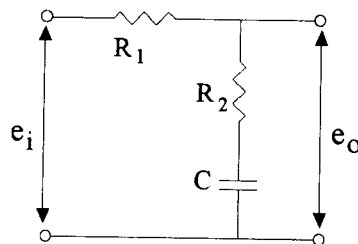


شکل ۴-۶ نمودار بود جبران ساز پیش فاز معادله (۲-۲-۶) که در آن $K_c = 1$ و $\alpha = 0.1$

$$= \frac{K_c s + 1/T}{\beta s + 1/\beta T} \quad (9-2-6)$$

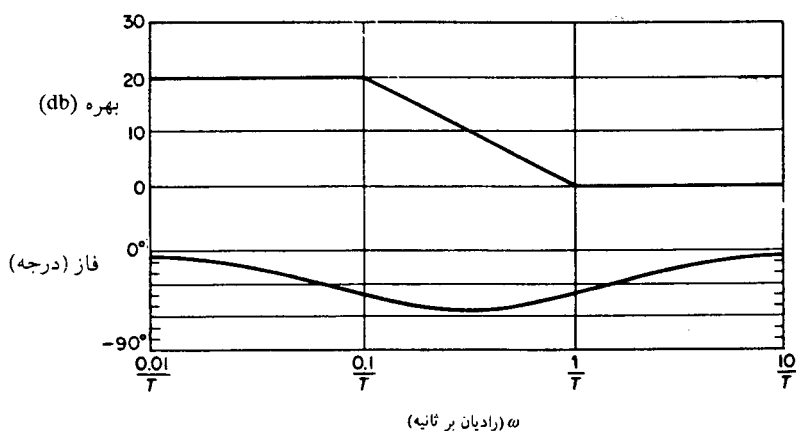
شکل ۵-۶ تحقق فیزیکی جبران ساز پس فاز داده شده با معادله (۸-۲-۶) را به صورت یک مدار الکتریکی نشان می‌دهد. (برای دیگر تحققات فیزیکی جبران ساز به مسایل ۱-۶ و ۲-۶ مراجعه کنید) با نوشتن تابع تبدیل مدار شکل ۵-۶ و مقایسه با معادله (۸-۲-۶)، بدست می‌آوریم

$$T = R_2 C, \quad \beta = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \quad (\beta > 1/0)$$

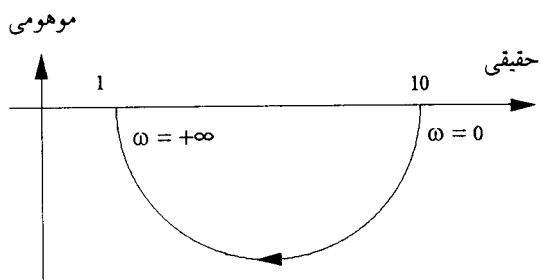


شکل ۵-۶ مدار پس فاز الکتریکی

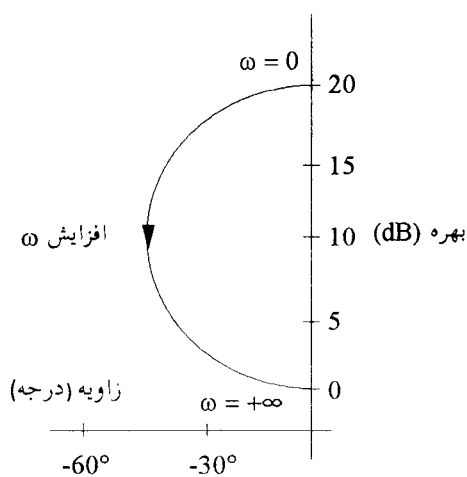
مشخصه‌های جبران سازهای پس فاز. با توجه به معادله (۹-۲-۶) جبران ساز پس فاز یک قطب در $s = -1/(\beta T)$ و یک صفر در $s = -1/T$ دارد. از آنجاییکه $\beta > 1/0$ ، لذا قطب جبران ساز همواره در سمت راست صفر آن بر روی محور حقیقی منفی در صفحه مختلط قرار دارد. برای مقادیر بزرگ β قطب جبران ساز به مبدا صفحه مختلط نزدیکتر خواهد شد. نمودار بود جبران ساز پس فاز برای $K_c = 1$ و $\beta = 10$ در شکل ۶-۶ نشان داده شده است. فرکانس‌های شکست برای جبران ساز پس فاز در $\omega = 1/T$ و $\omega = 1/(\beta T)$ قرار دارند. همانطور که از شکل ۶-۶ مشاهده می‌شود. جبران ساز پس فاز به صورت یک فیلتر پایین‌گذر عمل می‌کند. دقت کنید که دامنه جبران ساز پس فاز در فرکانس‌های پایین برابر ۱۰ یا ۲۰ dB، و در فرکانس‌های بالا یک یا ۰ dB است. نمودار نایکوئیست و چارت نیکولز جبران ساز پس فاز نیز به ترتیب در شکل‌های ۷-۶ و ۸-۶ رسم شده‌اند.



شکل ۶-۶ نمودار بود جبران ساز پس فاز معادله (۸-۲-۶)، که در آن $K_c=1$ و $\beta=10$



شکل ۶-۷ نمودار نایکوئیست جبران ساز پس فاز معادله (۸-۲-۶) که در آن $K_c=1$ و $\beta=10$



شکل ۶-۸ چارت نیکولز جبران ساز پس فاز معادله (۸-۲-۶) که در آن $K_c=1$ و $\beta=10$

۳-۲-۶ جبران ساز پس - پیش فاز

برای آنکه از مزیت هر دو جبران ساز پس فاز در بالا بردن دقت حالت - ماندگار و پیش فاز در سرعت بخشیدن به پاسخ سیستم و کاهش فراجهدش حداکثر استفاده کنیم، این دو جبران ساز با هم ترکیب شده و جبران ساز پس - پیش فاز را بوجود می آورند. تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \beta \alpha \frac{(1+T_1 s)(1+T_p s)}{(1+\alpha T_1 s)(1+\beta T_p s)} \quad (10-2-6)$$

که در آن $\alpha < 1$, $\beta > 1$, T_1 و T_p ثابتهای مثبت و K_c نیز یک بهره قابل تنظیم است. در بسیاری از مواقع β برابر با $1/\alpha$ انتخاب می شود. شکل ۹-۶ تحقق فیزیکی این جبران ساز را به صورت یک مدار الکتریکی نشان می دهد. (برای دیگر تحققیهای فیزیکی جبران ساز به مسایل ۳-۶ و ۴-۶ مراجعه کنید). از شکل ۹-۶، تابع تبدیل مدار نشان داده شده عبارتست از

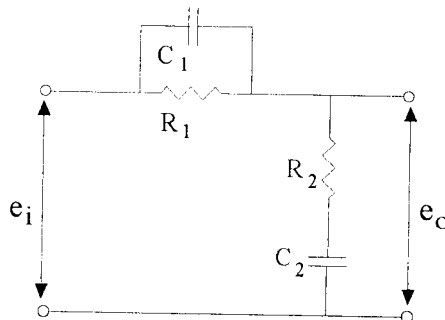
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_p C_p s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)(R_p C_p s + 1) + R_1 C_p s} \quad (11-2-6)$$

با تعریف

$$T_1 = R_1 C_1, \quad T_p = R_p C_p, \quad R_1 C_1 + R_p C_p + R_1 C_p = \frac{T_1}{\beta} + \beta T_p \quad (\beta > 1)$$

داریم

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(T_1 s + 1)(T_p s + 1)}{(\frac{T_1}{\beta} s + 1)(\beta T_p s + 1)} \quad (12-2-6)$$



شکل ۹-۶ مدار پس - پیش فاز الکتریکی

معادله (۶-۲-۱۲)، همان معادله (۶-۲-۱۰) است با $\beta = 1/\alpha$ و $K_c = 1$.

مشخصه‌های جبران سازهای پس - پیش فاز. تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز را می‌توان از معادله (۶-۲-۱۰) به صورت زیر نوشت

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + 1/T_1}{s + 1/\alpha T_1} \right) \left(\frac{s + 1/T_2}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \quad (۶-۲-۱۳)$$

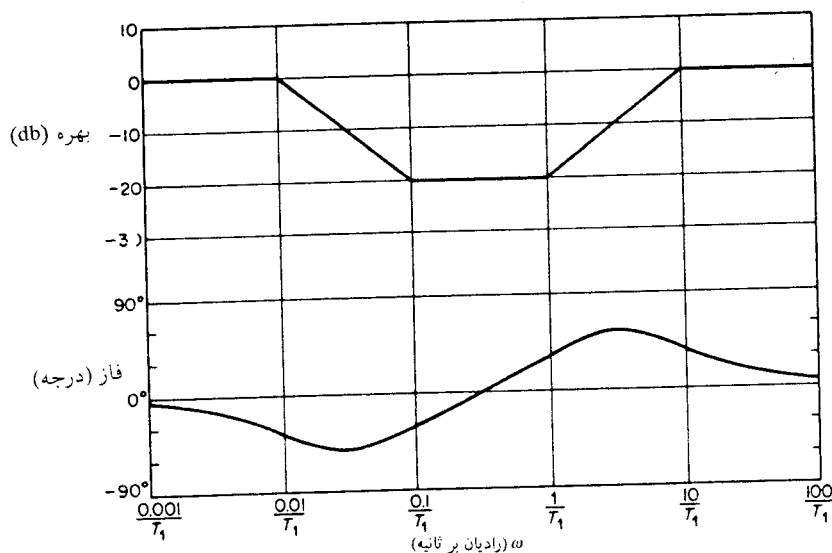
که در آن $\alpha < 1$ و $\beta > 1$. عبارت

$$\frac{s + 1/T_1}{s + 1/\alpha T_1} = \alpha \left(\frac{T_1 s + 1}{\alpha T_1 s + 1} \right) \quad (\alpha < 1)$$

اثر یک جبران ساز پیش فاز و عبارت

$$\frac{s + 1/T_2}{s + 1/\beta T_2} = \beta \left(\frac{T_2 s + 1}{\beta T_2 s + 1} \right) \quad (\beta > 1)$$

اثر یک جبران ساز پس فاز را دارد. نمودار بود جبران ساز پس - پیش فاز، برای $K_c = 1$ ، $\alpha = 10$ و $\beta = 10$ ، $T_2 = 10 T_1$ در شکل ۶-۱۰ نشان داده شده است. توجه کنید که منحنی دامنه



شکل ۶-۱۰ نمودار بود جبران ساز پس - پیش فاز معادله (۶-۲-۱۰) برای $K_c = 1$ و $\frac{1}{\alpha} = \beta = 10$ و $T_2 = 10 T_1$

جبران ساز در فرکانس‌های پایین و بالا مقدار dB را اختیار می‌کند. اگر فرکانسی را که در آن زاویه فاز 0° است با ω_1 نشان دهیم، همانطور که در شکل ۶-۱۰ نشان داده شده است، داریم

$$\begin{aligned}\log \omega_1 &= \frac{1}{2} \left[\log \frac{0/1}{T_1} + \log \frac{1}{T_1} \right] \\ &= \log \sqrt{\frac{0/1}{T_1^2}}\end{aligned}$$

ولذا

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{0/1}}{T_1}$$

نمودار بود شکل ۶-۱۰، بین فرکانس‌های $0 < \omega < \omega_1$ و $\omega_1 < \omega < \infty$ ، به ترتیب همانند نمودار بود جبران ساز پس فاز و پیش فاز عمل می‌کند.

شکلهای ۶-۱۱ و ۶-۱۲ به ترتیب نمودارهای نایکوئیست و چارت نیکولز تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز را نشان می‌دهند. همانطور که در شکل ۶-۱۱ نیز نشان داده شده است، زاویه فاز جبران ساز پس - پیش فاز در ω_1 صفر می‌شود. نمودار نایکوئیست نیز بین فرکانس‌های $0 < \omega < \omega_1$ و $\omega_1 < \omega < \infty$ به ترتیب همانند نمودارهای نایکوئیست جبران ساز پس فاز و پیش فاز عمل می‌کند.

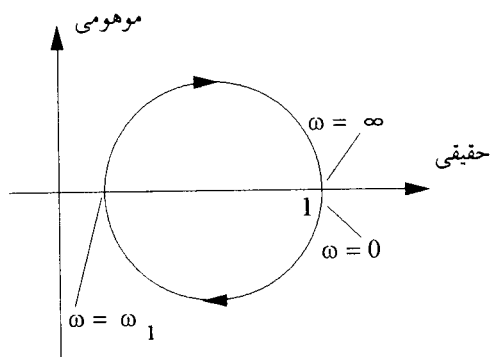
۴-۲-۶ کنترل کننده‌های PD، PI و PID

کنترل کننده PD. اگر در جبران ساز پیش فاز α را برابر صفر قرار دهیم (حالت ایده‌آل $0 \rightarrow \alpha$)، کنترل کننده تناسبی مشتقی^۱ یا PD را خواهیم داشت. تابع تبدیل کنترل کننده PD

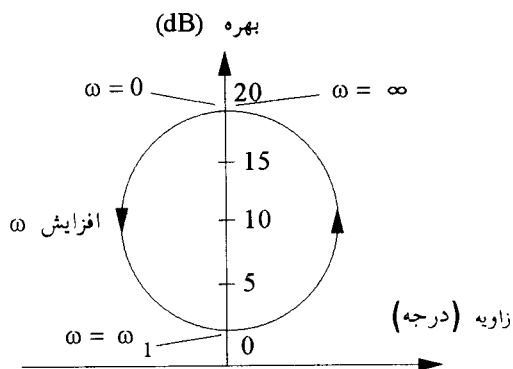
عبارتست از

$$G_C(s) = K_p + K_D s \quad (۶-۲-۱۴)$$

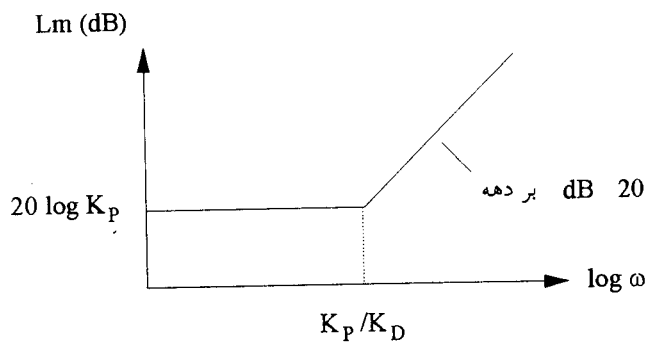
که در آن K_D و K_p را به ترتیب، بهره‌های تناسبی و مشتقی می‌نامند. نمودار بود این کنترل کننده در شکل ۶-۱۳ نشان داده شده است. فرکانس شکست نمودار در $\omega = K_p/K_D$ قرار دارد. مقدار بهره K_p تا حدی تعیین کننده رفتار حالت ماندگار است و از آن برای بهبود رفتار



شکل ۱۱-۶ نمودار نایکوئیست جبران ساز پس - پیش فاز معادله (۱۰-۲-۶) برای $K_c=1$ و $\beta=10$ و $\frac{1}{\alpha}$



شکل ۱۲-۶ چارت نیکولز جبران ساز پس - پیش فاز معادله (۱۰-۲-۶) برای $K_c=1$ و $\beta=10$ و $\frac{1}{\alpha}$



شکل ۱۳-۶ نمودار بود کنترل کننده PD

حالت - ماندگار استفاده می‌کنند. کنترل کننده PD حاشیه فاز را افزایش می‌دهد و لذا می‌تواند پایداری سیستم را بهبود ببخشد. لیکن دامنه آن بعد از فرکانس K_p/K_D روند افزایشی داشته که باعث تشدید نویزهای فرکانس بالا می‌گردد (کنترل کننده PD به صورت یک فیلتر بالاگذر عمل می‌کند). با توجه به اینکه جبران ساز پیش فاز نیز به اندازه کافی پیش فاز فراهم می‌کند و حاشیه فاز را افزایش می‌دهد ولی برای محدوده فرکانس بالا دارای دامنه بسیار کوچکتري نسبت به کنترل کننده PD است، لذا جبران ساز پیش فاز بر کنترل کننده PD ترجیح داده می‌شود. کنترل کننده PD همانند جبران ساز پیش فاز رفتار گذرای پاسخ را بهبود می‌بخشد. با توجه به اینکه PD یک مشتق‌گیر خالص است، لذا تحقق آن با عناصر RLC غیرفعال امکان‌پذیر نمی‌باشد.

زاویه فاز کنترل کننده PD برابر است با $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega K_D}{K_p}$ ، که از 0° تا $90^\circ +$ تغییر پیدا می‌کند و همواره مثبت است.

کنترل کننده PI. با قرار دادن $\beta \rightarrow \infty$ در جبران ساز پس فاز، این جبران ساز به سمت جبران ساز ایده‌آل تناسبی - انتگرال^۱ یا PI میل خواهد کرد. تابع تبدیل کنترل کننده PI عبارتست از

$$G_c(s) = K_p + K_I/s \quad (۱۵-۲-۶)$$

که در آن K_p و K_I به ترتیب بهره‌های تناسبی و انتگرال کنترل کننده می‌باشند. کنترل کننده PI یک صفر در $s = -K_I/K_p$ و یک قطب در $s = 0$ دارد. نمودار لگاریتم دامنه کنترل کننده PI، در شکل ۱۴-۶ رسم شده است. بهره کنترل کننده PI در فرکانس صفر بی‌نهایت است، و این مشخصه‌های حالت - ماندگار را بهبود می‌بخشد. از طرف دیگر، کنترل کننده PI نوع سیستم جبران شده را یکی افزایش می‌دهد و لذا سیستم را به طرف ناپایداری سوق می‌دهد و حاشیه پایداری را کم می‌کند. بنابراین در انتخاب ضرایب K_p و K_I باید دقت کرد که پاسخ گذرای سیستم مناسب باشد. کنترل کننده PI نیز همانطور که در شکل ۱۴-۶ آمده است، یک فیلتر پایین‌گذر است و لذا فرکانس‌های بالا را تضعیف می‌کند و موجب کند شدن پاسخ گذرا می‌گردد. بهره کنترل کننده PI برای فرکانس‌های پایین بسیار بزرگ و برای فرکانس‌های بالا

مقدار ثابت $20 \log K_p$ می‌باشد. زاویه فاز یک کنترل کننده PI عبارتست از

$$\angle G_c(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega K_p}{K_I} - 90^\circ \quad (۱۶-۲-۶)$$

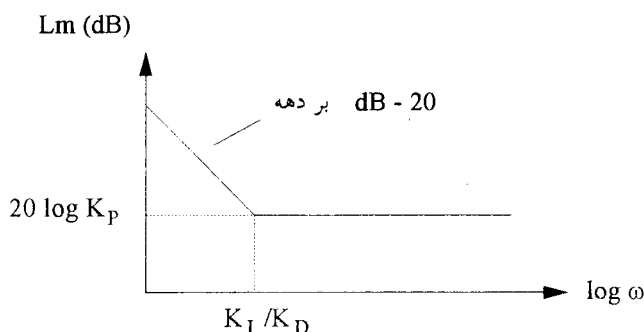
این زاویه فاز از -90° برای فرکانس $\omega = 0$ شروع می‌شود و تا 0° برای فرکانسهای بالا $\omega \rightarrow \infty$ تغییر پیدامی‌کند و لذا همواره منفی است.

کنترل کننده PID. کنترل کننده PID برای سود جستن از مزایای یک کنترل کننده PI و PD طراحی شده است. می‌توان گفت که هیچ کنترل کننده‌ای در صنعت به اندازه کنترل کننده PID مورد استفاده قرار نگرفته است. تابع تبدیل کنترل کننده PID عبارتست از

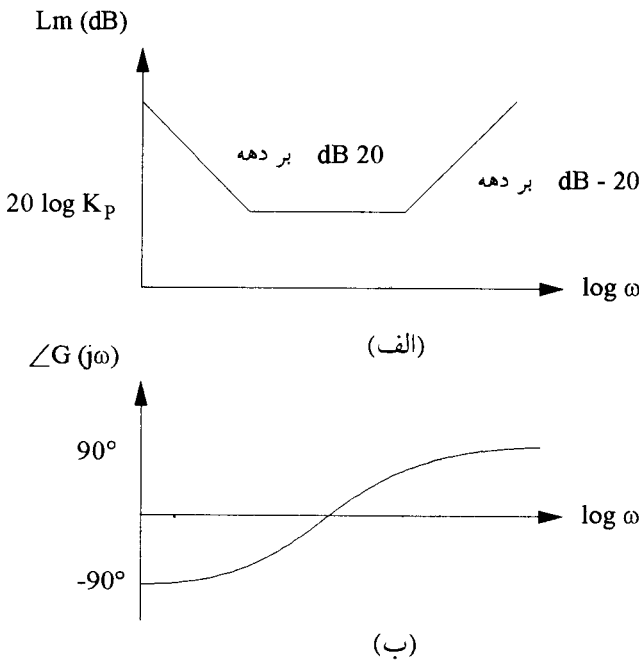
$$G_c(s) = K_p + K_I/s + K_D s \quad (۱۷-۲-۶)$$

که در آن K_p بهره تناسبی، K_I بهره انتگرال و K_D بهره مشتقی است. تحقق فیزیکی این کنترل کننده توسط یک مدار الکتریکی امکان‌پذیر است. شکل ۶-۱۵ نمودار بود کنترل کننده PID را نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است کنترل کننده PID یک کنترل کننده پس - پیش فاز است و همانند یک جبران ساز پس - پیش فاز باید در تنظیم پارامترهای کنترل کننده دقت کرد و افزایش بیش از اندازه آنها ممکن است به ناپایداری سیستم حلقه - بسته منجر گردد.

تنظیم پارامترهای کنترل کننده‌های PID. مهم‌ترین مسئله در استفاده بهینه از کنترل کننده‌های PID، تنظیم مناسب پارامترهای آنها K_p ، K_I و K_D است. روشهای مختلفی برای



شکل ۶-۱۴ نمودار لگاریتم دامنه کنترل کننده PI -



شکل ۳-۶ نمودار بود یک کنترل کننده PID. (الف) منحنی دامنه (ب) منحنی فاز

تنظیم این پارامترها پیشنهاد شده است. قواعد زیگلر و نیکولز^۱ از جمله این روشها هستند. در این کتاب به آرایه و بررسی این روشها نمی پردازیم. لیکن خواننده می تواند با مراجعه به بخش کتابشناسی همین فصل، با مراجعه به منابع داده شده، از روشهای کلاسیک زیگلر و نیکولز تا کاربرد سیستم های هوشمند^۲ را ملاحظه و بررسی نماید.

۳-۶ طراحی جبران سازها با استفاده از مکان ریشه

در فصل چهارم، با نحوه ترسیم مکان ریشه آشنا شدیم. نمودارهای مکان ریشه رابطه بین بهره سیستم و پاسخ زمانی آن را نشان می دهند (محل قطب های حلقه - بسته). در واقع هنگامیکه مشخصه های عملکرد مطلوب سیستمی برحسب کمیت های حوزه زمانی، مانند مقدار فراجش حداکثر، زمان ستیغ، زمان استقرار، نسبت میرایی و فرکانس طبیعی غیر میرایی

قطبهای غالب حلقه - بسته، ثابت زمانی و خطاهای حالت - ماندگار بیان شده باشد، مکان ریشه روش بسیار مؤثر و قوی برای جبران کردن سیستم حلقه - باز و رسیدن به مشخصه‌های عملکرد تعیین شده در سیستم حلقه - بسته است.

اگر سیستمی به ازاء کلیه مقادیر بهره K ناپایدار باشد و یا اینکه به ازاء کلیه مقادیر بهره K ، پاسخ آن مشخصه‌های نامطلوبی داشته باشد، بدیهی است که با تغییر K به تنهایی نمی‌توان به مشخصه‌های مطلوب عملکرد دست پیدا کرد. در این صورت باید با تغییر شکل دادن نمودار مکان ریشه سیستم توسط جبران سازهای مناسب، به مشخصه‌های عملکرد مطلوب تعیین شده رسید.

به طور کلی، یکی از موارد زیر می‌تواند دلیل مناسبی برای تغییر مکان ریشه سیستم توسط طراح باشد:

۱- سیستم داده شده به ازاء کلیه بهره‌ها ناپایدار است. برای پایدار سازی باید مکان ریشه به گونه‌ای تغییر شکل داده شود تا قسمتی از هر کدام از شاخه‌ها در سمت چپ صفحه s قرار گیرند و سیستم پایدار گردد.

۲- سیستم داده شده پایدار است، لیکن پاسخ گذرای آن مطلوب نیست. در این حالت می‌توان مکان ریشه را به گونه‌ای تغییر داد که دورتر از محور موهومی، به سمت چپ در صفحه s انتقال داده شود.

۳- سیستم داده شده پایدار است، پاسخ گذرای آن نیز مناسب می‌باشد، لیکن خطای حالت - ماندگار بسیار بزرگی دارد. در این حالت باید با افزایش بهره، خطای حالت - ماندگار را کاهش داد. توجه کنید که افزایش بهره باید بدون کاهش پایداری سیستم به مقدار قابل ملاحظه‌ای صورت گیرد.

۴- سیستم داده شده پایدار است، لیکن پاسخ گذرا و خطای حالت - ماندگار آن مناسب نمی‌باشند. در این حالت باید ضمن انتقال مکان ریشه به سمت چپ در صفحه s ، بهره سیستم را نیز افزایش داد.

قبل از آنکه به تشریح طراحی با جبران سازهای دینامیکی بپردازیم، با یک مثال نشان خواهیم داد که در برخی از موارد، رسیدن به عملکرد تعیین شده سیستم حلقه - بسته توسط تغییر بهره حلقه - باز K به تنهایی امکان‌پذیر است. بدیهی است که اگر بتوان به اهداف طراحی با یک آمپلی فایر ساده و تغییر بهره دست پیدا کرد، طراحی جبران سازهای دینامیکی که موجب پیچیده‌تر شدن سیستم می‌گردند، لزومی نخواهد داشت.

مثال ۱-۶

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K}{s(s+5)}$$

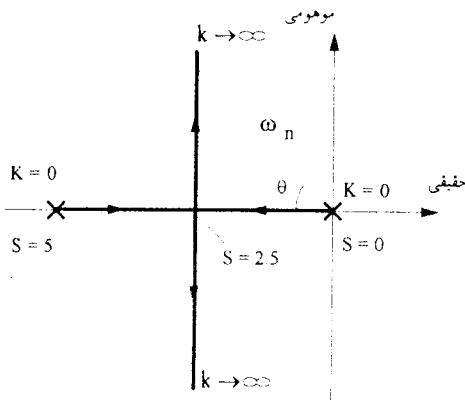
مطلوب است که سیستم حلقه - بسته در پاسخ به ورودی شیب واحد بیش از ۳۳٪ خطای حالت - ماندگار نداشته و در پاسخ به ورودی پله فراجش حداکثر خروجی سیستم بیش از ۱۰٪ نباشد. مکان ریشه تابع تبدیل در شکل ۱۶-۶ رسم شده است. از مقایسه تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته با تابع تبدیل استاندارد مرتبه دوم داریم $\omega_n^2 = K$ و $2\xi\omega_n = 5$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

برای آنکه سیستم درجه دوم حلقه - بسته، در پاسخ به ورودی پله واحد حداکثر ۱۰٪ فراجش داشته باشد، از شکل ۳-۱۱ داریم که $\xi \geq 0.6$ ، توجه کنید که دو ریشه حلقه - بسته با توجه به شکل ۱۶-۶، عبارتند از، $s = -2/5 \pm j\beta$ ، که در آن $\omega_n^2 = 2/5 + \beta^2$ و همچنین $\omega_n \cos\theta = 2/5$ از آنجاییکه $\xi = 2/5\omega_n$ ، داریم که $\xi = \cos\theta$ و یا $\xi = \cos^{-1}\theta$. لذا برای $\xi = 0.6$ بدست می آوریم

$$\theta = 53.13^\circ, \quad \omega_n = 4/167, \quad \beta = 3/33, \quad K = 17/36$$

برای هر $\xi > 0.6$ ، $\omega_n < 4/167$ و $K < 17/36$. بنابراین برای K در محدوده $0 < K < 17/36$ ، حداکثر فراجش تا ۱۰٪ پله واحد خواهد بود.



شکل ۱۶-۶ نمودار مکان ریشه تابع تبدیل مثال ۱-۶

برای برآورده کردن دومین مشخصه عملکرد، حداکثر خطای حالت - ماندگار به ورودی شیب واحد ۳۳٪، نخست داریم که خطای حالت - ماندگار به ورودی شیب واحد عبارتست از $1/K_R$ (بخش ۳-۶)، که در آن $K_R = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K/5$ ، و به عبارت دیگر برای خطای ۳۳٪، $K > 15$ ، $K_R = K/5 > 3$. از اینرو، می‌توان یک بهره حلقه - باز K را چنان انتخاب کرد تا هر دو شرط طراحی را برآورده سازد. به عبارت دیگر با انتخاب بهره $17/36 < K < 15$ می‌توان شرایط فراجهدش حداکثر در پاسخ به ورودی پله واحد و دقت خطای حالت - ماندگار به ورودی شیب واحد را برآورده ساخت.

توجه کنید که اگر بخواهیم دقت پاسخ سیستم به ورودی شیب واحد را بالا ببریم و برای مثال حداکثر ۵٪ خطای حالت - ماندگار مجاز باشد، خواهیم داشت

$$K_R = K/5 > 20, \quad K > 200$$

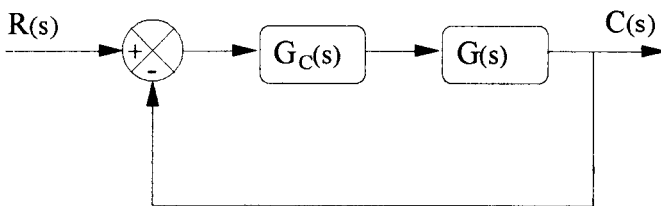
بدیهی است که در این حالت برآورده ساختن همزمان $17/36 < K < 200$ و $K > 200$ امکان پذیر نیست. در این چنین حالتی با تغییر بهره حلقه - باز K به تنهایی، نمی‌توان به مشخصه‌های طراحی دست پیدا کرد و بکارگیری جبران سازهای دینامیکی الزامی است.

۱-۳-۶ طراحی جبران سازهای پیش فاز با استفاده از مکان ریشه

اگر سیستم حلقه - باز به ازاء کلیه مقادیر بهره ناپایدار باشد و یا اینکه پایدار باشد لیکن مشخصه‌های پاسخ گذرای آن نامطلوب باشند، در هر دو حالت جبران ساز پیش فاز برای جبران سری سیستم حلقه - بسته و بدست آوردن پایداری و یا مشخصه‌های مطلوب پاسخ گذرا مناسب است.

مراحل طراحی یک جبران ساز پیش فاز برای سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۱۷، توسط مکان ریشه را می‌توان به صورت خلاصه زیر بیان کرد:

۱- با استفاده از روابط داده شده در بخش ۴-۴، از مشخصات عملکرد داده شده موقعیت قطبهای غالب حلقه - بسته را تعیین کنید.



شکل ۶-۱۷ سیستم کنترل

۲- نمودار مکان ریشه سیستم حلقه - باز را رسم کنید. با استفاده از نمودار مکان ریشه، تعیین کنید که آیا با تنظیم بهره حلقه - باز به تنهایی می توان به موقعیت قطبهای حلقه - بسته رسید یا خیر. در صورتیکه تنظیم بهره به تنهایی کافی نیست، نقص زاویه^۱ ϕ را محاسبه کنید. برای تعیین نقص زاویه، نخست مجموع زوایای یکی از قطبهای غالب حلقه - بسته مطلوب (قطبهایی که باید معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته مطلوب را تشکیل دهند)، با قطبها و صفرهای حلقه - باز سیستم اصلی را بدست آورید. از شرط زاویه داریم، برای آنکه قطب غالب حلقه - بسته مطلوب بروی مکان ریشه سیستم قرار گیرد، باید مجموع زوایا با قطبها و صفرهای حلقه - باز سیستم اصلی $(2k+1) \pm 180^\circ$ باشد. نقص زاویه ϕ زاویه لازمی است که باید با مجموع بدست آمده جمع گردد تا حاصل جمع برابر با $(2k+1) \pm 180^\circ$ شود. این زاویه توسط جبران ساز پیش فاز فراهم آورده می شود.

۳- تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s+1/T}{s+1/\alpha T} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1-3-6)$$

که در آن α و T از نقص زاویه تعیین می گردند. توجه کنید که مقادیر مناسب α و T جهت فراهم کردن نقص زاویه منحصر بفرد نمی باشند. بهره K_c از شرط دامنه تعیین می گردد. به عبارت دیگر، از شرط دامنه داریم

$$\left| K_c \frac{s+1/T}{s+1/\alpha T} G(s) \right|_{s=j\omega} = 1 \quad (2-3-6)$$

$s = j\omega$ قطب مصرف

لذا با جایگزینی قطب غالب حلقه - بسته، مقدار مناسب بهره K_c بدست خواهد آمد. ۴- دقت کنید که اگر مقدار خاصی برای ثابت خطای استاتیکی تعیین شده باشد، معمولاً استفاده از روشهای پاسخ فرکانسی ساده تر خواهد بود. در صورتیکه ثابتهای خطای استاتیکی مشخص نشده باشند، موقعیت قطب و صفر جبران ساز به گونه ای تعیین می شوند که زاویه لازم ϕ را بدست دهند. اگر مشخصه دیگری برای عملکرد در نظر

گرفته نشده باشد، مطلوب است که مقدار α حتی الامکان بزرگ باشد. یک مقدار بزرگتر α عموماً مقدار بزرگتری از K_c را می دهد.

پس از طراحی جبران ساز باید با شبیه سازی کامپیوتری یا انجام محاسبات مناسب، از برآورده شدن کلیه مشخصه های عملکرد اطمینان حاصل شود. در صورتیکه سیستم جبران شده مشخصه های عملکرد را برآورده نسازد، مراحل طراحی باید با تنظیم قطب و صفر جبران ساز دوباره تکرار شوند تا نتیجه مناسب بدست آورده شود. اگر یک ثابت خطای استاتیک بزرگ مورد نظر باشد، می توان از یک جبران ساز سری پس فاز یا تغییر جبران ساز به یک جبران ساز پس - پیش فاز استفاده کرد.

