

بسم الله الرحمن الرحيم

کنترل مدرن

دکتر جعفر زارعی

دانشگاه صنعتی شیراز

دانشکده مهندسی برق و الکترونیک

نیمسال اول 91-92

نمایش سیستم‌های خطی

n مقدمه

n نمایش توسط معادلات دیفرانسیل

n نمایش توسط فضای حالت

n خطی سازی

n استخراج معادلات فضای حالت سیستم های الکتریکی

n استخراج معادلات فضای حالت سیستم های مکانیکی

با استفاده از قانون دوم نیوتن

n استخراج معادلات فضای حالت سیستم های مکانیکی

با استفاده از معادلات لاگرانژ

n نمایش معادلات فضای حالت توسط متغیرهای فاز

n نمایش معادلات فضای حالت توسط فرم‌های کانونیکال



1

مقدمه

طراحی سیستم‌های کنترل:

- دانستن مشخصات فیزیکی و یا مدل ریاضی سیستم جهت طراحی ضروری است.

• مدل سیستم:

• مدل تحلیلی ریاضی

• مدل های به دست آمده از شناسایی سیستم

• مدل های محاسبات نرم

• مدل ریاضی: روشهای تحلیل و طراحی سیستم های کنترل

در کنترل مدرن در فضای زمانی و از معادلات دیفرانسیل برای مدلسازی سیستم‌های دینامیکی استفاده می شود.

2

توصیف سیستم یا مدل سازی ریاضی:

- مدل تابع تبدیل

- طراحی های کلاسیک
- مدل سازی سیستم های ساده SISO
- توصیف ورودی خروجی یا تابع تبدیل
- توصیف ورودی خروجی یا خارجی از سیستم

- مدل فضای حالت

- طراحی های پیشرفته
- مدل سازی ساده سیستم های پیچیده: غیر خطی -
- چندمتغیره - متغیر با زمان
- توصیف با متغیرهای حالت یا داخلی از سیستم
- نمایش اندرکنش متغیرهای سیستم؛ ورودی ها -
- حالت ها - خروجی ها
- وارد کردن شرایط اولیه
- بهینه سازی

3

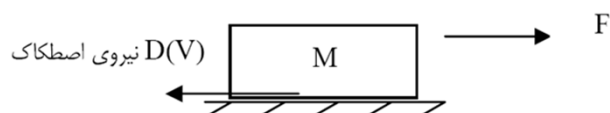
نمایش فضای حالت سیستم های غیر خطی و خطی

بسیاری از سیستم ها را می توان توسط یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه یک مدل سازی نمود.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی

مثال: حرکت جرم M تحت نیروی F را در نظر بگیرید.



4

نمایش فضای حالت سیستم های غیرخطی و خطی

با استفاده از قانون دوم نیوتن:

$$M \frac{dv}{dt} = F - D(v) \quad (1-1)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{M} - \frac{D(v)}{M} \quad (2-1)$$

لذا معادلات حالت به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{F}{M} - \frac{D(v)}{M} \\ \frac{dx}{dt} = v \end{cases} \quad (3-1)$$

این مدل با توجه به وجود تابع غیرخطی از سرعت $(D(v))$ ، یک فضای حالت غیرخطی را نشان می دهد.

5

نمایش فضای حالت سیستم های غیرخطی و خطی

در حالت کلی بسیاری از مدل های سیستم های مختلف صنعتی را می توان به صورت دسته ای از **معادلات دیفرانسیل مرتبه اول** نمایش داد. که به آن معادلات حالت سیستم گفته می شود:



$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n, u_1, u_2, \mathbf{L}, u_r, t) \quad (4-1)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n, u_1, u_2, \mathbf{L}, u_r, t)$$

$$y_1 = g_1(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n, u_1, u_2, \mathbf{L}, u_r, t)$$

$$y_m = g_m(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n, u_1, u_2, \mathbf{L}, u_r, t)$$

که در آن متغیرهای $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ را متغیرهای حالت سیستم می نامیم

6

نمایش فضای حالت سیستم های غیرخطی و خطی

متغیرهای حالت به صورت طبیعی از معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم قابل انتزاع می باشند.

در حالت کلی معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستمها به فرم زیر می باشد:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ y = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases} \quad (5-1)$$

توابع f_i تابعی از زمان نبوده لذا این توابع را **نامتغیر با زمان** می نامند. علاوه بر آن اگر توابع f_i ، g_i نسبت به متغیرهای x و u خطی باشند، سیستم نهایی را **”سیستم خطی نامتغیر با زمان“** یا LTI می نامیم.

7

در این درس عمدتاً تمرکز ما بر روی سیستم های خطی می باشد. بنابراین f و g توابع خطی می باشند. در این صورت سیستم را خطی نامیده و با معادلات کلی زیر نمایش داده می شوند:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$$

فضای حالت یک سیستم خطی متغیر با زمان

$$y(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\text{ماتریس حالت} \quad n \times n \quad \text{ماتریس} \quad A(t)$$

$$\text{ماتریس ورودی} \quad n \times m \quad \text{ماتریس} \quad B(t)$$

$$\text{ماتریس خروجی} \quad l \times n \quad \text{ماتریس} \quad C(t)$$

$$\text{ماتریس انتقال بین ورودی و خروجی} \quad l \times m \quad \text{ماتریس} \quad D(t)$$

8

نکته 1: اگر درجه صورت تابع تبدیل از مخرج آن کوچکتر باشد، آنگاه $D(t) = 0$ خواهد بود.

