

۶-۷) فیدبک انتگرال حالت.....	۲۳۵
۶-۸) جمع بندی.....	۲۳۹
مسائل.....	۲۴۰
مراجع.....	۲۵۳
فصل هفتم: طراحی رُویتگر حالت.....	۲۵۶
۱-۷) مقدمه.....	۲۵۶
۲-۷) یک رُویتگر مقدماتی.....	۲۵۶
۳-۷) رُویتگر مرتبهٔ-کامل.....	۲۵۷
۴-۷) رُویتگر بهینه (فیلتر کالمن).....	۲۶۲
۷-۴-۱) طراحی رُویتگر بهینه.....	۲۶۲
۷-۴-۲) فیلتر کالمن: تئوری موفق در کاربردهای مختلف.....	۲۶۴
۷-۵) رُویتگر لوئبرگر.....	۲۶۸
۷-۶) سیستم حلقه بسته فیدبک حالت - رُویتگر حالت.....	۲۷۰
۷-۷) سیستم حلقه بسته فیدبک حالت - رُویتگر حالت با اغتشاش ثابت.....	۲۷۴
۷-۸) جمع بندی.....	۲۷۷
مسائل.....	۲۷۸
مراجع.....	۲۹۰

فصل ششم: فیدبک حالت.....	۱۷۹
۶-۱) مقدمه.....	۱۷۹
۶-۲) خصوصیات فیدبک حالت.....	۱۷۹
۶-۳) طراحی کنترل کننده فیدبک حالت: جایابی قطب.....	۱۸۶
۶-۳-۱) روش مستقیم برای تعیین ماتریس بهرهٔ فیدبک حالت.....	۱۹۰
۶-۳-۲) روش بس و گیورا.....	۱۹۵
۶-۳-۳) روش تبدیل همانندی.....	۱۹۶
۶-۳-۴) فرمول آکرمن.....	۱۹۷
۶-۳-۵) روش مین - مرداخ.....	۱۹۸
۶-۴) جایابی قطب سیستمهای چند ورودی - چند خروجی.....	۲۰۱
۶-۴-۱) روش طیفی.....	۲۰۲
۶-۴-۲) روش نگاشتی.....	۲۰۴
۶-۵) کنترل فیدبک حالت بهینه.....	۲۰۶
۶-۵-۱) مقدمه:.....	۲۰۶
۶-۵-۲) معادله ماتریسی لیاپانوف.....	۲۰۸
۶-۵-۳) طراحی کنترل کننده LQR.....	۲۱۳
۶-۵-۴) انتخاب مناسب ماتریسهای وزنی.....	۲۲۱
۶-۶) رفع اغتشاش و ورودی مرجع ثابت.....	۲۲۲

ماتریس تعقیب مسائل:

فصل هفتم	فصل ششم	فصل پنجم	فصل چهارم	فصل سوم	فصل دوم	فهرست مسائل
۷-۱۵ ۷-۱۰ ۷-۲۵ ۷-۲۴	۹-۶ ۲۰-۶	۲-۵	۶-۴	۱۵-۳ ۲۶-۳	۳-۲	موتور DC و هامونیک درایو
۷-۱۱ ۷-۱۶	۲۹-۶ ۲۱-۶ ۳۰-۶	-	۷-۴	۱۶-۳ ۲۹-۳	۴-۲	سرعت غلطک
-	۲۲-۶ ۳۱-۶	-	۸-۴	۱۷-۳ ۳۰-۳	۵-۲ ۱۱-۲	غلظت مخزن
۴-۷ ۳-۷ ۲۷-۷	۱۰-۶ ۳۲-۶	۳-۵	۹-۴	۱۸-۳ ۱۲-۲	۶-۲ ۱۲-۲	مبدل حرارتی
۶-۷ ۵-۷ ۲۸-۷	۱۱-۶	-	۱۰-۴	۱۹-۳ ۲۷-۳	۷-۲ ۱۳-۲	راکتور شیمیایی
۱۶-۷ ۲۹-۷	۱۳-۶ ۲۴-۶	-	۱۱-۴	۲۰-۳	۹-۲ ۱۴-۲	جرثقیل سقفی
۱۷-۷ ۳۰-۷	۱۲-۶ ۲۳-۶	-	۱۲-۴	۲۱-۳	۱۰-۲ ۱۵-۲	بندباز
۱۸-۷ ۱۲-۷ ۳۱-۷	۲۵-۶	-	۱۳-۴	۲۲-۳	۱۶-۲	پاندول دوتایی معکوس
۲۰-۷ ۱۹-۷ ۳۳-۷ ۳۲-۷	۲۶-۶ ۱۴-۶	-	۱۴-۴	۲۳-۳	۱۷-۲	سیستم تعلیق مغناطیسی

فصل ششم: فیدبک حالت

۶-۱) مقدمه

- PID
-

۶-۲) خصوصیات فیدبک حالت

؛

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (-)$$

m y r u , n x

-
-
-
-
-

x

x u

x

$u = -Kx$ (-)

x

K

$[K]_{r \times n}$ K

x

PD

K

$\dot{x}$

" "

$\dot{x} = (A - BK)x$ (-)

$y = Cx$

$A_{cl} = A - BK$

K

$A_{cl} = A - BK$

$(\text{Re}(\lambda_i) < 0)$

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

$y(t) = Cx(t) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ (-)

¹ State Gain Matrix

$$\begin{aligned}x^* &= M_x y_d \\ u^* &= M_u y_d\end{aligned}\quad (-)$$

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= x(t) - x^* \\ \Delta u(t) &= u(t) - u^* \\ \Delta y(t) &= y(t) - y_d\end{aligned}\quad (-)$$

$$\begin{aligned}y(t) &= y_d \\ \Delta x & \qquad \qquad \Delta y &= 0\end{aligned}$$

$$\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow y_d \quad (-)$$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= A \Delta x + B \Delta u \\ \Delta y &= C \Delta x\end{aligned}\quad (-)$$

$$\begin{aligned}\Delta u &= -K \Delta x \\ A_{cl} &= A - BK \qquad K\end{aligned}\quad (-)$$

$$\begin{aligned}u(t) &= u^* + \Delta u \\ &= u^* - K \Delta x \\ &= u^* - K(x - x^*) \\ &= (M_u + K M_x) y_d - K x \\ &= u_{ex} - K x\end{aligned}\quad (-)$$

$$M_k, M_u \qquad u_{ex} = (M_u + K M_x) y_d$$

$$(-)$$

$$\begin{aligned}y_d & \\ y_d & \neq 0\end{aligned}\quad (-)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ 0 = A x^* + B u^* \\ y_d = C x^* \end{cases}\quad (-)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{s=0} \\ & \begin{matrix} r \\ (r \geq m) \end{matrix} \quad y \end{aligned}$$

$$r > m$$

$$r = m$$

$$r < m$$

$$y_d = y_d(t)$$

مثال (۱-۶):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$u = -Kx = -(k_1 x_1 + k_2 x_2)$$

پاسخ:

$$A_{cl} = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 1+k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A_{cl}) = \det \begin{bmatrix} s - k_1 & -1 - k_2 \\ k_1 & s + k_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$s^2 + (k_2 - k_1)s + k_1 = 0$$

$$s_1, s_2 = \frac{k_1 - k_2 \pm \sqrt{k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2 - 4k_1}}{2} :$$

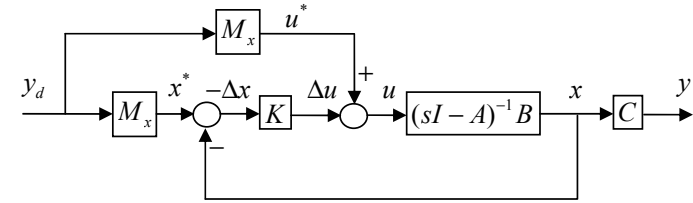
$$k_1 < k_2 \quad k_1 - k_2 < 0$$

$$k_2, k_1$$

قضیه (۱-۶) تغییر ناپذیری صفرهای انتقال

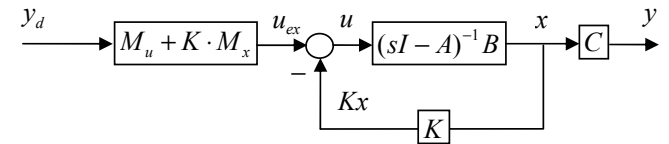
z

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$



شکل (۱-۶) نحوه پیاده سازی کنترل کننده تنظیم برای ورودی مرجع ثابت غیر صفر

$$\begin{matrix} M_x, M_u & K \\ (-) \end{matrix}$$



شکل (۲-۶) نحوه پیاده سازی کنترل کننده تنظیم برای ورودی مرجع ثابت غیر صفر بدون استفاده از متغیرهای افزایشی

$$M_x, M_u$$

$$\boxed{M_u + KM_x}$$

$$\Delta \dot{x} = (A - BK)\Delta x$$

$$\begin{cases} x(t) = x^* + \Delta x(t) \\ u(t) = u^* + \Delta u(t) \\ y(t) = y_d + C\Delta x(t) \end{cases} \quad (-)$$

$$A_{cl} = A - BK \quad K$$

¹ Tracking

² Update

¹ Feed Forward

² Offline

$$x(t) = x^*(t), u(t) = u^*(t) \quad u_{ex}(t) = u^*(t) + Kx^*(t)$$

$$u_{ex} \quad x(T) = x_f, x(t) = x^*(t)$$

$$x_f$$

x

u

■

$$(A^T \quad s_i \quad w_i^T \quad w_i^T B = 0$$

$$w_i^T (A - BK) = s_i w_i^T - w_i^T BK = s_i w_i^T \quad (-)$$

$$w_i^T \quad s_i \quad B$$

۳-۶) طراحی کنترل کننده فیدبک حالت: جایابی قطب^۱

$$(-)$$

S

$$k_2, k_1$$

$$k_2, k_1$$

$$y_d(t)$$

S

¹ Pole Placement

$$z \quad u = -Kx + u_{ex}$$

$$(\quad u_{ex} \quad y \quad)$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

اثبات:

$$\begin{bmatrix} -zI + A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (-)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BKx + Bu_{ex} \\ y = Cx - DKx + Du_{ex} \end{cases}$$

$$(\xi)$$

$$\forall v' = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \begin{bmatrix} -\xi I + A - BK & B \\ C - DK & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (-)$$

$$\begin{bmatrix} v'_1 = v_1 \\ v'_2 = v_2 + Kv_1 \end{bmatrix} \quad \xi = z$$

$$\begin{bmatrix} -\xi I + A - BK & B \\ C - DK & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 + kv_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\xi I + A)v_1 + Bv_2 - BKv_1 + B\cancel{K}v_1 \\ Cv_1 + D\cancel{K}v_1 + Dv_2 + D\cancel{K}v_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-\xi I + A)v_1 + Bv_2 \\ Cv_1 + Dv_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi I + A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \xi = z$$

■

قضیه ۶-۲) تغییر ناپذیری کنترل پذیری

$$u_{ex}$$

اثبات:

$$u^*(t) \quad , T > 0 \quad x_f$$

$$x_f(t) \quad x(0) = 0$$

$$x^*(T) = x_f \quad x^*(t)$$

$$\begin{aligned} b &= Tb_c \\ Ab &= TA_c b_c \\ A^2 b &= TA_c^2 b_c \\ &\vdots \\ A^{n-1} b &= TA_c^{n-1} b_c \end{aligned} \quad (-)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1} b \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} b_c & A_c b_c & \cdots & A_c^{n-1} b_c \end{bmatrix} \\ \mathbb{C} &= T \mathbb{C}_c \\ \mathbb{C}_c &\quad \mathbb{C} \end{aligned} \quad (-)$$

$$\begin{aligned} T &= \mathbb{C} \mathbb{C}_c^{-1} \\ T &\quad \mathbb{C}_c^{-1} \\ &\quad , n \times n \end{aligned} \quad (-)$$

$$\begin{aligned} y &= x = Tz \\ z &= T^{-1}x \\ \Rightarrow \dot{z} &= T^{-1}ATz + T^{-1}bu \end{aligned} \quad (-)$$

قضیه ۳-۶ جایابی قطب SISO

$$\begin{aligned} p(s) &\quad (A, b) \\ p(s) &\quad (A - bk^T) \\ \text{SISO} &\quad k^T \end{aligned}$$

اثبات:

$$\begin{aligned} & \quad (-) \\ & \quad (-) \end{aligned}$$

لم ۱-۶

$$\begin{aligned} & \quad \text{SISO} \quad (A, b) \\ & \quad T_{n \times n} \\ & \quad \{ (A_c, b_c), A_c = T^{-1}AT, b_c = T^{-1}b \} \end{aligned}$$

نکته:

اثبات:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = I.x \end{cases} \quad (-)$$

$$h(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = A_c z + b_c u \\ y = Tz \end{cases} \quad (-)$$

$$\forall t \quad e^{At} b = T e^{A_c t} b_c \quad (-)$$

t = 0

۶-۳-۱) روش مستقیم برای تعیین ماتریس بهره فیدبک حالت

$$k^T T = k_c^T$$

:

$$k^T T \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} = k_c^T \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$k_{c1} + k_{c2}s + k_{c3}s^2 + \dots + k_{cn}s^{n-1} = p_{cl}(s) - p_o(s) \quad (-)$$

$$p_o(s) = \det(sI - A_c) = \det(sI - A) \quad (-)$$

$$T = \mathbb{C}\mathbb{C}_c^{-1} \quad T, \quad A_c$$

$$h(s) \quad T \quad y = T \cdot z \quad y = I \cdot x$$

$$2s^3 + 3s^2 + s + 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad C$$

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$h(s)$$

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} = \det(sI - A)h(s) = Adj(sI - A)b \quad (-)$$

$$\mathbb{C}\mathbb{C}_c^{-1}$$

$$p_{cl}(s) = \det(sI - A) + k^T Adj(sI - A)b \quad (-)$$

:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} & \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$\vdots \quad k_{ci} \quad n \quad k_c^T$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 - k_{c1} & -a_1 - k_{c2} & \dots & -a_{n-1} - k_{cn} & \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$p_c(s) = s^n + (a_{n-1} + k_{cn})s^{n-1} + \dots + (a_1 + k_{c2})s + (a_0 + k_{c1}) \quad (-)$$

$$a_i \quad k_i \quad p_d(s) = p_c(s)$$

$$- \quad , p_d(s)$$

$$\forall T_{n \times n} \quad A = T A_c T^{-1}, b = T b_c \quad (-)$$

$$T(A_c - b_c k_c^T) T^{-1} = A - b k^T \quad (-)$$

$$\boxed{k^T = k_c^T T^{-1}} \quad (-)$$

$$A - b k^T, A_c - b_c k_c^T$$

$$k_c^T$$

$$k^T$$

$$p_d(s) = p_c(s)$$

■

$$k^T$$

$$\text{MIMO, SISO}$$

$$k^T$$

$$Adj(sI - A) \cdot b = \begin{bmatrix} \times & \times & 4.438 \\ \times & \times & 4.438s \\ \times & \times & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88.76 \\ 88.76s \\ 20s^2 \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$p_d(s) = (s + 24)(s + 3 \pm 3j) = s^3 + 30s^2 + 162s + 432$$

$$p_d(s) \equiv (s^3 + 24s^2 + 53.37s) + [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \begin{bmatrix} 88.76 \\ 88.76s \\ 20s^2 \end{bmatrix} \\ \equiv s^3 + (24 + 20k_3)s^2 + (52.058 + 88.76k_2)s + 88.76k_1$$

$$\begin{cases} 24 + 20k_3 = 30 \rightarrow k_3 = 0.3 \\ 53.37 + 88.76k_2 = 162 \rightarrow k_2 = 1.23 \\ 88.76k_1 = 432 \rightarrow k_1 = 4.86 \end{cases}$$

$$k = [4.86 \quad 1.23 \quad 0.3]$$

$$u^*, x^*$$

$$0 = Ax^* + Bu^* \quad \theta^* = \theta_d \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.438 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_d \\ \omega^* \\ i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} v^* \Rightarrow \omega^* = i^* = v^* = 0$$

$$\Rightarrow v = v^* - k\Delta x = 0 - [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \left(\begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow v = -4.86(\theta - \theta_d) - 1.24\omega - 0.3i$$

$$(-)$$

$$\frac{\theta}{\theta_d} = \frac{k}{(s + 2s)(s + 3 \pm 3j)} \\ = \frac{k}{(s + 24)(s^2 + 6s + 18)}$$

$$p_{cl}(s) = p_o(s) + k^T Adj(sI - A)b \quad (-)$$

جمع بندی روش:

$$sI - A \quad Adj$$

$$k_i$$

$$(-)$$

$$u^*, x^*$$

$$u = u^* - k^T(x - x^*)$$

مثال (۶-۲) موتور DC و ضد هوائی

$$-3 \pm 3j, -24$$

$$\theta = \theta_d$$

$$\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)}$$

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.438 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$-21.576, -2.424, 0$$

$$p_o(s)$$

$$\det(sI - A) = s(s + 2.424)(s + 21.576) = s^3 + 24s^2 + 53.37s$$

$$Adj$$

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 9.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -19.6 & s \end{vmatrix} = s^2(s^2 - 19.6)$$

$$.0, 0, \pm 4.43$$

$$\text{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} \times & (s^2 - 19.6) & \times & -9.8 \\ \times & s(s^2 - 19.6) & \times & -9.8s \\ \times & 0 & \times & s^2 \\ \times & 0 & \times & s^3 \end{bmatrix}$$

$$k^T \text{Adj}(sI - A)b = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \begin{bmatrix} s^2 - 9.8 \\ s(s^2 - 9.8) \\ -s^2 \\ -s^3 \end{bmatrix}$$

$$= k_1(s^2 - 9.8) + k_2s(s^2 - 9.8) - k_3s^2 - k_4s^3$$

$$p_{cl}(s) = (s + 4.43)^2(s + 2 \pm 2j)$$

$$= s^4 + 12.86s^3 + 63.04s^2 + 149.3s + 157.8$$

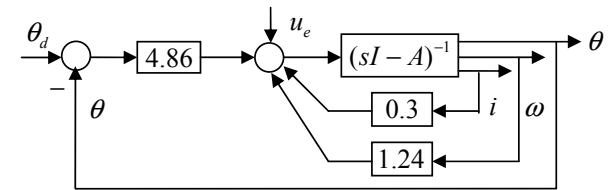
$$k = -16, \quad k_2 = -15.2, \quad k_3 = -98.6, \quad k_4 = -28.1$$

$$x^* = u^* = 0$$

$$u = 16x + 15.2v + 98.6\theta + 28.1\omega$$

$$\theta(0) = 15^\circ = 0.26 \text{ rad}$$

$$x(0) = v(0) = \omega(0)$$



شکل (۳-۶) بلوک دیاگرام پیاده سازی کنترل مثال (۲-۶)

DC

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{y(s)}{y_d(s)} = 1 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_d(t)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\theta(s)}{\theta_d(s)} = \frac{k}{24 \cdot 18} = 1 \Rightarrow k = 432$$

$$\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)} = \frac{432}{(s + 24)(s^2 + 6s + 18)}$$

مثال (۳-۶) پاندول معکوس

(-)

(-)

$$-4.43, -4.43, -2 \pm 2j$$

پاسخ:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 19.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$(sI - A)^{-1} k^T$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{a(s)} [s^{n-1}I + (A + a_{n-1}I)s^{n-2} + (A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I)s^{n-3} + \dots]$$

$$\begin{aligned}\alpha_{n-1} - a_{n-1} &= k^T b \\ \alpha_{n-2} - a_{n-2} &= k^T Ab + a_{n-1}k^T b \\ \alpha_{n-3} - a_{n-3} &= k^T A^2b + a_{n-1}k^T Ab + a_{n-2}k^T b \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\alpha - a = k^T \mathbb{C} \Psi \quad (-)$$

$$\begin{aligned}\alpha &= [\alpha_{n-1} \quad \alpha_{n-2} \quad \dots \quad \alpha_0] \\ a &= [a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \dots \quad a_0] \\ \mathbb{C} &= [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b]\end{aligned} \quad \Psi = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} \dots & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} \dots & a_2 \\ \vdots & 0 & 1 \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow k^T = (\alpha - a) \Psi^{-1} \mathbb{C}^{-1} \quad (-)$$

۳-۳-۶ روش تبدیل همانندی

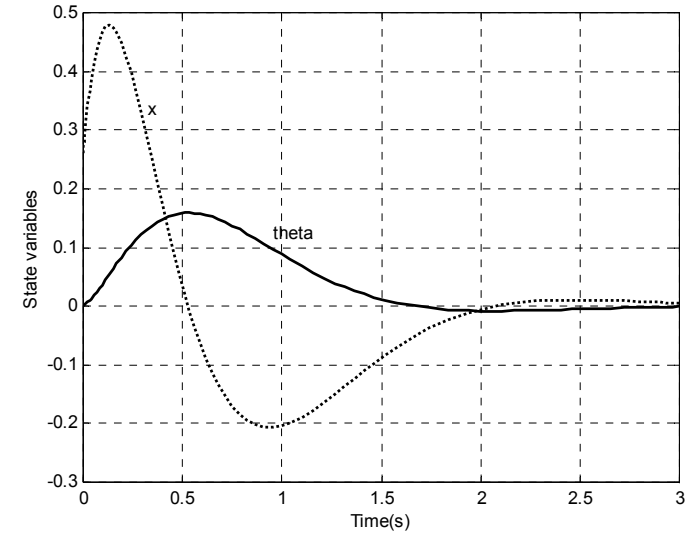
$$A_c = T^{-1}AT, b_c = T^{-1}b \quad (-)$$

$$T = \mathbb{C} \mathbb{C}_c^{-1}$$

$$k^T = (\alpha - a) \cdot T^{-1} \quad (-)$$

$$k^T = (\alpha - a)(\mathbb{C} \Psi)^{-1} :$$

$$\Psi = \mathbb{C}_c^{-1} \quad T = \mathbb{C} \Psi$$



شکل (۴-۶) پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته پاندول معکوس به شرایط اولیه غیر صفر

۴-۳-۶ روش بیس و گیورا^۱

$$\begin{aligned}p_d(s) &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0 \\ p_o(s) &= a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 \\ p_{cl}(s) &= a_{cl}(s) = \det(sI - A + bk^T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \det \{ (sI - A)[I + (sI - A)^{-1}bk^T] \} \\ &= \det(sI - A) \cdot \det[I + (sI - A)^{-1}bk^T]\end{aligned}$$

$$a_{cl}(s) = a(s) \cdot (1 + k^T (sI - A)^{-1}b)$$

$$a_{cl}(s) - a(s) = a(s) \cdot k^T (sI - A)^{-1}b \quad (-)$$

¹ Bass & Gura

$$\bar{A} = A - bk^T$$

$$\bar{A}^2 = (A - bk^T)^2 = A^2 - Abk^T - bk^T \bar{A}$$

$$\bar{A}^3 = (A - bk^T)^3 = A^3 - A^2bk^T - Abk^T \bar{A} - bk^T \bar{A}^2$$

$$\bar{A}^3 + \alpha_2 \bar{A}^2 + \alpha_1 \bar{A} + \alpha \cdot I =$$

$$= \alpha_0 I + \alpha_1 (A - bk^T) + \alpha_2 (A^2 - Abk^T - bk^T \bar{A}) + A^3 - A^2bk^T - Abk^T \bar{A} - bk^T \bar{A}^2$$

$$= \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + A^3 - \alpha_1 bk^T - \alpha_2 Abk^T - A^2bk^T - Abk^T \bar{A} - bk^T \bar{A}^2$$

$$) \quad \alpha(\bar{A}) = 0 \quad \bar{A} \quad \text{C.H.}$$

∴ .(

$$\alpha(A) = b(\alpha_1 k^T + \alpha_2 k^T \bar{A} + k^T \bar{A}^2) + Ab(\alpha_2 k^T + k^T \bar{A}) + A^2bk^T$$

$$= \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 k^T + \alpha_2 k^T \bar{A} + k^T \bar{A}^2 \\ \alpha_2 k^T + k^T \bar{A} \\ k^T \end{bmatrix}$$

$$= \mathbb{C} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 k^T + \alpha_2 k^T \bar{A} + k^T \bar{A}^2 \\ \alpha_2 k^T + k^T \bar{A} \\ k^T \end{bmatrix}$$

$$k^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbb{C}^{-1} \alpha(A) \quad (-)$$

$$\boxed{k^T = q_n^T \alpha(A)} \quad (-)$$

٦-٣-٥) روش مین-مرداخ^١

A

¹ Mayne-Murdoch

Ψ

A

$$\Psi^{-1} = \mathbb{C}_c = \begin{bmatrix} b_c & A_c b_c \cdots & A_c^{n-1} b_c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} & \vdots \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & a_{n-1}^2 - a_{n-2} & \\ 1 & -a_{n-1} & a_{n-1}^2 - a_{n-2} & -a_{n-1}^3 + 2a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3} & \cdots \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} b & Ab \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$k^T = (\alpha - a) \Psi^{-1} \mathbb{C}^{-1} \quad (-)$$

Ψ^{-1}

Ψ

Ψ^{-1}

٦-٣-٤) فرمول آكرمن^١

$$k^T = q_n^T \alpha(A) \quad (-)$$

q_n^T

$$p_d(s) = \alpha(s)$$

$\mathbb{C}^{-1}$

$$q_n^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbb{C}_c^{-1} \quad (-)$$

$$a(s) = \det(sI - A)$$

n = 3

n

¹ Ackermann Formula

$$\pm 4.539$$

$$-1.8 \pm j2.4 :$$

پاسخ:

$$\det(sI - A) = (s + 4.539)(s - 4.539)$$

$$= s^2 + 0 \cdot s + (-20.6)$$

$$Adj(sI - A)b = \begin{bmatrix} \times & 1 \\ \times & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

$$p_d(s) = (s + 1.8 \pm j2.4) = s^2 + 3.6s + 9$$

$$\equiv s^3 + 0 \cdot s + (-20.6) + [k_1 \quad k_2] \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

$$\equiv s^2 + k_2s + (-20.6 + k_1) \rightarrow \begin{cases} k_2 = 3.6 \\ -20.6 + k_1 = 9 \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow k_1 = 29.6, \quad k_2 = 3.6}$$

$$k^T = k_c^T = \alpha - a$$

$$\alpha(s) = p_d(s) = s^2 + 3.6s + 9$$

$$a(s) = s^2 - 20.6$$

$$k_c^T = [\alpha_0 - a_0 \quad \alpha_1 - a_1] = [29.6 \quad 3.6]$$

$$\varphi_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \varphi_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha(A) = A^2 + 3.6A + 9I = \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \\ 74.16 & 26.6 \end{bmatrix}$$

$$k^T = q_n^T \alpha(A) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \\ 74.16 & 26.6 \end{bmatrix} = [29.6 \quad 3.6]$$

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}, \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

$$: \quad (-)$$

$$a_{cl}(s) - a(s) = a(s)k^T(sI - A)^{-1}b$$

$$\frac{a_{cl}(s)}{a(s)} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i b_i}{s - \lambda_i} \quad (-)$$

$$\frac{a_{cl}(s)}{a(s)} = \frac{k_i b_i}{(s - \lambda_i)^{-1}}$$

$$k_i b_i = \frac{\prod_{j=1}^j (\lambda_i - \mu_j)}{\prod_{j \neq i}^j (\lambda_i - \lambda_j)} \quad (-)$$

$$\mu_i \quad \lambda_i$$

$$T \quad A \quad \text{نکته:}$$

$$k^T = k_\Lambda^T T^{-1}$$

مثال (۶-۴)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$A-BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -k_{11} & 1-k_{12} \\ -1-k_{21} & 2-k_{22} \end{bmatrix}$$

$$s^2 + (k_{11} - 2 + k_{22})s - (1 + k_{21})(-1 + k_{12}) + k_{11}(2 - k_{22})$$

$$\begin{cases} k_{11} - 2 + k_{22} = 2 \\ -(1 + k_{21})(-1 + k_{12}) + k_{11}(2 - k_{22}) = 1 \end{cases}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

K

K

f

$$m_{n \times n}, f_{m \times 1}, K = f \cdot m^T$$

۶-۴-۱) روش طیفی

$$m_{n \times 1}, f_{m \times 1}, K = f \cdot m^T$$

$$m^T \quad \{\mu_i\}$$

$$m^T = \sum_{i=1}^q \delta_i v_i^T \quad (\quad -)$$

v_i^T

q

w

A

A

λ_i

$$v = w^{-1}$$

$$(\quad -)$$

δ_i

مثال (۶-۵)

$$p_d(s)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$p_d(s) = a_c(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

