فصل ۱

عدد

عدد اولین مفهوم ریاضی است که مورد توجه بشر قرار گرفته است. با گذشت زمان و ایجاد نیازهای جدید، مفهوم عدد نیز گسترش یافته است. مثلاً، در ابتدا عدد را تنها به عنوان وسیله‌ای برای شمارش می‌شناختند و در نتیجه لزومی به تصور اعداد غیر طبیعی نبود.

اما، رفته رفته نیاز به محاسبه بالا گرفت و لازم شد که مفهوم عدد منفی و صفر مطرح گردد: مجموعهٔ اعداد صحیح. پس از آن نیاز به محاسبهٔ کسری از اعداد بوجود آمد، مثلاً در مسألهٔ ارث نیاز به تقسیم زمینی به مساحت ده هکتار بین سه نفر و با سهم مساوی پیش آمد که با اعداد صحیح این کار میسر نبود. این طور بود که مجموعهٔ اعداد گویا مطرح گردید.

با گذشت زمان معلوم شد که طولهایی وجود دارند که به شکل کسری گویا از اعداد طبیعی قابل بیان نیستند، نظیر $\sqrt{2}$. بر همین اساس مجموعهٔ همهٔ طولهای جبری ممکن را به عنوان مجموعهٔ اعداد حقیقی مطرح نمودند.

این مجموعه نیز نتوانست همهٔ نیازهای انسان آن روزگار را برآورده کند. مثلاً، در توجیه مسایل مطرح در الکتریسیته لازم بود که معادلهٔ $x^2+1=0$ دارای جواب باشد؛ در حالی که می‌دانیم هیچ عدد حقیقی‌ای در این معادله صدق نمی‌کند. فرض وجود جواب برای این مسأله بود که منجر به کشف مجموعهٔ اعداد مختلط گردید.

این داستان همچنان ادامه داشته و دارد. اعداد چهار تایی کایلی و اعداد هشت تایی هامیلتن از این دسته تلاشها می‌باشند. روشی که در ذیل برای بیان این مفهوم در پیش گرفته شده است، حد اکثر نزدیکی را با روند تاریخی این مفهوم دارد.

هدف از این فصل آشنایی خواننده با آن دسته از مجموعه‌های عددی است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد استفاده قرار می‌گیرند: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

بخش ۱.۱ مجموعه اعداد طبیعی

همان طوری که نام اعداد طبیعی پیدا است، اولین دسته از اعدادی هستند که بطور طبیعی در مسیر سیر تفکر ریاضیات ظاهر شده و بوجود آمدند.

۱.۱.۱ تعریف. مجموعه‌ای از اعداد A را در صورتی **یکدار** گوئیم که $1\in A$، و در صورتی **موروثی** گوئیم که به ازای هر $n\in A$ ای داشته باشیم $n+1\in A$.

۲.۱.۱ مثال. فرض کنید

$$A = \{1,2,3\},\ \ B = \{5,6,\cdots,n,n+1,\cdots\},\ \ C = \{2,5\},\ \ D = \{-1,0,1,2,\cdots,n,n+1,\cdots\}.$$

در این صورت A یکدار است، ولی موروثی نیست. B موروثی است، ولی یکدار نیست. C نه یکدار است و نه موروثی. D یکدار و موروثی است.

۳.۱.۱ تعریف. کوچکترین مجموعه عددی یکدار و موروثی را **مجموعه اعداد طبیعی** نامیده و با نماد $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر $\mathbb{N} = \{1,2,\cdots,n,n+1,\cdots\}$.

بنابه تعریف بالا، اگر $A \subseteq \mathbb{N}$ یکدار و موروثی باشد، آنگاه $A = \mathbb{N}$. از این حکم ساده به عنوان ابزاری سودمند در اثبات تساویها، نامساویها و . . . استفاده می‌شود:

۴.۱.۱ قضیه استقراء. اگر $P(n)$ حکمی در خصوص عدد n باشد و بدانیم:

الف) $P(1)$ درست است،

ب) اگر $P(n)$ درست باشد، آنگاه $P(n+1)$ درست است،

در این صورت، حکم $P(n)$ به ازای هر n طبیعی درست است.

برهان: فرض کنیم $A \subseteq \mathbb{N}$ مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی n ای است که حکم $P(n)$ به ازای آنها درست می‌باشد. در این صورت، بنابه فرض (الف)، مجموعهٔ A یکدار است و بنابه فرض (ب)، مجموعهٔ A موروثی می‌باشد، بنابراین از تعریف ۳.۱.۱ نتیجه می‌گردد که $\mathbb{N} \subseteq A$ و بنابراین، $A = \mathbb{N}$ و برهان تمام است. □

۵.۱.۱ مثال. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی m،

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

حل: برای این منظور فرض می‌کنیم $P(n)$ نمایشگر حکم بالا است. در این صورت

$$P(1) \equiv 1^3 = \frac{1}{4}(1)^2(1+1)^2 \equiv 1 = 1$$

که صحیح است. حال فرض کنیم $P(n)$ درست باشد و درستی $P(n+1)$ را ثابت می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \end{aligned}$$

که این یعنی $P(n+1)$ نیز درست است.

۶.۱.۱ اولین تعمیم قضیهٔ استقراء. فرض کنید k_0 عددی طبیعی و $P(n)$ گزاره‌ای در خصوص اعداد طبیعی باشد. اگر بدانیم که:

الف) $P(k_0)$ درست است،

ب) اگر $P(n)$ درست باشد، آنگاه $P(n+1)$ درست است، در این صورت، حکم $P(n)$ به ازای هر $k_0 \leq n$ درست است.

برهان: کافی است در برهان قضیهٔ ۴.۱.۱ فرض شود که

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid \text{به ازای } n = m + k_0 - 1 \text{ درست است } P(n)\}$$

در این صورت A یکدار و موروثی است و بنابراین $A = \mathbb{N}$. این ثابت می‌کند که گزارهٔ $P(n)$ به ازای همهٔ n های بزرگتر و یا مساوی با k_0 صحیح است. □

۷.۱.۱ مثال. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 4$ ای $n^3 \leq 3^n$.

حل: برای این منظور فرض کنیم $P(n)$ یعنی $n^3 \leq 3^n$. اولاً، روشن است که $P(4)$ صحیح است، زیرا $P(4) \equiv 4^3 \leq 3^4 \equiv 64 \leq 81$. بعلاوه، اگر $P(n)$ درست باشد و $4 \leq n$، در این صورت $P(n+1)$ نیز درست است، زیرا بنا به فرض $n^3 \leq 3^n$. طرفین این نامساوی را در 3 ضرب می‌کنیم: $3n^3 \leq 3^{n+1}$. اکنون ملاحظه می‌کنیم که برای اثبات درستی $P(n+1)$، کافی است ثابت شود $(n+1)^3 \leq 3n^3$:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - 3n^3 &= -2n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&\leq -2n^3 + 3n^2 + 3n + n^2 \\
&= n^2(-2n+7)
\end{aligned}$$

که چون $n \geq 4$، پس $7 - 2n \leq 0$ و حکم اثبات شده است. بنابراین حکم به ازای هر $n \geq 4$ ای صحیح است.

