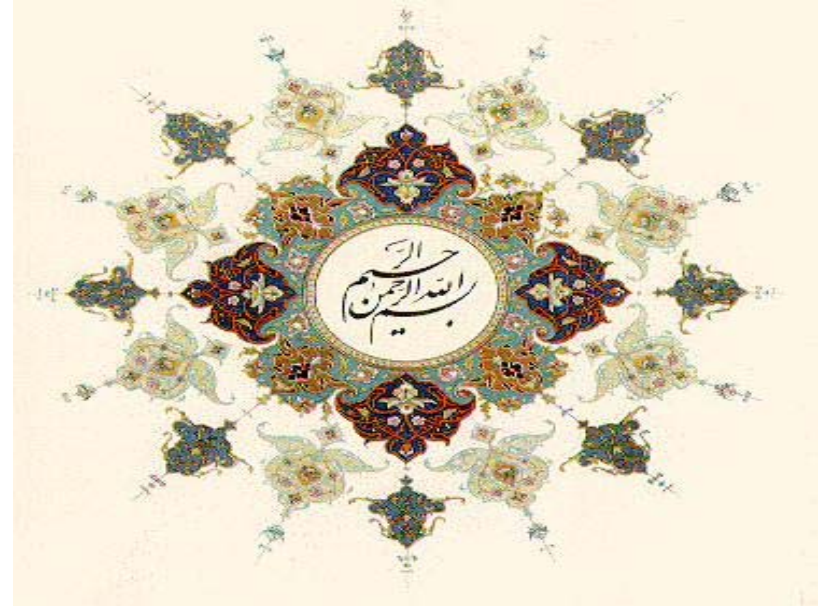




تأليف:

دکتر ممید رضا تقی راد



پیشگفتار

" "

n

n

LQR

LQR

فهرست

پیشگفتار ج

فهرست ز

فصل اول: مقدمه ۱

۱-۱) مقدمه ۱

۱-۲) عناصر فیزیکی سیستمهای کنترل ۲

۱-۳) عناصر مفهومی سیستمهای کنترل ۴

۱-۴) فرآیند طراحی کنترل کننده ۵

۱-۵) جمع بندی ۹

مراجع ۹

فصل دوم: نمایش سیستمهای خطی ۱۲

۲-۱) مقدمه ۱۲

۲-۲) نمایش فضای حالت ۱۲

۲-۳) مدلسازی سیستم بر اساس اصول فیزیکی ۱۶

۲-۳-۱) سیستمهای الکتریکی ۱۷

۲-۳-۲) سیستمهای الکترومکانیکی ۱۸

۲-۳-۳) سیستمهای مکانیکی ۲۳

۲-۳-۴) سیستمهای هیدرولیکی ۲۹

۲-۴) مدلسازی بر اساس روش لاگرانژ ۳۲

۲-۵) خطی سازی ریاضی ۳۹

۲-۶) نامعینی مدل ۴۵

۲-۷) جمع بندی ۴۷

مسائل ۴۸

مراجع ۶۲

فصل سوم: تئوری سیستمهای خطی ۶۴

۳-۱) مقدمه ۶۴

۳-۲) خصوصیات سیستمهای خطی ۶۴

۳-۳) حل معادلات حالت سیستمهای LTI ۶۷

۳-۳-۱) حل پاسخ همگن یا بدون ورودی ۶۷

۳-۳-۲) حل کامل معادلات حالت ۶۹

۳-۴) روشهای تعیین ماتریس انتقال حالت $\phi(t)$ ۷۱

۳-۴-۱) روش تبدیل لاپلاس ۷۱

۳-۴-۲) مودهای دینامیکی ۷۳

۳-۴-۳) روش کیلی-همیلتون ۷۷

۳-۴-۴) روش سیلوستر ۷۹

۳-۵) ماتریس تبدیل سیستمهای خطی ۸۱

۳-۶) قطب ها و صفرهای انتقال ۸۲

۳-۷) تبدیلهای همانندی ۸۵

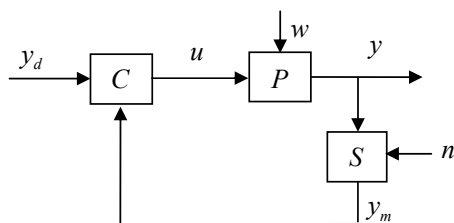
۳-۸) قطری سازی معادلات حالت (فرم جوردن) ۸۷

مراجع	۱۴۴
فصل پنجم: تحقق و پایداری سیستمهای <i>LTI</i>	۱۴۶
۵-۱) تحقق سیستمهای <i>LTI</i>	۱۴۶
۵-۲) تحقق کاهش ناپذیر	۱۴۷
۵-۳) تحقق سیستمهای <i>SISO</i>	۱۵۱
۵-۳-۱) تحقق کانونیکال کنترل پذیری	۱۵۲
۵-۳-۲) تحقق کانونیکال رؤیت پذیری	۱۵۳
۵-۳-۳) تحقق کانونیکال رؤیتگر	۱۵۴
۵-۳-۴) تحقق کانونیکال کنترلر	۱۵۶
۵-۳-۵) تحقق کانونیکال جوردن	۱۵۸
۵-۴) تحقق سیستمهای یک ورودی - چند خروجی <i>SIMO</i>	۱۶۰
۵-۵) تحقق سیستمهای چند ورودی - تک خروجی <i>MISO</i>	۱۶۳
۵-۶) تحقق سیستم های چند ورودی و چند خروجی <i>MIMO</i>	۱۶۴
۵-۷) پایداری سیستمهای <i>LTI</i>	۱۶۶
۵-۷-۱) تعاریف پایداری	۱۶۷
۵-۷-۲) قضایای پایداری سیستمهای <i>LTI</i>	۱۶۸
۵-۷-۳) قضیه پایداری لیاپانوف و تحلیل پایداری سیستمهای <i>LTI</i>	۱۷۱
۵-۸) جمع بندی	۱۷۴
مسائل	۱۷۵
مراجع	۱۸۰

۳-۸-۱) فرم قطری ماتریس	۸۷
۳-۸-۲) تبدیل ماتریس سیستم با مقادیر ویژه مختلط	۹۰
۳-۸-۳) فرم عمومی بلوکی - قطری جوردن	۹۲
۳-۹) جمع بندی	۹۸
مسائل	۹۹
مراجع	۱۰۹
فصل چهارم: رؤیت پذیری و کنترل پذیری سیستمهای <i>LTI</i>	۱۱۱
۴-۱) رؤیت پذیری	۱۱۱
۴-۱-۱) مقدمه	۱۱۱
۴-۱-۲) تعریف رؤیت پذیری	۱۱۲
۴-۱-۳) تستهای رؤیت پذیری	۱۱۶
۴-۱-۴) زیر فضای رؤیت ناپذیر	۱۲۱
۴-۱-۵) آشکار پذیری	۱۲۵
۴-۲) کنترل پذیری	۱۲۶
۴-۲-۱) تعریف کنترل پذیری	۱۲۶
۴-۲-۲) حالت‌های کنترل ناپذیر و کنترل پذیری	۱۲۸
۴-۲-۳) تستهای کنترل پذیری:	۱۲۸
۴-۲-۵) پایداری پذیری	۱۳۰
۴-۲-۶) زیر فضای کنترل پذیر	۱۳۰
۴-۳) تجزیه کالمن سیستمهای <i>LTI</i>	۱۳۱
۴-۴) جمع بندی	۱۳۵
مسائل	۱۳۶

۱-۲) عناصر فیزیکی سیستمهای کنترل

۳-۱) عناصر مفهومی سیستمهای کنترل



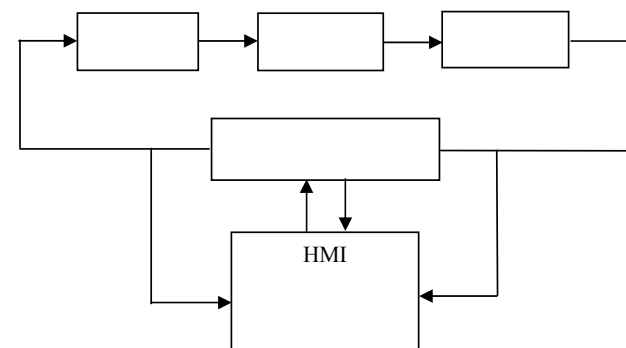
شکل (۳-۱) عناصر مفهومی سیستم های کنترل

y_d → C → u → P → y → S → y_m → C
 w → P
 n → S

¹ Gauges

()

PH



شکل (۱-۱) عناصر فیزیکی سیستم کنترل

A/D

D/A

- ¹ Sensors
- ² Transducer
- ³ Inputs
- ⁴ Actuators
- ⁵ Analog to digital convertors
- ⁶ Digital to analog convertors

HMI

(...

,PID

³ Nyquist criteria

۴-۱) فرآیند طراحی کنترل کننده

؛

y_m , n , y

y_m C

u ,

P , n , w

$y(t)$

$y_d(t)$

C

u y_m

w, y_d

$(y_d \approx y(t))$

PID

(PID)

۱-۴) فرآیند طراحی کنترل کننده

³ Nyquist criteria

LQR

LQR

n

n

Springer-Verlag, c1991.

- [4] Chen, Chi-Tsong., *Linear system theory and design*, Oxford University Press, c1999.
- [5] Dorf, Richard C. and H. Bishop, *Modern control system*, Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2001.

۱-۵) جمع بندی

مراجع

- [1] Bélanger, Pierre., *Control engineering: a modern approach*, Saunders College Pub., c1995.
- [2] Brogan, William L., *Modern control theory*, 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, c1991.
- [3] Callier, Frank M. and Charles A. Desoer, *Linear system theory*,

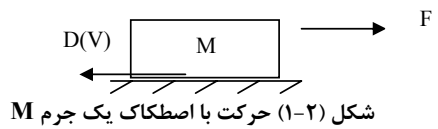
فصل دوم: نمایش سیستمهای خطی

۲-۱) مقدمه

۲-۲) نمایش فضای حالت

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (-)$$

F M :



شکل (۲-۱) حرکت با اصطکاک یک جرم M

" " $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$

:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = v = \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad (-)$$

$$u = F \quad (-)$$

$$y = x \quad (-)$$

()

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u_1) \\ \dot{x}_2 = -\frac{D(x_2)}{M} + \frac{u}{M} = f_2(x_1, x_2, u_1) \end{cases} \quad (-)$$

$$y = x_1 = h(x_1, x_2, u_1)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases} \quad (-)$$

" , x, u f_i h_i, f_i LTI "

h, f x, u, t

¹ Time invariant
² Linear Time invariant

:

$$M \frac{dv}{dt} = F - D(v) \quad (-)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{M} - \frac{D(v)}{M} \quad (-)$$

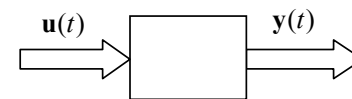
:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{F}{M} - \frac{D(v)}{M} \\ \frac{dx}{dt} = v \end{cases} \quad (-)$$

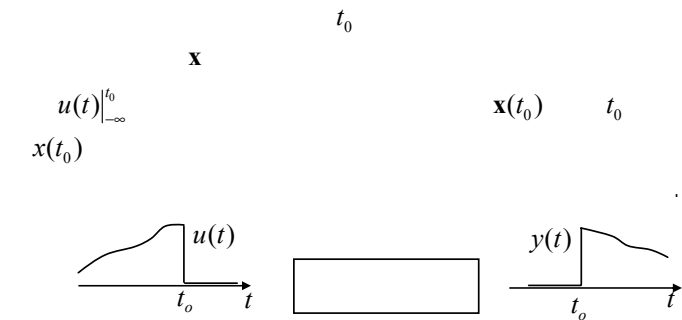
,D(v)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ y_1 &= h_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{aligned} \quad (-)$$

$y_1, y_2, \dots, y_m$ $u_1, u_2, \dots, u_r$

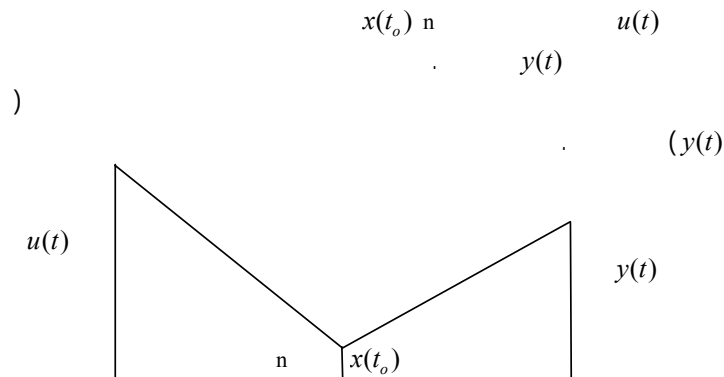


شکل (۲-۲) نمایش سیستم به صورت ورودی-خروجی



شکل (۲-۴) مشخصات ورودی-خروجی سیستم و ارتباط آن با متغیر حالت

n $u(t)$



شکل (۲-۵) تعبیر سیستم به صورت نگاشت ریاضی

۳-۲) مدل سازی سیستم بر اساس اصول فیزیکی

...

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{cases} \quad (-)$$

(-)

Lipschitz

Lipschitz

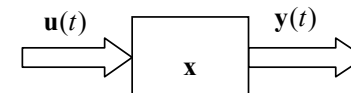
x, u, t

h, f

$$\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$$

n

$(\text{SISO})^2$



شکل (۲-۳) نمایش سیستم به صورت ورودی-خروجی با متغیر حالت

$$S: \mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{y}(t) \quad (-)$$

¹ Causality

² Single input single output

L_1, L_2, L_3, C_1, C_2

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v_1(t) & x_3(t) &= i_1(t) \\ x_2(t) &= v_2(t) & x_4(t) &= i_2(t) \end{aligned} \quad (\quad - \quad)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{L_1}{L_3 C_2} & -\frac{L_2 + L_3}{L_3 C_2} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\quad - \quad)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}(t)$$

v_1

i

۲-۳-۲) سیستمهای الکترومکانیکی

مثال (۲-۲) موتور DC مغناطیسی دائم

DC

DC

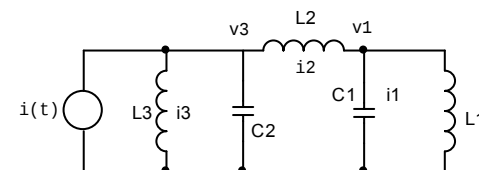
J

T_L

k=0

۲-۳-۱) سیستمهای الکتریکی

مثال (۲-۱)



شکل (۲-۶) مدار الکتریکی

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + v_1(t)$$

$$v_2(t) = L_3 \frac{di_3}{dt} \quad (\quad - \quad)$$

$$i_2(t) = c_1 \frac{d}{dt} v_1(t) + i_1(t)$$

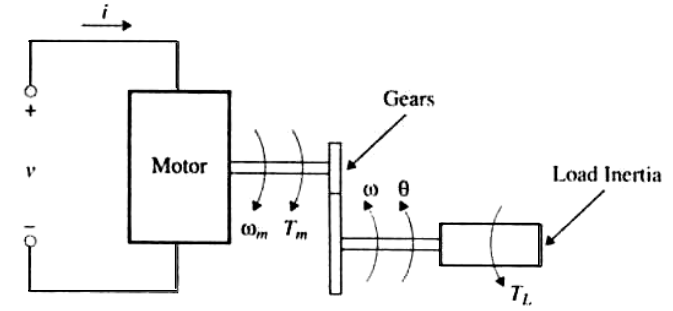
$$i(t) = i_3(t) + C_2 \frac{d}{dt} v_2(t) + i_2(t)$$

L_3, L_2, L_1

$$L_3 i_3(t) = L_2 i_2(t) + L_1 i_1(t) + k \quad (\quad - \quad)$$

k

$$\begin{aligned}
 & \text{SI} \\
 & K_m \quad K_2 \quad K_1 \\
 & J_m \\
 & (\quad) \quad : \quad - \\
 & J_m \dot{\omega}_m = T_m - T_e \quad (-) \\
 & T_m = K_m i \quad J_m \dot{\omega}_m \quad T_e \\
 & T_e = -J_m \dot{\omega}_m + T_m \quad (-) \\
 & J \cdot \dot{\omega} = NT_e - T_L \quad (-) \\
 & = NT_m - NJ_m \dot{\omega}_m - T_L \\
 & \quad \quad \quad (\omega_m = N\omega) : \\
 & \underbrace{(J + N^2 J_m)}_{J_e} \dot{\omega} = NT_m - T_L \\
 & , N^2 \quad J_e \\
 &) \\
 & (\quad) \\
 & J_e \cdot \dot{\omega} = NT_m - T_L \quad (-) \\
 & \boxed{\dot{\omega} = \frac{1}{J_e} (N \cdot K_m \cdot i - T_L)} \quad (-) \\
 & L \frac{di}{dt} + Ri = v - v_{emf} \quad (-)
 \end{aligned}$$



شكل (٧-٢) سرور مورتور DC

$$\begin{aligned}
 & T_L \quad v \quad : \\
 & \theta \quad : \\
 & \omega = \dot{\theta} \\
 & - \\
 & N \\
 & : \\
 & N = \frac{\omega_m}{\omega} \quad or \quad N = \frac{\theta_m}{\theta} : \quad (-) \\
 & : \\
 & \frac{1}{N} = \frac{T_m}{T} \quad (-) \\
 & DC \quad T_m \\
 & T_m = K_1 \cdot \phi \cdot i = K_m \cdot i \quad (-) \\
 & \phi \\
 & L \quad R \\
 & v_{Emf} = K_2 \cdot \phi \cdot \omega_m = K_m \cdot \omega_m \quad (-)
 \end{aligned}$$

¹ Back electro-motive force (Emf)

$$K_m = 0.05 \text{ Nm/A}, R = 1.2 \Omega, L = 0.05 \text{ H},$$

$$J_m = 8 \times 10^{-4} \text{ Kg m}^2, J = 2 \times 10^{-2} \text{ Kg m}^2, N = 12$$

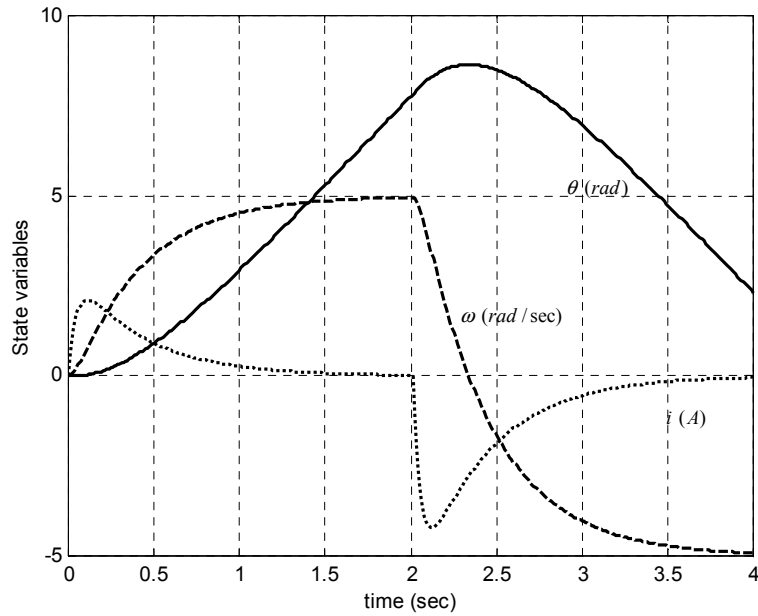
$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.438 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7.396 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (-)$$

