ضميمة ۱

مقدمه اي بر
جبر ماتريسها

ضميمۀ ۱: مقدمه ای بر جبر ماتریسها

A–۱) تعاریف

در بسياري از كاربردهاي مهندسي از آرايه هاي عددي و تابعي به صورت زير استفاده مي شـود كه به ماتريس مشهور است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (\text{۱-A})$$

اعداد a_{ij} را عناصر ماتريس مي ناميم كه در آن انديس i مربوط به سطر و انديس j مربوطه بـه ستون ماتريس A مي باشد. درجه مـاتريس فـوق n*m بـوده درصـوتي كـه m=n باشـد بـه آن ماتريس مربعي اطلاق مي شود. ماتريسي كه تنها از يک ستون اعداد تشكيل شده باشد به بردار ستوني مشهور است.

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad (\text{۲-A})$$

به همين ترتيب بردار سطري به فرم زير تعريف مي شود.

$$z=\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix} \qquad (\text{۳-A})$$

همچنين ماتريسي كه تنها برروي قطر اصلي خود عناصر غير صفر داشته باشد مـاتريس قطـري ناميده مي شود.

$$B=\operatorname{diag}(b_1,b_2,\ldots,b_n)=\begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \qquad (\text{٤-A})$$

ماتريس قطري كه برروي قطر اصلي كليه عناصر آن برابر يک باشد را ماتريس واحد ناميده و بـا I نمايش مي دهيم.

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\text{۵-A})$$

همچنين ماتريسي كه در آن $a_{ij}=a_{ji}$ باشد، ماتريس متقارن ناميده مي شود. به عنوان مثـال ماتريس زير متقارن است.

$$H=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

– مزدوج ماتريس

مزدوج يک ماتريس را به اينصورت تعريف مي كنيم كه عناصـر آن مـزدوج عناصـر مـاتريس A باشد. اگر ماتريس مزدوج را با $\bar{A}$ نشان دهيد داريم $\bar{A}=\left[\bar{a}_{ij}\right]$.

به عنوان مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1+j & -1-j & -1+j2 \\ -1+j & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1-j & -1+j & -1-j2 \\ -1-j & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

– ترانهاده ماتريس

اگر عناصر سطر و ستون يک ماتريس را جابجا كنيم به ماتريس ترانهـاده خـواهيم رسـيد. اگـر ماتريس ترانهاده را با A^T نشان دهيم: $A^T=\left[a_{ji}\right]$. به عنوان مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow A^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

دقت كنيد كه

$$(A^T)^T=A \qquad (\text{٦-A})$$

و همچنين

$$(A+B)^T=A^T+B^T$$
$$(AB)^T=B^TA^T \qquad (\text{۷-A})$$

– ماتريس ترانهادهٔ مزدوج[1]

ماتريس ترانهادة مزدوج از انجـام عمليـات مـزدوج گيـري و ترانهـاده نمـودن مـاتريس بدسـت مي آيد. اگر ترانهاده مزدوج يك ماتريس را با A^* نمايش دهيم، داريم:

$$A^* = \overline{A}^T = \left[\overline{a}_{ji}\right] \qquad (\text{A-۸})$$

به صورت مشابه با بالا، مي توان نشان داد.

$$(A+B)^* = A^* + B^*$$
$$(A\cdot B)^* = B^*\cdot A^* \qquad (\text{A-۹})$$

همچنين اگر $c\in\mathbb{C}$ باشد

$$(cA)^* = \overline{c}A^* \qquad (\text{A-۱۰})$$

– ماتريس متقارن و پادمتقارن

ماتريس A متقارن است اگر $A^T = A$ يا $a_{ij} = a_{ji}$

ماتريس A پادمتقارن است اگر $A^T = -A$ يا $a_{ij} = -a_{ji}$

براي هر ماتريس A مي توان نشان داد $A + A^T$ متقارن و ماتريس $A - A^T$ پادمتقارن اسـت به عنوان مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{bmatrix}$$

متقارن است و

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

[1] Conjugate transpose

پادمتقارن است. دقت كنيد به ازاي هـر مـاتريس A (حتـي غيرمربعـي) مـاتريس $B = A^T A$ مربعي و متقارن است. همچنين براي هر ماتريس متقارن اگر معكوس آن نيز وجود داشته باشد ماتريس معكوس نيز متقارن است. براي نشان دادن اين خصوصيت توجه كنيد كه :

$$BB^{-1} = I \qquad (\text{A-۱۱})$$

باترانهاده كردن دو طرف:

$$(B^{-1})^T B^T = I^T \qquad (\text{A-۱۲})$$

با فرض متقارن بودن ماتريس B داريم: $B^T = B$، لذا:

$$(B^{-1})^T B^T = I = (B^{-1})B \qquad (\text{A-۱۳})$$

بديت ترتيب:

$$(B^{-1})^T = B^{-1} \qquad (\text{A-۱٤})$$

و معكوس ماتريس B نيز متقارن است.

– ماتريسهاي متعامد[1]

ماتريس A را متعامد مي ناميم، درصورتي كه حقيقي بوده و در رابطة زير صدق كند.

$$A^T A = AA^T = I \qquad (\text{A-۱۵})$$

با توجه به تعريف فوق و رابطة معكوس ماتريس $(A^{-1}A = I)$ اين شرط تضمين مي كند كـه A ناويژه بوده و $|A| = \pm 1$ مي باشد. همچنين براي ماتريس متعامد خواهيم داشت.

$$A^{-1} = A^T \qquad (\text{A-۱٦})$$

مثالهائي از ماتريس متعامد را مي توان به صورت زير بيان نمود.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر ماتريسهاي B,A متعامد باشند ماتريسهاي AB, A^T, A^{-1} نيز متعامد خواهند بود.

– ماتريسهاي هرميتين[2] و پاد هرميتين[3]

ماتريسي كه از عناصر مختلط تشكيل شده باشد را ماتريس مختلط مي ناميم. در اينحالت اگر

[1] Orthogonal
[2] Hermitian
[3] Skew-Hermitian

$$A^* = A \text{ یا } a_{ij} = \bar{a}_{ji} \qquad (۱۷\text{-A})$$

برقرار باشد ماتریس را هرمیتین مي نامیم. ماتریس هرمیتین بایستي مربعي بوده و عناصر قطر اصلي آن حقیقي باشند.

به عنوان مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2+j3 & j5 \\ 2-j3 & 2 & 2+j \\ -j5 & 2-j & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس A هرمیتین مي باشد. هر ماتریس هرمیتین را به صورت $A = B + jC$ مي توان نوشت که در آن ماتریسهاي C,B حقیقي بوده و $B = B^T, C = -C^T$

به عنوان مثال براي ماتریس فوق:

$$A = B + jC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

دقت کنید که معکوس یک ماتریس هرمیتین نیز خود هرمیتین باقي مي ماند.

$$\left(A^{-1}\right) = \left(A^{-1}\right)^* \qquad (۱۸\text{-A})$$

همچنین هر ماتریس مربعي را مي توان به صورت یکتا از ترکیب دو ماتریس هرمیتین بدست آورد:

$$A = G + jH$$
$$G = \frac{1}{2}(A + A^*), H = \frac{1}{2j}(A - A^*) \qquad (۱۹\text{-A})$$

که هرمیتین بودن ماتریسها را به صورت زیر مي توان نشان داد.

$$G^* = \frac{1}{2}(A^* + A) = G$$
$$H^* = -\frac{1}{2j}(A^* - A) = H \qquad (۲۰\text{-A})$$

همچنین اگر دو ماتریس B,A هرمیتین باشند ماتریسهاي $BA + AB, A - B, A + B$ نیز هرمیتین مي باشند و نهایتاً مي توان نشان داد که دترمینان ماتریس هرمیتین حتماً حقیقي است و

$$|A| = |A^*| = |\bar{A}^T| = |\bar{A}| \qquad (۲۱\text{-A})$$

اگر ماتریس A خصوصیت A*=-A را ارضاء کند آنرا ماتریس پاد- هرمیتین مي نامیم. به عنوان مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 5j & -2+j3 & -4+j6 \\ 2+j3 & j4 & -2+j2 \\ 4+j6 & 2+j2 & j \end{bmatrix}$$

ماتریس پاد- هرمیتین مي باشد. همچنین هر ماتریس پاد-هرمیتین را مي توان به صورت $A = B + jC$ تجزیه نمود که در آن ماتریسهاي C,B حقیقي بوده و

$$B = -B^T, C = C^T \qquad (۲۲\text{-A})$$

به عنوان مثال در مورد ماتریس فوق داریم:

$$A = B + jC = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

– ماتریس واحدي[1]

درحالت عمومي که عناصر ماتریس A مختلط مي باشند، ماتریسي را واحدي مي نامیم که در رابطه زیر صدق کند.

$$A^{-1} = A^* \qquad (۲۳\text{-A})$$

یا

$$AA^* = A^*A = I \qquad (۲٤\text{-A})$$

ماتریسهاي متعامد رابطة $AA^* = A^*A = I$ را ارضاء نموده، لذا ماتریس واحدي مي باشند. دقت کنید اگر ماتریس A واحدي باشد ماتریس A^{-1} نیز واحدي مي باشد و همچنین اگر A,B واحدي باشند AB نیز واحدي مي ماند.

– ماتریس نرمال[2]

[1] Unitary matrix
[2] Normal matrix

اگر خاصيت جابجائي ضرب بين يک ماتريس و ماتريس مزدوج ترانهاده اش برقرار باشد، بـه آن ماتريس، نرمال مي گوييم. در اينصورت:

در مورد ماتريس مختلط $AA^* = A^* A$

در مورد ماتريس حقيقي $AA^T = A^T A$

درصورتي که ماتريس A نرمال بوده و ماتريس U واحدي باشـد حاصـل ضـرب $U^{-1}AU$ نيـز يک ماتريس نرمال خواهد بود.

$$\begin{aligned}(U^{-1}AU)(U^{-1}AU)^* &= U^{-1}AU \cdot U^* A^* (U^{-1})^* \\ &= U^{-1}AA^*(U^{-1})^* \\ &= U^* A^* AU^* \\ &= U^* A^* (U^{-1})^* U^{-1}AU \\ &= (U^{-1}AU)^* (U^{-1}AU)\end{aligned}$$

ماتريسي نرمال خواهد بود که يـا مـاتريس حقيقـي متقـارن باشـد، يـا هـرميتين، يـا حقيقـي پادمتقارن، يا پاد- هرميتين، يا واحدي و يا يک ماتريس متعامد باشد.

– جمع بندی

در مورد تعاريف بيان شده مي توان جدول زير را به صورت خلاصه بيان نمود:

ماتريس A متقارن است.	$A^T = A$
ماتريس A پاد- متقارن است.	$A^T = -A$
ماتريس A متعامد است.	$AA^T = A^T A = I$
ماتريس A هرميتين است.	$A^* = A$
ماتريس A پاد- هرميتين است.	$A^* = -A$
ماتريس A واحدي است.	$AA^* = A^* A = I$
ماتريس A متقارن است.	$AA^* = A^* A$ يا $AA^T = A^T A$

A–۲) دترمينانها

A–۲–۱) تعيين دترمينان يک ماتريس

دترمينان يک ماتريس ۲*۲ را به صورت زير تعريف مي کنيم.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (\text{A-۲۵})$$

براي درجات بالاتر ماتريس مربعي A به شرح زير عمل مي کنيم.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (\text{A-۲۶})$$

بدين ترتيب با حذف سطر و ستون متناظر دترمينان درجه بالاتر را به درجات پايين تـر تبـديل مي کنيم. در نتيجه:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \qquad (\text{A-۲۷})$$

A–۲–۲) خواص دترمينانها

براي دترمينان يک ماتريس n*n خصوصيات زير برقرار است.

۱- اگر دو سطر (يا دو ستون) ماتريس A را جابجا کنيم تنها در علامت دترمينان تغيير حاصـل مي شود.

۲- دترمينان ماتريس درصورت ضرب کردن يک عدد اسکالر در يک سطر (يا ستون) و جمع آن با سطر (يا ستون) ديگر تغيير نمي کند.

۳- اگر ماتريس A داراي دو سـطر (يـا دو سـتون) مسـاوي باشـد دترمينـان مـاتريس A صـفر مي شود.

۴- براي ماتريس $A_{n\times n}$ داريم.

$$|A^T| = |A|; \qquad |A^*| = |\overline{A}| \qquad (\text{A-۲۸})$$

۵- دترمينان ضرب دو ماتريس برابر ضرب دترمينانهاي دو ماتريس مي باشد.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |B \cdot A| \qquad (\text{A-۲۹})$$

۶- اگر يک سطر (يا ستون) را در يک عدد اسکالر ضرب کنيم، دترمينان نيز در آن عدد ضـرب مي شود.

۷- اگر يک عدد اسکالر را در کلية عناصر ماتريس n*n ضـرب کنـيم دترمينـان در k^n ضـرب مي شود.

$$|kA| = k^n |A| \tag{A-۳۰}$$

۸- اگر مقادير ويژه يک ماتريس A برابر $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ باشد، در اينصورت

$$|A| = \lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 ..., \lambda_n \tag{A-۳۱}$$

۹- با درنظر گرفتن ابعاد مناسب براي ماتريسهاي زير به صورتي کـه بتـوان مـاتريس نتيجـه را دسته بندي نمود روابط زير برقرار است.

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & D \end{array}\right| = |A|.|D| \tag{A-۳۲}$$

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right| = \begin{cases} |A||D - CA^{-1}B| & \text{if } |A| \neq 0 \\ |D||D - BD^{-1}C| & \text{if } |D| \neq 0 \end{cases} \tag{A-۳۳}$$

۱۰- براي ماتريسهاي $B_{m\times n}, A_{m\times n}$ داريم.

$$|I_n + AB| = |\mathrm{I_m} + BA| \tag{A-۳۴}$$

دقت کنيد درصورتي که m=1,n>1 باشد.

$$|I_n + AB| = 1 + BA \tag{A-۳۵}$$

و اين روش محاسبة سريع دترمينان حاصلضرب دو ماتريس مي باشد.

A–۳) معکوس ماتريسها

A–۳–۱) ماتريسهای ويژه[۱] و ناويژه[۲]

ماتريس مربعي A را ناويژه مي ناميم، اگر بتوان ماتريس B را چنان يافت کـه BA=AB=I. اگـر ماتريس B وجود داشته باشد به آن معکـوس مـاتريس A اطـلاق شـده و بـا A^{-1} نشـان داده مي شود. اگر ماتريس A ناويژه باشد $|A| \neq 0$. اگر ماتريس A^{-1} وجود نداشته باشد، مـاتريس A را ويژه مي ناميم.

اگر ماتريسهاي A,B ناويژه باشند.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{A-۳۶}$$

---

[1] Singular
[2] Nonsingular

همچنين

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \tag{A-۳۷}$$

و يا

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \tag{A-۳۸}$$

A–۳–۲) خواص معکوس ماتريس

معکوس يک ماتريس داراي خصوصيات زير است.

۱- اگر $k \neq 0$ يک عدد اسکالر باشد و ماتريس $A_{n\times n}$ باشد داريم:

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \tag{A-۳۹}$$

۲- دترمينان معکوس يك ماتريس برابر عکس دترمينان ماتريس مي باشد.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \tag{A-۴۰}$$

اين رابطه براحتي از تعريف معکوس ماتريس بدست مي آيد.

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |I| = 1 \tag{A-۴۱}$$

۳- لم معکوس ماتريس

ماتريسهاي $D_{m\times m}, C_{m\times n}, B_{n\times m}, A_{n\times n}$ را در نظر بگيريد، در اينصورت

$$(A + BDC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \tag{A-۴۲}$$

درحالت خاصي که m=1, D=1 باشد مي توان رابطه فوق را به صورت زير ساده نمود.

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}BCA^{-1}}{1 + CA^{-1}B} \tag{A-۴۳}$$

۴- معکوس ماتريس ترکيبي زير را مي توان از رابطه زير تعيين نمود.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \tag{A-۴۴}$$

به شرطي که: $|A| \neq 0, |D - CA^{-1}B| \neq 0$

همچنين مي توان از رابطه زير براي تعيين ماتريس ترکيبي استفاده نمود:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} (A^{-1} - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - B^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A - BD^{-1}C)BD^{-1} + D^{-1} \end{bmatrix} \tag{A-۴۵}$$

به شرطي که: $|D| \neq 0, |A - BD^{-1}C| \neq 0$

درحالت خاصي که C=0 يا D=0 باشد فرمولهاي ساده تر زير بدست مي آيد.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} \qquad (\text{A-}٤٦)$$

۵-براي محاسبة معکوس ماتريس مي توان از قانون کرامر[1] استفاده نمود که در آن:

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)} \qquad (\text{A-}٤٧)$$

صورت عبارت فوق $\operatorname{adj}(A)$ ماتريسي است کـه هـر عنصـر ترانهـادة آن از دترمينـان مـاتريس متناظر با حذف سطر و ستون i, j بدست آمده و به عنوان مثال براي يک ماتريس ۲*۲ داريم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} a_{22} & (-1)^{1+2} a_{21} \\ (-1)^{2+1} a_{12} & (-1)^{2+2} a_{11} \end{bmatrix}^T \qquad (\text{A-}٤٨)$$

و به عنوان مثال براي ماتريس ۳*۳ داريم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$
$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix} \qquad (\text{A-}٤٩)$$

لذا به عنوان مثال معکوس زير $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

برابر است با:

[1] Cramer's Rule

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det A} = \frac{1}{(-7)} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & -5 \end{bmatrix}^T$$
$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -3 & 5 & -11 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

A–۴) قواعد عمليات ماتريسی

A–۴–۱) ضرب يک ماتريس در عدد

اگر عددي را در يک ماتريس ضرب کنيم بـدين معناسـت کـه در تـک تـک عناصـر آن ضـرب مي نماييم.

$$A = \left[a_{ij}\right] \to kA = \left[ka_{ij}\right] \qquad (\text{A-}۵۰)$$

A–۴–۲) ضرب دو ماتريس

ضرب دو ماتريس تنها درصورتي امکان پذير است که ماتريس $A_{n\times m}$ و ماتريس $B_{m\times r}$ بـوده و به عبارت ديگر تعداد ستونهاي ماتريس A برابر تعداد سطرهاي ماتريس B باشد. در اينصورت:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}, B = \left[b_{ij}\right]_{m\times r}$$
$$A \cdot B = C, \quad C = \left[c_{ij}\right]_{n\times r} \qquad (\text{A-}۵۱)$$

که در آن

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \qquad (\text{A-}۵۲)$$

لذا درحالت عمومي ضرب ماتريسها خاصيت جابجائي نداشته و $AB \neq BA$.

همچنين ممکن است دو ماتريس غير صفر پيدا نمود $A \neq 0, B \neq 0$ که حاصـل ضـرب آنهـا برابر صفر شود $AB = 0$ به عنوان مثال:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{bmatrix}\neq 0,\quad B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\neq 0$$
$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{۵۳-A}$$

لذا $A\cdot B=0$ درحالت عمـومي نتيجـه نمـي دهـد کـه $A=0$ يـا $B=0$ بلکـه درحالـت عمومي درصورتيکه $A\cdot B=0$ باشد يکي از حالات زير برقرار است.

۱) $A=0$

۲) $B=0$

۳) هر دو ماتريس A,B ويژه مي باشند.

A-۴-۳) مشتق گيری از ماتريسها

عمليات ديفرانسيلي اعمال شده به هر ماتريس را بايد برروي تک تک عناصر آن اعمال نمود.

$$\frac{d}{dt}A(t)=\left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right] \tag{٥٤-A}$$

همچنين

$$\int A(t)dt=\left[\int a_{ij}(t)dt\right] \tag{٥٥-A}$$

حال اگر عناصر ماتريسهاي B,A تابعي از زمان باشند.

$$\frac{d}{dt}(A+B)=\frac{d}{dt}A+\frac{d}{dt}B$$
$$\frac{d}{dt}(AB)=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt} \tag{٥٦-A}$$

همچنين اگر k(t) يک تابع اسکالر باشد.

$$\frac{d}{dt}\left[Ak(t)\right]=\frac{dA}{dt}k(t)+A\frac{dk(t)}{dt} \tag{٥٧-A}$$

همچنين براي انتگرال ماتريسها مشابه با خصوصيت انتگرال جزء به جزء داريم:

$$\int_a^b \frac{dA}{dt}B\ dt=AB\Big|_a^b-\int_a^b A\frac{dB}{dt}\ dt \tag{٥٨-A}$$

براي مشتق گيري از معکوس يک ماتريس رابطه زير برقرار است.

$$\frac{d}{dt}A^{-1}=-A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1} \tag{٥٩-A}$$

چرا که اگر از AA^{-1} مشتق گيري کنيم داريم:

$$\frac{d}{dt}AA^{-1}=\frac{dA}{dt}A^{-1}+A\frac{dA^{-1}}{dt}=\frac{d}{dt}I=0$$
$$\Rightarrow A\frac{dA^{-1}}{dt}=-\frac{dA}{dt}A^{-1} \tag{٦٠-A}$$

يا

$$\frac{dA^{-1}}{dt}=-A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1} \tag{٦١-A}$$

A-۴-۴) مشتق گيری يک تابع اسکالر نسبت به يک بردار

اگر تابع J(x) يک تابع اسکالر نسبت به متغير برداري x باشد در اينصورت:

$$\frac{\partial J}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial J}{\partial x_1}\\ \frac{\partial J}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial J}{\partial x_n}\end{bmatrix};\quad \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 J}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 J}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial x_n\partial x_2}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 J}{\partial x_1\partial x_n} & \frac{\partial^2 J}{\partial x_2\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial x_n^2}\end{bmatrix} \tag{٦٢-A}$$

همچنين قاعده مشتق گيري زنجيره اي براي تابع اسکالر $V\left(x(t)\right)$ به شرح زير برقرار است.

$$\frac{d}{dt}V\left(x(t)\right)=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T\frac{dx}{dt} \tag{٦٣-A}$$

A-۴-۵) ژاکوبين

اگر تابع برداري $f(x)_{m\times 1}$ نسبت به بردار $x_{n\times 1}$ را بخواهيم مشتق گيـري کنـيم يـک مـاتريس $n\times m$ بدست مي آيد که به آن ژاکوبين f نسبت به x گفته مي شود.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix} \quad (٦٤\text{-A})$$

با ترتيبي كه ماتريس ژاكوبين را تعريف نموده ايم مي توان نشان داد.

$$\frac{\partial}{\partial x}Ax=A \quad (٦٥\text{-A})$$

همچنين درصورتي كه $x_{n\times 1}, A_{n\times n}$ حقيقي باشند خواهيم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x}x^T Ax=Ax+A^T x \quad (٦٦\text{-A})$$

همچنين اگر ماتريس A حقيقي و متقارن باشد.

$$\frac{\partial}{\partial x}x^T Ax=2Ax \quad (٦٧\text{-A})$$

درصورتي كه ماتريس A هرميتين باشد.