۸.۱.۱ تمرین. با استفاده از استقراء ریاضی ثابت کنید:

۱. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

۲. $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$

۳. $1 \times 2 + 2 \times + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

۴. اگر $n \geq 3$، آنگاه $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < \frac{n}{2}$

۵. در صورتی که $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ (خوانده شود n «فاکتوریل»)، به ازای هر $n \geq 4$ ای $2^n < n!$.

۶. بازای هر n ای $1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$.

۷. در صورتی که $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (خوانده شود «انتخاب k از n»)، داریم:

الف) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$؛ و ب) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

۸. به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ نیز طبیعی است.

۹. به ازای هر عدد طبیعی n ای

$$\frac{1}{1\times 2}\binom{n}{1} - \frac{1}{2\times 3}\binom{n}{2} + \frac{1}{3\times 4}\binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}\binom{n}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

در قضیهٔ زیر مهمترین خواص جبری مجموعهٔ اعداد طبیعی آورده شده است.

۹.۱.۱ قضیه. اگر $n,m,l \in \mathbb{N}$، آنگاه

1) $n+m \in \mathbb{N},$ (بسته بودن جمع)
2) $n+(m+l) = (n+m)+l,$ (شرکتپذیری جمع)
3) $n+m = m+n,$ (جابجایی جمع)
4) $n \leq n,$ (بازتابی $\leq$)
5) $n \leq m,\ m \leq n \ \Rightarrow\ n = m,$
7) $n \leq m, m \leq l \ \Rightarrow\ n \leq l,$
8) $n < m \leq n+1 \ \Rightarrow\ m = n+1,$
9) $nm \in \mathbb{N},$ (بسته بودن ضرب)
10) $n(ml) = (nm)+l,$ (شرکتپذیری ضرب)
11) $n1 = 1n = n,$ (عنصر خنثی ضرب)
12) $n(m+l) = nm+nl,$ (توزیعپذیری ضرب در جمع)
13) $n \leq m \ \Rightarrow\ nl \leq ml,$
14) $n \leq m \ \Rightarrow\ n+l \leq m+l.$

۱۰.۱.۱ تعریف. هر عدد طبیعی را بصورت یکتا به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$n = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + 10^k a_k$$

که در آن $k \in \mathbb{N}$ و

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

در این حالت، a_i ها را **رقم** می‌نامیم و می‌نویسیم: $n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0}$ عبارت مذکور را **نمایش اعشاری** n می‌گوئیم.

۱۱.۱.۱ تمرین. ثابت کنید که اگر $[x]$ بزرگترین عدد کوچکتر و یا مساوی با x باشد در این صورت به ازای هر عدد طبیعی n ای یک عدد $k \in \{0,1,2,\cdots\}$ طوری یافت می‌شود که $10^k \leq n < 10^{k+1}$. فرض کنید:

$$a_k = \left[\frac{n}{10^k}\right], \quad a_{k-1} = \left[\frac{n-10^k a_k}{10^{k-1}}\right], \quad a_{k-2} = \left[\frac{n-10^k a_k - 10^{k-1}a_{k-1}}{10^{k-2}}\right], \quad \cdots$$

در این صورت $n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1}$.

۱۲.۱.۱ قضیهٔ تقسیم. فرض کنید n و m دو عدد طبیعی دلخواهند و $m \leq n$. در این صورت اعداد $q \in \mathbb{N}$ و $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ به صورت یکتا، چنان یافت می‌شوند که $n = mq + r$ و $0 \leq r < m$. n را مقسوم، m را مقسوم علیه، r را باقیمانده عمل تقسیم نامند.

بخش ۲.۱ مجموعهٔ اعداد صحیح

لزومی ندارد که تفاضل دو عدد طبیعی، عددی طبیعی باشد: $3 - 4 = -1$. پس لازم است که به منظور فراهم شدن ابزاری مناسب‌تر برای انجام کارهای بعدی، مجموعه‌اعداد طبیعی را بصورت زیر گسترش بدهیم.

۱.۲.۱ تعریف. اگر جواب مسأله $x+y=x$ را با نماد $y=0$ نشان دهیم و نیز اگر جواب مسأله $x+y=0$ را با نماد $y=-x$ نشان دهیم، **مجموعهٔ اعداد صحیح** را بصورت

$$\mathbb{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

تعریف می‌کنیم.

۲.۲.۱ قضیه. اگر $n,m,l\in\mathbb{Z}$، آنگاه

۱. (بسته بودن جمع) $n+m\in\mathbb{Z}$.

۲. (شرکتپذیری جمع) $n+(m+l)=(n+m)+l$.

۳. (وجود خنثی جمع) $n+0=0+n$.

۴. (وجود معکوس جمعی) $n+(-n)=(-1)+n=0$.

۵. (جابجایی جمع) $n+m=m+n$.

۶. (بسته بودن ضرب) $nm\in\mathbb{Z}$.

۷. (شرکتپذیری ضرب) $n(ml)=(nm)l$.

۸. (پوچسازی صفر) $n0=0n=0$.

۹. (وجود خنثی ضربی) $n1=1n=n$.

۱۰. (بازتابی $\le$) $n\le n$.

۱۱. (تعدی $\le$) اگر $m\le l$ و $n\le m$، آنگاه $n\le l$.

۱۲. اگر $m\le n$ و $n\le m$، آنگاه $n=m$.

۱۳. اگر $m\le n+1$ و $n<m$، آنگاه $m=n+1$.

۱۴. اگر $n\le m$، آنگاه $n+l\le m+l$.

۱۵. اگر $m\le 0$ و $n\le 0$، آنگاه $nm\ge 0$.

۱۶. اگر $m\ge 0$ و $n\le 0$، آنگاه $nm\le 0$

۱۷. اگر $m\le l$ و $n\ge 0$، آنگاه $nm\le nl$.

۱۸. اگر $m\le l$ و $n\le 0$، آنگاه $nm\ge nl$.

۳.۲.۱ قضیهٔ تقسیم. اگر $m,n\in\mathbb{Z}$ و $0<m\le|n|$، آنگاه اعداد صحیح منحصر بفرد r و q طوری وجود دارد که $n=mq+r$ و $0\le r<m$.

۴.۲.۱ تعریف. در صورتی که در تقسیم n بر m باقیمانه r صفر شود، می‌گوئیم **n مضربی از m** است و یا **m عدد n را می‌شمارد** و می‌نویسیم $m|n$. اگر $m|n$ و $m|n'$، می‌گوئیم m یک عامل مشترک n و n' است. **کوچکترین عامل نامنفی مشترک n و n'** را با نماد (n,n') نشان می‌دهیم.