*, K

۶-۴) جابجایی قطب سیستمهای چند ورودی - چند خروجی

SISO

K

MIMO

$$p_1 = \langle v_1^T Bf \rangle = \frac{-4-3j}{10} \rightarrow \delta_1 = \frac{(\lambda_1 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2)}{p_1(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{-7+24j}{5}$$

$$p_2 = \langle v_2^T Bf \rangle = \frac{-4+3j}{10} \rightarrow \delta_2 = \frac{(\lambda_2 - \mu_1)(\lambda_2 - \mu_2)}{p_1(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{-7-24j}{5}$$

$$m^T = \delta_1 v_1^T + \delta_2 v_2^T = \dots = (-1.4 \quad 0.4 \quad 3.6)$$

$$K = fm^T = \begin{bmatrix} -1.4 & 0.4 & 3.6 \\ -1.4 & 0.4 & 3.6 \end{bmatrix}$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0.4 & -2.4 & -1.6 \\ -0.6 & -0.4 & -1.6 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = -2$$

نکته ۱:

نکته ۲:

۶-۴-۲) روش نگاشتی

$$p_d(s) = s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_n$$

$$p_0(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$

$$\delta(s)$$

$$\delta(s) = p_d(s) - p_0(s)$$

$$= (d_1 - a_1)s^{n-1} + (d_2 - a_2)s^{n-2} + \dots + (d_n - a_n)$$

$$(A, Bf)$$

f

$$\delta_i = \frac{\prod_{j=1}^q (\lambda_i - \mu_j)}{p_i \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^q (\lambda_i - \lambda_j)} \quad (-)$$

$$p_i = \langle v_i^T Bf \rangle \quad (-)$$

$$(A, Bf)$$

مثال (۶-۶)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$\lambda_3 = -2, \lambda_{1,2} = \pm j$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2j & 1-2j & 2 \\ j & -j & -2 \\ 2j & -2j & 1 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{bmatrix} = w^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 5 & 2-j & -6-2j \\ 5 & 2+j & -6+2j \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow 2$$

$$3 \times (-2)$$

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad \mu_1 = \mu_2 = -2, \mu_3 = \lambda_3 = -2$$

$$(A, Bf)$$

$$Bf = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} Bf & ABf & A^2 Bf \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } \mathbb{C} = 3$$

$$m = \dots = \begin{bmatrix} -1.4 \\ 0.4 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

$$k = fm^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.4 & 0.4 & 3.6 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -1.4 & 0.4 & 3.6 \\ -1.4 & 0.4 & 3.6 \end{bmatrix}$$

۵-۶) کنترل فیدبک حالت بهینه

Linear Quadratic Regulator (LQR)

۱-۵-۶) مقدمه:

LQR

(LQ)

$$J = \int_0^{\infty} \left[x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right] dt \quad (-)$$

R, Q

¹ Optimal linear regulator for a quadratic performance index

$$m = \left[\mathbb{C}^T \right]^{-1} X^{-1} \delta \quad (-)$$

(A, Bf) $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} Bf & ABf & \dots & A^{n-1}Bf \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & & 1 & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & & a_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & \dots & d_n - a_n \end{bmatrix}^T \quad (-)$$

f $X, \mathbb{C}$

k

مثال (۷-۶)

$$p_o(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad \left[\mathbb{C}^T \right]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & -0.4 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$p_d(s) = (s+2)^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8 \quad 3 \times (-2)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 6 \end{bmatrix}^T$$

$$m = \left[\mathbb{C}^T \right]^{-1} X^{-1} \delta$$

:

$$R, Q$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$J$$

$$(-)$$

٦-٥-٢) معادله ماتریسی لیاپانوف

$$u = -kx \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{x} = (A - Bk)x \qquad (-)$$

$$J$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \left[x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} \left[x^T Q x + (-kx)^T R (-kx) \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} \left[x^T (Q + k^T R k) x \right] dt \end{aligned}$$

$$\dot{x} = A_{cl} x \qquad A_{cl}$$

	:

$$\begin{aligned} x^T(t) Q x(t) &= Q_{11} x_1^2 + 2Q_{12} x_1 x_2 + \cdots + 2Q_{1n} x_1 x_n \\ &\quad + Q_{22} x_2^2 + \cdots + 2Q_{2n} x_2 x_n \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + Q_{nn} x_n^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \neq 0 \qquad Q \geq 0 \qquad Q \\ (Q > 0) \qquad Q \qquad x^T Q x \geq 0 : \\ \qquad \qquad \qquad x^T Q x > 0 \end{aligned}$$

$$(\Delta x)$$

$$J_1 = \int_0^{\infty} (x^T Q x) dt \qquad (-)$$

$$J_1 \qquad u \qquad (-)$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} (u^T R u) dt \qquad (-)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \qquad u \\ J &= \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \qquad (-) \end{aligned}$$

$$P^T = \int_0^{\infty} (e^{At})^T S^T (e^{A^T t})^T dt = \int_0^{\infty} e^{A^T t} S e^{At} dt = P \quad (-)$$

$$x_0^T P x_0 = J = \int_0^{\infty} x^T S x dt \geq 0 \quad (-)$$

$$A^T P + PA = \int_0^{\infty} \left[A^T e^{A^T t} S e^{At} + e^{A^T t} S e^{At} A \right] dt \quad (-)$$

$$\frac{d}{dt} [e^{At}] = A e^{At} = e^{At} A$$

$$\frac{d}{dt} [e^{A^T t} S e^{At}] = A^T e^{A^T t} S e^{At} + e^{A^T t} S e^{At} A$$

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} [e^{A^T t} S e^{At}] dt \\ &= e^{A^T t} S e^{At} \Big|_0^{\infty} = 0 - 1 \cdot S \cdot 1 \\ &= -S \end{aligned}$$

$$A^T P + PA = -S$$

$$S^{1/2}$$

$$S = (S^{1/2})^T S^{1/2} \quad (-)$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T S x dt \quad (-)$$

$$S = Q + k^T R k, A_{cl} = A - Bk$$

قضيه ٦-٤) قضيه معادله ماتريسي ليابانوف

$$S \quad (\forall \lambda_i \rightarrow \text{Re}(\lambda_i) < 0) \quad A$$

$$x(0) = x_0$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T(t) S x(t) dt = x_0^T P x_0 \quad (-)$$

$$A^T P + PA = -S \quad (-)$$

$$\dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0 \quad \text{اثبات:}$$

$$x(t) = e^{At} x_0 \Rightarrow J = \int_0^{\infty} x^T S x dt$$

$$J = \int_0^{\infty} x_0^T e^{A^T t} S e^{At} x_0 dt$$

$$\begin{aligned} J &= x_0^T \int_0^{\infty} [e^{A^T t} S e^{At} dt] x_0 \\ &= x_0^T P x_0 \end{aligned}$$

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} S e^{At} dt \quad (-)$$

$$e^{At} \quad A$$

مثال (۶-۸)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$u = -kx_1$$

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

$$Q = I \quad x(0) = x_0$$

پاسخ:

$$\dot{x} = (A - Bk)x = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \end{bmatrix} \right) x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -1 \end{bmatrix} x$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T(t) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} r \begin{bmatrix} k & 0 \end{bmatrix} \right\} x(t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} x^T(t) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 + rk^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{S}} x(t) dt = x_0^T P x_0$$

$$A^T P + P A = -S \quad P$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -k \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 + rk^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} kp_{12} - kp_{12} = -1 - rk^2 \\ -kp_{22} + p_{11} - p_{12} = 0 \\ p_{12} - p_{22} + p_{12} - p_{22} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_{11} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2} + (r+1)\frac{k}{2} + \frac{rk^2}{2} \\ p_{12} = \frac{1}{2k} + \frac{rk}{2} \\ p_{22} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2} + \frac{rk}{2} \end{cases}$$

$$J = x_0^T P x_0$$

$$J = p_{11}x_1^2(0) + 2p_{12}x_1(0)x_2(0) + p_{22}x_2^2(0)$$

$$S^{1/2} \quad S \quad S^{1/2}$$

householder reflection

Matlab

قضیه ۶-۵) پایداری داخلی

$$P \geq 0$$

$$(A, S^{1/2}) \quad (A^T P + P A = -S \quad S \geq 0)$$

$$\dot{x} = Ax \quad (y = S^{1/2} x)$$

اثبات:

$$V = x^T P x \rightarrow$$

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$= x^T A^T P x + x^T P A x$$

$$= x^T (A^T P x + P A) x = -x^T S x$$

S

$$\dot{V} = -x^T (S^{1/2})^T S^{1/2} x$$

$$= -(S^{1/2} x)^T (S^{1/2} x) = -\|S^{1/2} x\|^2 \leq 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = S^{1/2} x \end{cases}$$

■

$$(A, S^{1/2}) \quad S^{1/2} \quad S$$

y

$$x = (S^{1/2})^{-1} y$$

نکته:

$$\boxed{Q \geq 0, R > 0}$$

R, Q

$$\dot{x} = (A - Bk)x$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T(t)(Qx + k^T R k)x(t) dt \quad (-)$$

قضیه ۶-۶) کنترل کننده LQR

$$J, k$$

$$x(0)$$

$$k = R^{-1} B^T P$$

$$(-)$$

$$P$$

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

$$(-)$$

$$k$$

اثبات:

$$J(k) = x^T(0)P x(0)$$

$$P$$

$$(A - Bk)^T P + P(A - Bk) = -(Q + k^T P k)$$

$$k^*$$

$$P^* \quad k^*$$

$$P$$

$$J$$

$$(A - Bk^*)^T P^* + P^*(A - Bk^*) = -Q - k^{*T} R k^*$$

$$J$$

$$k$$

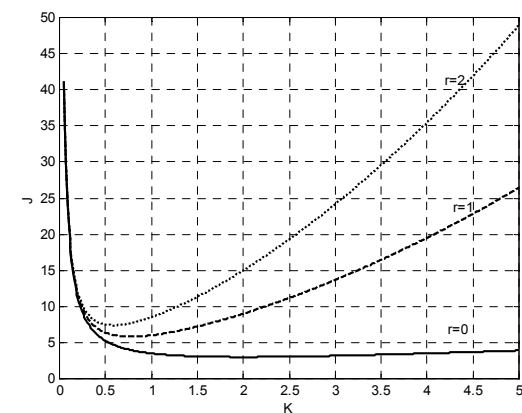
$$(-)$$

$$r$$

$$P$$

$$k$$

$$\forall k > 0 \begin{cases} p_{11} > 0 \\ p_{11}p_{22} - p_{12}^2 = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2} + \frac{(3r+1)}{4}k + \frac{r}{2}k^2 + \frac{r^2k^3}{4} > 0 \end{cases}$$



شکل (۴-۶) منحنی تغییرات شاخص عملکرد J برحسب بهره کنترل k

۶-۵-۳) طراحی کنترل کننده LQR

LQR

$$x(0) = x_0$$

LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$(-)$$

$$u = -kx$$

$$J = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (-)$$

$$O(\epsilon) \quad O(\epsilon^2) \quad \in$$

$$\in x^T(0)\delta P_1 x(0)$$

$$\delta P_1 = 0$$

$$\delta P_1 = 0$$

$$\delta k^T (B^T P^* - R k^*) + (P^* B - k^{*T} R) \delta k = 0$$

$$\delta k^T (B^T P^* - R k^*) + [\delta k^T (B^T P^* - R k^*)]^T = 0$$

$$\forall \delta k \quad P, R$$

$$B^T P^* - P k^* = 0 \rightarrow \boxed{k^* = R^{-1} B^T p^*} \quad (-)$$

$$P = P^T$$

$$A^T P^* - P^* B R^{-1} B^T P^* + P^* A - P^* B R^{-1} B^T P^* = -Q - P^* B R^{-1} R R^{-1} B^T P^*$$

$$\boxed{A^T P^* + P^* A - P^* B R^{-1} B^T P^* + Q = 0} \quad (-)$$

■

$$P \quad \text{LQR}$$

$$A - Bk \quad k$$

$$J \quad (P > 0)$$

$$(A, Q^{1/2})$$

$$k \quad P$$

$$(P > 0)$$

$$[10] \quad \text{LQR}$$

جمع بندی روش:

$$k = k^* + \epsilon \delta k$$

$$\delta k \quad \in \quad P^*$$

$$\in$$

$$P = P^* + \epsilon \delta P_1 + \epsilon^2 \delta P_2 + \dots$$

$$(A - Bk^* - \epsilon B \delta k)^T (P^* + \epsilon \delta P_1 + \epsilon^2 \delta P_2)$$

$$+ (P^* + \epsilon \delta P_1 + \epsilon^2 \delta P_2)(A - Bk^* - \epsilon B \delta k) =$$

$$-Q - (k^* + \epsilon \delta k)^T R (k^* + \epsilon \delta k)$$

$$\in$$

$$(A - Bk^*)^T P^* (A - Bk^*) +$$

$$\in [-\delta k^T B^T P^* + (A - Bk^*)^T \delta P_1 + \delta P_1 (A - Bk^*)^T - p^* B \delta k] + O(\epsilon^2)$$

$$= -Q - k^{*T} R k^* + \epsilon [-\delta k^T R k^* - k^{*T} R \delta k] + O(\epsilon^2)$$

$$\in$$

$$O(0) \rightarrow \text{Lyapunov eq.}$$

$$O(\epsilon) \rightarrow \delta k^T (B^T P^* - R k^*) + (P^* B - k^{*T} R) \delta k \quad (-)$$

$$+ (A - Bk^*)^T \delta P_1 + \delta P_1 (A - Bk^*) = 0$$

$$J(k^* + \epsilon \delta k) = x^T(0) P x(0)$$

$$= x^T(0) P^* x(0) + \epsilon x^T(0) \delta P_1 x(0) + \epsilon^2 x^T(0) \delta P_2 x(0) + \dots$$

$$k^* \quad \delta P_1$$

$$x^T(0) P^* x(0)$$

$$\in x^T(0) \delta P_1 x(0) + \epsilon^2 x^T(0) \delta P_2 x(0) + \dots \geq 0 \quad \forall x(0)$$