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}}x^* Ax=Ax \quad (٦٨\text{-A})$$

همچنين براي بردارها و ماتريسهاي حقيقي A, x, y داريم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}x^T Ay&=Ay\\ \frac{\partial}{\partial y}x^T Ay&=A^T x\end{aligned} \quad (٦٩\text{-A})$$

و براي ماتريس مختلط A خواهيم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \overline{x}}x^* Ay&=Ay\\ \frac{\partial}{\partial y}x^* Ay&=A^T\overline{x}\end{aligned} \quad \text{يا} \quad \overline{\frac{\partial}{\partial y}x^* Ay}=A^* x \quad (٧٠\text{-A})$$

ضميمة ۲

مسائل حل شده

ضميمۀ ۲: مسائل حل شده

فصل دوم

۲–۱) نمايش فضاي حالت سيستمي را که به صورت معادلة ديفرانسيل زير بيان شده است را بدست آوريد.

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u$$

پاسخ: همانگونه که بيان شد، نمايش فضاي حالت سيستمها يکتا نبوده و بستگي به انتخاب متغير حالت دارد. با انتخاب متغيرهاي حالت به صورت زير به فرم فضاي حالت نسبتاً ساده اي خواهيم رسيد.

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \end{aligned}$$

خواهيم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \end{aligned}$$

لذا معادلة ديفرانسيل سيستم را به صورت زير مي توان بازنويسي نمود.

$$\dddot{y} = -a_1\ddot{y} - a_2\dot{y} - a_3 y + b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u$$

حال با انتخاب پارامترهاي β_i به صورت زير اين معادله ساده مي شود:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \end{aligned}$$

و مشتق متغير سوم حالت برابر است با

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \dddot{y} - \beta_0\dddot{u} - \beta_1\ddot{u} - \beta_2\dot{u} \\ &= -a_1\ddot{y} - a_2\dot{y} - a_3 y + b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u - \beta_0\dddot{u} - \beta_1\ddot{u} - \beta_2\dot{u} \\ &= -a_1(\ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u) - a_1\beta_0\ddot{u} - a_1\beta_1\dot{u} - a_1\beta_2 u \\ &\quad - a_2(\dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u) - a_2\beta_0\dot{u} - a_2\beta_1 u - a_3(y - \beta_0 u) - a_3\beta_0 u \\ &\quad + b_0\dddot{u} - b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u - \beta_0\dddot{u} - \beta_1\ddot{u} - \beta_2\dot{u} \end{aligned}$$

و با توجه به تعريف متغيرهاي حالت اين عبارت ساده مي شود به :

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -a_1x_3 - a_2x_2 - a_3x_1 + (b_0 - \beta_0)\dddot{u} + (b_1 - \beta_1 - a_1\beta_0)\ddot{u} \\ &\quad + (b_2 - \beta_1 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0)\dot{u} + (b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0)u \\ &= -a_1x_3 - a_2x_2 - a_3x_1 + (b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0)u \end{aligned}$$

لذا

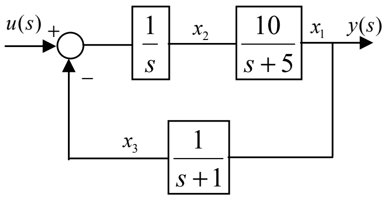
$$\dot{x}_3 = -a_1x_3 - a_2x_2 - a_3x_1 + \beta_3 u$$

لذا فرم فضاي حالت به صورت ماتريسي به شکل زير خواهد بود.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}\mu$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta_0\mu$$

۲–۲) با تعريف متغيرهاي حالت مناسب سيستم زير را به صورت فضاي حالت نمايش دهيد:



پاسخ: خروجي هر جزئي از سيستم فوق را به عنوان يک متغير حالت درنظر مي گيريم، بدين ترتيب داريم:

$$\frac{x_1(s)}{x_2(s)} = \frac{10}{s+5} \quad ; \quad \frac{x_2(s)}{u(s) - x_3(s)} = \frac{1}{s} \quad ; \quad \frac{x_3(s)}{x_1(s)} = \frac{1}{s+1}$$

يا به فرم معادلات ديفرانسيل خواهيم داشت:

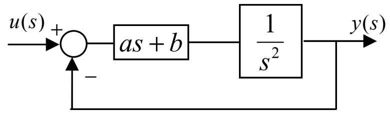
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -5x_1(t) + 10x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -x_3(t) + x_1(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

لذا به صورت ماتريسي نمايش سيستم به فرم زير خواهد بود:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-5 & 10 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

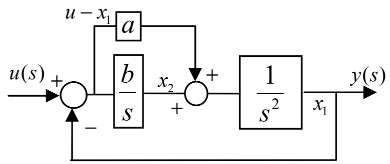
۲-۳) سيستم زير را به صورت فضاي حالت نمايش دهيد:



پاسخ: برخلاف مسئله ۲-۲) يكي از اجزاء سيستم فوق داراي فرم مشتق گير است و لذا مستقيماً نمي توان خروجي آنرا به فرم متغير حالت نمايش داد. اما توجّه كنيد كه سيستم معادل در مدار پيشرو عبارتست از:

$$\frac{as+b}{s^2}=\left(a+\frac{b}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)$$

كه در آن هيچ مشتق گيري مستقيمي ديده نمي شود. حال مطابق شكل زير متغيرهاي حالت را انتخاب مي كنيم.



لذا خواهيم داشت:

$$\frac{x_2}{u-x_1}=\frac{b}{s}$$

$$\frac{x_1}{x_2+a(u-x_1)}=\frac{1}{s}$$

$$y=x_1$$

يا به صورت معادلات ديفرانسيل خواهيم داشت:

$$\dot{x}_2=-bx_1+bu$$

$$\dot{x}_1=-ax_1+x_2+au$$

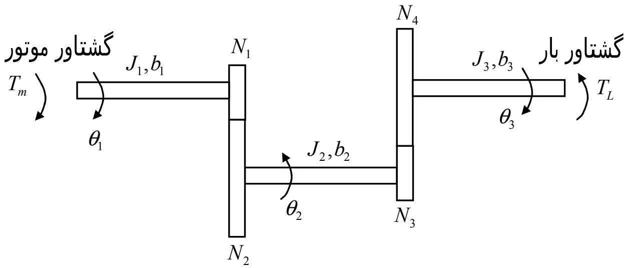
$$y=x_1$$

لذا فرم ماتريسي معادلات حالت سيستم بشكل زير است:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-a & 1\\ -b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

۲-۴) در سيستمهاي انتقال قدرت مكانيكي معمولا از زنجيره اي از چرخ دنده ها مطابق شكل زير استفاده مي شود. با توجه به روابط سينماتيكي چرخدنده ها و با فرض وجود اصطكاك ويسكوز در هر محور با ممان اينرسي J_i معادل b_i معادلة ديناميكي حاكم بر سيستم را تعيين كنيد.



پاسخ: معادلات ديناميكي حاكم را هم با استفاده از روابط نيوتن-اويلر و هم با استفاده از معادلة لاگرانژ مي توان تعيين نمود. دقت كنيد در هر دو حالت تنها سيستم فوق داراي يك درجة آزادي است و روابط سينماتيكي زير بين θ_i ها برقرار است.

$$\frac{\theta_2}{\theta_1}=\frac{N_1}{N_2}\;;\;\frac{\theta_3}{\theta_2}=\frac{N_3}{N_4}\;\Rightarrow\;\frac{\theta_3}{\theta_1}=\frac{N_3}{N_4}\cdot\frac{N_1}{N_2}$$

با استفاده از روش نيوتن اويلر مي توان روابط ديناميكي را نوشت:

$$J_1\ddot{\theta}_1=T_m-T_1-b_1\dot{\theta}_1$$

$$J_2\ddot{\theta}_2=T_2-T_3-b_2\dot{\theta}_2$$

$$J_3\ddot{\theta}_3=T_4-T_L-b_3\dot{\theta}_3$$

که در آن T_i گشتاوري است که بر هر چرخدنده با انديس i وارد مي شود. اما روابط سينماتيکي در اين گشتاور نير صادق است، لذا:

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{N_2}{N_1}\ ;\ \frac{T_4}{T_3}=\frac{N_4}{N_3}$$

با حذف گشتاورهاي داخلي T_i با استفاده از روابط زير:

$$T_2=T_1\frac{N_2}{N_1}\ ;\ T_4=T_3\frac{N_4}{N_3}$$

خواهيم داشت:

$$J_1\ddot{\theta}_1+b_1\dot{\theta}_1+\frac{N_1}{N_2}(J_2\ddot{\theta}_2+b_2\dot{\theta}_2)+\frac{N_1N_3}{N_2N_4}(J_3\ddot{\theta}_3+b_3\dot{\theta}_3+T_L)=T_m$$

حال از روابط سينماتيکي سرعت ها و موقعيتهاي زاويه اي θ_2,θ_3 را نيز از معادلة فوق حذف مي کنيم.

$$\underbrace{\left[J_1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2J_2+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2.\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2J_3\right]}_{J_{eq}}\ddot{\theta}_1$$

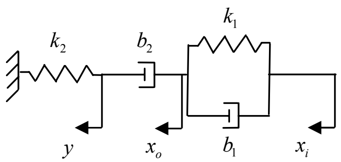
$$+\underbrace{\left[b_1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2b_2+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2.\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2b_3\right]}_{b_{eq}}\dot{\theta}_1+\underbrace{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)\left(\frac{N_3}{N_4}\right)}_{n}T_L=T_m$$

و نهايتاً خواهيم داشت:

$$J_{eq}\ddot{\theta}_1+b_{eq}\dot{\theta}_1+nT_L=T_m$$

همانگونه که مشاهده مي شود درصورتيکه نسبت تبديل جعبه دنده ها بزرگ باشد (>30) با توجه به تاثير توان دوم نسبت دنده در معادلات فوق مشاهده مي شود تاثير b_1,J_1 در معادلة فوق بسيار تضعيف مي شود.

۲-۵) معادلة حرکت سيستم مکانيکي زير را تعيين نمود و با استفاده از رابطة تشابه سيستمهاي مکانيکي و الکتريکي مدار مشابه الکتريکي که داراي معادلة ديناميکي يکساني باشد را تعيين کنيد.



پاسخ: معادلة تعادل نيروئي سيستم فوق عبارتست از:

$$b_1(\dot{x}_i-\dot{x}_0)+k_1(x_i-x_0)=b_2(\dot{x}_0-\dot{y})$$
$$b_2(\dot{x}_0-\dot{y})=k_2y$$

از معادلات فوق لاپلاس مي گيريم:

$$b_1(sx_i-sx_0)+k_1(x_i-x_0)=b_2(sx_0-sy)$$
$$b_2(sx_0-sy)=k_2y$$

از معادلة دوم y را بدست مي آوريم:

$$b_2sx_0=(b_2s+k_2)y$$
$$y=\frac{b_2s}{b_2s+k_2}x_0$$

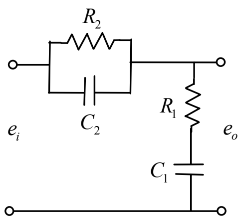
با جايگذاري در معادلة اول خواهيم داشت:

$$(b_1s+k_1)x_i=(b_1s+k_1+b_2s-b_2s\frac{b_2s}{b_2s+k_2})x_0$$

يا فرم ساده شده تابع تبديل:

$$\frac{x_0(s)}{x_i(s)}=\frac{\left(\frac{b_1}{k_1}s+1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s+1\right)}{\left(\frac{b_1}{k_1}s+1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s+1\right)+\frac{b_2}{k_1}s}$$

مدار مشابه الکتريکي بايستي از يک جفت مقاومت و خازن تشکيل شود که مطابق شکل زير به صورت موازي و سري بسته شده اند.

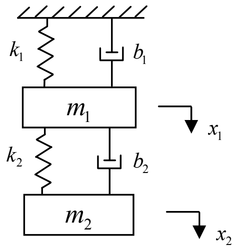


معادلة ديناميکي اين سيستم برابر است با

$$\frac{E_0(s)}{E_1(s)}=\frac{R_1+\frac{1}{C_1s}}{\frac{1}{(1/R_2+C_2S)}+R_1+\frac{1}{C_1s}}$$
$$=\frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)+R_2C_1s}$$

با لحاظ نمودن تشابه ثابت زماني مكانيكي و الكتريكي سيستم در معادله كاملاً مشابه به هم مي باشند.

۲-۶) با تعيين معادلات ديناميكي و حركت سيستم مكانيكي زير مدار مشابه الكتريكي براي سيستم تعيين كنيد.



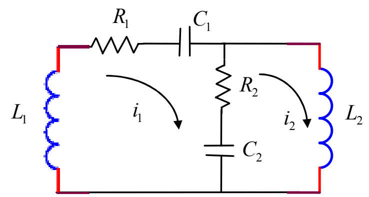
پاسخ: با استفاده از معادلات نيوتن مي توان معادلات حركت سيستم را به صورت زير تعيين نمود:

$$m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + k_1x_1$$
$$+ b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_1 - x_2) = 0$$

لذا مدار مشابه الكتريكي بايستي داراي سلف، خازن و مقاومت باشد و معادلة ديناميكي آن از رابطه اي مشابه رابطه فوق تبعيت نمايد:

$$L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q} + \frac{1}{C_1}q_1 + R_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \frac{1}{C_2}(q_1 - q_2) = 0$$
$$L_2\ddot{q}_2 + R_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + \frac{1}{C_2}(q_2 - q_1) = 0$$

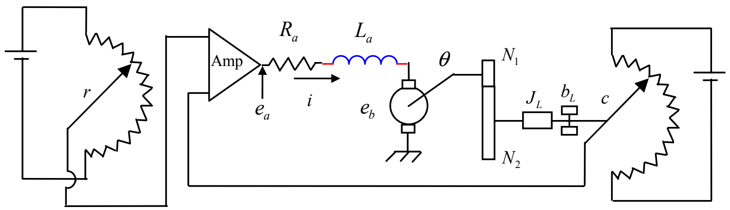
لذا مدار زير مشابه سيستم مكانيكي فوق است.



با جايگذاري $\dot{q}_2 = i_2, \dot{q}_1 = i_1$ به معادلات زير خواهيم رسيد:

$$L_1\frac{di_1}{dt} + R_1i_1 + \frac{1}{C_1}\int e_i dt + R_2(i_1 - i_2) + \frac{1}{C_2}\int(i_1 - i_2)dt = 0$$
$$L_2\frac{di_2}{dt} + R_2(i_2 - i_1) + \frac{1}{C_2}\int(i_2 - i_1)dt = 0$$

۲-۷) تابع تبديل مدار بستة سيستم سرو موقعيت زير را با پارامترهاي داده شده تعيين كنيد. ورودي سيستم را موقعيت ورودي مرجع پتانسيومتر r و خروجي آنرا موقعيت خروجي سرو c درنظر بگيريد.



كه در آن:

r: موقعيت مرجع مطلوب پتانسيومتر	راديان	L_a: اندوكتانس آرميچر	قابل صرفنظر
c: موقعيت محور خروجي سرو	راديان	K: ضريب ثابت گشتاور موتور	$6\times10^{-5}\frac{N.m}{A}$
θ: موقعيت زاويه اي محور موتور	راديان	i_a: جريان آرميچر	Amp
k_1: ضريب بهرة پتانسيومترهاي تعيين موقعيت	$\frac{24}{\pi}\frac{Volts}{rad}$	K_b: ثابت اثر خودالقائي (bmf)	$5.5\times10^{-2}\frac{V.s}{rad}$
k_p: ضريب بهرة تقويت كننده	$10\ V/V$	b_m: ضريب استهلاک ويسكوز موتور	قابل صرفنظر
e_a: ولتاژ آرميچر	V	J_m: ممان اينرسي محور موتور	$10^{-5}Kg.m^2$
e_b: ولتاژ اثر خودالقائي	V	J_L: ممان اينرسي بار	$4.4\times10^{-3}Kg.m^2$
R_a: مقاومت آرميچر	0.2Ω	b_L: ضريب استهلاک بار	$4\times10^{-2}\frac{N.m.s}{rad}$
n: نسبت جعبه دنده	$N_1/N_2=1/10$		

پاسخ: معادلة ديناميكي سيستم را به ترتيب زير تعيين مي كنيم.

رابطة پتانسومتر خطا:

$$E(s) = k_1(R(s) - C(s))$$
$$= 7.64(R(s) - C(s))$$

رابطة تقويت كننده:

$$E_a(s) = k_pE(s) = 10E(s)$$

ممان اينرسي موثر موتور:

$$J = J_m + n^2J_L$$
$$= 10^{-5} + 10^{-2}\times4.4\times10^{-3} = 5.4\times10^{-5}$$

ضريب استهلاک موثر:

$$b = b_m + n^2b_L = 4\times10^{-4}$$

تابع تبدیل موتور:

$$\frac{\theta(s)}{E_0(s)}=\frac{K_m}{s(T_m s+1)}$$

که درآن:

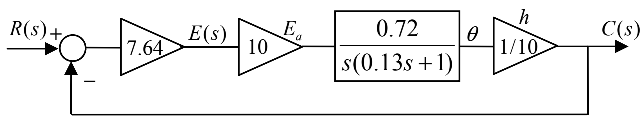
$$K_m=\frac{K}{R_a b+KK_b}=\cdots=0.72$$

$$T_m=\frac{R_a J}{R_a b+KK_b}=\cdots=0.13$$

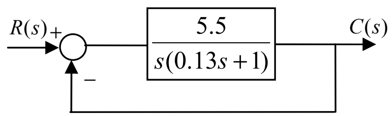
لذا

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)}=\frac{10C(s)}{E_a(s)}=\frac{0.72}{s(0.13s+1)}$$

لذا اجزاء سیستم از شکل زیر تعیین مي شوند.



لذا مدار معادل سیستم به صورت شکل زیر خواهد بود.

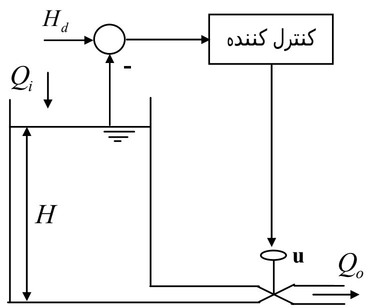


که در آن تابع تبدیل حلقه بسته سیستم برابر است با

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{L(s)}{1+L(s)}=\frac{5.5}{0.13s^2+s+5.5}$$

$$=\frac{42.3}{s^2+7.69s+42.3}$$

۲–۸) در مخزن ذخیرة آب نشان داده شده در شکل زیر با فرض ثابت اریفیس خروجي k=0.01 باشد و دبي حجمي آب از رابطة $Q=K\sqrt{H}$ تبعیت کند، زماني را که ارتفـاع آب در مخـزن نصف مي شود را پیدا کنید، درصورتیکه حجم مخـزن $2\,m^3/s$ و جریـان ورودي صـفر باشـد. همچنین درصورتیکه دبي ورودي آب به مخـزن $Q_i=0.015\,m^3/s$ باشـد ارتفـاع آب ثابـت بماند.