نکته 2: در صورتی که ماتریسهای فوق با زمان تغییر نکنند، خواهیم داشت:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

فضای حالت یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان

$$y = Cx(t) + Du(t)$$

9

خطی سازی سیستم های غیرخطی

چند واقعیت کلیدی

- سیستمهای واقعی و صنعتی دارای دینامیک غیرخطی می باشند.
- به منظور استفاده از تکنیکهای طراحی کنترل کننده های خطی لازم است ابتدا معادلات غیرخطی سیستم را به **صورت ریاضی** خطی سازی کنیم.

انتخاب درست نقاط کار:

- در سیستمهای کنترل، تقریب خطی از یک مدل ریاضی غیر خطی زمانی خوب عمل می کند که بدانیم تغییرات خروجی سیستم حول نقطه کار سیستم می باشد.
- لذا تقریب خطی به شرط آنکه پاسخ سیستم همواره در نزدیکی نقطه کار سیستم باشد از درجه اعتبار خوبی برخوردار است.
- سیستم های کنترل خطی، فرایندهای پیچیده غیرخطی را در نقاط کار با موفقیت کنترل می کنند.

• 10

خطی سازی با بسط سری تیلور تابع تحلیلی

یک روش کاربردی و موفق در خطی سازی معادلات غیر خطی سیستم، براساس **بسط سری تیلور** است.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^n$$

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \dots$$

نقطه x_0 را **نقطه کار** یا **نقطه تعادل** می نامند.

11

خطی سازی با بسط سری تیلور تابع تحلیلی

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x-x_0)$$

با صرف نظر کردن از عبارات مرتبه بالاتر

در حالت کلی تر که تابع برداری f به چندین متغیر مانند $x_1, x_2, \dots, x_n$ وابسته است، خواهیم داشت. که در آن

$$f(x) \approx f(x_0) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x-x_0)$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \quad x = |x_1 x_2 \dots x_n|^T$$

12

خطی سازی با بسط سری تیلور تابع تحلیلی

ماتریس $\frac{\partial f}{\partial x}$ را ماتریس ژاکوبین نامیده و به صورت J_x نشان داده می‌شود.

$$(J_x)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (i, j) \text{ امین عنصر ماتریس } J_x \text{ عبارتست از:}$$

با اعمال روند خطی سازی بالا به معادلات غیر خطی سیستم؛

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[x(t), u(t), t] \\ y(t) &= g[x(t), u(t), t] \end{aligned}$$

حول نقطه کار (x_0, u_0) و با تعریف

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + \Delta x(t) \\ u(t) &= u_0(t) + \Delta u(t) \end{aligned}$$

13

خطی سازی با بسط سری تیلور تابع تحلیلی

که در آن $\Delta x, \Delta u$ به ترتیب انحرافات کوچک حول نقطه کار را می‌دهند، داریم

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) + \Delta \dot{x}(t) &= f(x_0, u_0, t) + J_x(x_0, u_0, t)\Delta x(t) \\ &\quad + J_u(x_0, u_0, t)\Delta u(t) + \text{بالاترین مرتبه} \end{aligned}$$

و لذا با صرفنظر کردن از عبارات مرتبه بالاتر، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) &= A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t) \\ A(t) &= J_x(x_0, u_0, t) \quad B(t) = J_u(x_0, u_0, t) \end{aligned}$$

که در آن

و معادله غیرخطی خروجی را بطور مشابه بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \Delta y(t) &= C(t)\Delta x(t) + D(t)\Delta u(t) \\ C(t) &= g_x(x_0, u_0, t) \quad D(t) = g_u(x_0, u_0, t) \end{aligned}$$

که در آن

14

خطی سازی با بسط سری تیلور تابع تحلیلی

g_u و g_x به ترتیب ماتریس های ژاکوبین $g(\cdot)$ بر حسب $x(t)$ و $u(t)$ هستند.

در صورتیکه سیستم **تغییر ناپذیر با زمان** باشد، با باز نویسی معادلات فوق، معادلات حالت و خروجی خطی سازی شده سیستم حول نقطه کار به صورت زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

نکته: - خطاهای مدل سازی به علت نادیده گرفتن عبارت های مرتبه بالاتر.

- پیدایش مفهوم مقاومت سیستم کنترل و طراحی کنترل مقاوم

15

خطی سازی با بسط سری تیلور تابع تحلیلی

مثال: معادلات غیر خطی سیستمی عبارتند از:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) - \sin 3x_2(t) + u_1^3(t) - u_2(t) = f_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) - u_1(t) + x_1(t)e^{-x_2(t)} = f_2(t)\end{aligned}$$

نقطه کار مبدا $\hat{u}(t) = 0$ و $\hat{x}(t) = 0$ را در نظر بگیرید.

16

خطی سازی با بسط سری تیلور تابع تحلیلی

ماتریس های ژاکوبین $J_x[\hat{x}(t), \hat{u}(t), t]$ و $J_u[\hat{x}(t), \hat{u}(t), t]$ عبارتند از:

$$J_x[.] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$J_u[.] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

17

خطی سازی با بسط سری تیلور تابع تحلیلی

از معادلات غیر خطی سیستم در نقطه کار مبداء داریم:

$$J_x[.] = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_u[.] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین، معادله خطی شده فضای حالت سیستم در نقطه کار مبداء عبارت

است از:

$$\Delta \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Delta x(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Delta u(t)$$

که در آن $\Delta u(t)$ و $\Delta x(t)$ تغییرات جزئی حول نقطه کار می باشند.