۵.۲.۱ نمایش اعشاری. هر عدد صحیح $n \in \mathbb{Z}$ را بشکل $\pm\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1}$ می‌توان نوشت، که درآن $k \in \mathbb{N}$ و $a_1, \cdots, a_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ این نمایش منحصر بفرد است. یعنی، اگر دو عدد صحیح دارای نمایشهای برابر باشند، آنگاه برابرند.

۶.۲.۱ دومین تعمیم قضیهٔ استقراء. فرض کنید k_0 عددی صحیح و $P(n)$ گزاره‌ای در خصوص اعداد صحیح باشد. اگر بدانیم که: **الف)** $P(k_0)$ درست است، **ب)** اگر $P(n)$ درست باشد، آنگاه $P(n+1)$ درست است، در این صورت، حکم $P(n)$ به ازای هر عدد صحیح $n \geq k_0$ درست است.

برهان: کافی است در برهان قضیهٔ ۴.۱.۱ فرض شود که

$$A = \{m \in \mathbb{N} \,|\, \text{به ازای } n = m + k_0 - 1 \text{ درست است } P(n)\}$$

در این صورت A یکدار و موروثی است و بنابراین $A = \mathbb{N}$. این ثابت می‌کند که گزارهٔ $P(n)$ به ازای همهٔ n های بزرگتر و یا مساوی با k_0 صحیح است. □

۷.۲.۱ تمرین.

۱) تعداد عوامل ۲ موجود در ۱۰۰ فاکتوریل رامحاسبه کنید.

۲) آزمونی برای بخش‌پذیری عدد طبیعی n بر یازده یافته و سپس آن را ثابت کنید.

۳) عدد سه رقمی $\overline{abc}$ را طوری بیابید که اعداد چهار رقمی $\overline{abc1}$ و $\overline{2abc}$ در رابطهٔ $\overline{abc1} = 3 \times \overline{2abc}$ صدق کنند.

۴) فرض کنید $a_n = \overline{1\cdots1} - \overline{2\cdots2}$ که در آن تعداد ۱ ها برابر $2n$ و تعداد ۲ ها برابر n است. به ازای کدام مقادیر از n، عدد a_n مربع کامل است؟

بخش ۳.۱ مجموعهٔ اعداد گویا

مجموعهٔ اعداد صحیح نسبت به عمل ضرب بسته است و دارای عضو خنثی یک است، اما لزومی ندارد که هر عضو از آن دارای قرینهٔ ضربی باشد. مثلاً، هیچ عدد صحیحی وجود ندارد که در 2 ضرب شود و حاصل برابر یک گردد. این مشکل را بصورت زیر حل می‌کنیم.

۱.۳.۱ تعریف. جواب مسألهٔ $mx = n$ را که $m, n \in \mathbb{Z}$ و $m \neq 0$، با نماد $\frac{n}{m}$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ چنین اشیائی را با نماد $\mathbb{Q}$ نشان داده و به آن **مجموعهٔ اعداد گویا** می‌گوئیم. اعداد گویای $\frac{n}{m}$ و $\frac{s}{t}$ را در صورتی برابر گوئیم که $ms = nt$. بعلاوه قرارداد می‌کنیم که اگر $n \in \mathbb{Z}$، آنگاه $n = \frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$. بنابراین، $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

بر خلاف اعداد طبیعی و صحیح که دارای نمایش منحصر بفرد بودند، هر عدد گویا را به بینهایت صورت می‌توان نوشت: $\frac{m}{n} = \frac{m\ell}{n\ell}$. برای رفع این مشکل مفهوم کسر ساده را مطرح می‌کنیم.

۲.۳.۱ کسر ساده. اگر $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ و اعداد صحیح n و m به عدد طبیعی $1 < k \in \mathbb{N}$ قابل قسمت باشند، آنگاه بجای $\frac{n}{m}$ از $\frac{p}{q}$ استفاده می‌کنیم که در آن $p = \frac{n}{k}$ و $q = \frac{m}{k}$. بعلاوه، ترجیه می‌دهیم که همواره مخرج کسرها مثبت باشند. عدد $\frac{n}{m}$ را در صورتی **یک کسر ساده** گوئیم که قابل ساده کردن نباشد و بعلاوه $0 < m$.

هر عدد گویا را دقیقاً به یک صورت بفرم یک کسر ساده می‌شود نوشت:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, (n,m) = 1 \right\}$$

۱.۳.۳ قضیه. اگر $n, m, l \in \mathbb{Q}$، آنگاه

۱. (بسته بودن جمع) $n + m \in \mathbb{Q}$.

۲. (شرکتپذیری جمع) $n + (m + l) = (n + m) + l$.

۳. (جابجایی جمع) $n + m = m + n$.

۴. (عنصر خنثی جمع) $n + 0 = 0 + n = 0$.

۵. (وجود معکوس جمعی) $n + (-1)n = 0$.

۶. (بسته بودن ضرب) $nm \in \mathbb{Q}$.

۷. (شرکتپذیری ضرب) $n(ml) = (nm)l$.

۸. (جابجایی ضرب $nm = mn$.

۹. (عنصر خنثی ضرب) $n1 = 1n = n$.

۱۰. (وجود معکوس ضربی) اگر $n \neq 0$، آنگاه $n \times \frac{1}{n} = 1$.

۱۱. اگر $n \leq 0$ و $m \leq l$، آنگاه $nm \geq nl$.

۱۲. اگر $n \leq m$، آنگاه $n + l \leq m + l$.

۱۳. (توزیعپذیری ضرب در جمع) $n(m + l) = nm + nl$.

۱۴. (بازتابی $\leq$) $n \leq n$.

۱۵. (تعدی $\leq$) اگر $n \leq m$ و $m \leq l$، آنگاه $n \leq l$.

۱۶. (تثلیث $\leq$) اگر $n \leq m$ و $m \leq n$، آنگاه $m = n$.

۱۷. اگر $n \leq 0$ و $m \leq 0$، آنگاه $nm \geq 0$.

۱۸. اگر $n \leq 0$ و $m \geq 0$، آنگاه $nm \leq 0$.

۱۹. اگر $n \geq 0$ و $m \geq 0$، آنگاه $nm \geq 0$.

۲۰. اگر $n \geq 0$ و $m \geq l$، آنگاه $nm \geq nl$.

۲۱. اگر $m < n$، آنگاه $l \in \mathbb{Q}$ ای وجود دارد که $m < l < n$.

توجه شود که علاوه بر بسته بودن $\mathbb{Q}$ نسبت به عمل تقسیم، مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ چگال است به این معنی که بنا به خاصیت (21) از قضیهٔ بالا، بین هر دو عدد گویای مفروض، لااقل یک عدد گویای دیگر می‌توان یافت.