مثال ۶-۲

سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۱۷ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل سیستم حلقه - باز عبارتست از

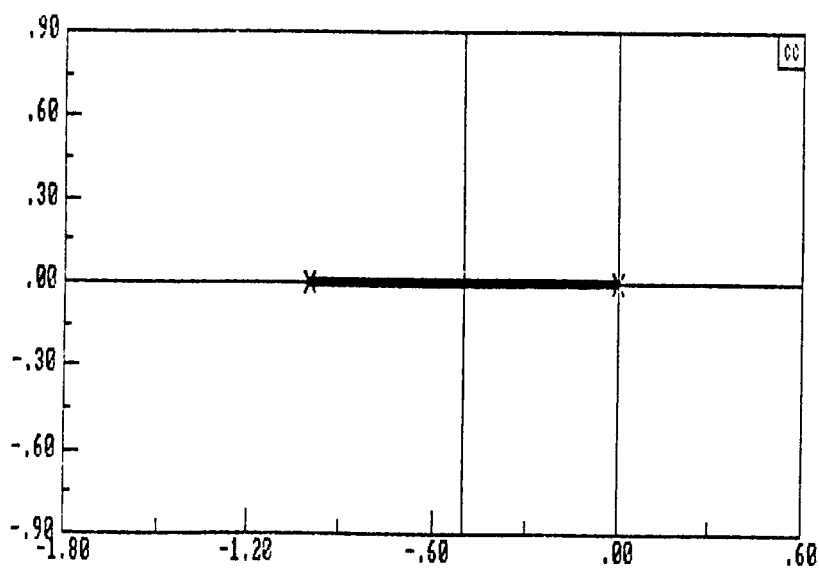
$$G(s) = \frac{s/2}{s(s+1)}$$

تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته (بدون جبران ساز) عبارتست از

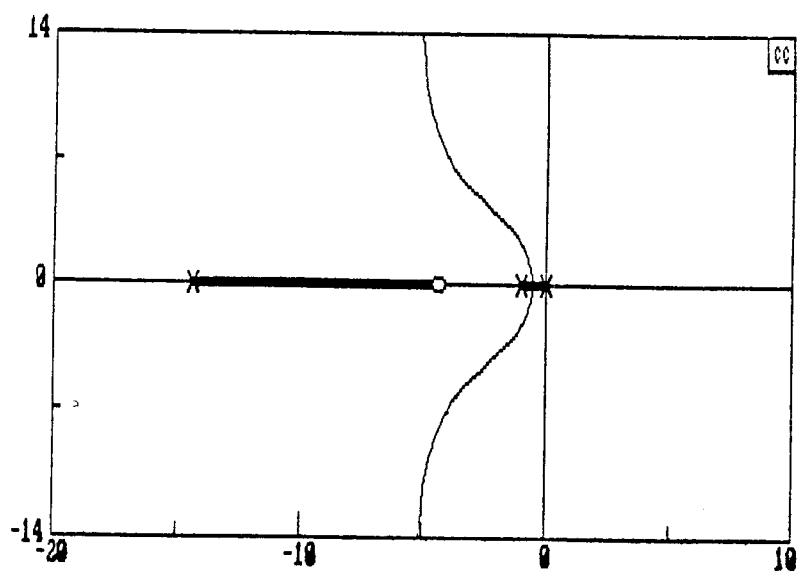
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s/2}{s^2 + s + 0/2}$$

قطبهای حلقه - بسته سیستم در $0/7236$ و $0/2764$ قرار دارند. مکان ریشه سیستم جبران نشده نیز در شکل ۶-۱۸ رسم شده است. با توجه به موقعیت قطبهای حلقه - بسته و نمودار مکان ریشه، بدیهی است که پاسخ سیستم بسیار کند است. پاسخ زمانی سیستم برای ورودی پله واحد در شکل ۶-۲۰ رسم شده است. همانطور که از شکل ۶-۲۰ مشاهده می شود، پاسخ سیستم پس از گذشت ۱۰ ثانیه به پله واحد نرسیده است. از شکل ۶-۱۸ داریم که با افزایش بهره به تنهایی نمی توان تغییر اساسی در رفتار سیستم حلقه - بسته ایجاد کرد. برای سرعت بخشیدن به پاسخ (بهبود رفتار پاسخ حالت گذرای سیستم حلقه - بسته)، مشخصه های عملکرد زیر را برای رفتار حلقه - بسته پاسخ تعیین می کنیم

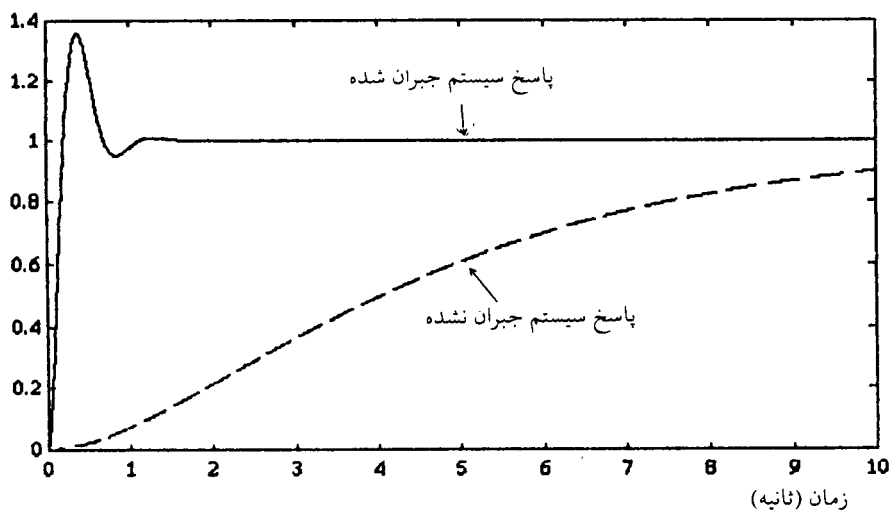
$$t_s \leq 1, \quad \xi > 0/5$$



شکل ۶-۱۸ مکان ریشه سیستم جبران نشده مثال ۶-۲.



شکل ۶-۱۹ مکان ریشه سیستم جبران شده



شکل ۶-۲۰ پاسخ سیستم‌های جبران شده و جبران نشده مثال ۶-۲ به ورودی پله -

قطبهای سیستم حلقه - بسته، برای برآورده ساختن این مشخصه‌های عملکرد عبارتند از $-۴ \pm j۶/۹۳$. برای تغییر مسیر نمودار مکان ریشه به گونه‌ای که از این قطبها عبور کند، جبران ساز پیش فازی طراحی خواهیم نمود. (دقت کنید که در این مثال با افزایش بهره به تنهایی، نمودار ریشه از این قطبها عبور نخواهد کرد.) برای تعیین جبران ساز پیش فاز، زاویه لازم ϕ جهت افزودن به مجموع زوایای قطبها و صفرهای حلقه - باز با یکی از قطبهای غالب حلقه - بسته مطلوب را پیدا می‌کنیم. مجموع این زوایا و زاویه ϕ باید $(۲k+۱)۱۸۰^\circ \pm$ باشد. در سیستم فعلی، زاویه $G(s)$ در قطب حلقه - بسته مطلوب عبارتست از

$$\left| \frac{\angle \frac{1}{s(s+1)}}{s = -۴ \pm j۶/۹۳} \right| = ۱۲۶/۶^\circ$$

از اینرو، جبران ساز پیش فاز باید زاویه $۵۳/۴^\circ$ را در این نقطه فراهم آورد. موقعیت قطب و صفری که این زاویه را فراهم آورند، منحصر بفرد نیست. یک جبران ساز مناسب (که با سعی و خطا بدست آمده است) عبارتست از

$$G_c(s) = \frac{K_c(s+۴/۴)}{s+۱۴/۵۴}$$

تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده عبارتست از

$$G_c(s)G(s) = \frac{K_c(s+4/4)}{(s+14/54)} \cdot \frac{0.2}{s(s+1)}$$

با استفاده از شرط دامنه $|G_c(s)G(s)|$ در قطب مورد نظر باید یک باشد، بهره K_c برابر با ۵۵۰ بدست خواهد آمد. مکان ریشه سیستم جبران شده در شکل ۶-۱۹ رسم شده است. پاسخ زمانی سیستم حلقه - بسته نیز به ورودی پله در شکل ۶-۲۰ رسم شده است. همانطور که در شکل ۶-۲۰ مشاهده می شود، سیستم حلقه - بسته مشخصه های عملکرد مورد نظر را برآورده می سازد.

۶-۳-۲ طراحی جبران سازهای پس فاز با استفاده از مکان ریشه

در مواقعی که مشخصه های پاسخ گذرای سیستم مناسب است ولی پاسخ حالت دایم آن مطلوب نیست، از جبران ساز پس فاز استفاده می کنیم. در این حالت، جبران سازی با افزایش بهره حلقه - باز بدون تغییر قابل توجه ای در مشخصه پاسخ گذرا انجام می گیرد. لذا مکان ریشه در نزدیکی قطبهای غالب حلقه - بسته نباید زیاد تغییری پیدا کند. لیکن بهره حلقه - باز باید حتی الامکان تا مقداری که مورد نیاز است افزایش یابد. این جبران سازی با اعمال یک جبران ساز پس فاز سری با تابع تبدیل حلقه - باز بدست می آید.

برای آنکه تغییر شکل قابل توجهی در نمودار مکان ریشه رخ ندهد، سهم زاویه جبران ساز پس فاز باید مقدار کوچکی مانند 5° باشد. از اینرو قطب و صفر جبران ساز پس فاز را نزدیک هم و نزدیک مبدا صافه s قرار می دهیم. در این صورت قطبهای حلقه - بسته سیستم جبران شده، تنها به مقدار کمی از موقعیتهای اصلی خود حرکت خواهند کرد و مشخصه های پاسخ گذرا تغییر محسوسی نخواهند کرد.

تابع تبدیل جبران ساز پس فاز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c \frac{s+1/T}{s+1/(\beta T)} \quad (3-3-6)$$

اگر قطب و صفر جبران ساز داده شده با معادله (۳-۳-۶) را بسیار نزدیک هم قرار دهیم، آنگاه در $s=s_1$ که در آن یکی از قطبهای غالب حلقه - بسته است، اندازه های $s_1 + (1/T)$ و

$s_1 + 1/(\beta T)$ تقریباً یکسان هستند. لذا از معادله (۳-۳-۶)، داریم

$$|G_c(s_1)| = \left| K_c \frac{s_1 + 1/T}{s_1 + 1/(\beta T)} \right| \approx K_c$$

بنابراین اگر بهره K_c را برابر یک انتخاب کنیم، مشخصه‌های پاسخ گذار تغییر نخواهند کرد و بهره کلی سیستم حلقه - باز با عامل β ، که در آن $\beta > 1$ ، افزایش خواهد یافت. اگر قطب و صفر جبران ساز نزدیک مبداء قرار داده شوند، آنگاه مقدار β را می‌توان بزرگ کرد و مقدار T نیز باید بزرگ انتخاب شود، ولی مقدار دقیق آن چندان مهم نیست. در هر حال مقادیر T و β باید به گونه‌ای انتخاب شوند که تحقق فیزیکی جبران ساز امکان پذیر باشد یک گستره مناسب برای مقدار β می‌تواند $1 < \beta < 15$ باشد و مقادیر β و T برحسب مورد و سیستم تحت کنترل، با سعی و خطا بدست آورده می‌شوند.

دقت کنید که افزایش بهره باعث کاهش خطای حالت - ماندگار و به عبارت دیگر افزایش ثابتهای خطای استاتیکی می‌شود. برای سیستم جبران نشده $G(s)$ و جبران ساز سری $G_c(s)$ داده شده با معادله (۳-۳-۶)، از بخش ۳-۶ داریم که ثابت خطای حالت - ماندگار سرعت، برای تابع تبدیل حلقه - باز $G(s)$ و $G_c(s)G(s)$ به ترتیب عبارتست از

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (۴-۳-۶)$$

و

$$\hat{K}_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) \quad (۵-۳-۶)$$

با جایگزینی معادله (۴-۳-۶) در معادله (۵-۳-۶)، داریم

$$\begin{aligned} \hat{K}_v &= \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)K_v \\ &= K_c \beta K_v \end{aligned} \quad (۶-۳-۶)$$

با توجه به اینکه مقدار K_c تقریباً برابر با یک انتخاب می‌شود، خطای حالت - ماندگار به ورودی شیب واحد برابر است با

$$1/\hat{K}_v = 1/(\beta K_v)$$

لذا با افزایش β ، خطای حالت - ماندگار کاهش خواهد یافت.

با فرض اینکه سیستم جبران نشده با تنظیم بهره مشخصه‌های پاسخ گذاری مناسبی

خواهد داشت، مراحل طراحی یک جبران ساز پس فاز برای سیستم نشان داده شده در شکل ۱۷-۶، توسط مکان ریشه را می توان به صورت خلاصه زیر بیان کرد:

۱- نمودار مکان ریشه سیستم جبران نشده با تابع تبدیل حلقه - باز $G(s)$ را رسم کنید. براساس مشخصه های پاسخ گذرا، قطبهای غالب حلقه - بسته را بر روی مکان ریشه جایابی کنید.

۲- تابع تبدیل جبران ساز پس فاز را به صورت داده شده با معادله (۳-۳-۶)، در نظر بگیرید.

۳- با مشخص نمودن ثابت خطای استاتیکی مورد نظر سیستم حلقه - بسته، مقدار افزایش لازم در ثابت خطای استاتیکی را برای برآورده ساختن مشخصه ها تعیین کنید. این میزان افزایش توسط عامل β در معادله (۳-۳-۶)، فراهم می شود.

۴- با انتخاب β ، موقعیت قطب و صفر جبران ساز پس فاز که افزایش لازم در ثابت خطای استاتیکی معین شده را بدون تغییر قابل توجهی در مکان ریشه اصلی بدست می دهد، تعیین کنید. توجه کنید که سهم زاویه جبران ساز پس فاز نباید زیاد باشد و یک قاعده سرانگشتی آن است که این زاویه از حداکثر 7° تجاوز نکند.

۵- نمودار مکان ریشه سیستم جبران شده را رسم کنید. اگر سهم زاویه ناشی از جبران ساز پس فاز زیاد نباشد، نمودار مکان ریشه سیستم جبران شده و جبران نشده تقریباً یکسان خواهند بود. در غیر اینصورت، اندک تفاوتی در دو نمودار پیدا می شود و قطبهای غالب حلقه - بسته مطلوب جدید را براساس مشخصه های پاسخ فرکانسی، مشخص کرده و بر روی نمودار مکان ریشه سیستم جبران شده جایابی کنید.

۶- با توجه به اینکه قطبهای غالب حلقه - بسته باید بروی مکان ریشه قرار گیرند، از شرط دامنه بهره جبران ساز K_c را بدست آورید.

مثال ۳-۶

تابع تبدیل حلقه - باز سیستم نشان داده شده در شکل ۱۷-۶ عبارتست از

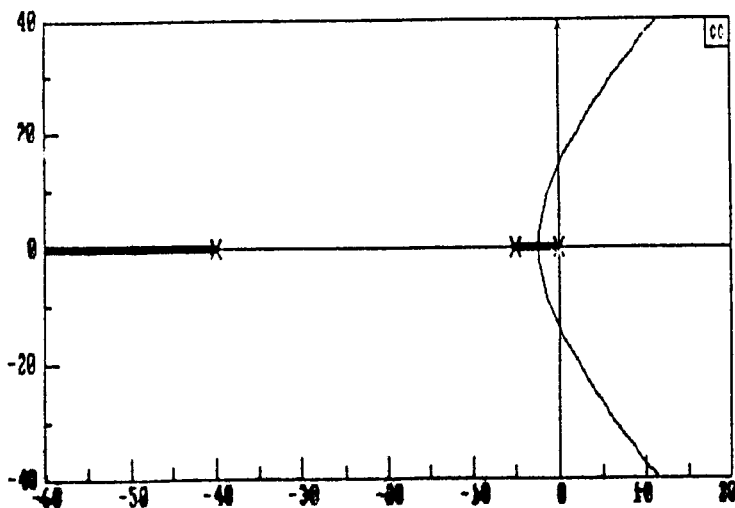
$$G(s) = \frac{450}{s(s+5)(s+40)}$$

تابع تبدیل میسستم حلقه - بسته جبران نشده (با فیدبک واحد در شکل ۶-۱۷) به صورت زیر

است

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{450}{s^3 + 45s^2 + 200s + 450}$$

قطبهای غالب حلقه - بسته، عبارتند از $2/3826 \pm j2/3420$ و یک قطب حلقه - بسته نیز در $40/3161$ قرار دارد. فرکانس طبیعی غیرمیرا ω_n و نسبت میرایی قطبهای حلقه - بسته ξ ، به ترتیب عبارتند از $\omega_n = 3/35$ (رادیان بر ثانیه) و $\xi = 0/7$ ثابت خطای سرعت استاتیکی سیستم (که نشان دهنده رفتار حالت - ماندگار سیستم در پاسخ به ورودی شیب است) $^{-1}$ (ثانیه) $K_v = 2/25$ است. با توجه به موقعیت قطبهای غالب حلقه - بسته، پاسخ سیستم جبران نشده زمان استقرار کمتر از ۲ ثانیه و نسبت میرایی قطبها نیز مقدار مناسبی دارد. لیکن مقدار ثابت خطای سرعت استاتیکی بسیار کم می باشد و مقدار مطلوب آن حداقل حدوداً ۱۰ برابر مقدار جبران نشده آن می باشد. به عبارت دیگر، پاسخ گذرای سیستم جبران نشده مطلوب است ولی برای بهبود پاسخ حالت - ماندگار آن به یک جبران ساز نیاز است. با توجه به رفتار مناسب حالت گذرای پاسخ، جبران ساز نباید موقعیت قطبهای غالب حلقه - بسته را تغییر زیادی دهد. نمودار مکان ریشه سیستم جبران نشده در شکل ۶-۲۱، نشان داده شده است.



شکل ۶-۲۱ نمودار مکان سیستم جبران نشده مثال ۶-۳ -

برای برآورده ساختن این مشخصه‌ها، یک جبران ساز پس فاز به طور سری (همانطور که در شکل ۶-۱۷ نشان داده شده است) برای سیستم طراحی می‌کنیم. برای افزایش ثابت خطای سرعت استاتیکی به میزان ۱۰ برابر، β را برابر ۱۰ انتخاب می‌کنیم و صفر و قطب جبران ساز پس فاز را به ترتیب در $s = -0.1$ و $s = -0.01$ قرار می‌دهیم. از اینرو تابع تبدیل جبران ساز به صورت زیر داده می‌شود

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$

سهم زاویه‌ای این جبران ساز در نزدیکی یک قطب غالب حلقه - بسته، حدوداً هشت درجه است و لذا تغییر جزئی در نمودار مکان ریشه حلقه - بسته در نزدیکی قطبهای غالب حلقه - بسته پدید خواهد آمد.

تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده عبارتست از

$$\begin{aligned} G_c(s)G(s) &= K_c \frac{s + 0.1}{s + 0.01} \frac{450}{s(s+5)(s+40)} \\ &= \frac{450 K_c (s + 0.1)}{s(s + 0.01)(s + 5)(s + 40)} \end{aligned}$$

نمودار مکان سیستم جبران شده در شکل ۶-۲۲ نشان داده شده است. با فرض $\xi = 0.7$ برای قطبهای غالب حلقه - بسته، این قطبها در $2/6 \pm j2/3$ قرار خواهند گرفت. برای تعیین بهره جبران ساز، از شرط دامنه داریم

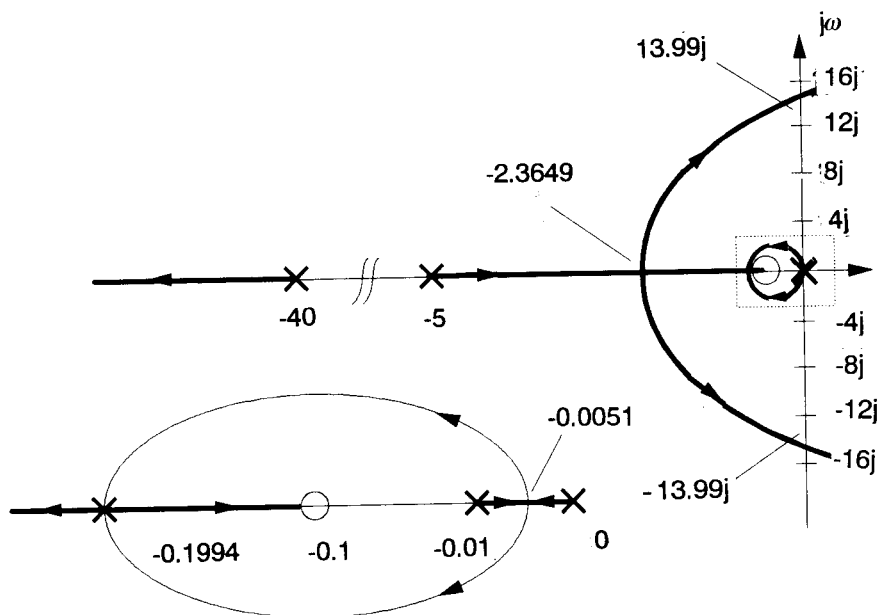
$$\begin{aligned} K_c &= \frac{1}{450} \left| \frac{s(s + 0.01)(s + 5)(s + 40)}{s + 0.1} \right|_{s = -2/3 \pm j2/6} \\ &= 1/1 \end{aligned}$$

بنابراین، تابع تبدیل جبران ساز پس فاز عبارتست از

$$G_c(s) = 1/1 \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$

و تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده عبارتست از

$$G_c(s)G(s) = \frac{503(s + 0.1)}{s(s + 0.01)(s + 5)(s + 40)}$$



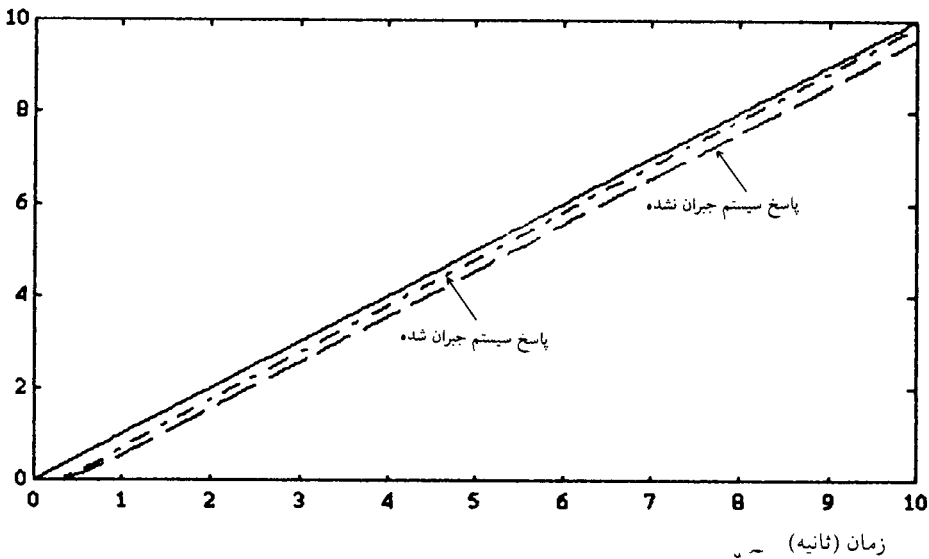
شکل ۶-۲۲ نمودار مکان ریشه سیستم جبران شده در مثال ۶-۳.

ثابت خطای سرعت استاتیکی K_v برابر است با

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = 25/15$$

در سیستم جبران شده، ثابت خطای سرعت استاتیکی از $2/25$ (ثانیه) $^{-1}$ به $25/15$ (ثانیه) $^{-1}$ افزایش یافته است و لذا خطای حالت ماندگار در پاسخ به ورودی شیب، به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش خواهد یافت. اگر بخواهیم ثابت خطای سرعت استاتیکی دقیقاً $22/5$ باشد (ده برابر مقدار جبران نشده)، می‌توان محل قطب و صفر جبران ساز را تغییر داد و یا اینکه بهره جبران ساز را به $K_c = 1$ کاهش دهیم، لیکن در این صورت نسبت میرایی قطبهای حلقه بسته نیز اندکی کاهش خواهد یافت.

پاسخ زمانی شیب واحد سیستم جبران شده و جبران نشده در شکل ۶-۲۳ نشان داده شده است. همانطور که از پاسخ مشاهده می‌گردد، خطای حالت ماندگار سیستم جبران شده به میزان قابل توجهی کاهش نشان می‌دهد.



شکل ۶-۲۳ پاسخ زمانی سیستم حلقه - بسته جبران شده و جبران نشده به ورودی شیب واحد

۶-۳-۳ طراحی جبران سازهای پس - پیش فاز با استفاده از مکان ریشه

تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز عبارتست از

$$G(s) = K_c \beta \alpha \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_1 \alpha s + 1)(\beta T_2 s + 1)} = K_c \left(\frac{s + 1/T_1}{s + \frac{1}{\alpha T_1}} \right) \left(\frac{s + 1/T_2}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \quad (۷-۳-۶)$$

که در آن $0 < \alpha < 1$ و $\beta > 1$. در مواردی که هر دو پاسخ گذرای سیستم و حالت - ماندگار آن نیاز به جبران سازی داشته باشند، هیچکدام از دو جبران ساز پس فاز و پیش فاز به تنهایی جوابگوی مسئله طراحی نخواهند بود. در این صورت باید از جبران ساز پس - پیش فاز داده شده با معادله (۷-۳-۶) استفاده کرد. این جبران ساز مشخصه‌های هر دو جبران ساز نامبرده را دارا است. همانطور که از معادله (۷-۳-۶) مشاهده می‌شود، دو پارامتر مهم طراحی در این جبران ساز α و β هستند (متناظر با پارامترهای α و β در جبران سازهای پیش و پس فاز). در اینجا مراحل طراحی جبران سازهای پس - پیش فاز را با استفاده از مکان ریشه در دو حالت $\alpha^{-1} \neq \beta$ و $\alpha^{-1} = \beta$ ، ارایه می‌کنیم.

حالت اول: $\alpha^{-1} \neq \beta$

۱- موقعیت قطبهای غالب حلقه - بسته را براساس مشخصه‌های عملکرد داده شده، تعیین کنید.

۲- با رسم نمودار مکان ریشه سیستم حلقه - باز داده شده با $G(s)$ و یا با انجام محاسبات لازم، نقص زاویه ϕ را برای آنکه قطبهای حلقه - بسته در مکانهای مطلوب باشند، تعیین کنید.

۳- قسمت پیش فاز جبران ساز داده شده با معادله $(\gamma - 3 - 6)$ ، باید این نقص زاویه را جبران کند. لذا T_1 و α را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$\angle[(s_1 + 1/T_1)/(s_1 + 1/\alpha T_1)] = \phi$$

که در آن s_1 یکی از قطبهای غالب حلقه - بسته است. توجه کنید که انتخاب T_1 و α منحصر بفرد نیست. سپس بهره K_c را از شرط دامنه تعیین کنید:

$$\left| K_c \frac{s_1 + 1/T_1}{s_1 + 1/\alpha T_1} G(s_1) \right| = 1$$

۴- مقدار β از ثابت خطای سرعت K_v تعیین می‌گردد. با مشخص نمودن ثابت خطای سرعت K_v داریم

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \left[\frac{s + 1/T_1}{s + 1/(\alpha T_1)} \right] \left[\frac{s + 1/T_2}{s + 1/(\beta T_2)} \right] G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \beta \alpha G(s) \end{aligned}$$

مقادیر α و K_c از مرحله ۳ بدست آمدند. از اینرو، برای مقدار K_v داده شده مقدار β را می‌توان از معادله بالا تعیین کرد. با استفاده از β بدست آمده، مقدار T_2 را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود:

$$\left| \frac{s_1 + 1/T_2}{s_1 + 1/(\beta T_2)} \right| = 1$$

و

$$-5^\circ < \angle[(s_1 + 1/T_2)/(s_1 + 1/(\beta T_2))] < 0^\circ$$

در واقع مقدار T_p باید به گونه‌ای باشد که شرط دامنه برآورده شود و سهم زاویه ناشی از قسمت پس فاز جبران ساز پس - پیش فاز نیز بزرگ نباشد.

مثال ۴-۶

تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم کنترل با فیدبک منفی عبارتست از

$$G(s) = \frac{3}{s(s+0.6)}$$

قطبهای سیستم حلقه - بسته در $0.6 \pm j1.7$ قرار دارند. نسبت میرایی، فرکانس طبیعی غیرمیرا و ثابت خطای سرعت استاتیکی سیستم جبران نشده به ترتیب عبارتند از 0.0173 ، 1.732 (رادیان بر ثانیه) و 15^{-1} (ثانیه). بنابراین مشخصه‌های حالت - گذرا و حالت - ماندگار پاسخ هیچکدام مناسب نمی‌باشند.

مشخصه‌های مطلوب عملکرد سیستم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K_p > 90 \text{ (ثانیه)}^{-1}, \quad \xi > 0.5, \quad t_s < 1/6 \text{ (ثانیه)}$$

با توجه به مشخصه‌های تعیین شده، قطبهای مطلوب غالب سیستم حلقه - بسته در $0.4 \pm j4.33$ قرار خواهند گرفت.

از قسمت پیش فاز جبران ساز پس - پیش فاز داده شده با معادله $(6-3-7)$ ، برای بهبود رفتار حالت گذرای سیستم و از قسمت پس فاز آن برای کاهش خطای حالت ماندگار (افزایش K_v) استفاده می‌کنیم. نخست قسمت پیش فاز جبران ساز را طراحی می‌کنیم. از آنجاییکه

$$\left. \frac{3}{s(s+0.6)} \right|_{s=-2/5+j4.33} = 126/31$$

قسمت پیش فاز جبران ساز باید زاویه‌ای برابر با $53/69^\circ$ را در قطبهای غالب فراهم آورد (در این صورت نمودار مکان ریشه سیستم جبران شده از قطبهای غالب مطلوب عبور خواهد کرد). برای فراهم آوردن سهم زاویه‌ای برابر با $53/69^\circ$ ، تابع تبدیل زیر را برای قسمت پیش فاز جبران ساز در نظر می‌گیریم

$$K_c \frac{s+2/13}{s+9/13}$$

(دقت کنید که این تابع تبدیل منحصر بفرد نیست و می تواند از روشهای سیستماتیک و یا سعی و خطا بدست آورده شود، تنها فراهم آوردن سهم زاویه ای مطلوب کافی است). بهره K_c از شرط دامنه بدست آورده می شود. داریم

$$\left| K_c \frac{s+2/\sqrt{3}}{s+9/\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{s(s+0.6)} \right|_{s=-2/5+j4/\sqrt{3}} = 1$$

از اینرو

$$K_c = 14/4$$

قسمت پس فاز جبران ساز را برای برآورده ساختن مشخصه حالت - ماندگار پاسخ طراحی می کنیم. در واقع مقدار β را چنان تعیین می کنیم که شرط داده شده بر روی K_v برآورده گردد. داریم

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sK_c\alpha\beta G(s) = 90$$

و لذا

$$\beta = 4/2$$

سرانجام، مقدار T_p را به گونه ای به اندازه کافی بزرگ انتخاب می کنیم که

$$\left| \frac{s+1/T_p}{s+\frac{1}{4/2}T_p} \right|_{s=-2/5+j4/\sqrt{3}} \approx 1$$

و

$$\angle \frac{s+1/T_p}{s+\frac{1}{4/2}T_p} \bigg|_{s=-2/5+j4/\sqrt{3}} < 0^\circ$$

با انتخاب $T_p=10$ ، دو شرط بالا برآورده خواهند شد (دامنه برابر یک جهت برآورده کردن شرط دامنه، و سهم زاویه ناچیز در قطبهای غالب برای تغییر ندادن رفتار حالت - گذرا) و لذا تابع تبدیل قسمت پس فاز جبران ساز عبارتست از

$$\frac{s+0/1}{s+0/0.2}$$

بنابراین تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز به صورت زیر بدست می آید

$$G_c(s) = 14/4 \left(\frac{s+2/13}{s+9/13} \right) \left(\frac{s+0/1}{s+0/0.2} \right)$$

مکان ریشه سیستم جبران شده در شکل ۶-۲۴ نشان داده شده است. پاسخ زمانی سیستم های جبران شده و جبران نشده به ورودی پله واحد و شیب واحد نیز در شکل های ۶-۲۵ (الف) و (ب) رسم شده اند.

حالت دوم: $\alpha^{-1} = \beta$

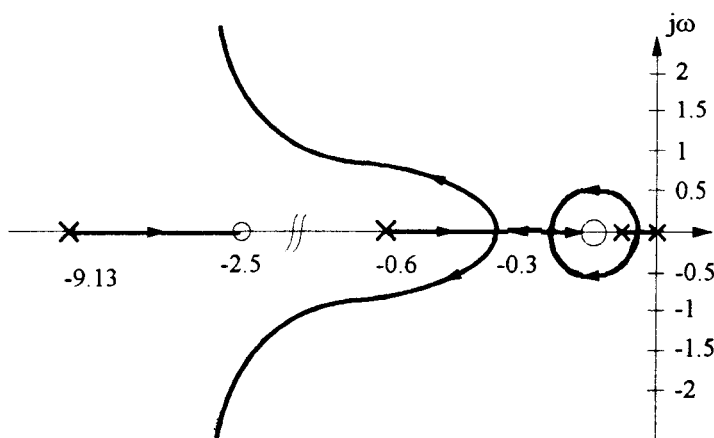
۱- موقعیت قطب های غالب حلقه - بسته را براساس مشخصه های عملکرد داده شده تعیین کنید.

۲- جبران ساز پس - پیش فاز داده شده با معادله (۶-۳-۷) بدین صورت اصلاح می شود:

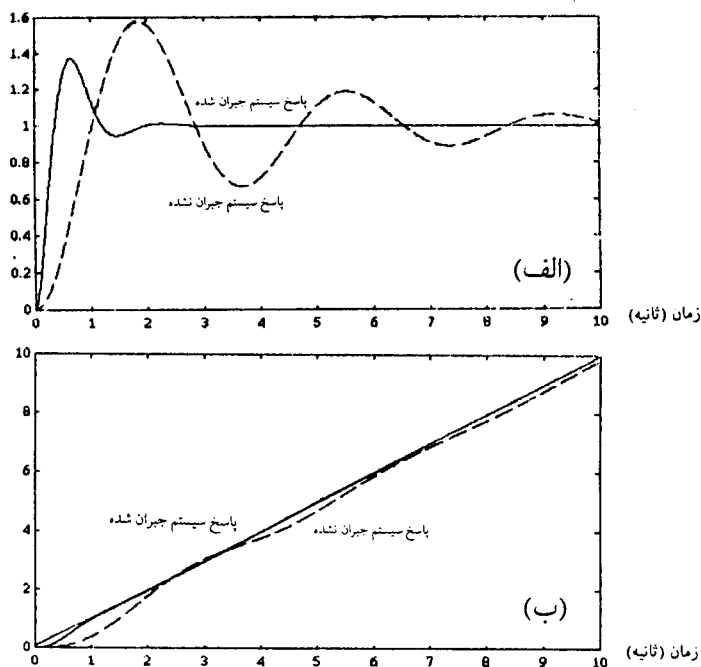
$$G_c(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(\frac{T_1}{\beta} s + 1)(\beta T_2 s + 1)} = K_c \frac{(s + 1/T_1)(s + 1/T_2)}{(s + \beta/T_1)(s + 1/\beta T_2)} \quad (۶-۳-۸)$$

که در آن $\beta > 1$. تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارتست از $G_c(s)G(s)$. اگر ثابت خطای سرعت استاتیکی K_v مشخص باشد، مقدار K_c از معادله زیر تعیین می گردد:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ = \lim_{s \rightarrow 0} s K_c G(s)$$



شکل ۶-۲۴ نمودار مکان ریشه سیستم جبران شده -



شکل ۶-۲۵ پاسخ زمانی سیستم‌های جبران نشده و جبران شده (الف) ورودی پله واحد (ب) ورودی شیب واحد.