پاسخ: معادلة دینامیکي سیستم در مثال (۲-۵) فصل دوّم بدست آمده است:

$$A\frac{dh}{dt}=Q_i-Q_0=Q_i-K\sqrt{h}$$

$$\frac{dh}{dt}+\frac{K}{A}\sqrt{h}=\frac{1}{A}Q_i$$

حال ارتفاع اولیه را از روي حالت ماندگار سیستم تعیین مي کنیم.

$$Q_i=Q^*\rightarrow\frac{dh}{dt}\qquad Q_i^*=Q_0^*=K\sqrt{h^*}$$

$$0.015=0.01\sqrt{h^*}\rightarrow h^*=2.25m$$

حال درصورتیکه جریان ورودي به مخزن صفر باشد $Q_i=0$ خواهیم داشت:

$$A\frac{dh}{dt}=-K\sqrt{h}\rightarrow\frac{dh}{\sqrt{h}}=-\frac{K}{A}dt$$

$$A=\frac{C}{h^*}=\frac{2}{2.25}=0.89m^2$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}}=-0.01125\,dt$$

بدین ترتیب زمان براي نصف شدن ارتفاع برابر است با:

$$h_0=2.25\rightarrow h_1=\frac{h_0}{2}=1.125$$

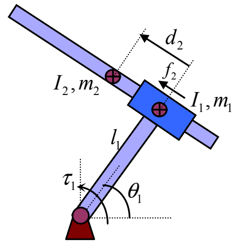
$$\int_{2.25}^{1.125}\frac{dh}{\sqrt{h}}=\int_0^t-0.01125dt=-0.01125t$$

$$2\sqrt{h}\Big|_{2.25}^{1.125}=2\sqrt{1.125}-2\sqrt{2.25}=-0.8787$$

$$\rightarrow t=78.1\sec$$

لذا 78.1 ثانیه طول خواهد کشید تا ارتفاع مخزن نصف گردد.

۲–۹) معادلات حرکت روبات دو درجه آزادي RP مطابق مشخصات ارائه شده در شکل زير را با روش لاگرانژ بدست آورده و ماتريس جرمي، نيروهاي وزني و نيروهاي کوريوليس و سـانتريفورژ را تعيين کنيد.



پاسخ: براي استفاده از روش لاگرانژ بايستي انرژي جنبشي و پتانسـيل اجـزاء روبـات را تعيـين کنيم که بدين منظور به ترتيب زير سرعتها را تعيين مي کنيم.

بازوي اول:

$$\begin{array}{lcl} x_{c1} = \ell_1 c_1 & & \dot{x}_{c1} = \ell_1 c_1 \dot{\theta}_1 \\ x_{c2} = \ell_1 s_1 & \rightarrow & \dot{y}_{c1} = \ell_1 c_1 \dot{\theta}_1 \\ & & \omega_1 = \dot{\theta}_1 \end{array}$$

که در آن c_1 معرف $\cos(\theta_1)$، s_1 معرف $\sin(\theta_1)$ مي باشد.

بازوي دوم:

$$x_{c2} = \ell_1 c_1 + d_2 \cos(\theta_1 + 90^o) = \ell_1 c_1 - d_2 s_1$$
$$y_{c2} = \ell_1 s_1 + d_2 \sin(\theta_1 + 90^o) = \ell_1 c_1 + d_2 s_1$$

توجه داشته باشيد که d_2, θ_1 متغيرهاي حالت سيستم مي باشند و با زمان تغيير مي کند. لذا:

$$\dot{x}_{c2} = -\ell_1 s_1 \dot{\theta}_1 - \dot{d}_2 s_1 - d_2 c_1 \dot{\theta}_1 = -(\ell_1 s_1 + d_2 c_1)\dot{\theta}_1 - s_1 \dot{d}_2$$
$$\dot{y}_{c2} = \ell_1 c_1 \dot{\theta}_1 + \dot{d}_2 c_1 - d_2 s_1 \dot{\theta}_1 = (\ell_1 c_1 - d_2 s_1)\dot{\theta}_1 + c_1 \dot{d}_2$$

حال انرژي جنبشي بازوها را تعيين مي کنيم.

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{c1}}^2 + \frac{1}{2} {}^c I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{c2}}^2 + \frac{1}{2} {}^c I_2 \omega_2^2$$
$$= \frac{1}{2} m_1 (\ell_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_{c2}^2 + \dot{y}_{c2}^2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2$$

با جايگذاري سرعت بازوي دوم و ساده سازي به عبارت زير خواهيم رسيد:

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{\left[(m_1 + m_2)\ell_1^2 + I_1 + I_2 + m_2 d_2^2 \right]}_{I_e} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2 + m_2 \ell_1 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2$$
$$= \frac{1}{2} I_e \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2 + m_2 \ell_1 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2$$

انرژي پتانسيل نيز به ترتيب زير محاسبه مي شود:

$$V = m_1 g \ell_1 s_1 + m_2 g \{ \ell_1 s_1 + d_2 \sin(\theta_1 + 90^o) \}$$
$$= m_1 g \ell_1 s_1 + m_2 g \ell_1 s_1 + m_2 g d_2 c_1$$

با تشکيل لاگرانژين $L = T - V$ و استفاده از معادله لاگرانژ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

با توجه به اينکه $Q = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ خواهيم داشت:

به ازاي $q_1 = \theta_1$:

$$I_e \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ddot{d}_2 + 2 m_2 d_2 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 + (m_1 + m_2) g \ell_1 c_1 + m_2 g d_2 s_2 = \tau_1$$

به ازاي $q_2 = d_2$:

$$m_2 \ddot{d}_2 + m_2 \ell_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 g c_1 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 = f_2$$

لذا معادلات حالت به صورت ماتريسي به فرم زيرقابل نمايش است.

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = Q$$

که در آن ماتريس جرمي برابر است با

$$M(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)\ell_1^2 + m_2 d_2^2 + I_1 + I_2 & m_2 \ell_1 \\ m_2 \ell_1 & m_2 \end{bmatrix}$$

و بردارهاي وزني G و سانتريفوژ وکوريوليس نيز از روابط زير تعيين مي شود.

$$G(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g \ell_1 c_1 - m_2 d_2 g s_1 \\ m_2 g c_1 \end{bmatrix}$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 2 m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

و بردار $Q = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ f_L \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ بدين ترتيب معادلات حالت را به فرم زير مـي تـوان تشـکيل داد:

$$\ddot{q} = M^{-1}\left[Q - V(q, \dot{q}) - G(q) \right]$$

فصل سوم

۳-۱) سیستم زیر را درنظر بگیرید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}x \qquad a_{21}\neq 0$$

فرض کنید مقادیر ویژه ماتریس A سیستم λ_1,λ_2، از هم متمایز باشند. تبدیل همانندي T را پیدا کنید که سیستم را به فرم قطري تبدیل کند.

پاسخ: اگر ماتریس T سیستم را به فرم قطري تبدیل کند داریم:

$$T^{-1}AT=\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس T بایستي در معادله زیر صدق کند.

$$AT=T\Lambda$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

با حل معادله فوق به چهار معادله زیر خواهیم سید.

$$\begin{cases} t_{11}(\lambda_1-a_{11})=a_{12}t_{21} \\ t_{12}(\lambda_2-a_{11})=a_{12}t_{22} \\ t_{21}(\lambda_1-a_{22})=a_{21}t_{11} \\ t_{22}(\lambda_2-a_{22})=a_{21}t_{12} \end{cases}$$

این معادلات به طرق مختلف قابل ارضاء مي باشند از آن جمله:

$$t_{11}=\lambda_1-a_{22} \quad t_{12}=\lambda_2-a_{22} \quad t_{21}=a_{21} \quad t_{22}=a_{21}$$

بدین ترتیب ماتریس تبدیل همانندي به صورت زیر بدست مي آید.

$$T=\begin{bmatrix} \lambda_1-a_{22} & \lambda_2-a_{22} \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix}$$

تعداد بیشماري ماتریس T وجود خواهد داشت کـه سیستـم را بـه فـرم قطـري تبـدیل کننـد. ستونهاي این ماتریس از بردارهاي ویژه ماتریس A تشکیل شده اند.

۳-۲) سیستم زیر را درنظر بگیرید.

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

که در آن بعد ماتریسهاي ورودي و حالت سیستم $x_{n\times 1},u_{r\times 1}$ برابرند با: $A_{n\times n},B_{n\times r}$
پاسخ سیستم را به ورودیهاي زیر بدست آورید.

۱) u تشکیل شده از r تابع ضربه با دامنة متفاوت.

۲) u تشکیل شده از r تابع پله با دامنة متفاوت.

۳) u تشکیل شده از r تابع شیب با شیب متفاوت.

پاسخ:

مي دانیم پاسخ کلي سیستم خطي فوق مطابق معادله (۳-۱۳) برابر است با:

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

با قراردادن $t_0=0$ خواهیم داشت:

$$x(t)=x(0)e^{At}+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

۱) درصورتي که $u(t)=\delta(t)\cdot w$ باشد خواهیم داشت:

$$x(t)=x(0)e^{At}+\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\delta(\tau)wd\tau$$

$$=x(0)e^{At}+e^{At}Bw$$

۲) درصورتکیه $u(t)=k \quad \forall\geq 0$ در اینصورت:

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bkd\tau$$

$$=e^{At}x(0)+e^{At}\left[\int_0^t(I-A\tau+\frac{A^2\tau^2}{2!}-...)d\tau\right]Bk$$

$$=e^{At}x(0)+e^{At}(It-\frac{At^2}{2!}+\frac{A^2t^3}{3!}-...)Bk$$

درصورتیکه A تکین نباشد A^{-1} وجود خواهد داشت:

$$x(t)=e^{At}x(0)+e^{At}\left[-(A^{-1})(e^{-At}-I)Bk\right]$$

با ساده سازي این عبارت خواهیم داشت

$$x(t)=e^{At}x(0)+A^{-1}(e^{At}-I)Bk$$

ج) براي ورودي شیب داریم $u=t\cdot v$ لذا به صورت مشابه مي توان نشان داد

$$x(t)= e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\cdot\tau\cdot v\,d\tau$$
$$= e^{At}x(0)+e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\tau\,d\tau\cdot Bv$$
$$= e^{At}x(0)+e^{At}(\frac{I}{2!}t^2-\frac{2A}{3!}t^3+\frac{3A^2}{4!}t^4-\frac{4A^3}{5!}t^5+\cdots)Bv$$

با فرض غير تكين بودن A :

$$x(t)= e^{At}x(0)+(A^{-2})(e^{At}-I-At)Bv$$
$$= e^{At}x(0)+[A^{-2}(e^{At}-I)-A^{-1}t]Bv$$

۳-۳) طبق قضيه C.H. هر ماتريس $A_{n\times n}$ در معادله مشخصه خود صدق مي كند. البته معادله مشخصه تنها معادله اي نمي باشد، كه A در آن صدق مي كند و ممكن است چند جمله اي با توان كوچكتر از معادله مشخصه نيز وجود داشته باشد كه ماتريس A در آن صدق كند. به چند جمله اي با حداقل توان كه A در آن صدق مي كند چند جمله اي كاهش ناپذير[1] مي ناميم. در اينصورت با فرض:

$$\phi(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m \qquad m\le n$$

$\phi(\lambda)$ را چند جمله اي كاهش ناپذير است اگر با حداقل درجه m رابطة $\varphi(A)=0$ برقرار باشد. بدين ترتيب:

$$\phi(A)=A^m+a_1A^{m-1}+\ldots+a_{m-1}A+a_mI=0$$

اين چند جمله اي حائز اهميت است. فرض كنيد $d(\lambda)$ يک چند جمله اي برحسب λ مي باشد كه از محاسبة فاكتور مشترک كليه المانهاي $\mathrm{adj}(\lambda I-A)$ بدست آمده است. نشان دهيد اگر ضرايب جملات با درجه بيش از يک اين چند جمله اي، همگي يک فرض شوند در اينصورت چند جمله اي كاهش ناپذير عبارتست از:

$$\phi(\lambda)=\frac{|\lambda I-A|}{d(\lambda)}$$

پاسخ: مطابق فرض مسئله فاكتور مشترک كليه المانهاي $\mathrm{adj}(\lambda I-A)$ برابر $d(\lambda)$ مي باشد. لذا:

$$\mathrm{adj}(\lambda I-A)=d(\lambda)B(\lambda)$$

[1] minimal polynomial

كه در آن بزرگترين فاكتور مشترک المانهاي با درجة n^2 چند جمله اي $B(\lambda)$، همگي يک مي باشند. بدين ترتيب

$$(\lambda I-A)\mathrm{adj}(\lambda I-A)=|\lambda I-A|I$$

بدين ترتيب خواهيم داشت:

$$d(\lambda)(\lambda I-A)B(\lambda)=|\lambda I-A|I$$

بدين ترتيب $|\lambda I-A|$ بر $d(\lambda)$ بخش پذير است.

$$|\lambda I-A|=d(\lambda)\psi(\lambda) \qquad (*)$$

به علت اينكه ضرايب درجات بيش از يک چند جمله اي $d(\lambda)$ يک فرض شده اند، همين خاصيت براي $\psi(\lambda)$ نيز برقرار مي شود. از دو رابطه قبل خواهيم داشت.

$$(\lambda I-A)B(\lambda)=\psi(\lambda)I$$

و بدين ترتيب

$$\psi(\lambda)=0$$

دقت كنيد كه $\psi(\lambda)$ را به شرح زير مي توان نوشت:

$$\psi(\lambda)=g(\lambda)\phi(\lambda)+\alpha(\lambda)$$

كه در آن $\alpha(\lambda)$ داراي درجه كوچكتر از $\phi(\lambda)$ خواهد بود. با توجه به اينكه $\phi(A)=0,\psi(A)=0$ بايستي $\alpha(A)=0$, و چون $\phi(\lambda)$ چند جمله اي كاهش ناپذير است، $\alpha(\lambda)$ بايستي متحد با صفر باشد يا

$$\psi(\lambda)=g(\lambda)\phi(\lambda)$$

دقت كنيد $\phi(A)=0$ لذا مي توان نوشت:

$$\phi(\lambda)I=(\lambda I-A)c(\lambda)$$

لذا

$$\psi(\lambda)I=g(\lambda)\phi(\lambda)I=g(\lambda)(\lambda I-A)c(\lambda)$$

و بدين ترتيب مي توان $B(\lambda)$ را محاسبه نمود.

$$B(\lambda)=g(\lambda)c(\lambda)$$

با توجه به اينكه كليه ضرايب درجات بالاي $B(\lambda)$ نيز واحد است، خواهيم داشت:

$$g(\lambda)=1$$

و لذا

$$\psi(\lambda)=\phi(\lambda)$$

بدين ترتيب از معادله (*) خواهيم داشت:

$$\phi(\lambda)=\frac{|\lambda I-A|}{d(\lambda)}$$

بدين ترتيب چند جمله اي كاهش ناپذير هر ماتريس $A_{n\times n}$ را به طريق زير مـي تـوان تعيـين نمود:

- ☜ $\mathrm{adj}(\lambda I - A)$ را تشكيل داده و المانهاي آنرا برحسب λ بسط دهيد.
- ☜ $d(\lambda)$ بزرگترين فاكتور مشترک كليه المانهاي $\mathrm{adj}(\lambda I - A)$ را محاسبه نمائيد.
- ☜ ضريب بزرگترين توان $d(\lambda)$ برحسب λ را يک فرض كنيد، در صورتي كه فـاكتور مشتركي وجود ندارد $d(\lambda)=1$ فرض كنيد.
- ☜ چند جمله اي كاهش ناپذير را از معادله $\phi(\lambda)=\dfrac{|\lambda I-A|}{d(\lambda)}$ محاسبه كنيد.

۳-۴) اگر ماتريس A داراي مقادير ويژه متمايز باشد چنـد جملـه اي كـاهش ناپـذير آن برابـر معادله مشخصه اش مي باشد. همچنين اگر مقادير ويژه تكراري همگي مربـوط بـه يـک بلـوک جوردن باشند باز هم چند جمله اي كاهش ناپذير معادله مشخصه با يكديگر برابرند اما در غيـر اينصورت چند جمله اي كاهش ناپـذير داراي درجـه اي كمتـر از معادلـه مشخصـه مـي باشـد. $(m<n)$ اين خصوصيات را براي سيستمهاي زير بررسي كنيد.

الف) $A=\begin{bmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{bmatrix}$ **ب)** $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&3&1\end{bmatrix}$

پاسخ: سيستم الف) را درنظر بگيريد:

$$|\lambda \mathrm{I}-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-4\\0&\lambda-2&0\\0&-3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

$$\lambda_{1,2}=2,\lambda_3=1$$

با محاسبه بردارهاي ويژه مي توان نشان داد كه اين سيستم داراي يک بردار ويژه تعميم يافتـه است لذا فرم جوردن ماتريس A برابر است با:

$$\Lambda=\left[\begin{array}{cc|c}2&1&0\\0&2&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right]$$

چون سيستم داراي مقادير ويژه متعلق به يک بلوک جوردن مي باشند چند جملـه اي كـاهش ناپذير و معادله مشخصه با همديگر برابرند براي اينكه اين موضوع را نشان دهيم توجه كنيد:

$$\mathrm{adj}(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}(\lambda-2)(\lambda-1)&\lambda+11&4(\lambda-2)\\0&(\lambda-2)(\lambda-1)&0\\0&3(\lambda-2)&(\lambda-2)^2\end{bmatrix}$$

دقت كنيد كه فاكتور مشتركي بين المانهاي $\mathrm{adj}(\lambda I-A)$ بوجود نيامـده و لـذا $d(\lambda)=1$ بدين ترتيب $\phi(\lambda)=\psi(\lambda)$ و از معادله مشخصه سيستم داريم.

$$\phi(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$
$$=\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4$$

ب) سيستم دوم را درنظر بگيريد.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-2&0\\0&-3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

$$\lambda_{1,2}=2,\lambda_3=1$$

با محاسبه بردارهاي ويژه، بردارهاي مستقلي براي مقادير ويژه تكراري مي توان يافت و لذا فـرم جوردن به شكل زير است.

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

بدين ترتيب مقادير ويژه به دو بلوک جوردن مستقل مربوط شده و مرتبه چند جمله اي كاهش ناپذير كوچكتر از معادله مشخصه مي باشد. سعي مي كنيم $\phi(\lambda)$ را محاسبه كنيم:

$$\mathrm{adj}(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}(\lambda-2)(\lambda-1)&0&0\\0&(\lambda-2)(\lambda-1)&0\\0&3(\lambda-2)&(\lambda-2)^2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow d(\lambda)=\lambda-2$$

لذا

$$\phi(\lambda)=\frac{|\lambda \mathrm{I}-B|}{d(\lambda)}=\frac{(\lambda-2)^2(\lambda-1)}{\lambda-2}=\lambda^2-3\lambda+2$$

براي صحت محاسبات ملاحظه كنيد:

$$\phi(A)=A^2-3A+2I=\cdots=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

با توجه به اينكه از دو مقدار ويژه تكراري يک بلوک جوردن ايجاد نشده و ۲ بلوک مستقل ايجاد شده است درجه $\phi(\lambda)$ يک مرتبه کوچکتر از معادله مشخصه است.

۳-۵) نشان دهيد با استفاده از چند جمله اي كاهش ناپذير، معكوس ماتريس ناويژة A را مي توان از معادله زير تعيين نمود:

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_m}(A^{m-1}+a_1A^{m-2}+\cdots+a_{m-2}A+a_{m-1}I)$$

كه در آن a_i ضرايب چند جمله اي كاهش ناپذير ماتريس A مي باشند.

$$\varphi(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\ldots+a_{m-1}\lambda+a_m$$

با استفاده از اين روش، معكوس ماتريس زير را تعيين كنيد.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&-2\\1&0&-3\end{bmatrix}$$

پاسخ: براي ماتريس ناويژة A، ماتريس A در چند جمله اي كاهش ناپذير آن صدق مي كند.

$$\varphi(A)=A^m+a_1A^{m-1}+\ldots+a_{m-1}A+a_mI=0$$

كه در آن $a_m\neq 0$ لذا

$$I=\frac{-1}{a_m}(A^m+a_1A^{m-1}+\ldots+a_{m-2}A^2+a_{m-1}A)$$

دو طرف را در A^{-1} ضرب مي كنيم.

$$A^{-1}=\frac{-1}{a_m}(A^{m-1}+a_1A^{m-2}+\ldots+a_{m-2}A+a_{m-1}I)$$

حال براي ماتريس عددي اين مثال داريم

$$\mathrm{adj}(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}\lambda^2+4\lambda+3&2\lambda+6&-4\\3\lambda+7&\lambda^2+2\lambda-3&-2\lambda+2\\\lambda+1&2&\lambda^2-7\end{bmatrix}$$

هيچ ضريب مشتركي وجود ندارد لذا $\varphi(\lambda)=\psi(\lambda)$

$$\phi(\lambda)=\frac{|\lambda\mathrm{I}-A|}{d(\lambda)}=|\lambda\mathrm{I}-A|=\lambda^3+3\lambda^2-7\lambda-17$$

لذا

$$a_1=3, a_2=-7, a_3=-17$$

بدين ترتيب :

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_3}(A^2+a_1A+a_2I)=\frac{1}{17}(A^2+3A-7I)$$

$$=\cdots=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}3&6&-4\\7&-3&2\\1&2&-7\end{bmatrix}$$

۳-۶) با فرض متمايز بودن $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ چند جمله اي درجه m-1 زير را درنظر بگيريد.

$$p_k(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_{k-1})(\lambda-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda-\lambda_m)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_m)}$$

كه در آن $k=1,2,\ldots,m$. با اين توصيف توجه كنيد كه:

$$p_k(\lambda i)=\begin{cases}1 & i=k\\0 & i\neq k\end{cases}$$

بدين ترتيب چند جمله اي $f(\lambda)$ با درجه m-1 زير

$$f(\lambda)=\sum_{k=1}^{m}f(\lambda_k)p_k(\lambda)$$

كه با اين تعريف

$$f(\lambda)=\sum_{k=1}^{m}f(\lambda_k).\frac{(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_{k-1})(\lambda-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda-\lambda_m)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_m)}$$

در نقاط $\lambda=\lambda_k$ مقدار تابع دقيقاً برابر $f(\lambda_k)$ مي گردد. اين چند جمله اي را بنام *فرمول ميان يابي لاگرانژ* مي نامند.