18

انتخاب متغیرهای حالت

به منظور استخراج متغیرهای حالت یک سیستم فیزیکی، مشخص بودن یکی از عوامل زیر ضروری می باشد:

- (1) معادلات دیفرانسیل توصیف کننده خروجی - ورودی
- (2) معادلات حاکم بر اجزاء مختلف سیستم فیزیکی
- (3) بلوک دیاگرام یا سیگنال فلوگراف

روش های انتخاب متغیرهای حالت به سه دسته اصلی تقسیم می شوند:

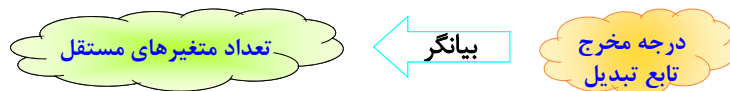
- (1) استفاده از متغیرهای فیزیکی
- (2) استفاده از متغیرهای فاز
- (3) استفاده از متغیرهای کانونیکال

19

اصول انتخاب متغیرهای حالت

در تعیین متغیرهای حالت باید به چند نکته مهم توجه کرد

نکته 1:



نکته 2:



نکته 3:

الف) باید توجه داشته باشیم که معادلات فضای حالت نهایی باید می نیمال باشند.
ب) متغیرهای حالت یک سیستم باید بصورت مستقل از هم انتخاب شوند.

20

1- تعیین فضای حالت از روی مدل سازی سیستم به کمک متغیرهای فیزیکی

۷ بطور کلی دو دیدگاه جهت مدلسازی وجود دارد:

الف: تقسیم نمودن سیستم به اجزاء تشکیل دهنده و مدلسازی آن توسط روابط ریاضی.
ب: شناسایی پارامتری سیستم: در این حالت آزمایش‌هایی بر روی سیستم انجام می‌پذیرد و با بررسی نتایج حاصله یک مدل ریاضی برای سیستم تعیین می‌شود.

۷ در راستای پایه‌گذاری و تبیین سیستم، مدل به دست آمده باید مبین پارامترهای زیر باشد:

- ارتباط دینامیکی بین پارامترهای دستگاه
- ورودی عامل
- خروجی قابل اندازه‌گیری باشد.

21

نکاتی که در مدلسازی سیستمها باید در نظر داشت

۷ مدلسازی دربرگیرنده اطلاعات درونی سیستم بوده و همچنین ارتباط بین *effect* و *cause* متغیرهای سیستم می‌باشد.

۷ پایه و اساس اصلی جهت انجام کار استفاده از قوانین فیزیکی حاکم بر سیستم می‌باشد.

۷ انتخاب متغیرهای حالت در روش متغیرهای فیزیکی براساس عناصر موجود نگهدارنده انرژی سیستم بنا می‌شود.

۷ متغیر فیزیکی در معادله انرژی برای هر عنصر نگهدارنده انرژی می‌تواند به عنوان متغیر حالت سیستم انتخاب شود.

۷ لازم به یادآوری است که متغیرهای فیزیکی باید به نحوی انتخاب شوند که مستقل باشند.

22

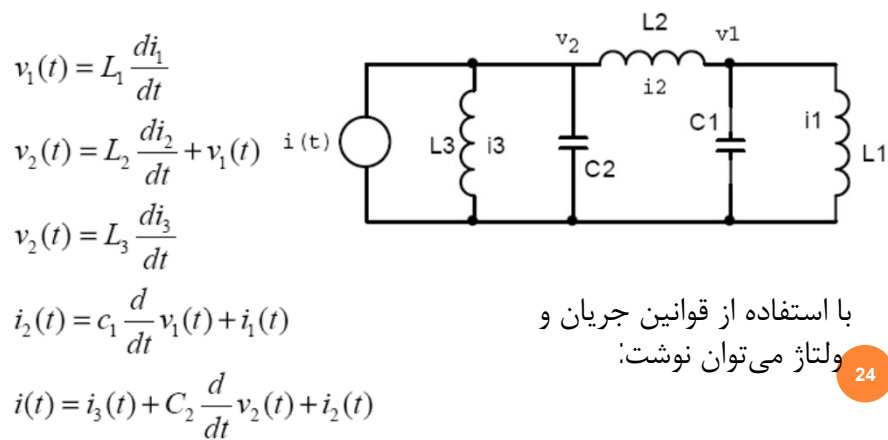
معرفی عناصر نگهدارنده انرژی

متغیر فیزیکی	انرژی	عنصر
ولتاژ V_C	$\frac{CV^2}{2}$	خازن C
جریان i_L	$L\frac{i^2}{2}$	سلف L
سرعت انتقال v	$M\frac{V^2}{2}$	جرم M
سرعت چرخشی ω	$\tau\frac{\omega^2}{2}$	ممان اینرسی
جابجایی x	$K\frac{x^2}{2}$	فنر K

23

سیستم‌های الکتریکی

با استفاده از قوانین ولتاژ و جریان معادلات حالت سیستم‌های الکتریکی تعیین می‌گردند.



با استفاده از قوانین جریان و ولتاژ می‌توان نوشت:

24

سیستم‌های الکتریکی

با نوشتن معادله حلقه دربرگیرنده L_3, L_2, L_1 و انتگرال گیری از آن داریم:

$$L_3 i_3(t) = L_2 i_2(t) + L_1 i_1(t) + k \quad (7-1)$$

که در آن K ثابت انتگرال گیری و تابعی از شرایط اولیه است، که با فرض شرایط اولیه صفر $K=0$ خواهد شد.

این معادله نشان می دهد که جریان سلف L_3 مستقل نبوده و تابعی از جریان سلفهای دیگری است. لذا علیرغم وجود پنج المان ذخیره و تبدیل انرژی L_1, L_2, L_3, C_1, C_2

چهار متغیر حالت برای نمایش معادلات سیستم کافی است این چهار متغیر را بر حسب جریان‌های سلف و ولتاژهای خازن انتخاب می کنیم.