$$x(0) \quad \delta P_1 \neq 0$$

$$x^T(0) \delta P_1 x(0) \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rho^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{12} \\ 0 & p_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} p_{12}^2 + 1 = 0 \rightarrow p_{12} = \pm \rho^{1/2} \\ 2p_{12} - \frac{1}{\rho} p_{22}^2 = 0 \rightarrow p_{22} = \pm [2\rho p_{12}]^{1/2} \Rightarrow p_{22} \in \mathbb{R} \text{ if } p_{12} \geq 0 \\ p_{11} - \frac{1}{\rho} p_{12} p_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_{12} = \sqrt{\rho} \rightarrow p_{22} = \sqrt{2} \rho^{3/4} \rightarrow p_{11} = \sqrt{2} \rho^{1/4}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \rho^{1/4} & \rho^{1/2} \\ \rho^{1/2} & \sqrt{2} \rho^{3/4} \end{bmatrix}$$

$$P \geq 0 \quad -$$

$$p_{11} > 0, \det P = \rho > 0 \Rightarrow P > 0$$

$$k = R^{-1} B^T P$$

$$= \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \rho^{1/4} & \rho^{1/2} \\ \rho^{1/2} & \sqrt{2} \rho^{3/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^{-1/2} & \sqrt{2} \rho^{-1/4} \end{bmatrix}$$

$$A - Bk = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\rho^{-1/2} & -\sqrt{2} \rho^{-1/4} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow s^2 + \sqrt{2} \rho^{-1/4} s + \rho^{-1/2} = 0$$

$$\rho > 0$$

$$\Delta \mathbf{x} \quad \text{LQR}$$

$$\Delta \mathbf{x}$$

$$\Delta u$$

$$, \quad p \geq 0$$

$$(\quad - \quad)$$

$$k$$

$$(\quad - \quad)$$

$$u_{ex}, k$$

$$\text{LQR}$$

$$\text{LQR, ARE} \quad \text{Matlab}$$

مثال (٩-٦)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\text{LQR}$$

$$R = \rho > 0, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$(A, Q^{1/2})$$

$$Q^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } \mathbf{O} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\boxed{A^T P^* + P^* A - P^* B R^{-1} B^T P^* + Q = 0}$$

(-)

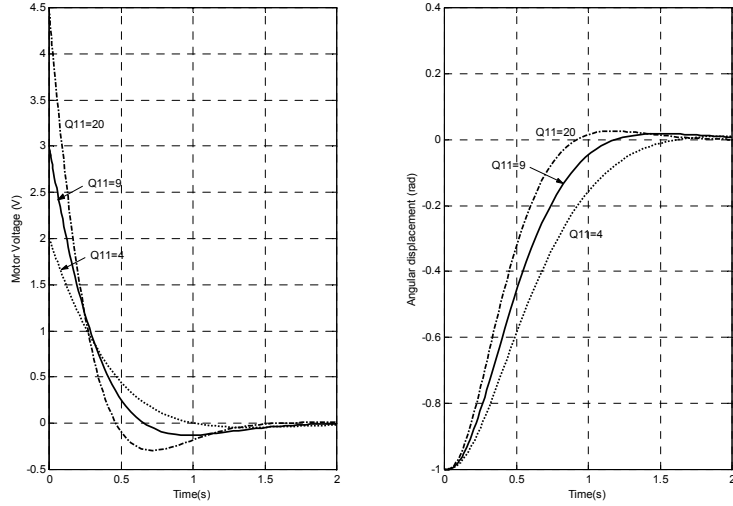
$$Q_{11} = 4, 9, 20$$

$$R \quad Q_{11}$$

$$Q_{11}$$

$$Q_{11} = 9$$

$$k^T = [3 \quad 0.8796 \quad 0.1529]$$



شکل (۵-۶) پاسخ سیستم حلقه بسته سیستم موتور DC با کنترلر LQR

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \omega_0 = \rho^{-1/4} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{2}/2$$

$$\rho \quad \rho \quad \omega_0$$

مثال (۱۰-۶) موتور DC و ضد هوائی

DC

$$T_L = 0$$

LQR

$$\omega = i = v = 0$$

$$\theta = \theta_d$$

$$J = \int_0^{\infty} [Q_{11}(\theta - \theta_d)^2 + Q_{22}\omega^2 + v^2] dt$$

$$Q_{11} \quad Q_{22} = 0 \quad ($$

$$3 \text{ Volts} \quad u \quad \theta_d = 1 \text{ rad} \quad x = 0$$

$$Q_{22} \neq 0 \quad ($$

پاسخ:

$$A, B$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

$$Q_{11} \quad Q_{22} = 0 \quad \text{Matlab} \quad \text{LQR}$$

$$v = v^* - k^T (x - x^*) = k_1(\theta_d - \theta) - k_2\omega - k_3i$$

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ \left[\left(\frac{x_1}{x_{1\max}} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_{2\max}} \right)^2 + \dots \right] + \left[\left(\frac{u_1}{u_{1\max}} \right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_{2\max}} \right)^2 + \dots \right] \right\} dt \quad (-)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{x_{1\max}} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{x_{2\max}} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{u_{1\max}} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{u_{2\max}} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \quad (-)$$

LQR

u_j

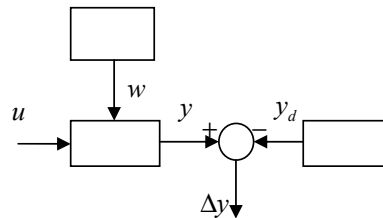
x_i

$$R_{jj} \quad Q_{ii}$$

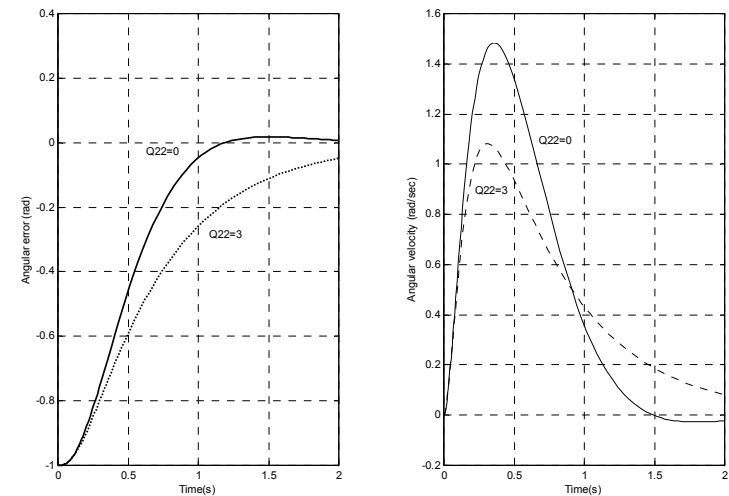
۶-۶) رفع اغتشاش و ورودی مرجع ثابت

$$\begin{pmatrix} w \\ y_d \end{pmatrix} \quad (-)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + \Gamma w \\ \Delta y &= Cx - y_d \end{aligned} \quad (-)$$



شکل (۷-۶) نمایش اعمال اغتشاش و ورودی مرجع به یک سیستم خطی



شکل (۶-۶) تاثیر Q_{22} در پاسخ حلقه بسته سیستم موتور DC

$$\begin{aligned} \omega & \quad Q_{22} \quad Q_{11} = 9 \\ D & \quad , \quad . \\ PD & \quad . \\ \theta & \quad Q_{11} \quad \omega \quad Q_{22} \end{aligned}$$

۶-۵-۴) انتخاب مناسب ماتریسهای وزنی

$$\begin{aligned} Q & \quad . \\ R, Q & \quad . \\ LQR & \quad . \\ R, Q & \quad . \\ J(Q, R) & \quad . \\ R, Q & \quad . \\ R, Q & \quad . \end{aligned}$$

$$y^* = P(0)u^* + P_w(0)w^*$$

$$u^* = P^{-1}(0)[y_d^* - P_w(0)w^*]$$

$$P^{-1}(0)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

$$s = 0$$

$$P_w(s^*), P(s^*)$$

$$P_w(0), P(0)$$

$$(s^* \quad y_d^* e^{s^* t})$$

$$u(t) = u^* e^{s^* t}$$

(-)

LQR

$$(-)$$

$$u_{ex} \quad u^*$$

مثال (۶-۱۱) موتور DC و ضد هوائی

$$T_L = T_{Ls} u(t)$$

$$T_{Ls}$$

$$v_s$$

(الف)

$$\theta = \theta_d$$

(ب)

$$J = \int_0^{\infty} [9(\theta - \theta_d)^2 + (v - v_s)^2] dt$$

$$\dot{x} = 0 \quad y_d = y_d^*, w = w^* :$$

$$Ax^* + Bu^* = -\Gamma w^* \quad (-)$$

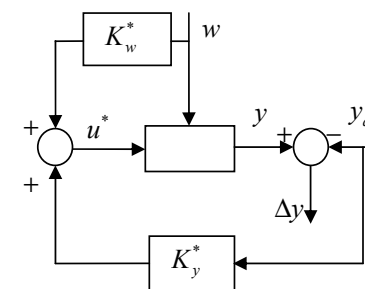
$$Cx^* = y_d^*$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Gamma w^* \\ y_d^* \end{bmatrix} \quad (-)$$

$$u^* = k_w^* w^* + k_y^* y_d^* \quad y_d^*, w^* \quad u^*, x^* \quad (-)$$

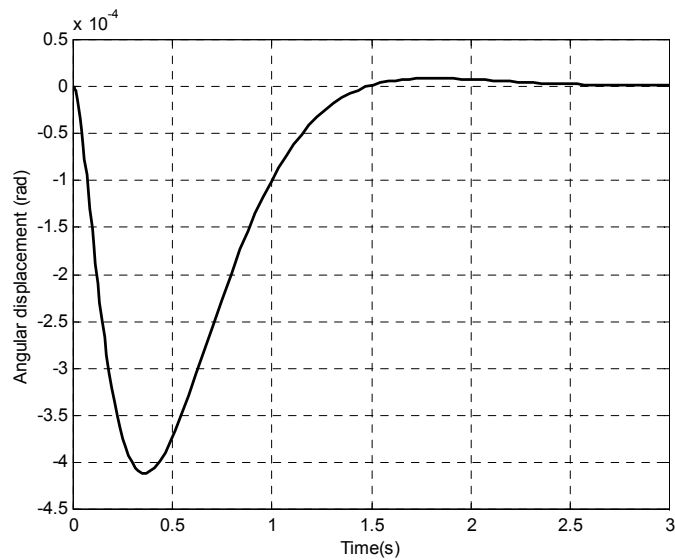
$$k_y^*, k_w^* \quad y_d$$

$$(-) \quad k_w^*, k_y^*$$



شکل (۶-۸) سیستم کنترلی پیش خور برای حذف اغتشاش و تعقیب ورودی مرجع ثابت

$$y(s) = P(s)u(s) + P_w(s)w(s) \quad (-)$$



شکل (۹-۶) پاسخ سیستم حلقه بسته سیستم با ترم پیش خور حذف اغتشاش به ورودی اغتشاش پله واحد

()

$$w(t) = w^* + \Delta w(t) \quad (-)$$

$$y_d(t) = y_d^* + \Delta y_d(t)$$

(-)

$$\Delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}^* = \dots = A\Delta x + B\Delta u + \Gamma\Delta w \quad (-)$$

:

$$\Delta y = C\Delta x - \Delta y_d \quad (-)$$

$$Cx^* - y_d^* = 0$$

$$\Delta w(t), \Delta y_d(t)$$

$$\dot{z}_w = A_w z_w \quad (-)$$

$$\Delta w = C_w z_w$$

:

پاسخ:

$$T_L = T_{Ls} u(t)$$

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ 4.438i - 7.396T_L = 0 \\ -24i + 20v = 0 \end{cases}$$

:

$$T_L = T_{Ls}$$

$$i = i_s = \frac{7.396}{4.438} T_{Ls} = 1.667 T_{Ls}$$

$$v = v_s = \frac{24}{20} i_s = 1.2 i_s = 2.0 T_{Ls}$$

:

$$\theta = \theta_d, \quad \omega = 0, \quad v_s = 2.0 T_{Ls}, \quad i = 1.667 T_{Ls}$$

:

LQR

$$v - v_s = -3.0(\theta - \theta_d) - 0.879\omega - 0.1529(i - i_s)$$

$$\begin{aligned} v &= v_s - 3.0(\theta - \theta_d) - 0.879\omega - 0.153(i - 1.667T_{Ls}) \\ &= 2.0T_{Ls} - 3.0(\theta - \theta_d) - 0.879\omega - 0.153i + 0.255T_{Ls} \\ &= \underbrace{2.255T_{Ls}} - \underbrace{3.0(\theta - \theta_d)} - 0.879\omega - 0.1529i \end{aligned}$$

$$\theta(t) - \theta_d \quad (-)$$

$$\theta = \theta_d \quad T_l = 0.01 u_s(t)$$

$$\omega = i = 0$$

$$k_x \quad (\quad - \quad)$$

LQ

$$\begin{bmatrix} k_x & k_w & k_z \end{bmatrix}$$

جمع بندی روش:

(. (

z_w, z_y

LQ

مثال (۶-۱۲) موتور DC و ضد هوائی

DC

$$T_L = 0.01e^{-t}u(t)$$

$u(t)$

$$\theta = \theta_d$$

(-)

LQR

$$\omega = i = v = 0$$

$$J = \int_0^\infty [9(\theta - \theta_d)^2 + (v - v_s)^2] dt$$

پاسخ:

$$\dot{z} = -z$$

$$T_L = z$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \omega \\ i \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.438 & -7.396 \\ 0 & -12 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \omega \\ i \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

$$e = \theta - \theta_d \quad (\quad - \quad)$$

$$\dot{z}_y = A_y z_y$$

(-)

$$\Delta y_d = C_y z_y$$

z_w, z_y

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta x \\ z_w \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \Gamma C_w & 0 \\ 0 & A_w & 0 \\ 0 & 0 & A_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ z_w \\ z_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u$$

(-)

$$\Delta y = \begin{bmatrix} C & 0 & -C_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ z_w \\ z_y \end{bmatrix}$$

Δu

A_w, A_y

$$\Delta u = - \begin{bmatrix} k_x & k_w & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ z_w \\ z_y \end{bmatrix}$$