۴.۳.۱ قضیهٔ تقسیم. اگر $m,n \in \mathbb{Z}$ و $0 < m \le |n|$، آنگاه اعداد گویای منحصر بفرد p و r چنان یافت می‌شوند که $n = mp + r$ و $0 \le r < m$. p را خارج قسمت و r را باقیماندهٔ تقسیم n بر m می‌نامیم.

۵.۳.۱ نمایش اعشاری نامختوم. هر عدد طبیعی و نیز هر عدد صحیح دارای یک **نمایش اعشاری مختوم** است (یعنی، با تعداد ارقام مخالف صفر متناهی)؛ ولی برای اعداد گویا این انتظار درست نیست.

بیائید به عنوان مثال عدد گویای $\frac{7}{3}$ را بصورت اعشاری بنویسیم. چون $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ پس روی $\frac{1}{3}$ کار می‌کنیم. چون $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$، باز هم بر روی $\frac{1}{3}$ کار می‌کنیم و . . . بنابراین:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{3} &= 2+\frac{1}{3} = 2+\frac{1}{10}\left(3+\frac{1}{3}\right) = 2+\frac{3}{10}+\frac{1}{30}\\
&= 2+\frac{3}{10}+\frac{1}{100}\left(3+\frac{1}{3}\right) = 2+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{1}{300}\\
&\vdots\\
&= 2+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\frac{1}{3\times 10^n}\\
&\overset{?}{=} 2+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots
\end{aligned}$$

دلیل تساوی ؟ را بعداً در قسمت سریهای عددی بیان خواهیم کرد. به همین دلیل است که می‌شود نوشت:

$$\frac{7}{3} = 2.333\cdots 3\cdots = 2.\overline{3}$$

۶.۳.۱ نمایش اعشاری. فرض کنیم $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ در این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{m} &= \pm\,\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_0.b_1 b_2 b_3\cdots b_n\cdots}\\
&= \pm\left(10^k a_k + 10^{k-1}a_{k-1}+\cdots+10a_1+a_0+\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}+\cdots\right)
\end{aligned}$$

که در آن $b_i, a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ و نیز $k \in \mathbb{N}$. لزومی ندارد که عدد گویا تنها دارای یک نمایش اعشاری باشد. مثلاً

$$\frac{1}{2} = 0.5 = 0.500\cdots 0\cdots = 0.499\cdots 9\cdots$$

بهتر آن است که اعداد گویا را بشکل $\frac{n}{m}$ بنویسیم و محاسبه کنیم، مثلاً جمع کردن دو عدد گویای 27356.3846 و -256937.098367 ساده به نظر نمی‌رسد!

۷.۳.۱ تمرین.

۱) نشان دهید که $\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1} = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}}$.

۲) اعداد گویای α و β را طوری بیابید که $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \alpha + \beta\sqrt{2}$.

۳) ریشه‌های گویای معادلهٔ $9x^3 - 6x^2 + 15x - 10 = 0$ را بیابید. آیا اصلاً ریشه دارد؟

۴) به ازأ عدد طبیعی مفروض $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم: $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. ثابت کنید به ازای هر n ای H_n یک عدد گویای غیر صحیح است.

۵) فرض کنید $\frac{p}{q}$ یک کسر ساده با $\frac{1}{n+1} < \frac{p}{q} < \frac{1}{n}$ است. نشان دهید که پس از ساده شدن $\frac{p}{q} - \frac{1}{n+1}$ کسری حاصل می‌شود که صورتش از p کوچکتر است. سپس به استقرأ ثابت کنید که بازأ هر کسر سادهٔ $\frac{p}{q}$ که $0 < \frac{p}{q} < 1$، اعداد طبیعی $n_1, n_2, \cdots, n_k$ چنان یافت می‌شوند که
$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}$$
به عنوان مثال
$$\frac{19}{15} = \frac{1}{2} + \frac{23}{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{60}$$

بخش ۴.۱ مجموعهٔ اعداد حقیقی

آیا $\sqrt{2}$ عددی گویا است؟ مگر می‌شود؟! در حالی که می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویهٔ با وتر a و اضلاع مجاور b و c رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است، و به ازای $b = c = 1$ باید $a^2 = 2$ یا $a = \sqrt{2}$! در هر حال $\sqrt{2}$ گویا نیست، زیرا اگر فرض شود $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ و $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ به صورت کسر ساده نوشته شده باشد، داریم $n = m\sqrt{2}$. با به توان دو رساندن دو طرف تساوی نتیجه می‌گیریم $n^2 = 2m^2$، پس n^2 زوج است؛ یعنی n زوج است و می‌شود نوشت $n = 2k$. بنابراین $2m^2 = 4k^2$ یا $m^2 = 2k^2$. پس m^2 و در نتیجه m نیز زوج است، یعنی n و m را به صورت همزمان بر دو می‌شودتقسیم کرد! این با فرض ساده بودن کسر $\frac{n}{m}$ متناقض است. پس چه باید کرد؟ افزودن $\sqrt{2}$ به $\mathbb{Q}$ علاج موقت است: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ این مجموعه از $\mathbb{Q}$ بهتر است ولی هنوز معیوب است، زیرا $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. پس سؤال این است که «چه باید کرد؟» اضافه کردن $\sqrt{3}$ به مجموعهٔ بالا نیز یک علاج موقت است:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} | a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

و این داستان با ظهور عدد π جالبتر نیز می‌شود. پس سر انجام چه باید کرد؟
این مشکل را با تعریف زیر رفع می‌کنیم:

۱.۴.۱ تعریف. حاصل عبارت

$$\pm\left(a_k \times 10^k + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 + b_1 \times \frac{1}{10} + b_2 \times \frac{1}{10^2} + \cdots + b_n \times \frac{1}{10^n} + \cdots\right)$$

را بشکل $\pm a_k \cdots a_0 . b_1 \cdots b_n \cdots$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ چنین اشیائی را با نماد $\mathbb{R}$ نشان داده و **مجموعهٔ اعداد حقیقی** می‌نامیم. با توجه به اطلاعاتی که بعداً در قسمت سریهای عددی بدست خواهیم آورد، هر عدد حقیقی r را بصورت $\lim_{n\to\infty} r_n$ می‌شود نوشت که در آن $r = \pm a_k \cdots a_0 . b_1 \cdots b_n \cdots$ و $r_n = \pm a_k \cdots a_0 . b_1 \cdots b_n$.

۱.۴.۲ تمرین.

۱) فرض کنید n یک عدد طبیعی است که مجذور کامل نیست. یعنی بشکل m^2 که $m \in \mathbb{N}$ نمی‌توان نوشت. ثابت کنید $\sqrt{n}$ گویا نیست.

۲) نشان دهید که مجموعهٔ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ دارای کلیهٔ خواص مشروح در ۱.۳.۳ است.