25

سیستم‌های الکتریکی

$$x_1(t) = v_1(t) \quad x_3(t) = i_1(t) \quad (8-1)$$

$$x_2(t) = v_2(t) \quad x_4(t) = i_2(t)$$

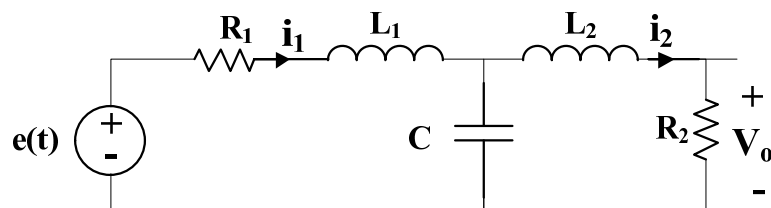
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{L_1}{L_3 C_2} & -\frac{L_2 + L_3}{L_3 C_2} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{C_2} u(t) \quad (9-1)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

ورودی سیستم جریان منبع i و خروجی سیستم ولتاژ v_1 می باشد.

26

مثال 2:



$$\begin{cases} e(t) - R_1 i_1(t) - L_1 \frac{di_1}{dt} - V_C(t) = f \\ V_C(t) - L_2 \frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 = f \\ i_c = i_1 - i_2 = C \frac{dv_c}{dt} \end{cases}$$

بردار متغیرهای حالت:

$$x = (i_1 \ i_2 \ v_c)^T$$

27

معادلات فضای حالت سیستم

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e(t)$$

$$y(t) = (0 \ R_2 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

28

سیستم‌های مکانیکی مدل سازی با کمک قانون نیوتن

(1) انتقالی (حرکت در طول خط مستقیم):

مجموع نیروها برابر است با حاصلضرب شتاب در جرم (m)

$$F = ma$$

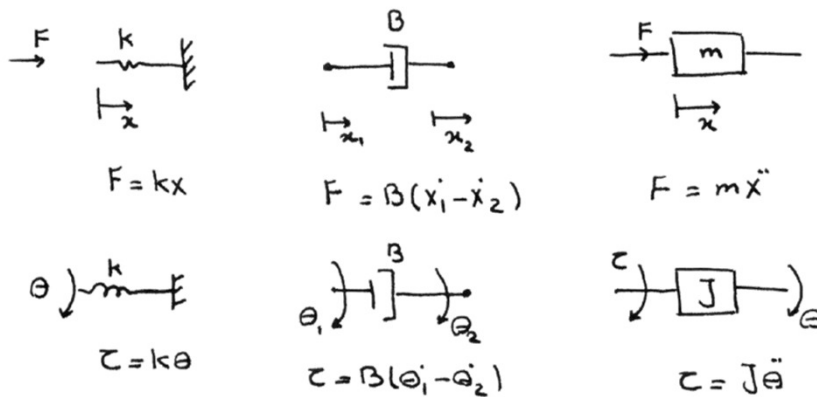
(2) دورانی:

مجموعه گشتاورها برابر است با حاصلضرب ممان اینرسی در شتاب زاویه‌ای

$$t = I \cdot \ddot{\theta}$$

29

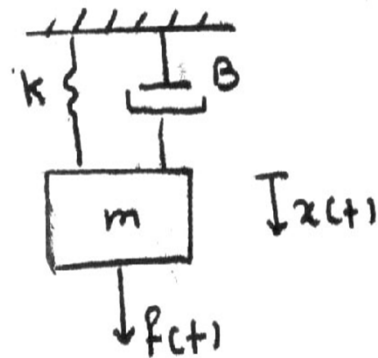
اجزای اصلی سیستم‌های مکانیکی



30

تمرین:

مدل فضای حالت سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید:



$$\text{if } \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$$



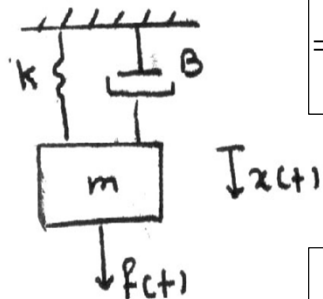
$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{B}{m}x_2 + \frac{1}{m}f(t) \end{cases}$$

31

$$m\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f(t)$$



$$\ddot{x} = -\frac{B}{m}\dot{x} - \frac{K}{m}x + \frac{1}{m}f(t)$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{B}{m}x_2 - \frac{K}{m}x_1 + \frac{1}{m}f(t) \end{cases}$$

مدل فضای حالت سیستم مکانیکی:

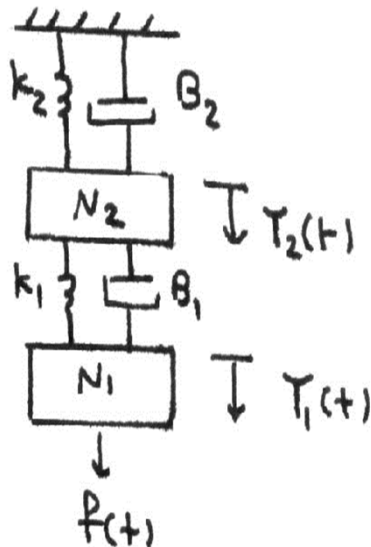
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} f(t)$$

$$y = (1 \ 0) x$$

32

تمرین:

مدل فضای حالت سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید:



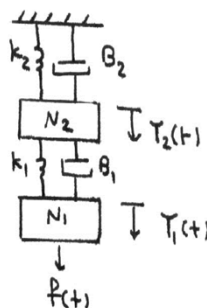
33

معادلات حاکم بر سیستم

$$N_1 \ddot{y}_1 = f(t) - B_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - K_1(Y_1 - Y_2)$$

$$N_2 \ddot{y}_2 = B_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + K_1(Y_1 - Y_2) - K_2 Y_2 - B_2 \dot{y}_2$$