۳- برای آنکه قطبهای غالب حلقه - بسته در مکانهای مطلوب باشند، سهم زاویه ϕ که باید توسط قسمت پیش فاز جبران ساز فراهم گردد را تعیین کنید.

۴- مقادیر T_1 و β را به گونه‌ای انتخاب کنید که شرایط دامنه و زاویه زیر را برآورده سازند:

$$\left| K_c \left(\frac{s_1 + 1/T_1}{s_1 + \beta/T_1} \right) G(s_1) \right| = 1$$

و

$$\angle [(s_1 + 1/T_1)/(s_1 + 1/(\beta T_1))] = \phi$$

۵- با مقدار β بدست آمده، T_1 را به گونه‌ای انتخاب کنید که شرایط زیر را برآورده سازند:

$$\left| \frac{s_1 + 1/T_1}{s_1 + 1/(\beta T_1)} \right| \approx 1$$

و

$$-5^{\circ} < \angle [(s_1 + 1/T_1)/(s_1 + 1/(\beta T_2))] < 0^{\circ}$$

مقدار بزرگترین ثابت زمانی جبران ساز پس - پیش فاز βT_2 را به اندازه‌ای می‌توان افزایش داد که تحقق فیزیکی آن ممکن باشد.

مثال ۵-۶

سیستم کنترل مثال ۴-۶ را در نظر بگیرید. برای جبران رفتار حالت - گذرا و حالت - ماندگار سیستم حلقه - بسته از جبران ساز داده شده با معادله (۸-۳-۶) استفاده می‌کنیم. با فرض مشخصات عملکرد داده شده در مثال ۴-۶، قطبهای غالب حلقه - بسته در $2/5 \pm j4/33$ قرار خواهند گرفت. تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده $\dot{G}_c(s)G(s)$ می‌باشد و K_c را از شرط داده بروی K_v از رابطه زیر تعیین می‌کنیم

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_c \left(s + \frac{1}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{T_2} \right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{\beta T_2} \right)} \frac{3}{s(s+0/6)} \\ &= K_c \frac{3}{0/6} \end{aligned}$$

از آنجاییکه K_v باید حداقل ۹۰ باشد، لذا

$$K_c = 18$$

ثابت زمانی T_1 و مقدار β ، برای طراحی قسمت پیش فاز جبران ساز، باید به گونه‌ای انتخاب گردند که شرط دامنه را در موقعیت قطبهای غالب برآورده سازند و هم چنین زاویه‌ای برابر با $53/69^{\circ}$ را در قطبهای غالب، فراهم آورند. بنابراین

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right| \left| \frac{3 \times 18}{s(s+0/6)} \right|_{s=-2/5+j4/33} = \left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right| \frac{54}{23/7} = 1$$

و

$$\left. \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s = -2/5 + j4/31} = 53/69^\circ$$

همانطور که در شکل ۶-۲۶ نشان داده شده است، اگر p در موقعیت مطلوب قطب حلقه - بسته باشد، باید A و B را بر روی محور حقیقی به گونه‌ای تعیین کرد که

$$\angle APB = 53/69^\circ, \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{23/7}{54} = \frac{4/74}{10/8}$$

لذا

$$\overline{AO} = 3/27, \quad \overline{BO} = 11/2894$$

یا

$$T_1 = \frac{1}{3/27} = 0/30, \quad \beta = \frac{11/2894}{3/27} = 3/45$$

بنابراین قسمت پیش فاز جبران ساز عبارتست از

$$\frac{s + 3/27}{s + 11/2894}$$

- برای قسمت پس فاز جبران ساز انتخاب می‌کنیم

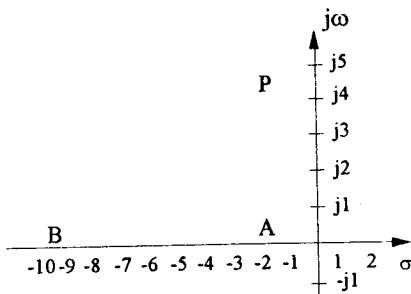
$$T_p = 10$$

بنابراین

$$\frac{1}{\beta T_p} = \frac{1}{30/45}$$

- و تابع تبدیل قسمت پس فاز جبران ساز عبارتست از

$$\frac{s + 0/1}{s + 0/3}$$

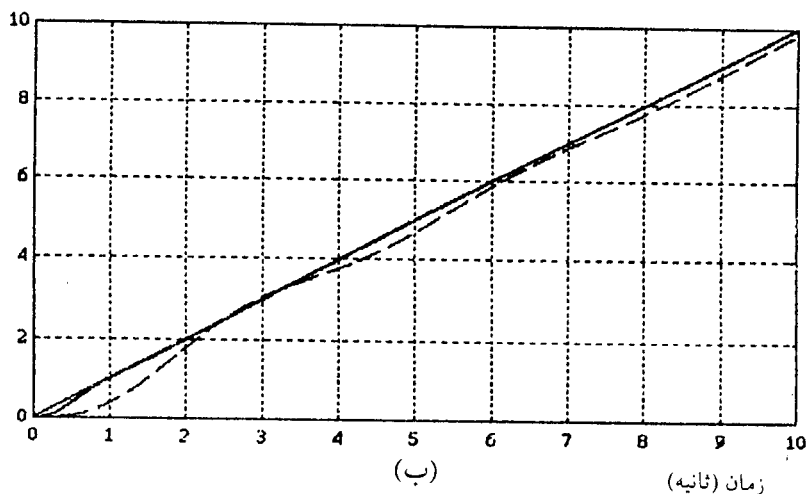
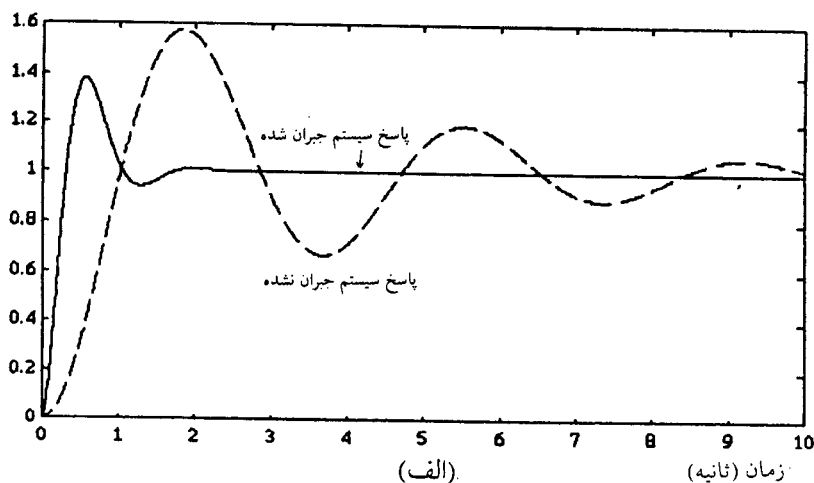


شکل ۶-۲۶ تعیین موقعیت قطب - صفر مطلوب

بنابراین تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s) = \left(\frac{s+0.1}{s+0.03} \right) \left(\frac{s+3/27}{s+11/2897} \right)$$

پاسخهای زمانی سیستم حلقه - بسته جبران نشده و جبران شده به ورودیهای پله واحد و شیب واحد به ترتیب در شکلهای ۶-۲۷ (الف) و (ب) رسم شده‌اند. همانطور که از این شکلها مشاهده می‌شود، رفتار حالت - گذرا و حالت - ماندگار پاسخ بهبود قابل ملاحظه‌ای یافته و مشخصه‌های عملکرد مطلوب برآورده شده‌اند.



شکل ۶-۲۷ پاسخ زمانی سیستم‌های جبران نشده و جبران شده به (الف) ورودی پله واحد (ب) ورودی شیب واحد

۴-۶ طراحی جبران سازها با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

در فصل پنجم با ایده‌های کلی روش پاسخ فرکانسی و رسم نمودارهای بود، نایکوئیست و چارت نیکولز، که ابزار اصلی تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل با روش پاسخ فرکانسی هستند، آشنا شدیم. در بخش ۵-۹، مشخصه‌های عملکرد سیستم براساس پاسخ فرکانس ارایه گردیدند. در این بخش با تغییر دادن مشخصه‌های پاسخ فرکانسی سیستم حلقه - باز توسط جبران سازهای سری پیش فاز، پس فاز و پس - پیش فاز و یا در صورت امکان با تغییر دادن بهره به تنهایی، به مشخصه‌های پاسخ فرکانسی مطلوب داده شده برای سیستم حلقه - بسته خواهیم رسید. عملکرد یک سیستم حلقه بسته توسط M_f ، ω_f و ضریب خطای سیستم K_m تعیین می‌گردند (بخش ۵-۹). مقدار M_f (ستیج تشدید) عمدتاً نشان دهنده ξ (نسبت میرایی) است و لذا مقدار حداکثر فراجش در پاسخ گذرا را تعیین می‌کند. برای یک M_f معین، فرکانس تشدید ω_f تعیین کننده فرکانس طبیعی غیرمیرا می‌باشد که خود نیز زمان پاسخ سیستم را می‌دهد. برای اطلاع از خطای حالت - ماندگار ورودیهای استاندارد نیز از ضریب خطای سیستم K_m استفاده می‌شود.

به طور کلی، یکی از موارد زیر می‌تواند دلیل مناسبی برای تغییر نمودار پاسخ فرکانسی سیستم توسط طراح باشد:

- ۱- سیستم داده شده به ازاء کلیه بهره‌ها ناپایدار است، نمودار پاسخ فرکانسی را باید به گونه‌ای در نزدیکی (-180° ، 0dB) یا ۱- بروی محور حقیقی منفی تغییر داد که سیستم پایدار شود، M_f و ω_f نیز مقادیر مطلوبی داشته باشند.
- ۲- سیستم داده شده پایدار می‌باشد ولی زمان استقرار حالت گذرای آن نامطلوب است. به عبارت دیگر M_f مقدار مناسبی دارد ولی ω_f خیلی کوتاه است. در چنین حالتی ممکن است که بهره مناسب باشد و یا با اندک تغییری مقدار مناسبی پیدا کند، لیکن قسمت فرکانس بالای نمودار باید به گونه‌ای تغییر کند که مقدار ω_f افزایش یابد.
- ۳- سیستم داده شده پایدار با مقادیر M_f و ω_f مناسب، و لذا پاسخ گذرای سیستم مطلوب می‌باشد، لیکن خطای حالت - ماندگار پاسخ بسیار بزرگ است. در این حالت باید مقدار بهره سیستم را بدون تغییر قابل توجهی در مقادیر M_f و ω_f ، افزایش داد. به عبارت دیگر قسمت فرکانس بالای نمودار پاسخ فرکانسی مناسب است ولی قسمت فرکانس پایین آن

مناسب نیست.

۴- سیستم داده شده پایدار و مقدار M_F مطلوب است ولی پاسخ حالت گذرا و پاسخ حالت - ماندگار نامطلوب هستند. بنابراین باید مقادیر ω_F و K_F افزایش داده شوند. قسمت نمودار پاسخ فرکانسی در نزدیکی نقطه $(-180^\circ, 0\text{dB})$ یا ۱- بروی محور حقیقی منفی، باید به گونه‌ای تغییر داده شود که ω_F مطلوب بدست آورده شود و قسمت فرکانس پایین باید به گونه‌ای تغییر داده شود که به مقدار مناسب بتوان بهره را افزایش داد.

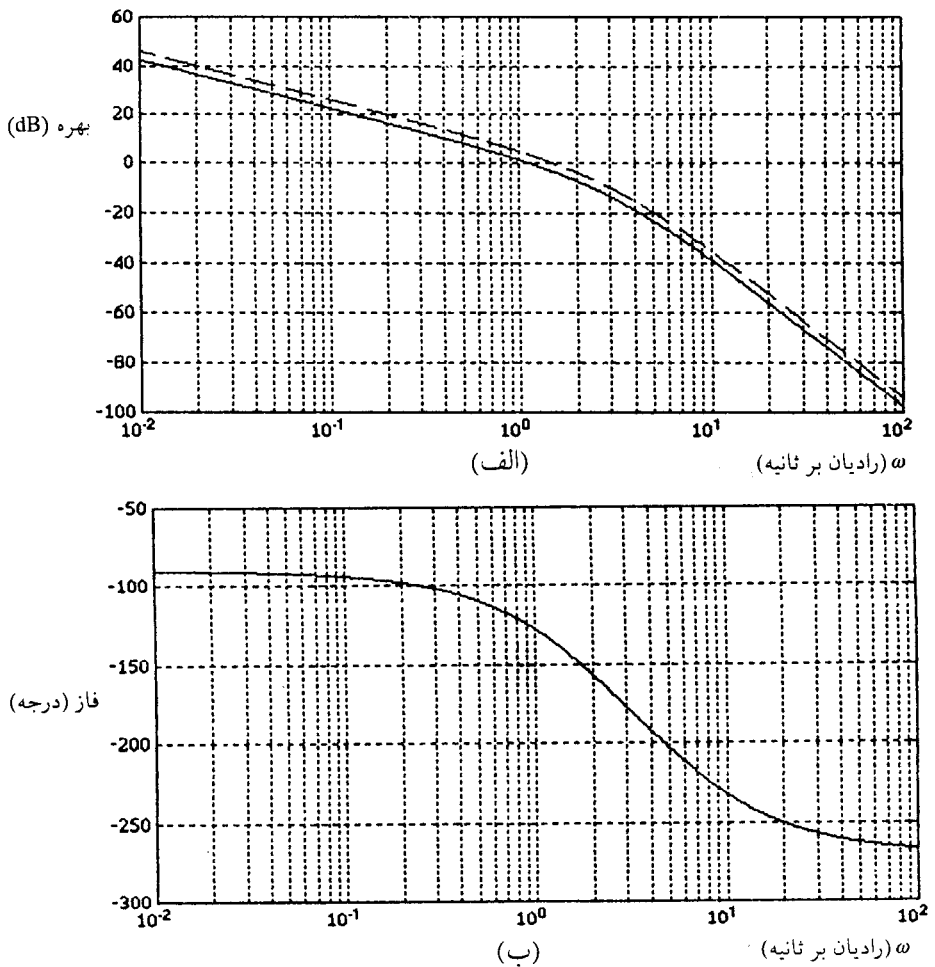
بنابراین هدف از طراحی، تغییر دادن نمودارهای پاسخ فرکانسی توسط تغییر بهره (در صورت امکان) یا یک جبران ساز دینامیکی به گونه‌ای است که مشخصه‌های عملکرد برآورده شوند. قبل از آنکه به تشریح طراحی با جبران سازهای پس فاز، پیش فاز و پس - پیش فاز بپردازیم، با یک مثال نشان خواهیم داد که در برخی از موارد، رسیدن به عملکرد تعیین شده سیستم حلقه - بسته توسط تغییر بهره حلقه - باز K به تنهایی امکان‌پذیر است. افزایش بهره باعث حرکت دادن نمودار بهره برحسب فرکانس به طرف بالا، متناظر با مقدار افزایش بهره، در تمامی فرکانس‌ها است و حال آنکه کاهش بهره باعث حرکت دادن نمودار بهره برحسب فرکانس به طرف پایین، متناظر با مقدار کاهش بهره، در تمامی فرکانس‌ها است. تغییر بهره K ، تغییری در نمودار زاویه فاز برحسب فرکانس ندارد.

مثال ۶-۶

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(j\omega) = \frac{20}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+5)}$$

حاشیه فاز سیستم جبران نشده برابر با 36° است. مطلوب است که حاشیه فاز سیستم 46° باشد. بنابراین باید در فرکانسی که برای آن انتقال زاویه $-134^\circ = -180^\circ + 46^\circ$ است، بهره $|G(j\omega)| = 0\text{dB}$ باشد. نمودار بود تابع تبدیل جبران نشده (با خط چین) در شکل ۶-۲۸ نشان داده شده است. با مراجعه به شکل ۶-۲۸، در می‌یابیم که انتقال فاز برابر با -134° در فرکانس $\omega = 1/1$ (رادیان بر ثانیه) است و بهره در این فرکانس برابر با $3/5\text{dB} +$ است. بنابراین اگر بهره را به میزان $3/5\text{dB}$ ، بر روی کلیه فرکانس‌ها کاهش دهیم، در فرکانس $\omega = 1/1$ (رادیان



شکل ۶-۲۸ (الف) نمودار بهره بر حسب فرکانس برای سیستم مثال ۶-۶ (ب) نمودار زاویه فاز/

بر حسب فرکانس برای سیستم مثال ۶-۶

بر ثانیه) اندازه نمودار برابر با ۰ dB خواهد شد. در این صورت حاشیه فاز مطلوب 46° بدست خواهد آمد. داریم $20 \log x = 3/5$ و لذا $x = 1/496$ برابر با بهره متناظر با ۳/۵ dB است. بهره حلقه - باز سیستم ۲۰ است و با تقسیم این بهره بر ۱/۴۹۶ بهره حلقه - باز جدید ۱۳/۳۷ بدست می آید. بنابراین در سیستم جبران نشده $20 \log 20 = 26/02$ dB و در سیستم

جبران شده توسط کاهش بهره حلقه - باز $22/52\text{dB} = 20 \log 13/37$ ، که مقدار $3/5\text{dB}$ کمتر از مقدار قبلی است.

به طور خلاصه می توان گفت که سیستم حلقه - بسته با تابع تبدیل حلقه - باز داده شده، دارای حاشیه بهره 36° می باشد. با کاهش بهره سیستم حلقه - باز از $K=20$ به $K=13/37$ ، حاشیه فاز سیستم حلقه - بسته 48° خواهد شد.

۶-۴-۱ طراحی جبران سازهای پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۱۷ را در نظر بگیرید. اگر مشخصه های عملکرد برحسب حاشیه فاز، حاشیه بهره، ثابتهای خطای سرعت استاتیکی و یا سایر مشخصه های پاسخ فرکانسی داده شده باشند، باید از روش پاسخ فرکانسی برای طراحی جبران ساز $G_c(s)$ استفاده کرد. فرض کنید که عمل خواسته شده از جبران ساز، تغییر شکل نمودار پاسخ فرکانسی برای فراهم آوردن زاویه پیش فاز کافی جهت خنثی کردن پس فاز اضافی در سیستم جبران نشده باشد. در این حالت (موارد ۱ و ۲ بخش ۶-۴) جبران ساز پیش فاز برای جبران سیستم مناسب است.

مراحل طراحی یک جبران ساز پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی در زیر آمده است:

۱- تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + 1/T}{s + 1/(\alpha T)} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1-4-6)$$

با تعریف $K = \alpha K_c$ ، تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده در شکل ۶-۱۷ با معادله (۱-۴-۶) عبارتست از

$$G_c(s)G(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G(s) \quad (2-4-6)$$

در اولین مرحله طراحی باید بهره K را چنان تنظیم نمود که شرط داده شده بروی ثابت خطای استاتیکی برآورده گردد.

۲- با بهره بدست آمده K از مرحله قبل، نمودار بود $KG(s)$ را رسم کنید. تابع تبدیل $KG(s)$

مربوط به سیستم جبران نشده می باشد ولی بهره آن تنظیم شده است. از نمودار بود رسم شده، حاشیه فاز را تعیین کنید.

۳- زاویه پیش فاز لازم ϕ ، که باید به سیستم اضافه گردد را محاسبه کنید.

۴- از معادله (۶-۲-۷)

$$\sin \phi = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

فاکتور α در جبران ساز پس فاز را تعیین کنید. دقت کنید که α براساس زاویه پیش فاز لازم، که باید توسط جبران ساز فراهم آورده شود، تعیین گردیده است. مرحله بعد تعیین فرکانس های شکست $1/T$ و $1/(\alpha T)$ جبران ساز پیش فاز است. فرکانسی را تعیین کنید که در آن دامنه سیستم جبران نشده $KG(j\omega)$ برابر با $20 \log(1/\alpha)$ باشد و این فرکانس را به عنوان فرکانس تقاطع بهره جدید انتخاب کنید. این فرکانس با معادله (۶-۲-۶) داده شده است و بزرگترین انتقال فاز در این فرکانس رخ می دهد (به شکل ۶-۲ مراجعه کنید).

۵- فرکانس های شکست جبران ساز پیش فاز عبارتند از:

$$\omega = 1/T \text{ صفر جبران ساز پیش فاز}$$

$$\omega = 1/(\alpha T) \text{ قطب جبران ساز پیش فاز}$$

۶- بهره جبران ساز K_e را از $K_e = K/\alpha$ تعیین کنید.

۷- حاشیه فاز سیستم را تعیین کنید. اگر با مقدار مطلوب مطابقت نداشته باشد، موقعیت قطب - صفر جبران ساز را تا حصول نتیجه مناسب تغییر دهید.

مثال ۶-۷

تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{s/2}{s(s+1)}$$

مشخصه های عملکرد مطلوب سیستم به صورت ثابت خطای سرعت استاتیکی K_v برابر 10^{-1} (ثانیه) و حاشیه فاز 45° داده شده اند. برای برآورده ساختن مشخصه های داده شده، از یک جبران ساز پیش فاز استفاده می کنیم.

نخستین قدم در طراحی یک جبران ساز پیش فاز، تنظیم بهره K_e در جبران ساز داده شده با

معادله (۶-۴-۱) است. بنابراین داریم

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \frac{0.2}{s(s+1)}$$

$$= 0.2 K_c \alpha = 15$$

با تعریف $K = K_c \alpha$ ، بدست می آوریم

$$K = 75$$

با انتخاب بهره $K=75$ ، سیستم جبران شده، شرط داده شده بر روی پاسخ حالت - ماندگار را برآورده می سازد.

نمودار بود تابع تبدیل زیر

$$G_1(j\omega) = \frac{15}{j\omega(j\omega + 1)}$$

در شکل ۶-۲۹ رسم شده است. حاشیه های بهره و فاز $G_1(j\omega)$ از شکل ۶-۲۹ بدست آورده می شوند و به ترتیب برابرند با تقریباً $56/49\text{dB}$ و $14/7^\circ$. حاشیه بهره $14/7^\circ$ نشان دهنده یک پاسخ کاملاً نوسانی و لذا نامطلوب است. (پاسخ سیستم جبران نشده به ورودی پله واحد در شکل ۶-۳۰ نشان داده شده است). بنابراین، اگرچه با افزایش بهره مشخصه مطلوب رفتار حالت - ماندگار برآورده شده است، لیکن رفتار گذرای پاسخ بسیار نامطلوب می باشد. مشخصه داده شده برای حاشیه فاز حداقل 45° است. برای بدست آوردن این حاشیه فاز (بدون کاهش بهره K) باید با استفاده از یک جبران ساز پیش فاز، پیش فازی برابر با حدوداً $30/3$ برای جبران زاویه فاز فراهم آورد.

با توجه به اینکه افزودن یک جبران ساز پیش فاز نمودار منحنی دیاگرام بود را تغییر می دهد، فرکانس تقاطع بهره به سمت راست انتقال داده خواهد شد. با در نظر گرفتن این انتقال در فرکانس تقاطع بهره فرض خواهیم کرد که بیشترین پیش فاز لازم حدوداً $35/3$ می باشد. به عبارت دیگر حدوداً 5° برای جبران این انتقال فرکانس تقاطع بهره به زاویه پیش فاز لازم اضافه می گردد.

از آنجاییکه

$$\sin 35/3 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

لذا $\alpha = 0/267$ است. برای تعیین فرکانس‌های شکست، فرکانسی را تعیین می‌کنیم که در آن دامنه سیستم جبران نشده برابر با $-5.73dB$ $(\log(1/\sqrt{0/267}) = -2.0)$ است. این فرکانس که همان فرکانس تقاطع بهره جدید است برابر $\omega = 5/73$ می‌باشد. از آنجاییکه

$$5/73 = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$

لذا

$$\omega_1 = \frac{1}{T} = 2/961$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\alpha T} = 11/0.89$$

بهره جبران ساز نیز عبارتست از

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{75}{0/267} = 280/899$$

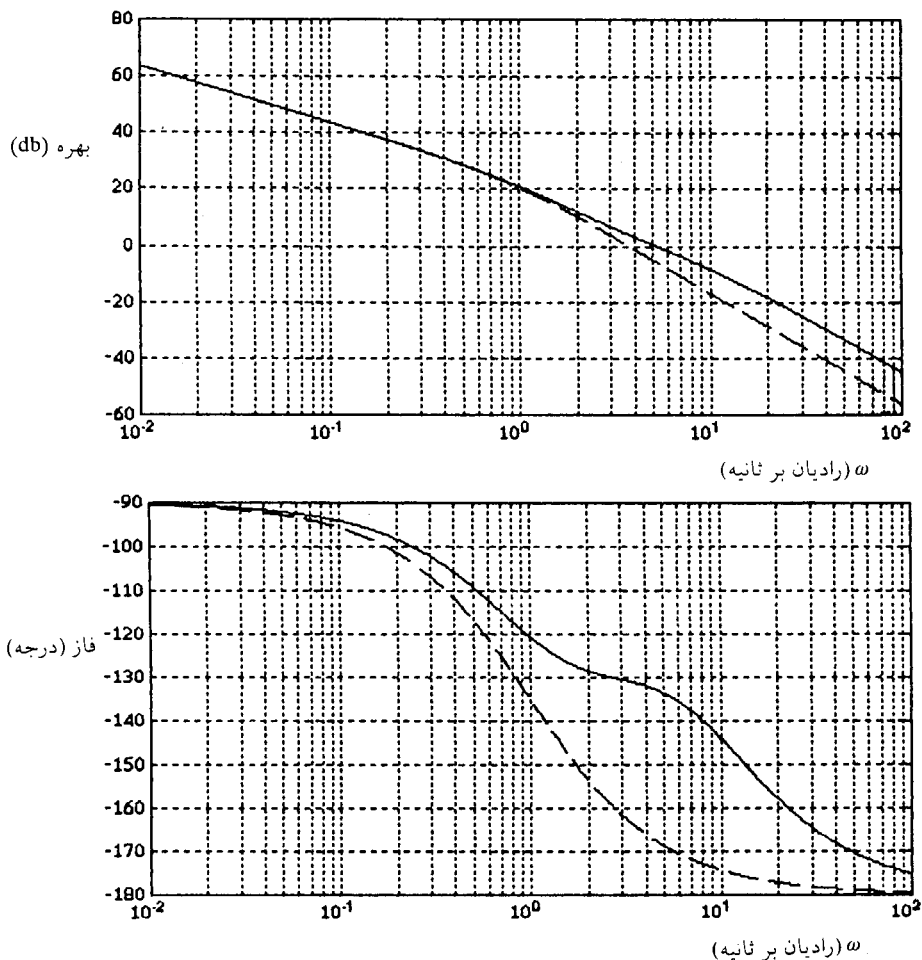
بنابراین تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s) = 280/899 \frac{s + 2/96}{s + 11/0.89}$$

نمودارهای دامنه و زاویه فاز سیستم‌های جبران نشده و جبران شده در شکل ۶-۲۹ رسم شده‌اند. تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده عبارتست از

$$G_c(s)G(s) = 280/899 \frac{s + 2/96}{s + 11/0.89} \frac{0/2}{s(s+1)}$$

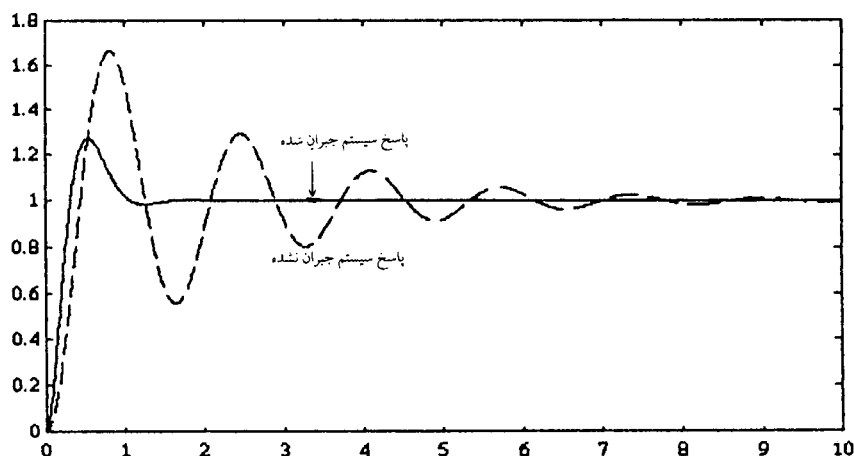
منحنی‌های پیوسته در شکل ۶-۲۹، نمودارهای دامنه و فاز این تابع تبدیل را نشان می‌دهند. حاشیه‌های بهره و فاز سیستم جبران شده به ترتیب عبارتند از ∞dB و 47° که مشخصه طراحی را برآورده می‌سازند. پاسخهای پله واحد سیستم جبران نشده و جبران شده نیز در شکل ۶-۳۰، رسم شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌گردد، پاسخ سیستم جبران نشده نوسانی ولی پاسخ سیستم جبران شده با مقدار حداکثر فراجهدش و زمان استقرار مناسب، بدون نوسانات اضافی است.



شکل ۶-۲۹ دیاگرام بود سیستم‌های جبران نشده و جبران شده، نمودار نشان داده شده با خط چین - نمودار سیستم جبران نشده و نمودار نشان داده شده با خط پیوسته نمودار سیستم جبران شده است.

۲-۴-۶ طراحی جبران سازهای پس فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

اثر جبران ساز پس فاز بروی سیستم جبران نشده، معرفی یک عنصر فاز منفی در ناحیه میانه گستره فرکانسی و اهمیت دادن به پاسخ فرکانس پایین تر در مقایسه با پاسخ فرکانسی بالاتر است. لذا همانند یک فیلتر پایین گذر عمل می کند.



شکل ۶-۳۰ پاسخ زمانی سیستم جبران نشده و جبران شده به ورودی پله واحد

مراحل طراحی یک جبران ساز پس فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی، در زیر آمده است:

۱- تابع تبدیل جبران ساز پس فاز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} \quad (\beta > 1) \quad (3-4-6)$$

با تعریف $K_c \beta = K$ ، تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده در شکل ۶-۱۷ با معادله (۳-۴-۶) عبارتست از

$$G_c(s)G(s) = K \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} G(s) \quad (4-4-6)$$

K را به گونه‌ای تعیین خواهیم کرد که مقدار مطلوب ثابت خطای استاتیکی بدست آورده شود.

۲- با بهره‌ بدست آمده از مرحله ۱ طراحی، نمودار بود سیستم جبران نشده $KG(s)$ را رسم کنید. از نمودار بود رسم شده، حاشیه بهره و حاشیه فاز را تعیین کنید. اگر مشخصه‌های مطلوب حاشیه بهره و فاز برآورده نشده باشند، به عبارت دیگر مقدار حاشیه بهره و حاشیه فاز، مقدار مطلوب نباشد، نخست مقدار مطلوب حاشیه فاز را تعیین کنید. حاشیه

فاز لازم عبارتست از حاشیه فاز معین شده بعلاوه 5° تا 12° فاز اضافی. این 5° تا 12° فاز اضافی جهت جبران کردن پس فاز ایجاد شده توسط جبران ساز پس فاز به مقدار تعیین شده حاشیه فاز اضافه می‌گردد. اکنون فرکانسی را تعیین کنید که در آن زاویه فاز تابع تبدیل حلقه - باز برابر با 180° بعلاوه حاشیه فاز لازم است. این فرکانس به عنوان فرکانس تقاطع بهره جدید انتخاب می‌شود.

۳- برای جلوگیری از اثرات منفی پس فاز ناشی از جبران ساز پس فاز، قطب و صفر جبران ساز پس فاز را باید به مقدار متناهی پایین‌تر از فرکانس تقاطع بهره جدید قرار دهیم. بنابراین فرکانس شکست $\omega = 1/T$ ، متناظر با صفر جبران ساز پس فاز را یک اکتاو تا یک دهه پایین‌تر از فرکانس تقاطع بهره جدید قرار دهید. (این مقدار بستگی به ثابت زمانهای جبران ساز خواهد داشت، دقت کنید که این ثابت زمانها نباید خیلی بزرگ شوند)

۴- تضعیف لازم جهت پایین آوردن منحنی دامنه به dB در فرکانس تقاطع بهره جدید را تعیین کنید. توجه کنید که مقدار این تضعیف برابر با $20 \log \beta$ - است و لذا با این مقدار تعیین شده تضعیف، می‌توان β را محاسبه کرد. سرانجام، فرکانس شکست دوم جبران ساز، متناظر با قطب آن را از $\omega = 1/(\beta T)$ تعیین کنید.

۵- با استفاده از مقادیر بدست آمده K و β بهره جبران ساز را بدست می‌آوریم:

$$K_c = K/\beta \quad (5-4-6)$$

مثال ۸-۶

تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم جبران نشده با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{450}{s(s+5)(s+40)}$$

مطلوب است که سیستم را به گونه‌ای جبران کنیم که ثابت خطای سرعت استاتیکی برابر 1^{-1} (ثانیه) $22/5$ ، حاشیه فاز حداقل 45° و حاشیه بهره حداقل $15dB$ باشد.