Simulink (Lsim, ode45, ...) Matlab

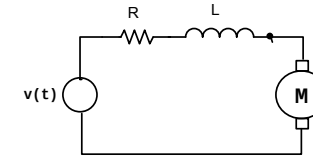
:

$$v(t) \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 2 \\ -3 & 2 \leq t < 4 \end{cases}$$

(-)



شکل (۹-۲) پاسخ های سیستم سرو موتور DC



شکل (۸-۲) مدار الکتریکی معادل موتور DC

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}v - \frac{NK_m}{L} \cdot \omega \quad (-)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (-)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases} \quad (-)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & NK_m/J_e \\ 0 & -NK_m/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/J_e \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ T_L \end{bmatrix} \quad (-)$$

$\omega \quad \theta$

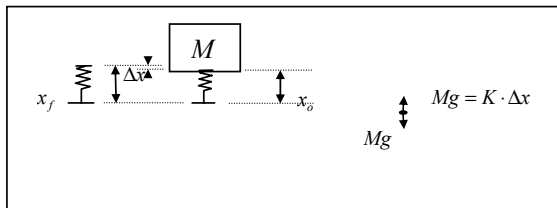
$$\begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ T_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix}$$

C,B,A

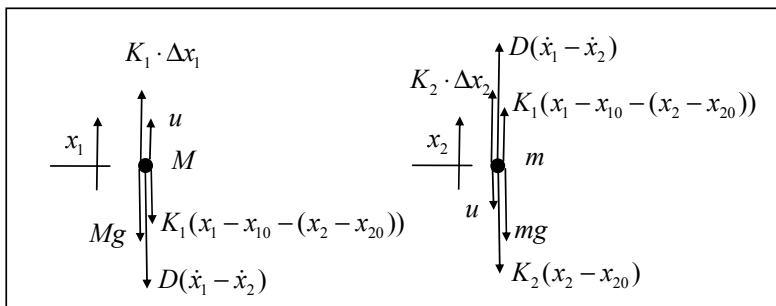
Δx

x_o



شکل (۱۱-۲) حالت تعادل فنر و برابری نیروهای آن

M, m



شکل (۱۲-۲) دیاگرام آزاد نیروها را برای دو جرم M, m در سیستم تعلیق فعال اتومبیل

$$M \frac{dv}{dt} = \sum F_{ext}$$

۳-۳-۲ سیستمهای مکانیکی

مثال (۳-۲) سیستم تعلیق فعال اتومبیل

(-)

x_1

M

x_2

K_1

m

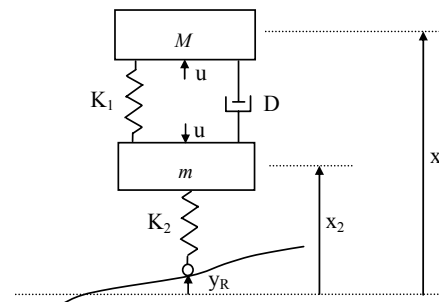
K_2

$D (\quad)$

u

()

y_R



شکل (۱۰-۲) مدل یک چهارم خودرو و سیستم تعلیق فعال آن

$u :$

y_R

x_1

$$F = K \cdot \Delta x$$

$$F = D \cdot \Delta \dot{x}$$

$$x_1(0) = 0.2, \quad x_2(0) = 0.0$$

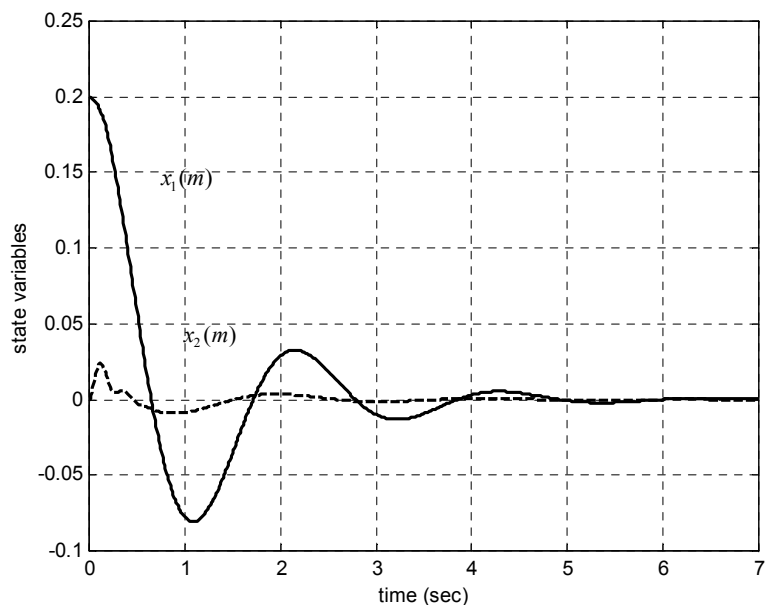
$$v_1(0) = v_2(0) = 0$$

$$u(t) = y_r(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 7 \text{ sec}$$

$$(\quad) \quad \text{initial}(\text{sys}, x_o, t)$$

$$y_r(t) = \sum_{n=0}^4 0.1 \sin(5 + 4n) \cdot t$$

$$lsim(\text{sys}, u, t)$$



شکل (۲-۱۳) پاسخ سیستم تعلیق خودرو به شرایط اولیه غیر صفر

$$M \frac{dv_1}{dt} = -K_1(x_1 - x_2 - x_{10} + x_{20}) - D(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u \quad (\quad)$$

$$m \frac{dv_2}{dt} = K_1(x_1 - x_2 - x_{10} + x_{20}) + D(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - u - K_2(x - x_{20} - y_R)$$

$$x_{10}, x_{20}$$

$$x_{10} = x_{20} = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{x}_2 = v_2 \\ \dot{x}_3 = \dot{v}_1 = \frac{1}{M}[-K_1x_1 + K_1x_2 - D\dot{x}_1 + D\dot{x}_2] + \frac{1}{M}u \\ \dot{x}_4 = \dot{v}_2 = \frac{1}{m}[K_1x_1 - K_1x_2 + D\dot{x}_1 - D\dot{x}_2] - \frac{u}{m} - \frac{K_2}{m}x + \frac{K_2}{m}y_R \end{cases} \quad (\quad)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (\quad)$$

$$M = 300 \text{ Kg}, m = 50 \text{ Kg}, K_1 = 3 \times 10^3 \text{ N/m}, K_2 = 3 \times 10^4 \text{ N/m} = D = 600 \text{ N/ms}^{-1}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & 10 & -2 & 2 \\ 60 & -660 & 12 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0033 \\ -0.02 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 600 \end{bmatrix} y_R \quad (\quad)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Simulink

ode45

Lsim

-

(

F

$$M\dot{v}_1 = F_1 - K(x_2 - x_{20}) - D(v_1 - v_2)$$

$$m\dot{v}_i = K(x_i - x_{i0}) + D(v_{i-1} - v_i) - K(x_{i+1} - x_{i+10}) - D(v_i - v_{i+1}) \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \quad (-)$$

$$m\dot{v}_N = K(x_N - x_{N0}) + D(v_{N-1} - v_N)$$

$$\dot{x}_1 = v_1$$

$$\dot{x}_2 = v_1 - v_2$$

$$\dot{x}_3 = v_2 - v_5 \quad (-)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_N = v_{N-1} - v_N$$

$$x_N, \dots, x_3, x_2$$

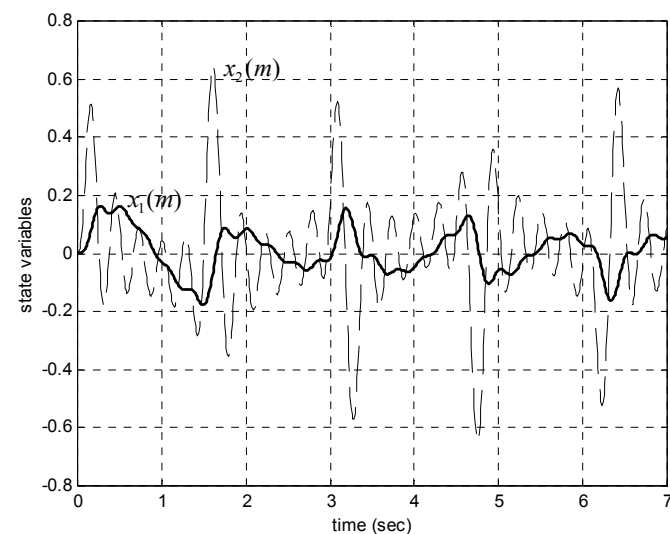
$$v_1$$

$$x_i \quad v_1$$

$$M = 2 \times 10^5 \text{ Kg}, \quad m = 4 \times 10^4 \text{ Kg}, \quad K = 2.5 \times 10^6 \text{ N/m}, \quad D = 1.5 \times 10^5 \text{ N/ms}^{-1}$$

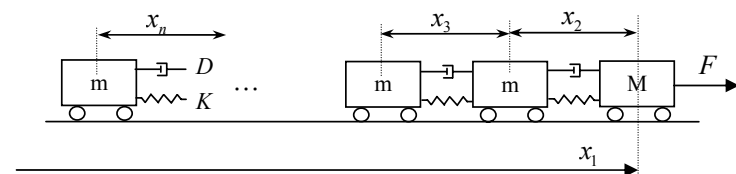
$$x_{i0} = 20m$$

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -12.5x_2 - 0.75v_1 + 0.75v_2 + 250 + 0.005F_1 \\ \dot{v}_i = 62.5x_i - 62.5x_{i+1} + 3.75v_{i-1} - 7.5v_i + 3.75v_{i+1} \quad i = 2, \dots, N-1 \\ \dot{v}_N = 62.5x_N + 3.75v_{N-1} - 3.75v_N - 1250 \end{cases} \quad (-)$$

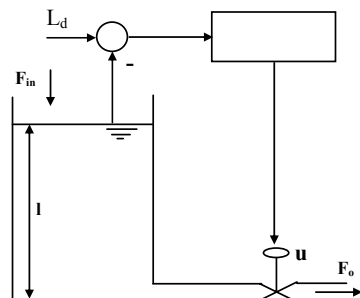


شکل (۲-۱۴) پاسخ سیستم تعلیق خودرو به نوسانات جاده

مثال (۲-۴) قطار



شکل (۲-۱۵) مدل قطار و متغیرهای حالت آن

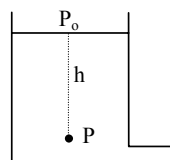


شکل (۲-۱۷) مدل سازی ارتفاع آب در مخزن روباز

$$P = P_0 + \rho gh$$

(-)

$$P_0$$



$$F \propto S \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$$

(-)

$$F = C' \cdot u \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$$

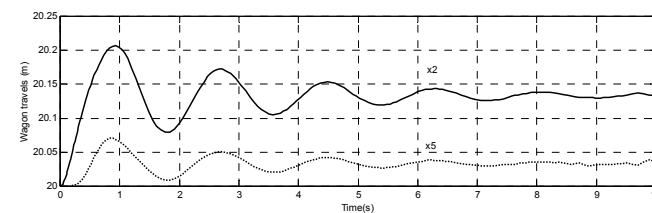
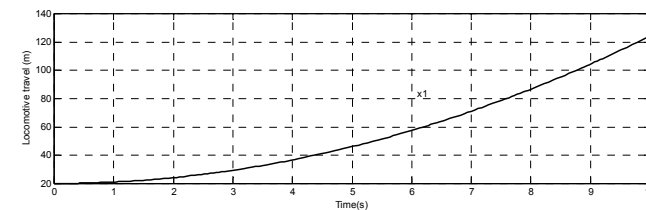
KN F

$$F_l = 750 \text{ KN}, x_i(0) = 20 \text{ m}$$

N=5

Matlab ode45

(-)



شکل (۲-۱۶) پاسخ مدل دینامیکی قطار به شرایط اولیه غیر صفر

۲-۳-۴ سیستم های هیدرولیکی

مثال (۲-۵) کنترل سطح تانک

F_{in}

u :

ℓ

F_{in}

۴-۲) مدلسازی بر اساس روش لاگرانژ

(q_i)

$T(q_i, \dot{q}_i)$

$V(q)$

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} {}^c I \omega^2 \quad (-)$$

${}^c I$

v_c

$$T = \frac{1}{2} v_c \cdot P_c + \frac{1}{2} \omega \cdot H_c \quad (-)$$

H_c

P_c

$$V = mgh + \frac{1}{2} Kx^2 + \dots \quad (-)$$

$$L = T - V \quad (-)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (-)$$

q_i

Q_i

$$F = C \cdot u \sqrt{\Delta P} \quad (-)$$

$$\dot{V} = A \frac{d\ell}{dt} = F_{in} - F_o \quad (-)$$

$$F_o = C' u \sqrt{\Delta P} = C u \sqrt{P_b - P_a}$$

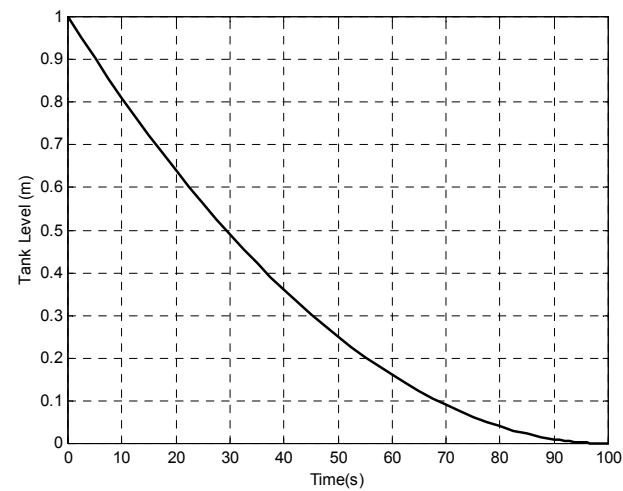
$$P_b = P_0 + \rho g \ell, \quad P_a = P_0 \quad P_b \text{ --- } P_a \quad (-)$$

$$\Rightarrow F_o = C' u \sqrt{\rho g \ell} = C u \sqrt{\ell}$$

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{F_{in}}{A} - \frac{C u \sqrt{\ell}}{A} \quad (-)$$

Simulink ode45

$$F_{in} = 0, \quad u(t) = 0.01m, \quad \ell(0) = 1m \quad A = 1 \text{ m}^2; \quad C = 2.0 \text{ m}^{3/2} / s$$



شکل (۱۸-۲) پاسخ مشابه سازی سیستم ارتفاع آب در مخزن روباز

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2)$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m [(\dot{x} + \dot{\theta} \ell \cos \theta)^2 + (-\dot{\theta} \ell \sin \theta)^2] \quad (-)$$

$$T = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 + m \dot{x} \dot{\theta} \ell \cos \theta$$

$$V = V_0 + V_0 + m g \ell \cos \theta \quad (-)$$

$$L = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 + m \dot{x} \dot{\theta} \ell \cos \theta - 2V_0 - m g \ell \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F$$

$$\frac{d}{dt} (M \dot{x} + m (\dot{x} + \dot{\theta} \ell \cos \theta)) - 0 = F$$

$$(M + m) \ddot{x} + m \ell \ddot{\theta} \cos \theta - m \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (-)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m \ell \dot{x} \cos \theta + m \ell^2 \dot{\theta}) - m g \ell \sin \theta = 0 \quad (-)$$

$$m \ell \ddot{x} \cos \theta + m \ell^2 \ddot{\theta} - m g \ell \sin \theta = 0$$

x, θ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F$$

$$\frac{d}{dt} (M \dot{x} + m (\dot{x} + \dot{\theta} \ell \cos \theta)) - 0 = F$$

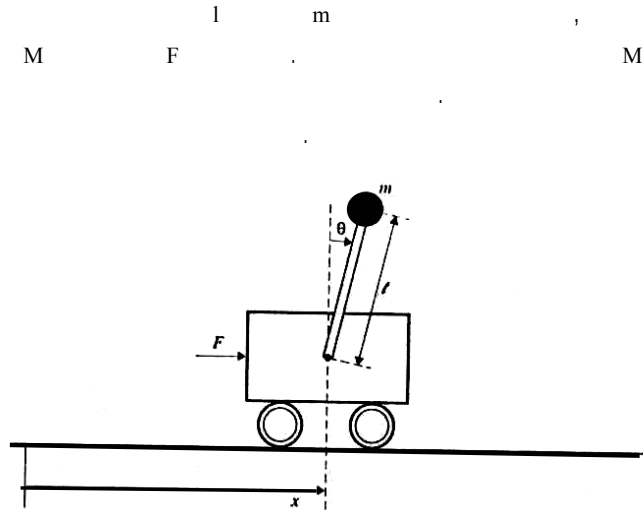
$$(M + m) \ddot{x} + m \ell \ddot{\theta} \cos \theta - m \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (-)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m \ell \dot{x} \cos \theta + m \ell^2 \dot{\theta}) - m g \ell \sin \theta = 0 \quad (-)$$

$$m \ell \ddot{x} \cos \theta + m \ell^2 \ddot{\theta} - m g \ell \sin \theta = 0$$

مثال (۲-۶) پاندول معکوس



شکل (۲-۱۹) مدلسازی پاندول معکوس توسط روش لاگرانژ

$$x, \theta$$

$$\dot{x}$$

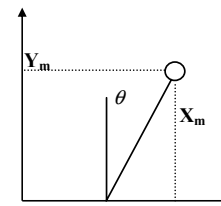
$$\dot{\theta}$$

$$X_m = x + \ell \sin \theta$$

$$Y_m = \ell \cos \theta$$

$$V_x = \dot{x} + \dot{\theta} \ell \cos \theta$$

$$V_y = -\dot{\theta} \ell \sin \theta$$



$$V = V_0 + m_1 g l_1 / 2 \cos(\theta_1) + V_0 + m_2 g l_1 \cos(\theta_1) + m_2 g l_2 / 2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i=1,2$$

$$q = \theta_1$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ [m_1(l_1/2)^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2(l_2/2)^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 + I_2] \dot{\theta}_1 \\ + [m_2(l_2/2)^2 + 1/2 m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 + I_2] \dot{\theta}_2 \} \\ - \{ m_1 g l_1 / 2 \sin(\theta_1) + m_2 g l_1 \sin(\theta_1) + m_2 g l_2 / 2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \} = \tau_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [m_1(l_1/2)^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2(l_2/2)^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 + I_2] \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ + [m_2(l_2/2)^2 + 1/2 m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 + I_2] \ddot{\theta}_2 - 1/2 m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ - \{ (m_1 l_1 / 2 + m_2 l_1) g \sin(\theta_1) + m_2 g l_2 / 2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \} = \tau_1 \end{aligned}$$

$$q = \theta_2$$

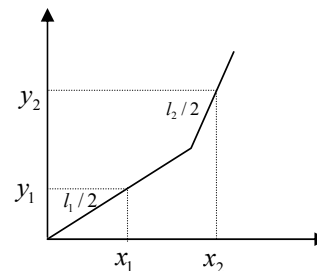
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ [m_2(l_2/2)^2 + 1/2 m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 + I_2] \dot{\theta}_1 + [m_2(l_2/2)^2 + I_2] \dot{\theta}_2 \} \\ - m_2 g l_2 / 2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = \tau_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [m_2(l_2/2)^2 + 1/2 m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 + I_2] \ddot{\theta}_1 + [m_2(l_2/2)^2 + I_2] \ddot{\theta}_2 \\ - 1/2 m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 g l_2 / 2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = \tau_2 \end{aligned}$$

$$M\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = Q$$

$$2R$$

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow Q = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} x_1 = l_1 / 2 \cos \theta_1 \\ y_1 = l_1 / 2 \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -l_1 / 2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{y}_1 = l_1 / 2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = (l_1 / 2 \dot{\theta}_1)^2$$