معرفی متغیرهای حالت سیستم مکانیکی:



$$y_1 = x_1 \quad \dot{x}_1 = x_2$$

$$\text{if } y_2 = x_3 \quad \dot{x}_3 = x_4$$

$$y_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -\frac{B_1}{N_1} x_2 + \frac{B_1}{N_1} x_4 - \frac{k_1}{N_1} x_1 + \frac{k_1}{N_1} x_3 + \frac{1}{N_1} f(t)$$

$$y_2 = x_3 = x_4 \quad \dot{x}_4 = \frac{k_1}{N_4} x_1 - \frac{k_4 k_2}{N_2} x_3 - \frac{B_1 + V_2}{N_2} x_4 + \frac{B_1}{N_2} x_2$$

34

مدل فضای حالت سیستم مکانیکی مثال 3:

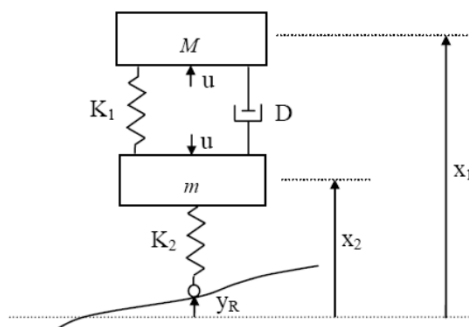
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{N_1} & -\frac{B_1}{N_1} & \frac{K_1}{N_1} & \frac{B_1}{N_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_1}{N_2} & \frac{B_1}{N_2} & -\frac{(K_1+K_2)}{N_2} & -\frac{(B_1+B_2)}{N_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{N_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} f(t)$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

35

سیستم‌های مکانیکی

مثال: سیستم تعلیق فعال خودرو



ورودی: u ورودی عملگر سیستم تعلیق فعال می باشد. اغتشاش جاده y_R به صورت ورودی اغتشاشی می باشد.

خروجی: خروجی مورد نظر در این سیستم نوسانات خودرو x_1 (نوسانات اتاق خودرو) می باشد که بایستی به حداقل برسد.

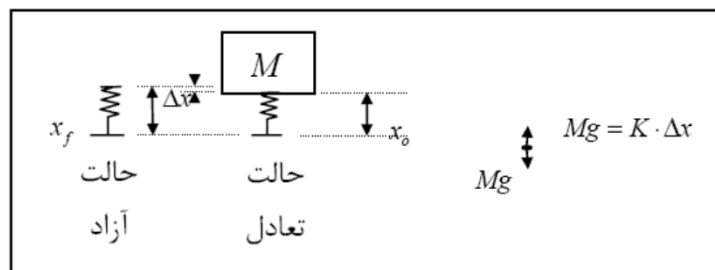
36

سیستم‌های مکانیکی

اصول فیزیکی حاکم:

نیروی فنر به صورت خطی $F = K \cdot \Delta x$ و نیروی کمک فنر به صورت استهلاک ویسکوزیته $F = D \cdot \dot{x}$ عمل می‌کند.

در حالت تعادل نیروی وزن با نیروی فنر برابر یا خنثی می‌گردد.



37

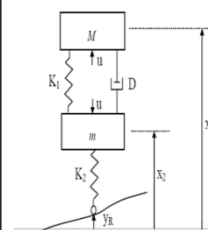
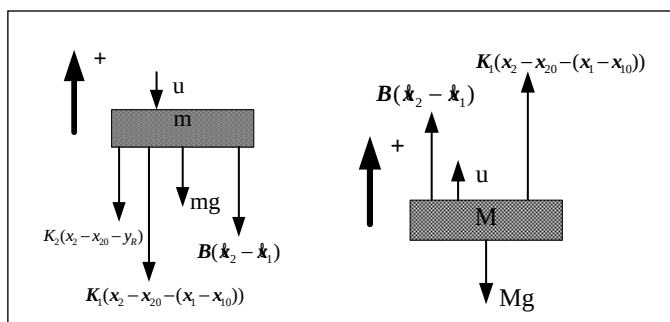
دیاگرام آزاد نیروها برای دو جرم m و M :

$$M \frac{dv}{dt} = \sum F_{ext}$$

با اعمال قانون نیوتن و در نظر گرفتن اثر نیرو وزن اجرام بر روی جابجایی اولیه فنرها

$$M \frac{dv_1}{dt} = -K_1(x_1 - x_2 - x_{10} + x_{20}) - D(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u - Mg$$

$$m \frac{dv_2}{dt} = K_1(x_1 - x_2 - x_{10} + x_{20}) + D(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - u - K_2(x - x_{20} - y_R) - mg$$



38

$$K_1(x_{10} - x_{20}) = Mg$$

$$K_1(x_{20} - x_{10}) + K_2 x_{20} = mg$$

در حالت تعادل داریم:

و معادلات حالت به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{x}_2 = v_2 \\ \dot{x}_3 = \dot{v}_1 = \frac{1}{M}[-K_1 x_1 + K_1 x_2 - D\dot{x}_1 + D\dot{x}_2] + \frac{1}{M}u \\ \dot{x}_4 = \dot{v}_2 = \frac{1}{m}[K_1 x_1 - K_1 x_2 + D\dot{x}_1 - D\dot{x}_2] - \frac{u}{m} - \frac{K_2}{m}x + \frac{K_2}{m}y_R \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

در شبیه سازی معادلات فوق x تغییرات خارج از نقطه کار محسوب می گردد.