(-)

$$= -k_x \Delta x - k_w z_w - k_y z_y$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta x \\ z_w \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - Bk_x & \Gamma C_w - Bk_w & -Bk_y \\ 0 & A_w & 0 \\ 0 & 0 & A_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ z_w \\ z_y \end{bmatrix}$$

(-)

$A - Bk_x, A_w, A_y$

(A, B)

A_w, A_y

مثال (۶-۱۳): قطار:

(-)

25 m/s

±2 m/s

$$v_d(t) = 25(1 - e^{-t/40})$$

75000 N

120 kN

50000 N

پاسخ:

25 m/s

$x_2, x_3, \dots, x_N,$

x_1

$$\Delta x_i = x_i - x_0, \quad i = 2, 3, 4, 5$$

$$\Delta v_i = v_i - 25, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

(-)

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_i = \Delta v_{i-1} - \Delta v_i, & i = 2, 3, 4, 5 \\ \Delta \dot{v}_1 = -12.5 \Delta x_2 - 0.75 \Delta v_1 + 0.75 \Delta v_2 + 0.005 F_1 \\ \Delta \dot{v}_i = 62.5 \Delta x_i - 62.5 \Delta x_{i+1} + 3.75 \Delta v_{i-1} - 7.5 \Delta v_i + 3.75 \Delta v_{i+1} & i = 2, 3, 4 \\ \Delta \dot{v}_5 = 62.5 \Delta x_5 + 3.75 \Delta v_4 - 3.75 \Delta v_5 \end{cases}$$

F_1

$$v_1 - v_d = 25 + \Delta v_1 - (25 - 25e^{-t/40})$$

$$= \Delta v_1 + z$$

$$z = 25e^{-t/40}$$

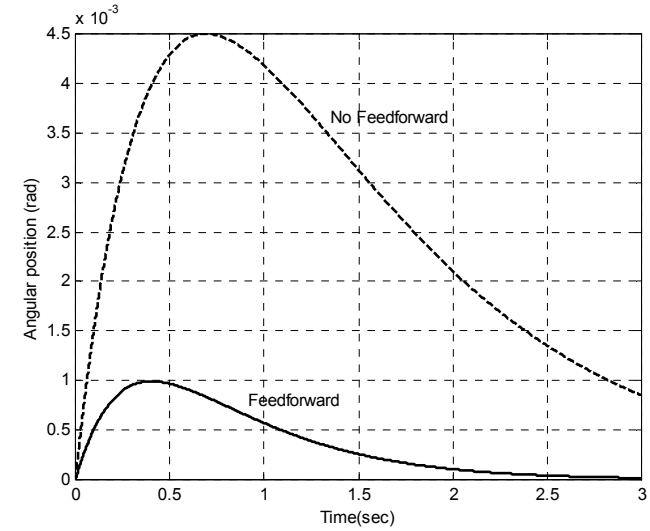
$$\dot{z} = -\frac{1}{40}z, \quad z(0) = 25.$$

$$Q = \text{diag}[9 \ 0 \ 0 \ 0]; \ R = 1$$

Matlab

lqr

$$k = [3 \ 0.8796 \ 0.1529 \ -1.8190]$$



شکل (۶-۱۰) پاسخ حلقه بسته سیستم سرو DC به ورودی اغتشاش با در نظر گرفتن پیش خور رفع اغتشاش و بدون آن

(-)

$$e(0) = \omega(0) = i(0) = 0; \quad z(0) = 0.01$$

(-)

$$D=1.5\times10^5 \text{ N/m/s} \quad K=2.5\times10^6 \text{ N/m}$$

$$J = \int_0^\infty \left\{ \sum_{i=1}^5 \left(\frac{K \Delta x_i}{75000} \right)^2 + \sum_{i=1}^5 \left(\frac{D(\Delta v_{i-1} - \Delta v_i)}{50000} \right)^2 + \left(\frac{\Delta v_1 + z}{2} \right)^2 + \left(\frac{F_1}{120} \right)^2 \right\} dt$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \sum_{i=1}^5 (3.34 \Delta x_i)^2 + \sum_{i=1}^5 (3(\Delta v_{i-1} - \Delta v_i))^2 + (0.5(\Delta v_1 + z))^2 + \left(\frac{F_1}{120} \right)^2 \right\} dt$$

Q

$$x^T = [\Delta x_2 \quad \Delta x_3 \quad \Delta x_4 \quad \Delta x_5 \quad \Delta v_1 \quad \Delta v_2 \quad \Delta v_3 \quad \Delta v_4 \quad \Delta v_5 \quad z]; \quad x^T Q x$$

$$Q = \begin{bmatrix} 3.34^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.34^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.34^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.34^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^2 + 0.5^2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \times 3^2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \times 3^2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \times 3^2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5^2 \end{bmatrix}$$

$$R = \left(\frac{1}{120} \right)^2$$

Matlab	lqr
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D = 0$	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D = 0$

$$k = [54.53 \quad 17.28 \quad -1.303 \quad -4.361 \quad 191.7 \quad -40.8 \quad -34.21 \quad -29.70 \quad -27.34 \quad 52.09]$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad (1 - 1)$$

2 m/s

R

$$R = 35/120^2$$

$$k=[0.4559 \quad 0.3331 \quad 0.2170 \quad 0.1069 \quad 11.54 \quad -0.2622 \quad -0.3371 \quad -0.3865 \quad -0.4110 \quad 5.373]$$

(-)

2 m/s

$$v_d(t) = 25(1 - e^{-t/\tau}); \quad \tau > 40 \text{ sec}$$

Q

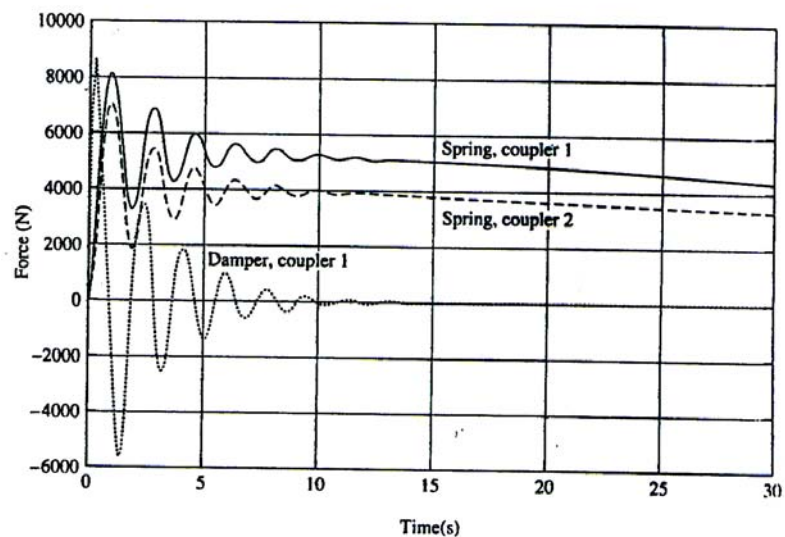
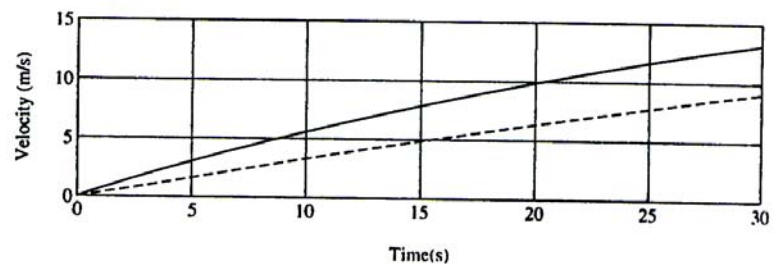
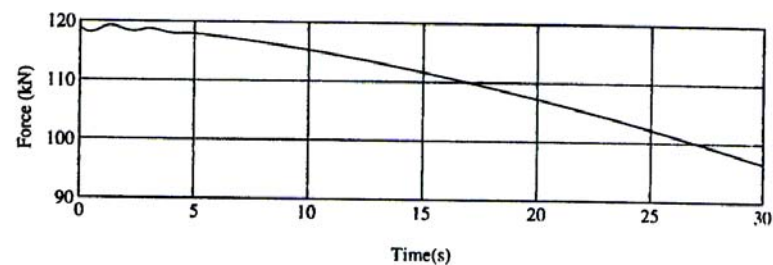
$$x^T = [\Delta x_2 \quad \Delta x_3 \quad \Delta x_4 \quad \Delta x_5 \quad \Delta v_1 \quad \Delta v_2 \quad \Delta v_3 \quad \Delta v_4 \quad \Delta v_5 \quad z]; \quad x^T Q x$$

$$Q = \begin{bmatrix} 3.34^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.34^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.34^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.34^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^2 + 0.5^2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \times 3^2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \times 3^2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \times 3^2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5^2 \end{bmatrix}$$

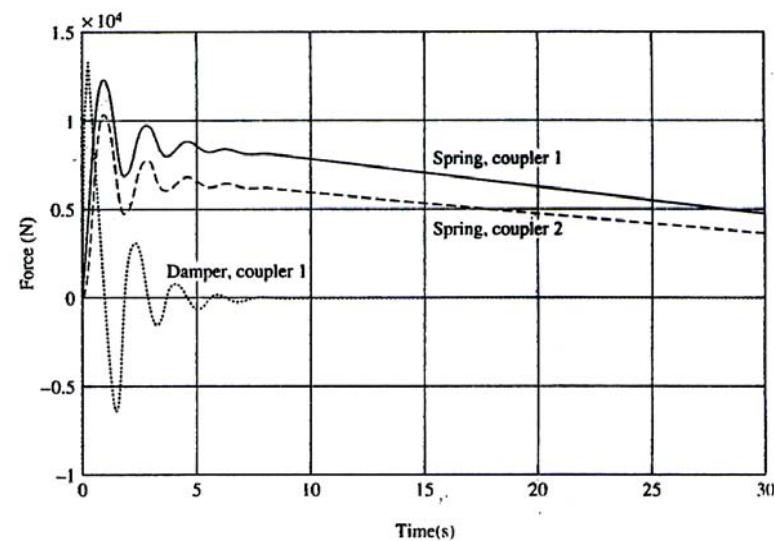
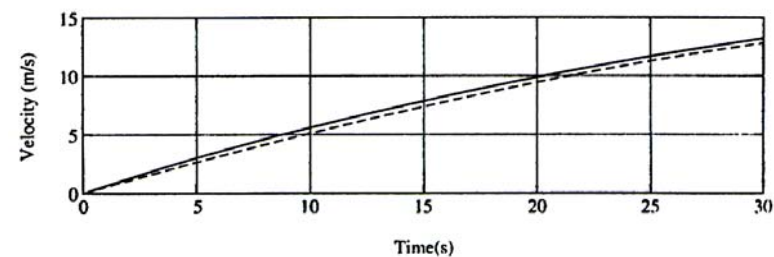
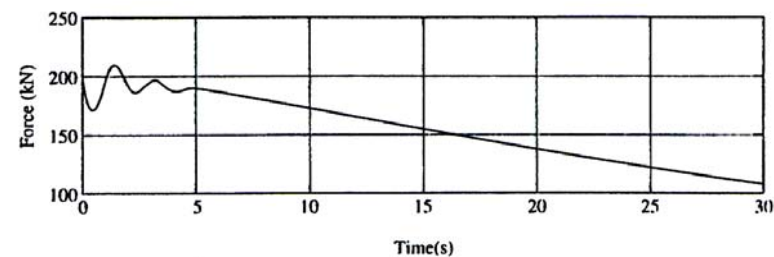
$$R = \left(\frac{1}{120} \right)^2$$

Matlab	lqr
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D = 0$	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D = 0$

$$k = [54.53 \quad 17.28 \quad -1.303 \quad -4.361 \quad 191.7 \quad -40.8 \quad -34.21 \quad -29.70 \quad -27.34 \quad 52.09]$$



شکل (۶-۱۲) پاسخ حلقه بسته سیستم قطار و تعقیب ورودی مرجع متغیر با زمان با در نظر گرفتن پیش خور (بهره فیدبک حالت نهایی)



شکل (۶-۱۱) پاسخ حلقه بسته سیستم قطار و تعقیب ورودی مرجع متغیر با زمان با در نظر گرفتن پیش خور (اولین بهره فیدبک حالت)

$$s = 0$$

$$\begin{bmatrix} -T & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} w_1^T & w_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

	A	B
1	0	0
2	0	1
3	1	0
4	1	1

$$s = 0$$

$$u = u_c - [k \quad k] x$$

ω, y_d

$$u_f$$

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w \quad (-)$$

$$\dot{z} = Cx - y_d \quad (-)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

قضیه ۶-۷ شرایط وجود جواب فیدبک انتگرال حالت

$$, \quad (A, B)$$

$$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \right)$$

$$(A, B, C)$$

$$s = 0$$

آیات:

$$s = 0 \quad m \quad s_1, s_2, \dots, s_n \quad A$$

$$: \quad A \quad w_1^T, w_2^T, \dots, w_n^T$$

(c)

$$-3 \pm 3j, -25 \pm 25j, 5$$

$$l_{1d} = 0.1$$

پاسخ:

$$\dot{l}_2 = v_1 - w$$

$$\dot{v}_1 = -10l_1 - 2(v_1 - v_2) + 0.00334u$$

$$\dot{v}_2 = 60l_1 + 12(v_1 - v_2) - 660(-l_1 + l_2) - 0.02u$$

$$\dot{x} = l_1 - l_{1d}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 720 & -660 & 12 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00334 \\ -0.02 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} l_d$$

Matlab place

$$k^T = \begin{bmatrix} 5.15 \times 10^4 & -2.52 \times 10^4 & 6.23 \times 10^3 & -1.31 \times 10^3 & 5.10 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = v_2 = 0 \quad l_1 = l_2 = l_{1d}$$

x

$$u = 3000l_{1d}$$

$$u = -k_1 l_1 - k_2 l_2 - k_3 v_1 - k_4 v_1 - k_5 x$$

$$3000l_{1d} = -k_1l_{1d} - k_2l_{1d} - k_5x^* \Rightarrow$$

$$x^* = -0.574l_{1d}$$

(-)

$$w(t) = 0.1\delta(t)$$

•

•

$$\left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & k_z \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_f^* - \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} w^* + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} y_d^* \quad (\quad)$$

$$x^*, z^* \quad (s=0)$$

$$y^* = y_d^* \quad Cx^* = y_d$$

$$u_f^*$$

$$y = y_d$$

$$u_f$$

$$u_f$$

MIMO

جمع بندی روش:

$$y - y_d$$

m

LQR

$Q^{1/2}x$

$$Z$$

$$(\quad),$$

مثال (۶-۱۴) سیستم تعلیق فعال اتومبیل:

(-)

$$\dot{y}_R = w(t)$$

الف)

$$l_1 = x_1 - x_2, l_2 = x_1 - y_R, v_1, v_2$$

مسائل

(۱-۶)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

(الف)

$$\frac{y}{u}$$

(ب)

$$u = -[k_1 \quad k_2]x + u_{ex}$$

u_{ex}

(ج)

$$\frac{y}{u_{ex}}$$

$$\frac{y}{u}$$

(۲-۶)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

(۳-۶)

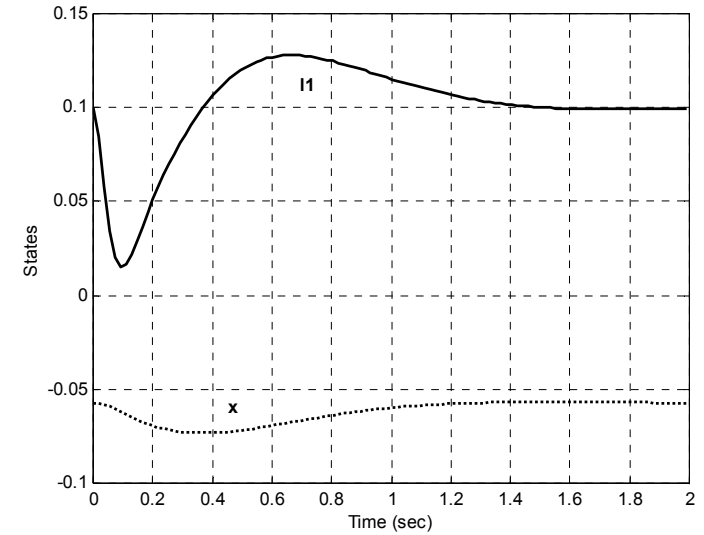
(۴-۶)

(۵-۶)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x$$

(الف)



شکل (۱۳-۶) پاسخ حلقه بسته سیستم تعلیق فعال اتومبیل با استفاده از فیدبک انتگرال حالت

(۸-۶) جمع بندی

LQR

LQR

(ب) $-5,-2.47,0$

$-150 \pm j150,-21.52$

(ج) $($

$\theta_2 = \theta_d$ $\frac{\theta_2}{\theta_d}$

(د) $\frac{\theta_2}{\theta_d}$

(۱۰-۶) مبدل حرارتی

$(-)$

$-0.9531 \pm j0.1278,-1.2875,-0.5252 \pm j0.1278,-0.1914$

ΔF_H

(الف)

$-0.9531 \pm j0.1278,-1.2872-0.5252 \pm j0.5252,-0.7$

(ب) $(-)$

$\Delta T_{c3} = \Delta T_d$

(ج) $\frac{\Delta T_{c3}}{\Delta T_d}$

(۱۱-۶) راکتور شیمیائی

$(-)$

$(-)$

ΔQ

$\Delta T, \Delta T_c$

ΔT

(الف)

$\Delta T = \Delta T_d$ $-0.5 \pm j0.5$

(ب) $u = -[k_1 \quad k_2]x + u_{ex}$ u_{ex}

(ج) (k_2, k_1)

(د) $\frac{y}{u_{ex}}$ c_1, c_2, k_2, k_1

(۶-۶) $(-)$

$s_{1,2} = -1$

(الف)

(ب)

(ج)

(۷-۶) $(-)$

(۸-۶)

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

(الف)

(ب) $s_{2,3} = -1 \pm j$ $s_1 = -2$

(ج)

(۹-۶) موتور DC و هارمونیک درایو

DC

(الف)

$-5,-4$

$-150 \pm j150,-21.52$

۶-۲۰) موتور DC و هارمونیک درایو

DC

$$\theta_d = 1^{\text{rad}}$$

$$|\theta_1 - \theta_2| = |\Delta| < 0.03^{\text{rad}} \quad 5 \text{ V}$$

$$\theta_2 = \theta_d \quad (\text{الف})$$

$$\Delta x = x - x^*$$

$$J = \int_0^\infty [Q_{11}\Delta^2 + Q_{33}(\theta_2 - \theta_d)^2 + Rv^2] dt \quad (\text{ب})$$

$$R = \frac{1}{5^2}, Q_{33} = 1, Q_{11} = \frac{1}{(0.03)^2}$$

$$\theta_d = 1 \quad (\text{ج})$$

$$Q, R \quad (\text{د})$$

۶-۲۱) کنترل سرعت غلطک

V

ω_0

$$0.02^{\text{rad}}$$

$$T_L = 0$$

$$\omega_d = 2.0 \text{ rad/s}$$

$$\int_0^\infty [Q_{33}\Delta w_0^2 + Q_{44}\Delta_1^2 + Q_{55}\Delta_2^2 + R_{11}u_1^2 + R_{22}u_2^2] dt$$

(الف)

$$Q_{33} = \frac{1}{(2)^2}, Q_{44} = Q_{55} = \frac{1}{(0.02)^2}, R_{11} = R_{22} = \frac{1}{(180 - u_i^*)^2}$$

$$u_1^* = u_2^*, \omega_d = 2.0 \text{ rad/s} \quad zS \quad (\text{ب})$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

k

$$J(k) \quad (\text{ج})$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad k$$

$$(17-6)$$

$$Q = I$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(18-6)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0]x$$

$$\int_0^\infty [y^2(t) + \rho u^2(t)] dt, \rho > 0$$

$$(19-6)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]x$$

(الف)

(ب)

$$\int_0^\infty [y^2(t) + \rho u^2(t)] dt, \rho > 0$$

(ب)

(-) (ج)

٢٤-٦ جرثقیل

(-)

|F|

$$|\theta| \leq 0.2 \text{rad}, |F| \leq 1500 \text{N}$$

x_d

(الف)

$$J = \int_0^\infty [Q_{11}(x - x_d)^2 + Q_{33}\theta^2 + R_{11}F^2] dt$$

$$Q_{11} = \frac{1}{10^2}, Q_{33} = \frac{1}{0.2^2}, R_{11} = \frac{1}{1500^2}$$

$$\theta(0) = 0, y_d = 10 \text{m}$$

(ب) R_{11}, Q_{33}

x

(ج)

٢٥-٦ پاندول دوتائی معکوس

(-)

(الف)

LQ

$$\ell_2 = 0.5 \text{m}, \ell_1 = 1 \text{m}$$

$$J = \int_0^\infty F^2 dt$$

(ج)

u_1

$V \quad u_1$

٢٢-٦ کنترول غلظت مخزن

(-)

(الف)

$$\Delta C_A^* = 0.1, \Delta \ell^* = 0, \Delta F_B^* = 1 \times 10^{-5}$$

(-)

(ب)

$$|\Delta F_0|, |\Delta F_A| < 0.5 \times 10^{-4}, |\Delta \ell(t)| \leq 0.02$$

$$J = \int_0^\infty [Q_{11}\Delta \ell^2 + R_{11}\Delta F_A^2 + R_{22}\Delta F_0^2] dt$$

$$R_{11} = R_{22} = \frac{1}{(0.05 \times 10^{-4})^2}, Q_{11} = \frac{1}{0.02^2}$$

$\Delta F_0, \Delta F_A$

ΔF_B

R, Q

(ج)

٢٣-٦ بندباز

(-)

$$\theta(0) = 0.5 \text{rad}$$

$$|\theta(t)| \leq 0.5 \text{rad}, |\varphi(t)| \leq 0.5 \text{rad}, |\dot{\varphi}(t)| \leq 0.5 \text{rad/sec}, |\tau(t)| \leq 75 \text{Nm}$$

(الف)

$$J = \int_0^\infty [Q_{11}\theta^2 + Q_{33}\varphi^2 + Q_{44}\dot{\varphi}^2 + R_{11}\tau^2] dt$$

$$Q_{11} = Q_{33} = Q_{44} = \frac{1}{0.25}, R_{11} = \frac{1}{75^2}$$

مراجع

- [1] Anderson, Brian D. O. and John B. Moore, *Optimal control: linear quadratic methods*, Prentice Hall, c1990.
- [2] Bélanger, Pierre., *Control engineering : a modern approach*, Saunders College Pub., c1995.
- [3] Boyd, Stephen P. and Craig H. Barratt., *Linear controller design : limits of performance*, Prentice Hall, c1991.
- [4] Brogan, William L., *Modern control theory*, 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, c1991.
- [5] Bryson, Arthur E., *Applied linear optimal control : examples and algorithms*, Cambridge University Press, 2002.
- [6] Chen, Chi-Tsong., *Linear system theory and design*, Oxford University Press, c1999.
- [7] D'Azzo, John Joachim. And Constantine H. Houpis, *Linear control system analysis and design : conventional and modern*, McGraw-Hill, c1995.
- [8] Dorf, Richard C. and H. Bishop, *Modern control system*, Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2001.
- [9] Hager, William W. and Panos M. Pardalos, *Optimal control: theory, algorithms, and applications*, Kluwer Academic Pubs., c1998.
- [10] Kailath, Thomas., *Linear systems*, Prentice-Hall, c1980.
- [11] Rugh, Wilson J., *Linear system theory*, 2nd ed., Prentice Hall, c1996.
- [12] Shinnars, Stanley M., *Modern control system theory and design*, 2nd ed., J. Wiley, c1998.
- [13] Tewari, Ashish., *Modern control design with MATLAB and SIMULINK*, John Wiley, c2002.
- [14] Zadeh, Lotfi Asker. and Charles A. Desoer, *Linear system theory*, R. E. Krieger Pub. Co., 1979.
- [15]

فصل هفتم: طراحی رُویتگر حالت

۷-۱) مقدمه

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (7-1)$$

۷-۲) یک رُویتگر مقدماتی

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (-)$$

$$\boxed{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x})} \quad (-)$$

(m n) n*m G

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x & G(y - C\hat{x}) \\ y - C\hat{x} &= y - Cx = 0 & (-) \\ C\hat{x} &\neq y & (\dots) \end{aligned}$$

قضيه (٧-١) روينكر مرتبه كامل:

$$\begin{aligned} G & (A, C) \\ x(t) & \hat{x}(t) \\ \hat{x}(t) & \rightarrow x(t) \end{aligned}$$

$$e = x - \hat{x} \quad \text{اثبات:}$$

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - G(y - C\hat{x}) \\ &= A(x - \hat{x}) - G(Cx - C\hat{x}) & (-) \\ &= (A - GC)(x - \hat{x}) \\ &= (A - GC)e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^T x + C^T u \\ G^T & \text{(LQR)} \\ A - GC & \end{aligned}$$

■

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (-)$$

$$\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \quad (-)$$

e

$\hat{x}$

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (-)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax + Bu - A\hat{x} - Bu \\ &= A(x - \hat{x}) & (-) \\ &= Ae \end{aligned}$$

$$e(t) = e^{At} \cdot e(0) \quad (-)$$

$\hat{x}$

A

x

x, $\hat{x}$

A

$$(A, B)$$

٧-٣) روينكر مرتبه - كامل

$$rank(\mathbf{O}) = rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = 4$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 4.439 & -24 & 0 \\ 0 & -7.396 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$(sI - A^T) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ -1 & s & 12 & 0 \\ 0 & -4.438 & s + 24 & 0 \\ 0 & 7.396 & 0 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A^T) = s^2(s^2 + 24s + 53.256)$$

$$Adj(sI - A^T) = \begin{bmatrix} s(s^2 + 24s + 53.256) & \times & \times & \times \\ s(s + 24) & \times & \times & \times \\ 4.438s & \times & \times & \times \\ -7.396(s + 24) & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A^T) + G^T Adj(sI - A^T)C = s^4 + 24s^3 + 53.256s^2$$

$$+ g_1(s^3 + 24s^2 + 53.256s) + g_2(s^2 + 24s) + g_3(4.438s) + g_4(-7.396s - 177.5)$$

$$p_d(s) = (s + 5 \pm j5)(s + 7 \pm j7)$$

$$= s^4 + 24s^3 + 288s^2 + 1680s + 4900$$

G

G^T

k

خلاصه روش:

$$\dot{x} = A^T x + C^T u$$

$$p_d(s)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x})$$

مثال (۷-۱) موتور DC و ضد هوائی:

θ

T_L

i, ω

$$p_d(s) = (s + 5 \pm j5)(s + 7 \pm j7)$$

$$v(t) = \sin(t), \quad T_L = 1 \text{ N}, \quad \theta(0) = 1 \text{ rad}, \quad \omega(0) = 1 \text{ rad/s}, \quad i(0) = 0, \quad \hat{x}(0) = 0$$

پاسخ:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.438 & -7.396 \\ 0 & -12 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \\ z \end{bmatrix}$$

۷-۴) رُویتگر بهینه (فیلتر کالمن)

۷-۴-۱) طراحی رُویتگر بهینه

$$(A - GC)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + w \\ y = C\hat{x} + v \end{cases} \quad (-)$$

w

v

v

w

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x}) \quad (-)$$

$$\dot{e} = (A - GC)e + w - Gv \quad (-)$$

()

w, v

w, v

$w(t), v(t)$

W, V

$$J = E \left\{ \int_0^\infty e^T(t) \cdot e(t) dt \right\} \quad (-)$$

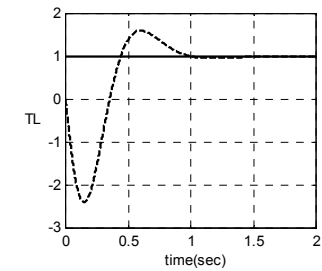
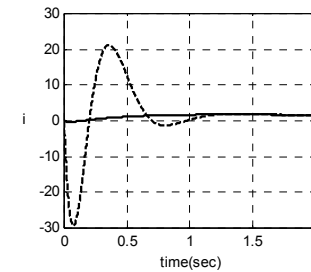
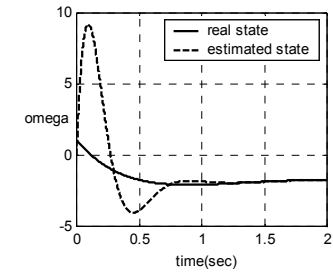
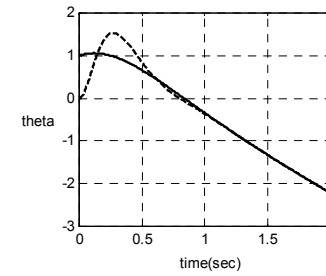
W