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 / 2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 / 2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 / 2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 / 2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + [l_2 / 2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)]^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2$$

$$T = T_1 + T_2$$

$$= 1/2 m_1 v_{c1}^2 + 1/2 I_1 \omega_1^2 + 1/2 m_2 v_{c2}^2 + 1/2 I_2 \omega_2^2$$

$$T = 1/2 m_1 (l_1/2 \dot{\theta}_1)^2 + 1/2 I_1 \dot{\theta}_1^2 + 1/2 I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

$$+ 1/2 m_2 \{ (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + [l_2 / 2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)]^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \}$$

$$T$$

$$T = 1/2 [m_1(l_1/2)^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2(l_2/2)^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 + I_2] \dot{\theta}_1^2$$

$$+ 1/2 [2m_2(l_2/2)^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 + 2I_2] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$+ 1/2 [m_2(l_2/2)^2 + I_2] \dot{\theta}_2^2$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u) \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}^* = 0$$

$$\begin{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} f(x^*,u^*)=0 \end{array} \right\} n \\ \left\{ \begin{array}{l} h(x^*,u^*)=y^* \end{array} \right\} m \end{pmatrix}$$

$$y_{m \times 1}^*, \; u_{r \times 1}^*, \; x_{n \times 1}^* \qquad \qquad \qquad m+n$$

$$r+m+n$$

$$r$$

$$(u^*)$$

$$\begin{pmatrix} u^* = u_d & x^* = x_d & y^* = y_d \end{pmatrix}$$

$$\Delta u, \; \Delta y, \; \Delta x$$

$$\begin{pmatrix} x(t) = x^* + \Delta x(t), \; u(t) = u^* + \Delta u(t), \; y(t) = y^* + \Delta y(t) \end{pmatrix}$$

$$\Delta$$

$$\dot{x}^* = 0$$

¹ incremental variables

	:

$$M = \begin{bmatrix} m_1(l_1/2)^2 + I_1 + m_2l_1^2 + m_2(l_2/2)^2 & m_2(l_2/2)^2 + 1/2 \; m_2 \; l_1l_2 \; \cos\theta_2 + I_2 \\ +m_2l_1l_2 \; \cos\theta_2 + I_2 & m_2(l_2/2)^2 + I_2 \\ m_2(l_2/2)^2 + 1/2 \; m_2 \; l_1l_2 \; \cos\theta_2 + I_2 & \\ V = \begin{bmatrix} -m_2 \; l_1l_2 \; \sin\theta_2 \; \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - 1/2 \; m_2 \; l_1l_2 \; \sin\theta_2 \; \dot{\theta}_2^2 \\ -1/2 \; m_2 \; l_1l_2 \; \sin\theta_2 \; \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -(m_1l_1/2 + m_2l_1)g \sin(\theta_1) - m_2gl_2/2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -m_2gl_2/2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{q} = \dot{\omega}$$

$$\dot{\omega} = \ddot{q} = M^{-1} \big[Q - V(q,\dot{q}) - G(q) \big]$$

۵-۲) خطی سازی ریاضی

u

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u \\ \Delta y = C \Delta x + D \Delta u \end{cases} \quad (\quad - \quad)$$

نکته ۱: u^*, x^*

$u^*(t), x^*(t)$ Trajectory

A, B, C, D

(TV)

v w

نکته ۲:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, \omega) \\ y &= h(x, u, \omega, v) \end{aligned} \quad (\quad - \quad)$$

$$\Delta \dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_* \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_* \Delta u + \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_* \Delta w \quad (\quad - \quad)$$

$$\Delta y = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_* \Delta x + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_* \Delta u + \left. \frac{\partial h}{\partial w} \right|_* \Delta \omega + \left. \frac{\partial h}{\partial v} \right|_* \Delta v$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u + F \Delta w \\ \Delta y = C \Delta x + D \Delta u + G \Delta \omega + H \Delta v \end{cases} \quad (\quad - \quad)$$

مثال (۲-۸) موتور DC:

$$\theta^* = \theta_d, \quad T_L = 0 \quad \text{DC}$$

پاسخ:

	:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = f(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u) \\ \Delta y = h(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u) - y^* \end{cases} \quad (\quad - \quad)$$

$u^* \quad x^* \quad f, h$

$$f_i(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u) = f_i(x^*, u^*) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right|_* \Delta x_1 + \cdots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right|_* \Delta x_n \quad (\quad - \quad)$$

$$+ \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \right|_* \Delta u_1 + \cdots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_r} \right|_* \Delta u_r + O(\Delta x)^2 + O(\Delta u)^2 + \cdots$$

$$u^*, x^* \quad \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right)_*$$

$\Delta x, \Delta u$

u, x

f, g

$$f_i(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u) \approx \left. \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|_* \Delta x + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u} \right|_* \Delta u \quad (\quad - \quad)$$

$x \quad f$

$\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_* \quad (\quad - \quad)$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_* \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_* \Delta u \\ \Delta y = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_* \Delta x + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_* \Delta u \end{cases} \quad (\quad - \quad)$$

:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \ell} &= -\frac{c}{2A} \frac{u}{\sqrt{\ell}} \rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_* = -\frac{c}{2A} \frac{F_d}{c\sqrt{\ell_d}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ell_d}} = -\frac{F_d}{2A\ell_d} \\ \frac{\partial f}{\partial u} &= -\frac{c}{A} \sqrt{\ell} \rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_* = -\frac{c}{A} \sqrt{\ell_d} \quad (-) \\ \frac{\partial f}{\partial F_{in}} &= \frac{1}{A} \rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial F_{in}} \right|_* = \frac{1}{A}\end{aligned}$$

:

$$\Delta \dot{\ell} = \left(-\frac{F_d}{2A\ell_d}\right) \Delta \ell - \left(\frac{c}{A} \sqrt{\ell_d}\right) \Delta u + \frac{1}{A} \Delta F_{in} \quad (-)$$

مثال (۲-۱۰) باندول معکوس

:

پاسخ:

$$x^* = \theta^* = 0, \quad \dot{x}^* = \dot{\theta}^* = 0 \quad (-)$$

x

θ

:

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \quad (-)$$

:

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} + l \dot{\theta})^2 - 2V_0 - mg(1 - \frac{1}{2} \theta^2) \quad (-)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (-)$$

:

$$\begin{cases} (M + m) \ddot{x} + m \ell \ddot{\theta} = F \\ m \ell \ddot{x} + m \ell^2 \ddot{\theta} - mg \ell \theta = 0 \end{cases} \quad (-)$$

پاسخ:

$$\dot{\ell} = \frac{F_{in}}{A} - \frac{c}{A} u \sqrt{\ell} \quad (-)$$

:

$$F(\ell, u, F_{in}) = \frac{F_{in}}{A} - \frac{c}{A} u \sqrt{\ell} \quad (-)$$

$$F_{in}^* = F_d \quad \ell^* = \ell_d$$

$$0 = -\frac{c}{A} u^* \sqrt{\ell_d} + \frac{F_d}{A} \Rightarrow u^* = \frac{F_d}{c \sqrt{\ell_d}} \quad (-)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & NK_m/J_e \\ 0 & -NK_m/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^* \\ \omega^* \\ i^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} v^* \quad (-)$$

$$\theta_d = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta^* \\ \omega^* \\ i^* \end{bmatrix}$$

$$\theta^* = \theta_d, \omega^* = i^* = v^* = 0 \quad (-)$$

$$\Delta \theta = \theta - \theta_d, \quad \Delta \omega = \omega, \quad \Delta i = i, \quad \Delta v = v$$

:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & NK_m/J_e \\ 0 & -NK_m/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} v \quad (-)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix}$$

مثال (۲-۹) مخزن:

$$F_{in}^* = F_d, \quad \ell = \ell_d$$

•

•

$$\begin{cases} \Delta \dot{v} = -\frac{mg}{M} \Delta \theta + \frac{\Delta F}{M} \\ \Delta \dot{\omega} = \frac{(M+m)g}{M\ell} \Delta \theta - \frac{\Delta F}{m\ell} \\ \Delta \dot{x} = \Delta v \\ \Delta \dot{\theta} = \Delta \omega \end{cases}$$

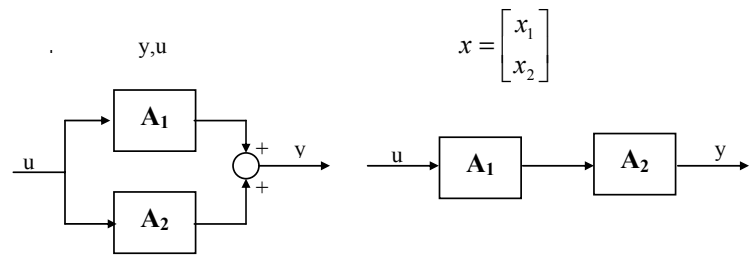
۲-۶) فامعینی مدل

¹ Unstructured uncertainty

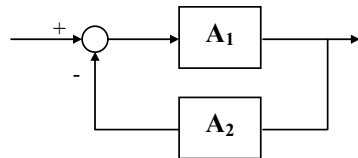
مسائل

(۱-۲)

$$A_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \quad A_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$



شکل (۲۲-۲) ترکیب سری و موازی دو سیستم



شکل (۲۳-۲) ترکیب فیدبک دو سیستم

(۲-۲)

(۳-۲) سرو موتور DC و هارمونیک درایو

k

DC

$$K(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\Delta_1 = \theta_1 - \varphi_1, \Delta_2 = \theta_2 - \varphi_2$$

$$\omega_o, \omega_2, \omega_1 \quad \dot{\Delta}_2, \dot{\Delta}_1 \quad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \frac{-R}{r} \omega_o$$

$$\Delta_2, \Delta_1 \quad R_a \quad K_m$$

$$T_o, u_2, u_1 \quad \omega_o, \omega_2, \omega_1$$

(ب)

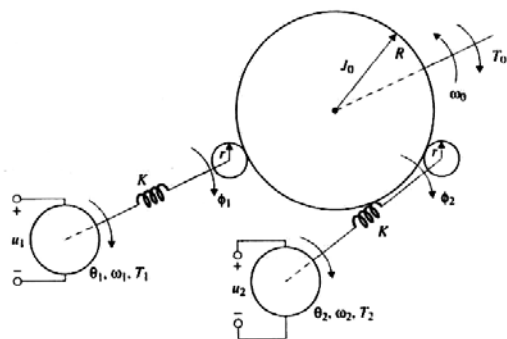
$$K_m = 6.0 \text{ Nm/A}, R_a = 0.2 \text{ } \Omega, J_m = 1 \text{ kgm}^2$$

$$K = 7.5 \times 10^4 \text{ Nm/rad}, J_o = 10^4 \text{ kgm}^2, R = 1 \text{ m}, r = 0.07 \text{ m}$$

(پ)

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = 66.68 \text{ rad/s}, \omega_o(0) = 4.67, \Delta_1(0) = \Delta_2(0) = 0$$

$$T_o = 1000 \text{ Nm} \quad u_1 = u_2 = 4 \text{ V}$$



شکل (۲-۲) کنترل سرعت غلطک توسط دو موتور

۲-۵) کنترل غلظت و ارتفاع در مخزن

$$\left(\begin{array}{c} B, A \\ A \end{array} \right) \quad B$$

DC

(الف)

$$\dot{\Delta} = \Omega$$

$$\Delta = \theta_1 - \theta_2$$

$$\Delta \quad V$$

$$K = 500 \text{ Nm/rad}$$

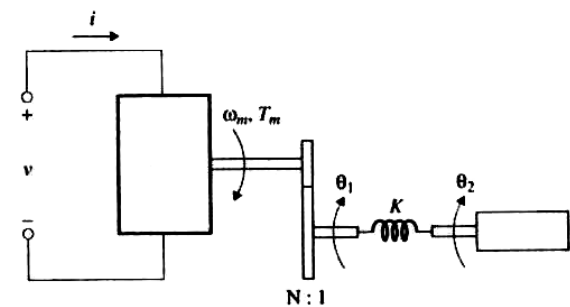
DC

(ب)

DC

Matlab Simulink

(پ)



شکل (۲-۲) سرو موتور DC و هارمونیک درایو

۲-۴) کنترل سرعت غلطک

DC

$$T_o$$

$$J_m$$

$$K$$

(الف)

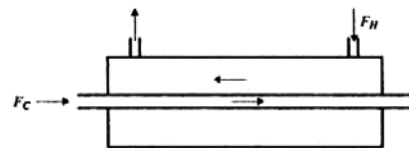
$$T_2, T_1$$

$$\dot{\omega}_2, \dot{\omega}_1$$

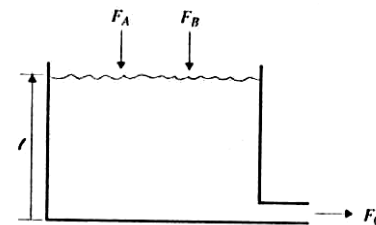
$$\theta_1 - \varphi_1, \theta_2 - \varphi_2$$

$$R/r$$

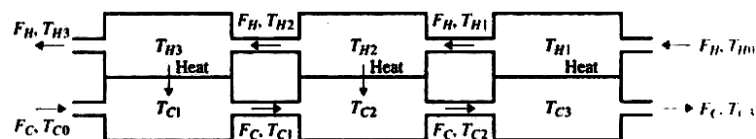
$$r/R$$



شکل (۲-۲۷) مبدل حرارتی با جهت مخالف حرکت سیال



شکل (۲-۲۶) کنترل غلظت و ارتفاع مایع



شکل (۲-۲۸) تقسیم مبدل حرارتی به اجزاء محدود

(الف)

$$Q_{c1} = \rho V_{c1} T_{c1}$$

$$\rho F_c T_{c1} \quad \rho F_c T_{c0}$$

$$k (T_{h3} - T_{c1}) \quad C_1 \quad H_3$$

$$F_1, F_2, T_{h0}, T_{c0}$$

(ب)

$$V = 0.2 m^3, \rho = 10^3 kg/m^3, C_r = 4180 J/kg^\circ C, K = 2 \times 10^5 J/^\circ C \min$$

(ج)

$$T_{c1}(0) = T_{c2}(0) = T_{c3}(0) = T_{H1}(0) = T_{H2}(0) = T_{H3}(0) = 20^\circ C$$

$$F_c = 0.05 m^3/min, F_H = 0.15 m^3/min, T_c = 20^\circ C, T_{h0} = 80^\circ C$$

(الف)

$$C_A = V_A / V_T \quad A$$

$$C_A F_0 \quad A$$

(ب)

(ج)

$$\ell(0) = 0.2 m, C_A(0) = 0.5, F_A = F_B = 2 \times 10^{-4} m^3/s, F_0 = 3 \times 10^{-4} m^3/s, 0 \leq t \leq 60 s$$

$$C_A(0), \ell(0) \quad V_T(0)$$

۲-۶) مبدل حرارتی

F_c

F_h

$$N_A(t + \Delta t) - N_A(t) = F \cdot C_A \cdot \Delta t - r \cdot V \cdot \Delta t$$

$$C_A = N_A / V$$

$$\Delta T = \frac{F C_C \Delta T + F C_B \Delta T}{\rho V C_v}$$

$$H(t) = \rho V C_v T(t)$$

$$Q \Delta t = r \cdot \Delta H \cdot \Delta t$$

$$H(t) \rightarrow H(t + \Delta t)$$

$$\Delta T \rightarrow 0$$

(ب)

$$A = 2.68 \times 10^9 \text{ min}^{-1}, E/R = 7553^\circ K, \Delta H = 2.09 \times 10^8 \text{ J/kg-moles},$$

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3, C_v = 4180 \text{ J/kg}^\circ K, V = 18 \times 10^{-3} \text{ m}^3, F = 3.6 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min},$$

$$C_{A_0} = 3 \text{ kg-moles/m}^3, T_0 = 293^\circ K$$

$$T_0 = 445^\circ K$$

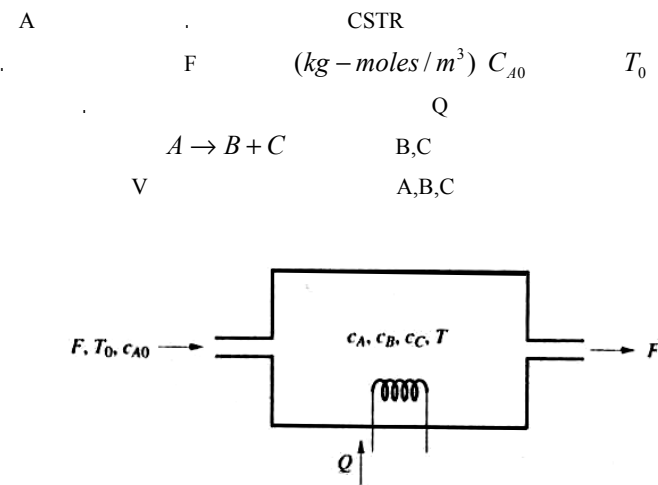
$$Q = -1.2 \times 10^5 \text{ J/min}, C_B(0) = C_C(0) = 0, C_A(0) = 0.05 \text{ kg-moles/m}^3$$

$$0 < t < 10 \quad ()$$

۸-۲) کنترل جریان در خط لوله

$$S = A \cdot u$$

۷-۲) راکتور شیمیایی



شکل (۲۹-۲) راکتور شیمیایی

$$r \text{ (Kg-moles/sec)}$$

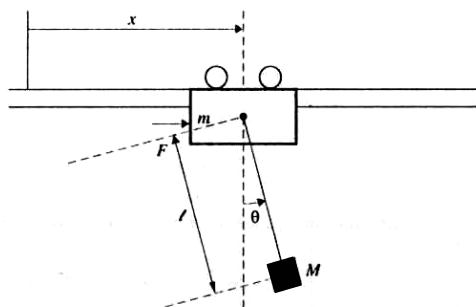
$$r = V A C_A e^{-E/RT}$$

$$T \text{ (kg-moles/m}^3\text{)}$$

$$\Delta H \quad \Delta H \cdot r$$

(الف)

$$N_A(t) = F \cdot C_{A_0} \cdot \Delta t$$



شکل (۳۱-۲) جرثقیل سقفی

$$\ell = 10m, M = 2000kg, m = 500kg$$

$$F = 1000N$$

بندباز (۱۰-۲)