چند جمله اي $f(\lambda)$ يک چند جمله اي درجه m-1 است كه از m نقطه مستقل $f(\lambda_1), f(\lambda_2),\ldots,f(\lambda_m)$ عبور مي كند و لذا بصورت يكتا قابل تعيين است. هر چند جمله اي ديگر درجه m-1 را مي توان با فرم لاگرانژ تحقق داد. حال ماتريس A را در معادلات فوق جايگزين مقدار ويژه خود λ مي كنيم. لذا

$$p_k(A)=\frac{(A-\lambda_1I)\ldots(A-\lambda_{k-1}I)(A-\lambda_{k+1}I)\ldots(A-\lambda_mI)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_m)}$$

براي اين چند جمله اي درجه m-1 از A نيز خاصيت زير برقرار است.

$$p_k(\lambda_i I)=\begin{cases} I & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}$$

حال تابع $f(A)$ را به شكل زير تعريف مي كنيم.

$$f(A)=\sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k)p_k(A)$$

$$=\sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k).\frac{(A-\lambda_1 I)...(A-\lambda_{k-1}I)(A-\lambda_{k+1}I)...(A-\lambda_m I)}{(\lambda_k-\lambda_1)...(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})...(\lambda_k-\lambda_m)}$$

همانگونه كه در رابطه (۳-۳۵) بيان شد اين معادله را *فرمول ميانيابي سيلوستر* مي ناميم. اين فرمول را به صورت دترمينان به شكل زير مي توان بازنويسي كرد.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & I \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m & A \\ \lambda_1^{\,2} & \lambda_2^{\,2} & \cdots & \lambda_m^2 & A^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{\,m-1} & \lambda_2^{\,m-1} & \dots & \lambda_m^{\,m-1} & A^{m-1} \\ f(\lambda_1) & f(\lambda_2) & \cdots & f(\lambda_m) & f(A) \end{vmatrix}=0 \qquad (I)$$

از اين دو معادله اخير براي محاسبه توابع $f(A)$ و بخصوص e^{At} استفاده مي شود.

۳-۷) فرمول ميانيابي سيلوستر كه در مثال قبل بدست آمده است را مي خواهيم براي حالتي كه ماتريس A داراي مقادير ويژه تكراري است تعميم دهيم. در اينحالت ستونهاي مربوط به مقادير ويژه تكراري در معادله (I) يكسان بوده و لذا بايستي اينحالت تغيير كند. براي تعميم اين حالت فرض كنيد $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3)$ مربوط به چند جمله اي كاهش ناپذير سيستم A در يک بلوک جوردن قرار داشته و ساير مقادير ويژه تكراري نيستند $(\lambda_4\neq\lambda_5\neq\cdots\neq\lambda_m)$

پاسخ: با توجه به تكرر مرتبه مسئله λ_1 مي توان چند جمله اي كاهش ناپذير سيستم را مطابق زير نوشت:

$$\varphi(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$$
$$=(\lambda-\lambda_1)^3(\lambda-\lambda_4)(\lambda-\lambda_5)\cdots(\lambda-\lambda_m)$$

حال هر تابعي از ماتريس سيستم $f(A)$ را مي توان به شكل زير تعميم داد.

$$f(A)=g(A)\varphi(A)+\alpha(A)$$

كه در آن $\varphi(A)$ داراي مرتبه m, $\alpha(A)$ داراي مرتبه m-1 يا كمتر مي باشد. با اين ترتيب داريم.

$$f(\lambda)=g(\lambda)\varphi(\lambda)+\alpha(\lambda)$$

كه در آن

$$\alpha(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+...+\alpha_{m-1}\lambda^{m-1} \qquad (I)$$

درحال حاضر مي توان نوشت:

$$f(\lambda)=g(\lambda)\varphi(\lambda)+\alpha(\lambda) \qquad (II)$$

$$f(\lambda)=g(\lambda)\left[(\lambda-\lambda_1)^3(\lambda-\lambda_4)(\lambda-\lambda_5)\cdots(\lambda-\lambda_m)\right]+\alpha(\lambda)$$

با جايگذاري $\lambda_1,\lambda_4,...,\lambda_m$ در اين رابطه خواهيم داشت

$$\begin{aligned} f(\lambda_1)&=\alpha(\lambda_1)\\ f(\lambda_4)&=\alpha(\lambda_4)\\ \vdots\quad&\quad\vdots\\ f(\lambda_m)&=\alpha(\lambda_m)\end{aligned}$$

حال اگر از معادله (II) مشتق بگيريم.

$$\frac{d}{d\lambda}f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2h(\lambda)+\frac{d}{d\lambda}\alpha(\lambda)$$

كه در آن

$$(\lambda-\lambda_1)^2h(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}[g(\lambda)(\lambda-\lambda_1)^3...(\lambda-\lambda_m)]$$

با جايگذاري λ_1 در معادله فوق

$$\left.\frac{d}{d\lambda}f(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_1}=f'(\lambda_1)=\left.\frac{d}{d\lambda}\alpha(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_1}$$

با توجه به معادله (I) اين معادله به شكل زير ساده مي شود.

$$f'(\lambda_1)=\alpha_1+2\alpha_2\lambda_1+...+(m-1)\alpha_{m-1}\lambda_1^{\,m-2}$$

به صورت مشابه براي مشتق دوم نيز اين عمليات را تكرار مي كنيم.

$$\left.\frac{d^2}{d\lambda^2}f(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_1}=f''(\lambda_1)=\left.\frac{d^2}{d\lambda^2}\alpha(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_1}$$

$$f''(\lambda_1)=2\alpha_2+6\alpha_3\lambda_1+\cdots+(m-1)(m-2)\alpha_{m-1}\lambda_1^{\,m-3}$$

اگر اين معادلات را در زير يكديگر بازنويسي كنيم.

$$\alpha_2 + 3\alpha_3\lambda_1 + \ldots + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-3} = \frac{f''(\lambda_1)}{2}$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2\lambda_1 + \ldots + (m-1)\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-2} = f'(\lambda_1)$$

$$\alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda_1^{m-1} = f(\lambda_1)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\alpha_0 + \alpha_1\lambda_m + \alpha_2\lambda_m^2 + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda_m^{m-1} = f(\lambda_m)$$

با حل همزمان این m معادله مي توان a_k را به ازاي $k=0,1,2,\ldots,\text{m-1}$ تعیـین نمـود. بـا توجه به اینکه این چند جمله اي کاهش ناپذیر سیستم مي باشد، $\phi(A)=0$ است.

$$f(A) = g(A)\phi(A) + \alpha(A) = \alpha(A)$$

$$= \alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_{m-1}A^{m-1}$$

این معادله را نیز به فرم دترمینان مي توان بازنویسي کرد.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \frac{(m-1)(m-2)}{2}\lambda_1^{m-3} & \frac{f''(\lambda_1)}{2} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & (m-1)\lambda_1^{m-2} & f'(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \cdots & \lambda_4^{m-1} & f(\lambda_4) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \lambda_m^3 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & f(\lambda_m) \\ I & A & A^2 & A^3 & \cdots & A^{m-1} & f(A) \end{vmatrix} = 0$$

۳–۸) با استفاده از روش سیلوستر ماتریس انتقال حالت e^{At} سیستم زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ: با توجه به مسئله (۳-۴) چند جمله اي کاهش ناپذیر این سیستم همان معادله مشخصه سیستم مي باشد.

$$\varphi(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

با مقادیر ویژه $\lambda_{1,2}=2$ و $\lambda_3=1$ تابع $f(A)$ در اینحالت e^{At} مي باشد لذا:

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2$$

با استفاده از معادلات مربوط به مقادیر ویژه α_i را محاسبه مي کنیم.

$$\alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_1 = t\, e^{\lambda_1 t}$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 = e^{\lambda_1 t}$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_3 + \alpha_2(t)\lambda_3^2 = e^{\lambda_3 t}$$

با جایگذاري $\lambda_1=2,\ \lambda_3=1$ و حل همزمان این معادلات خواهیم داشت:

$$\alpha_0(t) = \cdots = 4e^t - 3e^{2t} + 2t\, e^{2t}$$

$$\alpha_1(t) = \cdots = -4e^t + 4e^{2t} - 3t\, e^{2t}$$

$$\alpha_2(t) = \cdots = e^t - e^{2t} + t\, e^{2t}$$

لذا خواهیم داشت:

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2$$

$$= \cdots = \begin{bmatrix} e^{2t} & 12e^t - 12e^{2t} + 13te^{2t} & -4e^t + 4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & -3e^t + 3e^{2t} & e^t \end{bmatrix}$$

۳–۹) براي یک ماتریس $A_{n\times n}$ نشان دهید.

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} s^j \sum_{i=1+j}^{m} \alpha_{m-i}A^{i-j-1}}{\sum_{i=0}^{m}\alpha_{m-i}s^i}$$

که در آن α_i ضرایب چند جمله اي کاهش ناپذیر سیستم A مي باشد و $\alpha_0=1$ و بـه ازاي $(m \le n)$ داریم:

$$\alpha_0 A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1}A + \alpha_m I = 0$$

پاسخ: فرض کنید

$$P = (sI-A)^{-1}$$

با این فرض:

$$(sI-A)P = I$$

$$sP = AP + I$$

با ضرب $(sI-A)$ دو طرف معادله به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} s^2P &= A^2P + A + sI \\ s^3P &= A^3P + A^2 + sA + s^2I \\ &\vdots \\ s^mP &= A^mP + A^{m-1} + sA^{m-2} + \cdots + s^{m-2}A + s^{m-1}I \end{aligned}$$

كه در آن m درجه چند جمله اي كاهش ناپذير مي باشد. با ضرب s^iP در α_{mi} و جمع معادلات فوق به معادله زير خواهيم رسيد.

$$\begin{aligned} &\alpha_m P + \alpha_{m-1}s\ P + \cdots + \alpha_0 s^m P = \\ &\sum_{i=0}^{m}\alpha_{m-i}A^iP + \sum_{i=1}^{m}\alpha_{m-i}A^{i-1} + s\sum_{i=2}^{m}\alpha_{m-i}A^{i-2} + \cdots \\ &+ s^{m-2}\sum_{i=m-1}^{m}\alpha_{m-i}A^{i-m+1} + s^{m-1}\alpha_0 I \end{aligned}$$

با توجه به اينكه

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_{m-i}A^iP = (\alpha_0A^m + \alpha_1A^{m-1} + \cdots + \alpha_m I)P = 0$$

معادله فوق به شكل زير ساده سازي مي شود.

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_{m-i}s^iP = \sum_{j=0}^{m-1}s^j\sum_{i=1+j}^{m}\alpha_{m-i}A^{i-j-1}$$

و يا نهايتا

$$P = (sI - A)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{m-1}s^j\sum_{i=1+j}^{m}\alpha_{m-i}A^{i-j-1}}{\sum_{i=0}^{m}\alpha_{m-i}s^i}$$

درصورتيكه چند جمله اي كاهش ناپذير همان معادله مشخصه سيستم باشد $(m = n)$ خواهيم داشت:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1}s^j\sum_{i=1+j}^{n}\alpha_{n-i}A^{i-j-1}}{\sum_{i=0}^{n}\alpha_{n-i}s^i}$$

كه در آن $\alpha_0 = 1$.

۳-۱۰) تبديل همانندي را بيابيد كه سيستم زير را به فرم بلوكي جوردن تبديل كند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

پاسخ: با توجه به فرم بلوكي بالا مثلثي ماتريس، مقادير ويژه ماتريس را براحتي مي توان محاسبه نمود:

$$|\lambda I - A| = \left|\begin{array}{cc:cc} \lambda & -1 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda+1 & -1 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^3\lambda = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = -1, \lambda_4 = 0$$

بردارهاي ويژه: ابتدا تعداد بلوكهاي جوردن سيستم را با محاسبه رتبه ماتريس زير تعيين مي كنيم.

$$\text{rank}(\lambda_1 I - A) = \text{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

لذا دو بردار ويژه مستقل و ۲ بلوك جوردن براي اين مقدار ويژه مي توان يافت.

$$(A - \lambda_1 I)v_{11}^0 = 0 \qquad (A - \lambda I)v_{21}^0 = 0$$

$$v_{11}^0 = \cdots = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad v_{21}^0 = \cdots = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)v_{11}^1 = v_{11}^0 \rightarrow v_{11}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_4 I)v_4 = 0 \to v_4 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

تبديل هماندي برابر است با

$$T=\left[v_{11}^0 \,|\, v_{11}^1 \,|\, v_{21}^0 \,|\, v_4\right]$$

$$T=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \to T^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & -1 & 1 & 0\\1 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Lambda = T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

۳-۱۱) با استفاده از قضية C.H. معكوس ماتريس A و $p(A)$ را براي سيستم زير بدست آوريد.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$P(A)=A^5+16A^4+32A^3+16A^2+4A+I$$

پاسخ:

$$\Delta(\lambda)=|A-\lambda I|=\lambda^2-2\lambda+2 \Rightarrow$$

$$A^2-2A+2I=0$$

$$-\frac{1}{2}(A^2-2A)=I=A\cdot A^{-1}$$

$$A[-\frac{1}{2}(A-2I)]=A\cdot A^{-1}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}[A^2-2I]=\cdots=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

طبق قضية C.H. $P(A)=R(A)$

كه در آن R باقيمانده تقسيم $\dfrac{P(x)}{\Delta(x)}$ مي باشد

$$\frac{P(x)}{\Delta(x)}=x^3+18x^2+66x+112+\frac{96x-223}{\Delta(x)}$$

لذا

$$P(A)=96A-223I=\begin{bmatrix}-127 & -96\\96 & -127\end{bmatrix}$$

۳-۱۲) مسئله قبل را براي $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ تكرار كنيد درحالتيكه:

$$P(A)=A^5+A^3+A+I$$

پاسخ:

$$\Delta(A)=A^2-5A-2I=0\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}[A-sI]=\cdots=\begin{bmatrix}-2 & 1\\3/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

$$\frac{P(x)}{\Delta(x)}=x^3+5x^2+28x+150+\frac{807x+301}{\Delta(x)}$$

$$P(A)=R(A)=807A+301I=\begin{bmatrix}1108 & 1614\\2421 & 3529\end{bmatrix}$$

۳-۱۳) نشان دهيد اگر J_1 يک بلوک جوردن m*m باشد به ازاي هر توان صحيح k>0 خواهيم داشت.

$$J_1^k=\begin{bmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda^{k-2} & \cdots & \frac{k!\lambda^{k-m+1}}{(k-m+1)!(m-1)!}\\0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & & \vdots\\0 & 0 & \lambda^k & & \vdots\\\vdots & \vdots & 0 & & k\lambda^{k-1}\\0 & 0 & 0 & & \lambda^k\end{bmatrix}$$

پاسخ: به ازاي $J_1^1, k=1$ در فرمول فوق صدق مي كند چراكه $(k-m+1)!=\infty$ درصورتيكه $k-m+1<0$ با ضرب مستقيم J_1^2 را مي توان تعيين نمود.

$$J_1=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots\\ \vdots & 0 & \lambda & & \vdots\\ \vdots & \vdots & 0 & & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{bmatrix},\qquad J_1^2=\begin{bmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda & \cdots & 1\\ \vdots & & & & & 2\lambda\\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \lambda^2\end{bmatrix}$$

با استفاده از استقراء با فرض اینکه این فرمول براي توان k صادق باشد نشان مـي دهـيم بـراي توان k+1 نيز صادق است.

$$J_1^{k+1}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots\\ \vdots & 0 & \lambda & & \vdots\\ \vdots & \vdots & 0 & & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda^{k-2} & \cdots & \frac{k!\lambda^{k-m+1}}{(k-m+1)!(m-1)!}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & & \vdots\\ 0 & 0 & \lambda^k & & \vdots\\ \vdots & \vdots & 0 & & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & 0 & & \lambda^k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k & \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda^{k-1}+k\lambda^{k-1} & \frac{1}{3!}k(k-1)(k-2)\lambda^{k-2}+\frac{1}{2!}k(k-1)\lambda^{k-1} & \cdots\\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \lambda^{k+1} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^{k+1}\end{bmatrix}$$

اما درنظر بگيريد

$$\left[\frac{1}{2!}k(k-1)+k\right]\lambda^{k-1}=\frac{k}{2!}(k-1+2)\lambda^{k-1}=\frac{(k+1)k}{2!}\lambda^{k-1}$$

$$\left[\frac{1}{3!}k(k-1)(k-2)+\frac{1}{2!}k(k-1)\right]\lambda^{k-2}=\frac{1}{3!}k(k-1)(k-1+2)\lambda^{k-2}$$

و بهمين ترتيب كليه المانها بدست مي آيند.

۳-۱۴) اگر J_1 یک بلوک جوردن m*m باشد ضرایب α_i در تابع e^{J_1T} را بدست آورید که

$$e^{J_1t}=\alpha_0I+\alpha_1J_1+\alpha_2J_1^2+\dots+\alpha_{m-1}J_1^{m-1}$$

پاسخ: معادله مشخصه بلوک جوردن عبارتست از

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^m$$

حال

$$e^{\lambda_1t}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_1^2+\dots+\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-1}$$

و

$$\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=\lambda_1}=te^{\lambda_1t}=\alpha_1+2\alpha_2\lambda_1+\dots+(m-1)\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-2}$$

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=\lambda_1}=\frac{1}{2!}t^2e^{\lambda_1t}=\alpha_2+3\alpha_3\lambda_1+\dots+\frac{1}{2!}(m-1)(m-2)\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-3}$$

$$\frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=\lambda_1}=\frac{1}{3!}t^3e^{\lambda_1t}=\alpha_3+4\alpha_4\lambda_1+\dots+\frac{1}{3!}(m-1)(m-2)(m-3)\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-4}$$

$$\vdots\qquad=\qquad\vdots$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=\lambda_1}=\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{\lambda_1t}=\alpha_{m-1}$$

به فرم ماتريسي معادلات فوق را بازنويسي مي كنيم.

$$\begin{bmatrix}1\\ t\\ \frac{1}{2!}t^2\\ \vdots\\ \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}\end{bmatrix}e^{\lambda_1t}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1}\\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & & (m-1)\lambda_1^{m-2}\\ \vdots & \vdots & 1 & & \frac{1}{2}(m-1)(m-2)\lambda_1^{m-3}\\ & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{m-1}\end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{F}\alpha$$

$$\alpha=\mathrm{F}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ t\\ \frac{1}{2!}t^2\\ \vdots\\ \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}\end{bmatrix}$$

با محاسبه F^{-1} ضرایب α_1 به صورت زیر محاسبه مي شود.

$$\alpha_0 = e^{\lambda_1 t}\left[1-\lambda_1 t+\frac{\lambda_1^2 t^2}{2!}-\frac{\lambda_1^3 t^3}{3!}+\frac{\lambda_1^4 t^4}{4!}-\cdots+\frac{(-\lambda_1)^{m-1} t^{m-1}}{(m-1)!}\right]$$

$$\alpha_1 = e^{\lambda_1 t}\left[t-\lambda_1 t^2+\frac{\lambda_1^2 t^3}{2!}-\frac{\lambda_1^3 t^4}{3!}+\cdots+\frac{t^{m-1}(-\lambda_1)^{m-2}}{(m-2)!}\right]$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{m-2} = e^{\lambda_1 t}\left[\frac{1}{(m-2)!}t^{m-2}-\frac{1}{(m-2)!}\lambda_1 t^{m-1}\right]$$

$$\alpha_{m-2} = e^{\lambda_1 t}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$$

۳-۱۵) با استفاده از مسئله قبل $e^{J_1 t}$ را براي بلوک جوردن $J_{1(3\times3)}, J_{1(4\times4)}$ محاسبه کنید.

$$J_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\rightarrow J^2{}_1=\begin{bmatrix}\lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1^2 & 2\lambda_1\\ 0 & 0 & \lambda_1^2\end{bmatrix}$$

$$e^{J_1 t}=\alpha_0 I+\alpha_1 J_1+\alpha_2 J_1^2$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_1^2 & \alpha_1+2\lambda_1\alpha_2 & \alpha_2\\ 0 & \alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_1^2 & \alpha_1+2\lambda_1\alpha_2\\ 0 & 0 & \alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_1^2\end{bmatrix}$$

$$=\cdots=e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix}1 & t & 1/2\,t^2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

بهمين ترتيب مي توان نشان داد:

$$J_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\rightarrow e^{J_1 t}=e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix}1 & t & 1/2\,t^2 & 1/3\,t^3\\ 0 & 1 & t & 1/2\,t^2\\ 0 & 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

۳-۱۶) با استفاده از قضية C.H.، براي سيستم زير توابع ماتريسي $\sin(At), e^{At}$ را محاسبه کنيد.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$\Delta(\lambda)=\lambda^2+5\lambda+4=(\lambda+4)(\lambda+1)$$
$$\lambda_1=-1,\lambda_2=-4$$

با توجه به معادله حاصل از قضية C.H.

$$\sin(At)=R(A)=\alpha_0 I+\alpha_1 A$$

که در آن

$$\begin{matrix}\sin(-4t)=\alpha_0-4\alpha_1\\ \sin(-t)=\alpha_0-\alpha_1\end{matrix}\rightarrow\begin{cases}\alpha_1=-\frac{1}{3}[\sin(-4t)-\sin(-t)]\\ \alpha_0=-\frac{1}{3}[\sin(-4t)-4\sin(-t)]\end{cases}$$

بدين ترتيب

$$\sin(At)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\sin(-4t)+2\sin(-t) & -2\sin(-4t)+2\sin(-t)\\ -\sin(-4t)+\sin(-t) & 2\sin(-4t)+\sin(-t)\end{bmatrix}$$

به طريق مشابه مي توان نشان داد:

$$e^{(At)}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}e^{-4t}+2e^{-t} & 2(-e^{-4t}+e^{-t})\\ -e^{-4t}+e^{-t} & 2e^{-4t}+e^{-t}\end{bmatrix}$$

۳-۱۷) تابع e^{At} را براي سيستم زير محاسبه کنيد.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

پاسخ: دقت کنيد سيستم فوق بلوکي قطريست لذا:

$$e^{At}=\left[\begin{array}{c|c}e^{2t} & 0\\ \hline 0 & e^{\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}t}\end{array}\right]$$

با استفاده از مسئله قبل

$$e^{At} = \left[\begin{array}{c:cc} e^{2t} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \frac{1}{3}(e^{-4t}+2e^{-t}) & \frac{2}{3}(-e^{-4t}+e^{-t}) \\ 0 & \frac{1}{3}(-e^{-4t}+e^{-t}) & \frac{1}{3}(2e^{-4t}+e^{-t}) \end{array}\right]$$

۳-۱۸) A^k را براي هر عدد صحيح مثبت k پيدا كنيد درحاليكه $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

پاسخ: با استفاده از قضية C.H. مي دانيم.

$$A^{\kappa} = f(A) = R(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$$

از طرفي

$$\Delta(\lambda) = (1-\lambda^3), \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$(\lambda_1)^{\kappa} = 1 = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda^2{}_1 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\frac{d(\lambda)^{\kappa}}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_1} = k\lambda_1^{k-1} = k = \alpha_1 + 2\alpha_2$$

$$\frac{d^2(\lambda)^{\kappa}}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_1} = k(k-1)\lambda_1^{k-2} = k(k-1) = 2\alpha_2$$

بدين ترتيب ضرايب α_i محاسبه مي گردند.

$$\alpha_0 = 1 + k - k^2$$

$$\alpha_1 = k^2$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}k(k-1)$$

$$A^k = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A = \begin{bmatrix} \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 & -\alpha_1-2\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2 \\ 0 & \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+2\alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{bmatrix} 1 & -k & k(3-k)/2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۳-۱۹) براي سيستم زير معكوس ماتريس سيستم A^{-1} و ماتريس انتقال حالت e^{At} را با استفاده از روش C.H. محاسبه نمائيد

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$\Delta(\lambda) = (1+\lambda)(\lambda^2+9) = \lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda + 9$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3j, \lambda_3 = -3j$$

$$\Delta(A) = A^3 + A^2 + 9A + 9I \Rightarrow 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{9}\left[A^2 + A + 9I\right]$$

$$A^{-1} = \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

براي تعيين ماتريس حالت با توجه به بلوكي قطري بودن ماتريس A داريم:

$$e^{At} = \left[\begin{array}{c:c} e^{\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}t} & 0 \\ \hdashline 0 & e^{-t} \end{array}\right]$$

لذا در عمل ماتريس انتقال حالت به شكل زير بدست خواهد آمد.