برای جبران سیستم از یک جبران ساز پس فاز استفاده می‌کنیم. تابع تبدیل جبران ساز پس فاز با معادله (۳-۴-۶) داده شده است، لذا تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده

عبارتست از

$$G_c(s)G(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \frac{45.0}{s(s+5)(s+40)}$$

با تعریف $K = K_c \beta$ ، K را باید به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرط داده شده بروی ثابت خطای سرعت استاتیکی برآورده شود. بنابراین

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K 45.0}{s(s+5)(s+40)} \\ &= K 2/25 = 22/5 \end{aligned}$$

یا

$$K = 10$$

با بهره $K = 10$ ، سیستم جبران شده، شرط داده شده بروی عملکرد حالت - ماندگار را برآورده خواهد کرد. دیاگرام بود تابع تبدیل

$$G_1(j\omega) = \frac{45.0}{s(s+5)(s+40)}$$

(که در آن بهره سیستم، جبران شده است) در شکل ۶-۳۱ با خط چین رسم شده است. از نمودارهای دامنه و فاز، حاشیه‌های بهره و فاز تقریباً به ترتیب عبارتند از ۳dB و $13/5^\circ$. مقدار مطلوب حاشیه فاز (با توجه به 12° در نظر گرفته شده) 57° می‌باشد. از آنجاییکه فرکانس متناظر با حاشیه فاز 57° برابر $2/783$ رادیان بر ثانیه است، فرکانس قطع بالای جبران ساز را در دو اکتاو پایین‌تر از این فرکانس، یعنی $0/696$ رادیان بر ثانیه، در نظر می‌گیریم. مقدار بهره تابع تبدیل جبران نشده در $0/696 = \omega$ برابر با ۱۶/۹۶۲dB است. از اینرو

$$20 \log \beta = 16/962$$

و بنابراین

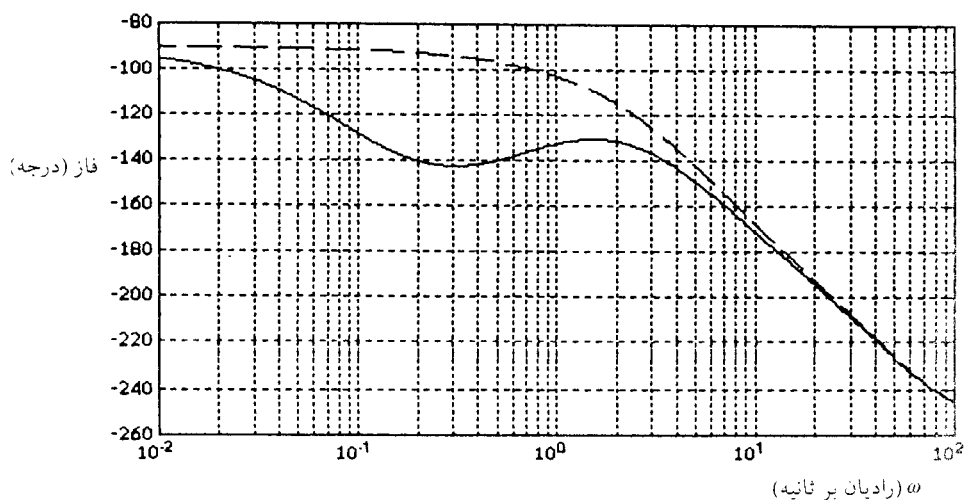
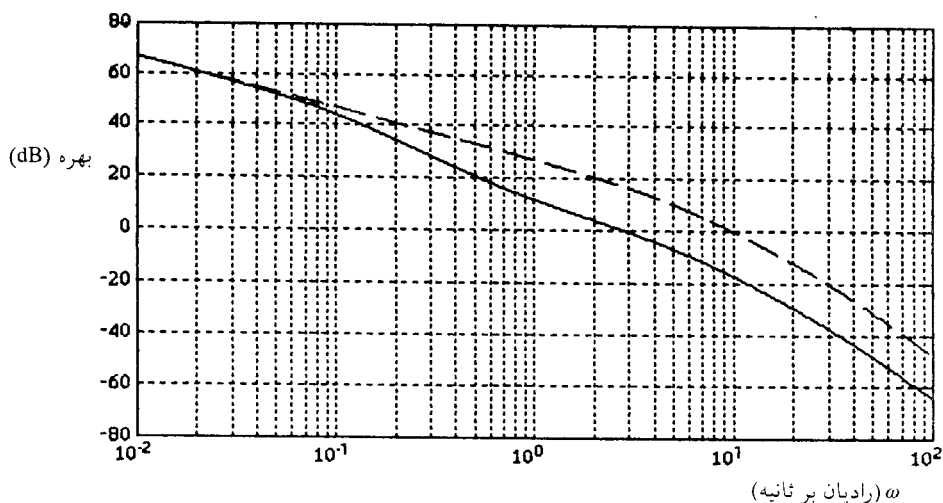
$$\beta = 7$$

فرکانس شکست بعدی جبران ساز که متناظر با قطب آن است، از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\omega = 0/696/7 = 0/099 \quad (\text{رادیان بر ثانیه})$$

بنابراین تابع تبدیل جبران ساز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \frac{14s+1}{10s+1} = K_c (0/14) \frac{s+0/696}{s+0/099}$$



شکل ۳۱-۶ نمودارهای دامنه و فاز تابع تبدیل سیستم جبران نشده و جبران شده

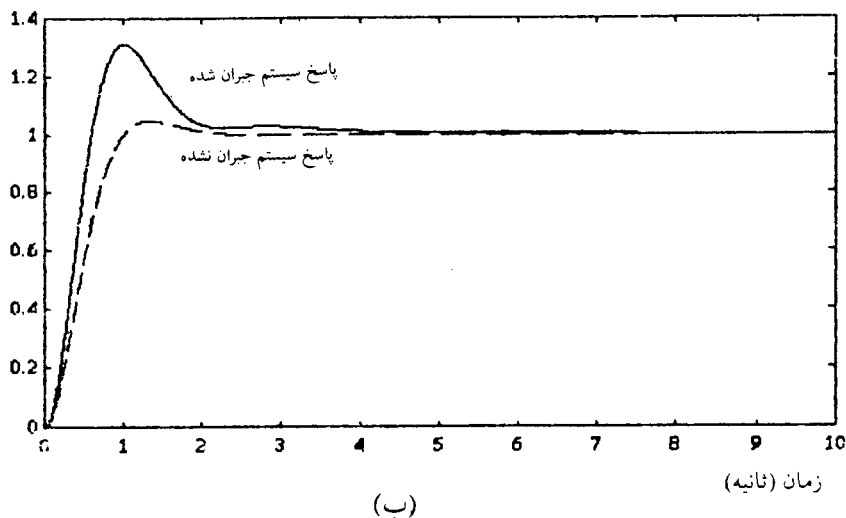
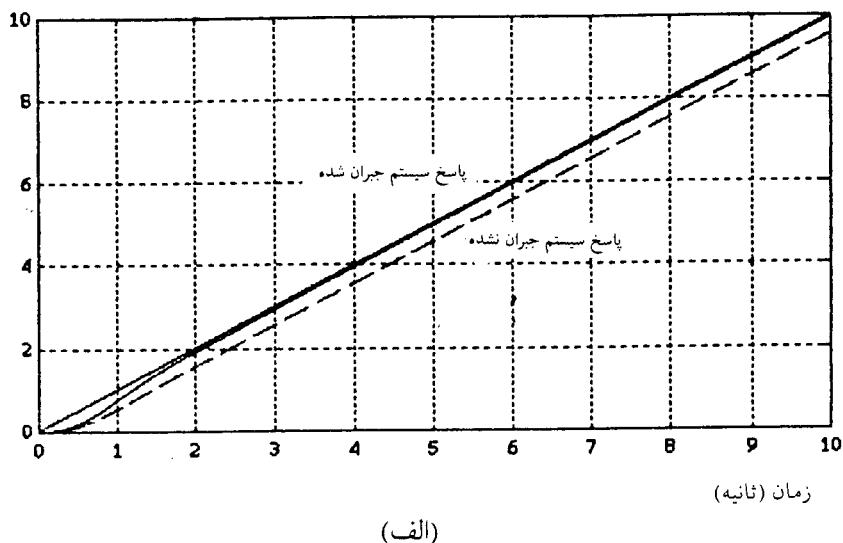
(توجه کنید که مقدار فاز جبران ساز برابر با 10° است). برای تعیین بهره K_c داریم

$$K_c = \frac{K}{\beta} = \frac{10}{V} = 1/43$$

تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده به صورت زیر است

$$G_c(s)G(s) = \frac{900/9(s+0/696)}{s(s+0/99)(s+5)(s+40)}$$

دیاگرام بود (نمودارهای دامنه و زاویه فاز) این تابع تبدیل در شکل ۳۱-۶ رسم شده‌اند. از نمودارهای شکل ۳۱-۶ داریم که حاشیه‌های بهره و فله سیستم جبران شده به ترتیب عبارتند از 20dB و 45° ، که شرایط داده شده را برآورده می‌سازند. پاسخ سیستم‌های جبران نشده و جبران شده نیز به ورودی پله واحد و شیب واحد در شکل ۳۲-۶ رسم شده‌اند.



شکل ۳۲-۶ خروجیهای سیستم جبران نشده و جبران شده به ورودیهای (الف) شیب واحد (ب) پله واحد

نکاتی در رابطه با جبران سازهای پس فاز

۱- با توجه به ماهیت پایین گذر بودن جبران سازهای پس فاز (شکل ۶-۶)، جبران سازهای پس فاز استفاده از بهره بالاتری را در فرکانس های پایین امکان پذیر می سازند، که موجب بهبود عملکرد حالت - ماندگار می شود. همچنین در گستره حساس فرکانسی بالاتر، بهره را کاهش داده و حاشیه فاز را بهبود می بخشد.

۲- فرض کنید که صفر و قطب جبران ساز پس فاز به ترتیب در $s=-p$ و $s=-z$ قرار داشته باشند. مادامیکه صفر و قطب جبران ساز در نزدیکی مبدا هستند و نسبت z/p برابر با فاکتور ضرب کننده لازم برای ثابت خطای سرعت استاتیکی است، موقعیت دقیق صفر و قطب چندان مهم نیست. با توجه به اینکه جبران ساز پس فاز یک قطب، در حوالی صفر و قطب خود، به سیستم حلقه - بسته اضافه می کند (جبران ساز یک درجه، درجه استاتیکی سیستم حلقه - بسته را افزایش می دهد)، و از آنجاییکه قطبهای نزدیک به مبدا بسیار کند هستند و هر چه به مبدا نزدیکتر می شوند، کندتر می گردند لذا باید دقت کرد که صفر و قطب جبران ساز، بدون جهت خیلی نزدیک مبدا قرار داده نشوند. اگرچه صفر جبران ساز اثر قطب حلقه - بسته ایجاد شده را که در نزدیکی آن است بسیار کم می کند ولی پاسخ بسیار کند گذرای ناشی از این قطب، موجب خرابی زمان استقرار سیستم خواهد شد.

۳- تضعیف ناشی از جبران ساز پس فاز، فرکانس تقاطع بهره را به یک نقطه فرکانسی پایین تر انتقال می دهد، که در آن حاشیه فاز قابل قبول باشد. بنابراین جبران ساز پس فاز، باعث کاهش پهنای باند سیستم می گردد. لذا پاسخ گذرای سیستم کندتر خواهد گردید. دقت کنید که منحنی زاویه فاز $G_c(j\omega)G(j\omega)$ در نزدیکی و بالای فرکانس تقاطع بهره جدید، تقریباً تغییری نمی کند.

۴- استفاده از جبران ساز پس فاز، موجب می گردد که در سیستم جبران شده حاشیه پایداری کاهش یابد. برای اجتناب از این پدیده نامطلوب، ثابت زمانی T را باید به اندازه کافی بزرگتر از بزرگترین ثابت زمانی سیستم انتخاب کرد.

۳-۴-۶ طراحی جبران سازهای پس - پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

جبران سازهای پس - پیش فاز برای بهره گرفتن از مزایای هر دو جبران سازهای پس فاز و

پیش فاز طراحی می‌شوند و لذا مراحل طراحی آن براساس ترکیبی از روشهای طراحی برای جبران سازه‌های نامبرده می‌باشد.

تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(\frac{T_1}{\beta} s + 1)(\beta T_2 s + 1)} \quad (6-4-6)$$

که در آن $\beta > 1$. قسمت پیش فاز جبران ساز (قسمت شامل T_1) با اضافه کردن زاویه پیش فاز و افزایش حاشیه فاز در فرکانس تقاطع بهره، منحنی پاسخ - فرکانسی را تغییر می‌دهد. در حالیکه قسمت پس فاز جبران ساز (قسمت شامل T_2)، در نزدیک و بالای فرکانس تقاطع بهره تضعیفی ایجاد می‌کند و توسط آن امکان افزایش بهره در گستره فرکانس پایین پیدا می‌شود، که به نوبه خود به بهبود عملکرد حالت - ماندگار منجر می‌گردد.

مراحل طراحی یک جبران ساز پس - پیش فاز با استفاده از روش پاسخ - کانسی در زیر آمده است:

۱- تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده در شکل ۶-۱۷ با معادله (۶-۴-۶) عبارتست از

$$G_c(s)G(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(\frac{T_1}{\beta} s + 1)(\beta T_2 s + 1)} G(s) \quad (7-4-6)$$

K_c را چنان تنظیم کنید که شرط داده شده بروی ثابت خطای استاتیکی برآورده گردد.

۲- نمودار بود تابع تبدیل $KG(s)$ را رسم کنید. حاشیه بهره و حاشیه فاز سیستم جبران نشده را محاسبه کنید. سپس فرکانس تقاطع بهره جدید را چنان انتخاب کنید که با زاویه پیش فاز لازم، حاشیه فاز مطلوب بدست آورده شود. همانند مرحله ۴ طراحی جبران ساز پیش فاز بخش ۶-۴-۱، با جایگزینی $\alpha = 1/\beta$ ، مقدار β را محاسبه کنید.

۳- پس از تعیین فرکانس تقاطع بهره جدید، فرکانس شکست قسمت پس فاز جبران ساز معادله (۶-۴-۶) را همانند مرحله ۳ طراحی جبران ساز پس فاز بخش ۶-۴-۲ محاسبه می‌کنیم. با تعیین T_2 و β بدست آمده در مرحله قبل، طراحی قسمت پس فاز تکمیل می‌شود.

۴- برای تعیین قسمت پیش فاز جبران ساز از منحنی دامنه نمودار بود تابع تبدیل $G(j\omega)$ ، مقدار دامنه تابع تبدیل را در فرکانس تقاطع بهره جدید پیدا می‌کنیم. جبران ساز پس -

پیش فاز باید نمودار دامنه تابع تبدیل جبران نشده را به گونه‌ای جبران کند که اندازه دامنه در این فرکانس dB ۰ شود. از این شرط، فرکانس شکست لازم برای جبران سازی را تعیین می‌کنیم.

۵- با رسم نمودار بود تابع تبدیل حلقه - باز جبران شده $G_c(j\omega)G(j\omega)$ ، دسترسی به مشخصه‌های عملکرد مطلوب را بررسی می‌کنیم. در صورت عدم دسترسی به این مشخصه‌ها، طراحی را دوباره انجام می‌دهیم.

مثال ۶-۹

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 0.6)(s + 2)}$$

مطلوب است که ثابت خطای سرعت استاتیکی 15^{-1} (ثانیه)، حاشیه فاز 50° و حاشیه بهره سیستم جبران شده حداقل 15dB باشد.

برای جبران سیستم داده شده (که دارای پاسخ گذرا و ماندگار نامناسبی می‌باشد) از یک جبران ساز پس - پیش فاز داده شده با تابع تبدیل $(6 - 4 - 6)$ استفاده می‌کنیم. از شرط داده شده بروی ثابت خطای سرعت استاتیکی، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} K_c &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) \frac{1}{s(s + 0.6)(s + 2)} \\ &= \frac{K_c}{1/2} = 15 \end{aligned}$$

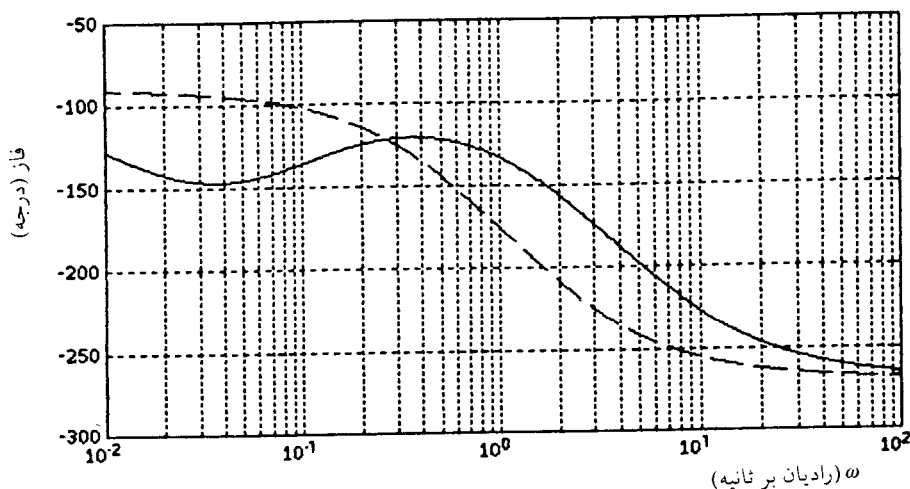
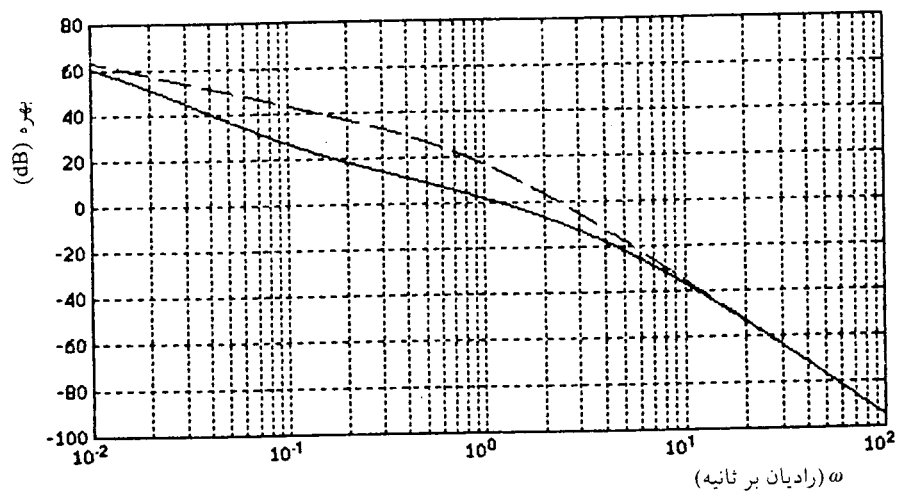
و یا

$$K_c = 18$$

دیاگرام بود سیستم جبران شده زیر

$$G_1(j\omega) = \frac{18}{j\omega(j\omega + 0.6)(j\omega + 2)}$$

در شکل ۶-۳۳ رسم شده است. زاویه فاز این تابع تبدیل حدوداً 230° - است، که نشان می‌دهد زاویه پیش فاز لازم در این حالت 50° می‌باشد. با در نظر گرفتن خطای معمول در



شکل ۶-۳۳ نمودارهای دامنه و فاز تابع تبدیل سیستم جبران نشده و جبران شده

جبران ساز آن را 55° فرض می‌کنیم.

نخستین قدم در طراحی یک جبران ساز پس - پیش فاز، انتخاب یک فرکانس تقاطع بهره جدید است. از نمودار زاویه فاز تابع تبدیل $G_1(j\omega)$ ، داریم که زاویه فاز $G_1(j\omega)$ در $\omega = 1/1$ (رادیان بر ثانیه)، برابر با -180° است. می‌توان فرکانس تقاطع بهره جدید را $1/1$ (رادیان بر ثانیه) انتخاب کرد. لذا زاویه پیش فاز لازم در $\omega = 1/1$ (رادیان بر ثانیه) حدوداً 55° می‌باشد.

دقت کنید که این زاویه را می‌توان با یک جبران ساز پس - پیش فاز فراهم آورد. بالاترین زاویه پیش فاز ϕ که از قسمت پیش فاز جبران ساز فراهم آورده می‌شود، رابطه زیر را برآورده می‌سازد

$$\alpha = \frac{1}{\beta} = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}$$

از اینرو

$$\beta = 10$$

با تعیین فرکانس تقاطع بهره جدید، فرکانس شکست قسمت پس فاز از جبران ساز پس - پیش فاز را تعیین می‌کنیم. با انتخاب $\omega = 1/T_p$ (صفر قسمت پس فاز جبران ساز) یک دهه پایین فرکانس تقاطع بهره جدید، تابع تبدیل قسمت پس فاز جبران ساز به صورت زیر بدست می‌آید

$$\frac{s + 0.11}{s + 0.011}$$

برای طراحی قسمت پیش فاز تابع تبدیل جبران ساز، نخست مقدار دامنه تابع تبدیل را در فرکانس تقاطع بهره جدید پیدا می‌کنیم. از شکل ۶-۳۳ داریم که $G_c(j1/1)$ برابر با ۱۵dB است. بنابراین جبران ساز پس - پیش فاز باید نمودار دامنه تابع تبدیل جبران نشده را به اندازه ۱۵dB در (رادیان بر ثانیه) $\omega = 1/1$ جبران کند. برای آورده ساختن این شرط می‌توان خط مستقیمی با شیب ۲۰dB رسم کرد، که از نقطه $(1/1)$ رادیان بر ثانیه و ۱۵dB - عبور کند. نقاط قطع این خط با خط‌های ۰dB و ۲۰dB - فرکانس‌های شکست قسمت پیش فاز جبران ساز را بدست خواهند داد. بنابراین، تابع تبدیل قسمت پیش فاز جبران ساز پس - پیش فاز به صورت زیر بدست خواهد آمد

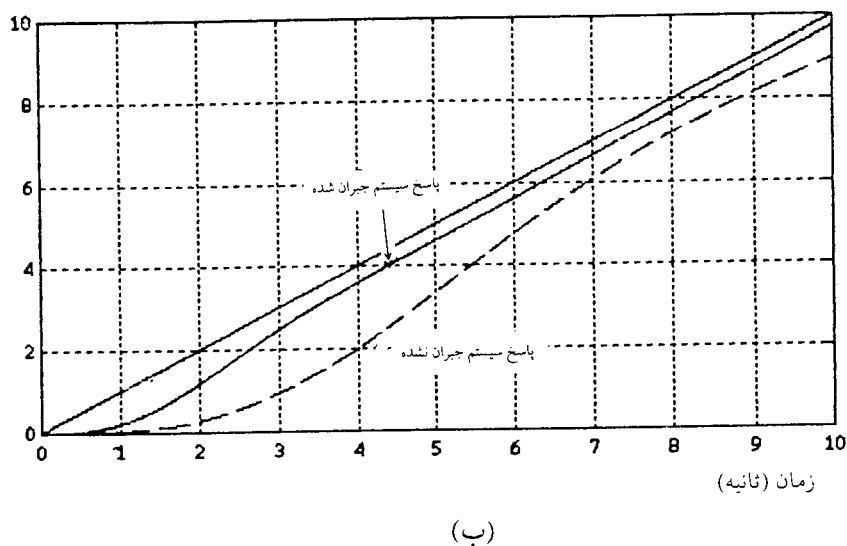
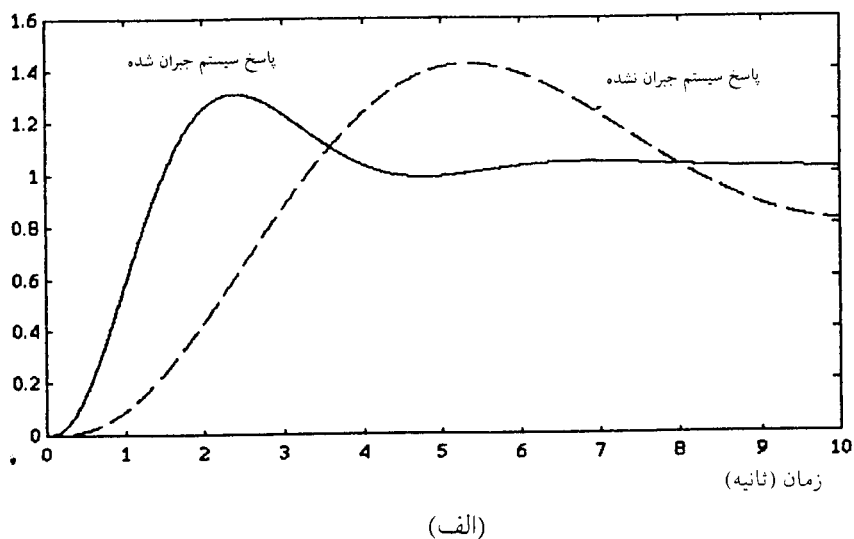
$$\frac{s + 0.65}{s + 6/5}$$

با ترکیب قسمتهای پس فاز و پیش فاز جبران ساز، تابع تبدیل جبران ساز عبارتست از

$$G_c(s) = \left(\frac{s + 0.11}{s + 0.011} \right) \left(\frac{s + 0.65}{s + 6/5} \right)$$

دیagram بود سیستم جبران شده $G_c(j\omega)G(j\omega)$ ، در شکل ۶-۳۳ رسم شده است. حاشیه‌های بهره و فاز سیستم جبران شده به ترتیب حدوداً عبارتند از ۱۵(dB) و 45° ، بنابراین کلیه

ملزومات طراحی برآورده شده است و پاسخهای پله واحد و شیب واحد سیستم‌های جبران نشده و جبران شده در شکل‌های ۳۴-۶ (الف) (ب) نشان داده شده‌اند.



شکل ۳۴-۶ خروجیهای سیستم جبران نشده و جبران شده به ورودیهای (الف) پله واحد (ب) شیب واحد

۴-۴-۶ جبران سازی با استفاده از چارت نیکولز

اصول طراحی جبران سازها با استفاده از چارت نیکولز، همان اصول طراحی جبران سازها با استفاده نمودارهای بود و نایکوئیست است. در اینجا نیز باید جبران سازی طراحی گردد تا چارت نیکولز را به گونه‌ای تغییر شکل دهد که مشخصه‌های عملکرد مطلوب پاسخ فرکانسی بدست آیند. با توجه به اینکه طراحی جبران سازهای پس فاز، پیش فاز و پس - پیش فاز را بطور مفصل در بخشهای ۴-۶-۱ تا ۴-۶-۳ براساس مکان ریشه و نمودارهای بود بررسی کردیم، لذا در این بخش بدون ارایه مجدد جزئیات مراحل طراحی و جبران سازها تنها با بررسی دو مثال، کاربرد چارت نیکولز را در طراحی سیستم‌های کنترل نشان خواهیم داد. در مثال اول جبران سازی سیستم حلقه - باز با تغییر بهره به تنهایی امکان پذیر است و در مثال دوم از جبران ساز پیش فاز برای طراحی جبران ساز مناسب، سود خواهیم جست.

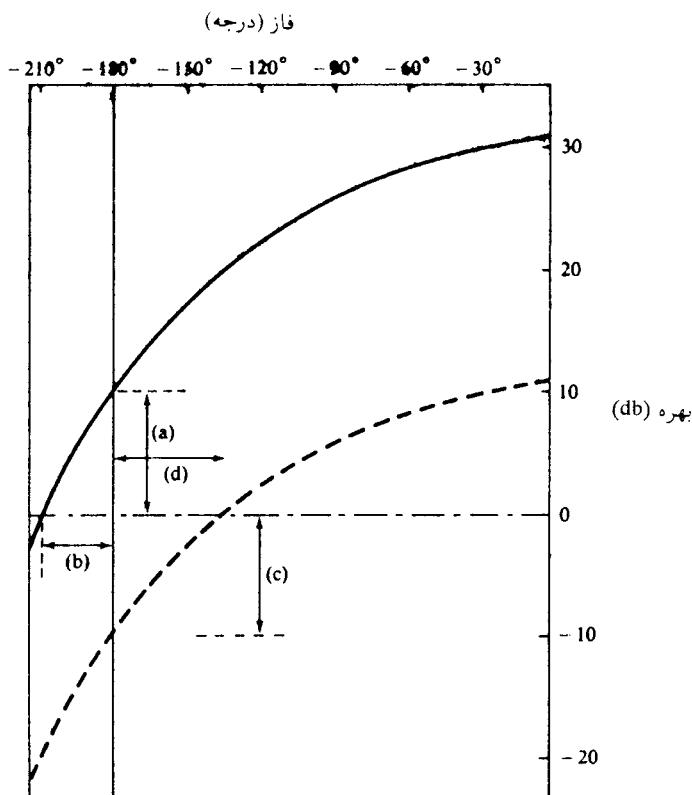
مثال ۶-۱۰

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(j\omega) = \frac{200K}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

نمودار بهره برحسب فاز این تابع تبدیل برای $K=1$ در شکل ۴-۶ رسم شده است. مطلوب آن است که سیستم حلقه - بسته دارای حاشیه فاز حداقل 40° و حاشیه بهره بین 8 تا 12 dB باشد. همانطور که از شکل ۴-۶ مشاهده می‌گردد، حاشیه فاز سیستم جبران نشده تقریباً $30/6^\circ$ و حاشیه بهره آن $10/5 \text{ dB}$ است. با توجه به منفی بودن حاشیه‌های بهره و فاز، سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد ناپایدار است. در فرکانسی که زاویه فاز 180° می‌باشد، بهره تابع تبدیل جبران نشده $10/5 \text{ dB}$ است. اگر این بهره را به مقدار 20 dB کاهش دهیم، بهره کلی سیستم $9/5 \text{ dB}$ در زاویه فاز 180° خواهد بود و لذا حاشیه فاز سیستم $9/5 \text{ dB}$ شده که در گستره تعیین شده قرار دارد.

افزایش بهره K باعث بالابردن نمودار بهره برحسب فرکانس برروی کلیه فرکانس‌ها شده و حال آنکه کاهش بهره K باعث پایین آوردن نمودار بهره برحسب فرکانس به همان مقدار در کلیه فرکانس‌ها می‌شود. بنابراین برای آنکه نمودار شکل ۴-۶ را به مقدار 20 dB کاهش دهیم



شکل ۶-۳۵ نمودار بهره بر حسب فاز برای مثال ۶-۱۰

سیستم جبران نشده، $K=1$ (الف) حاشیه بهره (ب) حاشیه فاز

سیستم جبران شده، $K=0.1$ (ج) حاشیه بهره (د) حاشیه فاز

بهره K را برابر با 0.1 قرار می‌دهیم. با محاسبه حاشیه فاز پس از این جبران سازی توسط بهره در می‌یابیم که زاویه فاز سیستم در 0 dB برابر با $-135/5^\circ$ است و لذا حاشیه فاز تقریباً $44/5^\circ$ می‌باشد که از مقدار حداقل تعیین شده بالاتر است.

چارت نیکولز یک جبران ساز پیش فاز در شکل ۶-۴ نشان داده شده است. زاویه فاز این جبران ساز در گستره میانه فرکانسی مثبت است. برای مقادیر کوچکتر α ، مقدار ستیج فاز مثبت‌تر شده و مقدار بهره حالت - ماندگار بر حسب dB بزرگتر می‌شود ($\omega \rightarrow 0$).

چارت نیکولز یک جبران ساز پس فاز در شکل ۶-۸ نشان داده شده است. زاویه فاز این

جبران ساز در گستره میانه فرکانسی منفی است. برای مقادیر بزرگتر β مقدار ستیغ فاز منفی تر شده و مقدار بهره حالت - ماندگار برحسب dB بزرگتر می شود ($\omega \rightarrow 0$).

مثال ۶-۱۱

تابع تبدیل حلقه - باز زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{20}{j\omega(j\omega + 2)(j\omega + 10)}$$

چارت نیکولز این تابع تبدیل در شکل ۶-۳۶، نشان داده شده است. از چارت نیکولز داریم که حاشیه فاز تابع تبدیل جبران نشده $60^\circ/40$ و حاشیه بهره آن ۲۱/۶dB است. مطلوب است که حاشیه بهره سیستم جبران شده بین ۸ تا ۱۲ dB باشد و حاشیه فاز آن نیز بین 25° تا 30° باشد. همچنین شرایط حالت - ماندگار نیز تغییر محسوسی نکنند.

دقت کنید که در سیستم جبران نشده، رفتار حالت - ماندگار پاسخ رضایتبخش است، لیکن پاسخ گذرای آن بسیار کند است. شرایط عملکرد جدید موجبات سریعتر شدن پاسخ گذر و حفظ حالت - ماندگار را فراهم می آوردند.

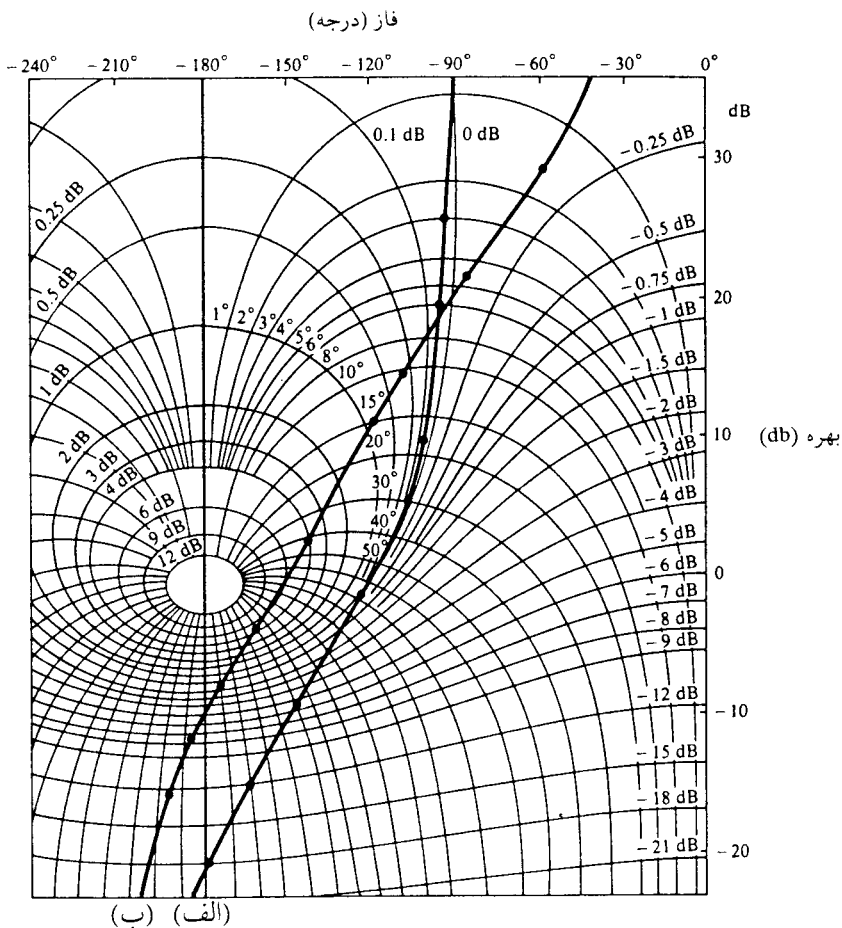
فرکانسی که در آن زاویه فاز تابع تبدیل جبران نشده، برابر با 180° - است، $4/472$ رادیان بر ثانیه است و در این فرکانس باید یک افزایش ۱۲dB بهره داشته باشیم، ضمن آنکه فاز تابع تبدیل تغییر چندانی در این فرکانس نکند.

برای افزایش بهره به مقدار $12/04$ ، می توان K_c را برابر با ۴ قرار داد. برای آنکه در فرکانس های پایین این افزایش بهره باعث تغییر رفتار حالت - ماندگار نشود، باید آن را توسط رفتار جبران ساز در این ناحیه فرکانسی جبران کنیم. در واقع از تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز داریم

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) = \alpha = \frac{1}{4}$$

و لذا $\alpha = 0/25$. دقت کنید که در فرکانس های پایین، بهره کلی سیستم همانند قبل یک شده و در فرکانس های بالا بهره سیستم ۱۲/۰۴dB افزایش خواهد داشت.