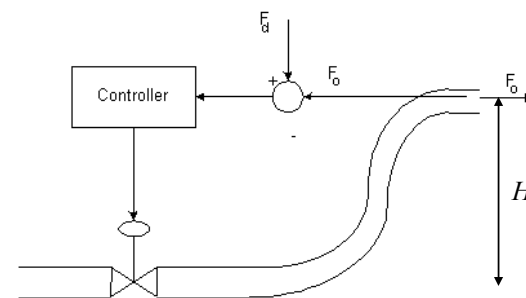
$$\begin{matrix} & & M_m \\ & J_m & \\ l & & M_e \\ J_R & \tau & \end{matrix}$$

$$M_m = 75kg, J_m = 3.2kgm^2, M_e = 2kg, J_R = 1.5kgm^2, L = 1.8m, \ell = 1m, \omega_\theta = \dot{\theta}, \omega_\phi = \dot{\phi}$$

L

(الف)

H



شکل (۳۰-۲) کنترل جریان در خط لوله

$$A = 4 \times 10^{-2} m, C = 0.9$$

(ب)

$$H = 100m$$

$$L = 1000m$$

$$\rho = 10^3$$

$$L = 1000m$$

$$P_0$$

$$F(0) = 1m^3 / s$$

(ج)

$$5 \times 10^{-2} \quad 10^{-2}$$

(۹-۲) جرثقیل سقفی

M

F

m

L

M

۲-۱۳) راکتور شیمیائی:

$$C_c^*, C_B^*, C_A^*, Q^* \quad (-) \quad -$$

$$F^*, T_o^*, T^*, C_{Ao}^*$$

$$F, C_{Ao}, T_o, Q \quad -$$

$$C_A = 3 \text{ kg moles} / m^3, T^* = 346^\circ K, F = 3.6 \times 10^{-3} m^3 / \text{min}$$

۲-۱۴) جرثقیل سقفی:

$$: (-)$$

$$() \quad -$$

$$(-) \quad -$$

۲-۱۵) بندباز:

$$: (-)$$

$$() \quad -$$

$$-$$

۲-۱۶) باندول دوتائی معکوس

$$m \quad (-)$$

$$M \quad F$$

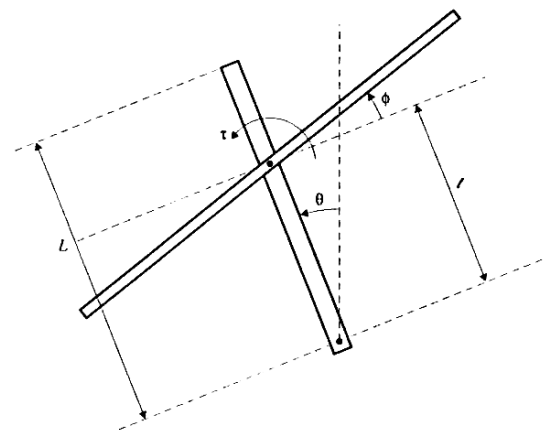
$$\ell_1, \ell_2$$

$$()$$

$$\ell_1, \ell_2$$

$$M=m=1$$

$$-$$



شکل (۲-۳۲) مدل دینامیکی یک بند باز

۲-۱۱) کنترل غلظت و ارتفاع در مخزن

$$(-)$$

$$C_A^*, \ell^*, F_B^*$$

$$F_o^*, F_A^* \quad ($$

$$F_A, F_B, F_o \quad ($$

$$\ell^* = 0.2 m, C_A^* = 0.8, F_B = 5 \times 10^{-5} m^3 / s$$

۲-۱۲) مبدل حرارتی

$$: (-)$$

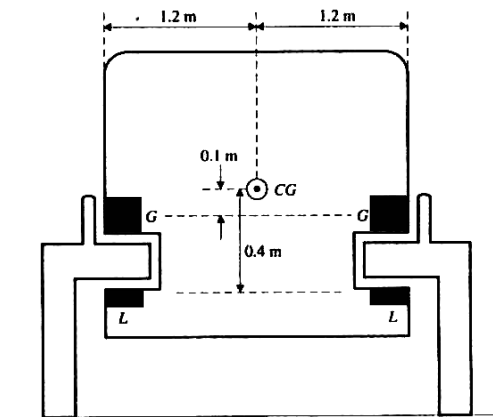
$$T_{ho}^*, T_{co}^*, F_A^*, F_c^*$$

$$($$

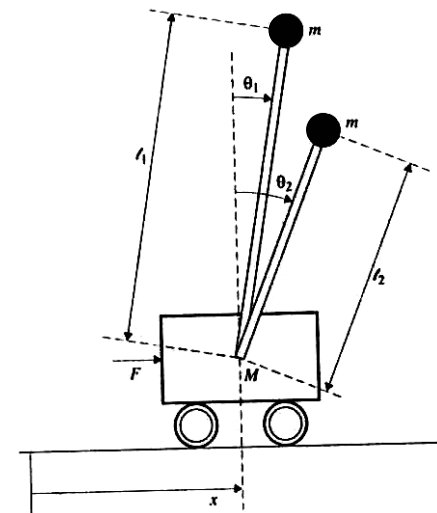
$$($$

$$($$

$$(-)$$



شکل (۳۴-۲) مقطعی از یک وسیله نقلیه دارای سیستم تعلیق مغناطیسی



شکل (۳۳-۲) پاندول دوتائی معکوس

Maglev (۱۷-۲)

km/h

km/h

"Magnetically Levitated"

yaw, pitch

(θ y,z)

i

$$\frac{k i^2}{S^2}$$

S

$Z_G(t)$

F_w

$$F_{L1}^*, F_{L2}^*$$

$$F_v = 0, M = 4000kg$$

$$i^* \quad 5.4 \times 10^{-3} i^2 / s^2$$

$$S^* = 0.014$$

$$S^*, 5000N = F_{G2}^* = F_{G1}^*$$

$$\Delta F_{G2}, \Delta F_{G1}, \Delta F_{L2}, \Delta F_{L1}$$

$$\ddot{\theta}, \ddot{y}, \ddot{z}$$

$$Z_G$$

$$F_w$$

$$kgm^2$$

$$u = i^2$$

$$\Delta F, \Delta S, \Delta u$$

$$(\theta) \theta, \Delta y, \Delta z, Z_G \quad \Delta s$$

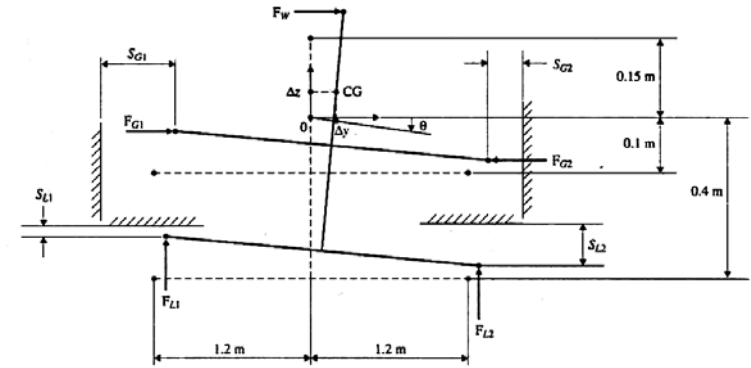
$$, \Delta y, \Delta u, \Delta x \quad ($$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2^3 + x_2 u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$u(t) = \tau, x_2(0) = 0 \quad 0 \leq t \leq 5 \quad x^*(t) \quad x_1(0) = 1$$

مراجع

- [1] Bélanger, Pierre., *Control engineering : a modern approach*, Saunders College Pub., c1995.
- [2] Bishop, Robert H., *Modern control systems analysis and design using MATLAB and SIMULINK*, Addison Wesley, c1997.
- [3] D'Azzo, John Joachim. And Constantine H. Houpis, *Linear control system analysis and design : conventional and modern*, McGraw-Hill, c1995.
- [4] Dorf, Richard C. and H. Bishop, *Modern control system*, Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2001.
- [5] Gajic, Zoran, and M. Lelić, *Modern control systems engineering*, Prentice Hall, c1996.
- [6] Kilian, Christopher T., *Modern control technology : components and systems*, Delmar Thomson Learning, 2000.
- [7] Ogata, Katsuhiko., *Modern control engineering*, 4th ed., Prentice Hall, 2001.
- [8] Paraskevopoulos, P. N., *Modern control engineering*, Marcel Dekker, c2002.
- [9]



شکل (۲-۳) دیاگرام فواصل هوائی و نیروها - نمایش حالت تعادل با خطوط نقطه چین.

$$\Delta u_{Le} = \frac{1}{2}(\Delta u_{L1} + \Delta u_{L2}) \quad \Delta u_{Ge} = \frac{1}{2}(\Delta u_{G1} + \Delta u_{G2})$$

$$\Delta u_{LD} = \frac{1}{2}(\Delta u_{L1} - \Delta u_{L2}) \quad \Delta u_{GD} = \frac{1}{2}(\Delta u_{G1} - \Delta u_{G2})$$

(۱۸-۲)

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x, u)$$

$$y^*(t), u^*(t), x^*(t)$$

$$\Delta x(t) = x(t) - x^*(t) \quad \Delta u(t) = u(t) - u^*(t) \quad \Delta y(t) = y(t) - y^*(t)$$

فصل سوم: تئوری سیستمهای خطی

۳-۱) مقدمه

(LTI)

۳-۲) خصوصیات سیستمهای خطی

LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3-2)$$

ماتریس A (n × n) و B (n × m) و C (p × n) و D (p × m) و $x(0) = x_0$

$$\begin{aligned} x(0) &= \alpha x_1(0) + \beta x_2(0) \\ &= \alpha x_{10} + \beta x_{20} \end{aligned}$$

,

“zs”

(ب)

$$\begin{aligned} x_2(t) & \quad u_1(t) & x_1(t) \\ u(t) &= \alpha u_1(t) + \beta u_2(t) & u_2(t) \end{aligned}$$

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha \dot{x}_1 + \beta \dot{x}_2 \\ &= \alpha (Ax_1 + Bu_1) + \beta (Ax_2 + Bu_2) \\ &= A(\alpha x_1 + \beta x_2) + B(\alpha u_1 + \beta u_2) \\ &= Ax + B(\alpha u_1 + \beta u_2) \end{aligned}$$

:

$$\alpha x_1 + \beta x_2$$

x(t)

$$x(0) = \alpha x_1(0) + \beta x_2(0) = 0 + 0 = 0$$

(ج)

$$u(t) \quad x(0)$$

$$x(t) = x_{zi}(t) + x_{zs}(t) \qquad (-)$$

		:

$$x_0$$

x(t)

Lipshitz

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \qquad (-)$$

$$x(t) = x_{zi}(t) + x_{zs}(t)$$

“Zero-input”

$x_{zi} \quad x_h$

$$zi \quad \begin{cases} \dot{x}_{zi} = Ax_{zi} \\ u = 0 \quad y_{zi} = Cx_{zi} \end{cases} \qquad (-)$$

$$x_{zi}(0) = x_o$$

“Zero-State”

x_p

$$zs \quad \begin{cases} \dot{x}_{zs} = Ax_{zs} + Bu \\ x_{zs}(0) = 0 \quad y_{zs} = Cx_{zs} + Du \end{cases}$$

(-)

LTI

“zi”

(الف)

$$\begin{aligned} x_2(t) \quad x_1(0) &= x_{10} & x_1(t) \\ \alpha x_{10} + \beta x_{20} & & x_2(0) = x_{20} \end{aligned}$$

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \qquad (-)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha \dot{x}_1 + \beta \dot{x}_2 = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 \\ &= A(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= Ax \end{aligned}$$

x(t)

$$\begin{pmatrix} e^{at} & \varphi(t) \\ e^{At} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x(t) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = e^{At} x_0$$

$$\begin{aligned} t &= 0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots \\ \Delta t &= t_{k+1} - t_k \\ x(t_1) &= e^{A\Delta t} x(0) \\ x(t_2) &= e^{A\Delta t} x(t_1) \\ &\vdots \\ x(t_{k+1}) &= e^{A\Delta t} x(t_k) \end{aligned} \quad (-)$$

– خصوصیات ماتریس انتقال حالت

$$\text{Property I: } e^{A0} = \varphi(0) = I$$

$$\text{Property II: } e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} \cdot e^{At_2} = e^{At_2} \cdot e^{At_1}$$

$$\varphi(t_1 + t_2) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2) = \varphi(t_2) \cdot \varphi(t_1)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{At_1} x(0) \\ x(t_1 + t_2) &= e^{At_1} \cdot x(t_1) = e^{At_1} \cdot e^{At_2} \cdot x(0) \\ x(t_1 + t_2) &= e^{A(t_1+t_2)} \cdot x(0) \\ e^{A(t_1+t_2)} &= e^{At_1} \cdot e^{At_2} \end{aligned}$$

۳-۳) حل معادلات حالت سیستمهای LTI

۳-۳-۱) حل پاسخ همگن یا بدون ورودی

– ماتریس انتقال حالت $\phi(t)$

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (-)$$

$$\ddot{x} = A\dot{x} = A^2x$$

$$\ddot{x} = A^2\dot{x} = A^3x$$

$$\vdots \quad (-)$$

$$x^{(k)} = A^k x$$

$$x^{(k)}(0) = A^k x(0) = A^k x_0$$

$$x^{(k)}(0) \quad k \quad x^{(k)}$$

$$x(t)$$

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2!}\ddot{x}(0)t^2 + \dots + \frac{1}{k!}x^{(k)}(0)t^k + \dots$$

$$= x_0 + Ax_0t + \frac{1}{2}A^2x_0t^2 + \dots + \frac{1}{k}A^kx_0t^k + \dots \quad (-)$$

$$= (I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k}A^kt^k + \dots)x_0$$

$$\boxed{\varphi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{K}A^kt^k + \dots} \quad (-)$$

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} [e^{-A\tau} x(\tau)] d\tau = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

$$e^{-At} x(t) - e^{-At_0} x(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$$x(t) = \underbrace{\varphi(t-t_0)x(t_0)}_{x_{zi}} + \underbrace{\int_{t_0}^t \varphi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau}_{x_{zs}}$$

x_{zi} , x_{zs}

“ZS”

$$\varphi(t-\tau)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = C\varphi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t C\varphi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

$$e^{At}$$

$$\left(\begin{array}{c} - \\ - \end{array} \right)$$

مثال ٣-١):

الف) $\varphi(t)$

$$\text{Property III: } (e^{At})^{-1} = e^{-At} \quad (\varphi(t))^{-1} = \varphi(-t)$$

$$e^{At} \cdot e^{-At} = e^{At} \cdot e^{A(-t)} = e^{A(t-t)} = e^{A(0)} = I$$

$$\text{Property IV: } e^{A^T t} = (e^{At})^T$$

$$\left(\begin{array}{c} - \\ - \end{array} \right) e^{At}$$

$$\text{Property V: } A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$$

$$e^{At}$$

$$A(A^k t) = A^{k+1} t = (A^k t) A$$

$$\text{Property VI: } \frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At} \quad \frac{d}{dt} \varphi(t) = A \cdot \varphi(t)$$

اثبات:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}(\dot{x}) = \frac{d}{dt}(e^{At} x_0)$$

$$= \frac{d}{dt}(e^{At}) x_0$$

$$\dot{x} = Ax = Ae^{At} x_0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$$

٣-٣-٢) حل كامل معادلات حالت

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)$$

$$e^{-At}$$

$$e^{-At} \dot{x}(t) - e^{-At} Ax(t) = e^{-At} Bu(t)$$

$$\Rightarrow e^{-At} \dot{x}(t) - Ae^{-At} x(t) = e^{-At} Bu(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{-At} x(t)) = e^{-At} Bu(t)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s)$$

$$(sI - A)x(s) = x(0) + Bu(s)$$

$$x(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}x(0)}_{x_{zi}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}Bu(s)}_{x_{zs}} = \varphi(s)(x(0) + Bu(s))$$

$$x_{zs}, x_{zi}$$

:

$$\boxed{\varphi(t) = e^{At} = \mathbf{L}^{-1}((sI - A)^{-1})}$$

s

(-)

$\mathbf{L}^{-1}$

:

مثال ۳-۲)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

s

الف)

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix} \rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \varphi(s)$$

$$e^{At} = \mathbf{L}^{-1}((sI - A)) = \mathbf{L}^{-1} \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{3}{s+1} + \frac{-1}{s+3} & \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+3} \\ \frac{-3}{s+1} + \frac{3}{s+3} & \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+3} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3e^{-3t} - 3e^{-t} & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

ب)

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{3}A^3t^3 + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1+t+\frac{1}{2}t^2+\dots & 0 \\ t+t^2+\frac{1}{2}t^3+\dots & 1+t+\frac{1}{2}t^2+\dots \end{bmatrix}$$

ب)

$$e^{-At}Bu(\tau) = e^{-At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 \quad \forall t \geq 0$$

$$= \begin{bmatrix} 1-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+\dots \\ 1-2t+\frac{3}{2}t^2-\dots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3-\dots \\ t-t^2+\frac{1}{2}t^3-\dots \end{bmatrix}$$

:

$$x(t) = e^{At} \left[x(0) + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \right] = \dots = \begin{bmatrix} 1+2t+t^2+\dots \\ 1+3t+\frac{5}{2}t^2+\dots \end{bmatrix}$$

۳-۴) روشهای تعیین ماتریس انتقال حالت $\varphi(t)$

۳-۴-۱) روش تبدیل لاپلاس

“Laub”

e^{At}

$$\begin{array}{c} \hline \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \\ A \end{array} \quad s_i \quad A$$

$$Av_i = s_i v_i \quad (-)$$

$$e^{At} v_i = v_i + Av_i t + \frac{1}{2!} A^2 v_i t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k v_i t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k v_i t^k}{k!} \quad (-)$$

$$\begin{array}{c} A^2 v_i = AA v_i = A s_i v_i = s_i A v_i = s_i^2 v_i \\ \vdots \end{array}$$

$$A^k v_i = s_i^k v_i$$

$$\begin{aligned} e^{At} v_i &= v_i + s_i v_i t + \frac{1}{2} s_i^2 v_i t^2 + \dots + \frac{1}{k} s_i^k v_i t^k + \dots \\ &= (1 + s_i t + \frac{1}{2} s_i^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k} s_i^k t^k + \dots) v_i \\ &= (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_i^k t^k}{k}) \cdot v_i \\ &= e^{s_i t} \cdot v_i \end{aligned}$$

$$\boxed{A \cdot v_i = s_i v_i \rightarrow e^{At} v_i = e^{s_i t} v_i}$$

$$e^{At} \quad , \quad A \quad v_i \quad s_i$$

$$\begin{array}{c} \hline \\ \hline \end{array}$$

$$x(s) = \varphi(s)x(0) + \varphi(s) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \varphi(s)x(0) + \frac{1}{s(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

$$= \varphi(s)x(0) + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \frac{2}{s} + \frac{-3}{s+1} + \frac{1}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 3e^{-3t} & 3e^{-t} - e^{-3t} \end{bmatrix} x(0) + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 - 3e^{-t} + e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} \end{bmatrix} \quad \forall t \geq 0$$