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}t} = \alpha_0 I + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -3\alpha_1 \\ 3\alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} e^{3jt} = \alpha_0 + \alpha_1 3j \\ e^{-3jt} = \alpha_0 - \alpha_1 3j \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{2}\left[e^{3jt} + e^{-3jt}\right] = \cos 3t \\ \alpha_1 = \frac{1}{3}\left[\frac{e^{3jt} - e^{-3jt}}{2j}\right] = \frac{1}{3}\sin 3t \end{cases}$$

نتيجتاً

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos 3t & -\sin 3t & 0 \\ \sin 3t & \cos 3t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

۳-۲۰) براي سيستم زير ماتريس انتقال حالت را تعيين كنيد.

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc}0 & -\Omega & a & 0\\ \Omega & 0 & 0 & a\\ \hline 0 & 0 & 0 & -\Omega\\ 0 & 0 & \Omega & 0\end{array}\right]$$

پاسخ: قبل از حل مسئله اجازه دهید روابط ماتریسي مرتبط را یادآوري کنیم.

$$A=\left[\begin{array}{c|c}B_1 & 0\\ \hline 0 & B_1\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c|c}0 & B_2\\ \hline 0 & 0\end{array}\right]\triangleq A_1+A_2$$

که در آن

$$A_1A_2=A_2A_1=\left[\begin{array}{c|c}0 & B_1B_2\\ \hline 0 & 0\end{array}\right]$$

با توجه به خاصیت جابجائي ضرب در این ماتریسهاي A_2, A_1 داریم،

$$e^{(A_1+A_2)t}=e^{A_1t}\cdot e^{A_2t}$$

که در آن

$$e^{A_1t}=\left[\begin{array}{c|c}e^{B_1t} & 0\\ \hline 0 & e^{B_1t}\end{array}\right]$$

امّا

$$e^{B_1t}=\alpha_0I+\alpha_1B_1,\qquad \lambda_{1,2}=\pm j\Omega$$

$$\begin{cases}e^{j\Omega t}=\alpha_0+j\Omega\alpha_1\\ e^{-j\Omega t}=\alpha_0-j\Omega\alpha_1\end{cases}\rightarrow e^{B_1t}=\begin{bmatrix}\cos\Omega t & -\sin\Omega t\\ \sin\Omega t & \cos\Omega t\end{bmatrix}$$

حال براي حل قسمت دوّم توجه کنید که مقادیر ویژه ماتریس A_2 همگي برروي مبدا واقعند.

$$|\lambda I-A_2|=\lambda^4=0$$

$$e^{A_2t}=\beta_0I+\beta_1A_2+\beta_2A_2^2+\beta_3A_2^3$$

با توجه به اینکه $A_2^2=A_2^3=0$ تنها β_1,β_0 را کافي است تعیین کنیم.

$$\begin{cases}e^{0t}=1=\beta_0\\ \left.\dfrac{de^{\lambda t}}{dt}\right|_{\lambda=0}=t=\beta_1\end{cases}\rightarrow e^{A_2t}=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & at & 0\\ 0 & 1 & 0 & at\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

بدین ترتیب نتیجة عملیات برابر است با

$$e^{At}=e^{A_1t}.e^{A_2t}=\left[\begin{array}{cc|cc}\cos\Omega t & -\sin\Omega t & at\cos\Omega t & -at\sin\Omega t\\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & at\sin\Omega t & at\cos\Omega t\\ \hline 0 & 0 & \cos\Omega t & -\sin\Omega t\\ 0 & 0 & \sin\Omega t & \cos\Omega t\end{array}\right]$$

۳-۲۱) با استفاده از روش لاپلاس ماتریس انتقال حالت را براي سیستم زیر بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & -4\end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$sI-A=\begin{bmatrix}s+2 & 2 & 0\\ 0 & s & -1\\ 0 & 3 & s+4\end{bmatrix},\ \begin{aligned}|sI-A|&=(s+2)(s^2+4s+3)\\ &=(s+1)(s+2)(s+3)\end{aligned}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix}(s+1)(s+3) & -2(s+4) & -2\\ 0 & (s+2)(s+4) & s+2\\ 0 & -3(s+2) & s(s+2)\end{bmatrix}$$

با تبدیل به کسرهاي جزئي معکوس لاپلاس عناصر این ماتریس را به صورت زیر محاسبه مي کنیم.

$$e^{At}=L^{-1}\left((sI-A)^{-1}\right)=\begin{bmatrix}e^{-2t} & -3e^{-t}+4e^{-2t}-e^{-3t} & -e^{-t}+2e^{-2t}-e^{-3t}\\ 0 & -\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t} & +\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\\ 0 & -\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

۳-۲۲) با استفاده از فرم جوردن ماتریس انتقال حالت سیستم زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -27 & 54 & -36 & 10\end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$|A-\lambda I| = \Delta(\lambda)=\lambda^4-10\lambda^3+36\lambda^2-54\lambda+27$$
$$=(\lambda-1)(\lambda-3)^3 \to \lambda_1=1,\lambda_{2,3,4}=3$$

لذا سيستم به فرم جوردن قابل بازنويسي است توجه كنيد كه $\mathrm{rank}[A - I\lambda_2]=3$ بردارهاي ويژه و بردارهاي ويژه تعميم يافته را جستجو مي كنيم:

$$v_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$$
$$v_{21}^0=\begin{bmatrix}1 & 3 & 9 & 27\end{bmatrix}^T$$
$$(A-3I)v_{21}^1=v_{21}^0 \to v_{21}^1=\begin{bmatrix}1 & 4 & 15 & 54\end{bmatrix}^T$$
$$(A-3I)v_{21}^2=v_{21}^1 \to v_{21}^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 7 & 36\end{bmatrix}^T$$

تبديل همانندي مربوطه عبارتست از

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 9 & 15 & 7\\ 1 & 27 & 54 & 36\end{bmatrix}\to T^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}27 & -27 & 9 & -1\\ -85 & 133 & -55 & 7\\ 66 & -106 & 46 & -6\\ -36 & 60 & -28 & 4\end{bmatrix}$$

لذا سيستم در فرم جوردن عبارتست از

$$\Lambda=\left[\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right]\to e^{\Lambda t}=\left[\begin{array}{c|ccc}e^t & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & & & \\ 0 & & e^{J_2 t} & \\ 0 & & & \end{array}\right]=\begin{bmatrix}e^t & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{3t} & te^{3t} & \frac{1}{2}t^2e^{3t}\\ 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t}\\ 0 & 0 & 0 & e^{3t}\end{bmatrix}$$

اما در فرم مختصات اصلي

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}$$
$$=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}27e^t+(-19+30t-18t^2)e^{3t} & -27e^t+(27-46t+30t^2)e^{3t} & 9e^t+(-9+18t-14t^2)e^{3t} & -e^t+(1-2t+2t^2)e^{3t}\\ 27e^t+(-27+54t-54t^2)e^{3t} & -27e^t+(35-78t+90t^2)e^{3t} & 9e^t+(-9+26t-42t^2)e^{3t} & -e^t+(1-2t+6t^2)e^{3t}\\ 27e^t+(-27+54t-162t^2)e^{3t} & -27e^t+(27-54t+270t^2)e^{3t} & 9e^t+(-1-6t-126t^2)e^{3t} & -e^t+(1+6t+18t^2)e^{3t}\\ 27e^t+(-27-162t-486t^2)e^{3t} & -27e^t+(27+378t+810t^2)e^{3t} & 9e^t+(-9-270t-378t^2)e^{3t} & -e^t+(9+54t+54t^2)e^{3t}\end{bmatrix}$$

۳-۲۳) با استفاده از روش سيلوستر ماتريس انتقال حالت را براي سيستم زير تعيين كنيد.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

پاسخ: به جهت يادآوري فرمولهاي روش سيلوستر را بازنويسي مي كنيم.

$$f(A)=\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)z_i(\lambda)$$
$$z_i(\lambda)=\frac{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(A-\lambda_i I)}{\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)}$$

براي سيستم فوق داريم $\lambda_3=3,\lambda_2=-2,\lambda_1=1$ لذا خواهيم داشت

$$z_1=\frac{(A+2I)(A-3I)}{(1+2)(1-3)}=\ldots=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-3 & 5 & -2\\ 3 & -5 & 2\\ 3 & -5 & 2\end{bmatrix}$$
$$z_2=\frac{(A-I)(A-3I)}{(-2-1)(-2-3)}=\ldots=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}0 & 11 & -11\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -14 & 14\end{bmatrix}$$
$$z_3=\frac{(A-I)(A+2I)}{(3-1)(3+2)}=\ldots=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}5 & 1 & 4\\ 5 & 1 & 4\\ 5 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

لذا ماتريس انتقال حالت از رابطة زير محاسبه مي شود.

$$e^{At}=z_1e^t+z_2e^{-2t}+z_3e^{3t}$$

۳-۲۴) مدل خطي سازي شده يک ماهواره به صورت زير مي باشد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & -\Omega\\ \Omega & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}$$

با فرض اينكه $u_2(t)=C\cos\alpha t, u_1(t)=C\sin\alpha t$ پاسخ سيستم را با شرايط اوليـه دلخـواه در $t=0$ تعيين كنيد.

پاسخ: ماتريس انتقال حالت براي سيستم فوق را در مسئلة حل شدة (۳-۲۰) بدست آورده ايم.

$$\phi(t)=\begin{bmatrix}\cos\Omega t & -\sin\Omega t\\ \sin\Omega t & \cos\Omega t\end{bmatrix}$$

لذا پاسخ سيستم برابر است با

$$x(t)=\phi(t)x(0)+\int_0^t \phi(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

با توجه به خاصيت ماتريس انتقال حالت مي توان نوشت

$$\phi(t-\tau)=\phi(t)\cdot\phi(-\tau)$$

لذا

$$x(t)=\phi(t)\left\{x(0)+C\int_0^t\begin{bmatrix}\cos\Omega\tau\sin\alpha\tau+\sin\Omega\tau\cos\alpha\tau\\ -\sin\Omega\tau\sin\alpha\tau+\cos\Omega\tau\cos\alpha\tau\end{bmatrix}\right\}d\tau$$

با حل انتگرال فوق خواهيم داشت.

$$x(t)=\phi(t)\left\{x(0)+\frac{C}{\Omega+\alpha}\begin{bmatrix}1-\cos(\Omega+\alpha)t\\ \sin(\Omega+\alpha)t\end{bmatrix}\right\}$$

۳-۲۵) سيستم زير را درنظر بگيريد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}$$

الف) ماتريس تبديل هماندي T را كه سيستم را از حالت مزدوج خارج مي سازد تعيين كنيد.

ب) پاسخ سيستم را به ازاي شرايط اوليه $x(0)=[10\quad 5\quad 2]^T$, $u(t)=[t\quad 1]^T$ بدست آوريد.

پاسخ: ابتدا تبديل همانندي يا ماتريس مودال را تعيين مي كنيم:

$$|A-\lambda I|=-(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\to\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$$

بردارهاي ويژه عباتند از:

$$v_1=[-2\quad 1\quad -1]^T$$
$$v_2=[1\quad 0\quad 0]^T$$
$$v_1=[-2\quad -1\quad 3]^T$$

لذا ماتريس تبديل همانندي و معكوس آن عبارتند از

$$T=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}\to T^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 3/2 & 1/2\\ 1 & 4 & 2\\ 0 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

سيستم غير مزدوج به صورت زير تعيين مي شود.

$$\dot{z}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}1/2 & 2\\ 3 & 6\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

اين سه معادله خطي مرتبه يک را نتيجه مي دهد كه به راحتي قابل حل است (به ازاي $u_1=t,u_2=1$)

$$\dot{z}_1=-z_1+\frac{1}{2}t+2\to z_1(t)=e^{-t}z_1(0)+\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}(1-e^{-t})$$
$$\dot{z}_2=-2z_2+3t+6\to z_2(t)=e^{-2t}z_2(0)+\frac{3}{2}t+\frac{9}{4}(1-e^{-2t})$$
$$\dot{z}_3=-3z_1+\frac{1}{2}t+1\to z_3(t)=e^{-3t}z_3(0)+\frac{1}{6}t+\frac{5}{18}(1-e^{-3t})$$

با استفاده از تبديل همانندي خواهيم داشت

$$z(0)=T^{-1}x(0)=[17/2\quad 34\quad 7/2]^T$$

$$x(t)=Tz(t)=\cdots=\begin{bmatrix}-14e^{-t}+\left(\frac{127}{4}\right)e^{-2t}-\left(\frac{58}{9}\right)e^{-3t}+\left(\frac{1}{6}\right)t-\frac{47}{36}\\ 7e^{-t}+\left(\frac{29}{9}\right)e^{-3t}+\frac{1}{3}t+\frac{11}{9}\\ -7e^{-t}+\left(\frac{29}{3}\right)e^{-3t}-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

۳-۲۶) پاسخ بدون ورودي y_{zi} سيستم زير را با شرايط اوليه $x(0)=[100\quad 50\quad 150]^T$ براي سيستم زير بدست آوريد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ -2.5 & -7 & 4\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

پاسخ:

$$y_{zi}=cx_{zi}=c\phi(t)x(0)$$

ابتدا ماتريس انتقال حالت را محاسبه مي كنيم

$$|A-I\lambda|=(-\lambda-5)\begin{vmatrix}-\lambda-1 & 2\\ -2.5 & -\lambda-7\end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda-5)(\lambda+2)(\lambda+6)\quad .$$

$$=\lambda_1=-2,\lambda_2=-5,\lambda_3=-6$$

از قضية C.H. استفاده مي كنيم.

$$e^{At}=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha_0-\alpha_1-4\alpha_2 & 2\alpha_1-16\alpha_2 & 8\alpha_2\\ -2.5\alpha_1+20\alpha_2 & \alpha_0-7\alpha_1+44\alpha_2 & 4\alpha_1-48\alpha_2\\ 0 & 0 & \alpha_0-5\alpha_1+25\alpha_2\end{bmatrix}$$

ضرايب α_i را محاسبه مي كنيم.

$$\begin{cases}e^{-2t}=\alpha_0-2\alpha_1+4\alpha_2\\ e^{-5t}=\alpha_0-5\alpha_1+25\alpha_2\\ e^{-6t}=\alpha_0-6\alpha_1+36\alpha_2\end{cases}$$

در نتيجه:

$$\begin{cases}\alpha_0=5/2\ e^{-2t}-4\ e^{-5t}+5/2\ e^{-6t}\\ \alpha_1=11/12\ e^{-2t}-8/3\ e^{-5t}+7/4\ e^{-6t}\\ \alpha_2=1/12\ e^{-2t}-1/3\ e^{-5t}+1/4\ e^{-6t}\end{cases}$$

لذا ماتريس انتقال حالت به صورت زير تعيين مي شود.

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix}\frac{5}{4}e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-6t} & \frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-6t} & \frac{2}{3}e^{-2t}-\frac{8}{3}e^{-5t}+2e^{-6t}\\ -\frac{5}{8}e^{-2t}+\frac{5}{8}e^{-6t} & -\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{5}{4}e^{-6t} & -\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{16}{3}e^{-5t}-5e^{-6t}\\ 0 & 0 & e^{-5t}\end{bmatrix}$$

و پاسخ بدون ورودي سيستم عبارتست از:

$$y_{zi}(t)=C\varphi(t)x(0)=250\ e^{-2t}-400\ e^{-5t}+250\ e^{-6t}$$

فصل چهارم

۴-۱) همانگونه كه قبلا بيان شد شرط لازم و كافي كنترل پذيري سيستم عدم وجود مودهاي پنهان يا حذف صفر و قطب در تابع تبديل سيستم مي باشد. مي خواهيم اين موضوع را به صورت رياضي تحقيق كنيم. براي اين منظور سيستم MIMO زير را درنظر بگيريد.

$$\dot{x}=Ax+Bu \qquad x(0)=0$$

لاپلاس مي گيريم:

$$X(s)=(sI-A)^{-1}Bu(s)$$

$$(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{|sI-A|}\begin{bmatrix}p_1(s)\\ p_2(s)\\ \vdots\\ p_n(s)\end{bmatrix}$$

كه در آن $p_i(s)$ چند جمله اي مي باشند. حذف صفر قطب زماني صورت مي گيرد كه فاكتور مشتركي بين $p_i(s)$ و $|sI-A|$ وجود داشته باشد. در اين صورت آن مود كنترل ناپذير مي شود. نشان دهيد در اين صورت در $(sI-A)^{-1}B$ حذف صفر و قطب اتفاق مي افتد، اگر و تنها اگر، رتبه ماتريس كنترل پذيري كمتر از n باشد.

$$\text{rank}\ \mathbb{C}=\text{rank}\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}<n$$

پاسخ: تعريف مي كنيم

$$\varphi(s)=(sI-A)^{-1}B$$

با استفاده از مسئله حل شدة (۳-۹) داريم

$$\varphi=\frac{\sum_{j=0}^{n-1} s^{j} \sum_{i=1+j}^{n} \alpha_{n-i} A^{i-j-1} B}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i} s^{i}}$$

مجدداً بردار $v_{j_{n\times1}}$ را تعريف مي كنيم

$$v_{j}=\sum_{i=1+j}^{n} \alpha_{n-i} A^{i-j-1} B$$

لذا

$$\varphi=\frac{\sum_{j=0}^{n-1} s^{j} v_{j}}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i} s^{i}}$$

فرض كنيد حذف صفر و قطب در φ اتفاق مي افتد، در اينصورت درصورت كسر فوق ترم زير مشاهده خواهد شد.

$$\sum_{j=0}^{n-1} s^{j} v_{j}=(s-s_{k}) \sum_{j=0}^{n-2} s^{j} w_{j}$$

كه s_k يک مقدار ويژه ماتريس A است. با برابر قرار دادن ضرايب s^j در دوطرف معادله خواهيم ديد:

$$\begin{aligned}
v_{0}&=-s_{k} w_{0}\\
v_{1}&=w_{0}-s_{k} w_{1}\\
v_{2}&=w_{1}-s_{k} w_{2}\\
&\vdots\\
v_{n-1}&=w_{n-2}
\end{aligned}$$

لذا به معادله زير خواهيم رسيد:

$$\begin{aligned}
&v_{0}+s_{k} v_{1}+s_{k}^{2} v_{2}+\cdots+s_{k}^{n-1} v_{n-1}=\\
&(-s_{k} w_{0})+(s_{k} w_{0}-s_{k}{}^{2} w_{1})+(s_{k}{}^{2} w_{1}-s_{k}{}^{3} w_{2})+\cdots\\
&+(s_{k}{}^{n-2} w_{n-3}-s_{k}{}^{n-1} w_{n-2})+s_{k}{}^{n-1} w_{n-2}=0
\end{aligned}$$

اين معادله نتيجه مي دهد

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-1} A^{i-1} B+s_{k} \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-1} A^{i-2} B+\cdots+s_{k}{}^{n-i} \alpha \cdot B=0$$

كه به صورت زير مي توان آنرا نوشت:

$$C_{0} B+C_{1} A B+C_{2} A^{2} B+\cdots+C_{n-1} A^{n-1} B=0$$

كه در آن

$$C_{i}=\sum_{j=0}^{n-i-1} \alpha_{n-i-j-1} s_{k}{}^{i}$$

چون ضريب آخرين جمله $C_{n-1}=\alpha_{0}=1 \neq 0$ است نتيجه مي گيريم كه بردارهاي $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ وابسته خطي مي باشند و لذا رتبه ماتريس كنترل پذيري $\mathbb{C}$ كمتر از n خواهد بود. طرف دوم قضيه نيز به صورت مشابه قابل اثبات خواهد بود.