V

$$\begin{cases} 24 + g_1 = 24 \\ 53.256 + 24g_1 + g_2 = 288 \\ 53.256g_1 + 24g_2 + 4.438g_3 - 7.396g_4 = 1680 \\ -177.5g_4 = 4900 \end{cases}$$

$$\Rightarrow G^T = [0 \quad 234.7 \quad -937.6 \quad -27.60]$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\omega} \\ \hat{i} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.438 & -7.396 \\ 0 & -12 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\omega} \\ \hat{i} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} N + \begin{bmatrix} 0 \\ 234.7 \\ -937.6 \\ -27.6 \end{bmatrix} (\theta - \hat{\theta})$$



شکل (۷-۱) مقایسهٔ منغیر های حالت واقعی و تخمین زده شده توسط رُویتگر حالت

$$(A, C)$$

$$v_0 > 0 \quad (V \neq 0)$$

$$\frac{-}{P}$$

$$= Cov(w(t)) \quad) \quad W = w_0^2 \quad (V = Cov(v(t)) \quad) \quad V = v_0^2$$

•

$$W = \text{Cov}(w(t)) = w^T w$$

$$e_{zi}(t) = e_v(t)$$

$$Z$$

ν

$$T = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T \leq t\}}] dt$$

مثال (۷-۲) قطار:

25m/s

$v_1, \Delta x_2$

(الف)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } (O) = 9 = n$$

$\pm 0.02m$

$\pm 1m/s$

(ب)

V

$$V = \begin{bmatrix} (0.02)^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix}$$

W 3 kN

$$W = \text{diag}[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 9 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

2*9

Matlab "lqe"

$$G^T = \begin{bmatrix} 21.00 & 41.138 & 0.4889 & 0.0587 & 352.3 & 107.88 & 12.15 & -5.6 & -7.96 \\ 0.1409 & 0.0086 & -0.0031 & -0.0014 & 4.703 & 0.9010 & 0.258 & 0.204 & 0.203 \end{bmatrix}$$

$$F(t) = 10KN, \Delta x_i = \Delta v_i = 0$$

(ج)

KN

(۱) عدم نیاز به مدل دقیق و مقاوم بودن

W, V

V

W

(۲) عدم محدودیت در اجرا

k

$$u = -kx$$

G

e_v, e_w

۷-۵) روتگر لوتنبرگر

$$x = \begin{bmatrix} x_m \\ x_u \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow m \\ \rightarrow n-m \end{matrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{x}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{mm} & A_{mu} \\ A_{um} & A_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ x_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ B_u \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ x_u \end{bmatrix} \quad C$$

$\hat{x}_u$:

x_u

$x_m, u, A_{mm}, \dots$

$$\dot{x}_u = A_{uu}x_u + A_{um}x_m + B_u u \quad (-)$$

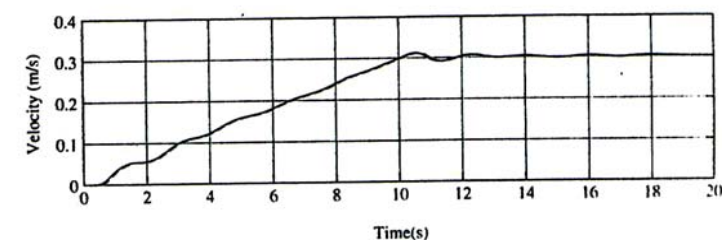
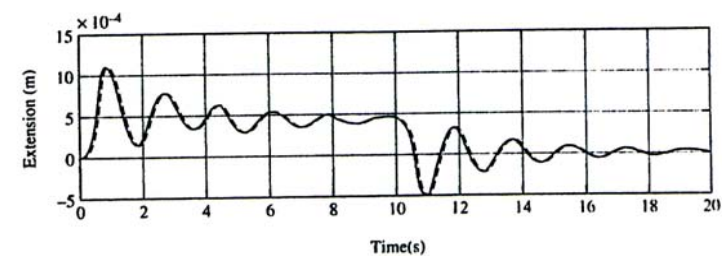
$$A_{mu}x_u = \dot{x}_m - A_{mm}x_m - B_mu = z \quad (-)$$

$$x_m, u \quad x_u \quad (-)$$

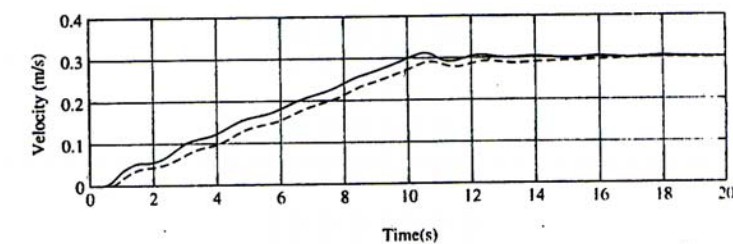
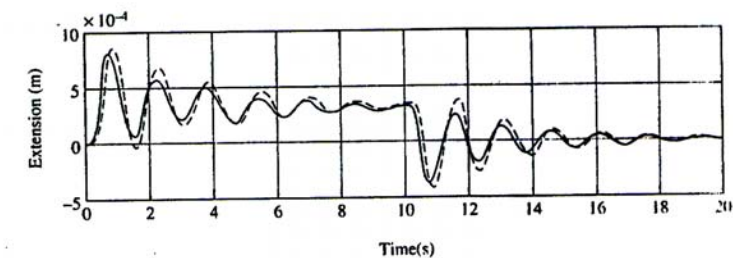
$(-)$

$\dot{x}_m, u, x_m$

$$\dot{\hat{x}} = A_{uu}\hat{x}_u + A_{um}x_m + B_u u + G(z - A_{mu}\hat{x}_u) \quad (-)$$



شکل (۷-۲) مقایسه متغیرهای حالت واقعی و تخمین زده شده توسط فیلتر کالمن



شکل (۷-۳) مقایسه متغیرهای حالت واقعی و تخمین زده شده توسط فیلتر کالمن بدون داشتن اطلاع از ورودی اغتشاش 2 KN و با نامعینی پارامتریک

$$\begin{pmatrix} - & \end{pmatrix} \quad *$$

$$A_{uu} - GA_{mu} = 0 - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -g_3$$

$$g_3 = 4 \quad -g_3 = -4 \quad -4$$

$$g_2, g_1$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 19.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ \theta \end{bmatrix} - u + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v \\ -9.8\theta \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{\omega} \right)$$

$$\dot{\hat{\omega}} = 19.6\theta - u + 4\dot{\theta} - \hat{\omega}$$

$$\dot{\psi} = (0 - 4)\psi + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 19.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ v \\ \theta \end{bmatrix} + (-1)u$$

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -4\psi + 3.6\theta - u \\ \dot{\hat{\omega}} = \psi + 4\theta \\ \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\hat{\omega}$$

٧-٦) سیستم حلقه بسته فیدبک حالت - رونیگر حالت

$$n \times m \quad (n-m) \times m \quad G$$

$$\dot{\hat{x}} = A_{uu}\hat{x}_u + A_{um}x_m + B_u u + G(\dot{x}_m - A_{mm}x_m - B_m u - A_{mu}\hat{x}_u) \quad (-)$$

$$\dot{x}_m$$

$$\psi = \hat{x}_u - Gx_m \rightarrow \hat{x}_u = \psi + Gx_m \quad (-)$$

$$\dot{\psi} + G\dot{x}_m = A_{uu}\psi + A_{uu}Gx_m + A_{um}x_m + B_u + G\dot{x}_m - GA_{mm}x_m - GB_mu - GA_{mu}\psi - GA_{mu}Gx_m \quad (-)$$

$$\dot{\psi} = (A_{uu} - GA_{mu})\psi + (A_{uu}G + A_{um} - GA_{mm} - GA_{mu}G)x_m + (B_u - GB_m)u$$

$$\hat{x}_u = \psi + Gx_m \quad (-)$$

مثال (٧-٣) پاندول معکوس:

$$\omega$$

پاسخ:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 19.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$A_{mm} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{um} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 19.6 \end{bmatrix} \quad A_{uu} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad B_u = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\hat{x}} &= A\Delta \hat{x} + B\Delta u + G(\Delta y - C\Delta \hat{x}) \\ &= A\Delta \hat{x} + B(-k\Delta \hat{x}) + G(\Delta y - C\Delta \hat{x})\end{aligned}\quad (-)$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{\hat{x}} = (A - Bk - GC)\Delta \hat{x} + G\Delta y \\ \Delta u = -k\Delta \hat{x} \end{cases} \quad (-)$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \vdots & \Delta u(s) & \Delta y(s) \\ \Delta u(s) = -k(sI - A + Bk + GC)^{-1} G \Delta y(s) & & \\ \vdots & \Delta y = -e & \Delta y \end{matrix} \end{aligned} \quad (\quad - \quad)$$

$$\frac{\Delta u(s)}{e(s)} = k(sI - A + Bk + GC)^{-1}G \quad (-)$$

مثال (۷-۴) موتور DC و ضد هوائی:

$$\theta = \theta_d \quad T_L = 0.01e^{-t} \quad \omega = i = 0$$

پاسخ:

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 0.8796 & 0.1529 & -1.8190 \end{bmatrix}$$

$$G^T = \begin{bmatrix} -1 & 265.7 & -112.7 & -20.66 \end{bmatrix}$$

(-)

$j\omega$

$$u = -k\hat{x} \quad (\quad - \quad)$$

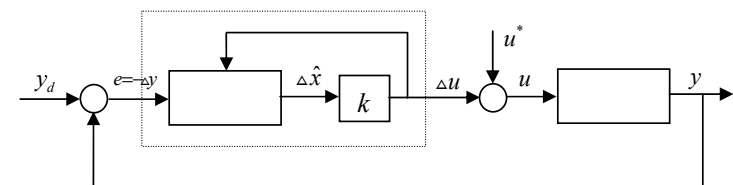
$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax - Bkx + Bke \\ \dot{e} = (A - GC)e \end{cases} \quad (-)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-Bk & Bk \\ 0 & A-GC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{array}{ccc} (A-Bk) & & (A-GC) \\ & \searrow & \nearrow \\ & (A-GC) & (A-Bk) \end{array}$$

Bke



شکل (۷-۴) پیاده سازی حلقهٔ فیدبک حالت -رؤیتگر حالت

۷-۷) سیستم حلقه بسته فیدبک حالت - رُویتگر حالت با اغتشاش ثابت

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y = C\Delta x \end{cases} \quad (-)$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A\Delta x - Bu^* + Bu \\ \dot{u}^* = 0 \\ \Delta y = C\Delta x \end{cases} \quad (-)$$

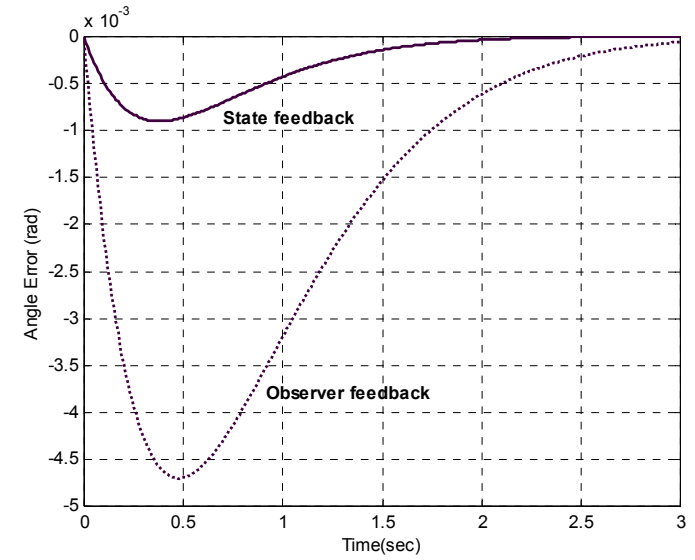
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\Delta x}{u^*} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left[\frac{\Delta x}{u^*} \right] + \left[\begin{array}{c} B \\ 0 \end{array} \right] u$$

$$\Delta y = [C \quad 0] \left[\frac{\Delta x}{u^*} \right]$$

$$s = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\Delta \hat{x}}{u^*} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left[\frac{\Delta \hat{x}}{u^*} \right] + \left[\begin{array}{c} B \\ 0 \end{array} \right] u + \left[\begin{array}{c} G_1 \\ G_2 \end{array} \right] (\Delta y - C\Delta \hat{x})$$

$$u = \hat{u}^* + \Delta u = \hat{u}^* - k\Delta \hat{x}$$



شکل (۷-۵) پاسخ سیستم حلقه بسته موتور DC با فیدبک حالت و فیدبک-رُویتگر حالت

$$\frac{\Delta u(s)}{e(s)} = k(sI - A + Bk + GC)^{-1}G$$

$$= \dots$$

$$= \frac{92.8(s+21.6)(s+2.438 \pm j1.17)}{(s+1.33)(s+11.47)(s+7.127 \pm j12.14)}$$

$$j\omega$$

$$A_n = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.458 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \mid 0]$$

Matlab lqe

$$G^T = \begin{bmatrix} G_1^T & G_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.174 & 19.60 & 4.823 & -17.67 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 0.876 & 0.1529 \end{bmatrix}$$

$$A - Bk - G_1C = \dots = \begin{bmatrix} -7.174 & 1 & 0 \\ -19.06 & 0 & 4.438 \\ -64.82 & -29.59 & -27.06 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\theta} \\ \Delta \hat{\omega} \\ \Delta \hat{i} \\ \hat{u}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.174 & 1 & 0 & 0 \\ -19.06 & 0 & 4.438 & 0 \\ -64.82 & -29.59 & -27.06 & 0 \\ -17.67 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\theta} \\ \Delta \hat{\omega} \\ \Delta \hat{i} \\ \hat{u}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.174 \\ 19.06 \\ 4.823 \\ -17.76 \end{bmatrix} \Delta y$$

$$u = \begin{bmatrix} -3 & -0.8796 & -0.1529 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\theta} \\ \Delta \hat{\omega} \\ \Delta \hat{i} \\ \hat{u}^* \end{bmatrix}$$

$$\frac{u(s)}{\Delta y(s)} = \frac{-52.69(s + 3.958 \pm j5.494)(s + 21.92)}{s(s + 5.971 \pm j6.531)(s + 22.29)}$$

$$\Delta y = \theta - \theta_d = -e$$

$$\frac{u(s)}{e(s)} = -\frac{u(s)}{\Delta y(s)}$$

$$u = \hat{u}^* - k \Delta \hat{x}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Delta \hat{x} = (A - Bk - G_1C) \Delta \hat{x} + G_1 \Delta y \\ \frac{d}{dt} \hat{u}^* = -G_2C \Delta \hat{x} + G_2 \Delta y \end{cases} \quad (-)$$

$$u = \hat{u}^* - k \Delta \hat{x}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x} \\ \frac{\Delta \hat{x}}{u^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - Bk - G_1C & 0 \\ -G_2C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x} \\ \frac{\Delta \hat{x}}{u^*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \Delta y \quad (-)$$

$$u = \begin{bmatrix} -k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x} \\ \frac{\Delta \hat{x}}{u^*} \end{bmatrix}$$

).