اگر تغییری در زاویه فاز تابع تبدیل جبران نشده، در فرکانسی که برای آن بهره کلی ۱۲/۰۴dB - بوده رخ ندهد، این فرکانس فرکانس خواهد شد که در آن بهره کلی برای $K_c G(s)$ (تابع تبدیل جبران نشده با تنظیم بهره) dB خواهد بود. با بکارگیری این فرکانس و معادله



شکل ۳۶-۶ چارت نیکولز مثال ۱۱-۶ (الف) سیستم جبران نشده (ب) سیستم جبران شده

زاویه فاز، حاشیه فاز سیستم را تعیین خواهیم کرد. با حل معادله زیر

$$|G(j\omega)| = \frac{20}{\omega(m^2+4)^{1/2}(m^2+100)} = 0.25 \text{ [} = -12.04 \text{ dB]}$$

داریم $\omega = 2/545$ رادیان بر ثانیه، در این فرکانس زاویه فاز تابع تبدیل را پیدا می‌کنیم

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1} \left[\frac{\omega}{2} \right] - \tan^{-1} \left[\frac{\omega}{10} \right] = -154^\circ$$

و لذا حاشیه فاز تابع تبدیل $۲۵/۴^{\circ}$ است که در گستره تعیین شده ۲۵° تا ۳۵° می باشد. با این حاشیه بهره و حاشیه فاز اهداف طراحی برآورده شده اند و تنها مسئله تعیین فرکانس شکست یا صفر تابع تبدیل جبران ساز است که با انتخاب T باید به گونه ای تعیین گردد که تقریباً هیچ تغییر فازی در $\omega = ۲/۴۵۴$ رادیان بر ثانیه رخ ندهد. با سعی و خطا می توان دریافت که انتخاب $\frac{1}{\alpha T} = \frac{4}{T} < ۰/۲۴۵$ ، تضمین خواهد کرد که هیچ تغییر فازی از ناحیه جبران ساز در $\omega = ۲/۴۵۴$ رادیان بر ثانیه رخ نمی دهد و از اینرو می توان به عنوان نمونه $1/(\alpha T) = ۰/۱$ و $1/T = ۰/۰۲۵$ را انتخاب کرد. بنابراین تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز مناسب برای برآورده ساختن شرایط عملکرد داده شده عبارتست از

$$G_c(j\omega) = \frac{4(j\omega + ۰/۰۲۵)}{j\omega + ۰/۱}$$

نمودار چارت نیکولز تابع تبدیل حلقه - باز جبران شده در شکل ۶-۳۶ نشان داده شده است. فرکانسی که در آن بهره ۰ dB است، تقریباً $\omega = ۲/۴۵۳$ رادیان بر ثانیه است و حال آنکه این فرکانس $\omega = ۰/۹۰۷$ رادیان بر ثانیه در سیستم جبران نشده بوده است. بنابراین با بکارگیری جبران ساز پیش فاز پهنای باند سیستم افزایش پیدا می کند و پاسخ گذرای سیستم به مقدار قابل ملاحظه ای بهبود یافته است. بعلاوه حاشیه های بهره و فاز نیز به ترتیب $۹/۹$ dB و $۲۷/۲^{\circ}$ هستند که در حد قابل قبولی می باشند.

مسایل

۶-۱. مدار الکترونیکی زیر با استفاده از تقویت کننده های عملیاتی را در نظر بگیرید:

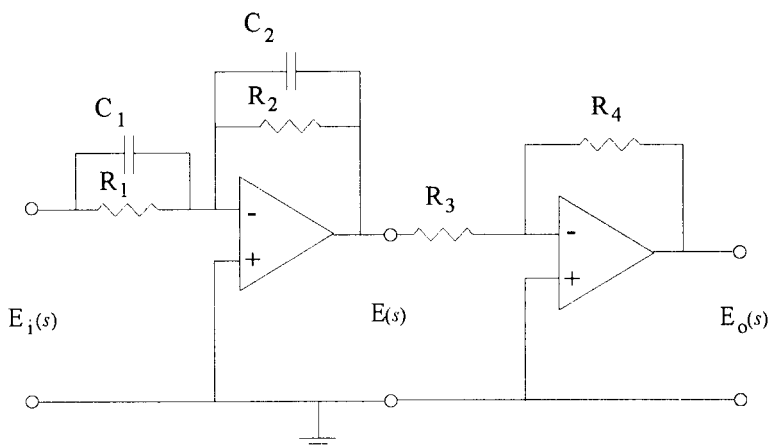
(الف) تابع تبدیل مدار را بنویسید.

(ب) نشان دهید که با انتخاب مناسب پارامترهای R_1 ، R_2 و C_1 ، C_2 این مدار می تواند تحقق فیزیکی یک جبران ساز پیش فاز یا پس فاز باشد.

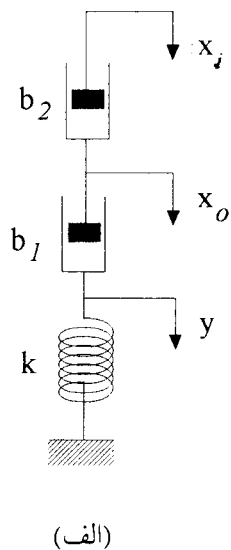
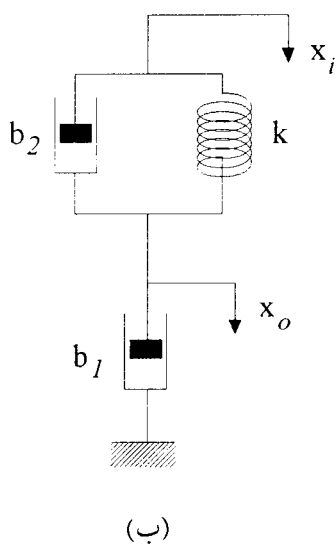
۶-۲. سیستم های مکانیکی زیر را در نظر بگیرید:

(الف) نشان دهید که سیستم مکانیکی شکل ۶-۳۸ (الف)، تحقق مکانیکی یک جبران ساز پیش فاز است.

(ب) نشان دهید که سیستم مکانیکی شکل ۶-۳۸ (ب)، تحقق مکانیکی یک جبران ساز پس فاز است.

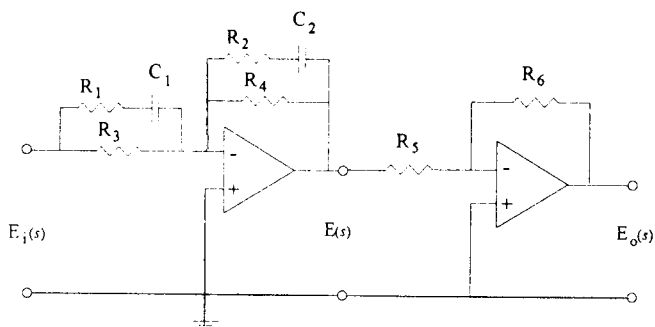


شکل ۶-۳۷



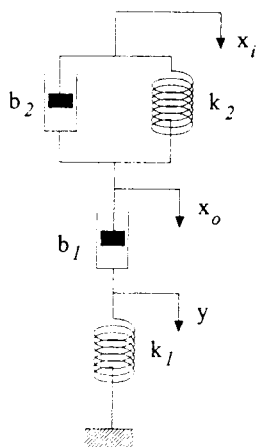
شکل ۶-۳۸

۳-۶. مدار الکترونیکی زیر با استفاده از تقویت کننده‌های عملیاتی را در نظر بگیرید:
 نشان دهید که این مدار تحقق فیزیکی یک جبران ساز پس - پیش فاز است.



شکل ۶-۳۹

۴-۶. مدار مکانیکی زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۶-۴۰

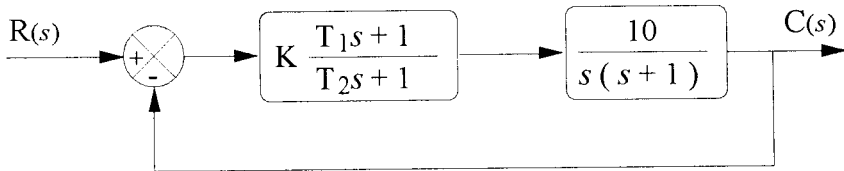
نشان دهید که این مدار تحقق مکانیکی یک جبران ساز پس - پیش فاز است.

۵-۶. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

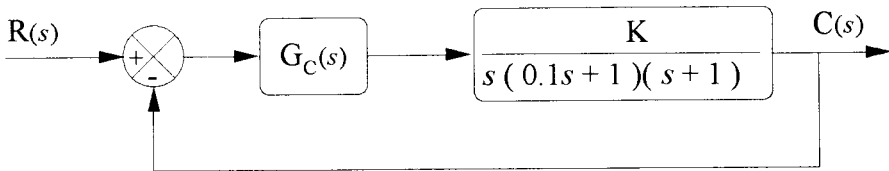
بهره K را چنان تعیین کنید که نسبت میرایی قطبهای حلقه - بسته سیستم ۵/۰ باشند.

۶-۶. مقادیر K ، T_1 و T_2 سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۴۱ را چنان پیدا کنید که، نسبت میرایی و فرکانس طبیعی غیر میرای قطبهای غالب حلقه - بسته سیستم به ترتیب، $\xi = 0.5$ و $\omega_n = 3$ (رادیان بر ثانیه) باشند.



شکل ۶-۴۱ سیستم کنترل مسئله ۶-۶

۷-۶. سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۶-۴۲ را در نظر بگیرید. یک جبران ساز پیش فاز $G_C(s)$ چنان طراحی کنید که، حاشیه بهره سیستم حداقل ۸dB، حاشیه فاز سیستم 45° و ثابت خطای سرعت K_v برابر $4/0$ (ثانیه) $^{-1}$ باشند.



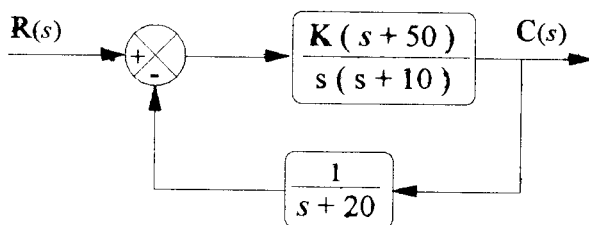
شکل ۶-۴۲ سیستم کنترل مسئله ۶-۷

۸-۶. تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{25}{s(1 + \frac{1}{4}s)(1 + \frac{1}{16}s)}$$

مطلوب است که حاشیه‌های بهره و فاز سیستم به ترتیب حداقل ۱/۵dB و 15° باشند. پایداری سیستم حلقه - باز را بررسی کرده و با طراحی یک جبران ساز مناسب پیش فاز سیستم حلقه - بسته را جبران کنید.

۹-۶. برای سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۴۳ بهره K را چنان تعیین کنید که حاشیه فاز سیستم حلقه - بسته حداقل 30° و حاشیه بهره آن حداقل ۱۰dB باشد.



شکل ۶-۴۳ سیستم کنترل مسئله ۶-۹

۱۰-۶. تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{40}{s(s+0.5s)(1+0.25s)}$$

سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد با یک جبران ساز سری

$$G_c(s) = \frac{0.1(1+0.1s)}{1+0.01s}$$

جبران شده است. با رسم مکان ریشه سیستم جبران نشده و سیستم جبران شده، اثر جبران سازی را بررسی کنید.

۱۱-۶. تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K_v}{s(1+0.25s)(1+0.625s)}$$

با رسم نمودار بود سیستم جبران نشده، پایداری آنرا بررسی کنید. یک جبران ساز پس - پیش فاز چنان طراحی کنید که حاشیه بهره سیستم جبران شده حداقل 50° باشد.

۱۲-۶. تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$$

با رسم نمودار بود سیستم جبران نشده، یک جبران ساز پس - پیش فاز چنان طراحی کنید که نسبت میرایی قطبهای حلقه - بسته 0.5 ، فرکانس طبیعی غیر میرای آنها 5 (رادیان بر ثانیه) و ثابت خطای سرعت استاتیکی سیستم جبران شده 10^{-1} (ثانیه) باشد.

۱۳-۶- تابع تبدیل جبران نشده سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s + 1)}$$

با رسم نمودار بود سیستم، یک جبران ساز پس فاز، چنان طراحی کنید که ثابت خطای سرعت استاتیکی آن حداقل 10^{-1} (ثانیه) بوده و حاشیه فاز آن نیز 45° باشد.

۱۴-۶- تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K}{s^2}$$

با بکارگیری نمودار مکان ریشه سیستم، جبران ساز پیش فازی چنان طراحی کنید که سیستم جبران شده مشخصه‌های زیر را برآورده سازد:

زمان استقرار حداکثر ۴ ثانیه ، فراجشش حداکثر برای پاسخ پله واحد کمتر از ۳۰٪

۱۵-۶- سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۴۴-۶ را در نظر بگیرید. بهره‌های K و K_h را

چنان تعیین کنید که مشخصه‌های طراحی زیر برآورده گردند:

۱- نسبت میرایی قطبهای حلقه - بسته برابر با ۵/۰

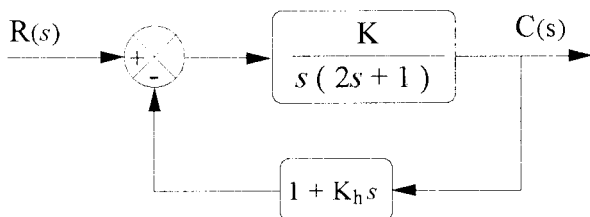
۲- زمان استقرار کوچکتر یا مساوی ۲ ثانیه

۳- ثابت خطای سرعت استاتیکی بزرگتر یا مساوی 10^{-1} (ثانیه)

$$0 < K_h < 1$$

۱۶-۶- تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{40}{s(s+2)(s+8)}$$



شکل ۴۴-۶ سیستم کنترل مسئله ۱۵-۶

یک جبران ساز پیش فاز برای سیستم چنان طراحی کنید که حاشیه فاز آن 45° و حاشیه بهره آن 10dB باشند. این جبران ساز را با استفاده از (الف) دیاگرام بود، (ب) چارت نیکولز طراحی کنید.

۱۷-۶. تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+10)}$$

یک جبران ساز پس فاز برای سیستم چنان طراحی کنید که حاشیه فاز آن 45° و حاشیه بهره آن 10dB باشند. این جبران ساز را با استفاده از (الف) مکان ریشه (ب) چارت نیکولز طراحی کنید.

- [6-1] Truxal J. G., *Control systems synthesis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.
- [6-2] Evans W. R., *Control systems synthesis by the root locus method*, Trans. AIEE, Vol. 69, pp 66, 1950.
- [6-3] Horowitz I. M., *Synthesis of feedback systems*, Academic Press, 1963.
- [6-4] MacFarlane A. G. J., *Frequency response methods in control systems*, IEEE Press, 1979.
- [6-5] Bode H. W., *Network analysis and feedback design*, New York, Van Nostrand Reinhold, 1945.
- [6-6] Ziegler J. G. and Nichols N. B., *Optimum settings for automatic controllers*, ASME Trans, 64, pp 759-768, 1942.
- [6-7] Astrom K. J. and B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Addison-Wesley, 1995.
- [6-8] Leigh J. R., *Applied control theory*, IEE Series in Control Engineering, No. 18, 1987.
- [6-9] Marshall J. E., *Control of Time delay systems*, IEE Series in Control Engineering, No. 10., 1978.
- [6-10] Porter B., *Genetic design of control systems*, J. SICE, Vol. 34, No. 5, May 1995.

کتاب شناسی

در این فصل تنها جبران سازه‌های سری مورد بررسی قرار گرفته‌اند، برای آشنایی با سایر روشهای جبران سازی (مانند جبران سازی پیشرو و فیدبک) می‌توان به مراجع [11] و [3] مراجعه کرد. مراجع [6-1]، [6-3]، [6-4] و [6-5] جزء اولین کتابهایی هستند که در زمینه طراحی سیستم‌های کنترل کلاسیک نوشته شده‌اند، لذا برای بررسی اولین روشهای طراحی سیستم‌های کنترل می‌توان به این مراجع مراجعه نمود.

روشهای بسیاری برای تعیین قطب و صفر جبران سازه‌های پس فاز، پیش فاز و پس - پیش فاز وجود دارد. یکی از سر راست‌ترین این روشها در مرجع [2] آورده شده است. روشهای مؤثر دیگری نیز برای تعیین قطبها و صفرهای جبران سازه‌ها وجود دارند، برای مثال می‌توان به روشهای ارایه شده در مراجع [1]، [3]، [4] و [25] اشاره کرد، که عمده‌تاً با روشهای ارایه شده در [2] متفاوت می‌باشند و در طراحی سیستم‌های خطی کنترل به طور مؤثری می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. مبحث مهم جبران سازی با حذف صفر - قطب در فصل نهم [3] مورد بررسی قرار گرفته است. کنترل کننده‌های PID نیز که به صورت حالت خاصی از جبران سازه‌ها در این فصل ارایه گردیدند، خود از مهم‌ترین نوع کنترل کننده‌های صنعتی می‌باشند. برای مطالعه این کنترل کننده‌ها و طراحی آنها با مکان ریشه و نمودارهای پاسخ فرکانس به مراجع [2] و [3] مراجعه شود. روشهای تنظیم پارامترهای این کنترل کننده‌ها در فصل هشتم [6-7]، چهارم [6-8] و همچنین مقاله [6-6] مفصلاً مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مرجع [6-8] روشهای مختلف طراحی کنترل کننده‌های کاربردی را به طور نسبتاً ساده‌ای ارایه کرده است. برای یک روش تنظیم هوشمند پارامترهای کنترل کننده PID به مرجع [6-10] مراجعه کنید.

طراحی جبران سازه‌ها با چارت نیکولز نیز به طور مفصل در مراجع [1] و [3]، آمده است. مرجع [17]، روشهای طراحی را به طور خلاصه فشرده با ارایه فلوچارت مناسب برای سیستم‌های زمان - پیوسته و زمان - گسسته آورده است و برای یک مراجعه سریع، و سطحی مناسب است. در مرجع [18] تحقق فیزیکی بسیاری از کنترل کننده‌ها و جبران سازه‌ها، به صورت مدارات الکترونیکی داده شده است و لذا برای یک مطالعه کاربردی و سخت‌افزاری کنترل کننده‌ها و جبران سازه‌ها مناسب می‌باشد.

یکی از مراجعی که کاربرد نمودارهای نایکوئیست و معکوس آنها را در طراحی بطور

مختصر در نظر گرفته است [5] می باشد. برای بررسیهای ساده در طراحی به کمک نمودارهای نایکوئیست از این مرجع استفاده شود.

بسیاری از سیستم های صنعتی دارای تأخیر می باشند. از اینرو طراحی سیستم های کنترل برای سیستم های تأخیر دار می تواند بسیار مهم باشد. مرجع [6-9] این مطلب را به طور مشخص مورد بحث قرار داده است.

۷

تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت

اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با مفاهیم فضای حالت
- ۲- حل معادلات حالت و خروجی
- ۳- کاربرد تبدیل لاپلاس در فضای حالت
- ۴- آشنایی با معادله مشخصه سیستم و نقش آن در تحلیل سیستم
- ۵- معرفی ایده‌های کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری
- ۶- حذف صفر - قطب در تابع تبدیل و تحلیل آن در فضای حالت
- ۷- طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت: جابجایی قطب
- ۸- آشنایی با رؤیتگرها و تخمین متغیرهای حالت سیستم

۱-۷ مقدمه

در بخش ۲-۵ با توصیف فضای حالت سیستم‌های کنترل آشنا شدیم. معادلات حالت و خروجی یک سیستم با چند ورودی و چند خروجی در حالت کلی، عبارتند از

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

که همان معادله (۲-۵-۱۳) می‌باشد. در این معادلات $\mathbf{x}(t)$ بردار n -بُعدی حالت، $\mathbf{u}(t)$ بردار m -بُعدی ورودی، $\mathbf{y}(t)$ بردار ℓ -بُعدی خروجی، $\mathbf{A}$ ماتریس $n \times n$ حالت، $\mathbf{B}$ ماتریس $n \times m$ ورودی، $\mathbf{C}$ ماتریس $\ell \times n$ خروجی و $\mathbf{D}$ ماتریس $\ell \times m$ انتقال سیستم هستند. این نحوه نمایش، برای توصیف سیستم‌های پیچیده صنعتی با چند ورودی و چند خروجی بسیار مناسب است و همانطور که در این فصل خواهیم دید، بسیاری از محاسبات خسته کننده در تحلیل و طراحی این سیستم‌ها را می‌توان به سادگی در فضای حالت توسط یک کامپیوتر انجام داد.

تئوری کنترل کلاسیک یا سنتی^۱، که قسمت اعظم این کتاب در فصلهای ۲ تا ۶ به آن اختصاص دارد، براساس رابطه ورودی - خروجی یا تابع تبدیل در حوزه s بنا نهاده شده است و بسیاری از این تئوری‌ها برای سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی و یا سیستم‌های مرتبه بالا صورت بسیار پیچیده‌ای به خود می‌گیرند. حال آنکه در بخش ۲-۵-۱ مشاهده شد که تابع تبدیل هر سیستمی از هر مرتبه‌ای و می‌توان به یک دسته از n معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کرد و به صورت معادلات فضای حالت مرتبه اول بالا نمایش داد. این نمایش بردار - ماتریسی، توصیف ریاضی سیستم‌های مرتبه بالا را بسیار ساده می‌کند و افزایش تعداد متغیرهای حالت (مرتبه سیستم یا تعداد قطبهای تابع تبدیل برای یک نمایش می‌نیمال)، تعداد ورودیها یا تعداد خروجیها هیچکدام پیچیدگی معادلات را افزایش نمی‌دهد. در واقع تحلیل سیستم‌های بسیار پیچیده چند ورودی و چند خروجی را می‌توان با روشهایی انجام داد که تنها اندکی از روشهای تحلیل سیستم مرتبه یک اسکالر پیچیده‌تر می‌باشند. (آیا

این چنین ادعایی در رابطه با تحلیلهای ارایه شده در فصلهای قبل براساس روابط ورودی و خروجی امکان پذیر است؟)

در این فصل علاوه بر تحلیل، به طراحی در فضای حالت نیز خواهیم پرداخت. در فصل ششم، طراحی کلاسیک یا سنتی سیستم‌های کنترل براساس روشهای ترسیمی مکان ریشه، نمودارهای بود، نایکوئیست و چارت نیکولز را بررسی کردیم. مشخصه‌های این طراحیها عبارتند از:

- تنها پارامترهای مهم، ورودی، خروجی و سیگنال خطا هستند.
- طراحیها براساس تابع تبدیل حوزه s انجام می‌گیرد.
- تنها به سیستم‌های خطی، تغییرناپذیر با زمان، یک ورودی و یک خروجی قابل اعمالند.
- روشهای کلاسیک طراحی را نمی‌توان در طراحی بهینه و یا تطبیقی سیستم‌های کنترل که عمدتاً تغییرپذیر با زمان و یا غیر خطی هستند بکار بست.
- روشهای طراحی براساس سعی و خطا هستند و سیستم‌های کنترل طراحی شده توسط افراد مختلف یا یک فرد در دفعات متعدد با هم متفاوت هستند. لذا این سیستم‌ها یک سیستم بهینه را در حالت کلی بدست نخواهند داد.
- در طراحیهای کلاسیک سیستم‌های کنترل، شرایط اولیه سیستم نادیده گرفته می‌شود.
- از طرف دیگر، طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت دست‌یابی به موقعیت مطلوب قطبها (یا معادله مشخصه) را امکان‌پذیر می‌سازد و بسادگی می‌توان سیستم‌هایی را طراحی کرد که نسبت به یک شاخص عملکرد تعیین شده بهینه باشند. در این طراحیها، عامل سعی و خطا به حداقل می‌رسد و طراحی سیستم‌های چند متغیره نیز به همین ترتیب انجام می‌پذیرد.
- با توجه به اینکه روشهای فضای حالت حوزه زمانی هستند، انجام محاسبات لازم را می‌توان بسادگی توسط یک کامپیوتر دیجیتال انجام داد. در این فصل جهت آشنایی با این طراحیها، تنها به ساده‌ترین نوع طراحی که جایای قطب با فیدبک حالت و طراحی روستگر است می‌پردازیم و اشاره بسیار مختصری نیز به کنترل بهینه خواهیم نمود. در تحلیل و طراحیهای این فصل تنها سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان در نظر گرفته خواهند شد.

۲-۷ حل معادلات حالت و خروجی

معادله حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (۱-۲-۷)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (۲-۲-۷)$$

اگر معادله حالت (۱-۲-۷) را به ازاء یک ورودی معین و شرایط اولیه داده شده حل کنیم، پاسخ متغیرهای حالت سیستم را به ورودی اعمال شده به سیستم بدست می آوریم. با جایگزینی بردار حالت محاسبه شده $\mathbf{x}(t)$ از معادله (۱-۲-۷) در معادله خروجی (۲-۲-۷) پاسخ سیستم را به ازاء همان ورودی و شرایط اولیه بدست آورده ایم. دقت کنید که اگر برای مثال، معادلات حالت و خروجی (۱-۲-۷) و (۲-۲-۷) معادلات توصیف کننده مدار الکتریکی در نظر گرفته شده در مثال ۳-۵-۲ باشند، برای ولتاژ اعمال شده به مدار، رفتار متغیرهای حالت که در این مثال جریان حلقه اول و ولتاژ خازن هستند را می توان با حل معادله (۱-۲-۷) تعیین کرد. رفتار خروجی مدار که همان ولتاژ خازن است نیز در حالت کلی از معادله (۲-۲-۷) بدست آورده می شود.

معادله حالت (۱-۲-۷) از دو قسمت همگن^۱، $\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ ، و تابع وادارنده^۲، $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ ، تشکیل می شود. قبل از آنکه به حل کامل معادله حالت بپردازیم، معادله اسکالر دیفرانسیلی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = ax(t) \quad (۳-۲-۷)$$

که در آن a یک اسکالر است و شرایط اولیه معادله دیفرانسیل $x(t_0)$ است. پاسخ معادله (۳-۲-۷) عبارتست از

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0) \quad (۴-۲-۷)$$

جایگزینی معادله (۴-۲-۷) در معادله (۳-۲-۷) بسادگی نشان خواهد داد که معادله (۴-۲-۷) پاسخ معادله (۳-۲-۷) است. اکنون اگر معادله همگن حالت را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (۵-۲-۷)$$

از مقایسه معادله‌های (۳-۲-۷) و (۵-۲-۷)، پاسخ قسمت همگن معادله حالت ($u(t) \equiv 0$) عبارتست از

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) \quad (6-2-7)$$

که در آن $x(t_0)$ بردار اولیه حالت است. مسئله اصلی در محاسبه $x(t)$ بدست آوردن تابع نمائی ماتریس A ، $\exp[At]$ ، است. همانطور که تابع نمائی e^{at} در معادله (۴-۲-۷) را می‌توان برای $t_0 = 0$ به صورت سری بی‌نهایت زیر محاسبه کرد

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots + \frac{(at)^k}{k!} + \dots \quad (7-2-7)$$

تابع نمایی ماتریس A در معادله (۶-۲-۷) نیز برای $t_0 = 0$ مانند سری بی‌نهایت (۷-۲-۷) محاسبه می‌گردد. داریم

$$e^{At} = \exp[At] = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots + \frac{(At)^k}{k!} + \dots \quad (8-2-7)$$

بنابراین $\exp[At]$ نیز یک ماتریس مربع با اندازه A است. به ماتریس $\exp[At]$ ماتریس انتقال حالت^۱ یا ماتریس اساسی^۲ گفته می‌شود. با توجه به اهمیت ماتریس انتقال حالت، روشهای زیادی نیز برای محاسبه این ماتریس وجود دارد که برای دستیابی به آنها، در صورت نیاز به مرجع اول همین فصل مراجعه شود.

روش تبدیل لاپلاس در حل معادله همگن حالت ($U(s) \equiv 0$)، با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله (۵-۲-۷) برای $t_0 = 0$ ، بدست می‌آوریم

$$sX(s) - x(0) = AX(s) \quad (9-2-7)$$

و یا

$$[sI - A]X(s) = x(0) \quad (10-2-7)$$

با ضرب کردن طرفین معادله (۱۰-۲-۷) در $[sI - A]^{-1}$ ، داریم

$$X(s) = [sI - A]^{-1} x(0) \quad (11-2-7)$$

با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله (۱۱-۲-۷)، برای کلیه $t \geq 0$ بدست می‌آوریم

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \right\} \mathbf{x}(0) \quad (12-2-7)$$

مقایسه معادله‌های (۱۲-۲-۷) و (۶-۲-۷)، نتیجه می‌دهد

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \right\} \quad (13-2-7)$$

معادله (۱۳-۲-۷)، روش تبدیل لاپلاس برای محاسبه ماتریس انتقال حالت است.

اگر ماتریس انتقال حالت را با $\Phi(t)$ نمایش دهیم، معادله‌های (۱۲-۲-۷) و (۱۳-۲-۷)، عبارتند از

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(0) \quad (14-2-7)$$

معادله (۱۴-۲-۷) را پاسخ ورودی - صفر^۱ معادله حالت (با $t_0 = 0$) می‌نامند.

مثال ۷-۱

پاسخ سیستم زیر

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

را برای بردار اولیه حالت $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1]^T$ بدست آورید.

نخست ماتریس انتقال حالت را تعیین می‌کنیم. برای تعیین این ماتریس داریم

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ عبارتست از

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت را با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله بالا و به کارگیری یک جدول

تبدیل لاپلاس، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3e^{-3t} - 3e^{-t} & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

معادله (۷-۲-۱۴)، پاسخ سیستم را به شرایط اولیه داده شده می دهد. لذا

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x(0) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3e^{-3t} - 3e^{-t} & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حل کامل معادلات حالت و خروجی. معادله اسکالر دیفرانسیلی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad (۷-۲-۱۵)$$

معادله (۷-۲-۱۵) را به صورت زیر بازنویسی کنید

$$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t) \quad (۷-۲-۱۶)$$

با ضرب طرفین معادله (۷-۲-۱۶) در e^{-at} ، بدست می آوریم

$$e^{-at} [\dot{x}(t) - ax(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-at} x(t)] = e^{-at} bu(t)$$

انتگرال گیری از این معادله بین ۰ و t می دهد

$$x(t) = e^{at} x(0) + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau \quad (۷-۲-۱۷)$$

اولین عبارت در معادله (۷-۲-۱۷) ناشی از شرایط اولیه $x(0)$ است، و دومین عبارت در پاسخ به ورودی $u(t)$ بدست آمده است.

معادله حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (۷-۲-۱۸)$$

که در آن $\mathbf{x}(t)$ بردار n -بُعدی، $\mathbf{u}(t)$ بردار m -بُعدی، $\mathbf{A}$ ماتریس ثابت $n \times n$ و $\mathbf{B}$ ماتریس ثابت $n \times m$ است. با مقایسه معادله اسکالر (۷-۲-۱۵)، و معادله بردار ماتریسی (۷-۲-۱۸)، و با استفاده از روندی مانند مراحل بالا، پس از بازنویسی معادله (۷-۲-۱۸)، و پیش ضرب کردن طرفین معادله بازنویسی شده در e^{-At} ، داریم

$$e^{-At} [\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-At} \mathbf{x}(t)] = e^{-At} \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (۷-۲-۱۹)$$

انتگرال گیری از طرفین معادله (۷-۲-۱۹)، بین ۰ و t ، بدست می دهد

$$e^{-At}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad \text{و یا}$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (۷-۲-۲۰)$$

معادله (۷-۲-۲۰)، پاسخ کامل معادله حالت سیستم به ورودی $u(t)$ با شرایط اولیه $x(0)$ است. اگر $x(0) = 0$ باشد، آنگاه با جایگزینی بردار اولیه حالت صفر در معادله (۷-۲-۲۰)، پاسخ حالت - صفر^۱ سیستم بدست خواهد آمد.

با جایگزینی $x(t)$ در معادله خروجی $y(t) = Cx(t)$ ، پاسخ سیستم (خروجی) به ورودی معین با شرایط اولیه داده شده به صورت زیر بدست می آید

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (۷-۲-۲۱)$$

روش تبدیل لاپلاس در حل معادله کامل حالت و خروجی. با گرفتن تبدیل لاپلاس از

معادله (۷-۲-۱۸)، داریم

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (۷-۲-۲۲)$$

بازنویسی معادله (۷-۲-۲۲)، می دهد

$$X(s) = [sI - A]^{-1}x(0) + [sI - A]^{-1}BU(s) \quad (۷-۲-۲۳)$$

عکس تبدیل لاپلاس معادله (۷-۲-۲۳)، عبارتست از

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ [sI - A]^{-1} \} x(0) + \mathcal{L}^{-1} \{ [sI - A]^{-1} BU(s) \} \quad (۷-۲-۲۴)$$

با استفاده از انتگرال کانولوشنی و نمایش $\Phi(t)$ ، معادله (۷-۲-۲۴) می دهد

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (۷-۲-۲۵)$$

در معادله های (۷-۲-۲۰)، (۷-۲-۲۱) و (۷-۲-۲۵) فرض کرده ایم که زمان اولیه $t_0 = 0$ باشد.

برای $t \neq 0$ نیز می توان به طور مشابهی از مراحل بالا برای تعیین پاسخ سیستم استفاده کرد. در این صورت

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (26-2-7)$$

و

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{C}e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (27-2-7)$$

مثال ۲-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

خروجی سیستم را برای ورودی پله واحد و شرایط اولیه $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1]^T$ بدست آورید.

ماتریس انتقال حالت سیستم را از مثال ۱-۷ بدست آوردیم. داریم

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}, \quad \Phi(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3e^{-3t} - 3e^{-t} & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

از معادله (۲۰-۲-۷)، بدست می آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \int_0^t \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} \\ 3e^{-3(t-\tau)} - 3e^{-(t-\tau)} & 3e^{-3(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (1) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\tau-t} - e^{3\tau-3t} \\ 3e^{3\tau-3t} - e^{\tau-t} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 - 3e^{-t} + e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 3e^{-3t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

و لذا از معادله خروجی داریم

$$y(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}$$

هم چنین از روش تبدیل لاپلاس، داریم

$$(sI - A)^{-1}BU(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

و

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+3)(s+1)} \left\{ \begin{bmatrix} s+3 \\ -(s+3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

و برای خروجی سیستم بدست می آوریم

$$Y(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+3)(s+1)}$$

که عکس تبدیل لاپلاس می دهد

$$y(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}$$

۳-۷ معادله مشخصه

در بخش ۲-۵-۳، رابطه بین تابع تبدیل و معادله فضای حالت را بیان کردیم. در آن بخش

نشان داده شد که نمایش فضای حالت سیستمی داده شده به صورت زیر

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1-3-7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2-3-7)$$

با نمایش تابع تبدیل آن

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \quad (3-3-7)$$

بعد از گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله های (۱-۳-۷) و (۲-۳-۷)، و با یکسری عملیات

جبری، بدین صورت با هم مرتبط می باشند:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (4-3-7)$$

با استفاده از تعریف معکوس ماتریس

$$(sI-A)^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{|sI-A|} \quad (5-3-7)$$

و جایگزینی از معادله (5-3-7) در معادله (4-3-7)، بدست می آوریم

$$G(s) = \frac{C\{adj(sI-A)\}B + |sI-A|D}{|sI-A|} \quad (6-3-7)$$

مخرج معادله (6-3-7) عبارتست از

$$|sI-A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (7-3-7)$$

این معادله را معادله مشخصه^۱ ماتریس A می نامند. صفرهای این چند جمله ای (ریشه های معادله مشخصه)، مقادیر ویژه^۲ ماتریس A بوده و همانطور که از معادله (6-3-7) مشخص است، این مقادیر ویژه همان قطبهای تابع تبدیل $G(s)$ هستند.