مودهای دینامیکی (۲-۴-۳)

$$\varphi(s)$$

$$\varphi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{Adj(sI - A)}{\det(sI - A)} \quad (-)$$

$$(\quad)$$

:

$$\varphi(s) = \frac{A_{11}}{s - s_1} + \frac{A_{12}}{(s - s_1)^2} + \dots + \frac{A_{21}}{(s - s_2)} + \frac{A_{22}}{(s - s_2)^2} + \dots \quad (-)$$

$$\varphi(t) = A_{11}e^{s_1 t} + A_{12}t \cdot e^{s_1 t} + \dots + A_{21}e^{s_2 t} + A_{22}t \cdot e^{s_2 t} + \dots \quad (-)$$

$$s_1, s_2, \dots$$

$$\det(s_i I - A) = 0 \quad (-)$$

¹ Partial fraction

$$\begin{cases} i_{c1} = -\frac{3}{2R}x_1 + \frac{i_s}{2} + \frac{1}{2R}x_2 \\ i_{c2} = \frac{1}{2R}x_1 + \frac{i_s}{2} - \frac{3}{2R}x_2 \end{cases} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{i_c}{C}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C}i_{c1} = -\frac{3}{2RC}x_1 + \frac{1}{2RC}x_2 + \frac{1}{2C}i_s \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}i_{c2} = \frac{1}{2RC}x_1 - \frac{3}{2RC}x_2 + \frac{1}{2C}i_s \end{cases}$$

$$R=C=1$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} i_s$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & s + \frac{3}{2} \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$$

$$s_1 = -1, s_2 = -2$$

$$Av_i = s_i v_i \quad \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}v_{11} + \frac{1}{2}v_{12} = -v_{11} \\ \frac{1}{2}v_{11} - \frac{3}{2}v_{12} = -v_{12} \end{cases} \Rightarrow v_{11} = v_{12} = 1$$

$$45^\circ$$

$$v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = v_i$$

$$s_i$$

$$x(t)$$

$$v_i$$

$$x_{z_i}$$

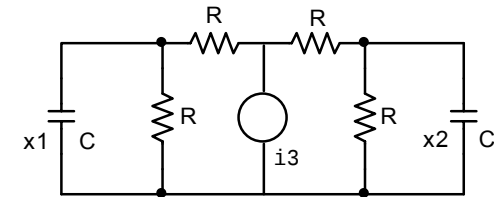
$$x(t) = e^{s_i t} \cdot v_i$$

$$|e^{s_i t}|$$

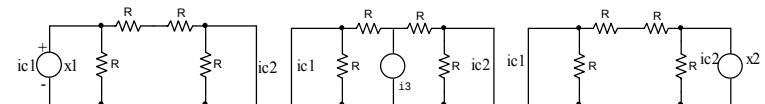
$$v_i$$

$$R=C=1$$

مثال ۳-۳:



شکل (۱-۳) مدار الکتریکی مثال (۳-۳)



$$\left\{ \begin{array}{l} e^{At} = N(A) = \sum_{i=1}^n N(\lambda_i) Z_i(\lambda) \\ Z_i(\lambda) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (A - \lambda_j I)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_j)} \end{array} \right. \quad (-)$$

$$Z_i Z_j = 0 \quad i \neq j \quad Z_i \quad ($$

$$\sum_{i=1}^n Z_i = I \quad ($$

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad Z_i^r = Z_i \quad ($$

$$(-) \quad ()$$

$$(-) \quad \text{مثال ٣-٥}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$$

$$z_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{-2 - (-3)} \begin{bmatrix} 0+3 & 6 \\ -1 & -5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0+2 & 6 \\ -1 & -5+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{At} = z_1 e^{\lambda_1 t} + z_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} e^{-3t} \\ &= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6(e^{-2t} - e^{-3t}) \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$e^{At} = N(A) = R(A) \quad (-)$$

مثال ٣-٤:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$N(\lambda_i) = R(\lambda_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i$$

$$N(\lambda_i) = e^{\lambda_i t}$$

$$\begin{cases} e^{-2t} = \alpha_0 + \alpha_1(-2) \\ e^{-3t} = \alpha_0 + \alpha_1(-3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = e^{-2t} - e^{-3t} \\ \alpha_0 = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \end{cases}$$

$$e^{At} = N(A) = R(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6\alpha_1 \\ -\alpha_1 & -5\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \dots = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + 2e^{-3t} & 3e^{-3t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

٣-٤-٤ روش سيلوستر^١

A

N(A)

$$\varphi(t) = e^{At}$$

DC (-) :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.438 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7.396 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Matlab ss2tf ss2zp

$$\frac{\theta}{v} = \frac{88.76}{s(s+21.526)(s+2.474)}$$

$$\frac{\theta}{T_L} = \frac{-7.396(s+24)}{s(s+21.526)(s+2.474)}$$

۳-۶) قطب ها و صفرهای انتقال

(-)

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

c_i C b_i B

$$B = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_r], C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_r] + D \quad (-)$$

۳-۵) ماتریس تبدیل سیستمهای خطی

SISO

MIMO

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

x_{zs}

$$\begin{cases} sx(s) = Ax(s) + Bu(s) \rightarrow x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) + Du(s) \end{cases}$$

$$y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s)$$

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (-)$$

مثال ۳-۶)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0]x + [0]u$$

(SISO)

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$= [1 \quad 0] \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s+4 \\ s-2 \end{bmatrix} = \frac{s+4}{s^2 + 3s + 2}$$

θ

DC

مثال ۳-۷)

$$\begin{cases} -(s_0 I - A)\theta + Bw = \mathbf{0} \\ C\theta + Dw = \mathbf{0} \end{cases} \quad (-)$$

$$\begin{bmatrix} -s_0 I + A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (-)$$

$w \neq 0$

$$\det \begin{bmatrix} -s_0 I + A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \left\{ s_0 \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right\} \quad (-)$$

" " "

مثال ۳-۸)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = [0]$$

پاسخ:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

$$\det \left[\begin{array}{cc|c} -s_0 & 1 & 1 \\ -2 & -3-s_0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = 0$$

$$1[1 - (-3 - s_0)] + 0 + 0 = 0$$

$$1 + 3 + s_0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{s_0 = -4}$$

¹ Singular

$$H(s) = \left[H_{ij}(s) \right]_{rxm} \quad (-)$$

$$H_{ij}(s) = \frac{c_i^T \text{Adj}(sI - A)b_j + d_{ij} \det(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

$$\begin{matrix} \text{n-1} & & j & i & \text{Adj} \\ & & c_i^T \text{Adj}(sI - A)b_j & & \\ & D = 0 & & n & \det(sI - A) \\ & & D \neq 0 & & \end{matrix}$$

$$\boxed{A} \quad \det(sI - A)$$

$$A \quad B, C, D$$

$$H(s_0) = 0 \quad s_0 : \quad \text{SISO}$$

MIMO

$$\exists w \neq 0 \quad s_0 \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{H(s_0)w = \mathbf{0}} \quad (-)$$

$$\left[C(s_0 I - A)^{-1} B + D \right] w = \mathbf{0} \quad (-)$$

$$\theta = (s_0 I - A)^{-1} Bw \quad (-)$$

¹ Strictly proper

² Proper

³ Improper

$$H_{new}(s) = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D$$

$$sI - T^{-1}AT = sT^{-1}T - T^{-1}AT = T^{-1}(sI - A)T$$

$$(sI - T^{-1}AT)^{-1} = [T^{-1}(sI - A)T]^{-1}$$

$$= T^{-1}(sI - A)^{-1}T$$

$$H_{new}(s) = CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}B + D$$

$$= C(sI - A)^{-1}B + D = H_{old}(s)$$

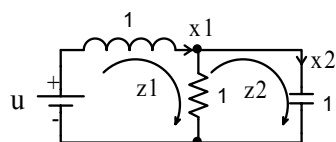
$$T \quad T^{-1}$$

$$x = T_1 z$$

$$z = T_2 x$$

(-)

مثال ۳-۹



$$L = R = C = 1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$z_2, z_1$$

$$x_2, x_1$$

۳-۷) تبدیلهای همانندی^۱

$$H(s)$$

$$[A, B, C, D]$$

$$H(s)$$

$$A \quad e^{AT}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$x$$

$$z$$

$$z$$

$$T$$

$$T$$

$$z = T^{-1}x(t)$$

$$x(t) = T z(t)$$

(-)

$$\begin{cases} T \dot{z}(t) = AT z(t) + Bu(t) \\ y(t) = CT z(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = T^{-1}AT z(t) + T^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CT z(t) + Du(t) \end{cases}$$

(-)

- چرا این تبدیل را همانندی می نامند؟

¹ Similarity transformations

$$T^{-1}T = \begin{bmatrix} w_1^T v_1 & w_1^T v_2 & \cdots & w_1^T v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n^T v_1 & w_n^T v_2 & \cdots & w_n^T v_n \end{bmatrix} = I_{n \times n} \quad (-)$$

$$w_i^T v_j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (-)$$

$$A^T \quad w_i$$

$$AT = A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_1 v_1 & s_2 v_2 & \cdots & s_n v_n \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 v_1 & s_2 v_2 & \cdots & s_n v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_j w_i^T v_j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s_n \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} w_1^T B \\ \vdots \\ w_n^T B \end{bmatrix}, \quad CT = \begin{bmatrix} Cv_1 & Cv_2 & \cdots & Cv_n \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s_n \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} w_1^T B \\ w_2^T B \\ \vdots \\ w_n^T B \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} Cv_1 & Cv_2 & \cdots & Cv_n \end{bmatrix} z + Du \end{cases} \quad (-)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = z_1(t) \\ x_2(t) = z_1(t) - z_2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} z \quad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

$$T^2 = I \quad T = T^{-1}$$

۸-۳) قطری سازی معادلات حالت (فرم جوردن)

۱-۸-۳) فرم قطری ماتریس

$$A \quad v_n, \dots, v_2, v_1$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$x = T \cdot z = z_1 v_1 + z_2 v_2 + \cdots + z_n v_n \quad (-)$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$T^{-1}T = I$$

۳-۸-۲) تبدیل ماتریس سیستم با مقادیر ویژه مختلف

A

$$\begin{cases} \dot{z}_i = s_i z_i + (w_i^T B)u \\ \dot{z}_{i+1} = s_i^* z_{i+1} + (w_i^{*T} B)u \\ y = C v_i z_i + C v_i^* z_{i+1} \end{cases} \quad (-)$$

s_i^* s_i

$$\begin{aligned} z_i(0)v_i + z_{i+1}(0)v_i^* &\in \mathbb{R} \\ \Re(z_i(0))\Im(v_i) + \Im(z_i(0))\Re(v_i) - & \\ \Re(z_{i+1}(0))\Im(v_i) + \Im(z_{i+1}(0))\Re(v_i) &= 0 \end{aligned} \quad (-)$$

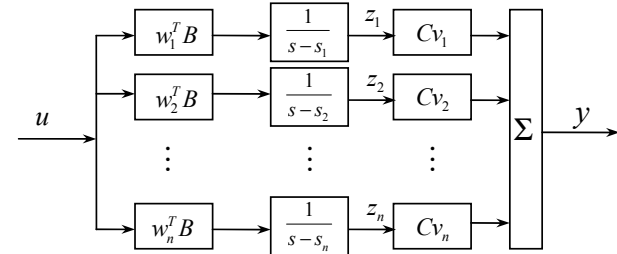
$$\begin{aligned} [\Re(z_i(0)) - \Re(z_{i+1}(0))]\Im(v_i) + [\Im(z_i(0)) + \Im(z_{i+1}(0))]\Re(v_i) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \Re(z_i(0)) = \Re(z_{i+1}(0)) \\ \Im(z_i(0)) = -\Im(z_{i+1}(0)) \end{cases} \Rightarrow z_{i+1}(0) = z_i^*(0) \end{aligned} \quad (-)$$

$$\dot{z}_i^* = s_i^* z_i^* + (w_i^{*T} B)u \quad (-)$$

$$z_{i+1}(0) = z_i^*(0) \quad z_{i+1}, z_i^*$$

$$z_{i+1}(t) = z_i^*(t) \quad \forall t \quad (-)$$

(-)



شکل (۲-۳) نمایش بلوکی سیستم به فرم قطری

مثال ۳-۱۰) موتور DC ضد هوائی:

$$y = \theta$$

پاسخ:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2.474, \lambda_3 = -21.526$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -0.4042 & 0.0096 \\ 0 & 1 & -0.2062 \\ 0 & -0.5575 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4507 & 0.0833 \\ 0 & 1.1299 & 0.2329 \\ 0 & 0.6299 & 1.1299 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.474 & 0 \\ 0 & 0 & -21.526 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1.667 & -3.3330 \\ 4.6588 & -8.3564 \\ 22.5971 & -4.6584 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0] \rightarrow CT = [1 \ -0.4042 \ 0.0096]$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$(\lambda I - A) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm j$$

$$(\lambda_1 I - A)v_i = 0 \rightarrow v_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \pm j \end{bmatrix}$$

$$T = [\Re(v_1), \Im(v_1)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b_{new} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۳-۸-۳) فرم عمومی بلوکی-قطری جوردن

$$A = \begin{bmatrix} K & & & \\ & K & & \\ & & \ddots & \\ & & & K \end{bmatrix}$$

$$s_i \quad A \quad v_i^0$$

$$\dots, v_i^2, v_i^1$$

$$(A - s_i I)v_i^1 = v_i^0$$

$$(A - s_i I)v_i^2 = v_i^1$$

$$\vdots$$

$$(A - s_i I)v_i^{j+1} = v_i^j$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\Re z_i) = (\Re s_i)(\Re z_i) - (\Im s_i)(\Im z_i) + (\Re w^T B)u \\ \frac{d}{dt}(\Im z_i) = (\Im s_i)(\Re z_i) + (\Re s_i)(\Im z_i) + (\Im w^T B)u \\ y = 2C(\Re v_i)(\Re z_i) - 2C(\Im v_i)(\Im z_i) \end{cases} \quad (-)$$

$$\lambda_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega, \lambda_{3,4} = \sigma_3 \pm j\omega_3, \dots, \lambda_{m,m+1} = \sigma_m \pm j\omega_m$$

$$\lambda_{m+2}, \lambda_{m+3}, \dots, \lambda_n$$

$$T = [\Re(v_i), \Im(v_i), \Re(v_3), \Im(v_3), \dots, \Re(v_m), \Im(v_m), v_{m+2}, v_{m+3}, \dots, v_n] \quad (-)$$

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 & & & & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & & & & \\ & & \sigma_3 & \omega_3 & & \\ & & -\omega_3 & \sigma_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \sigma_m & \omega_m \\ & & & & -\omega_m & \sigma_m \\ \vdots & & & & & & \lambda_{m+2} & & \\ & & & & & & & \lambda_{m+3} & \\ & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (-)$$

مثال ۳-۱۱)

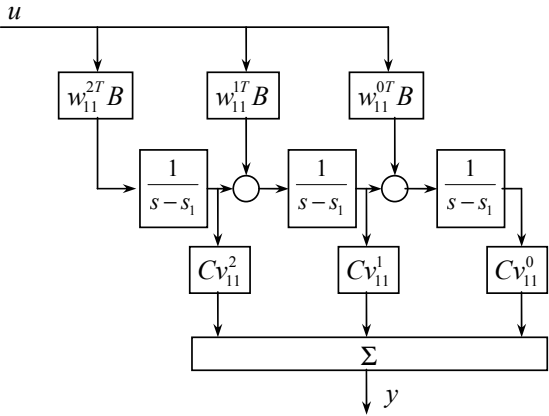
¹ Block diagonal matrix

$$K \quad s_i$$

$$\left(\begin{array}{c} \end{array} \right)$$

$$\Lambda = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{ccc|cc} s_1 & 1 & & \dots & 0 \\ & s_1 & 1 & & \\ & & s_1 & & \vdots \\ \hline & & & s_1 & 1 \\ & \vdots & & 0 & s_1 \\ & & & & s_2 & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 & s_2 \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{c} - \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} - \end{array} \right)$$



شکل (۳-۳) نمایش بلوکی سیستم به فرم بلوکی - جوردن

مثال ۳-۱۲)

T

A

$$\begin{matrix} & s_2 & & s_1 & & s_2, s_1 \\ v_{12}^0, v_{11}^0 & & & & & s_1 \end{matrix}$$

$$v_{12}^0 \rightarrow v_{12}^1, \quad v_{11}^0 \rightarrow v_{11}^1 \rightarrow v_{11}^2$$

$$v_{21}^0 \rightarrow v_{21}^1$$

$$T = \begin{bmatrix} v_{11}^0 & v_{11}^1 & v_{11}^2 & v_{12}^0 & v_{12}^1 & v_{21}^0 & v_{21}^1 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{c} - \end{array} \right)$$

T

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} w_{11}^{0T} \\ w_{11}^{1T} \\ w_{11}^{2T} \\ w_{12}^{0T} \\ w_{12}^{1T} \\ w_{21}^{0T} \\ w_{21}^{1T} \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{c} - \end{array} \right)$$

A^T

T⁻¹

$$\Lambda = T^{-1}AT \quad \left(\begin{array}{c} - \end{array} \right)$$

$$AT = \begin{bmatrix} s_1 v_{11}^0 & v_{11}^0 + s_1 v_{11}^1 & v_{11}^1 + s_1 v_{11}^2 & s_1 v_{12}^0 & v_{12}^0 + s_1 v_{12}^1 & s_2 v_{21}^0 & v_{21}^0 + s_2 v_{21}^1 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{c} - \end{array} \right)$$

$$.T^{-1}AT = \Lambda = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4.42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.42 \end{array} \right] :$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.0565 \\ -0.0565 \end{bmatrix}, \quad CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

مثال ٣-١٣ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda + 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = 0 :$$

$$\lambda_{1,2,3} = -1, \quad \lambda_4 = 0$$

$$: \quad \lambda_1 = -1$$

$$v_{11}^0 = [2 \quad 1 \quad 1 \quad -1]^T$$

$$(A - (-1)I)v_{11}^1 = v_{11}^0$$

$$\Rightarrow v_{11}^1 = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$: \quad v_{11}^1, v_{11}^0$$

$$v_{12}^0 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]$$

$$: \quad \lambda_4 = 0$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 19.6 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

:

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm 4.4272$$

$$: \quad s_i = 0$$

$$v_1^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

:

$$(A - 0I)v_1^1 = v_1^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$\alpha = 0 \quad v_1^1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{3,4} = \pm 4.4272$$

:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4.4272 & -4.4272 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -8.8544 & 8.8544 \end{bmatrix} \rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.25 & -0.0565 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0.0565 \end{bmatrix}$$

۹-۳ جمع بندی

$$v_{21}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مسائل

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

LTI

(١-٣

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \rightarrow y(t) = e^{-t} - 0.5e^{-2t}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow y(t) = 0.5e^{-t} - e^{-2t}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

LTI

(٢-٣

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow y(t) = 0.5 - 0.5e^{-t} + e^{-2t}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow y(t) = 0.5 - e^t + 1.5e^{-2t}$$