A

n

(r 0

$$1/s \quad r \quad r \quad (A - Bk - G_1C)$$

مثال (٧-٥) موتور DC و ضد هوائی:

DC

$$\pm 0.05 \text{ rad} \quad \theta \quad \pm 0.5$$

پاسخ:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \frac{\Delta x}{u^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \frac{\Delta x}{u^*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \frac{\Delta x}{u^*} \end{bmatrix}$$

$$W = \text{diag}(0 \quad 0 \quad 0 \quad (0.5)^2), \quad V = (0.03)^2$$

٧-٨) جمع بندی

مسائل

٧-١)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$-3 \pm j\sqrt{3}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}(0) = 0$$

٧-٢)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

٧-٣) مبدل حرارتی

(-)

$$\Delta T_{c3}$$

$$\Delta F_c, \Delta F_H, \Delta T_{c0} = \Delta T_{H0} = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$-1.1, -1, -0.8 \pm j0.8, -1 \pm j$$

(ب)

$$\Delta T_{c0}(t) = \Delta T_{H0}(t) = 0, \Delta F_H(t) = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}, \Delta F_c(t) = -0.01 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Delta T_{c1}(t) = \Delta T_{c2}(t) = \Delta T_{c3}(0) = 7^\circ \text{C}, \Delta T_{H1}(0) = \Delta T_{H2}(0) = \Delta T_{H3}(0) = -10^\circ \text{C}$$

$$\Delta F_H(t), \Delta F_c(t), \Delta F_{c3}(t)$$

$$\Delta C_{A0}, \Delta Q, \Delta T$$

(

$$\text{٦-٤) راکتور شیمیائی}$$

$$Ae^{-0.3t} \qquad \Delta C_{A0}(t)$$

$$(-)$$

$$\Delta C_{A0}, \Delta C_{A0}(t) = 0.01e^{-0.3t}$$

$$\text{٧-٧)}$$

$$\dot{x} = ax + u + w$$

$$y = x + v$$

$$V, W \qquad \text{a}$$

$$)$$

$$\hat{x}/y \qquad (, \qquad a, V > 0, W \geq 0$$

$$\text{٧-٨)}$$

$$x(t)$$

$$\dot{x} = z$$

$$\dot{z} = w$$

$$y = x + v$$

$$V > 0, W = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w_0^2 \end{bmatrix} \qquad x(t) \qquad z(t)$$

$$\hat{x}/y$$

$$V, w_0$$

$$\text{٧-٩)}$$

$$\text{٧-٤) مبدل حرارتی}$$

$$\Delta F_c$$

$$\Delta F_c(t) = A + Be^{-t}$$

$$\Delta F_c(t) \qquad A, B$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z$$

$$\Delta F_c(t) = z_1 + z_2$$

$$-0.9, -0.8$$

$$\Delta F_c \qquad z_2 = 0.01, z_1 = -0.01$$

$$\text{٧-٥) راکتور شیمیائی}$$

$$(-)$$

$$\Delta F = \Delta T_0 = 0 \qquad \Delta C_{A0}, \Delta Q, \Delta T \qquad \text{الف)}$$

$$\Delta C_C, \Delta C_B$$

$$\Delta \dot{T}, \Delta \dot{C}_A \qquad (-) \qquad \text{ب)}$$

$$\Delta T \qquad \Delta Q$$

$$\Delta C_{A0}$$

$$\Delta C_A, \Delta T \qquad \text{ج)}$$

$$-0.8 \pm j0.8$$

$$\text{د)}$$

$$\Delta Q(t) = 10^4 \, J / \text{min}, \, \Delta C_{A0}(t) = 0.01 \, \text{Kg}, \\ \Delta C_A(0) = 0.5 \text{Kg moles/m}^3, \Delta T(0) = -10^0 \, C$$

(ج) ω_2

۷-۱۱) کنترل سرعت غلطک

(-)

$\pm v_0$

$10^5 \delta(t)$

T_0

$\omega_2, \omega_1, \omega_0$

(الف)

$$V = \text{diag} \begin{bmatrix} v_0^2 & v_0^2 & v_0^2 \end{bmatrix}, v_0 = 1.0 \text{ rad/sec}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10^{-4} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T 10^{10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10^{-4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$T_0(t) = 10^5 \delta(t), \omega_1(0) = \omega_2(0) = 66.68 \text{ rad/sec}, \omega_0(0) = 4.67 \text{ rad/sec}$$

$$\Delta_1(0) = \Delta_2(0) = 0, u_1(t) = u_2(t) = 400v$$

$$v_0 = 0.01 \text{ rad/sec}, v_0 = 0.1 \text{ rad/sec}$$

(ج)

۷-۱۲) پاندول دوتائی معکوس

(-)

x, θ_2, θ_1

$$\ell_2 = 0.5 \text{ m}, \ell_1 = 1 \text{ m}$$

$$\pm 0.001^{\text{m}}, \pm 0.001^{\text{rad}}, \pm 0.001^{\text{rad}}$$

w_0

$$W = \text{diag}(w_0^2, w_0^2)$$

w_0

(A-GC)

0.5

-2

(الف)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = x_1$$

$x(0)$

ω

$y(t)$

$$V > 0, W = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب)

V, W

$\hat{x}/y$

۷-۱۰) موتور DC و هارمونیک درایو

(-)

DC

$$\pm 0.005 A, \pm 0.05^{\text{rad/s}}, \pm 0.001^{\text{rad}}$$

i, ω_2, θ_2

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \\ 0 \end{bmatrix}$$

i, ω_2, θ_2

(الف)

$$V = \text{diag} \begin{bmatrix} 0.001^2 & 0.05^2 & 0.005^2 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w_0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w_0 & 0 \end{bmatrix}, w_0 = 5$$

$$w(t) = 5\delta(t)$$

(ب)

(ب) θ,x

$-10\pm j10$

(ج) $\theta(0)=0.5^{\text{rad}},F=0$

(۷-۱۷) بندباز

ϕ,θ

$-20\pm j20$

(۷-۱۸) پاندول دوتائی معکوس

$\ell_2=0.5^{\text{m}},\ell_1=1^{\text{m}}$

θ_2,θ_1,x

$v_0\qquad V=v^2\cdot I,\ W=I$

-2

(۷-۱۹) Maglev

(-)

$\Delta S_{G2},\Delta S_{G1},\Delta S_{L2},\Delta S_{L1}$

$,-300\pm j300$

(ب)

$\Delta z(0)=1,\Delta \theta(0)=1,\Delta y(0)=1$

(۷-۲۰) Maglev

ΔS_{L1}

	:

(۷-۱۳) - ()

-2

(۷-۱۴) -

$y=x_1+x_2$

(الف) $y=z_1,z=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

$T^{-1}\qquad T^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & x \end{bmatrix}\qquad x=Tz$

$y=z_1\qquad T$

(ب) T

$\hat{z}_2,z_1\qquad -4$

$\hat{x}_2,\hat{x}_1$

(۷-۱۵) موتور DC و هارمونیک درایو

(-) DC

(الف) $\theta_2\qquad -10\pm j10$

$-200\pm j200$

(ب) $\omega_2,i,\theta_2\qquad -10\pm j10$

() .

(ج)

$v=2V,\ \omega_2(0)=5\text{ rad/sec}$

(۷-۱۶) جرثقیل

(-)

(الف) x

$-10\pm j10,-10$

$$\begin{array}{l} u=\hat{u}^*+k^T\hat{x} \\ e=y_d-y=-\Delta y \end{array} \quad \frac{u}{e} \quad ($$

۷-۲۴) موتور DC و هارمونیک درایو

$$\begin{array}{l} \text{DC} \\ (-) \end{array} \quad \begin{array}{l} (-) \end{array}$$

$$\theta_2=\theta_d \quad v$$

$$\begin{array}{l} i,\omega_2,\theta_2 \\ \Delta v,\Delta i,\Delta \omega_2,\Delta \theta_2 \\ \theta_2 \end{array}$$

(الف

$$e=\theta_d-\theta_2 \quad v=H_1e+H_2\omega+H_3i \quad (ب$$

$$H_3,H_2,H_1$$

$$\theta_d=1^{\text{rad}} \quad (ج$$

▪

▪

۷-۲۵) موتور DC و هارمونیک درایو

$$(-)$$

$$(-)$$

$$\theta_2=\theta_d$$

(الف

(ب

$$.(\quad) \quad (-)$$

(ج

الف) Maglev

$$-300,-300\pm j300$$

$$\Delta S_{G2},\Delta S_{G1},\Delta S_{L2}$$

(ب

$$\Delta S_{L1}$$

(ج

۷-۲۱)

الف)

$$\frac{u}{y} \quad (ب$$

۷-۲۲)

۷-۲۳)

$$u^*$$

$$u^*$$

$$\Delta x$$

$$\Delta x,u^*$$

(الف

$$(-)$$

(ب

$$\Delta \dot{Q} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\Delta Q^*, \Delta C_A \quad \Delta T \quad (b)$$

$$\Delta Q = \Delta \hat{Q}^* - k \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta \hat{C}_A \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta T_d} \quad (5)$$

$40^\circ K, 20^\circ K, 10^\circ K \quad \Delta T$

٧-٢٩) جرثقیل

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = x_d \quad \text{(الف)}$$

(-) (-) (ب)

$$x_d = 5m \quad (7)$$

$$x_d = 1m \quad (5)$$

۷-۳۰) بندباز

(-) (-) (الف)

(ب)

(-)

۷-۲۶) کنترل سرعت غلطک

(-)

(-)

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_d^* & \text{(الف)} \\ \omega_2, \omega_1 & \quad \omega_0 & R/r \\ \omega_1^* &= \omega_2^* = (R/r)\omega_0^* \end{aligned}$$

(ب)

$$\omega_d(t)$$

$$\omega_d(t) = 25 - 25e^{-t/\tau} \quad (\tau = 10^{\text{sec}})$$

۷-۲۷) مبدل حرارتی

(-)

$$\Delta F_H^* \quad (-)$$

$$\Delta T_{c3}^* \quad , \quad \Delta \dot{F}_H^* = 0 \quad (\text{الف})$$

$$(-) \quad \Delta F_H^*$$

-5

$$k \quad \Delta F_H = \Delta F_H^* - k \Delta \hat{x} \quad (\text{ب})$$

$$\Delta F_H / e \quad . \quad (-)$$

$$e = \Delta T_{c3d} - \Delta T_{c3}$$

$$0.01 \text{ m}^3/\text{s} \quad \Delta F_c \quad \Delta T_{e3}(t) \quad (\tau$$

$$\Delta T_{c3d} = 5^{\circ}C, \Delta F_c = 0.01m(t)$$

(۷-۲۸) راکتور شیمیائی

(-)

مراجع

- [1] Anderson, Brian D. O. and John B. Moore, *Optimal control: linear quadratic methods*, Prentice Hall, c1990.
- [2] Bélanger, Pierre., *Control engineering : a modern approach*, Saunders College Pub., c1995.
- [3] Boyd, Stephen P. and Craig H. Barratt., *Linear controller design : limits of performance*, Prentice Hall, c1991.
- [4] Bryson, Arthur E., *Applied linear optimal control : examples and algorithms*, Cambridge University Press, 2002.
- [5] Chen, Chi-Tsong., *Linear system theory and design*, Oxford University Press, c1999.
- [6] Hager, William W. and Panos M. Pardalos, *Optimal control: theory, algorithms, and applications*, Kluwer Academic Pubs., c1998.
- [7] Kailath, Thomas., *Linear systems*, Prentice-Hall, c1980.
- [8] Kamen, Edward W. and J.K. Su, *Introduction to optimal estimation*, Springer, c1999.
- [9] Shinnars, Stanley M., *Modern control system theory and design*, 2nd ed., J. Wiley, c1998.
- [10] Tewari, Ashish., *Modern control design with MATLAB and SIMULINK*, John Wiley, c2002.
- [11] Zarchan, Paul and Howard Musoff, *Fundamentals of Kalman filtering : a practical approach*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, c2000.
- [12]

٣١-٧ پاندول دوتائی معکوس

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right) \\ & \theta_1(0) = 0.1 \text{rad}, \theta_2(0) = -0.1 \text{rad} \\ & \omega_1(0) = \omega_2(0) = x(0) = v(0) = 0 \end{aligned}$$

Maglev (٣٢-٧)

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} z \\ \theta \end{array} \right) \\ & \text{الف) } 1) \Delta z(0) = 1 \quad 2) \Delta \theta(0) = 1 \quad 3) \Delta y(0) = 1 \end{aligned}$$

ب)

Maglev (٣٣-٧)

$$\begin{aligned} & u_{L1}, u_{G2}, u_{G1} \\ & \Delta \dot{u}_{L1} = \Delta \dot{u}_{L2} = \Delta \dot{u}_{G2} = 0 \end{aligned} \quad \text{الف)}$$

$$-250 \pm j250, -300 \pm j300, -300$$

$$\left(\begin{array}{c} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} z \\ \theta \end{array} \right) \quad \text{ب)}$$

$$\left(\begin{array}{c} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} z \\ \theta \end{array} \right) \quad \text{ج)}$$

د)

$$s = 0$$