۴-۲) كنترل پذيري سيستم زير را بررسي نموده و نتيجه را با تابع تبديل سيستم تحليل نمائيد.

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 1.5\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix}B \mid & AB\end{bmatrix}=\cdots=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 4\end{bmatrix}$$

مرتبه $\mathbb{C}$ يک بوده و سيستم كنترل ناپذير است. تابع تبديل سيستم را بدست مي آوريم.

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{1}(s)}{u(s)}=H(s)=C(sI-A)^{-1} B=\cdots=\frac{(s+2.5)}{(s+2.5)(s-1)}$$

همانگونه كه انتظار مي رفت حذف صفر و قطب در $s=-2.5$ مشاهده مي شود كه باعث عدم كنترل پذيري سيستم است.

۴-۳) كنترل پذيري و رؤيت پذيري سيستم هاي زير را تحقيق كنيد.

الف)

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3/4 & -1/4\\ -1/2 & -1/2\end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}4 & 2\end{bmatrix} x(t)$$

پاسخ:

$$\mathbb{C}=[B \mid \; AB]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\text{rank}\;\; \mathbb{C}=1$$

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -4 & -2\end{bmatrix}$$

$$\text{rank}\;\; \mathbf{O}=1$$

سیستم کنترل پذیر و رؤیت پذیر نیست.

ب)

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u(t)$$

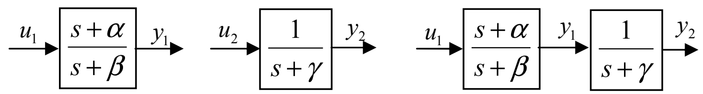
$$y(t)=\begin{bmatrix}5 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

پاسخ:

کنترل ناپذیر است $\quad \text{rank}\;\; (\mathbb{C})=\text{rank}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=1$

رؤیت پذیر است $\quad \text{rank}\;\; (\mathbf{O})=\text{rank}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 9/2 & 1/2\end{bmatrix}=2$

۴-۴) شرایط کنترل پذیري و رؤیت پذیري را براي سیستمهاي زیر تعیین کنید.



الف) ب) ج)

پاسخ:

الف) ابتدا سیستم را به فضاي حالت تبدیل کنیم.

$$\dot{y}_1+\beta y_1=\dot{u}_1+\alpha u_1$$

فرض کنید: $\quad x_1=y_1-u_1 \Rightarrow \dot{x}_1=-\beta x_1+(\alpha-\beta)u_1$

لذا خواهیم داشت

$$A=-\beta;\quad B=\alpha-\beta;\quad C=1;\quad D=1$$

$$\mathbb{C}=[B]=[\alpha-\beta]$$

$$\text{rank}\;\; \mathbb{C}=1 \qquad \text{if}\;\; \alpha\neq\beta$$

$$\mathbf{O}=1 \;\; \rightarrow \text{rank}\;\; \mathbf{O}=1$$

سیستم کنترل پذیر و رؤیت پذیر است اگر $\alpha\neq\beta$

ب) سیستم به فرم فضاي حالت عبارتست از

$$x_2=y_2$$

$$\dot{x}_2=-x_2+\mu_2$$

$$A=-\gamma\;\;,\; B=1,\;\; C=1,\;\; D=1$$

$$\text{rank}\; \mathbf{O}=\text{rank}\; \mathbb{C}=1$$

سیستم کنترل پذیر و رؤیت پذیر است.

ج) با ترکیب دو سیستم فوق

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\beta & 0\\ 0 & -\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha-\beta\\ 1\end{bmatrix}u_1$$

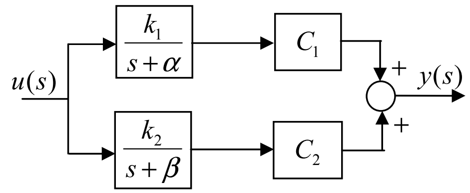
$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix}\alpha-\beta & -\beta(\alpha-\beta)\\ 1 & \alpha-\beta-\gamma\end{bmatrix}\rightarrow |\mathbb{C}|=(\alpha-\beta)(\alpha-y)$$

$$\text{rank}\; \mathbb{C}=2 \qquad \text{if}\;\; \alpha\neq\beta,\alpha\neq y$$

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -y\end{bmatrix} \qquad \text{rank}\; \mathbf{O}=2$$

سیستم کنترل پذیري خود را تنها در زماني كه $\alpha=\gamma$ يا $\alpha=\beta$ باشد از دست مي دهد. این نتیجه منطبق بر حذف صفر و قطب یکسان در سیستم و یا مودهاي پنهان مي باشد.

۵-۴) با توجه به کنترل پذیري و رؤیت پذیري $\dfrac{k}{s+\alpha}$ کنترل پذیري و رؤیت پذیري سیستم زیر را تعیین کنید.



پاسخ: روش اوّل بررسي براساس فضاي حالت

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha & 0\\ 0 & -\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{C}=\begin{bmatrix}k_1 & -\alpha k_1\\ k_2 & -\beta k_2\end{bmatrix},\quad \mathbf{O}=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\\ -\alpha C_1 & -\beta C_2\end{bmatrix}$$

سيستم تنها درصورتي كنترل ناپذير و رؤيت ناپذير است كه $\alpha=\beta$

روش دوم: بررسي مودهاي پنهان

$$y(s)=(\frac{C_1k_1}{s+\alpha}+\frac{C_2k_2}{s+\beta})u(s)$$

$$H(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{C_1k_1s(s+\beta)+C_2k_2(s+\alpha)}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

$$=\frac{(C_1k_1+C_2k_2)s+(C_1k_1\beta+C_2k_2\alpha)}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

$$H(s)=C_1k_1+C_2k_2\frac{s+\dfrac{C_1k_1\beta+C_2k_2\alpha}{C_1k_1+C_2k_2}}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

درحالتيكه $\alpha=\beta$ باشد سيستم داراي صفر $s+\frac{c_1k_1\beta+c_2k_2\alpha}{c_1k_1+c_2k_2}=s+\alpha$ منطبق بـر قطب سيستم خواهد شد و مود نهان خواهيم داشت. لـذا سيسـتم كنتـرل پـذيري خـود را از دسـت مي دهد.

۴-۶) كنترل پذيري تحقق كانونيكال كنترل پذيري را بررسي كنيد.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & b & c & \cdots & d\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix}B\,| & AB\,| & A^2B & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & & 1\\ 0 & 0 & 0 & & d\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & d^2\\ 0 & 1 & d & & \vdots\\ 1 & d & d^2 & & d^{n-1}\end{bmatrix}$$

بدون توجه به مقادير $a,b,c,\dots,d$ ماتريس كنترل پذيري $\mathbb{C}$ داراي مرتبه كامل است.

$$\text{rank}\ \mathbb{C}=n$$

لذا تحقق فوق حتماً كنترل پذير است.

۴-۷) مدل خطي و تقريبي يک هواپيمـا در شـرايط خـاص پـرواز توسـط متغيرهـاي حالـت و ورودي كنترل زير قابل نمايش است.

$$x=\begin{bmatrix}p & r & \beta & \varphi\end{bmatrix}^T \qquad \text{u}=\begin{bmatrix}\delta_a & \delta_r\end{bmatrix}^T$$

كه در آن r و p نرخ تغييرات حركت چرخشي (roll) و حركت ياو (yaw) مي باشند. β زاويـه انحراف هواپيما در امتداد طول و φ زاويه چرخش يا (roll) مـي باشـد. ورودي هواپيمـا زاويـه باله هاي افقي aileron در بالهاي اصلي هواپيما δ_u و زاويه چرخش بالک عمودي (rudder) در پشت هواپيما است δ_r. براي چنين سيستمي مدل فضاي حالت به فرم زير است:

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

$$A=\begin{bmatrix}-10 & 0 & -10 & 0\\ 0 & -0.7 & 9 & 0\\ 0 & -1 & -0.7 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad \text{B}=\begin{bmatrix}20 & 2.8\\ 0 & -3.13\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

حال فرض كنيد در اثر اصابت گلوله اي به بالک عمودي δ_r خوب عمل ننموده و مي خـواهيم بررسي كنيم آيا درصورت حذف اين ورودي سيستم همچنان كنترل پذير باقي مي ماند يا خير. همچنين درصورتي كه δ_r تحت كنترل باشد ولي δ_r به علت سـانحه اي از كـار افتـاده باشـد كنترل پذيري مجموعه را بررسي كنيد.

پاسخ: درصورتیکه δ_r از کار افتاده باشد، تنها یک ستون B فعال است و لذا

$$B_1=\begin{bmatrix}20\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ماتریس کنترل پذیري را تشکیل مي دهیم.

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & A^3B\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix}20 & -200 & 2000 & -2\times10^{-4}\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 20 & -200 & 2\times10^{3}\end{bmatrix}$$

همانگونه که مشاهده مي شود رتبة ماتریس دو است:

$$rank(\mathbb{C})=2<n$$

لذا سیستم کنترل پذیري خود را از دست مي دهد. از لحاظ فیزیکي در اثر این سانحه چـرخش لازم به هواپیما توسط بالکهاي افقي داده مي شود، اما مانورهائي که باعـث چـرخش هواپیمـا و تغییر جهت و حرکت آن بشود قابل دسترسي نخواهد بود.

حال اگر تنها δ_r به عنوان ورودي حاضر باشد.

$$B=\begin{bmatrix}2.8\\-3.10\\0\\0\end{bmatrix}$$

در اینحالت ماتریس کنترل پذیري عبارتست از:

$$\mathbb{C}=\left[\begin{array}{c|c|c|c}2.8 & -28 & 248.7 & -2443.18\\-3.18 & 2.191 & 26.636 & -50.08\\0 & 3.13 & -4.382 & -23.57\\0 & 2.8 & -28 & 248.7\end{array}\right]$$

مرتبة این ماتریس چهار است لذا در اینحالت سیستم کنترل پذیر است. این بدان معناست کـه درصورتیکه بالك عمودي کار کند، مي توان مانورهاي مختلف را از هواپیما انتظار داشت. اما بـا توجّه به از دست دادن کنترل بالکهاي افقي مانورهاي مطمـئن و سـریع از هواپیمـا نمـي تـوان

انتظار داشت. به هر حال این تحلیل نشان مـي دهـد اهمیـت حفـظ کنتـرل در حرکـت بالـک عمودي بسیار حائز اهمیت است.

۴-۸) مدل خطي هواپیما ارائه شده در مسئله ۴-۷) را درنظر بگیرید. اگر در سیستمهاي ابـزار دقیق هواپیما تنها P نرخ چرخش رول اندازه گیري شود آیا سیستم رؤیت پذیر است؟ اگر تنهـا φ اندازه گیري شود رؤیت پذیري سیستم را تحلیل کنید.

پاسخ: در حالت اول $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

و ماتریس رؤیت پذیري برابر است با

$$\mathbf{O}^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-10 & 0 & -10 & 0\\100 & 10 & 107 & 0\\-1000 & -114 & -984.9 & 0\end{bmatrix}$$

مرتبة این ماتریس نیز برابر است با

$$rank(\mathbf{O})=3<4$$

لذا سیستم رؤیت پذیر نیست. از لحاظ فیزیکي در واقع با اندازه گیري نرخ تغییـرات زاویـة رول هیچگاه نمي توان زاویة مطلق رول را اندازه گیري نمود. چرا که شـرایط اولیـه آن در دسـترس نیست.

حال اگر تنها ϕ مورد اندازه گیري واقع شود. $C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

و ماتریس رؤیت پذیري برابر خواهد است با:

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\\-10 & 0 & -10 & 0\\100 & 10 & 107 & 0\end{bmatrix}$$

رتبة این ماتریس چهار است.

$$rank(\mathbf{O})=4$$

لذا سیستم رؤیت پذیر باقي خواهد ماند. این بدان معناست که با اندازه گیري زاویة چرخش یاو مي توان از معادلات سیستم بهره جست، و سایر متغیرهاي حالت را تخمین زد.

فصل پنجم

۵-۱) يک سيستم SISO داراي تابع تبديل زير است.

$$H(s)=\frac{(s+s)(s+\alpha)}{(s+2)(s+3)(s+\alpha)}$$

الف) ابتدا با حذف صفر قطب مشترک، سيستم فوق را به فرم فضاي حالت محقق کنيد.

ب) بدون حذف صفر و قطب مشترک، سيستم فوق را به فرم فضاي حالت محقق کنيد.

ج) کنترل پذيري و رؤيت پذيري تحققهاي فوق را بررسي کنيد.

پاسخ:

الف) با حذف صفر و قطب خواهيم داشت:

$$H(s)=\frac{s+5}{s^2+5s+6}$$

با استفاده از تحقق کانونيکال کنترل پذيري خواهيم داشت:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x$$

$$y=\begin{bmatrix}5 & 1\end{bmatrix}x$$

ب) بدون حذف صفر و قطب خواهيم داشت:

$$H(s)=\frac{s^2+(5+\alpha)s+5\alpha}{s^3+(5+\alpha)s^2+(6+5\alpha)s+6\alpha}$$

لذا با استفاده از تحقق کانونيکال کنترل پذيري خواهيم داشت:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6\alpha & -(6+5\alpha) & -(5+\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}5\alpha & 5+\alpha & 1\end{bmatrix}x$$

ج) کنترل پذيري را با استفاده از ماتريس کنترل پذيري بررسي مي کنيم.

$$\mathbb{C}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -5\end{bmatrix}\;;\; rank(\mathbb{C}_1)=2\Rightarrow$$ سيستم کنترل پذير است

$$\mathbb{C}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -(5+\alpha)\\ 1 & -(5+\alpha) & -(6+5\alpha)+(5+\alpha)^2\end{bmatrix}\;;\;\text{rank}(\mathbb{C}_2)\text{=3}$$

سيستم کنترل پذيراست. انتظار کنترل پذيري هر دو تحقق را داشتيم چرا که از تحققهاي کانونيکال کنترل پذيري در هر دو حالت استفاده نموده ايم. اما رؤيت پذيري:

$$\mathbf{O}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -5\end{bmatrix}\;;\; rank(\mathbf{O}_1)=2\Rightarrow$$ سيستم رؤيت پذير است:

$$\mathbf{O}_2=\begin{bmatrix}5\alpha & 5+\alpha & 1\\ -6\alpha & -6 & 0\\ 0 & -6\alpha) & -6\end{bmatrix}\;;\;\text{rank}(\mathbf{O}_2)\text{=2}<n$$

لذا اين سيستم مطابق انتظار رؤيت پذير نخواهد بود، چراکه حذف صفر و قطب در آن صورت نگرفته و مود پنهان در اين تحقق موجود است.

۵-۲) تحققهاي مختلف معرفي شدة زير را براي سيستم زير تعيين کنيد.

$$H(s)=\frac{s^2-9}{s^3-7s-6}$$

الف) تحقق کانونيکال کنترل پذيري

ب) تحقق کانونيکال کنترلر

ج) تحقق کانونيکال رؤيت پذيري

د) تحقق کانونيکال رؤيتگر

ه) تحقق کانونيکال جوردن

و) تحقق کاهش ناپذير

در هر مورد کنترل پذيري و رؤيت پذيري را بررسي نموده و همچنين پايداري B/BO و داخلي سيستم را بررسي نمائيد.

پاسخ:

الف) تحقق کانونيکال کنترل پذيري

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 6 & 7 & 0\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\quad c=\begin{bmatrix}-9 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}-9 & 0 & 1\\ 6 & -2 & 0\\ 0 & 6 & -2\end{bmatrix}\qquad \operatorname{rank}(\mathbf{O})=2$$
سیستم رؤیت پذیر نمي باشد.

ب) تحقق کانونیکال کنترلر

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 6\\ 1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad c=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

که در آن پارامترهاي ماركوف از رابطة زیر تعیین شده اند.

$$\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -7 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -2\end{bmatrix}$$

مجدداً این تحقق حتماً کنترل پذیر مي باشد، اما رؤیت پذیر نیست.

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 6\\ -2 & 6 & -14\end{bmatrix}\qquad \operatorname{rank}(\mathbf{O})=2<n$$

ج) تحقق کانونیکال رؤیت پذیري

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 6\\ 1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}-9\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\quad c=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

این تحقق رؤیت پذیر است، اما کنترل پذیر نمي باشد.

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix}-9 & 6 & 0\\ 0 & -2 & 6\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\qquad \operatorname{rank}(\mathbb{C})=2$$

د) تحقق کانونیکال رؤیتگر

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 6 & 7 & 0\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -2\end{bmatrix}\quad c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

کنترل پذیري این سیستم نیز تحت الشعاع قرار مي گیرد.

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 6\\ -2 & 6 & -14\end{bmatrix}\qquad \operatorname{rank}(\mathbb{C})=2$$

ه) تحقق جوردن

$$H(s)=\frac{s^2-9}{(s^3-7s-6)}=\frac{s^2-9}{(s+1)(s+2)(s-3)}$$

به کسرهاي جزئي تجزیه مي کنیم.

$$=\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2}+\frac{0}{s-3}$$

لذا تحقق به فرم زیر خواهد بود.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\quad c=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

این سیستم نیز کنترل پذیر است اما رؤیت پذیر نمي باشد.

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix}\qquad \operatorname{rank}(\mathbf{O})=2$$

و) تحقق کاهش ناپذیر:

با توجه به اینکه در همة حالات فوق یکي از شرایط کنترل پذیري یا رؤیت پذیري برقرار نمي گردد تحققهاي فوق کاهش پذیر بوده و با حذف مود پنهان به صورت زیر مي توان تحقق کاهش ناپذیر را تعیین نمود.

$$H(s)=\frac{(s+3)\cancel{(s-3)}}{(s+1)(s+2)\cancel{(s-3)}}=\frac{(s+3)}{s^2+3s+2}$$

با تحقق کانونیکال کنترل پذیري:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\quad c=\begin{bmatrix}-3 & 1\end{bmatrix}$$

این تحقق حتماً کنترل پذیر و رؤیت پذیر خواهد بود.

۵-۳) با استفاده از قضية لياپانوف شرايط كافي به منظور پايداري يک ماهواره را كه از معادلات اويلر تبعيت مي كند را بدست آوريد.

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_x-(B-C)\omega_y\omega_z=k_1A\omega_x \\ B\dot{\omega}_y-(C-A)\omega_z\omega_x=k_2B\omega_y \\ C\dot{\omega}_z-(A-B)\omega_x\omega_y=k_3C\omega_z \end{cases}$$

پاسخ: با فرض متغيرهاي حالت برابر $x_1=\omega_x, x_2=\omega_y, x_3=\omega_z$ معادلات حالت سيستم غيرخطي فوق را به صورت زير مي توان نوشت.

$$\begin{cases} \dot{x}_1-(\frac{B}{A}-\frac{C}{A})x_2x_3=k_1x_1 \\ \dot{x}_2-(\frac{C}{B}-\frac{A}{B})x_3x_1=k_2x_2 \\ \dot{x}_3-(\frac{A}{C}-\frac{B}{C})x_1x_2=k_3x_3 \end{cases}$$

تابع لياپانوف زير را كانديد مي كنيم.

$$V(x)=x^Tpx=x^T\begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & C^2 \end{bmatrix}x$$

$$=A^2x_1^2+B^2x_2^2+C^2x_3^2>0$$

مثبت معين مي باشد.

$$\dot{V}(x)=\dot{x}\ Px+x^TP\dot{x}$$

$$\dot{V}(x)=\cdots=x^T\begin{bmatrix} 2k_1A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2k_2B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2k_3C^2 \end{bmatrix}x=-x^TQx$$

كه در آن ماتريس Q نيز مثبت معين است به شرطي كه $k_1,k_2,k_3>0$. خوشبختانه با انتخاب اين تابع لياپانوف مي توان شرط پايداري را براحتي تعيين نمود.