(Pade) e^A

(٣-٣

e^A

$$e^A = \varphi = (I - \frac{1}{2}A + \frac{1}{12}A^2)^{-1} (I + \frac{1}{2}A + \frac{1}{12}A^2)$$

$$\varphi$$

$$\varphi = I + C_1A + C_1A^2 + \dots$$

$$(I - \frac{1}{2}A + \frac{1}{12}A^2) \cdot \varphi = (I + \frac{1}{2}A + \frac{1}{12}A^2)$$

$$e^A \quad \varphi \quad A$$

(٥-٣

(الف

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

t=1,2,4

(ب

Matlab

expm

(ج

(د

$$e^{2A} = (e^A)^2, e^{4A} = (e^{2A})^2$$

(٦-٣

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x$$

$$x_2(t), x_1(t) \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(الف

$$(\quad) \quad x_2(t) \quad x_1(t)$$

(ب

$$(\quad) \quad (\quad)$$

(ج

(٧-٣

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

الف) $\det(H(s_0)) = 0$

ب)

ج) Matlab

۳-۱۳)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

الف) $H(s) \quad s_0$

$$u_s(t) \quad e^{s_0 t} w u_s(t)$$

Partial Fraction

ب)

۳-۱۵) سرو موتور DC و هارمونیک درایو

DC (-)

$$\frac{\theta_2}{v}, \frac{\theta_1}{v}$$

۳-۸)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

الف) e^{At}

ب) $x_2(t) \quad x_1(t) \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

۳-۹) C.H.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

۳-۱۰)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} x$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.9032 \\ -1.6877 \end{bmatrix} \quad \text{ب) } x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{الف)}$$

۳-۱۱) Matlab SS2tf

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

۳-۱۲)

۳-۲۲) پاندول دوتائی معکوس:

$$\left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad \frac{\theta_2}{F}, \frac{\theta_1}{F}, \frac{x}{F} \quad \ell_2 = 1m, \ell_1 = 1.5m$$

۳-۲۳) Maglev:

$$\left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad \Delta\theta, \Delta y, \Delta z$$

$$\left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad e^{At} \quad (۳۴-۳) \quad T^{-1}AT = \Lambda \quad T \quad \Lambda = diag[s_1, s_2, ..., s_n]$$

$$e^{\Lambda t} = diag[e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, ..., e^{s_n t}] \quad \text{الف)} \quad e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} \quad \text{ب)}$$

$$e^{At} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad \text{ج)}$$

$$\left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad (۲۵-۳) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad e^{At}$$

۳-۲۶) موتور DC و هارمونیک درایو:

$$\left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad DC \quad \text{الف)} \quad - \quad \text{ب)}$$

$$\left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad \frac{\theta}{\tau}, \frac{\varphi}{\tau}$$

۳-۱۶) کنترل سرعت غلطک

$$\left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad \frac{\omega_0}{T_0}, \frac{\omega_0}{u_2}, \frac{\omega_0}{u_1}$$

۳-۱۷) کنترل غلظت و ارتفاع در مخزن

$$\left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad \Delta F_A, \Delta F_0, \Delta F_B \quad \Delta C_A, \Delta \ell$$

۳-۱۸) مبدل حرارتی:

$$\left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad \Delta T_{c_0}, \Delta T_{h_0}, \Delta F_c \quad \left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad \Delta F_H \quad \Delta T_{c_3} \quad \left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right)$$

۳-۱۹) راکتور شیمیائی:

$$\left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad \Delta C_{A_0}, \Delta F \quad \Delta Q \quad \Delta T, \Delta C_A, \Delta C_B, \Delta C_c$$

۳-۲۰) جرثقیل سقفی:

$$\left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad \frac{\theta}{F}, \frac{x}{F}$$

۳-۲۱) بندباز:

$$\left(\begin{array}{c} - \\ \end{array} \right) \quad \frac{\theta}{\tau}, \frac{\varphi}{\tau}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \ell \\ \Delta C_s \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Delta \ell \\ \Delta V_d \end{bmatrix} \quad T$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \ell \\ \Delta \ell_s \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \Delta \ell \\ \Delta \ell_d \end{bmatrix}$$

T

(ب)

$$x(0) = C$$

(۳۱-۳)

$$x(t) = e^{At} C e^{Bt}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + x(t)B$$

C.H.

(۳۲-۳)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(۳۳-۳)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 1] x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

۳-۲۷) راکتور شیمیائی:

(-)

۳-۲۸)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2.0625 \\ 0.1250 \\ 2.2500 \\ 0.5000 \\ 3.0000 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0.6667 \ -0.6667 \ -0.6667 \ 1.1667] x$$

۳-۲۹) کنترل سرعت غلطک:

MIMO

-

SISO

-

(-)

$$u_c = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

$$u_2 = u_c - u_d, u_1 = u_c + u_d$$

$$u_d = \frac{u_1 - u_2}{2}$$

B (الف)

$$y_2 = \omega_1 - \omega_2, y_1 = \omega_0$$

(ب)

(

(ج)

۳-۳۰) کنترل غلظت و ارتفاع مخزن:

(-)

$$\text{For } i=1,2 \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ii}(t) = A_{ii} \varphi_{ii}(t) \quad (\text{ب})$$

(٣٤-٣

$$x(0) = [1 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{الف})$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\varphi(t-\tau) = \varphi(t) \cdot \varphi(-\tau) = \varphi(-\tau) \cdot \varphi(t) \quad (\text{ب})$$

C.H.

(٣٧-٣

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(٣٨-٣

$$) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$) \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 16/5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$) \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -25 & -50 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad 1] x(t)$$

(٣٤-٣

$$) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$) \quad \begin{bmatrix} -2 & 8 & 16 & -16 & -32 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(٣٥-٣

$$\dot{x}(t) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right] x(t)$$

$$\varphi(t) = \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \hline \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{array} \right] x(t)$$

$$\forall t \quad \varphi_{21}(t) = 0$$

(الف

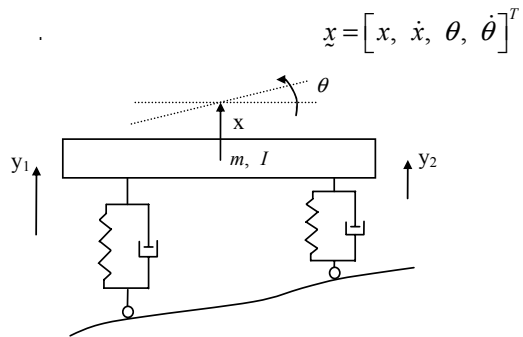
$$) \quad A = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad) \quad A = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -0.7 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(٣٩-٣)

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/6 & -13/6 & -1/3 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{bmatrix}$$

مراجع

- [1] Bélanger, Pierre., *Control engineering: a modern approach*, Saunders College Pub., c1995.
- [2] Boyd, Stephen P. and Craig H. Barratt., *Linear controller design : limits of performance*, Prentice Hall, c1991.
- [3] Brogan, William L., *Modern control theory*, 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, c1991.
- [4] Callier, Frank M. and Charles A. Desoer, *Linear system theory*, Springer-Verlag, c1991.
- [5] Chen, Chi-Tsong., *Linear system theory and design*, Oxford University Press, c1999.
- [6] Kailath, Thomas., *Linear systems*, Prentice-Hall, c1980.
- [7] Ogata, Katsuhiko., *Modern control engineering*, 4th ed., Prentice Hall, 2001.
- [8] Rugh, Wilson J., *Linear system theory*, 2nd ed., Prentice Hall, c1996.
- [9] Shinnars, Stanley M., *Modern control system theory and design*, 2nd ed., J. Wiley, c1998.
- [10] Zadeh, Lotfi Asker. and Charles A. Desoer, *Linear system theory*, R. E. Krieger Pub. Co., 1979.
- [11] .



شکل (۱-۴) مدل صفحه ای از سیستم تعلیق خودرو

Pitch $\theta \neq 0$

$\tilde{x}$

y_1, y_2

θ

$\tilde{x}$

۲-۱-۴ تعریف رؤیت پذیری

تعریف رؤیت پذیری:
LTI
$x(0) = x_0$
$t \in [0, T] \quad T > 0$
$u(t) \quad y(t)$

فصل چهارم: رؤیت پذیری و کنترل پذیری سیستمهای LTI

۱-۴ رؤیت پذیری

۱-۱-۴ مقدمه

t_f $x(t_f)$,

t_f

,

,

,

" "

" "

مثال ۱-۴ سیستم تعلیق اتومبیل

(-)

pitch θ x

y_1, y_2

مثال ۴-۲)

$$\forall \alpha, \beta \neq 0, \in \mathbb{R} \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

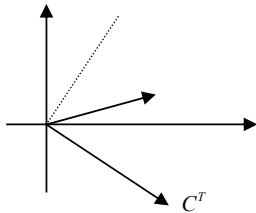
$$y_{zi}(t) = 0 \quad y$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \forall t$$

$$Ce^{At}x^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \varphi(t) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \equiv 0$$

$$y = Ce^{At}x^* = 0 \quad n$$

$$x(t) = e^{At}x^* \quad C^T \quad y$$



شکل (۴-۲) نمایش هندسی حالت رؤیت ناپذیر

LTI	:

$$x_0 \quad :$$

$$\varphi(t) \quad x(t) \quad x_0$$

$$(\forall t) \quad (\quad - \quad)$$

$$t_0 = 0 \quad :$$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) \quad (\quad - \quad)$$

$$x(t) \quad u(\tau) \quad x_0$$

$$(\quad - \quad)$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) + Du(t) \quad (\quad - \quad)$$

$$y_{zs}$$

$$y_{zi}$$

$$y_{zi}(t) = Ce^{At}x_0 \quad (\quad - \quad)$$

$$x_0$$

تعریف متغیر حالت رؤیت ناپذیر:

$$x^* \neq 0$$

$$\forall t \geq 0 \quad x(0) = x^* \quad y_{zi}(t)$$

$$x^* \neq 0$$

$$\text{if } \exists x^* \neq 0 \ni y_{zi}(t) = Ce^{At}x^* \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\int_0^T (Ce^{At})^T y(t) dt = M(T)x_0$$

:

$$M(T) = \int_0^T (Ce^{At})^T (Ce^{At}) dt$$

$$\forall T > 0,$$

M(T)

$$x_0^T M(T)x_0 = \int_0^T x_0^T (Ce^{At})^T (Ce^{At}) x_0 dt$$

$$= \int_0^T (Ce^{At} x_0)^T (Ce^{At} x_0) dt$$

$$= \int_0^T \| Ce^{At} x_0 \|^2 dt > 0$$

$$\forall x_0 \neq 0$$

$$M^{-1}(T)$$

M(t)

$$x_0 = M^{-1}(T) \int_0^T (Ce^{At})^T y(t) dt$$

$$y(t)$$

$$x_0$$

■

۴-۱-۳) تستهای رؤیت پذیری

$$Ce^{At} x_0$$

$$x_0$$

...

A

-

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

:

A

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = \mathbf{0}$$

(-)

¹ Caley - Hamilton

LTI	:

$$C^T \quad x(t)$$

$$y$$

$$x(0)$$

:

$$\forall x \neq 0 \quad x^T Mx > 0$$

$$M$$

$$M$$

قضیهٔ ۴-۱) رؤیت پذیری

$$((A, C)$$

) LTI

اثبات:

:

$$Ce^{At} x^* = 0$$

$$x^*$$

:

$$x(0) = x_1$$

$$y_1(t) = Ce^{At} x_1$$

$$x_2(0) = x_1 + \alpha x^*$$

(zi)

:

$$y_2(t) = Ce^{At} x_1 + \alpha Ce^{At} x^* = Ce^{At} x_1 = y_1(t)$$

$$x_1(0) \neq x_2(0)$$

$$y_1(t) = y_2(t)$$

$$y_1(t) = y_2(t)$$

:

$$x_1(0) = x_0 \neq 0$$

$$y(t) = Ce^{At} x_0$$

$$(Ce^{At})^T$$

$$(Ce^{At})^T y(t) = (Ce^{At})^T (Ce^{At}) x_0$$

:

قضیه ۴-۲) شرایط رؤیت پذیری

 x^*

$$\mathbf{O} x^* = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x^* = \mathbf{0} \quad (-)$$

$$\text{rank}(\mathbf{O}) < n$$

 $\mathbf{O}$

$$x^* \neq 0$$

اثبات:

$$Ce^{At} x^* = 0 \quad \forall t \geq 0$$

 x^*

$$Ce^{At} x^*$$

$$Ce^{At} x^* \Big|_{t=0} = Cx^* = 0$$

$$\frac{d}{dt} Ce^{At} x^* \Big|_{t=0} = CAe^{At} x^* \Big|_{t=0} = CAx^* = 0$$

$$\frac{d^k}{dt^k} Ce^{At} x^* \Big|_{t=0} = CA^k e^{At} x^* \Big|_{t=0} = CA^k x^* = 0$$

$$k = n-1$$

 x^*

$$\forall t \quad Ce^{At} x^* = 0$$

(-)

$$Cx^* = CAx^* = CA^2 x^* = \dots = CA^{n-1} x^* = 0$$

C.H.

¹ Observability matrix

$$\begin{cases} A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \dots - a_1A - a_0I \\ CA^n x^* = -a_{n-1}CA^{n-1}x^* - \dots - a_{n-1}CAx^* - a_0Cx^* = 0 \end{cases}$$

:

A

$$\begin{cases} A^{n+1} = -a_{n-1}A^n - a_{n-2}A^{n-1} - \dots - a_1A^2 - a_0A \\ CA^{n+1}x^* = -a_{n-1}CA^n x^* - a_{n-2}CA^{n-1}x^* - \dots - a_0Ax^* = 0 \\ Ce^{At} x^* = 0 \end{cases}$$

مثال ۴-۳)

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1]$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{O} = 0 \rightarrow \text{not full rank}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow x^* = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۴-۴) موتور DC و ضد هوائی

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & NK_m / J_e \\ 0 & -NK_m / J_e & -R / L \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0] \quad \theta \quad ($$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0] \quad \omega \quad ($$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ($$

$$x(t)=e^{s_it}.v_i$$

$$y_{zi}=Cx(t)=e^{s_it}Cv_i=0\qquad \forall t$$

$$\forall i\quad Cv_i\neq 0$$

$$R^n\qquad \{v_1,v_2,...,v_n\}$$

$$x(0)=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n$$

$$\Rightarrow x(t)=a_1e^{s_1t}v_1+a_2e^{s_2t}v_2+\cdots+a_ne^{s_nt}v_n$$

$$\Rightarrow y(t)=Cx(t)=a_1Cv_1e^{s_1t}+a_2Cv_2e^{s_2t}+\cdots+a_nCv_ne^{s_nt}$$

$$y(t)\neq 0\qquad\qquad\qquad Cv_i\neq o$$

$$a_i=0$$

$$y(0)=0$$

$$Cv_i=0$$

■

$$\omega,\theta$$

قضیة ۴-۳) شرط بردار ویژه

$$A\qquad v_i\qquad (A,C)$$

$$Cv_i=0$$

اثبات:

$$x(0)=v_i\qquad\qquad\qquad A\qquad\qquad\qquad v_1,v_2,...v_n$$

$$\exists i\,\ni\,Cv_i=0$$

$$Cv_i=0$$

LTI	:

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & NK_m/J_e \end{bmatrix}\rightarrow \text{Full rank}\quad ($$

(

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & NK_m/J_e \\ 0 & -N^2K_m^2/LJ_e & -NK_mR/LJ_e \end{bmatrix}\rightarrow \text{rank}(\mathbf{O})=2$$

$$x^*=[a\quad 0\quad 0]^T$$

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & NK_m/J_e \\ 0 & 0 & NK_m/J_e \\ 0 & -NK_m/LJ_e & -NK_mR/LJ_e \end{bmatrix}\rightarrow \text{rank}(\mathbf{O})=3\quad ($$

θ

A

$$k\leq n$$

$$\text{rank}\,[Cv_{i1}^0,Cv_{i2}^0,...Cv_{ik}^0]=k$$

¹ Span

LTI	:

A

λ_2

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_3 & v_2 \end{bmatrix}$$

A

$$T^{-1}AT = \Lambda = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right]$$

$$z(t) = T \cdot x(t)$$

z_1, z_2

z

z_2

$$\dot{z}(t) = \left[\begin{array}{c|c} A'_{11} & 0 \\ \hline A'_{21} & A'_{22} \end{array} \right] z(t) + \left[\begin{array}{c} B'_1 \\ B'_2 \end{array} \right] u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C'_1 & 0 \end{bmatrix} z(t) + Du(t)$$

(-)

$$\rightarrow z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

z_1

z_2

T

مثال ۴-۶)

(-)

مثال ۴-۵)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Cv_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Cv_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \neq 0$$

$\lambda = -1$

۴-۱-۴) زیر فضای رؤیت ناپذیر

$$Cv_i = 0$$

e^A A

$$x(0)$$

O

O

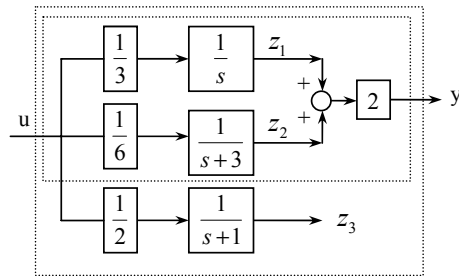
$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} Cx \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

¹ Null space

$$\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATx + T^{-1}Bu \\ y = CTx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] z + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y = [2 \quad 2 \quad 0]z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \frac{1}{3}u \\ \dot{z}_2 = -3z_2 + \frac{1}{6}u \\ \dot{z}_3 = -z_3 + \frac{1}{2}u \end{cases}$$

$$y = 2(z_1 + z_2)$$



شکل (۴-۳) جداسازی زیر فضای رؤیت پذیر و رؤیت ناپذیر مثال (۴-۶)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad 1]x(t)$$

مثال (۴-۷)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 3 \quad 2]x$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{rank}(\mathbf{O}) = 2$$

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Cv_1 = 2 \neq 0 \rightarrow$$

$$\lambda_2 = -1 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Cv_2 = 0 \rightarrow$$

$$\lambda_3 = -3 \rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Cv_3 = 2 \rightarrow$$

$$T = [v_1 \quad v_3 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 0 & 9 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف آشکار پذیری:

توجه:

$$\text{Re}(\lambda) \geq 0$$

۲-۴) کنترل پذیری

۱-۲-۴) تعریف کنترل پذیری

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

(-)

F

x

θ

θ

F_1, F_2

θ, x

LTI	:
-----	---

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(O) = 2$$

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Cv_1 = 0 \rightarrow$$

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Cv_2 = -1 \rightarrow$$

$$\lambda_3 = 1 \rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Cv_3 = 0 \rightarrow$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z = Tx, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T^{-1}AT \cdot x + T^{-1}B \cdot u \Rightarrow \dot{z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= CT \cdot x + D \cdot u \Rightarrow y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} z \end{aligned}$$

۵-۱-۴) آشکار پذیری

∞

۴-۲-۲) حالت‌های کنترل ناپذیر و کنترل پذیری

تعریف: حالت کنترل ناپذیر	
$\forall t$	$x_{zs}(t)$
	$x^* \neq 0$
	x^*
	u

$$\left. \begin{matrix} \forall t \\ \forall u \end{matrix} \right| x^{*T} \int_0^t e^{A\tau} Bu(t-\tau) d\tau = \int_0^t x^{*T} e^{A\tau} Bu(t-\tau) d\tau = 0 \quad (-)$$

$$\boxed{\forall t \quad x^{*T} e^{At} \cdot B = 0} \quad (-)$$

$$Ce^{At} x^* = 0$$

$$B^T \quad B$$

قضیه ۴-۴

$$((A, B) \quad) \text{ LTI}$$

۴-۲-۳) تست‌های کنترل پذیری:

$$B^T e^{A^T t} x^* = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A^T x \\ y = B^T x \end{cases} \quad (-)$$