۳) $\mathbb{Q}(\pi)$ را همانند $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ تعریف کنید و سپس نشان دهید که دارای کلیهٔ خواص مشروح در ۱.۳.۳ است.

۴) نشان دهید که عدد $\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}+\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}$ گنگ است.

۵) مجموعهٔ $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ را بسازید.

در ابتدای این بخش مشاهده نمودیم که $\sqrt{2}$ گویا نیست، این بدان معنی است که مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ اعداد گویا در نقطهٔ نظیر $\sqrt{2}$ یک **حفره** وجود دارد. این مشکل را مجموعهٔ اعداد حقیقی ندارد. برای توضیح این مطلب، به تعریف زیر نیاز می‌باشد.

۱.۴.۳ تعریف. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$. عدد s را در صورتی **سوپرموم** A گفته و با نماد $\sup A$ نشان می‌دهیم که **الف)** به ازای هر $x \in A$ ای $x \le s$. **ب)** به ازای هر $\epsilon > 0$ یک $x \in A$ ای یافت شود که $s-\epsilon < x$. عدد s را در صورتی **اینفیموم** A گفته و با نماد $\inf A$ نشان می‌دهیم که
الف) به ازای هر $x \in A$ ای $s \le x$.
ب) به ازای هر $\epsilon > 0$ یک $x \in A$ ای یافت شود که $x < s+\epsilon$.
عدد s را در صورتی یک **کران بالای** A گوئیم که به ازای هر $x \in A$ ای $x \le s$. عدد s را در صورتی یک **کران پائینی** A گوئیم که به ازای هر $x \in A$ ای $s \le x$. مجموعهٔ A را در صورتی **از بالا کراندار** گوئیم که حداقل یک کران بالا داشته باشد. مجموعهٔ A را در صورتی **از پائین کراندار** گوئیم که حداقل یک کران پائین داشته باشد.

۱.۴.۴ مثال ۱). فرض کنید $A = [0;1]$. در این صورت $\sup(A) = 1$. زیرا اولاً به ازای هر $x \in A$ ای $x \le 1$ و در ثانی اگر به اازای هر $x \in A$ ای $x \le \ell$، آنگاه به ازای $x = 1$ نتیجه می‌گردد که $1 \le \ell$.

مثال ۲) فرض کنید $A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x < \sqrt{2}\}$. در این صورت $\sup(A) = \sqrt{2}$ که عضو A نیست. از تعریف A نتیجه می‌گردد که هر عضو از A از $\sqrt{2}$ کوچکتر است و در نتیجه $\ell = \sup(A) \ge \sqrt{2}$. حال اگر $\ell > \sqrt{2}$، آنگاه $\ell' = (\ell+\sqrt{2})/2 > \sqrt{2}$ کمتر از ℓ است و یک کران بالایی A می‌باشد که تناقض می‌باشد. بنابراین $\ell = \sqrt{2}$

۱.۴.۵ قضیه. مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ دارای کلیهٔ خواص مشروح در قضیهٔ ۱.۳.۳ برای $\mathbb{Q}$ می‌باشد. بعلاوه:
۱) هر زیر مجموعهٔ از بالا کراندار و غیر تهی از $\mathbb{R}$ سوپرموم دارد.
۲) هر زیر مجموعهٔ از پائین کراندار و غیر تهی از $\mathbb{R}$ اینفیموم دارد.

۱.۴.۶ تمرین.

۱) نشان دهید که $A = \left\{p \in \mathbb{Q} \,\middle|\, p^2 < 2\right\}$ زیر مجموعه‌ای از بالا کراندار و غیرتهی در $\mathbb{Q}$ است، ولی در $\mathbb{Q}$ سوپرموم ندارد. یعنی، $\mathbb{Q}$ خواص (۱) (و نیز (۲)) مشروح در بالا را ندارد.

۲) نشان دهید که اگر a و b اعداد گویا با $(a-b^3)b>0$ باشند،

$$\sqrt[3]{a+\frac{8b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}+\sqrt[3]{a-\frac{8b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}$$

نیز عددی گویا خواهد بود.

۳) فرض کنید a یکی از اعداد گنگ $1+\sqrt{2}$، $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$، $\sqrt[3]{3}$، $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$، $(\sqrt{3}+\sqrt{2})/(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ و یا $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ است. یک چند جمله‌ای با ضرایب صحیح به گونه‌ای بیابید که a ریشهٔ آن باشد.

۷.۴.۱ قضیه. نمایش اعشاری عدد r را در صورتی **دوری** گوئیم که بتوان یک بلوک تکرار شونده در ارقام آن یافت، مانند $234.353535\cdots$ و یا $\frac{1}{3}=0.33\cdots$. عدد حقیقی r وقتی و تنها وقتی گویا است که دارای نمایش اعشاری دوری باشد.

۸.۴.۱ تمرین.

۱) نشان دهید که اعداد $325.\overline{211}$ و $-12.32\overline{4}$ گویا هستند و سپس آنها را بشکل کسر ساده بنویسید.

۲) نشان دهید که اعداد $0.1010010001\cdots$ و $0.123456789101112\cdots$ گنگ هستند.

۵) نشان دهید که اگر $0\le n\in\mathbb{Z}$ و a_i ها و b_i ها رقم باشند، آنگاه

$$n.a_1a_2\cdots a_m\overline{b_1b_2\cdots b_k}=n+\frac{a_1\cdots a_mb_1\cdots b_k-a_1\cdots a_m}{99\cdots900\cdots0}$$

که در اینجا تعداد 9 های در مخرج برابر k و تعداد صفرها برابر m است.

۹.۴.۱ نمایش هندسی اعداد حقیقی. فرض کنید ℓ یک خط راست افقی باشد و آن را **محور اعداد حقیقی** نامیده و نقطه‌ای O بر آن بنام **مبداء** انتخاب کنیم.
سمت راست مبداء را **مثبت** و سمت چپ آن را **منفی** معرفی می‌کنیم. حال پاره خطی را به عنوان **واحد** 1 اندازه‌گیری در نظر گرفته و با در پی هم قرار دادن آن، و با ابتدای از O و به سمت مثبت، محور بدست آمده را مدرج می‌کنیم. نقاط حاصل را به ترتیب صعودی و با شروع از مبداء، با اعداد یک، دو، سه و ... شماره گذاری می‌کنیم. همین عمل را برای سمت چپ مبداء انجام داده و اعداد حاصل را از راست به چپ با اعداد ۱−، ۲−، ۳− و ... شماره گذاری می‌کنیم. به این ترتیب وسیله‌ای برای نمایش اعداد صحیح فراهم شده است.
در ادامه با تقسیم کردن هر یک از تقسیمات حاصل به ده بخش مساوی، امکان نمایش اعداد اعشاری به فرم $\pm\bar{a}.\bar{b}$ را فراهم می‌کنیم. سپس، با تقسیم هر یک از تقسیمات جدید به ده قسمت مساوی، امکان نمایش اعداد اعشاری به فرم $\pm\bar{a}.\overline{bc}$ را فراهم می‌کنیم. این کار را همچنان ادامه می‌دهیم، و نهایتاً موفق به نمایش همهٔ اعداد گویا می‌گردیم. اما، نقاط بر محور حقیقی بسیار بیشتر از اعداد گویا هستند.
با توجه به اینکه هر عدد حقیقی را به شکل حد یک دنباله از اعداد گویا می‌توان نوشت (به تعریف ۱.۴.۱ توجه شود)، می‌توان نقاطی بر محور حقیقی یافت که حد اکثر نزدیکی را با مکان واقعی عدد مورد نظر دارند! آنچه که در این موقعیت می‌توان گفت، این فرض است که