۵-۴) سيستم خطي زير را درنظر بگيريد

$$\dot{x}=Ax$$

تابع لياپانوف كانديد V را به صورت زير در نظر بگيريد كه در آن P مثبت معين است و با تعيين مشتق تابع لياپانوف به شرط "معادله لياپانوف" مي رسيم

$$V(x)=x^TPx$$

$$\dot{V}(x)=x^T(A^TP+PA)x=-x^TQx$$

$$A^TP+PA=-Q$$

حال نشان دهيد سيستم پايدار مجانبي است اگر و تنها اگر:

$$\text{rank}\begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ Q^{1/2}A \\ \vdots \\ Q^{1/2}A^{n-1} \end{bmatrix}=n$$

پاسخ: با فرض برقراري معادله لياپانوف P,Q مثبت معين مي توان يافت كه معادله لياپانوف باشد لذا

$$\dot{V}(x)=-x^TQx=-x^TQ^{1/2}Q^{1/2}x$$

حال $\dot{V}(x)=0$ به اين معني است كه:

$$Q^{1/2}x=0$$

اگر از اين معادله به مكرراً مشتق بگيريم:

$$Q^{1/2}\dot{x}=Q^{1/2}Ax=0$$

$$Q^{1/2}A\dot{x}=Q^{1/2}A^2x=0$$

$$\vdots$$

$$Q^{1/2}A^{n-1}x=0$$

اگر اين معادلات را زير هم بنويسيم.

$$\begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ Q^{1/2}A \\ \vdots \\ Q^{1/2}A^{n-1} \end{bmatrix}x=0$$

لذا اگر رتبه اين ماتريس برابر n باشد اين معادله تنها در $x=0$ صادق خواهد بود و تابع $\dot{V}(x)=0$ منفي معين خواهد شد. و پايداري سيستم طبق قضيه لياپانوف برقرار است.
طرف ديگر اين قضيه را نيز به صورت مشابه مي توان اثبات كرد.

۵-۵) با استفاده از رابطه فوق پایداري سیستم زیر را بررسي کنید.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

با استفاده از معادله لیاپانوف

$$A^T P+PA=-Q$$

فرض کنیم.

$$Q=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow Q^{1/2}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\text{rank}\begin{bmatrix}Q^{1/2}\\ Q^{1/2}A\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}=2$$

لذا سیستم بایستي پایدار باشد حال معادله لیاپانوف را براي سیستم حل مي کنیم.

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}$$

$$A^T P+PA=-Q$$

$$P=\cdots=\left[\begin{array}{c|c}5 & 2\\ \hline 2 & 1\end{array}\right]$$

$$5>0,\quad \det(P)=1>0$$

لذا P مثبت معین بوده و سیستم فوق پایدار مجانبي است.

۵-۶) سیستم مرتبه دو زیر را به صورت پارامتریک درنظر بگیرید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}x\quad (a_{ij}\in\mathbb{R})$$

شرایطي را براي ضرایب a_{ij} تعیین کنید که سیستم مزبور پایدار مجانبي باشد.

پاسخ:

$$A^T P+PA=-I$$

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}2(a_{11}p_{11}+a_{21}p_{22})=-1\\ a_{11}p_{12}+a_{21}p_{22}+a_{12}p_{11}+a_{22}p_{12}=0\\ 2(a_{12}p_{12}+a_{22}p_{22})=-1\end{cases}$$

با ساده سازي معادلات خواهیم داشت:

$$\mathrm{P}=\frac{1}{2(a_{11}+a_{22})|A|}\begin{bmatrix}-(|A|+a_{21}^2+a_{22}^2) & a_{12}a_{22}+a_{21}a_{11}\\ a_{12}a_{22}+a_{21}a_{11} & -(|A|+a_{11}^2+a_{12}^2)\end{bmatrix}$$

شرط مثبت معین بودن P برابر است با:

$$P_{11}=-\frac{(|A|+a_{21}^2+a_{22}^2)}{2(a_{11}+a_{22})|A|}>0$$

$$|P|=-\frac{(a_{11}+a_{22})^2(a_{12}-a_{21})^2}{4(a_{11}+a_{22})^2|A|}>0$$

که شرایط فوق به معادلات زیر ساده مي شوند.

$$|A|>0,\quad a_{11}+a_{22}<0$$

فصل ششم

۶-۱) سیستم زیر را درنظر بگیرید.

$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=cx$$

که در آن

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}\quad c=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

و معادلة مشخصه آن عبارتست از

$$|sI-A|=s^2+3s+2=(s+1)(s+2)=0$$

کنترل کننده فیدبک حالت را به گونه اي طراحي کنید که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته بـر روی 3-,5- جایابي شود.

پاسخ: سیستم کنترل پذیر مي باشد چرا که مرتبة ماتریس کنترل پذیري زیر دو است.

$$C=\begin{bmatrix}B & | & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -6\end{bmatrix}$$

- روش هم ارزي چند جمله اي مشخصه:

$$k^T=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$$

$$p_d(s)=(s+3)(s+5)=s^2+5s+15$$

$$A\text{ - }Bk=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2-2k_1 & -3-2k_2\end{bmatrix}$$

$$|sI-A+Bk|=\begin{vmatrix}s & -1\\ 2(k_1+1) & s+3+2k_2\end{vmatrix}$$

$$=s(s+3+2k_2)+2(k_1+1)$$

$$=s^2+(3+2k_2)s+2(k_1+1)$$

$$\equiv p_d(s)=s^2+8s+15$$

$$\begin{cases}3+2k_2=8\\ 2(k_1+1)=15\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}k_2=5/2\\ k_1=6.5\end{matrix}\rightarrow u=-\begin{bmatrix}6.5 & 2.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

- روش مستقيم

با استفاده از معادله (۶-۳۶) بردار بهرة فيدبک را از رابطة زير ميتوان بدست آورد.

$$p_d(s)=p_0(s)+k^T Adj(sI-A)b$$

که درآن

$$p_d(s)=s^2+8s+15$$

$$p_0(s)=s^2+3s+2$$

$$Adj(sI-A)\cdot b=\begin{bmatrix}\times & 1\\ \times & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 2s\end{bmatrix}$$

لذا

$$s^2+8s+15\equiv s^2+3s+2+2k_1+2sk_2$$

$$\begin{cases}2k_1+2=15\\ 3+2sk_2=8\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}k_1=6.5\\ k_2=2.5\end{matrix}\rightarrow u=-\begin{bmatrix}6.5 & 2.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

- روش بس گيورا

با استفادة از معادلة (۶-۳۹) بهره فيدبک حالت را به ترتيب زير تعيين مي کنيم:

$$k^T=(\alpha-a)\psi^{-1}\mathbb{C}^{-1}$$

که در آن α ضرايب چند جمله اي مطلوب است. $\alpha_0=15, \alpha_1=8$

و a ضرايب چند جمله اي حلقه باز مي باشد. $a_0=2,\ a_1=3$

و

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix}B & | & BA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -6\end{bmatrix}$$

$$\psi=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\mathbb{C}\cdot\psi=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$k^T=\begin{bmatrix}8-3 & | & 15-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}5 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0.5\\ 0.5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.5 & 2.5\end{bmatrix}$$

- روش تبديل همانندي

در اين روش معکوس ψ از رابطة زير تعيين مي کنيم.

$$\psi^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

لذا

$$k^T=(\alpha-a)\psi^{-1}\mathbb{C}^{-1}$$

$$k^T=\begin{bmatrix}8-3 & | & 15-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -6\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.5 & 0.5\\ 0.5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0.5\\ 0.5 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6.5 & 2.5\end{bmatrix}$$

- فرمول آکرمن

با استفاده از فرمول آکرمن معرفي شده در معادله (۶-۴۶) بهرة فيدبک حالت را به ترتيـب زيـر تعيين مي کنيم.

$$k^T=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\mathbb{C}^{-1}\alpha(A)$$

$$\alpha(A)=A^2+8A+15I=\begin{bmatrix}13 & 5\\ -10 & -2\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -6\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1.5 & 0.5\\ 0.5 & 0\end{bmatrix}$$

$$k^T=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.5 & 0.5\\ 0.5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13 & 5\\ -10 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.5 & 2.5\end{bmatrix}$$

روش مين- مرداخ

با توجه به اينكه ماتريس A سيستم قطري نيست ابتدا ماتريس تبديل همانندي T را با استفاده از بردارهاي ويژة ماتريس A تعيين مي كنيم.

$$\lambda_i=-1,\ -2$$

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix};\ v_2=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix};\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

لذا به صورت قطري خواهيم داشت:

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix};\ b_\Lambda=T^{-1}b=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$$

$$k_1'=\frac{(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_1-\mu_2)}{b_1(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{(-1+3)(-1+5)}{2(-1+2)}=4$$

$$k_2'=\frac{(\lambda_2-\mu_1)(\lambda_2-\mu_2)}{b_2(\lambda_2-\lambda_1)}=\frac{(-2+3)(-2+5)}{2(-2+1)}=-1.5$$

$$k^T=k'\cdot T^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.5 & 2.5\end{bmatrix}$$

۶-۲) سيستم زير را درنظر بگيريد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u$$

الف) نشان دهيد سيستم فوق كنترل ناپذير است و مودهاي كنترل ناپذيري را تعيين كنيد.

ب) معادلات حالت را با ورودي جديد u_{ex} بـا فـرض اينكـه $u=-[k_1\quad k_2]x+u_{ex}$ اسـت بازنويسي كرده و نشان دهيد به ازاي تمام مقادير k_2,k_1 سيستم مدار بسته نيز كنتـرل ناپـذير است و مود كنترل ناپذيري آن تغيير نكرده است.

ج) به ازاي $y=[c_1\quad c_2]x$ تابع تبديل y/u_{ex} را تعيين نموده و نشان دهيد به ازاي كليـة مقادير k_2,k_1,c_2,c_1 همواره حذف صفر و قطب و مود پنهـان در ايـن نمـايش وجـود خواهـد داشت.

پاسخ:

الف) ماتريس كنترل پذيري سيستم عبارتست از

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\rightarrow rank(\mathbb{C})=1$$

سيستم كنترل ناپذير است و لذا مود كنترل ناپذير برابر است با

$$v^T\mathbb{C}=0\Rightarrow v=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

مود كنترل ناپذيري برابر است با

$$v^TA=\lambda_i v^T$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}=0.\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow \underline{\lambda_i=0}$$

ب) معادلات حالت را بازنويسي مي كنيم.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-k_1 & -k_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u_{ex}$$

$$=\begin{bmatrix}k_1 & 1+k_2\\ -k_1 & -1-k_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u_{ex}$$

مقدار ويژه و بردار ويژة مربوط $\lambda_i=0$ همچنان باقي است.

$$v^TA=\lambda_i v^T$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & 1+k_2\\ -k_1 & -(1+k_2)\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=0$$

لذا همچنان مود $\lambda_i=0$ مود کنترل ناپذیر سیستم است.

ج) تابع تبدیل را با کمک تبدیل پلاس به صورت زیر تعیین مي کنیم.

$$(sI-A)=\begin{bmatrix}s-k_1 & -(1+k_2)\\ k_1 & s+(1+k_2)\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+(1+k_2-k_1)s}\begin{bmatrix}s+(1+k_2) & 1+k_2\\ -k_1 & s-k_1\end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1}\cdot B=\frac{\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}}{s^2+(1+k_2-k_1)s}\begin{bmatrix}-s-(1+k_2)+(1+k_2)\\ k_1+s-k_1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{-sc_1+sc_2}{s\left[s+1+k_2-k_1\right]}=\frac{s(c_2-c_1)}{s\left[s+1+k_2-k_1\right]}$$

همانگونه که مشاهده مي شود و همواره حذف قطب s=0 را در تابع تبدیل مدار بسته سیستم شاهد مي باشیم. لذا مود پنهان در سیستم موجود بوده و سیستم کنترل ناپذیر باقي مي ماند.

۶–۳) سیستم موتور DC را درنظر بگیرید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4.438\\ 0 & -12 & -24\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\20\end{bmatrix}m$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

الف) بهرة فیدبک حالت سیستم را به گونه اي طراحي کنید که قطبهاي حلقه بسته سیستم برروي $-6\pm j6,48$ جایابي شوند.

ب) بهرة فیدبک حالت سیستم را براي جایابي قطب در فاصله اي دورتر و در نقاط $-12\pm j12,-96$ و همچنین $-24\pm j24,-192$ بدست آورید.

ج) پایداري مقاوم کدامیک از سیستمهاي فوق با اطمینان بیشتري تامین مي شوند.

پاسخ:

الف) معادلة مشخصه مطلوب را محاسبه مي کنیم.

$$p_d(s)=(s+48)(s+6\pm j6)$$
$$=s^3+60s^2+648s+3456$$

مطابق مثال (۶-۲) بهرة فیدبک حالت را تعیین مي کنیم.

$$p_d(s)=s^3+(24+20k_3)s^2+(52.058+88.76k_2)s+88.76k_1$$

$$\begin{cases}24+20k_3=60\\ 52.06+88.76k_2=648\\ 88.76k_1=3456\end{cases}\rightarrow\begin{cases}k_3=1.8\\ k_2=6.71\\ k_1=38.96\end{cases}$$

$$k=\begin{bmatrix}38.96 & 6.71 & 1.8\end{bmatrix}$$

ب) بهمین ترتیب بهرة فیدبک حالت را براي قطبهاي دورتر تعیین مي کنیم:

$$p_d(s)=(s+96)(s+12\pm j12)$$
$$k=\begin{bmatrix}311.5 & 25.6 & 4.8\end{bmatrix}$$

و

$$p_d(s)=(s+192)(s+24\pm j24)$$
$$k=\begin{bmatrix}2491 & 116.2 & 10.8\end{bmatrix}$$

ج) همانگونه که مشاهده مي شود با دور کردن قطبهاي دلخواه از محور $j\omega$ بهرة فیدبک حالت افزایش یافته بدین ترتیب پهناي باند تابع تبدیل مدار بسته سیستم افزایش یافته و تلاش کنترلي مورد نیاز نیز متناسباً افزایش مي یابد. مي توان نشان داد که فرکانس عبور تابع تبدیل حلقه بسته سیستم در سه حالت فوق به ترتیب 30,16 و نهایتاً rad/sec 100 است. به منظور رسیدن به پایداري مقاوم بایستي طیف نامعیني مدل براي حالتي که قطبها بسیار دورند تا فرکانسهاي بسیار بالا (100rad/sec) کوچک باشد و امکان وجود طیف فرکانسي نامعیني بزرگ در فرکانسهاي بالا مهیاست. لذا درحالتیکه مدل سیستم دقیق نبوده و همچنین محدودیت در تلاش کنترلي وجود داشته باشد نمي توان قطبهاي سیستم حلقه بسته را خیلي دور از محور $j\omega$ انتخاب نمود.

۶–۴) سیستم زیر را درنظر بگیرید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\mu$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\dot{x}$$

بهرة فیدبک حالت بهینة سیستم را به صورت تحلیلي به گونه اي طراحي کنید که تابع هزینة زیر کمینه گردد.

$$J=\int_0^\infty (y^2(t)+\rho u^2(t))dt \qquad \rho>0$$

پاسخ:

مطابق قضية (۶-۶) $k = R^{-1}B^T P$

که در آن P در معادلة زير صدق مي کند.

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

در تابع هزينة فوق داريم:

$$J = \int_0^\infty (x_1^2(t) + \rho u^2(t))dt$$

لذا $R = \rho,\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ معادلة فوق را مقداردهي نموده و به ازاي P حل مي کنيم.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} -$$

$$\frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با ساده سازي زير به معادلات برحسب P_{ij} خواهيم رسيد.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} -$$

$$\frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتيجه:

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\rho}(p_{11}(p_{11} - p_{12}) + p_{12}(p_{12} - p_{11})^2 = 0 \\ p_{11} - \dfrac{1}{\rho}(p_{11}(p_{12} - p_{22}) + p_{12}(p_{22} - p_{12}) = 0 \\ 2p_{12} - \dfrac{1}{\rho}(p_{12}(p_{12} - p_{22}) + p_{22}(p_{22} - p_{12})) = 0 \end{cases}$$

بدين ترتيب:

$$\begin{cases} \rho = p_{11}^2 - 2p_{11}p_{12} + p_{12}^2 = (p_{11} - p_{12})^2 \\ \rho p_{11} = (p_{11} - p_{12})(p_{12} - p_{22}) \\ 2\rho p_{12} = (p_{11}^2 - 2p_{12}p_{22} + p_{22}^2) = (p_{11} - p_{22})^2 \end{cases}$$

حال معادلات فوق را حل مي کنيم.

$$(p_{11} - p_{12})^2 = \rho \rightarrow \underline{p_{11} - p_{12} = \pm\sqrt{\rho}}$$

معادله دوم را به توان دو مي رسانيم و جايگذاري مي کنيم.

$$\not{\rho}^2 p_{11}^2 = (p_{11} - p_{12})^2 (p_{12} - p_{22})^2 = \not{\rho} \cdot 2 \cdot \not{\rho} p_{12} \rightarrow p_{11}^2 = 2p_{12}$$

با تلفيق دو معادلة فوق و حذف p_{11}, p_{12} را بدست مي آوريم.

$$2p_{11} - 2p_{12} = \pm 2\sqrt{\rho}$$

$$2p_{11} - 2p_{11}^2 = \pm 2\sqrt{\rho}$$

$$p_{11}^2 - 2p_{11} \pm 2\sqrt{\rho} = 0$$

به ازاي کليه مقادير ρ بايستي $p_{11} > 0$ لذا $p_{11} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - (\pm 2\sqrt{\rho})}}{1}$

تنها جواب معادله به صورت زير و با فرض $p_{11} - p_{12} = -\sqrt{\rho}$ صحيح است

$$p_{11} = 1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}}$$

$$p_{12} = \frac{1}{2}p_{11}^2 = \frac{1}{2}(1 + 1 + 2\sqrt{\rho} + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}})$$

$$p_{12} = (1 + \sqrt{\rho} + \sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}})$$

$$(p_{11} - p_{22})^2 = 2\rho p_{12} \rightarrow p_{11} - p_{22} = \pm\sqrt{2\rho} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{\rho} + \sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}}})$$

p_{22} نيز بايستي حتماً مثبت باشد لذا:

$$p_{22} = 1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}} + \sqrt{2\rho}.\sqrt{1 + \sqrt{\rho + \sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}}}}$$

حال به ازاي $\rho = 2$ خواهيم داشت:

$$P = \begin{bmatrix} 2.9566 & 4.3708 \\ 4.3708 & 7.5522 \end{bmatrix}$$

که ماتريسي مثبت و معين است. در اينحالت بهرة فيدبک حالت برابر است با:

$$k = \rho^{-1}.[1 \quad -1].\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho}[p_{11} - p_{12} \quad p_{12} - p_{22}]$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[-\sqrt{\rho} \quad \sqrt{\rho} - \sqrt{2\rho} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{\rho} + \sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}}})\right]$$

فصل هفتم

۷-۱) سيستم زير را درنظر بگيريد.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الف) رؤيت پذيري سيستم را بررسي كنيد.

ب) با استفاده از روش مستقيم بهرة رؤيت گر حالت k را به گونه اي بيابيد كه قطبهاي سيستم خطاي پيش بيني برروي $-5, -2 \pm j3.464$ جايابي گردند.

ج) همين رؤيتگر را با استفاده از فرمول آكرمن طراحي كنيد.

پاسخ:

الف) ماتريس رؤيت پذيري را تشكيل مي دهيم.

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank } \mathbf{O} = 3$$

لذا سيستم رؤيت پذير است.

ب) بهرة رؤيت گر حالت را به صورت زير تعريف مي كنيم.

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}^T$$

با استفاده از روش مستقيم چند جمله اي مشخصة سيستم را بدست مي آوريم.

$$|sI - A + kc| = \begin{vmatrix} s+k_1 & -1 & 0 \\ k_2 & s & -1 \\ k_3+6 & 11 & s+6 \end{vmatrix}$$
$$= s^3 + (k_1+6)s^2 + (6k_1 + k_2 + 11)s + 11k_1 + 6k_2 + k_3 + 6$$

از طرف ديگر چندجمله اي مطلوب عبارتست از:

$$p_d(s) = (s + 2 \pm j3.464)(s+2) = s^3 + 9s^2 + 36s + 80$$

با هم ارز قراردادن اين دو عبارت خواهيم داشت.

$$\begin{cases} k_1 + 6 = 9 \\ 6k_1 + k_2 + 11 = 36 \quad \rightarrow k_1 = 3,\ k_2 = 7,\ k_3 = -1 \\ 11k_1 + 6k_2 + k_3 + 6 = 80 \end{cases}$$

لذا بهرة رؤيت گر حالت عبارتست از

$$k = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}^T$$

ج) با استفاده از فرمول آكرمن خواهيم داشت:

$$k = \varphi(A)\mathbf{O}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

كه درآن

$$\varphi(s) = s^3 + 9s^2 + 36s + 80$$

لذا

$$\varphi(A) = A^3 + 9A^2 + 36A + 80I = \cdots = \begin{bmatrix} 74 & 25 & 3 \\ -18 & 41 & 7 \\ -42 & -95 & -1 \end{bmatrix}$$

همچنين

$$\mathbf{O}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لذا درنهايت خواهيم داشت:

$$k = \begin{bmatrix} 74 & 25 & 3 \\ -18 & 41 & 7 \\ -42 & -95 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۷-۲) براي سيستم زير فرض مي كنيد x_1 اندازه گيري مي شود و رؤيت گر لـوئنبرگر طراحـي كنيد كه ساير متغيرهاي حالت را مورد مشاهده قرار دهد و قطبهاي سيستم ديناميكي خطـا را برروي $-2 \pm j3.464$ جايابي نمايد.