■

LTI	:

تعریف کنترل پذیری	
$T > 0$	x_1
$x_0 = 0$	$0 < t \leq T$
	u(t)
	T
	x_1

$$x_0 = 0$$

$$x(t_0 + T) = e^{AT} x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+T} e^{A(t_0+T-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (-)$$

$$\tau' = \tau - t_0$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{A(t_0+T-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \int_0^T e^{A(T-\tau')} Bu(t_0 + \tau') d\tau' \quad (-)$$

$$v(\tau') = u(t_0 + \tau')$$

$$u(t) \quad t=T$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(\mathbb{C}) = 1 \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} a & -a \end{bmatrix}$$

-2

$$\lambda_i(A^T) = -2 \rightarrow \omega_i = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$$

۴-۲-۵) پایداری پذیری

تعریف پایداری پذیری

۴-۲-۶) زیر فضای کنترل پذیر

LTI	:

$$\begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ B^T (A^T)^2 \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} x^* = 0 \quad (-)$$

$$x^{*T} \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} = 0 \quad (-)$$

$x^* \neq 0 \quad (A, B)$

$$\text{rank } \mathbb{C} = \text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} = n \quad (-)$$

n $\mathbb{C}^n$ "

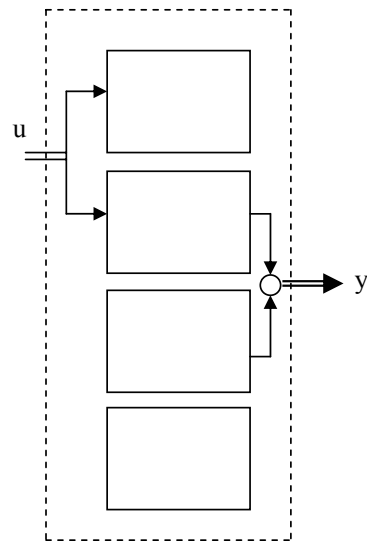
(A, B)

$$A^T w, \quad w, \quad B^T w = 0$$

w_i

مثال ۴-۸)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



شکل (۴-۴) تجزیه کالمن سیستمهای LTI

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [7 \quad 6 \quad 4 \quad 2] x(t)$$

مثال (۴-۹)

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}{s^4 + 21s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

$$H(s) = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{1}{s+1} !$$

$$T = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \rightarrow x(t) \quad (-)$$

$$\dot{z} = \left[\begin{array}{c|c} A'_{11} & A'_{12} \\ \hline 0 & A'_{22} \end{array} \right] z + \left[\begin{array}{c} B'_1 \\ 0 \end{array} \right] u(t) \quad (-)$$

۳-۴ تجزیه کالمن سیستمهای LTI

$$(w_i^T B \neq 0, Cv_i \neq 0)$$

$$(w_i^T B = 0, Cv_i \neq 0)$$

$$(w_i^T B \neq 0, Cv_i = 0)$$

$$(w_i^T B = 0, Cv_i = 0)$$

" "

" "

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & -3 \\ & & & -4 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] z(t)$$

:

$$\dot{z}_1 = -z_1(t) + u(t) \rightarrow$$

$$\dot{z}_2 = -2z_2(t) \rightarrow$$

$$\dot{z}_3 = -3z_3(t) + u(t) \rightarrow$$

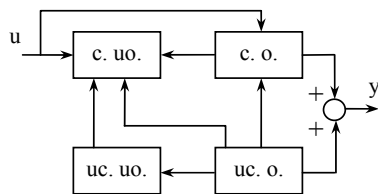
$$\dot{z}_4 = -4z_4(t) \rightarrow$$

(-)

(-)

u

y

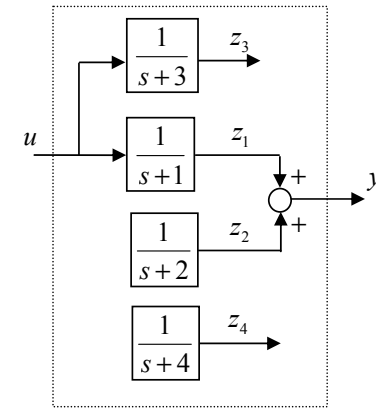


شکل (۴-۶) نمایش تجزیه کالمن سیستمها در حالت کلی

مثال ۴-۱۰) موتور DC ضد هوائی

$$C = [0 \quad 1 \quad 0]$$

:



شکل (۴-۵) نمایش تجزیه کالمن مثال (۴-۹)

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

.....

مسائل

(١-٤)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad -1] x$$

x^* $\varphi(t) = e^{At}$ (الف)
 $\forall t \geq 0$

$Ce^{At}x^* = 0$ (ب)
 $0x^* = 0$ 0

$Cx^* = 0$ A x^* (ج)

(٢-٤)

$C = 0$ A , ,

(٣-٤)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] x$$

x^* $\varphi(t) = e^{At}$ (الف)
 $\forall t \geq 0$

$x^* e^{At} B = 0$ (ب)
 $x^{*T} C = 0$ C

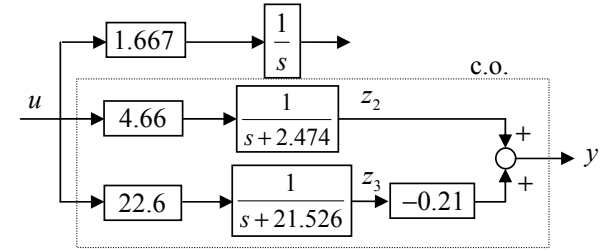
$x^{*T} B = 0$: A^T x^* (ج)

LTI	:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -0.4042 & 0.0096 \\ 0 & 1 & -0.2062 \\ 0 & -0.5575 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.474 & 0 \\ 0 & 0 & -21.526 \end{bmatrix}$$

$$CT = [0 \quad 1 \quad -0.2062], \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1.667 \\ 4.66 \\ 22.6 \end{bmatrix}$$

z



شكل (٧-٤) تجزئة كالمن سيستم موتور DC

(٤-٤) جمع بندى

$x(t_0)$ n $u(t)$

$y(t)$ $x(t_0)$ n

الف) (10-4) راکتور شیمیائی

ب) (11-4) جرثویل سقفی

ج) (12-4) بندباز

د) (13-4) پاندول دوتائی معکوس

ه) (14-4) Maglev

و) (15-4) $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

ز) (16-4) $\text{rank}(C)=r$

الف) (10-4) راکتور شیمیائی

ب) (11-4) جرثویل سقفی

ج) (12-4) بندباز

د) (13-4) پاندول دوتائی معکوس

ه) (14-4) Maglev

و) (15-4) $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

ز) (16-4) $\text{rank}(C)=r$

الف) (10-4) راکتور شیمیائی

ب) (11-4) جرثویل سقفی

ج) (12-4) بندباز

د) (13-4) پاندول دوتائی معکوس

ه) (14-4) Maglev

و) (15-4) $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

ز) (16-4) $\text{rank}(C)=r$

الف) (10-4) راکتور شیمیائی

ب) (11-4) جرثویل سقفی

ج) (12-4) بندباز

د) (13-4) پاندول دوتائی معکوس

ه) (14-4) Maglev

و) (15-4) $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

ز) (16-4) $\text{rank}(C)=r$

الف) (10-4) راکتور شیمیائی

ب) (11-4) جرثویل سقفی

ج) (12-4) بندباز

د) (13-4) پاندول دوتائی معکوس

ه) (14-4) Maglev

و) (15-4) $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

ز) (16-4) $\text{rank}(C)=r$

الف) (10-4) راکتور شیمیائی

ب) (11-4) جرثویل سقفی

ج) (12-4) بندباز

د) (13-4) پاندول دوتائی معکوس

ه) (14-4) Maglev

و) (15-4) $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

ز) (16-4) $\text{rank}(C)=r$

الف) (10-4) راکتور شیمیائی

ب) (11-4) جرثویل سقفی

ج) (12-4) بندباز

د) (13-4) پاندول دوتائی معکوس

ه) (14-4) Maglev

و) (15-4) $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

ز) (16-4) $\text{rank}(C)=r$

الف) (10-4) راکتور شیمیائی

ب) (11-4) جرثویل سقفی

ج) (12-4) بندباز

د) (13-4) پاندول دوتائی معکوس

ه) (14-4) Maglev

و) (15-4) $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

ز) (16-4) $\text{rank}(C)=r$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{z}(t)=T_2AT_1z(t)+T_2Bu(t) \\ y(t)=CT_1z(t) \end{array}\right.$$

$$-\hspace{1.5cm}(\textcolor{blue}{20})-\textcolor{blue}{4}$$

$$\hspace{1.5cm}(\textcolor{blue}{21})-\textcolor{blue}{4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t)=\left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right]x(t)+\left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right]\mu(t) \\ y(t)=\left[\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{array}\right]x(t)+Du(t) \end{array}\right.$$

$$\text{c,b,a}$$

$$-\hspace{1.5cm}\text{m}\hspace{1.5cm}\text{n}\hspace{1.5cm}(\textcolor{blue}{22})-\textcolor{blue}{4}$$

$$\dot{x}(t)=\left[\begin{array}{ccccccc} J_1 & & & & & & \\ & J_2 & & & & & \\ & & J_3 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J_p & & \end{array}\right]x(t)+\left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{array}\right]u(t)$$

$$b_{il}^T\hspace{1cm}B_i\hspace{1cm}\rule{1cm}{0.4pt}$$

$$J_i,J_j,...,J_k\hspace{1.5cm}\{b_{il},b_{jl},...,b_{kl}\}\hspace{0.5cm}-$$

$$\hspace{1.5cm}\lambda_i$$

$$\hspace{1.5cm}\lambda_p\hspace{1.5cm}J_p\hspace{1.5cm}b_{p_l}\neq 0\hspace{0.5cm}-$$

$$\hspace{1.5cm}\text{LTI}\hspace{1.5cm}:$$

$$\begin{array}{l} \dot{x}=Ax(t)+Bu(t) \\ y=Cx(t) \end{array}$$

$$\ell\hspace{1.5cm}y\hspace{1.5cm}m\hspace{1.5cm}u(t)\hspace{1.5cm}n\hspace{1.5cm}x$$

$$\text{rank}\left[\begin{array}{c} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-r} \end{array}\right]=n$$

$$\hspace{1.5cm}\text{T}\hspace{1.5cm}(\textcolor{blue}{17})-\textcolor{blue}{4}$$

$$\hspace{1.5cm}\alpha\hspace{1.5cm}(\textcolor{blue}{18})-\textcolor{blue}{4}$$

$$\dot{x}(t)=\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{array}\right]x(t)+\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]\mu(t)$$

$$y(t)=[-1\hspace{0.5cm}1\hspace{0.5cm}1]x(t)$$

$$\alpha\hspace{0.5cm}(\text{الف})$$

$$\alpha\hspace{0.5cm}(\text{ب})$$

$$\hspace{1.5cm}\text{n}\hspace{1.5cm}(\textcolor{blue}{19})-\textcolor{blue}{4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \\ y(t)=Cx(t) \end{array}\right.$$

$$(n_1<n)\hspace{1.5cm}rank\mathbb{C}=n_1$$

$$\mathbb{C}\hspace{1.5cm}n_1\hspace{1.5cm}n\times n_1\hspace{1.5cm}T_1$$

$$T_2T_1=I_{n_1\times n_1}\hspace{1.5cm}n_1\times n\hspace{1.5cm}T_2$$

$$n_1$$

مراجع

[1] Bélanger, Pierre., *Control engineering : a modern approach*, Saunders College Pub., c1995.

[2] Bishop, Robert H., *Modern control systems analysis and design using MATLAB and SIMULINK*, Addison Wesley, c1997.

[3] Brogan, William L., *Modern control theory*, 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, c1991.

[4] Callier, Frank M. and Charles A. Desoer, *Linear system theory*, Springer-Verlag, c1991.

[5] Chen, Chi-Tsong., *Linear system theory and design*, Oxford University Press, c1999.

[6] Kailath, Thomas., *Linear systems*, Prentice-Hall, c1980.

[7] Kamen, Edward W. and J.K. Su, *Introduction to optimal estimation*, Springer, c1999.

[8] Klamka, Jerzy, *Controllability of dynamical systems*, Kluwer Academic Publishers, c1991.

[9] Ogata, Katsuhiko., *Modern control engineering*, 4th ed., Prentice Hall, 2001.

[10] Rugh, Wilson J., *Linear system theory*, 2nd ed., Prentice Hall, c1996.

[11] Shinnars, Stanley M., *Modern control system theory and design*, 2nd ed., J. Wiley, c1998.

[12] Zadeh, Lotfi Asker. and Charles A. Desoer, *Linear system theory*, R. E. Krieger Pub. Co., 1979.

[13]

LTI	:

$$C_{il} \quad C_i \quad - \quad (23-4)$$

$$J_i, J_j, \dots, J_k \quad \{C_{il}, C_{jl}, \dots, C_{kl}\} -$$

$$\lambda_i$$

$$\lambda_p \quad J_p \quad C_{pl} \neq 0 -$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

(الف)

(ب)

(ج)

(د)

فصل پنجم: تحقق و پایداری سیستمهای LTI

۵-۱) تحقق سیستمهای LTI

، LTI ،

.

،
:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x \end{cases} \quad (-)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + au \\ y = \frac{1}{a}x \end{cases} \quad (-)$$

$$\frac{1}{s+1}$$

تعریف تحقق:

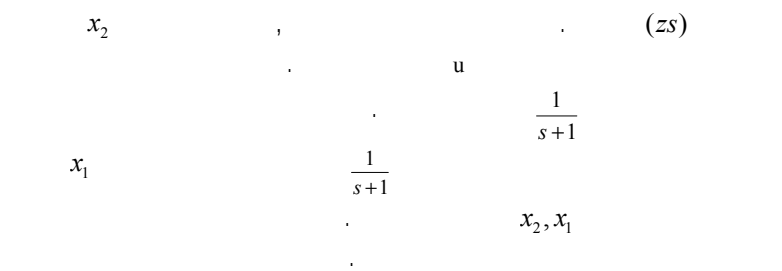
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + D \end{cases} \quad -$$
$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

LTI

H

.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \quad (-)$$



تعريف: تحقق كاهش ناپذير

H(s)

$$\{CA^{i-1}b, \quad i=1,2,\dots\}$$

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \sum_{i=0}^{\infty} h_i s^{-i} \quad (-)$$

¹ Markov parameters

LTI	:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = D \quad (-)$$

H(s) D ≠ 0

$$H(s) = \hat{H}(s) + D \quad (-)$$

$\hat{H}$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (-)$$

قضيه ٥-١) وجود تحقق

H(s)

H(s),

٥-٢) تحقق كاهش ناپذير^٣

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (-)$$

¹ Proper
² Strictly proper
³ Minimal realization

. (-)
 ،

.

n :

A A

:

$$\begin{cases} \dot{z}_i = s_i z_i + w_i^T B u & i = 1, 2, \dots, n \\ y = C v_1 z_1 + C v_2 z_2 + \dots + C v_n z_n + D u \end{cases} \quad (-)$$

:

$$z_i(s) = \frac{1}{s - s_i} w_i^T B u \quad (-)$$

$$y(s) = \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - s_i} (C v_i)(w_i^T B) + D \right] u(s)$$

:

$$\forall i \in 1, \dots, n \quad w_i^T B \neq 0, \quad C v_i \neq 0 \quad (-)$$

$$) . \quad n \quad \frac{1}{s - s_i}$$

، A (

■

$$i \quad (\quad) \quad \frac{1}{s - s_i}$$

$$. (C v_i = 0) \quad (w_i^T B = 0)$$

$$\det(sI - A) \quad (s - s_i)$$

LTI	:

$$(sI - A)^{-1} = s^{-1} I + s^{-1} A + s^{-3} A^2 + \dots \quad (-)$$

$$\rightarrow h_i = C A^{i-1} b \quad (i = 1, 2, \dots) \quad h_i \quad (-)$$

$$H(s)$$

$$C_1 A_1^{i-1} B_1 = C_2 A_2^{i-1} B_2 \quad (-)$$

.

.

$$M(i, j) = \begin{bmatrix} h_i & h_{i+1} & \dots & h_{i+j} \\ h_{i+1} & h_{i+2} & \dots & h_{i+j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{i+j} & h_{i+j+1} & \dots & h_{i+2j} \end{bmatrix} \quad (-)$$

.

.