39

شبیه سازی:

با در نظر گرفتن مقادیر عددی زیر:

$$M = 300Kg, m = 50Kg, K_1 = 3 \times 10^3 N/m, K_2 = 3 \times 10^4 N/m = D = 600 N/ms^{-1}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & 10 & -2 & 2 \\ 60 & -660 & 12 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0033 \\ -0.02 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 600 \end{bmatrix} y_R \quad (2-35)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

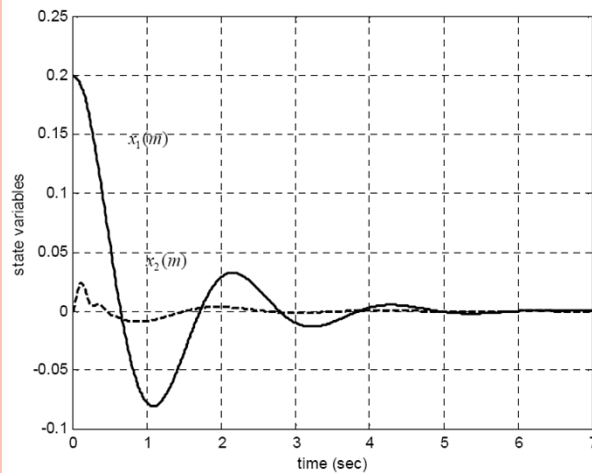
40

$initial(sys, x_o, t) \quad Lsim$

$$x_1(0) = 0.2, \quad x_2(0) = 0.0$$

$$v_1(0) = v_2(0) = 0$$

$$u(t) = y_r(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 7 \text{ sec}$$



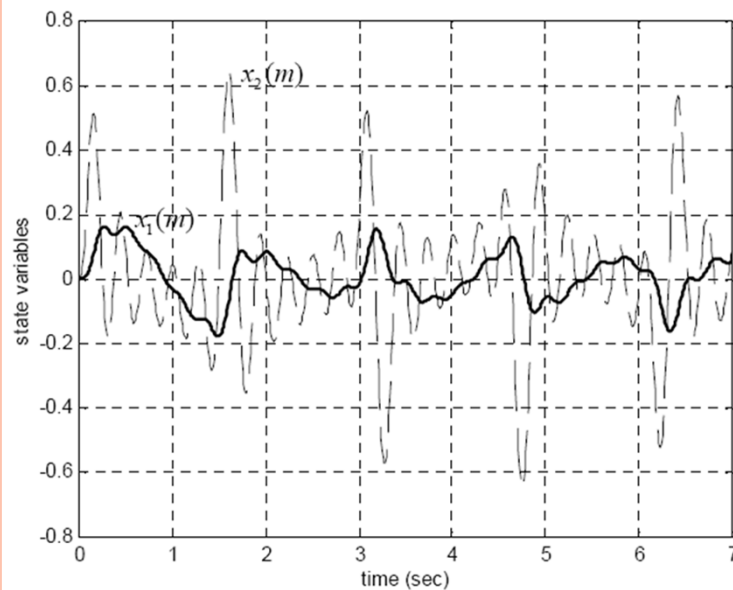
شبیه سازی Simulink:

با ورودی و شرایط اولیه:

همانگونه که در این شکل مشاهده می شود جابجائی بدنه خودرو و محور آن با سرعت مناسبی به سمت حالت تعادل خود میل می کنند.

41

پاسخ به اغتشاشات تصادفی جاده

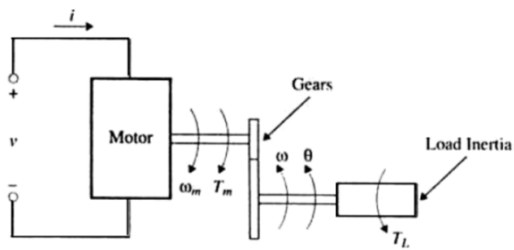


42

سیستم‌های الکترو مکانیکی

مثال: موتور DC مغناطیس دائم

فرض نمائید از این سیستم برای کنترل زاویه حرکتی یک ضد هوایی استفاده شود که دارای ممان اینرسی J می باشد. همچنین کلیه اغتشاشات وارد بر سیستم و دینامیکهای مدل نشده به صورت گشتاور خارجی T_L مدل شده است.



شکل (۷-۲) سرو موتور DC

ورودی سیستم: ولتاژ آرمیچر موتور v و گشتاور اغتشاش T_L دو ورودی کنترلی و اغتشاشی سیستم می باشند.

خروجی سیستم: خروجی سیستم زاویه میز ضد هوایی θ یا سرعت زاویه ای آن بسته به کاربرد $\omega = \dot{\theta}$ باشد.

43

سیستم‌های الکترو مکانیکی

اصول فیزیکی حاکم بر سیستم:

جعبه دنده:

$$N = \frac{\omega_m}{\omega} \quad \text{or} \quad N = \frac{\theta_m}{\theta} \quad \begin{array}{l} \text{زاویه موتور: } \theta_m \\ \text{زاویه بار: } \theta \end{array} \quad (1-11)$$

N : عبارتست از نسبت تعداد دندانه های چرخ دنده طرف بار به تعداد دندانه های چرخ دنده طرف موتور

در صورتیکه گشتاورهای تلفات و اصطکاک در جعبه دنده وجود نداشته باشد:

$$\frac{1}{N} = \frac{T_m}{T} \quad (1-12)$$

گشتاور تولید شده توسط موتور T_m در موتورهای DC با مغناطیس دائم، برابر است با:

$$T_m = K_1 \cdot \phi \cdot i = K_m \cdot i \quad (1-13)$$

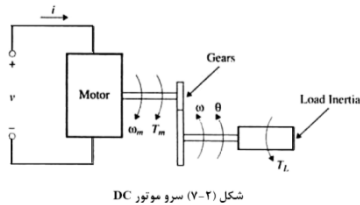
$$v_{Emf} = K_2 \cdot \phi \cdot \omega_m = K_m \cdot \omega_m \quad (1-14)$$

44

سیستم‌های الکترو مکانیکی

مدلسازی سیستم:

طبق قانون دوم نیوتن برای حرکت‌های زاویه‌ای:



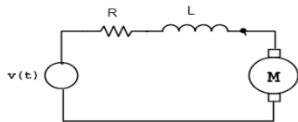
شکل (۷-۲) سرو موتور DC

$$T_m - T_L / N = (J_L / (N^2)) \ddot{\theta}_m \quad (1-15)$$

$$T_m = K_m i \quad (1-16)$$

$$\ddot{\theta}_m = \frac{K_m}{J_{eq}} i - \frac{N}{J_{eq}} T_L \quad (1-17)$$

$$J_{eq} = J_L / N^2$$



$$L \frac{di}{dt} + Ri = v - v_{emf}$$

معادله مدار الکتریکی:

45

سیستم‌های الکترو مکانیکی

مدلسازی سیستم:

معادله حالت اول:

$$\ddot{\theta}_m = \frac{K_m}{J_{eq}} i - \frac{N}{J_{eq}} T_L \quad (1-18)$$

معادله حالت دوم:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i + \frac{1}{L} v - \frac{K_m}{L} \dot{\theta}_m \quad (1-19)$$

معادله حالت سوم: مربوط به سرعت زاویه‌ای است.

$$\dot{\theta}_m = \omega_m \quad (1-20)$$

با توجه به خطی بودن معادلات میتوان معادلات را به فرم زیر نوشت:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad (1-21)$$

46

سیستم‌های الکترو مکانیکی

معادلات حالت سیستم:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_m \\ w_m \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K_m/J_{eq} \\ 0 & -K_m/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_m \\ w_m \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -N/J_{eq} \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ T_L \end{bmatrix} \quad (1-22)$$

در صورتیکه θ و ω را به عنوان خروجیهای سیستم در نظر بگیریم خواهیم داشت.

$$\begin{bmatrix} q_m \\ w_m \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_m \\ w_m \\ i \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

$$y = \begin{bmatrix} q_m \\ w_m \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} v \\ T_L \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} q_m \\ w_m \\ i \end{bmatrix}$$

بطوریکه:

سیستم‌های الکترو مکانیکی

شبیه سازی سیستم:

با داشتن مقادیر عددی پارامترهای سیستم:

$$K_m = 0.05 \text{ Nm/A}, \quad R = 1.2 \Omega, \quad L = 0.05 \text{ H},$$

$$J_m = 8 \times 10^{-4} \text{ Kg m}^2, \quad J = 2 \times 10^{-2} \text{ Kg m}^2, \quad N = 12$$

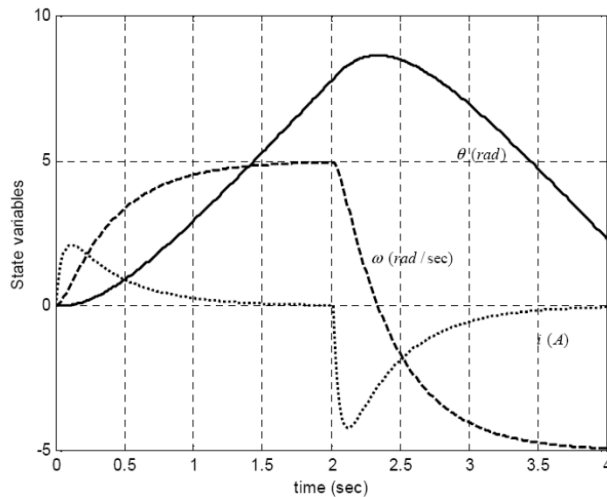
و با فرض آنکه متغیرهای حالت را ω و θ در طرف بار در نظر بگیریم، نمایش ماتریس‌های فضای حالت به صورت زیر در می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.438 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7.396 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v(t) \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 2 \\ -3 & 2 \leq t < 4 \end{cases}$$

با استفاده از MATLAB یا SIMULINK و ورودی مقابل میتوان تغییرات متغیرهای حالت سیستم را مشاهده نمود.

سیستم‌های الکترو مکانیکی



شبیه سازی سیستم:

پاسخ های سیستم سرو
موتور DC

49

2- نمایش معادلات فضای حالت توسط متغیرهای فاز

اگر فرض کنیم که یک سیستم دیفرانسیل مرتبه n ام به صورت زیر را داشته باشیم:

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u$$

با دانستن $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{n-1}(0)$ و ورودی $u(t)$ به ازای $t \geq 0$ رفتار آینده سیستم قابل درک یا تبیین می‌باشد. پس ما می‌توانیم $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{n-1}(t)$ را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب کنیم. به این روش، روش متغیرهای فاز می‌گویند.

50

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{نحوه انتخاب متغیرهای حالت:}$$

استخراج مدل فضای حالت برای معادله دیفرانسیل سیستم:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u \end{aligned}$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (y = x_1)$$

51

مثال 1: مطلوبست مدل فضای حالت سیستم زیر:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

حل: معادلات دیفرانسیل بیان شده توسط تابع تبدیل فوق بصورت زیر نوشته می شود:

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = u(t)$$

متغیرهای حالت

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

معادلات دینامیکی سیستم

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u \end{cases}$$

$$y = x_1$$

مدل فضای حالت

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] x$$

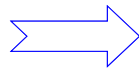
52

مثال 2: مطلوبست مدل فضای حالت سیستم زیر: $\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x + 4c = \ddot{r} + 5r$

حل: متغیرهای حالت:

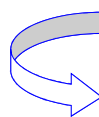
$$x = \begin{pmatrix} c \\ \dot{c} \\ \ddot{c} + ar \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 - ar \\ \dot{x}_3 &= -\ddot{c} + a\ddot{r} \end{aligned}$$



$$\ddot{x}_3 - a\ddot{r} + 2(x_3 - ar) + 3(x_2) + 4x_1 = \ddot{r} + 5r$$

پارامتر a را طوری انتخاب می‌کنیم که $\ddot{r}$ حذف شود. بنابراین $a = -1$



$$\ddot{x}_3 = -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3r$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} r$$

مدل فضای حالت سیستم:

$$y = [1 \ 0 \ 0]x$$

53

3- نمایش معادلات فضای حالت توسط فرمهای کانونیکال

هدف: با فرض مشخص بودن تابع تبدیل سیستم، تحقق‌های فضای حالت که از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند را بدست می‌آوریم.