۱۰.۴.۱ اصل. تناظری یکبیک میان مجموعهٔ اعداد حقیقی و مجموعهٔ نقاط واقع بر محور حقیقی وجود دارد.

فرض درستی این اصل، مبنی هندسهٔ تحلیلی است و منشاء مطالب بسیاری در ریاضیات می‌باشد.

۱۱.۴.۱ تمرین. چند مساله مبارزه طلب:

۱) فرض کنید n عددی طبیعی است. ثابت کنید که هر عدد با 3^n رقم بر 3^n قابل قسمت است.

۲) فرض کنید k عددی طبیعی دلخواهی است و $n = 2^{k-1}$. ثابت کنید که از بین هر $2n-1$ عدد طبیعی دلخواه، n عدد را طوری می‌توان انتخاب نمود که مجموع آنها بر n قابل قسمت است.

۳) فرض کنید a، b و c اعداد حقیقی مثبتند و $abc \leq 1$. ثابت کنید $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} > a+b+c$.

۴) فرض کنید x، y و z اعداد حقیقی با $x+y+z=1$ هستند. ثابت کنید $6(x^3+y^3+z^3)^2 \leq (x^2+y^2+z^2)^3$.

۵) ثابت کنید که در $1000!$ درست 249 تا رقم 5 و 259 تا رقم 0 وجود دارد؛ در نتیجه، در نمایش اعشاری $1000!$ درست 249 صفر وجود دارد. آیا این حکم را برای $n!$ می‌توانید تعمیم دهید؟

بخش ۵.۱ چند عدد و فرمول خاص

در این بخش ابتدا به معرفی چند عدد خاص می‌پردازیم. علت آن این است که از آنها در ادامه درس استفاده می‌شود و بعلاوه در سایر زمینه‌های علوم که ریاضیات در آنها استفاده می‌شود، دانستن این اعداد می‌تواند راهگشا باشد. در ادمه به معرفی جند اتحاد مفید می‌پردازیم.

n	2^n	2^{-n}	$n!$
1	2	0.5	1
2	4	0.25	2
3	8	0.125	6
4	16	0.0625	24
5	32	0.03125	120
6	64	0.015625	720
7	128	0.0078125	5040
8	256	0.00390625	40320
9	512	0.001953125	3.6288×10^5
10	1056	0.0009765625	3.6288×10^6

$$
\begin{aligned}
\pi &\approx 3.1415926535\\
\pi/2 &\approx 1.5707963268\\
\pi/3 &\approx 1.0471975512\\
\pi/4 &\approx 0.7853981634\\
\pi/6 &\approx 0.5235987756\\
\sqrt{\pi} &= \Gamma(1/2) \approx 1.7724538509\\
\\
e &\approx 2.7182818285\\
e/2 &\approx 1.3591409142\\
\sqrt{e} &\approx 1.6487212707\\
e^{\pi} &\approx 23.1406926328\\
\pi^{e} &\approx 22.4591577184\\
\\
\sqrt{2} &\approx 1.4142135624\\
\sqrt{3} &\approx 1.7320508075\\
\sqrt{5} &\approx 2.2360679775\\
\sqrt[3]{2} &\approx 1.259921050\\
\sqrt[3]{3} &\approx 1.442249570\\
\\
\ln 2 &\approx 0.6931471807\\
\ln 3 &\approx 1.0986122887\\
\log e &\approx 0.4342944819\\
\ln 10 &\approx 2.3025850930\\
\\
\Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \approx 1.7724538509\\
\Gamma(1/3) &\approx 2.6789385347\\
\Gamma(1/4) &\approx 3.6256099082\\
\\
1\ \text{رادیان} &= 180^\circ/\pi \approx 57.2957795131\\
1^\circ &= \pi/180\ \text{رادیان} \approx 0.0174532925
\end{aligned}
$$

به ازاء اعداد حقیقی دلخواه x و y داریم:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2+xy+y^2\\
(x-y)^2 &= x^2-xy+y^2\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\
(x-y)^3 &= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2-y^2 &= (x-y)(x+y)\\
x^3-y^3 &= (x-y)(x^2+xy+y^2)\\
x^3+y^3 &= (x-y)(x^2-xy+y^2)\\
x^4-y^4 &= (x-y)(x+y)(x^2+y^2)\\
x^4+y^4 &= (x^2+\sqrt{2}xy+y^2)(x^2-\sqrt{2}xy+y^2)
\end{aligned}
$$

به ازاء اعداد حقیقی دلخواه x و y و عدد طبیعی n داریم:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2\\
&\quad +\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3+\cdots+nxy^{n-1}+y^n\\
(x-y)^n &= x^n+nx^{n-1}y-\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2\\
&\quad +\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3-\cdots+nxy^{n-1}-y^n
\end{aligned}
$$

بخش ۱.۶ مجموعهٔ اعداد مختلط

نزدیک به ۴۵۰ سال از زمانی که برای اولین بار بشر با اعداد مختلط آشنا شد می‌گذرد. بر اساس مستندات تاریخی، گیرولامو کاردانو [۱] اول کسی است که تا سال ۱۵۴۵ با اعداد مختلط آشنا شد. کاری که وی انجام داد، ابراز این نکته بود که احتمال دارد این اشیاء مفید باشند!

اما، اولین محاسبهٔ عملی با اعداد مختلط را رافائل بومبلی [۲] در سال ۱۵۷۲ انجام داد. نتیجهٔ کار او را در این جمله‌اش می‌توان خلاصه نمود که گفته است: *به نظر می‌رسد که همهٔ چیزهای مطرح شده جز حقیقت نباشند!*

دانشمندان بین پذیرش و یا عدم پذیرش وجود این اعداد مردد بودند، و تا سال ۱۷۰۲ که لایبنیتز نماد i را ابداء کرد، این روند ادامه داشت. این ابهام را در اصطلاحات بکار رفته می‌توان مشاهده نمود: عدد مختلط و یا عدد موهومی. حتی در سال ۱۷۷۰ ریاضیدان بزرگی چون اویلر در برقراری رابطهٔ $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{6}$ اظهار شگفتی می‌کند.