قضية ٥-٢

،

اثبات:

:

¹ Hankel matrix

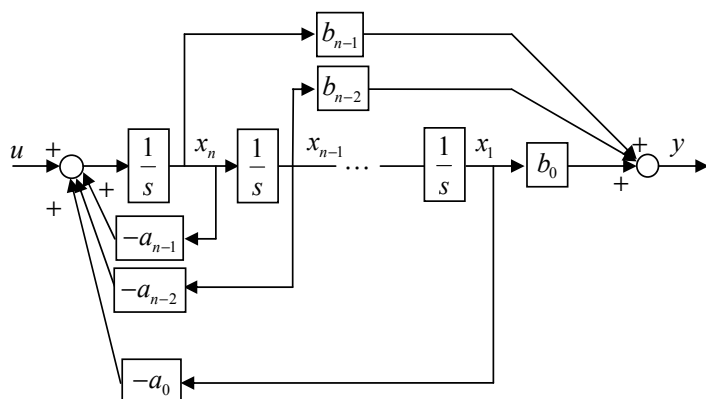
۵-۳-۱) تحقق کانونیکال کنترل پذیری

$$H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n+1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \dots - a_0x_n(t) + u(t) \\ y = b_{n-1}x_n + b_{n-2}x_{n-1} + \dots + b_1x_2 + b_0x_1 \end{cases} \quad (-)$$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (-)$$

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}] \tilde{x}$$



شکل (۵-۱) بلوک دیاگرام تحقق کانونیکال کنترل پذیری

A

SISO

A

MIMO

۵-۳) تحقق سیستمهای SISO

Op-Amp

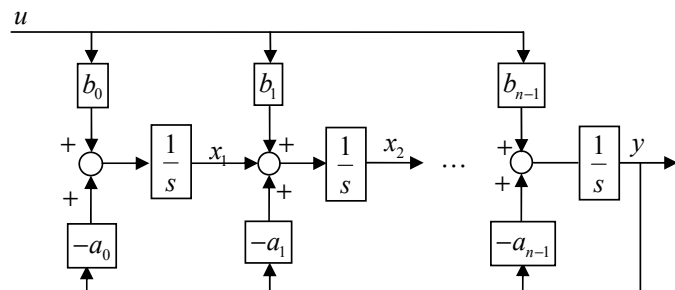
)

Op-Amp

(

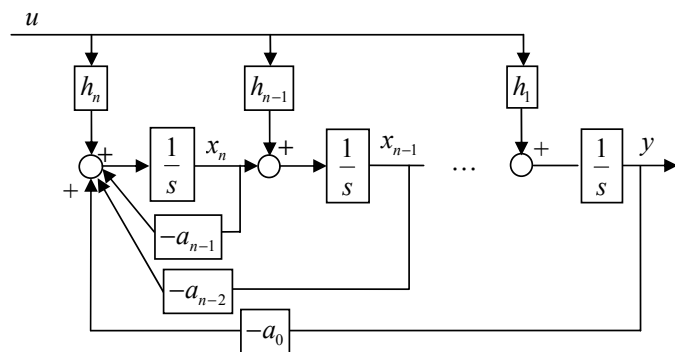
[A, B, C, D]

$$H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n+1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (-)$$



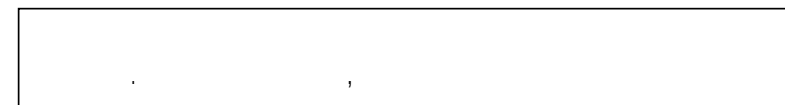
شکل ۵-۲ بلوک دیاگرام تحقق کانونیکال رویت پذیری

۵-۳-۳) تحقق کانونیکال رویتگر



شکل (۵-۳) بلوک دیاگرام تحقق کانونیکال رویتگر

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & * \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots & & * \\ 1 & * & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad (-)$$



۵-۳-۲) تحقق کانونیکال رویت پذیری

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u \quad (-)$$

$$y = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] x$$

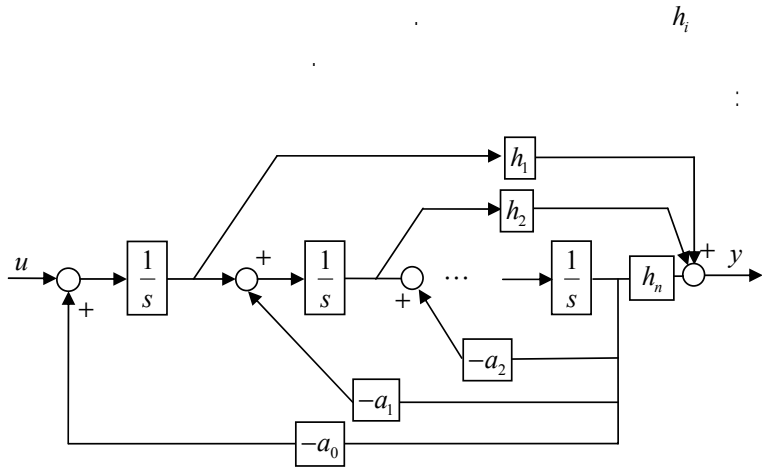
$$A_0 = A_c^T, b_0 = C_c^T, C_0 = b_c^T$$

() .

٥-٣-٤) تحقق کانونیکال کنترولر

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (-)$$

$$y = [h_1 \quad h_2 \cdots h_n] x$$



شکل (٥-٤) بلوک دیاگرام تحقق کانونیکال کنترولر

مثال ٥-١)

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 5}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} u \quad (-)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] x$$

h_i

$$H(s) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i s^{-i} \quad (-)$$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = I \quad (-)$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$= M(1, n-1)$$

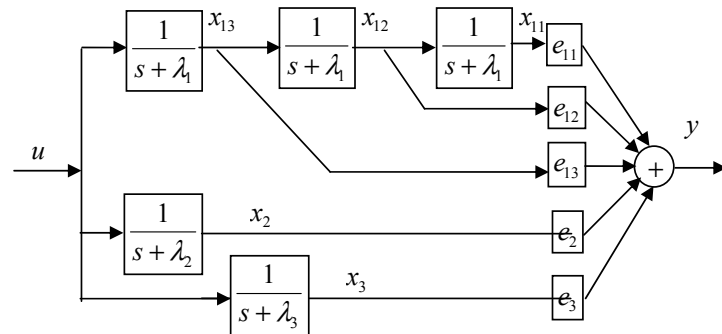
$n-1, 1$

$H(s)$

D,C,B,A

۵-۳-۵) تحقق کانونیکال جوردن

$$H(s) = \frac{e_{11}}{(s-\lambda_1)^3} + \frac{e_{12}}{(s-\lambda_1)^2} + \frac{e_{13}}{(s-\lambda_1)} + \frac{e_2}{s-\lambda_2} + \frac{e_3}{s-\lambda_3} \quad (-)$$



شکل (۵-۵) نمایش سیستم در تحقق کانونیکال جوردن رؤیت پذیر

(الف)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 1]x$$

(ب)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0 \ 1]$$

(ج)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 26 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 1]y$$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 11 & 6 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 26 \end{bmatrix}$$

(د)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ -6 \ 26]x$$

مثال ۵-۲

$$H(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$= \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{-8}{(s+1)} + \frac{9}{(s+2)}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [4 \quad -8 \quad 9]x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 1]x$$

۵-۴) تحقق سیستمهای یک ورودی - چند خروجی SIMO

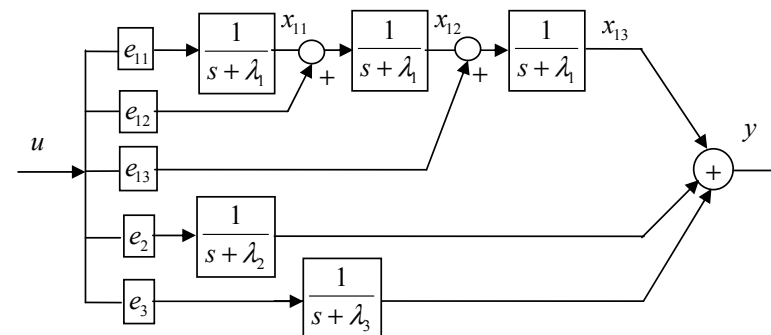
SIMO

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \\ \vdots \\ b_m(s) \end{bmatrix} \quad d(s) = (sI - A) \quad (-)$$

$$d(s)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (-)$$

$$y = [e_{11} \quad e_{12} \quad e_{13} \quad e_2 \quad e_3]x$$



شکل (۵-۶) نمایش سیستم در تحقق کانونیکال جوردن کنترل پذیر

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} u \quad (-)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (-)$$

$$y = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{22} & e_{23} \\ \vdots & & & & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & e_{m3} & e_{m2} & e_{m3} \end{bmatrix}$$

نکته:

$$(\quad) \quad A$$

مثال ۵-۳)

پاسخ:

$$H(s) = \left[\frac{1}{(s^2+1)(s+1)} \right] = \left[\frac{s+2}{(s^2+1)(s+1)(s+2)} \right]$$

$$d(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2$$

الف) کانونیکال کنترل پذیری

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (-)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1 \ n-1} \\ b_{20} & b_{21} & \cdots & b_{2 \ n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m0} & b_{m1} & \cdots & b_{m \ n-1} \end{bmatrix} x \begin{matrix} \leftarrow b_1 \\ \leftarrow b_2 \\ \\ \leftarrow b_m \end{matrix}$$

ب) کانونیکال کنترل کننده

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (-)$$

$$y = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix} x$$

$$b_j$$

$$h_{ji}$$

ج) کانونیکال جوردن

:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow s+2 \\ \rightarrow s^3+0s^2+s+0 \end{matrix}$$

سؤال:

۵-۵) تحقق سیستمهای چند ورودی-تک خروجی MISO

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{B_1(s)}{a_1(s)} & \frac{B_2(s)}{a_2(s)} & \dots & \frac{b_r(s)}{a_r(s)} \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$H(s) = \frac{1}{a(s)} [b_1(s) \quad b_2(s) \quad \dots \quad b_r(s)] \quad (-)$$

SIMO

الف) تحقق کانونیکال رؤیت پذیری

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_{10} & & b_{r0} \\ b_{11} & & b_{r1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1 \ n-1} & \dots & b_{r \ n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] x \quad (-)$$

ب) تحقق کانونیکال رؤیت گر

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{r1} \\ h_{12} & & h_{r2} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{1n} & \dots & h_{rn} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

(-)

ج) تحقق جوردن فرم رؤیت پذیر

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e_{11}^1 & e_{11}^2 & \dots & e_{11}^r \\ e_{12}^1 & e_{12}^2 & & e_{12}^r \\ e_{13}^1 & e_{13}^2 & & e_{13}^r \\ e_2^1 & e_2^2 & & e_2^r \\ e_3^1 & e_3^2 & \dots & e_3^r \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1] x$$

(-)

۵-۶) تحقق سیستم های چند ورودی و چند خروجی MIMO

$$G(s) = [G_{ij}(s)]_{m \times r} \quad (-)$$

r m

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

A B C D

m r

مثال ۵-۴):

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1.4142 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1.4142 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1.2857 & 0.3598 & -0.6003 \\ 0.3598 & -1.4531 & 0.7559 \\ -0.6003 & 0.7559 & -2.2612 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1.0690 & 1.0690 \\ 0.4760 & 0.1394 \\ 0.7941 & 1.3556 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0.4351 & 1.5201 \\ 0 & 1.0505 & 0.6296 \end{bmatrix}$$

۵-۷) پایداری سیستمهای LTI

)
LTI

LTI	:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}(s)}{a_1(s)} & \frac{b_{12}(s)}{a_1(s)} & \dots & \frac{b_{1r}(s)}{a_1(s)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{b_{m1}(s)}{a_m(s)} & \frac{b_{m2}(s)}{a_m(s)} & \dots & \frac{b_{mr}(s)}{a_m(s)} \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} u$$

$$y = [C_1 \mid C_2 \mid \dots \mid C_r] x$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_0^i \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & 1 & & \\ \vdots & & & -a_0^i \\ 0 & \dots & 1 & -a_0^i \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} b_0^{i1} & b_0^{i2} & \dots & b_0^{ir} \\ b_1^{i1} & b_1^{i2} & \dots & b_1^{ir} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n-1}^{i1} & b_{n-1}^{i2} & \dots & b_{n-1}^{ir} \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{row } i \quad (-)$$

unpck sysic

minreal

$$\rho \quad \rho \quad \mathbb{R}^n$$

تعریف ۳: پایداری داخلی

$$x_{zi}(t) \quad \text{LTI}$$

تعریف ۴: پایداری ورودی-خروجی BIBO

$$\begin{aligned} & \text{(BI)} \quad \text{LTI} \quad \text{BIBO} \quad \text{BO} \quad (y_{zs}(t)) \\ & \text{LTI} \end{aligned}$$

۵-۷-۲) قضایای پایداری سیستمهای LTI

قضیه ۵-۳) پایداری داخلی

$$\begin{aligned} & \text{A} \quad \text{LTI} \\ & (\forall \lambda_i \rightarrow \text{Re}(\lambda_i) < 0) : \quad \text{(OLHP)} \end{aligned}$$

اثبات: شرط کافی

$$\begin{aligned} & x_{zi}(t) \quad k \quad A \quad \lambda_i \quad t^k e^{\lambda_i t} \\ & \text{Re}(\lambda_i) < 0 \end{aligned}$$

¹ Globally asymptotically stable

۵-۷-۱) تعاریف پایداری

$$\begin{aligned} & x^* \quad \dot{x} = f(x, t) \\ & f(x^*, t) = 0 \end{aligned}$$

تعریف ۱: پایداری به مفهوم لیاپانوف (پایداری لیاپانوف)

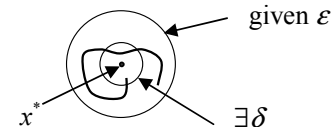
$$x^* \quad x(t)$$

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \quad (-)$$

$$\|x(t_0) - x^*(t_0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*(t)\| \leq \varepsilon$$

$$\| \cdot \|$$

$$\|x(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2(t)} \quad (-)$$



$$\forall t \quad \|x(t) - x^*(t)\| < \delta$$

$$x^* \quad \delta$$

تعریف ۲: پایداری مجانبی لیاپانوف

$$(\quad) \quad x^*(t)$$

الف)

$$\forall t_0, \exists \rho(t_0) > 0 \ni \|x(t_0) - x^*(t_0)\| < \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*(t)\| = 0 \quad \text{ب)}$$

¹ Trajectory

$$\forall \|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (-)$$

مثال ۵-۵:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 - 2x_1^3 \\ V(x) > 0 \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^4 + 2x_1^2 + x_1^2)$$

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}(4x_1^3\dot{x}_1 + 4x_1\dot{x}_1 + 2x_1\dot{x}_2)$$

$$= \frac{1}{2}[4x_1^3(x_2) + 4x_1x_2 + 2x_2(-2x_1 - 3x_2 - 2x_1^3)]$$

$$= \dots = -3x_2^2 < 0$$

$$x = (1, 0)$$

$$\dot{V}(x) = 0$$

$$\dot{x} = f(x) \rightarrow \dot{x} = Ax \quad (-)$$

$$V(x) = x^T Px \quad (-)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} = x^T A^T Px + x^T PAx \\ &= x^T (A^T P + PA)x \end{aligned} \quad (-)$$

$$(A^T P + PA) = -Q \quad (-)$$

LTI	:

BIBO

BIBO

۵-۷-۳) قضیه پایداری لیپانوف و تحلیل پایداری سیستمهای LTI

قضیه ۵-۶) پایداری مجانبی لیپانوف (روش دوم لیپانوف)

$$x^* = 0$$

$$\dot{x} = f(x)$$

$$V(x)$$

(

$$V(x)$$

$$V(x) ($$

$$\forall x \neq 0 \rightarrow V(x) > 0 ($$

$$\text{for } x = 0 \rightarrow V(x) = 0 ($$

$$\forall x \neq 0 \rightarrow \dot{V}(x) < 0 : V(x)$$

$$\dot{V}(x)$$

$$V(x)$$

$$\mathbb{R}^n$$

¹ Radial unboundedness

$$\Rightarrow \begin{cases} -2p_{11} + 2p_{12} = -1 \\ -2p_{11} - 5p_{12} + p_{22} = 0 \\ -4p_{12} - 8p_{22} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_{11} = \frac{23}{60}, \quad p_{12} = \frac{-7}{60}, \quad p_{22} = \frac{11}{60}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{23}{60} & \frac{-7}{60} \\ \frac{-7}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix}$$

$$\det P = \frac{23 \times 11 - 49}{60^2} = \frac{204}{3600} = 5.6 \times 10^{-2} > 0$$

P

قضیه ۵-۸)

$$\dot{x} = A(x)$$

=

۵-۸) جمع بندی

LTI	:

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x \quad (\quad - \quad)$$

Q

قضیه ۵-۷) معادله لیپانوف

$$\dot{x} = Ax$$

P

$$Q > 0$$

$$A^T P + PA = -Q$$

خلاصه روش:

$$Q > 0$$

P

P

مثال ۵-۶):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

P

Q=I

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

P

$$A^T P + PA = -Q$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

 H_2, H_1

(الف)

 H_2 x_2 H_1 x_1

(ب)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(ج

 H_2, H_1

(5-5)

(9-5)

(V-5)

(1-5)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$
$$t = [1 \quad -0.5 \quad 1] x$$

(الف)

BIBO

$$\frac{y}{u}$$

(ب)

(ج

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

BIBO

$$\frac{y}{w}$$

LTI
:

مسائل

(1-5)

$$H(s) = \frac{2s+3}{s^3-2s^2+s+2}$$

(ب)

$$H(s) = \frac{s+1}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

(الف)

$$H(s) = \frac{2s^2 + s + 2}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

(د

$$H(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

(ج)

۵-۲) موتور DC و هارمونیک درایو

DC

$$\frac{\theta_2}{y}$$

(-)

۵-۳) مبدل حرارتی

$$\frac{\Delta T_{c3}}{\Delta F_H}$$

(-)

 H_2, H_1

(F-5)

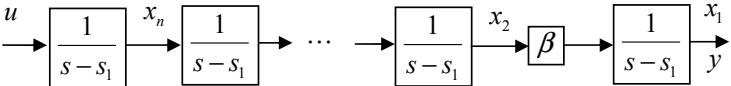
$$H_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)}; H_2(s) = \frac{2(s-1)}{s^2 + s + 1}$$

$$G(s)=\left[\frac{2s+3}{(s+1)^2(s+3)}\quad \frac{s^2+2s+2}{s(s+1)(s+3)^2}\right] \quad (د)$$

(١٢-٥

$$G(s)=\left[\begin{array}{cc} \frac{s^2+1}{s^2} & \frac{2s+1}{s^2} \\ \frac{s+3}{s^2} & \frac{2}{s} \end{array}\right] \quad (ب) \quad G(s)=\left[\begin{array}{cc} \frac{s+2}{s+1} & \frac{2}{s+2} \\ \frac{s}{s+1} & \frac{s+1}{s+s} \end{array}\right] \quad (الف)$$

(١٣-٥



$$G(s)=\frac{1}{s^4} \quad (١٤-٥$$

(١٥-٥

$$M[1,n-1]$$

(١٦-٥

$$-\infty \leq k < +\infty$$

LTI	:

(٩-٥

$$G(s)=\frac{1}{s+1}$$

(الف

(ب

(ج

(د

(١٠-٥

(الف

$$G(s)=\frac{2}{(s+2)(s+3)^2}$$

(ب

$$G(s)=\frac{s^3+2s^2+2s+1}{(s+1)^2(s+2)}$$

(ج

(١١-٥

$$G(s)=\left[\begin{array}{c} \frac{1}{s+2s+1} \\ \frac{1}{s+1} \end{array}\right] \quad (ب) \quad G(s)=\left[\begin{array}{cc} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2s+1} \end{array}\right] \quad (الف)$$

$$G(s)=\left[\begin{array}{c} \frac{2s}{(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{s^2+2s+2}{s(s+1)^2(s+3)} \end{array}\right] \quad (ج$$

مراجع

- [1] Bélanger, Pierre., *Control engineering : a modern approach*, Saunders College Pub., c1995.
- [2] Brogan, William L., *Modern control theory*, 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, c1991.
- [3] Chen, Chi-Tsong., *Linear system theory and design*, Oxford University Press, c1999.
- [4] Dragan, Vasile and Aristide Halanay, *Stabilization of linear systems*, Birkhauser, c1999.
- [5] Kailath, Thomas., *Linear systems*, Prentice-Hall, c1980.
- [6] Rugh, Wilson J., *Linear system theory*, 2nd ed., Prentice Hall, c1996.
- [7] Shinnars, Stanley M., *Modern control system theory and design*, 2nd ed., J. Wiley, c1998.
- [8]

LTI

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (\text{ب}) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & k \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

(١٧-٥)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x$$

(١٨-٥)

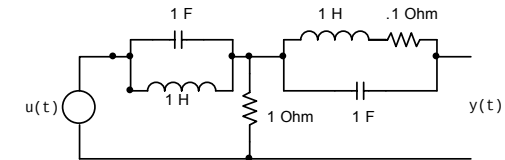
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -10 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] x(t)$$

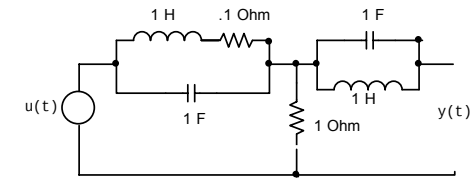
BIBO

(١٩-٥)

(الف)



(ب)



BIBO