پایداری سیستم. با توجه به اینکه پایداری سیستم ها، از موقعیت قطبهای تابع تبدیل آنها تعیین می گردد و مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم A همان قطبهای تابع تبدیل $G(s)$ هستند، لذا برای بررسی پایداری سیستم در فضای حالت می توان مقادیر ویژه A را تعیین کرد. مقادیر ویژه A حقیقی یا مختلط مزدوج می باشند. دقت کنید که ضرایب معادله مشخصه (7-3-7)، حقیقی هستند ($a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$) و از اینرو ریشه های آن حقیقی و یا به صورت مختلط مزدوج می باشند. نتایج پایداری را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

اگر مقادیر ویژه حقیقی A همگی منفی باشند، سیستم پایدار است.

اگر مقادیر ویژه مختلط مزدوج A همگی قسمت های حقیقی منفی داشته باشند، سیستم پایدار است.

اگر مقادیر ویژه A موهومی محض باشند، سیستم پایدار بحرانی است (پاسخ نوسانات سینوسی غیر میرا دارد). اگر مقادیر ویژه موهومی محض A تکراری باشند (چند قطب موهومی محض در یک نقطه بروی محور موهومی داشته باشد)، سیستم ناپایدار است.

اگر حتی یکی از مقادیر ویژه در سمت راست محور موهومی قرار گرفته باشد، سیستم ناپایدار است.

مثال ۳-۷

ماتریس حالت سیستمی عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه سیستم عبارتست از

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

مقادیر ویژه ماتریس A ، قطبهای سیستم، عبارتند از

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

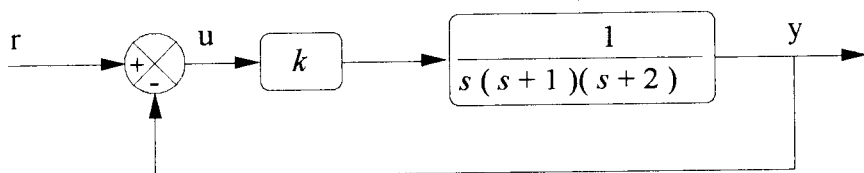
و لذا سیستم پایدار است.

مثال ۴-۷

سیستم نشان داده شده در شکل ۱-۷ را در نظر بگیرید. مطلوب است که پایداری سیستم را با تعیین مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم، برای تغییرات بهره k تعیین کنیم. برای نوشتن معادلات حالت و خروجی سیستم، می توان نخست معادلات فضای حالت تابع تبدیل حلقه - باز را نوشت و سپس با اعمال فیدبک در معادلات حلقه - باز فضای حالت، معادلات حلقه - بسته فضای حالت سیستم از r تا y را بدست آورد. هم چنین می توان با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، مستقیماً معادلات فضای حالت حلقه - بسته را نوشت.

تابع تبدیل حلقه - باز سیستم کنترل شکل ۱-۷ عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$



شکل ۷-۱ یک سیستم کنترل

معادلات فضای حالت حلقه - باز عبارتند از (بخش ۲-۵-۱، معادلات ۲-۵-۱۲ و ۲-۵-۱۳ را ببینید).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

برای اعمال فیدبک، داریم $u = r - Cx$ و لذا

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (r(t) - \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

بدیهی است که ماتریس‌های ورودی B و خروجی C در پایداری سیستم نقشی ایفاء نمی‌کنند. قطبهای سیستم مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم حلقه - بسته A هستند. از اینرو، معادله مشخصه سیستم را تشکیل می‌دهیم

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k & 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + k$$

ریشه‌های این معادله باید همگی در سمت چپ محور موهومی قرار داشته باشند. برای بررسی موقعیت ریشه‌های معادله مشخصه، از آزمون پایداری جوری استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & 2 \\ \lambda^2 & 3 & k \\ \lambda^1 & 6-k & 3 \\ \lambda^0 & k & \end{array}$$

و لذا برای پایداری داریم $0 < k < 6$.

روش دیگر نوشتن معادلات فضای حالت آن است که تابع تبدیل حلقه - باز را به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۲ درآوریم. با انتخاب متغیرهای حالت نشان داده شده در شکل ۷-۲، معادلات حالت و خروجی سیستم حلقه - بسته عبارتند از

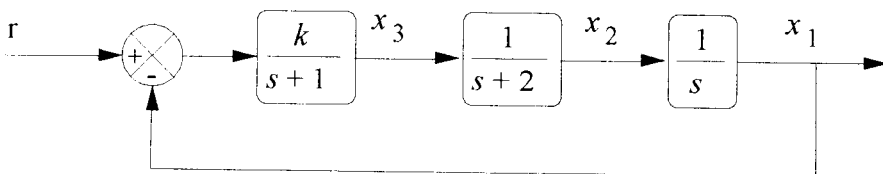
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

این نمایش فضای حالت دیگری از همان سیستم است. معادله مشخصه این نمایش فضای حالت عبارتست از

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & -1 \\ k & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + k$$

که همانند معادله مشخصه نمایش قبلی فضای حالت است. این نتیجه در حالت کلی نیز صادق است و به صورت زیر بیان می‌گردد:



شکل ۷-۲ سیستم کنترل شکل ۷-۱

«معادله مشخصه یک سیستم برای نمایشهای مختلف فضای حالت آن یکسان است.»
 مطلب فوق کاملاً بدیهی است، زیرا کلیه نمایشهای مختلف فضای حالت یک سیستم، یک تابع تبدیل منحصر بفرد را خواهند داد و چند جمله‌ای مخرج تابع تبدیل که همان معادله مشخصه سیستم است، نیز منحصر بفرد می‌باشد. تنها نکته‌ای که باید به آن اشاره شود این است که معادلات فضای حالت در نظر گرفته شده تاکنون می‌نیمال بوده‌اند (به بخش ۲-۵ برای تعریف مدل فضای حالت می‌نیمال مراجعه کنید). در صورتیکه نمایش فضای حالتی از یک سیستم می‌نیمال نباشد، درجه چند جمله‌ای مشخصه آن بزرگتر از درجه چند جمله‌ای معادله مشخصه نمایش فضای حالت می‌نیمال خواهد بود.

۴-۷ کنترل پذیری و رؤیت پذیری

مفاهیم و ایده‌های موجود در کنترل مدرن و تحلیل و طراحی فضای حالت بر دو دسته‌اند: دسته اول مفاهیمی مانند پایداری و مشخصه‌های پاسخ حالت گذرا و ... که در کنترل کلاسیک نیز مطرح بوده‌اند و در اینجا تنها نحوه برخورد با آنها فرق کرده است، دسته دوم مفاهیمی هستند که مختص تحلیل و طراحی در فضای حالت می‌باشند. کنترل پذیری و رؤیت پذیری از مفاهیم دسته دوم می‌باشند. این ایده‌ها اول بار توسط کالمن^۱ مطرح گردیده‌اند.

۱-۴-۷ مفاهیم کنترل پذیری و رؤیت پذیری

معادلات حالت و خروجی یک سیستم در حالت کلی عبارتند از:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۱-۴-۷)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (۲-۴-۷)$$

دیاگرام بلوکی این نمایش خطی تغییرناپذیر با زمان، در شکل ۲-۲۸ فصل دوم نشان داده شده است. در این توصیف سیستم، ورودی $u(t)$ و خروجی $y(t)$ توسط یک رابط، حالت سیستم $x(t)$ ، با هم مرتبط شده‌اند.

نمایش شکل ۲-۲۸، معادلات (۱-۴-۷) و (۲-۴-۷)، یک نمایش حلقه - باز از سیستم است. برای بستن حلقه سیستم می‌توان از پس خوراندن اطلاعات لازم در رابطه با پاسخ

سیستم توسط بردار حالت $x(t)$ استفاده کرد. ورودی کنترل را به صورت زیر تعریف کنید:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (۳-۴-۷)$$

که در آن K یک ماتریس $m \times n$ فیدبک با عناصر ثابت است. دقت کنید که بردار حالت n -بُعدی، بردار ورودی m -بُعدی و بردار خروجی l -بُعدی در نظر گرفته شده‌اند. از اینرو ماتریس فیدبک حالت K ، $m \times n$ می‌باشد و برای سیستم‌های یک ورودی، K یک بردار $1 \times n$ خواهد بود.

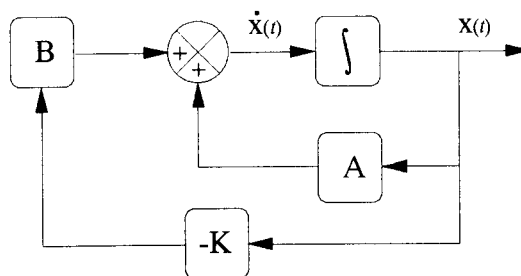
با جایگزینی معادله (۳-۴-۷) در (۱-۴-۷)، معادله حلقه - بسته حالت عبارتست از

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (۴-۴-۷)$$

دیagram بلوکی سیستم حلقه - بسته، در شکل ۳-۷ نشان داده شده است. معادله (۴-۴-۷)، یک معادله همگن حالت است و لذا همانند معادله (۶-۲-۷)، پاسخ آن بدین صورت داده می‌شود

$$x(t) = \exp[(A - BK)(t - t_0)] x(t_0) \quad (۵-۴-۷)$$

معادله (۵-۴-۷) نشان می‌دهد که برای ماتریس‌های داده شده A و B بردار حالت اولیه $x(t_0)$ می‌توان در حالت کلی با تغییر ماتریس فیدبک حالت K بر رفتار $x(t)$ تأثیر گذاشت. اما تا چه اندازه تغییر دادن K بر روی متغیرهای حالت سیستم $x_i(t)$ ($i=1, \dots, n$) تأثیر خواهد گذاشت و یا اینکه آیا می‌توان K را به گونه‌ای انتخاب کرد که بردار حالت $x(t_1)$ در زمانی مانند t_1 مقدار دلخواه را داشته باشد و یا اینکه بردار حالت $x(t)$ به ازاء $t \rightarrow \infty$ به یک مقدار حالت - ماندگار برسد؟ تمامی این پرسشها را می‌توان در این سؤال خلاصه کرد که آیا سیستم داده شده کنترل پذیر حالت است؟



شکل ۳-۷ سیستم حلقه - بسته با فیدبک حالت

قبل از آنکه به ارایه تعریف کنترل پذیری سیستم بپردازیم، سیستم اسکالر زیر را در نظر بگیرد

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad (6-4-7)$$

معادله (۶-۴-۷)، همان معادله (۱-۴-۷)، برای حالت اسکالر است. با تعریف

$$u(t) = -kx(t) \quad (5-4-7)$$

و جایگزینی (۵-۴-۷) در (۶-۴-۷)، داریم

$$\dot{x}(t) = (a - bk)x(t) \quad (6-4-7)$$

و یا

$$x(t) = \exp[(a - bk)(t - t_0)] x(t_0) \quad (7-4-7)$$

معادله‌های (۶-۴-۷) و (۷-۴-۷)، به وضوح نشان می‌دهند که تغییر پارامتر k بر روی رفتار متغیر حالت $x(t)$ تأثیر خواهد گذاشت، اگر و فقط اگر اسکالر b مخالف صفر باشد. اگر b صفر باشد آنگاه $x(t)$ به صورت معینی که به پارامترهای ثابت a و $x(t_0)$ بستگی خواهد داشت، رفتار می‌کند و پارامتر k هیچ تأثیری در رفتار سیستم نخواهد کرد. برای b مخالف صفر، با انتخاب k به صورت $(a - bk) < 0$ پاسخ سیستم پایدار و برای $(a - bk) > 0$ ناپایدار خواهد بود. تعریف کنترل پذیری. سیستم توصیف شده با (۱-۴-۷) را کنترل پذیر حالت^۱ گویند، اگر یک کنترل $u(t)$ وجود داشته باشد که حالت $x(t_0)$ را به هر حالت مطلوب $x(t_1)$ در زمان محدود $t_1 - t_0$ ($t_1 > t_0$) انتقال دهد. اگر بتوان کنترل $u(t)$ را پیدا کرد که بردار حالت اولیه را به هر بردار حالت نهایی مطلوب انتقال دهد، سیستم را کنترل ناپذیر حالت^۲ گویند.

بدیهی است که سیستم اسکالر داده شده با (۶-۴-۷) برای $b \neq 0$ ، کنترل پذیر و برای $b = 0$ ، کنترل ناپذیر است. در سیستم‌های غیر اسکالر (سیستم‌های داده شده با معادله‌های بردار - ماتریسی (۱-۴-۷)) تعیین کنترل پذیری و یا کنترل ناپذیری به سادگی سیستم‌های اسکالر صورت نمی‌پذیرد و برای این کار آزمونهای ویژه‌ای وجود دارد که در بخش بعد به توضیح آنها خواهیم پرداخت.

رویت پذیری. سیستم اسکالر داده شده با معادله (۷-۴-۶) را در نظر بگیرید. اگر معادله

خروجی این سیستم به صورت زیر باشد

$$y(t) = cx(t) \quad (۷-۴-۸)$$

که در آن c یک اسکالر است، آنگاه به شرط آنکه $c \neq 0$ باشد، با مشاهده خروجی $y(t)$ داده شده با معادله (۷-۴-۸)، می توان رفتار متغیر حالت $x(t)$ را تعیین کرد. به این چنین سیستمی که بتوان با اندازه گیری خروجی و مشاهده آن، در رابطه با کلیه متغیرهای حالت اطلاعاتی کسب نمود، رویت پذیر گویند. برای روشنتر شدن مطلب به سیستم زیر توجه کنید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

در این حالت ورودی سیستم صفر است. معادله حالت و خروجی سیستم را بدین صورت بازنویسی می کنیم

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t)$$

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

بدیهی است که اگر $c_1 = 0$ باشد، با مشاهده خروجی هیچ اطلاعاتی در رابطه با متغیر حالت $x_1(t)$ بدست نمی آید. هم چنین اگر $c_2 = 0$ باشد، با مشاهده خروجی هیچ اطلاعاتی در رابطه با متغیر حالت $x_2(t)$ نیز بدست نمی آید. در هر دو حالت سیستم را رویت ناپذیر گویند. در واقع، این سیستم تنها در صورتی رویت پذیر است که اسکالرهایی c_1 و c_2 هر دو مخالف صفر باشند. به عبارت دیگر، هر دو متغیر حالت در خروجی ظاهر می شوند.

در نمایش سیستم ها ممکن است برخی از متغیرهای حالت متناظر با متغیرهای فیزیکی قابل اندازه گیری در سیستم نباشند و یا اینکه بدلایلی نتوان متغیرهای حالت فیزیکی سیستم را اندازه گیری کرد، در این موارد باید بتوان بردار حالت سیستم را از داده های ورودی - خروجی

تعیین نمود، برای تعیین بردار حالت از داده‌های ورودی - خروجی، سیستم باید رؤیت‌پذیر باشد.

تعریف رؤیت‌پذیری. سیستم داده شده با معادلات (۱-۴-۷) و (۲-۴-۷) را رؤیت‌پذیر^۱ گویند، اگر بتوان بردار حالت سیستم $x(t)$ را بروی یک گستره محدود زمانی مانند t_1 تا t_2 از مشاهده خروجی، بر روی همان گستره تعیین کرد.

دقت کنید که در تعریف و ایده کنترل‌پذیری ماتریس (بردار) خروجی C نقشی ایفاء نمی‌کند و هم چنین در تعریف و ایده رؤیت‌پذیری ماتریس (بردار) ورودی B نقشی ایفاء نمی‌کند. بنابراین کنترل‌پذیری به ورودی $u(t)$ ، بردار حالت $x(t)$ و ماتریس‌های A و B بستگی دارد و حال آنکه رؤیت‌پذیری به خروجی $y(t)$ ، بردار حالت $x(t)$ و ماتریس‌های A و C بستگی دارد. این وابستگیها در آزمونهای کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری بیشتری آشکار خواهد شد.

۲-۴-۷ آزمونهای کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری

آزمونهای زیادی در رابطه با تعیین کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم وجود دارند. در اینجا، ساده‌ترین آنها را بدون اثبات ارایه خواهیم کرد. [برای آزمونهای دیگر و اثبات این آزمونها به مراجع همین فصل مراجعه شود.]

آزمون کنترل‌پذیری. سیستم داده شده با معادله حالت (۱-۴-۷) را کنترل‌پذیر کامل حالت (یا کنترل‌پذیر) گویند اگر ماتریس کنترل‌پذیری Φ_c تعریف شده به صورت زیر

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (9-4-7)$$

دارای رتبه کامل باشد و یا به عبارت دیگر n بردار مستقل خطی داشته باشد [برای تعاریف رتبه ماتریس و استقلال یا وابستگی خطی بردارها به مراجع همین فصل مراجعه شود]. در صورتیکه سیستم دارای یک ورودی باشد، ماتریس Φ_c یک ماتریس $n \times n$ است و شرط کنترل‌پذیری سیستم، ناویژه بودن ماتریس کنترل‌پذیری Φ_c ($|\Phi_c| \neq 0$) است.

مثال ۵-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ماتریس کنترل پذیری این سیستم عبارتست از

$$\begin{aligned} \Phi_c &= [B \quad AB] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1 \\ 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

از آنجائیکه $\text{رتبه}(\Phi_c) = 2$ رتبه می باشد، سیستم کنترل پذیر کامل حالت است.

مثال ۶-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

ماتریس کنترل پذیری این سیستم عبارتست از

$$\begin{aligned} \Phi_c &= [B \quad AB] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

رتبه ماتریس کنترل پذیری برابر ۱ است و هم چنین $|\Phi_c| = 0$ است، لذا سیستم کنترل ناپذیر است.

مثال ۷-۷

ماتریس حالت سیستمی با دو ورودی عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

که در آن $\alpha \neq 0$ است، ماتریس کنترل پذیری سیستم برای ماتریس ورودی $B = [b_{ij}]$ ($i=1,2,3, j=1,2$)، عبارتست از

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \alpha^2 b_{11} & \alpha^2 b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & \alpha b_{21} & \alpha b_{22} & \alpha^2 b_{21} & \alpha^2 b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & \alpha b_{31} & \alpha b_{32} & \alpha^2 b_{31} & \alpha^2 b_{32} \end{bmatrix}$$

رتبه این ماتریس همواره برابر با ۲ است و لذا سیستم کنترل ناپذیر می باشد. آزمون رؤیت پذیری. سیستم توصیف شده با معادله های (۱-۴-۷) و (۲-۴-۷)، رؤیت پذیر است اگر ماتریس رؤیت پذیری Φ_o ، تعریف شده به صورت زیر

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (۱۰-۴-۷)$$

دارای رتبه کامل باشد. برای سیستم های با یک خروجی، آزمون رؤیت پذیری آن است که ماتریس رؤیت پذیری $n \times n$ ناویژه باشد ($|\Phi_o| \neq 0$).

مثال ۷-۸

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ماتریس رؤیت‌پذیری این سیستم عبارتست از

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

رتبه این ماتریس برابر با یک است، از اینرو سیستم رؤیت‌ناپذیر می‌باشد.

مثال ۷-۹

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ماتریس رؤیت‌پذیری این سیستم عبارتست از

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

رتبه این ماتریس برابر با ۲ است و ماتریس ناویژه است، لذا سیستم کاملاً رؤیت‌پذیر می‌باشد.

مثال ۷-۱۰

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ماتریس رؤیت پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA \\ \vdots \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -6 & -7 & -1 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

رتبه این ماتریس برابر ۲ است، و لذا سیستم رؤیت ناپذیر می باشد. نتایج بدست آمده از آزمونهای کنترل پذیری و رؤیت پذیری کاملاً مستقل از هم هستند. بدین معنی که سیستمی ممکن است کنترل پذیر و رؤیت پذیر بوده و یا اینکه کنترل ناپذیر یا رؤیت ناپذیر باشد، به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۷-۱۱

نمایش فضای حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \quad (۱۱-۴-۷)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (۱۲-۴-۷)$$

به این نمایش، نمایش قطری^۱ فضای حالت سیستم می‌گویند. اگر مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم (قطبهای سیستم) حقیقی و متفاوت باشند، می‌توان با تبدیل مناسب معادلات فضای حالت (۱-۴-۷) و (۲-۴-۷) را به صورت قطری داده شده با معادلات (۱۱-۴-۷) و (۱۲-۴-۷)، تبدیل کرد. معادلات (۱۱-۴-۷) و (۱۲-۴-۷)، معادله با

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \lambda_i x_i(t) + b_i u(t) \quad (i = 1, \dots, n) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) \end{aligned} \quad (13-4-7)$$

از معادله (۱۳-۴-۷) مشاهده می‌شود که سیستم در صورتی کنترل پذیر است که کلیه b_i ها مخالف صفر باشند و در صورتی رؤیت پذیر است که کلیه c_i ها مخالف صفر باشند. ماتریس کنترل پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 & \lambda_1^2 b_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} b_1 \\ b_2 & \lambda_2 b_2 & \lambda_2^2 b_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & \lambda_n b_n & \lambda_n^2 b_n & \dots & \lambda_n^{n-1} b_n \end{bmatrix}$$

در صورتیکه هر کدام از b_i ها صفر شوند ماتریس Φ_c ویژه خواهد شد و اگر همگی b_i ها مخالف صفر باشند، ماتریس Φ_c ناویژه می‌شود. هم چنین ماتریس رؤیت پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \lambda_1 c_1 & \lambda_1 c_2 & \dots & \lambda_1 c_n \\ \lambda_1^2 c_1 & \lambda_1^2 c_2 & \dots & \lambda_1^2 c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} c_1 & \lambda_1^{n-1} c_2 & \dots & \lambda_1^{n-1} c_n \end{bmatrix}$$

در صورتیکه هر کدام از c_i ها صفر شوند ماتریس Φ_o ویژه خواهد شد و اگر همگی c_i ها

مخالف صفر باشند Φ_0 ناویژه می شود. موارد زیر را در نظر بگیرید:

الف - کلیه b_i ها مخالف صفر، کلیه c_i ها مخالف صفر : سیستم کنترل پذیر و

رؤیت پذیر

ب - حداقل یک b_i مساوی صفر، c_i ها مخالف صفر : سیستم کنترل ناپذیر

ولی رؤیت پذیر

ج - کلیه b_i ها مخالف صفر، حداقل یک c_i مساوی صفر : سیستم کنترل پذیر ولی

رؤیت ناپذیر

د - حداقل یک b_i مساوی صفر، حداقل یک c_i مساوی صفر : سیستم کنترل ناپذیر و

رؤیت ناپذیر

۷-۴-۳ کنترل پذیری و رؤیت پذیری در توابع تبدیل

یک سیستم فیزیکی را در نظر بگیرید. تاکنون دو نمایش را برای توصیف این سیستم بکار گرفته ایم. این دو، نمایش تابع تبدیل و نمایش فضای حالت می باشند. در بخش ۲-۵ با بکارگیری روش تابع تبدیل به نمایش فضای حالت سیستم دست پیدا کردیم. در بخش قبل مشخصه های کنترل پذیری و رؤیت پذیری را براساس نمایش فضای حالت ارائه کردیم، لیکن مشخصه های یک سیستم فیزیکی معین، به نمایش خاص بکار گرفته شده بستگی ندارند و در اینجا به بررسی کنترل پذیری و رؤیت پذیری سیستم از دیدگاه تابع تبدیل می پردازیم. به دو نکته مهم جهت یادآوری توجه کنید:

۱- نمایش فضای حالت $\{A, B, C, D\}$ و تابع تبدیل $G(s)$ سیستم، با رابطه زیر به هم مرتبط هستند

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (۷-۴-۱۴)$$

و $\{A, B, C, D\}$ را یک تحقق^۱ از $G(s)$ نامند. تحققات یک تابع تبدیل منحصر بفرد نیستند.

۲- تحقق می نیمال^۲: یک توصیف فضای حالت $\{A, B, C, D\}$ را یک تحقق می نیمال گویند، اگر تعداد متغیرهای حالت بکار گرفته شده برای توصیف سیستم حداقل باشد.

ایده تحقق می‌نیمال رابطه بسیار نزدیکی با کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم دارد. در واقع می‌توان نشان داد که اگر $\{A, B, C, D\}$ نمایش فضای حالت سیستمی باشد، هنگامیکه تابع تبدیل $G(s)$ را از رابطه $(7-4-14)$ بدست می‌آوریم، اگر در تشکیل تابع تبدیل صفر و قطب مشترکی پیدا شوند و برای تعیین $G(s)$ با درجه حداقل، مجبور به حذف صفر و قطب شویم، آن تحقق کنترل‌ناپذیر یا رؤیت‌ناپذیر (یا هر دو) خواهد بود.

مثال ۷-۱۲

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1}{s+3}$$

یک تحقق مرتبه ۱ این تابع تبدیل عبارتست از

$$A = -3, \quad B = 1, \quad C = 1$$

این تحقق کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است.

یک تحقق غیرمی‌نیمال مرتبه ۲ تابع تبدیل عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به نتایج مثال ۷-۱۱، این تحقق کنترل‌ناپذیر و رؤیت‌ناپذیر است.

یک تحقق دیگر مرتبه ۲ تابع تبدیل عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

این تحقق کنترل‌ناپذیر ولی رؤیت‌پذیر است.

آخرین تحقق مرتبه ۲ تابع تبدیل عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

این تحقق کنترل‌پذیر ولی رؤیت‌ناپذیر است.

تابع تبدیل متناظر با تحقق اول عبارتست از

$$G(s) = \frac{1}{s+3}$$

و تابع تبدیل متناظر با سه تحقق مرتبه دوم دیگر، عبارتست از

$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+3}$$

دقت کنید که تحقق اول می‌نیمال و سایر تحققات غیرمی‌نیمال هستند و در تحققات غیرمی‌نیمال حذف قطب - صفر^۱ رخ می‌دهد. این تحققات کنترل‌ناپذیر، رؤیت‌ناپذیر (یا هر دو) می‌باشند. در واقع هر تحقق مرتبه بالاتر از یک در این مثال، تحقق غیرمی‌نیمال خواهد بود و دو مسئله را به همراه خواهد داشت:

۱- حذف قطب - صفر در تابع تبدیل

۲- عدم کنترل‌پذیری یا رؤیت‌پذیری (یا هر دو)

از طرف دیگر هر تحقق مرتبه اول یا می‌نیمال کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است و در تشکیل تابع تبدیل و حذف صفر - قطب رخ نخواهد داد.

نتایج بدست آمده از مثال بالا را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

۱- تابع تبدیل $G(s)$ نشان دهنده یک سیستم کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است، اگر حذف صفر - قطب در آن رخ ندهد.

۲- یک تحقق می‌نیمال از یک سیستم، یک تحقق کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است.

۳- تابع تبدیل $G(s)$ ، نشان دهنده یک سیستم کنترل‌ناپذیر یا رؤیت‌ناپذیر یا هر دو است، اگر حذف صفر - قطب در آن رخ دهد.

۵-۷ طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت

در بخشهای ۳-۴ و ۳-۵، تأثیر موقعیت قطبهای غالب را بر روی پاسخ حالت گذرا بررسی کردیم. اگر قطبهای غالب در سمت راست محور موهومی باشند پاسخ سیستم ناپایدار است، اگر به صورت غیرمکرر بر روی محور موهومی باشند پاسخ سیستم نوسانی غیر میرا است، اگر نزدیک به محور موهومی در سمت چپ محور موهومی باشند پاسخ سیستم نوسانی میرا ولی بسیار کند با نوسانات زیاد می‌باشد و در صورتیکه در سمت چپ محور موهومی و دورتر از آن قرار گیرند، پاسخ سریعتر خواهد شد.

روش طراحی که در این بخش مرور خواهیم کرد، جایابی قطب^۱ با فیدبک حالت^۲ است. هدف از این طراحی آن است که پاسخ مطلوب سیستم حلقه - بسته را با تعیین قطبهای حلقه - بسته در مکانهای مناسب و جایابی آنها توسط فیدبک حالت، بدست آوریم. مکان مناسب قطبها یا از سعی و خطا بدست می آید (به عبارت دیگر با بکارگیری شبیه سازیهای مناسب موقعیتهای مختلف قطبها را امتحان کرده و یک موقعیت که بهترین پاسخ را بدست بدهد، تعیین می کنیم) و یا اینکه از اطلاعاتی که از رفتار گذرای سیستم داده شده است (مانند فراجهش حداکثر، زمان استقرار و ...) موقعیت مناسب قطبها را تعیین می کنیم. در هر صورت با انتخاب مکان مناسب قطبها، از فیدبک حالت برای انتقال قطبهای حلقه - باز و جایابی آنها در مکانهای مطلوب استفاده خواهیم کرد.

۷-۵-۱ جایابی قطب با فیدبک حالت

ایده اصلی طراحی جایابی قطب آن است که موقعیت مطلوب قطبهای حلقه - بسته داده شده اند، کنترل فیدبک حالت را باید چنان تعیین کنیم تا قطبهای حلقه - بسته را در این مکانها جای دهد. توصیف فضایی حالت یک سیستم در حالت کلی عبارتست از

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (۷-۵-۱)$$

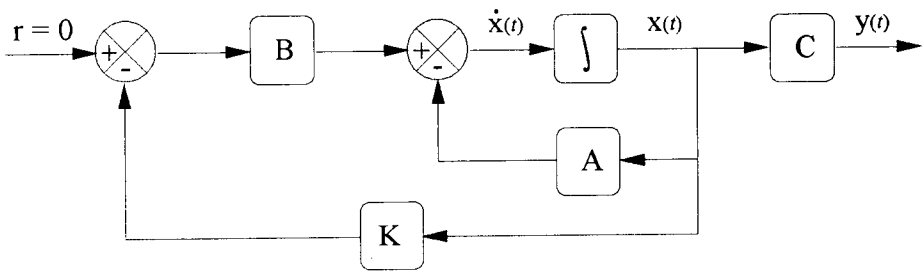
که در آن $\mathbf{x}(t)$ بردار n -بُعدی حالت و $\mathbf{u}(t)$ بردار m -بُعدی ورودی است. بردار ورودی کنترل $\mathbf{u}(t)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (۷-۵-۲)$$

که در آن $\mathbf{K}$ یک ماتریس $m \times n$ از پارامترهای فیدبک حالت است. در واقع طراحی جایابی قطب با فیدبک حالت، به تعیین پارامترهای این ماتریس منجر می شود. با جایگزینی معادله (۷-۵-۲) در معادله (۷-۵-۱)، بدست می آوریم

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{BK}] \mathbf{x}(t) \quad (۷-۵-۳)$$

شکل ۷-۴ سیستم حلقه - بسته با فیدبک حالت را نشان می دهد. (برای ورودیهای مرجع غیر صفر و ایجاد حالت ردیابی با فیدبک حالت به مراجع همین فصل و بخش کتابشناسی مراجعه



شکل ۴-۷ سیستم حلقه - بسته با فیدبک حالت

کنید). معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$|\lambda I - A + BK| = 0 \quad (۴-۵-۷)$$

معادله (۴-۵-۷) نشان می‌دهد که با انتخاب مناسب ماتریس K می‌توان تمامی قطبهای حلقه - بسته را در مکانهای مطلوب جایابی کرد. در صورتیکه سیستم تنها یک ورودی داشته باشد، K یک بردار $1 \times n$ خواهد بود. شرط لازم و کافی برای وجود K جهت جایابی کلیه قطبها، آن است که سیستم تحت کنترل، کنترل پذیر کامل حالت باشد. لذا قبل از شروع به طراحی باید کنترل پذیری سیستم را مورد بررسی قرار دهیم. مراحل طراحی فیدبک حالت را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱- با تشکیل ماتریس کنترل پذیری سیستم Φ_c داده شده با معادله (۴-۷-۹)، کنترل پذیری سیستم را بررسی کنید. در صورت کنترل پذیر بودن، جایابی تمامی قطبهای حلقه - باز در مکانهای مطلوب امکان پذیر است.

۲- با تعیین قطبهای مطلوب حلقه - بسته در $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ، معادله مشخصه مطلوب سیستم حلقه - بسته را بنویسید:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

۳- معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته (با پارامترهای تعیین نشده بهره فیدبک K) را با محاسبه دترمینان زیر بنویسید:

$$|sI - A + BK| = 0$$

۴- دو معادله مشخصه تعیین شده در مراحل ۲ و ۳ را مساوی قرار دهید، با حل معادلات

بدست آمده از مساوی قرار دادن ضرایب توانهای متناظر $\mathcal{K}$ پارامترهای ماتریس K را محاسبه کنید.

مثال ۷-۱۳

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

قطبهای حلقه - باز سیستم عبارتند از

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 2$$

بدیهي است که سیستم حلقه - باز ناپایدار است و حداقل یک قطب در سمت راست محور موهومی دارد (توجه کنید که تغییر علامتی در ضرایب معادله مشخصه رخ داده است). ماتریس کنترل پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & : & AB \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & : & 1 \\ 1 & : & -3 \end{bmatrix}$$

و لذا سیستم کنترل پذیر کامل حالت است. فرض کنید که محل قطبهای مطلوب حلقه - بسته در ۱- و ۴- باشند (پایدارسازی^۱ سیستم حلقه - باز ناپایدار) در این صورت معادله مشخصه مطلوب عبارتست از

$$(s+4)(s+1) = s^2 + 5s + 4$$

معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته با بردار فیدبک حالت $K = [k_1 \ k_2]$ ، بدین صورت می باشد

$$|sI - A + BK| = s^2 + s(3 + k_2) + k_1 - 2$$

با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مشابه در $\mathcal{K}$ داریم:

$$s^0: k_1 - 2 = 4$$

$$s^1: k_2 + 3 = 5$$

و لذا $K = [6 \quad 2]$ بردار بهره فیدبک حالت خواهد بود.

مثال ۷-۱۴

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ماتریس کنترل پذیری این سیستم عبارتست از

$$\begin{aligned} \Phi_c &= [B \quad AB] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

و لذا سیستم کنترل ناپذیر است. اگر بخواهیم به این سیستم فیدبک حالت اعمال کنیم، داریم

$$|sI - A + BK| = s^2 + (k_1 + k_2 + 3)s + k_1 + k_2 + 2$$

که در آن $K = [k_1 \quad k_2]$. فرض کنید که معادله مشخصه مطلوب $s^2 + 5s + 6$ باشد، در این

صورت با مساوی قراردادن ضرایب توانهای مشابه در s ، بدست می آوریم

$$k_1 + k_2 + 3 = 5$$

$$k_1 + k_2 + 2 = 6$$

بدیهی است که دستگاه معادلات بالا جوابی نخواهد داشت. از اینرو، برای سیستم کنترل ناپذیر نمی توان یک بردار بهره فیدبک حالت K پیدا کرد که موقعیت مطلوب قطبها را بدست دهد.