مدتهای مدیدی طول کشید تا دانشمندان متفق القول شدند که این اعداد وجود دارند و بعلاوه، سازگار نیز هستند؛ به این معنی که در محاسبات انجام شده هیچ گونه ابهام و یا تناقضی رخ نمی‌دهد. در واقع در پایان قرن هجدهم بود که فردریش گاوس با ابداء صفحهٔ مختلط راه را برای تجسم هندسی این اعداد فراهم نمود. پس از آن در مدت زمانی کمتر از چهل سال (یعنی بین سالهای ۱۸۱۴ و ۱۸۵۱) و با همت دانشمندانی چون کوشی و ریمان نظریهٔ اعداد مختلط به شدت توسعه یافت.

[۱] Girolamo Cardano
[۲] Rafael Bombelli

۱.۶.۱ تعریف. مجموعهٔ **اعداد مختلط** را به صورت $\mathbb{C} = \{a+bi \big| a,b \in \mathbb{R}\}$ تعریف می‌کنیم. بر این مجموعه اعمال جمع و ضرب را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &:= (a+c)+(b+d)i,\\ (a+bi)(c+di) &:= (ac-bd)+(ad+bc)i.\end{aligned}$$

قرارداد می‌کنیم

$$1 := 1+0i, \qquad -(a+bi) := (-a)+(-b)i,$$
$$0 := 0+0i, \qquad \frac{1}{a+bi} := \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i.$$

۲.۶.۱ قضیه. مجموعهٔ اعداد مختلط $\mathbb{C}$ دارای کلیهٔ خواص مشروح در قضیهٔ ۳.۳.۱ برای $\mathbb{Q}$ می‌باشد. به بیان دیگر، $\mathbb{C}$ به همراه اعمال جمع و ضرب یک میدان است.

۳.۶.۱ مثال. ۱) اگر $u = 1-i$، $v = 2-i$ و $w = 3-i$، آنگاه

$$\begin{aligned} uvw &= u[vw] = (1-i)(2-i)(3-i)\\ &= (1-i)\big[(6-1)+(-2-3)i\big]\\ &= (1-i)(5-5i) = (5-5)+(-5-5)i\\ &= 0-10i = -10i.\end{aligned}$$

مثال ۲) اگر $u = 4+3i$ و $v = 3-4i$، آنگاه

$$\begin{aligned}\frac{u}{v} &= u\frac{1}{v} = (4+3i)\frac{1}{3-4i}\\ &= (4+3i)\left(\frac{3}{9+16}+\frac{4}{9+16}i\right)\\ &= (4+3i)\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)\\ &= \left(\frac{12}{25}-\frac{12}{25}\right)+\left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\right)i = i.\end{aligned}$$

مثال۳) اگر $z = 1+\sqrt{2}i$، آنگاه

$$z^2-2z+3 = (2\sqrt{2}i-1)-2(1+\sqrt{2}i)+3 = 0$$

۴.۶.۱ تمرین. هر یک از مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$1)\ (2-i)(1+i),\quad 2)\ (3-2i)(2+3i),\quad 3)\ \frac{4+2i}{3-6i},\quad 4)\ \frac{1-i}{2+i}(2+3i).$$

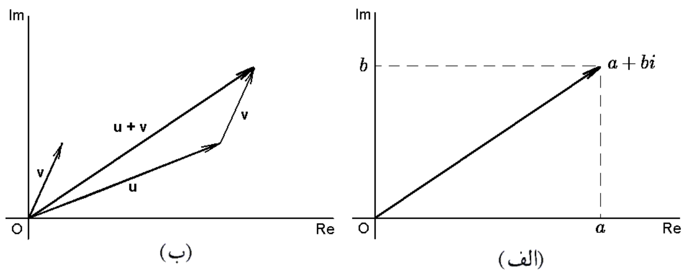
۵) فرض کنید w عددی مختلط است که $w^2+w+1=0$ (مثلاً، $w = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$) اعداد حقیقی a و b را طوری تعیین کنید که $a+bw = \frac{7+5w+3w^2}{1-2w}$.

مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$6)\ \frac{(1+2i)^3-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^3},\quad 7)\ \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta},\quad 8)\ \frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}.$$

۹) موارد (۷) و (۱۰) از قضیهٔ ۲.۶.۱ را ثابت کنید.

۵.۶.۱ نمایش دکارتی اعداد مختلط. فرض کنید $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ صفحهٔ دکارتی معمولی است. تناظری بصورت زیر بین $\mathbb{R}^2$ و مجموعهٔ اعداد مختلط $\mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم: $\mathbb{C}\ni a+bi\mapsto(a,b)\in\mathbb{R}^2$ این تناظر یکبیک است (به شکل ۱.۱–الف توجه شود). پس می‌توان اعداد مختلط را بعنوان نقاط صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ تجسم کرد. به همین دلیل است که $\mathbb{C}$ را صفحهٔ مختلط نیز می‌نامند. در بسیاری از موارد، بهتر آن است که عدد $a+bi$ را با برداری که مبداء $(0,0)$ را به نقطهٔ (a,b) متصل می‌کند، یکی بگیریم. با این دیدگاه، جمع دو عدد مختلط همچون جمع دو بردار خواهد بود (به شکل ۱.۱–ب توجه شود).



شکل ۱.۱: الف) نمایش دکارتی، ب) تعبیر جمع اعداد مختلط به عنوان جمع برداری

۶.۶.۱ تعریف. فرض کنید $z=a+bi$، در این صورت **قدر مطلق** z را با نماد $|z|$ نشان داده و بصورت $\sqrt{a^2+b^2}$ تعریف می‌کنیم. a را **قسمت حقیقی** z نامیده و با نماد $\mathrm{Re}(z)$ نشان می‌دهیم. b را **قسمت موهومی** z نامیده و با نماد $\mathrm{Im}(z)$ نشان می‌دهیم. **مزدوج** z را بصورت $a-bi$ تعریف کرده و با نماد $\bar{z}$ نشان می‌دهیم.

۷.۶.۱ قضیه. فرض کنید $z,w\in\mathbb{C}$، در اینصورت:

1) $|z|\geq 0$,

2) $|z|=0 \implies z=0$.

3) $|zw|=|z||w|$.

4) $|z+w|\leq|z|+|w|$, (نامساوی مثلثی).

5) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$ و $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$.

6) $\overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$ و $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\left(\frac{\bar{z}}{\bar{w}}\right)$.

7) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}(z-\bar{z})$.

8) $|z|^2=z\bar{z}$.

9) $z=\bar{z} \implies z\in\mathbb{R}$.

10) $\bar{\bar{z}}=z$, $|\bar{z}|=|z|$.