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}\right] u$$

$$y = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] x$$

پاسخ: با توجه به مقادير فوق خواهيم داشت:

$$A_{mm}=0 \quad \mathrm{A_{mm}}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \quad \mathrm{A_{mm}}=\begin{bmatrix}0\\-6\end{bmatrix}, \mathrm{A_{mm}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-11 & -6\end{bmatrix}$$

$$B_m=0, \quad Bu=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

لذا چند جمله اي مشخصة سيستم مشاهده نشده (u) عبارتست از:

$$|sI-A_{uu}|=\begin{vmatrix}s & -1\\11 & s+6\end{vmatrix}=s^2+6s+11$$
$$=\mathrm{s}^2+\hat{a}_1 s+\hat{a}_2$$

كه درآن

$$\hat{a}_1=6, \hat{a}_2=11$$

توجه كنيد كه

$$\hat{N}=\left[A_{mu}{}^T \mid A_{uu}^T A_{uu}^T\right]=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\hat{w}=\begin{bmatrix}\hat{a}_1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$
$$\hat{N}=\left(\hat{w}\hat{N}^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix}6 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -6\end{bmatrix}$$

با توجه به چند جمله اي مطلوب به فرم زير

$$(s+2\pm j634)=s^2+4s+16$$
$$=s^2+\hat{\alpha}_1 s+\hat{\alpha}_2$$

خواهيم داشت:

$$\hat{\alpha}_1=4, \hat{\alpha}_2=16$$

لذا با توجه به روش بس- گيورا و معادله (۶-۳۹) خواهيم داشت:

$$k=\hat{Q}\begin{bmatrix}\hat{\alpha}_2-\hat{\alpha}_2\\\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16-11\\4-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\17\end{bmatrix}$$

با استفاده از روش آكرمن نيز به همين پاسخ خواهيم رسيد.

$$K_e=\varphi(A_{uu})\begin{bmatrix}\dfrac{A_{mu}}{A_{mu}A_{uu}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

كه در آن

$$\varphi(A_{uu})=A_{uu}^2+\hat{\alpha}_1 A_{uu}+\hat{\alpha}_2 I$$
$$=\cdots=\begin{bmatrix}5 & -2\\22 & 17\end{bmatrix}$$

لذا

$$k_e=\begin{bmatrix}5 & -2\\22 & 17\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\17\end{bmatrix}$$

۷-۳) مدل خطي يک پاندول معکوس را درصورتيکه بخواهيم علاوه بر عمودي نگهداشتن جرم پاندول حرکت ارابه را متناسب با نياز حرکت دهيم مي توان به صورت زير بازنويسي کرد.

$$x=\begin{bmatrix}\theta\\\dot{\theta}\\x\\\dot{x}\end{bmatrix}, \quad \begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\y&=Cx\end{aligned}$$

از يک انتگراتور به منظور کنترل حرکت ارابه استفاده مي کنيم، لذا:

$$u=-Kx+K_1 z$$
$$\dot{z}=r-y=r-Cx$$

که درآن

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\20.601 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\-0.4905 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0.5\end{bmatrix} \quad \mathrm{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

بدين ترتيب سيستم تجميع شده فرم زير را خواهد داشت.

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}A & 0\\-C & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\20.601 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\-0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \hat{\mathrm{B}}=\begin{bmatrix}\mathrm{B}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0.5\\0\end{bmatrix}$$

کنترل فيدبک حالت در اين حالت را تشکيل مي دهيم.

$$U_e=-Le$$
$$L=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \mid & -k_I\end{bmatrix}$$

که k_I ضريب بهرة کنترل انتگرالي مي باشد. با استفاده از روش جايابي قطب به طراحي کنترل کننده مي پردازيم. ابتدا کنترل پذيري سيستم را چک مي کنيم.

$$\mathbb{C} = \left[\hat{B} \mid \quad \hat{A}\hat{B} \quad \ldots \quad \hat{A}\hat{B}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 & 0 \\ -1 & 0 & -20.601 & 0 & -(20.601)^2 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 & 10.14048 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & -0.4905 \end{bmatrix} \quad \text{rank } \mathbb{C} = 5$$

لذا سيستم کنترل پذير است.

چند جمله اي مشخصة سيستم حلقة باز عبارتست از:

$$\left|sI - \hat{A}\right| = s^3(s^2 - 20.601)$$
$$= s^5 - 20.601s^3$$
$$= s^5 + a_1s^4 + a_2s^3 + a_3s^2 + a_4s + a_5 = 0$$
$$a_1 = 0, a_2 = -20.601, a_3 = a_4 = a_5 = 0$$

به منظور داشتن زمان نشست مناسب براي سيستم (حدود ۴-۵ ثانيه) و ضريب استهلاک مناسب (با فراجهش ۱۵-۱۶٪) مي توان قطبهاي زير را پيشنهاد داد.

$$S_{1,2} = -1 \pm j1.732, S_{3,4,5} = -5$$

لذا چندجمله اي مشخصة مطلوب برابر است با:

$$s^5 + \alpha_1 s^4 + \alpha_2 s^3 + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s + \alpha_5 = 0$$
$$= (s - 1 \pm j1.732)(s+5)^3$$
$$= s^5 + 17s^4 + 109s^3 + 335s^2 + 550s + 500$$

لذا

$$\alpha_1 = 17, \alpha_2 = 109, \alpha_3 = 335, \alpha_4 = 550, \alpha_5 = 500$$

با توجه به روش بس گيورا معادله (۶-۳۹) ماتريس بهرة فيدبک حالت را بدست مي آوريم.

$$L = \left[\alpha_i - a_i\right].(\mathbb{C}\psi)^{-1}$$

$$\psi = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -20.601 & 0 & 1 \\ 0 & -20.601 & 0 & 1 & 0 \\ -20.601 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbb{C}\psi)^{-1} = \cdots = \frac{1}{9.81}\begin{bmatrix} 0 & -0.25/9.81 & 0 & -0.5/9.81 & 1 \\ -0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا بهرة فيدبک حالت برابر است با

$$L = \left[500-0 \mid 550-0 \mid 335-0 \mid 109+20.601 \mid 17-0\right](\mathbb{C}\psi)^{-1}$$
$$= \left[-157.6636 \quad -35.3733 \quad -56.0652 \quad -36.7466 \quad 50.9604\right]$$

بدين ترتيب براحتي مي توان نشان داد خطاي ماندگار پاسخ سيستم به ورودي پله برابر صفر خواهد شد چرا که از فيدبک انتگرال حالت براي متغير x استفاده شده است.

۴-۷) سيستم زير را درنظر بگيريد.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

بهرة رؤيت گر حالتي را براي سيستم فوق تعيين کنيد که قطبهاي سيستم خطاي پيش بيني را برروي $-1.8 \pm j2.4$ جايابي نمايد.

پاسخ: ابتدا رؤيت پذيري را چک مي کنيم.

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \text{rank } \mathbf{O} = 2$$

سيستم رؤيت پذير است.

- روش بس- گيورا:

$$\left|sI - A\right| = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$
$$a_1 = 0, a_2 = -20.6$$

چند جمله اي مطلوب

$$p_d(s) = (s+1.8 \pm j2.4) = s^2 + 3.6s + 9$$

$$\alpha_1 = 3.6, \alpha_2 = 9$$

بهرة رؤيتگر

$$K = (\psi \mathbf{O})^{-1}(\alpha_i - a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9+20.6 \\ 3.6-0 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \end{bmatrix}^T$$

- روش مستقيم: با درنظر گرفتن

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}^T$$

چندجمله اي مشخصه سيستم برابر است با

$$|sI - A + KC| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} s & -20.6 + k_1 \\ -1 & s + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$s^2 + k_2 s + k_1 - 20.6 = 0$$

با هم ارز قراردان معادلات مشخصه خواهيم داشت

$$\equiv s^3 + 3.6s + 9 = 0$$

$$k_1 = 29.6, k_2 = 3.6$$

- روش آكرمن:

$$K = \varphi(A)\mathbf{O}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

كه در آن:

$$\varphi(A) = A^2 + 3.6A + 9I = \cdots = \begin{bmatrix} 29.6 & 76.16 \\ 3.6 & 29.6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow K = \begin{bmatrix} 29.6 & 76.16 \\ 3.6 & 29.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.6 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

۷-۵) براي سيستم زير بهرة فيدبک رؤيتگر حالت را به گونـه اي طراحـي كنيـد كـه قطبهـاي سيستم خطا را برروي $-5, -2 \pm j3.464$ جايابي نمايد.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

پاسخ: ابتدا رؤيت پذيري سيستم را چک مي كنيم.

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rank } \mathbf{O} = 3$$

لذا سيستم رؤيت پذير است.

از روش بس-گيورا استفاده مي كنيم.

$$|sI - A| = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

$$a_1 = 6, a_2 = 11, a_3 = 6$$

$$p_d(s) = (s + 2 \pm j3.464)(s+5)$$

$$= s^3 + 9s^2 + 36s + 80$$

$$\alpha_1 = 9, \alpha_2 = 36, \alpha_3 = 80$$

$$\psi = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = (\psi \mathbf{O})^{-1}(\alpha_i - a_i)$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 80-6 \\ 36-11 \\ 9-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 74 \\ 25 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

واژه نامه

و

فهرست راهنما

واژه نامه

انگلیسی – فارسی

A

accelerometer	شتاب سنج
Ackermann formula	فرمول آکرمن
active suspension system	سيستم تعليق فعال
actuator	عملگر
angular velocity	سرعت زاويه اي
asymptotic stability	پايداري مجانبي

B

back electro-motive force (Emf)	ولتاژ ضدمحرکه
BIBO stability	پايداري ورودي– خروجي
block diagonal	قطري بلوکي
block-diagonal form	فرم بلوکي- قطري

C

cannonical realization	تحقق کانونيکال
cart	ارابه
causality	علّي بودن
characteristic equation	معادلة مشخصه
chemical reactor	راکتور شيميايي
compressibility	تراکم پذيري
concentration	غلظت
conjugate	مزدوج ماتريس
consistent	سازا
control valve	شير کنترل
controllability	کنترل پذيري
controllability cannonical realization	تحقق کانونيکال کنترل پذيري
controllable subspace	زيرفضاي کنترل پذير
controller cannonixal realization	تحقق کانونيکال کنترلر
conversation of energy	بقاي انرژي

D

decomposition	تجزيه
detectability	آشکار پذيري
determinent	دترمينان
diagonal form	فرم قطري
diagonal matrix	ماتريس قطري
distillation column	ستون تجزية
distinct	متمايز
double inverted pendulum	پاندول دوتايي معکوس
drum	غلطک
dual	دوگان
dynamical modes	مودهاي ديناميکي

E

electrical network	شبکه الکتريکي
equilibrium point	حالت تعادل
equilibrium point	نقطة تعادل
error covariance	کواريانس خطا
exponential functions	توابع نمائي
exponential matrix	ماتريس نمائی

F

feed forward	پيش خور
filteration	فيلتر سازي

flight control	کنترل پرواز

G

gauges	نشانگر
gearbox	جعبه دنده
general eigenvalue problem	مسئله مقدار ويژة تعميم يافته
generalized eigenvector chains	زنجير بردارهاي ويژة تعميم يافته
generalized eigenvelue	بردار ويژه تعميم يافته
generalized force	نيروي تعميم يافته
global	فراگير

H

heat exchanger	مبدل حرارتي
Hermitian matrix	ماتريس هرميتين
hidden mode	مود پنهان
homogeneous	همگن
homogeneous solution	پاسخ همگن

I

improper	غير سره
incremental variable	متغير تفاضلي
infinite series	سري بي نهايت
information contraction	فشرده سازي اطلاعات
initial condition	شرايط اوليه
input	ورودي
internal stability	پايداري داخلي
inverted pendulum	پاندول معکوس
invertible	معکوس پذير

K

Kalman decomposition	تجزية کالمن
Kalman filter	فيلتر کالمن
left eigenvector	بردار ويژة چپ
linear algebra	جبر خطي
linear time invariant system	سيستم خطي غير متغير با زمان

L

linearization	خطي سازي
Luenberger observer	رؤيتگر لوئنبرگر
Lyapunov stability	پايداري ليapunوف

M

magnetically leviteted system	سيستم تعليق مغناطيسي
man - machine interface	رابط کاربر و ماشين
Markov parmeter	پارامتر مارکوف
matrix	ماتريس
mechanical coupling	کوپلينگ مکانيکي
minimal	کاهش ناپذير
minimal observer	رؤيتگرکاهش ناپذير
minimal polynomial	چند جمله اي کاهش ناپذير
minimal realization	تحقق کاهش ناپذير
modal analysis	آناليز مودال
modal Vectors	بردارهاي مودال

N

nonsingular	ناويژه
null space	فضاي پوچي
numerical computation	محاسبات عددي

O

observabilty	رؤيت پذيري
observabilty cannonical realization	تحقق کانونيکال رؤيت پذيري

observer cannonical realization	تحقق کانونیکال رؤیتگر
off line	خارج خط
one to one	یک به یک
orifice	اریفیس, گذرگاه
orthogonal	ماتریس متعامد
output	خروجي

P

parametric uncertainty	نامعيني پارامتريک
partial fraction	کسرهاي جزئي
particular	خصوصي
performance index	شاخص عملکرد
performance index	معيارهاي عملکرد
permanent magnet	مغناطيس دائم
physical laws	قوانين فيزيکي
physical principle	اصول فيزيکي
pipeline	خط لوله
pneumatic	نيوماتيک
pole	قطب
pole placement	جايابي قطب
power expansion	بسط تواني
prediction	پيش بيني
process	فرآيند
proper	سره
pulp	خمير کاغذ

R

realization	تحقق
regulation	تنظيم
regulation	تنظيم
reliability	قابليت اطمينان
remainder	باقيمانده
Ricatti equation	معادلة ريکاتي
rigid	صلب
robust	مقاوم

S

safety	امنيت
sensor	حساسه
similarity transformation	تبديل همانندي
singular	تکين
skew-Hermitian	پاد- هرميتين
skew-symmetric	پادمتقارن
software toolbox	بستة نرم افزاري
span	پوشش
spectral	طيفي
spool	سوزن
stability	پايداري
stability in sense of Lyapunov	پايداري به مفهوم لياپانوف
stabilizability	پايدارپذيري
state feedback	فيدبک حالت
state gain	بهره حالت
state transition matrix	ماتريس انتقال حالت
state variable	متغيرهاي حالت
steady state	مقدار ماندگار
strain gauge	کرنش سنج
strictly proper	اکيداً سره
structural vibration	ارتعاشات سازه اي
structured uncertainty	نامعيني ساختار يافته
subspace	زير فضا
superposition	رويهم گذاري
superposition principle	اصل رويهم گذاري

T

time variant	غير متغير با زمان
tracking	تعقيب، ردیابي

trajectory	مسير
trancducer	مبدل
transfer matrix	ماتريس تبديل
transmission zero	صفر انتقال
transpose	ترانهادة

U

uncertainty	نامعيني
unitary matrix	ماتريس واحدي
unstructured uncertainty	نامعيني غيرساختار يافته
update	به روز

V

vehicle	خودرو
viscous damping	استهلاک ويسکوز

Z

zero input	بدون ورودي
zero state	با شرايط اوليه صفر
zero-input response	پاسخ بدون ورودي
zero-state response	پاسخ شرايط اوليه صفر

فارسی – انگلیسی

الف

ارابه	cart
ارتعاشات سازه اي	structural vibration
اريفيس, گذرگاه	orifice
استهلاک ويسکوز	viscous damping
اصل رويهم گذاري	superposition principle
اصول فيزيكي	physical principle
اكيداً سره	strictly proper
امنيت	safety
آشكار پذيري	detectability
آناليز مودال	modal analysis

ب

با شرايط اوليه صفر	zero state
باقيمانده	remainder
بدون ورودي	zero input
بردار ويژة چپ	left eigenvector
بردار ويژه تعميم يافته	generalized eigenvelue
بردارهاي مودال	modal Vectors
بستة نرم افزاري	software toolbox
بسط تواني	power expansion
بقاي انرژي	conversation of energy
به روز	update
بهره حالت	state gain

پ

پاد- هرميتين	skew-Hermitian
پادمتقارن	skew-symmetric
پارامتر ماركوف	Markov parmeter
پاسخ بدون ورودي	zero-input response
پاسخ شرايط اوليه صفر	zero-state response
پاسخ همگن	homogeneous solution
پاندول دوتايي معكوس	double inverted pendulum
پاندول معكوس	inverted pendulum
پايدار مجانبي	asymptotic stability
پايدارپذيري	stabilizability
پايداري	stability
پايداري به مفهوم لياپانوف	stability in sense of Lyapunov
پايداري داخلي	internal stability
پايداري لياپونوف	Lyapunov stability
پايداري مجانبي	asymptotic stability
پايداري ورودي– خروجي	BIBO stability
پوشش فضا	span
پيش بيني	prediction
پيش خور	feed forward

ت

تبديل همانندي	similarity transformation
تجزية كالمن	Kalman decomposition
تجزيه	decomposition
تحقق	realization
تحقق كانونيكال	cannonical realization
تحقق كانونيكال رؤيت پذيري	observabilty cannonical realization
تحقق كانونيكال رؤيتگر	observer cannonical realization
تحقق كانونيكال كنترل پذيري	controllability cannonical realization
تحقق كانونيكال كنترلر	controller cannonixal realization

تحقق كاهش ناپذير	minimal realization
تراكم پذيري	compressibility
ترانهادة	transpose
تعقيب	tracking
تكين	singular
تنظيم	regulation
توابع نمائي	exponential functions

ج

جايابي قطب	pole placement
جبر خطي	linear algebra
جعبه دنده	gearbox

چ

چند جمله اي كاهش ناپذير	minimal polynomial

ح

حالت تعادل	equilibrium point
حساسه	Sensor

خ

خارج خط	off line
خروجي	Output
خصوصي	particular
خط لوله	pipeline
خطي سازي	linearization
خمير كاغذ	pulp
خودرو	vehicle

د

دترمينان	determinent
دوگان	dual

ر

رؤيت پذيري	observabilty
رؤيتگر لوئنبرگر	Luenberger observer
رؤيتگركاهش ناپذير	minimal observer
رابط كاربر و ماشين	man - machine interface
راكتور شيميايي	chemical reactor
رويهم گذاري	superposition

ز

زنجير بردارهاي ويژة تعميم يافته	generalized eigenvector chains
زير فضا	subspace
زيرفضاي كنترل پذير	controllable subspace

س

سازا	consistent
ستونهاي تجزية	distillation column
سرعت زاويه اي	angular velocity
سره	proper
سري بي نهايت	infinite series
سوزن	spool
سيستم تعليق فعال	active suspension system
سيستم تعليق مغناطيسي	magnetically leviteted system
سيستم خطي غير متغير با زمان	linear time invariant system

ش

شاخص عملکرد	performance index
شبکه الکتریکي	electrical network
شتاب سنج	accelerometer
شرايط اوليه	initial condition
شير کنترل	control valve

ص

صفر انتقال	transmission zero
صلب	rigid

ط

طيفي	spectral

ع

علّي بودن	causality
عملگر	actuator

غ

غلطک	drum
غلظت	concentration
غير سره	improper
غير متغير با زمان	time variant

ف

فراگير	global
فرآيند	process
فرم بلوکي- قطري	block-diagonal form
فرم قطري	diagonal form
فرمول آکرمن	Ackermann formula
فشرده سازي اطلاعات	information contraction
فضاي پوچي	null space
فيدبک حالت	state feedback
فيلتر سازي	filteration
فيلتر کالمن	Kalman filter

ق

قابليت اطمينان	reliability
قطب	pole
قطري بلوکي	block diagonal
قوانين فيزيکي	physical laws

ک

کسرهاي جزئي	partial fraction
کاهش ناپذير	minimal
کرنش سنج	strain gauge
کنترل پذيري	controllability
کنترل پرواز	flight control
کواريانس خطا	error covariance
کوپلينگ مکانيکي	mechanical coupling

م

ماتريس	matrix
ماتريس انتقال حالت	state transition matrix
ماتريس تبديل	transfer matrix
ماتريس ترانهاده	transpose
ماتريس قطري	diagonal matrix
ماتريس متعامد	orthogonal
ماتريس نمائی	exponential matrix
ماتريس هرميتين	Hermitian matrix
ماتريس واحدي	unitary matrix
مبدل	trancducer

مبدل حرارتي	heat exchanger
متغير تفاضلي	incremental variable
متغيرهاي حالت	state variable
متمايز	distinct
محاسبات عددي	numerical computation
مزدوج ماتريس	conjugate
مسئله مقدار ويژة تعميم يافته	general eigenvalue problem
مسير	trajectory
معادلة ريکاتي	Ricatti equation
معادلة مشخصه	characteristic equation
معکوس پذير	invertible
معيارهاي عملکرد	performance index
مغناطيس دائم	permanent magnet
مقاوم	robust
مقدار ماندگار	steady state
مود پنهان	hidden mode
مودهاي ديناميکي	dynamical modes

ن

نامعيني	uncertainty
نامعيني پارامتريک	parametric uncertainty
نامعيني ساختار يافته	structured uncertainty
نامعيني غيرساختار يافته	unstructured uncertainty
ناويژه	nonsingular
نشانگر	gauges
نقطة تعادل	equilibrium point
نيروي تعميم يافته	generalized force
نيوماتيک	pneumatic

و

ورودي	input
ولتاژ ضدمحرکه	back electro-motive force (Emf)

ه

همگن	homogeneous

ي

يک به يک	one to one

فهرست راهنما

ژ

س

ش

ط

غ

ف

ق

ک

م

ن

ه