این تحقق‌ها عبارتند از: $\left. \begin{aligned} &\text{الف) فرم کانونیکی کنترل پذیر} \\ &\text{ب) فرم کانونیکی مشاهده پذیر} \\ &\text{ج) فرم کانونیکی قطری (جردن)} \end{aligned} \right\}$

تابع تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

تبدیل لاپلاس ورودی: $u(s) \triangleq$ تبدیل لاپلاس خروجی: $y(s) \triangleq$

54

فرم کانونیکی کنترل پذیر

مدل فضای حالت:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] x + b_0 u(t)$$

ویژگی ها:

- (1) این تحقق همواره کنترل پذیر است.
- (2) در صورتیکه تابع تبدیل سیستم، قطب و صفر مشترکی نداشته باشند، این تحقق رویت پذیر خواهد بود.

55

فرم کانونیکی رویت پذیر

مدل فضای حالت:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & & & -a_{n-1} \\ & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & -a_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1) x + b_0 u(t)$$

ویژگی ها:

- (1) این تحقق همواره رویت پذیر است.
- (2) در صورتیکه تابع تبدیل سیستم، قطب و صفر مشترکی نداشته باشند، این تحقق کنترل پذیر خواهد بود.

56

فرم کانونیکی قطری (جردن)

حالت اول: اگر مقادیر ویژه سیستم، حقیقی و غیر تکراری باشند. $l_1 \neq l_2 \dots \neq l_n$

مدل فضای حالت:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} l_1 & & 0 \\ & l_2 & \\ 0 & & l_n \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n) x + b_0 u(t)$$

ویژگی ها:

(1) این تحقق همواره کنترل پذیر است.

(2) در صورتیکه $c_i \neq 0$ باشند، این تحقق رویت پذیر خواهد بود.

57

حالت دوم: اگر تعدادی از مقادیر ویژه سیستم، حقیقی و تکراری باشند.

$$l_1 = l_2 = l_3$$

$$l_4 \neq l_5 \neq l_6 \neq \dots \neq l_n$$

مدل فضای حالت:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} l_1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & l_1 & 1 & & \\ 0 & 0 & l_1 & & \\ & & & l_4 & \\ & & & & l_5 \\ 0 & & & & & l_n \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad \dots \quad c_n) x + b_0 u(t)$$

ویژگی ها:

(1) این تحقق همواره کنترل پذیر است اگر و فقط اگر آخرین سطر بلوکهای جردن مربوط به هر مقدار ویژه تکراری، در ماتریس B مستقل خطی (اگر تنها یک بردار باشد، مخالف صفر) باشند.

(2) این تحقق همواره رویت پذیر است اگر و فقط اگر اولین ستون بلوکهای جردن مربوط به هر مقدار ویژه تکراری، در ماتریس C مستقل خطی (اگر تنها یک بردار باشد، مخالف صفر) باشند.

58

بدست آوردن تابع تبدیل از معادلات فضای حالت

حالت اول: سیستمهای تک ورودی - تک خروجی (SISO)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

تبدیل لاپلاس

$$\begin{cases} Sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s) \\ Y(s) = Cx(s) + Du(s) \end{cases}$$

$$G(S) = C(SI - A)^{-1}B + D$$

تابع تبدیل

$$X(S) = (SI - A)^{-1}Bu(s)$$

$$y(s) = (C(SI - A)^{-1}B + D)u(s)$$

$$G(S) = \frac{Q(S)}{|SI - A|}$$

یعنی مقادیر ویژه ماتریس A همان قطبهای سیستم می باشند.

59

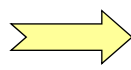
مثال: تابع تبدیل سیستم زیر را بدست آورید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_2 + 5u \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} u$$

$$y = x_1 + 2x_2$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} x$$

$$(SI - A) = \begin{pmatrix} S+5 & 1 \\ -3 & S+1 \end{pmatrix}$$



$$(SI - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} S+1 & -1 \\ 3 & S+5 \end{pmatrix} \quad \Delta = (S+2)(S+4)$$

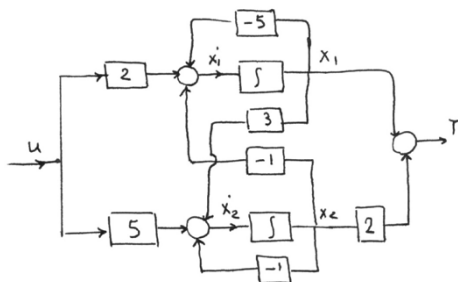


$$G(S) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} S+1 & -1 \\ 3 & S+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$



$$G(s) = \frac{12S + 59}{(S+2)(S+4)}$$

60



حالت دوم: سیستمهای چند ورودی - چند خروجی (MIMO)

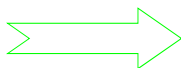
اگر بردار ورودی u بعدی و بردار خروجی y ، l بعدی باشد، آنگاه ماتریس G عبارت است از:

$$G = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{l1}(s) & \dots & G_{lm}(s) \end{pmatrix}$$

در واقع عنصر (i, j) ام از تابع G ، $G_{ij}(s)$ ، تبدیلی است که خروجی i ام را به ورودی j ام مربوط می‌سازد.

بنابراین:

$$G(s) = C(SI - A)^{-1} B + D$$



$$y(s) = G(s)u(s)$$

61