مثال ۷-۱۵

معادلات حالت و خروجی سیستمی عبارتند از

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4/0.3 & -1/52 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

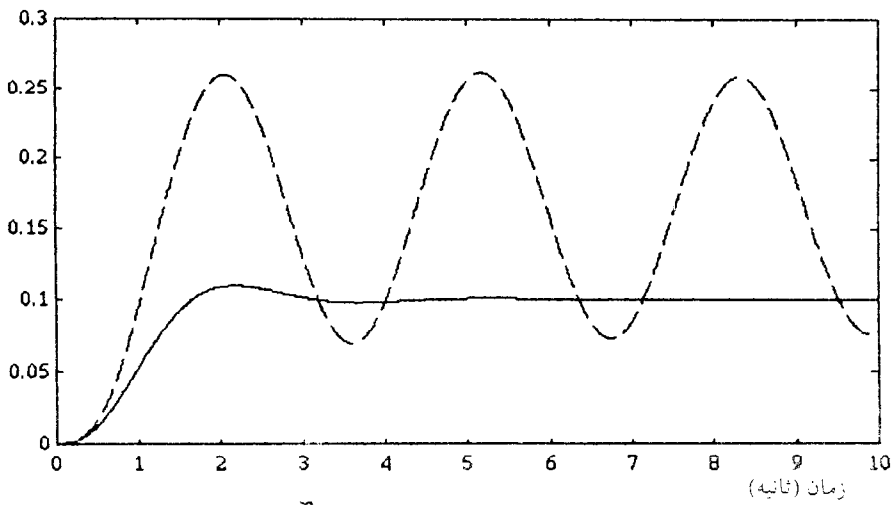
قطبهای سیستم حلقه - باز عبارتند از $\{z \pm 1/5, -0.1 \pm 2j\}$ ، همانطور که از شکل ۵-۷ مشاهده می شود، پاسخ پله واحد این سیستم (با توجه به نزدیک بودن قطبهای مختلط مزدوج به محور موهومی) نوسانی می باشد. برای اصلاح پاسخ زمانی سیستم، قطبهای سیستم را در $\{z \pm 1/2, -1 \pm 2j\}$ قرار می دهیم. با تشکیل ماتریس کنترل پذیری برای این سیستم داریم که رتبه ماتریس کنترل پذیری سیستم، کامل است و لذا سیستم کنترل پذیر می باشد. معادله مشخصه حلقه - بسته مطلوب عبارتست از

$$s^3 + 4s^2 + 9s + 10 = 0$$

از مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مشابه در s ، بردار بهره فیدبک حالت به صورت زیر بدست خواهد آمد

$$K = [4/0 \quad 4/97 \quad 2/48]$$

پاسخ پله واحد سیستم حلقه - بسته در شکل ۵-۷ نشان داده شده است. بدیهی است که مشخصه های پاسخ پله واحد سیستم حلقه - بسته، بسیار بهتر از پاسخ سیستم حلقه - باز است.



شکل ۵-۷ پاسخ سیستم های حلقه - باز و حلقه - بسته مثال ۷-۱۵، پاسخ سیستم حلقه - باز با خط چین و پاسخ سیستم حلقه - بسته با خط پیوسته نشان داده شده است.

۲-۵-۷ طراحی جایابی قطب با فیدبک حالت

در طراحی جایابی قطب با فیدبک حالت، همانطور که در شکل ۷-۴ نشان داده شده است، بردار حالت دانسته فرض شده است و هم‌چنین فرض شده است که می‌توان این بردار را مستقیماً اندازه‌گیری کرد و ورودی کنترل را با ضریب معلومی از این بردار اندازه‌گیری شده، تشکیل داد. حال آنکه بردار حالت ممکن است صرفاً یک کمیت ریاضی باشد و از نظر فیزیکی مفهومی نداشته باشد، در اینصورت قابل اندازه‌گیری توسط متغیرهای فیزیکی سیستم نیست و نمی‌توان آن را فیدبک کرد. از طرف دیگر، اگر چه ممکن است که بردار حالت از متغیرهای فیزیکی سیستم تشکیل شده باشد، لیکن اندازه‌گیری و فیدبک کلیه این متغیرها یا بعضی از آنها عملاً امکان‌پذیر نباشد. به عنوان نمونه متغیر ممکن است در موقعیتی باشد که اندازه‌گیری آن با وسایل موجود ممکن نباشد و یا به کارگیری وسایل پیشرفته اندازه‌گیری مقرون به صرفه نباشد (برای مثال در درجه حرارت‌های بسیار بالا یا پایین، عملکردهای فوق‌العاده سریع و دقیق، ...) و یا اینکه ممکن است به دلیل وجود نویز شدید، اندازه‌گیری آلوده به نویز و غیر دقیق باشد. در این چنین مواردی باید از روشهایی برای محاسبه یا تخمین مقدار هر متغیر حالت استفاده کرد. با تخمین^۱ یا بازسازی^۲ متغیرهای حالت، از بردار حالت تخمین زده شده^۳ برای تشکیل بردار کنترل استفاده خواهد شد.

سیستم دینامیکی که بردار حالت را تخمین می‌زند، رؤیتگر^۴ نامیده می‌شود. در این بخش با بکارگیری متغیرهای قابل اندازه‌گیری ورودی و خروجی سیستم در یک الگوریتم تخمین یا فرایند بازسازی بردار حالت، بردار حالت تخمین زده شده را محاسبه می‌کنیم و نشان خواهیم داد که پس از گذشتن یک حالت گذرای سریع، مقادیر بردار حالت تخمین زده شده و بردار حالت واقعی یکی خواهند شد. با بکارگیری رؤیتگر در سیستم، دینامیک آن جزئی از دینامیک سیستم حلقه - بسته خواهد شد و لذا اثر مستقیمی بر عملکرد سیستم حلقه - بسته می‌گذارد. از اینرو انتخاب مناسب دینامیک رؤیتگر، در طراحی جایابی قطب با فیدبک حالت بسیار مهم است.

1- Estimation

2- Reconstruction

3- Estimated

4- Observer

رؤیتگر حالت. سیستم توصیف شده با معادلات حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (5-5-7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (6-5-7)$$

که در آن ماتریس‌های $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ معلوم فرض شده‌اند، هم‌چنین ورودی و خروجی سیستم، $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{y}(t)$ نیز قابل اندازه‌گیری هستند. بردار حالت $\mathbf{x}(t)$ را بدلالی نمی‌توان مستقیماً اندازه‌گیری گرفت. یک روش ساده بازسازی بردار حالت شبیه‌سازی معادله‌های حالت و خروجی داده شده با معادله‌های (5-5-7) و (6-5-7)، توسط یک کامپیوتر است که همان ورودی اعمال شده به سیستم را به آن نیز اعمال می‌کنیم. متغیرهای حالت $x_i(t)$ ($i=1, \dots, n$) بدست آمده از نتایج شبیه‌سازی و متغیرهای حالت واقعی تنها در صورتی (با اعمال ورودی یکسان) یکسان خواهند بود که شرایط اولیه سیستم شبیه‌سازی شده و واقعی یکی باشند. اما در عمل سیستم واقعی تحت انواع اغتشاشات و نویزهایی قرار خواهد گرفت که شبیه‌سازی آنها عملاً غیرممکن است و لذا بین خروجی سیستم واقعی و خروجی سیستم شبیه‌سازی شده تفاوتی ایجاد خواهد شد. برای در نظر گرفتن و جبران کردن این خطای ایجاد شده آن را به عنوان ورودی دیگری به سیستم شبیه‌سازی شده اعمال می‌کنیم. معادلات حالت و خروجی سیستم دینامیکی رؤیتگر عبارتند از

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \quad (7-5-7)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (8-5-7)$$

که در آن $\hat{\mathbf{x}}(t)$ و $\hat{\mathbf{y}}(t)$ به ترتیب بردار حالت و خروجی تخمین زده شده هستند، $\mathbf{L}$ نیز ماتریس رؤیتگر^۱ ($n \times l$) است. مسئله طراحی رؤیتگر، تعیین مناسب ماتریس $\mathbf{L}$ است. برای بررسی نقش ماتریس $\mathbf{L}$ و نحوه تعیین آن، خطای رؤیت^۲ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{e}(t) \equiv \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (9-5-7)$$

با کم کردن معادله (5-5-7)، از معادله (7-5-7)، بکارگیری معادله‌های (6-5-7) و (8-5-7) و تعریف خطای رؤیت، بدست می‌آوریم

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t) \quad (10-5-7)$$

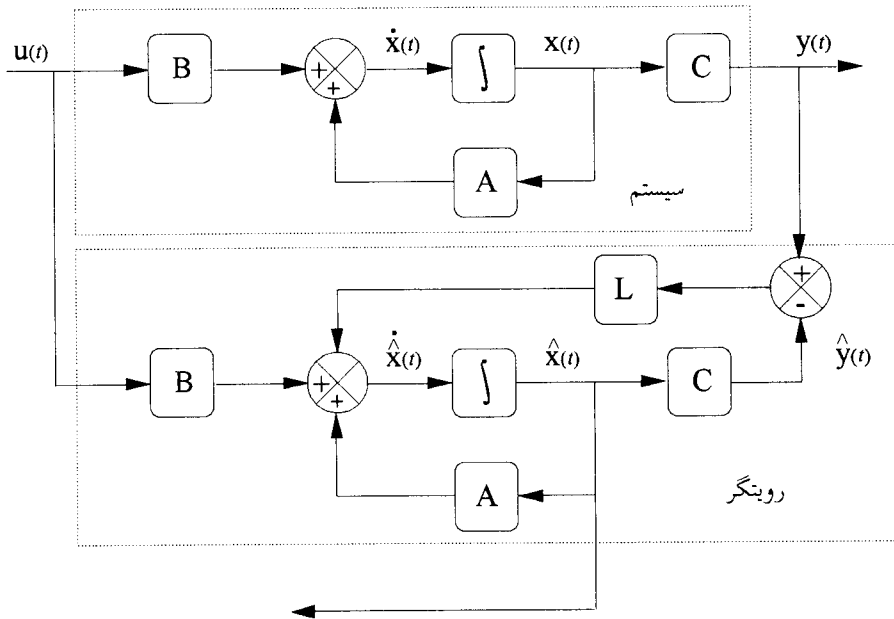
با انتخاب مناسب ماتریس L (توجه کنید در صورتیکه سیستم تنها یک خروجی داشته باشد، L یک بردار $n \times 1$ است)، می توان مقادیر ویژه $A-LC$ را در سمت چپ محور موهومی قرار داد. بنابراین مقدار حالت - ماندگار $e(t)$ برای هر شرط اولیه ای صفر است

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (11-5-7)$$

از معادله (۷-۵-۱۰)، داریم که معادله خطا ورودی نداشته و تنها با شرایط اولیه تحریک می شود، بنابراین خطای رُیتگر با ورودی سیستم تعیین نمی شود. مقدار حالت - ماندگار خطا برابر صفر است. توجه کنید که صرفنظر از ورودی اعمال شده به سیستم، خطای رُیت همواره پس از گذراندن یک حالت گذرا صفر خواهد شد. در عمل باید ماتریس L را به گونه ای انتخاب کنیم که مقادیر ویژه $A-LC$ در سمت چپ مقادیر ویژه حلقه - بسته قرار گیرند. به عبارت دیگر، ماتریس L باید به گونه ای انتخاب گردد تا خطای تخمین با سرعت قابل قبولی صفر گردد و بر عملکرد سیستم حلقه - بسته اثر قابل ملاحظه ای نگذارد. می توان نشان داد که (برای جزئیات به مراجع همین فصل و بخش کتاب شناسی آن مراجعه کنید) شرط لازم و کافی برای جایابی قطبهای رُیتگر (تعیین مقادیر ویژه ماتریس $A-LC$)، توسط ماتریس L ، رُیت پذیری سیستم است. به عبارت دیگر، بتوان با مشاهده خروجی حالتها را تخمین زد. شمای کلی یک سیستم با رُیتگر در شکل ۷-۶ نشان داده شده است. در رُیتگر طراحی شده تمامی متغیرهای حالت، همانطور که در شکل ۷-۶ نشان داده شده است، تخمین زده می شوند. به رُیتگری که تمامی متغیرهای حالت را تخمین می زند، رُیتگر مرتبه کامل^۱ می گویند.

۷-۵-۳ سیستم حلقه - بسته فیدبک حالت با رُیتگر

در فرایند جایابی قطب با فیدبک حالت در بخش ۷-۵-۱، فرض شده بود که بردار حالت واقعی $x(t)$ برای اندازه گیری و فیدبک در دسترس است. در بخش ۷-۵-۲، با فرض در دسترس نبودن بردار حالت روشی را برای تخمین و بازسازی بردار حالت توسط رُیتگر ارایه کردیم. در این بخش با فرض در دسترس نبودن بردار حالت واقعی، یک رُیتگر را در سیستم



شکل ۶-۷ سیستم با رویتگر -

کنترل فیدبک حالت به کار می‌گیریم و از بردار حالت تخمین زده شده $\hat{x}(t)$ به جای بردار حالت واقعی $x(t)$ در سیستم کنترل استفاده می‌کنیم. فرایند طراحی در این صورت به دو مرحله تقسیم می‌شود:

مرحله اول: تعیین یک ماتریس بهره فیدبک حالت K ، برای جابایی مطلوب قطبهای سیستم.

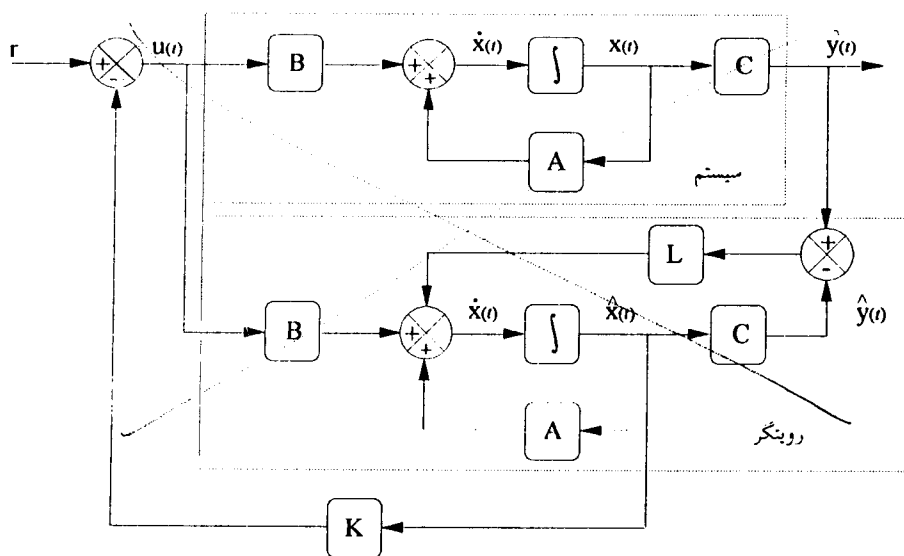
مرحله دوم: تعیین یک ماتریس بهره رویتگر L ، برای جابایی مطلوب قطبهای رویتگر. برای مطالعه اثرات بکارگیری $\hat{x}(t)$ به جای $x(t)$ ، همانطور که در شکل ۷-۷ نشان داده شده است، سیستم کاملاً کنترل‌پذیر و رویت‌پذیر داده شده با معادلات حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۱۲-۵-۷)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (۱۳-۵-۷)$$

برای کنترل فیدبک حالت، با حالت رویت شده $\hat{x}(t)$ داریم

$$u(t) = -K\hat{x}(t) \quad (۱۴-۵-۷)$$



شکل ۷-۷ سیستم کنترل فیدبک حالت با رویتگر

با این کنترل از جایگزینی معادله (۷-۵-۱۴)، در معادله (۷-۵-۱۲)، بدست می آوریم

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{BK}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (۷-۵-۱۵)$$

با اضافه کردن $\mathbf{BK}\mathbf{x}(t) - \mathbf{BK}\mathbf{x}(t)$ به طرف راست معادله (۷-۵-۱۵)، و بازنویسی آن بدست می آوریم

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{BK}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) \quad (۷-۵-۱۶)$$

از معادله (۷-۵-۹)، داریم

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{BK}\mathbf{e}(t) \quad (۷-۵-۱۷)$$

با ترکیب معادله های (۷-۵-۱۷) و (۷-۵-۱۰) داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \quad (۷-۵-۱۸)$$

معادله (۷-۵-۱۸)، دینامیک سیستم حلقه - بسته با کنترل فیدبک حالت و رویتگر را

توصیف می‌کند. معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$\begin{vmatrix} sI-A+BK & -BK \\ 0 & sI-A+LC \end{vmatrix} = 0$$

و یا

$$|sI-A+BK| |sI-A+LC| = 0 \quad (19-5-7)$$

معادله (۱۹-۵-۷)، نشان می‌دهد که قطبهای حلقه - بسته سیستم کنترل فیدبک حالت با رؤیتگر از مجموع قطبهای ناشی از طراحی جایابی قطب و قطبهای ناشی از طراحی رؤیتگر تشکیل می‌شود. این بدان معنی است که طراحی رؤیتگر و جایابی قطب با فیدبک حالت، به طور جداگانه‌ای انجام می‌شوند. بنابراین دو مرحله فرایند طراحی به طور کامل مستقل از یکدیگر انجام می‌پذیرند.

قطبهای مطلوب حلقه - بسته، به گونه‌ای تعیین می‌گردند تا مشخصه‌های عملکرد سیستم حلقه - بسته برآورده شوند. قطبهای رؤیتگر نیز به گونه‌ای تعیین می‌گردند تا پاسخ رؤیتگر بسیار سریعتر از پاسخ سیستم باشد. یک قاعده سرانگشتی برای تعیین محل قطبهای رؤیتگر آن است که آنها را به گونه‌ای انتخاب کنیم که پاسخ رؤیتگر حداقل ۲ تا ۵ برابر سریعتر از پاسخ سیستم باشد. بالاترین سرعت رؤیتگر با پارامترهایی مانند نویز و مسئله حساسیت در سیستم‌های کنترل عملی محدود می‌شود.

مثال ۷-۱۶

سیستم کاملاً رؤیت‌پذیر زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

برای تخمین بردار حالت سیستم، بردار بهره رؤیتگر L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

که در آن ℓ_1 و ℓ_2 پارامترهایی هستند که در طراحی رُویتگر تعیین می‌گردند. معادله مشخصه سیستم دینامیکی رُویتگر عبارتست از

$$\begin{aligned} |sI - A + LC| &= \begin{vmatrix} s+3+\ell_1 & -1 \\ \ell_2 & s+2 \end{vmatrix} \\ &= s^2 + (5+\ell_1)s + (6+2\ell_1+\ell_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

پارامترهای ℓ_1 و ℓ_2 را از مساوی قراردادن معادله مشخصه سیستم دینامیکی رُویتگر، با معادله مشخصه مطلوب رُویتگر بدست می‌آوریم. اگر بخواهیم قطبهای رُویتگر در ۱- و ۶- قرار گیرند، معادله مشخصه مطلوب عبارتست از

$$(s+6)(s+1) = s^2 + 7s + 6$$

با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مشابه در ۵ داریم $L = [2 \quad -4]^T$. معادله دینامیکی رُویتگر از معادله $(7-5-7)$ و $(8-5-7)$ ، عبارتست از

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= [1 \quad 0] \hat{x}(t) \end{aligned}$$

و یا با جایگزینی $y(t) = Cx(t)$ داریم

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} y(t)$$

با توجه به مثال بالا، مراحل طراحی یک رُویتگر نیز همانند مراحل طراحی جایابی قطب با فیدبک حالت است. این مراحل عبارتند از:

۱- با تشکیل ماتریس رُویت‌پذیری Φ_0 داده شده با معادله $(10-4-7)$ ، رُویت‌پذیری سیستم را بررسی کنید. در صورت رُویت‌پذیر بودن، طراحی رُویتگر (جایابی قطبهای رُویتگر) امکان‌پذیر است.

۲- قطبهای مطلوب رُویتگر را تعیین کنید. این قطبها باید به گونه‌ای انتخاب شوند که سرعت پاسخ رُویتگر حداقل ۲ تا ۵ برابر سریعتر از پاسخ سیستم باشد. معادله مشخصه مطلوب رُویتگر را با این قطبها بدست آورید.

۳- معادله مشخصه رؤیتگر را با محاسبه دترمینان زیر بنویسید:

$$|sI - A + LC| = 0$$

که در آن L یک ماتریس $n \times \ell$ است (n تعداد متغیرهای حالت و ℓ تعداد خروجیها است).

۴- دو معادله مشخصه تعیین شده در مراحل ۲ و ۳ را مساوی قرار دهید. با حل معادلات بدست آمده از مساوی قرار دادن ضرایب متناظر k_i پارامترهای ℓ_{ij} ($i=1, \dots, n, j=1, \dots, \ell$) در ماتریس L را بدست آورید.

مثال ۷-۱۷

معادله‌های حالت و خروجی سیستمی عبارتند از

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

قطبهای این سیستم در $+1$ و $+2$ قرار دارند و لذا سیستم حلقه - باز ناپایدار است. اگر بخواهیم از فیدبک متغیرهای حالت برای پایدارسازی سیستم استفاده کنیم، نخست باید کنترل‌پذیری سیستم را تعیین نمود. با فرض در دسترس نبودن متغیرهای حالت برای فیدبک، باید از یک رؤیتگر جهت تخمین متغیرهای حالت و فیدبک آنها استفاده کرد و لذا تعیین رؤیت‌پذیری سیستم نیز الزامی است. ماتریس‌های کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم عبارتند از

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

بنابراین سیستم کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است. قطبهای سیستم حلقه - بسته مطلوب را در $\{-3, -4\}$ و قطبهای رؤیتگر را در $\{-13, -13\}$ در نظر می‌گیریم. برای تعیین ماتریس بهره فیدبک دو معادله مشخصه مطلوب و حلقه - بسته را مساوی قرار می‌دهیم، از اینرو

$$\begin{aligned}\left| \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1 \ k_2) \right| &= \left| \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2+k_1 & s-3+k_2 \end{pmatrix} \right| \\ &= s^2 + s(-3+k_2) + 2+k_1 \\ &= s^2 + 7s + 12\end{aligned}$$

و لذا $k = [10 \ 10]$ است.

برای تعیین ماتریس بهره رؤیتگر نیز به طریق مشابهی، دو معادله مشخصه مطلوب رؤیتگر و معادله مشخصه رؤیتگر را مساوی قرار می‌دهیم، از اینرو

$$\left| \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s+l_1 & -1 \\ 2+l_2 & s-3 \end{vmatrix}$$

$$= s^2 + s(l_1 - 3) + 2 + l_2$$

$$= s^2 + 26s + 169$$

و لذا $L = [23 \ 169]^T$ است.

شکلهای ۷-۸ (الف) و (ب)، به ترتیب رفتار متغیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را نشان می‌دهند. همانطور که از این شکلها مشاهده می‌گردد، متغیرهای حالت تخمین زده شده $\hat{x}_1(t)$ و $\hat{x}_2(t)$ در کمتر از ۱ ثانیه به مقادیر واقعی متغیرهای حالت همگرا می‌شوند. شرایط اولیه تخمین $\hat{x}(0) = [1 \ 0]^T$ است. در شکل ۷-۸ (ج)، خروجی سیستم حلقه - بسته واقعی و خروجی سیستم حلقه - بسته با فیدبک تخمین متغیرهای حالت نشان داده شده است. همانطور که مشخص است، سیستم حلقه - باز ناپایدار در هر دو حالت پایدار گردیده است و بعد از گذشت یک زمان حالت گذرا با همگرا شدن متغیر حالت تخمین زده شده به حالت واقعی خروجیها نیز به هم همگرا شده‌اند.

مسائل

۷-۱. معادلات حالت و خروجی سیستم‌های زیر را در نظر بگیرید:

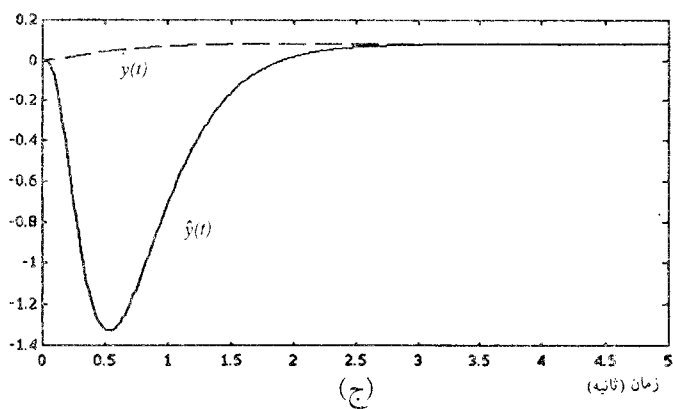
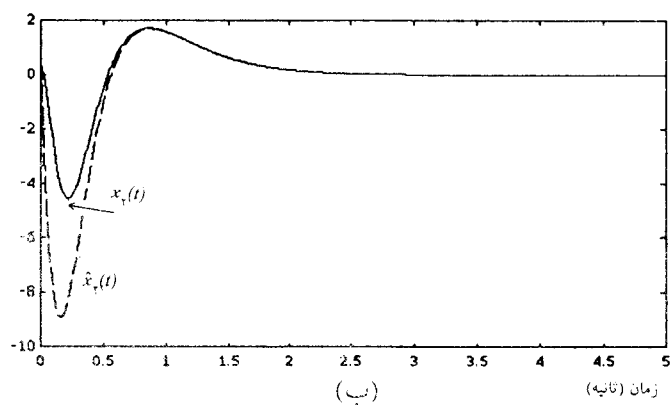
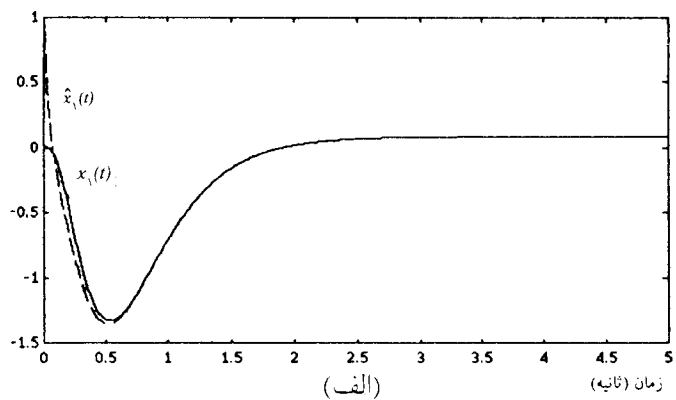
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{الف})$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ب})$$

$$y(t) = [1 \ 1] \mathbf{x}(t)$$

برای شرایط اولیه صفر و ورودی پله واحد، پاسخ متغیرهای حالت و خروجی سیستم را با بکارگیری معادلات (۷-۲۰) و (۷-۲۱)، بدست آورید.



شکل ۷-۸ (الف) رفتار اولین متغیر حالت واقعی و تخمین زده شده. (ب) رفتار دومین متغیر حالت واقعی و تخمین زده شده. (ج) خروجیهای سیستم با راینر و بدون راینر.

۲-۷. پاسخ معادلات حالت و خروجی سیستم‌های زیر را بدست آورید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{الف})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

شرایط اولیه سیستم $x_1(0)$ و $x_2(0)$ می‌باشند و $u(t)$ نیز ورودی پله واحد است.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 15 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (\text{ب})$$

شرایط اولیه سیستم $x_1(0) = x_2(0) = 1$ است.

۳-۷. سیستم توصیف شده با معادله حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

پاسخ بردار حالت را به ورودیهای اعمال شده در زمان $t=0$ ، بدست آورید:

(الف) ورودی شیب واحد.

(ب) ورودی ضربه واحد.

۴-۷. پاسخ معادلات حالت زیر را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس بدست آورید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (\text{الف})$$

با شرایط اولیه $\mathbf{x}(0) = [1 \ 1]^T$ و ورودی پله واحد.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ب})$$

با شرایط اولیه صفر و ورودی $u(t) = e^{-t}$ برای $t \geq 0$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (\text{ج})$$

با شرایط اولیه $x_1(0)$ و $x_2(0)$.

۵-۷. سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (\alpha + \beta) \frac{dx}{dt} + \alpha \beta x = u$$

که در آن α و β ثابت و u ورودی ضربه واحد است. شرایط اولیه سیستم عبارتند از

$$x(0^-) = \frac{dx(0^-)}{dt} = 0.$$

پاسخ سیستم را با استفاده از روش

(الف) تبدیل لاپلاس

(ب) فضای - حالت

بدست آورید.

۶-۷. ماتریس‌های حالت سیستم‌هایی در زیر داده شده‌اند. با نوشتن معادله مشخصه

این سیستم‌ها و محاسبه مقادیر ویژه آنها، پایداری این سیستم‌ها را بررسی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -12 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

۷-۷. دیاگرام بلوکی یک سیستم کنترل موقعیت در شکل ۷-۹ نشان داده شده است. با

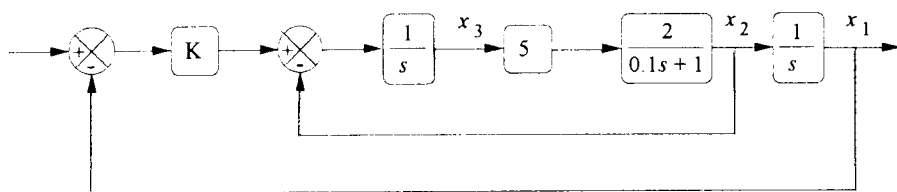
نوشتن معادلات حالت آن، پایداری سیستم را به ازاء تغییرات بهره K تعیین کنید.

۸-۷. کنترل پذیری سیستم‌های زیر را تعیین کنید:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1/5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{الف})$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ب})$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ج})$$



شکل ۷-۹ سیستم کنترل موقعیت مسئله ۷-۷

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{د})$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ه})$$

۷-۹- تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K(s+a)(s+b)}{(s+a)(s+b)(s+c)(s+d)}$$

کنترل پذیری این سیستم را بررسی کنید.

۷-۱۰- رؤیت پذیری سیستم‌های زیر را تعیین کنید:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (\text{ج})$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (د)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad \text{(ه) سیستم داده شده در (د) با معادله خروجی}$$

۷-۱۱. معادلات حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

کنترل پذیری و رؤیت پذیری سیستم را به ازاء مقادیر مختلف α بررسی کنید.

۷-۱۲. سیستم داده شده با معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

(الف) نشان دهید که سیستم ناپایدار است.

(ب) نشان دهید که با فیدبک حالت مناسب می توان سیستم را پایدار کرد.

(ج) بهره فیدبک حالت مناسبی که قطبهای حلقه - بسته را در $\{-4\}$ قرار دهید، تعیین کنید.

۷-۱۳. سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

پس از آزمون کنترل پذیری، در صورت امکان با فیدبک حالت قطبهای سیستم حلقه - بسته را در $\{-۱, -۲, -۳, -۴\}$ قرار دهید.

۱۴-۷. سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\alpha \quad 0] \mathbf{x}(t)$$

(الف) به ازاء چه مقادیری از α سیستم رؤیت ناپذیر است.

(ب) برای $\alpha = 0$ ، رؤیتگری طراحی کنید که خطای تخمین آن با قطبهای ۱- و ۲- به سمت صفر میل کند.

۱۵-۷. سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad \alpha] \mathbf{x}(t)$$

(الف) به ازاء چه مقادیری از α و β سیستم کنترل پذیر و رؤیت پذیر است.

(ب) برای $\alpha = \beta = 0$ ، قطبهای سیستم حلقه - بسته را با فیدبک حالت در $\{-۱, -۲\}$ و قطبهای رؤیتگر را در $\{-۵, -۶\}$ قرار دهید.

۱۶-۷. پاسخ سیستمهای داده شده در مسائل ۱۲-۷، ۱۳-۷، ۱۴-۷، ۱۵-۷ را برای شرایط اولیه دلخواه و ورودی پله واحد توسط یک برنامه کامپیوتری مناسب رسم کنید.

مراجع فصل هفتم

- [۷-۱] علی خاکی صدیق، اصول کنترل مدرن، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۴
- [7-2] Blackman P.F, *Introduction to state-variable analysis*, Macmillan, 1977
- [7-3] Ogata K., *State space analysis of control systems*, Prentice-Hall, 1977
- [7-4] Borrie John A., *Modern control systems*, Prentice-Hall, 1986
- [7-5] Friedland B., *Control system design*, McGraw-Hill, 1987
- [7-6] Brogan William L., *Modern control theory*, Prentice-Hall, 1991
- [7-7] Rosenbrock H. H., *State-space and multivariable theory*, Nelson, 1970
- [7-8] Kailath, T., *Linear systems*, Prentice-Hall, 1980
- [7-9] Chen C.T., *Introduction to linear system theory*, Holt, Rinehart and Winston, 1970

کتاب شناسی

در زمینه تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت، مراجع فراوانی وجود دارند. برای آشنایی بیشتر با مفاهیم اولیه فضای حالت، روشهای پایه در تحلیل و طراحی فضای حالت و درک عمیق‌تر مفاهیم ارائه شده در این فصل به مرجع [۷-۱] مراجعه شود. تقریباً کلیه کتابهای مقدماتی در رابطه با تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل، فصل یا فصلهایی در ارتباط با تحلیل و طراحی فضای حالت دارند. مراجع [2]، [3] و [4]، این مفاهیم را به صورت مقدماتی بیان کرده‌اند. مرجع [7]، با بکارگیری مسائل حل شده فراوان پاره‌ای از مفاهیم فضای حالت را به طور ساده، توضیح داده است. مراجع [7-2] تا [7-5]، به طور تخصصی به بیان تحلیل و طراحی فضای حالت پرداخته‌اند. این مراجع، بیشتر به صورت مفهومی و مهندسی به مسئله فضای - حالت پرداخته‌اند. در [7-3]، نرم‌افزارهای مناسبی نیز برای تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل به روش فضای - حالت آورده شده است. جبر خطی یک وسیله بسیار مناسب و لازم برای بررسی تئوریک مفاهیم فضای - حالت است. مراجع [۷-۱] و [7-6] فصلهایی در ارتباط با مقدمات جبر خطی و آشنایی با آن آورده‌اند. برای بررسی دقیق ریاضی و ارائه اثباتهای قضایای فضای حالت و برخورد عمیق تئوریک با آن، به مراجع [7-5] تا [7-9] می‌توان مراجعه کرد. مرجع [۲۶] فضای حالت را در حوزه دیجیتال مورد بررسی قرار داده است. در این مرجع، فضای حالت زمان - پیوسته نیز به مقدار قابل توجهی توضیح داده شده است.

منابع

- 1- D' Azzo, J. J. and C. H. Houpis, *Linear control system analysis and design*, 3rd ed., NewYork, McGraw-Hill Book Company, 1988
- 2- Ogata, K., *Modern control engineering*, Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, Inc., 1991
- 3- Kuo, B. C., *Automatic control systems*, Sixth ed., Englewood Cliffs N.J. Prentice-Hall, Inc., 1991
- 4- Dorf, R. C., *Modern control systems*, 5thed. Reading, Mass: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989
- 5- Raven, F. H., *Automatic control engineering*, 3rd ed. NewYork: McGraw-Hill Book Company, 1978
- 6- DI-Stefano, J. J., A. R. Stubberud, and I. J. Williams, *Feedback and control systems*, Schaum's Outline Series, NewYork: Schaum Publishing Co., 1967
- 7- Wiberg M. D., *State space and linear systems*, Schaum's Outline Series, NewYork: Schaum Publishing Co., 1971
- 8- Van de Vegte, J., *Feedback control systems*, Second ed., Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall. Inc., 1990
- 9- Warwick K., *Control systems: An Introduction*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall. Inc., 1989
- 10- Banks S. P., *Control systems engineering: modelling and simulation, control theory and microprocessor implementation*, Englewood Cliffs, N. J: Prentice-Hall. Inc., 1983
- 11- M. EL. Hawary, *Control system engineering*, Reston Publishing Company. 1987
- 12- Richards R. J., *An Introduction to dynamics and control*, Longman Scientific and Technical, Second ed., 1991
- 13- Healy M., *Principles of automatic control*, Hodder and Stoughton, Third ed., 1981

- 14- Stockdale, L. A., *Servomechanisms*, Pitman Press, 1962
- 15- Coughanowr and Koppel, *Process systems analysis and control*, McGraw-Hill Book company, 1965
- 16- Elloy J-P, and Piasco J-M, *Classical and modern control with worked examples*, International series on Systems and Control, Pergamon Press, 1981
- 17- Borrie John A., *Modern control systems: A manual of design methods*, Englewood cliffs, N. J.: Prentice-Hall. Inc., 1980
- 18- Gayakwad R. and Sokoloff L., *Analog and digital control systems*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. Inc., 1986
- 19- Hale, F. J., *Introduction to control system analysis and design*, 2nd ed., Englewood cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1988
- 20- Phillips, C. L., and R. D. Harbor, *Feedback control systems*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc. 1988
- 21- Marshal, S. A., *Introduction to control theory*, Macmillan Publishing LTD, 1984
- 22- Sinha N.K., *Control systems*, Holt, Rinehart and Winston, 1986
- 23- Doebelin, E. O., *Control system principles and design*, John Wiley and Sons, 1985
- 24- *Conrol Engineering Units* (1) - (6), The open University Press, Milton Keynes, 1985
- 25- Franklin Gene F., J. David Powell , A. Emami - Naeini, *Feedback control of dynamical systems*, Addison - Wesley, Publishing company, 1986

۲۶- پرویز جبه‌دار مارالانی، علی خاکی صدیق، سیستم‌های کنترل دیجیتال، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۳.

واژه‌نامه فارسی - انگلیسی

آ

Steady-state response	پاسخ حالت ماندگار	Array	آرایه
Frequency response	پاسخ فرکانسی	Routh array	آرایه روث
Transient response	پاسخ گذرا	Spirule	اسپایرول
Zero input response	پاسخ ورودی صفر	Super position principle	اصل جمع آثار
Stabilization	پایدارسازی	Load disturbances	اغتشاشات بار
Conditionally stable	پایدار شرطی	External disturbances	اغتشاشات خارجی
Stability	پایداری	Offset	افست
Asymptotic stability	پایداری مجانبی	Strictly proper	اکیداً سره، اکیداً معمول
Phase lag-lead	پس - پیش فاز	Load impedance	امپدانس بار
Phase lag	پس فاز	Transmittance	انتقال
Unit step	پله واحد	Phase shift	انتقال فاز
Bandwidth	پهنای باند	Direct transmission	انتقال مستقیم
Thrust	پیشروانه	Octave	اوکتاو
Phase lead	پیش فاز		ب

ت

Step function	تابع پله	Load	بار
Transfer function	تابع تبدیل	Reconstruction	بازسازی
Analytic function	تابع تحلیلی	Elevator	بالابر
Polynomial function	تابع چند جمله‌ای	Critical	بحرانی
Parabolic function	تابع سهموی	State vector	بردار حالت
Sinusoidal function	تابع سینوسی	Back emf	emf برگشتی
Ramp function	تابع شیب	Bode	بود
Impulse function	تابع ضربه	Gain	بهره
Forcing function	تابع وادارنده	Loop gain	بهره حلقه
Time delayed	تأخیر دار	Path gain	بهره مسیر
Time delay	تأخیر زمانی		پ
Laplace transform	تبدیل لاپلاس	Response	پاسخ
Realization	تحقق	Free response	پاسخ آزاد
		Zero state response	پاسخ حالت صفر

Initial state	حالت اولیه	Minimal realization	تحقق می‌نیمال
Pole-zero cancellation	حذف قطب - صفر	Estimation	تخمین
Sensitivity	حساسیت	Estimated	تخمین زده شده
Spiral	حلزونی	Peak resonance	تشدید ستیغ
Loop	حلقه	Random	تصادفی
Open-loop	حلقه - باز	Multiplicity	تعدد
Closed-loop	حلقه - بسته	Time varying	تغییرپذیر با زمان
Nontouching loops	حلقه‌های مجزا	Time invariant	تغییرناپذیر با زمان
Time domain	حوزه زمان	Tolerance	تولرانس
خ		Proportional- Integral	تناسبی انتگرال
Controlled output	خروجی کنترل شده	Proportional- Derivative	تناسبی مشتقی
Desired output	خروجی مطلوب	External description	توصیف خارجی
Error	خطا	Internal description	توصیف داخلی
Steady-state error	خطای حالت ماندگار	ث	
Observation error	خطای رؤیت	Step-error constant	ثابت خطای پله
Linear	خطی	Parabolic error constant	ثابت خطای سهموی
د		Ramp error constant	ثابت خطای شیب
Input-output data	داده‌های ورودی - خروجی	Time constant	ثابت زمانی
Magnitude	دامنه	Torsional spring constant	ثابت فنر پیچشی
Constant M-Circle	دایره M - ثابت	ج	
Clockwise	در جهت حرکت عقربه‌های ساعت	Pole placement	جایابی قطب
در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت		Compensator	جبران ساز
Counter clockwise		Compensation	جبران سازی
Plant	دستگاه	Series compensation	جبران‌سازی سری
Decibel	دسی‌بال	Feedback compensation	جبران‌سازی فیدبک
Encirclement	دور زدن	چ	
Decade	دهه	Nichols chart	چارت نیکولز
Block diagram	دیاگرام بلوکی	ح	
Phasor diagram	دیاگرام فازور	Gain margin	حاشیه بهره
Dynamic	دینامیک	Phase margin	حاشیه فاز
		State	حالت

ر		ش	
Regulator	رگلاتور	Branch	شاخه
Observable	رویت پذیر	Accelerometer	شتاب سنج
Observer	رویتگر	Magnitude condition	شرط دامنه
Full order observer	رویتگر مرتبه کامل	Angle condition	شرط زاویه
Reduced- order observer	رویتگر مرتبه کاهش یافته	Motor shaft	شفت موتور
ز		System identification	شناسایی سیستم
Settling time	زمان استقرار	Aileron	شپیپر
Continuous-time	زمان پیوسته	ص	
Delay time	زمان تأخیر	Zero	صفر
Peak time	زمان ستیغ	ض	
Rise time	زمان صعود	Error coefficient	ضریب خطا
Discrete-time	زمان گسسته	ط	
Ziegler-Nichols	زیگلر-نیکولز	Design	طراحی
س		ع	
Resonant peak	ستیغ تشدید	Causal	علی
Servo	سرو	Control action	عمل کنترلی
Servomechanism	سرومکانیزم	غ	
Proper	سره، معمول	Nonlinear	غیرخطی
Series	سری	Noncausal	غیر علی
Control surfaces	سطوح کنترلی	Nonminimum phase	غیر می نیمم فاز
Rudder	سکان	ف	
Conventional	سنتی	Phase	فاز
Solenoid	سولونوئید	Overshoot	فراجشش
N-th order system	سیستم مرتبه n ام	Maximum overshoot	فراجشش حداکثر
Unknown system	سیستم ناشناخته	Pitch	فراز
Disturbance signal	سیگنال اغتشاش	Process	فرایند
Control signal	سیگنال کنترلی	Resonant frequency	فرکانس تشدید
Sink	سینک	Gain crossover frequency	فرکانس تقاطع بهره
		Phase crossover frequency	فرکانس تقاطع فاز

Digital control	- کنترل دیجیتال
Feedback control	- کنترل فیدبک
Controller	کنترل کننده
Modern control	کنترل مدرن
Field control	کنترل میدان
State uncontrollable	کنترل ناپذیر حالت
Intelligent control	کنترل هوشمند
Cofactor	کوفاکتور
Coil	کویل
	گی
Flyball governor	گاورنر توپ گردان
Node	گره
Output node	گره خروجی
Mixed node	گره مخلوط
Input node	گره ورودی
Torque	گشتاور

ل

Log magnitude	لگاریتم دامنه
---------------	---------------

م

Fundamental matrix	ماتریس اساسی
State transition matrix	ماتریس انتقال حالت
State matrix	ماتریس حالت
Output matrix	ماتریس خروجی
Observability	ماتریس رؤیت پذیری
Observer matrix	ماتریس رؤیتگر
Input matrix	ماتریس ورودی
State variable	متغیر حالت
	متغیر حالت ناوابسته.

Independent state variable	-
Physical variables	متغیرهای فیزیکی

Conditional frequency	فرکانس شرطی
Break frequency	فرکانس شکست
Natural frequency	فرکانس طبیعی
	فرکانس طبیعی میرا شده
Damped natural frequency	-
Cutoff frequency	= - - فرکانس قطع
Corner frequency	فرکانس گوشه
Mason's gain formula	فرمول بهره میسن
State space	فضای حالت
Flux	فلوی
State feedback	فیدبک حالت
Feedback	فیدبک - فیدبک کردن
Negative feedback	فیدبک منفی
High pass filter	فیلتر بالاگذار
Low pass filter	فیلتر پایین گذار

ق

Homogeneous part	قسمت همگن
Initial value theorem	قضیه مقدار اولیه
Final value theorem	قضیه مقدار نهایی
Pole	قطب
Dominant poles	قطبهای غالب
Insignificant poles	قطبهای کم اثر

ک

Semilog paper	کاغذ نیمه لگاریتمی
Continued fractions	کسره های متوالی
Armature control	کنترل آرمیچر
State controllable	کنترل پذیر حالت
Feedforward control	کنترل پیش خور
Adaptive control	کنترل تطبیقی
Multivariable control	کنترل چند متغیره

Nyquist	نایکوئیست	Cascade	متوالی
Cutoff rate	نرخ قطع	Asymptote	مجانِب
Damping ratio	نسبت میرایی	Order	مرتبه
Relative damping ratio	نسبت میرایی نسبی	System order	مرتبه سیستم
Break-away point	نقطه در شکست	Path	مسیر
Angle deficiency	نقص زاویه	Forward path	مسیر پیشرو
Break-in point	نقطه بر شکست	Nyquist contour	مسیر نایکوئیست
Summing point	نقطه جمع	Root contours	مسیرهای ریشه
Take-off point	نقطه خروج	Auxillary equation	معادله کمکی
Operating point	نقطه کار	Characteristic equation	معادله مشخصه
Set-point	نقطه نشاندۀ	Inverse unstable	معکوس ناپایدار
Energy-storage	نگهدارنده - انرژی	Routh criteria	معیار روث
Polar plot	نمودار قطبی	Hurwitz criteria	معیار هرویتز
Direct polar plot	نمودار قطبی مستقیم	Robust	مقاوم
Signal flow graph	نمودار گذر سیگنال	Eigenvalue	مقدار ویژه
	نمودار معکوس نایکوئیست	Root locus	مکان ریشه
Inverse Nyquist plot		Constant M-Locus	مکان M - ثابت
Nyquist plot	نمودار نایکوئیست	Source	منبع
Bode plots	نمودارهای بود	Curvilinear	منحنی الخط
System type	نوع سیستم	Parallel	موازی
Random noise	نویز تصادفی	Undamped	میرانشده
و		Critically damped	میرای بحرانی
Functional dependence	وابستگی تابعی	Overdamped	میرای شدید
Velocity input	ورودی سرعت	Underdamped	میرای ضعیف
Acceleration input	ورودی شتاب	Damping	میرایی
Unit ramp input	ورودی شیب واحد	Minimum phase	می نیم فاز
Reference input	ورودی مرجع	ن	
Singular	ویژه	Unstable	ناپایدار
ه		Uncertainty	نامعینی
Conductors	هادیها	Nonsingular	ناویژه

Intelligent

هوشمند

Inductance

هدایت

Heaviside

هوی ساید

Hurwitz

هرویتز

A

Acceleration input	ورودی شتاب	Cofactor	کوفاکتور
Accelerometer	شتاب سنج	Coil	کویل
Adaptive control	کنترل تطبیقی	Compensation	جبران سازی
Aileron	شپهر	Compensator	جبران ساز
Analytic function	تابع تحلیلی	Conditional frequency	فرکانس شرطی
Angle condition	شرط زاویه	Conditionally stable	پایدار شرطی
Angle deficiency	نقص زاویه	Conductors	هادیها
Array	آرایه	Constant M-Circle	دایره M - ثابت
Armature control	کنترل آرمیچر	Constant M-Locus	مکان M - ثابت
Asymptote	مجاذب	Continued fractions	کسره‌های متوالی
Asymptotic stability	پایداری مجانبی	Continuous-time	زمان - پیوسته
Auxillary equation	معادله کمکی	Control action	عمل کنترلی

B

Back emf	emf برگشتی	Controlled output	خروجی کنترل شده
Bandwidth	پهنای باند	Controller	کنترل کننده
Block diagram	دیاگرام بلوکی	Control signal	سیگنال کنترلی
Bode	بود	Control surfaces	سطوح کنترلی
Bode plots	نمودارهای بود	Conventional	سنتی
Branch	شاخه	Corner frequency	فرکانس گوشه
Break-away point	نقطه در شکست	Counter clockwise	در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت
Break frequency	فرکانس شکست	Critical	بحرانی
Break-in point	نقطه بر شکست	Critically damped	میرای بحرانی

C

Cascade	متوالی	Curvilinear	منحنی الخط
Causal	علی	Cutoff frequency	فرکانس قطع
Characteristic equation	معادله مشخصه	Cutoff rate	نرخ قطع
Clockwise	در جهت حرکت عقربه‌های ساعت	D	
Closed-loop	حلقه - بسته	Damped natural frequency	فرکانس طبیعی میرا شده

Damping میرایی

Damping ratio	نسبت میرایی	Field control	کنترل میدان
Decade	دهه	Final value theorem	قضیه مقدار نهایی
Decibel	دسی بل	Flux	فلوی
Delay time	زمان تأخیر	Flyball governor	گاورنر توپ گردان
Desired output	خروجی مطلوب	Forcing function	تابع وادارنده
Digital control	کنترل دیجیتال	Forward path	مسیر پیشرو
Direct polar plot	نمودار قطبی مستقیم	Free response	پاسخ آزاد
Direct transmission	انتقال مستقیم	Frequency response	پاسخ فرکانسی
Discrete-time	زمان - گسسته	Full order observer	رؤیتگر مرتبه کامل
Design	طراحی	Functional dependence	وابستگی تابعی
Disturbance signal	سیگنال اغتشاش	G	
Dominant poles	قطبهای غالب	Gain	بهره
Dynamic	دینامیک	Gain crossover frequency	فرکانس تقاطع بهره
E		Gain margin	حاشیه بهره
Eigenvalue	مقدار ویژه	H	
Elevator	بالابر	Heaviside	هوی ساید
Encirclement	دور زدن	Highpass filter	فیلتر بالاگذار
Energy-storage	نگهدارنده - انرژی	Homogeneous part	قسمت همگن -
Error	خطا	Hurwitz	هرویتز
Error coefficient	ضریب خطا	Hurwitz criteria	معیار هرویتز
Estimated	تخمین زده شده	I	
Estimation	تخمین	Impulse function	تابع ضربه
External description	توصیف خارجی -	Independent state variable	متغیر حالت ناوابسته .
External disturbances	اغتشاشات خارجی	Inductance	هدایت
F		Initial state	حالت اولیه
Fundamental matrix	ماتریس اساسی	Initial value theorem	قضیه مقدار اولیه
Feedback	فیدبک - فیدبک کردن	Input matrix	ماتریس ورودی
Feedback compensation	جبران سازی فیدبک	Input node	گره ورودی
Feedback control	کنترل فیدبک	Input-output data	داده های ورودی - خروجی
Feedforward control	کنترل پیش خور		

Insignificant poles	فقطهای کم اثر
Intelligent	هوشمند
Intelligent control	کنترل هوشمند
Internal description	توصیف داخلی
Inverse Nyquist plot	

نمودار معکوس نایکوئیست

Inverse unstable	معکوس ناپایدار
------------------	----------------

L

Laplace transform	تبدیل لاپلاس
Linear	خطی
Load	بار
Load disturbances	اختلالات بار
Load impedance	امپدانس بار
Log magnitude	لگاریتم دامنه
Loop	حلقه

Loop gain	بهره حلقه
-----------	-----------

Low pass filter	فیلتر پایین گذار
-----------------	------------------

M

Magnitude	دامنه
Magnitude condition	شرط دامنه
Mason's gain formula	فرمول بهره میسن
Maximum overshoot	فراجهش حداکثر
Minimal realization	تحقق می نیمال
Minimum phase	می نیم فاز
Mixed node	گره مخلوط
Modern control	کنترل مدرن
Motor shaft	شفت موتور
Multiplicity	تعدد
Multivariable control	کنترل چند متغیره

N

Natural frequency	فرکانس طبیعی
Negative feedback	فیدبک منفی
Nichols chart	چارت نیکولز
Node	گره
Noncausal	غیر علی
Nonlinear	غیرخطی
Nonminimum phase	غیر می نیم فاز
Nonsingular	ناویژه
Nontouching loops	حلقه های مجزا
N-th order system	سیستم مرتبه n ام
Nyquist	نایکوئیست
Nyquist contour	مسیر نایکوئیست
Nyquist plot	نمودار نایکوئیست

O

Observability	ماتریس رؤیت پذیری
Observable	رؤیت پذیر
Observation error	خطای رؤیت
Observer	رؤیتگر
Observer matrix	ماتریس رؤیتگر
Octave	اوکتاو
Offset	افست
Open-loop	حلقه باز
Operating point	نقطه کار
Order	مرتبه
Output node	گره خروجی
Output matrix	ماتریس خروجی
Overdamped	میرای شدید
Overshoot	فراجهش

P

Parabolic error constant	ثابت خطای سهموی
Parabolic function	تابع سهموی
Parallel	موازی
Path	مسیر
Path gain	بهره مسیر
Peak resonance	تشدید ستیغ
Peak time	زمان ستیغ
Phase	فاز
Phase crossover frequency	فرکانس تقاطع فاز
Phase lag	پس فاز
Phase lag-lead	پس - پیش فاز
Phase lead	پیش فاز
Phase margin	حاشیه فاز
Phase shift	انتقال فاز
Phasor diagram	دیاگرام فازور
Physical variables	متغیرهای فیزیکی
Pitch	فراز
Plant	دستگاه
Polar plot	نمودار قطبی
Pole	قطب
Pole placement	جایابی قطب
Pole-zero cancellation	حذف قطب - صفر
Polynomial function	تابع چند جمله‌ای
Process	فرایند
Proper	سره، معمول
Proportional- Derivative	تناسبی مشتقی
Proportional- Integral	تناسبی انتگرال

R

Ramp error constant	ثابت خطای شیب
Ramp function	تابع شیب
Random	تصادفی
Random noise	نویز تصادفی
Realization	تحقق
Reconstruction	بازسازی
Reduced- order observer.	

رویتگر مرتبه کاهش یافته

Reference input	ورودی مرجع
Regulator	رگلاتور
Relative damping ratio	نسبت میرایی نسبی
Resonant frequency	فرکانس تشدید
Resonant peak	ستیغ تشدید
Response	پاسخ
Rise time	زمان صعود
Robust	مقاوم
Root contours	مسیرهای ریشه
Root locus	مکان ریشه
Routh array	آرایه روث
Routh criteria	معیار روث
Rudder	سکان

S

Semilog paper	کاغذ نیمه لگاریتمی
Sensitivity	حساسیت
Series	سری
Series compensation	جبران‌سازی سری
Servo	سرو
Servomechanism	سرو مکانیزم
Set-point	نقطه نشاند

Settling time	زمان استقرار	T	
Signal flow graph	نمودار گذر سیگنال	Take-off point	نقطه خروج
Singular	ویژه	Time constant	ثابت زمانی
Sink	سینک	Time delay	تاخیر زمانی
Sinusoidal function	تابع سینوسی	Time delayed	تاخیر دار
Solenoid	سولنوئید	Time domain	حوزه زمان
Source	منبع	Time invariant	تغییرناپذیر با زمان
Spiral	حلزونی	Time varying	تغییرپذیر با زمان
Spirule	اسپایرول	Thrust	پیشران
Stability	پایداری	Tolerance	تولرانس
Stabilization	پایدارسازی	Torsional spring constant	ثابت فنر پیچشی
State	حالت	Torque	گشتاور
State controllable	کنترل پذیر حالت	Transfer function	تابع تبدیل
State feedback	فیدبک حالت	Transient response	پاسخ گذرا
State matrix	ماتریس حالت	Transmittance	انتقال
State space	فضای حالت	U	
State transition matrix	ماتریس انتقال حالت	Uncertainty	نامعینی
State uncontrollable	کنترل ناپذیر حالت	Undamped	میراننده
State variable	متغیر حالت	Underdamped	میرای ضعیف
State vector	بردار حالت	Unit ramp input	ورودی شیب واحد
Steady-state error	خطای حالت ماندگار	Unit step	پله واحد
Steady-state response	پاسخ حالت ماندگار	Unknown system	سیستم ناشناخته
Step-error constant	ثابت خطای پله	Unstable	ناپایدار
Step function	تابع پله	V	
Strictly proper	اکیداً سره، اکیداً معمول	Velocity input	ورودی سرعت
Summing point	نقطه جمع	Z	
Super position principle	اصل جمع آثار	Zero	صفر
System identification	شناسایی سیستم	Zero input response	پاسخ ورودی صفر
System order	مرتبه سیستم	Zero state response	پاسخ حالت صفر
System type	نوع سیستم	Ziegler-Nichols	زیگلر - نیکولز

فهرست راهنما

- آرایه روث، ۱۳۸-۱۴۰
- موارد خاص در تشکیل آرایه روث، ۱۴۰-۱۴۵
- اثرات اضافه کردن صفر و قطب به سیستم، ۱۱۳-۱۱۸
- اثر صفرهای اضافی، ۱۱۸
- اثر قطبهای غالب اضافی، ۱۱۵
- اسپایرول، ۱۷۲
- اغتشاف، ۵، ۱۸
- اثر فیدبک بر اغتشاش، ۱۲۸-۱۳۱
- اغتشاف افست، ۱۲۹
- اغتشاف بار، ۱۲۹
- اغتشاف خارجی، ۱۲۸
- بردار حالت، ۵۳، ۴۰۸
- بردار خروجی، ۴۰۸
- بردار ورودی، ۴۰۸
- پاسخ حالت گذر، ۹۶-۱۱۳
- پاسخ حالت ماندگار، ۹۱-۹۵
- پاسخ حالت ماندگار به ورودی پله، ۹۱
- پاسخ حالت ماندگار به ورودی چند جمله‌ای، ۹۴
- پاسخ حالت ماندگار به ورودی سینوسی، ۹۴
- پاسخ حالت ماندگار به ورودی شیب، ۹۱
- پاسخ حالت - صفر، ۴۱۴
- پاسخ فرکانسی، ۱۰، ۲۱۶، ۲۲۱، ۳۰۳
- ارتباط بین پاسخ گذرای پله و پاسخ فرکانسی، ۳۱۷-۳۲۰
- پاسخ فرکانسی حلقه - بسته، ۳۰۷-۳۱۵
- مشخصه‌های عملکرد براساس پاسخ فرکانسی، ۳۱۵-۳۱۷
- پاسخ میرای بحرانی، ۹۸
- پاسخ میرای شدید، ۹۷
- پاسخ میرای ضعیف، ۱۰۰
- مشخصه‌های پاسخ میرای ضعیف، ۱۰۲
- پاسخ ورودی - صفر، ۴۱۲
- پایداری، ۱۳۶-۱۴۷، ۳۳۲، ۳۳۶، ۴۱۷
- آزمونهای پایداری، ۱۳۶-۱۴۷
- پایداری در فضای حالت، ۴۱۷
- پایدار شرطی، ۲۸۶
- پیش‌بند، ۳۲۰، ۳۳۶
- تابع تبدیل، ۲۴-۵۳، ۹۱، ۱۰۳، ۱۱۹، ۱۳۷، ۱۶۱، ۲۲۴، ۲۵۱، ۳۰۷، ۳۳۸، ۴۱۶
- اثر اضافه کردن صفر و قطب به تابع تبدیل، ۱۱۳-۱۱۸
- بدست آوردن معادلات حالت از تابع تبدیل، ۵۳-۵۹
- تابع تبدیل سیستم مرتبه دوم، ۱۰۳
- تابع تبدیل سینوسی، ۲۱۹
- تابع تبدیل عنصر تأخیر خالص، ۲۵۳
- تابع تبدیل غیر می نیمه فاز، ۲۵۱
- تابع تبدیل می نیمه فاز، ۲۵۱
- تابع تبدیل معادل، ۱۲۰
- حذف صفر - قطب در تابع تبدیل، ۴۳۳-۴۳۴
- شناسایی تابع تبدیل، ۲۵۶-۲۶۱
- کنترل پذیری و رؤیت پذیری در تابع تبدیل، ۴۳۱-۴۳۴
- تابع حساسیت، ۱۳۳
- تأخیر خالص، ۲۵۳
- تأخیر زمانی، ۲۱۳، ۲۸۸
- تنظیم پارامترهای PID، ۳۵۰، ۴۰۶
- تبدیل لاپلاس، ۲۳، ۲۵
- تبدیل لاپلاس در حل معادله فضای حالت، ۴۱۴، ۴۱۶
- تحلیل خطای حالت - ماندگار، ۱۱۸-۱۲۶
- تحلیل در حوزه زمان، ۸۵-۱۴۷
- تحلیل در حوزه فرکانسی، ۲۱۵-۳۲۲
- تحلیل فضای حالت، ۴۰۷-۴۳۴
- تخمین متغیرهای حالت، ۴۴۰
- ثابت خطا، ۱۲۳

- ثابت خطای پله، ۱۲۳ - دامنه ستیغ تشدید، ۳۱۷
- ثابت خطای سهموی، ۱۲۵ - تغییرات دامنه، ۲۱۶
- ثابت خطای شیب، ۱۲۴ - لگاریتم دامنه، ۲۲۲
- ثابت زمانی، ۹۳ - سیستم حلقه - بسته با دامنه یکسان، ۳۰۸
- اثرات فیدبک بر ثابت زمانی، ۱۲۶ - ۱۲۸ - دترمینان هروتیز، ۱۴۵
- جبران ساز، ۳۳۲ - دیاگرام های بلوکی، ۲۳
- جبران ساز پس فاز، ۳۴۲ - ۳۴۳ - اجزاء اصلی دیاگرام های بلوکی، ۳۰
- جبران ساز پس - پیش فاز، ۳۴۳ - ۳۴۷ - جبر دیاگرام های بلوکی، ۳۱
- جبران ساز پیش فاز، ۳۳۸ - ۳۴۲ - رسم دیاگرام های بلوکی سیستم های فیزیکی، ۳۴
- جبران سازی، ۳۳۲ - دیاگرام بود، ۲۱۵، ۲۲۰
- جبران سازی سری، ۳۳۳ - ترسیم دیاگرام بود، ۲۲۵، ۲۴۷
- جبران سازی سری - موازی، ۳۳۳ - ریشه های معادله مشخصه، ۴۱۷
- جبران سازی متوالی، ۳۳۳ - رؤیت پذیری، ۴۰۷
- جبران سازی موازی، ۳۳۳ - آزمون رؤیت پذیری، ۴۲۷ - ۴۳۱
- عوامل مختلف در انتخاب روشهای جبران سازی، ۳۳۴ - تعریف و مفهوم اولیه رؤیت پذیری، ۴۲۴ - ۴۲۵
- جبران سازی با استفاده از چارت نیکولز، ۳۹۱ - ۳۹۸ - رؤیت پذیری در توابع تبدیل، ۴۳۱ - ۴۳۴
- جبران سازی با استفاده از مکان ریشه، ۳۵۱ - ۳۷۳ - رؤیتگر، ۴۰۷
- جبران سازی با استفاده از نمودارهای بود، ۳۷۴ - ۳۹۱ - جابایی قطب با رؤیتگر، ۴۴۲ - ۴۴۹
- جبران سازی در فضای حالت، ۴۰۹ - رؤیتگر مرتبه کامل، ۴۴۲
- حاشیه بهره، ۲۹۹ - طراحی رؤیتگر، ۴۴۰ - ۴۴۲
- حاشیه فاز، ۲۹۹ - زمان استقرار، ۱۰۲، ۱۰۹، ۱۱۰
- حساسیت، ۸۵، ۱۳۲ - زمان تأخیر، ۱۰۲، ۱۰۸
- اثر فیدبک بر حساسیت، ۱۳۱ - ۱۳۶ - زمان ستیغ، ۱۰۶، ۱۰۸
- تابع حساسیت، ۱۳۳ - زمان صعود، ۱۰۲، ۱۰۸
- خطا، ۱۱۸ - سیستم حلقه - باز، ۴، ۲۰
- اثر فیدبک بر خطا، ۱۲۶ - سیستم حلقه - بسته، ۶، ۲۰
- خطای حالت ماندگار، ۱۱۸، ۱۲۲ - سیستم خطی، ۱۹
- خطای رؤیت، ۴۴۱ - سیستم غیرخطی، ۱۹
- خطای سیستم، ۱۸ - خطی سازی سیستم غیرخطی، ۸۱ - ۸۳
- خطای گذرا، ۱۲۲ - سیستم مرتبه دوم، ۹۶ - ۱۱۳
- خطای ناشی از ورودی پله، ۹۱ - شرط دامنه، ۱۶۹
- خطای ناشی از ورودی سهموی، ۱۲۵ - شرط زاویه، ۱۷۰
- خطای ناشی از ورودی شیب، ۹۱ - طراحی جبران سازها با چارت نیکولز، ۳۹۱ - ۳۹۸
- نامنه، ۹۴، ۲۱۵، ۲۱۸، ۳۰۷، ۳۱۷ - طراحی جبران سازها با چارت نیکولز، ۳۹۱ - ۳۹۸

- متغیرهای حالت، ۲۳، ۵۲، ۵۳، ۵۶
- انتخاب متغیرهای حالت، ۵۹ - ۶۷
- متغیرهای حالت ناوابسته، ۶۱
- مسیرهای ریشه، ۱۹۹
- مسیر نایکوئیست، ۲۷۶، ۲۸۱
- معادله حالت، ۵۶، ۶۵
- رابطه بین تابع تبدیل و معادله حالت، ۶۵
- حل معادله حالت، ۴۰۹ - ۴۱۶
- معادله خروجی، ۵۶
- معادله کمکی، ۱۴۲
- معادله مشخصه، ۴۱۶، ۴۲۱
- معیار پایداری نایکوئیست، ۲۷۴ - ۲۷۹
- مکان ریشه، ۱۶۳
- خواص اساسی مکان ریشه، ۱۶۸ - ۱۷۰
- قواعد ترسیم مکان ریشه، ۱۷۲ - ۱۸۴
- طراحی با مکان ریشه،
- مقادیر ویژه سیستم، ۴۱۷
- موتورهای dc، ۲۳، ۶۷
- موتورهای dc کنترل آرمیچر، ۶۷
- موتورهای dc کنترل میدان، ۶۷، ۷۱
- emf برگشتی در موتورهای dc، ۷۱ -
- میرای بحرانی، ۹۷، ۹۸
- میرای شدید، ۹۷
- میرای ضعیف، ۹۷، ۱۰۰
- ناپایدار، ۱۳۷، ۴۱۷
- نسبت سیگنال به نویز، ۱۳۰
- نسبت میرایی، ۱۰۳
- نسبت میرایی نسبی، ۱۱۵
- نمودارهای دامنه و فاز، ۲۲۱
- نمودار قطبی، ۲۶۱
- نمودار قطبی مستقیم، ۲۶۱
- نمودار گذر سیگنال، ۳۶
- تعاریف مربوط به نمودار گذر سیگنال، ۳۸ - ۳۹
- خواص نمودار گذر سیگنال، ۳۹ - ۴۰
- طراحی جبران‌سازها با مکان ریشه، ۳۵۱ - ۳۷۳
- طراحی جبران‌سازها با نمودارهای بود، ۳۷۴ - ۳۹۱
- طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت، ۴۳۴ -
- طراحی جایابی قطب، ۴۳۵ - ۴۳۹
- طراحی جایابی قطب با روتینگر، ۴۴۲ - ۴۴۹
- طراحی روتینگر، ۴۴۰ - ۴۴۲
- فرانچیش حداکثر، ۱۰۲، ۱۰۸
- فرکانس تشدید، ۳۱۵
- فرکانس شرطی، ۱۰۴
- فرکانس طبیعی میراشده، ۱۰۴
- فرکانس طبیعی میرانشده، ۱۰۳
- فرکانس قطع، ۳۲۰
- قضیه مقدار نهایی، ۹۲، ۹۸
- قطب، ۱۳۷، ۴۱۸
- قطبهای غالب، ۱۱۴، ۱۱۵
- قطبهای کم اثر، ۱۱۴
- کنترل پذیری، ۴۰۷
- آزمون کنترل پذیری، ۴۲۶
- تعریف و مفهوم اولیه کنترل پذیری، ۴۲۲ - ۴۲۴
- کنترل پذیری در توابع تبدیل، ۴۳۱ - ۴۳۴
- کنترل پرواز، ۱۴ - ۱۶
- کنترل پیش خور، ۵
- کنترل حلقه - باز، ۲، ۲۰
- کنترل حلقه - بسته، ۵، ۶، ۲۰
- کنترل درجه حرارت، ۱۶ - ۱۷
- کنترل کننده‌های PD، PID، ۳۴۸ - ۳۵۱
- کنترل فیدبک، ۶، ۳۳۳
- گاورنو توپ گردان، ۹
- ماتریس اساسی، ۴۱۱ -
- ماتریس انتقال حالت، ۴۱۱
- ماتریس انتقال مستقیم، ۵۴، ۴۰۸
- ماتریس حالت، ۵۴، ۴۰۸، ۴۱۷
- ماتریس خروجی، ۵۴، ۴۰۸
- ماتریس ورودی، ۵۴، ۴۰۸

پایداری با نمودار نایکوئیست معکوس، ۲۹۳- ۲۹۴

نوع سیستم، ۱۲۰

ورودی تابع پله، ۸۸

ورودی تابع چند جمله‌ای، ۹۰

ورودی تابع سهموی، ۸۹

ورودی تابع سینوسی، ۹۰

ورودی تابع شیب، ۸۹

ورودی تابع ضربه، ۸۸

ورودی مرجع، ۱۷

جبر نمودار گذر سیگنال، ۴۰- ۴۲

فرمول بهره میسن برای نمودار گذر سیگنال، ۴۵-۴۷

نمودار نایکوئیست، ۲۱۵، ۲۶۱

نمودار نایکوئیست سیستم‌های نوع صفر، یک و دو،

۲۶۳- ۲۶۸

نمودار نایکوئیست سیستم تأخیردار، ۲۶۹

قواعد رسم نمودار نایکوئیست، ۲۷۱- ۲۷۳

پایداری با نمودار نایکوئیست، ۲۷۴- ۲۸۰

نمودار نایکوئیست معکوس، ۲۸۹