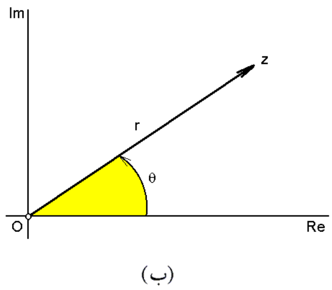
11) $|\mathrm{Re}(z)|\leq|z|$, $|\mathrm{Im}(z)|\leq|z|$.

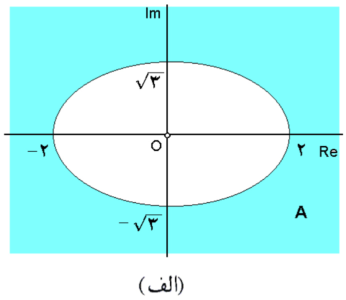
۸.۶.۱ مثال. ۱) مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{C}$ مرکب از اعداد مختلط z صادق در نامساوی $|z-1|+|z+1|>4$ را مشخص کنید.

حل: برای این منظور فرض کنید $z=a+bi$ به A متعلق است، بنابراین

$$\begin{aligned}
&|a-1+bi|+|a+1+bi|>4,\\
&\sqrt{(a-1)^2+b^2}+\sqrt{(a+1)^2+b^2}>4,\\
&(a-1)^2+b^2-8\sqrt{(a-1)^2+b^2}+16>(a+1)^2+b^2,\\
&2\sqrt{(a-1)^2+b^2}>a-4,\\
&4(a^2-2a+1+b^2)>a^2-8a+16,\\
&3a^2+4b^2>12.
\end{aligned}$$

در نتیجه $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{3}>1$. این مجموعه را در شکل ۱.۲–الف ترسیم نموده‌ایم.





شکل ۱.۲: الف) مجموعهٔ A در مثال ۱ ب) مثلث در مثال ۳

مثال ۲) نشان دهید که اعداد مختلط $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ وقتی و تنها وقتی بر یک خط راست قرار دارند که اعداد حقیقی α و β و γ چنان یافت شوند که $\alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3=0$ و $\alpha+\beta+\gamma=0$.

حل: برای این منظور، توجه می‌کنیم که نقاط z_1 و z_2 و z_3 وقتی و تنها وقتی بر یک خط راست واقعند که بردارهای $\overrightarrow{z_1z_2}$ و $\overrightarrow{z_1z_3}$ موازی باشند، یعنی عددی حقیقی مانند α یافت شود که $\overrightarrow{z_1z_3}=t\overrightarrow{z_1z_2}$. به بیان دیگر $z_3-z_1=t(z_2-z_1)$ یا $(t-1)z_1-tz_2+z_3=0$. اکنون کافی است فرض شود $\alpha=t-1$، $\beta=-t$ و $\gamma=1$. بر عکس این حکم به صورت مشابه قابل اثبات می‌باشد.

مثال ۳) فرض کنید $z_1+z_2+z_3=0$ و $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ نشان دهید که z_1، z_2 و z_3 رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع محاط در دایرهٔ واحد (یعنی $C:|z|=1$) هستند. به شکل ۱.۲–ب توجه شود.

حل: با توجه به قضیهٔ ۷.۶.۱، ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned}
|z_2-z_3|^2 &= (z_2-z_3)\overline{(z_2-z_3)}\\
&= z_2\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}-z_2\overline{z_3}-z_3\overline{z_2}\\
&= 2|z_2|^2+2|z_3|^2-(z_2+z_3)\overline{(z_2+z_3)}\\
&= 4-|z_2+z_3|^2=4-|-z_1|^2\\
&= 4-|z_1|^2=3.
\end{aligned}$$

و چون بین z_1 و z_2 و z_3 تقارن وجود دارد، پس فاصلهٔ آنها دوبه‌دو برابرند.

مثال ۴) مجموعهٔ همهٔ $z = a + bi \in \mathbb{C}$ هایی را مشخص کنید که $|z^2 - 1| = \alpha$.

حل: اگر $z = a + bi$ در این شرط صدق کند، آنگاه

$$\begin{aligned}\alpha &= |z^2 - 1| = |a^2 - b^2 + 2abi - 1| \\ &= \sqrt{(a^2 - b^2 - 1)^2 + (2ab)^2}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{gathered}a^4 + b^4 + 1 - 2a^2b^2 + 2b^2 - 2a^2 + 4a^2b^2 = \alpha^2 \\ (a^2 + b^2 + 1)^2 = 4a^2 + \alpha^2) \\ b^2 = -a^2 - 1 \pm \sqrt{\alpha^2 + 4a^2}\end{gathered}$$

که چون a و b عدد حقیقی‌اند، پس + مورد قبول است، یعنی $b = \pm\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 4a^2} - 1 - a^2}$. بایستی زیر رادیکال مثبت باشد، یعنی $1 + a^2 \leq \sqrt{\alpha^2 + 4a^2}$، یا $(a^2 - 1)^2 \leq \alpha^2$. بنابراین جواب مسأله چنین است

$$\left\{a + bi \,\middle|\, 1 - \alpha \leq a^2 \leq 1 + \alpha,\ b = \pm\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 4a^2} - 1 - a^2}\right\}.$$

مثال ۵) نشان دهید که اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد و z یک ریشه از آن، آنگاه $\bar{z}$ نیز ریشهٔ این چند جمله‌ای است.

حل: فرض کنیم $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ که a_i ها اعداد حقیقی‌اند. اگر z ریشهٔ $P(x)$ باشد، آنگاه $P(z) = 0$. از طرفین این رابطه مزدوج می‌گیریم:

$$\begin{aligned}0 &= \bar{0} = \overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} \\ &= a_n \overline{z^n} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = P(\bar{z})\end{aligned}$$

مثال ۶) **حل معادلهٔ درجه دوم با دلتای منفی.** فرض کنیم $ax^2 + bx + c = 0$ و $\triangle = b^2 - 4ac < 0$. در اینصورت $a(x - \dfrac{b}{2a})^2 + c - \dfrac{b^2}{4a} = 0$، یا $(x - \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. بنابراین

$$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i.$$

توجه شود که بنابه تمرین قبل این دو جواب مزدوج هستند!

۹.۶.۱ تمرین.

۱) ثابت کنید که اگر عدد مختلط z با قدر مطلق $|z| = 1$ باشد و نیز $z \neq -1$، آنگاه عدد حقیقی t ای یافت می‌شود که $z = \frac{1+ti}{1-ti}$.

۲) فرض کنید $z, w \in \mathbb{C}$ دلخواهند، ثابت کنید (قاعده متوازی الاضلاع): $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

۳) موارد (۳)، (۶) و (۱۱) از قضیهٔ ۷.۶.۱ را ثابت کنید.

۴) فرض کنید $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ که $|\alpha| = |\beta|$، نشان دهید که $|\alpha+\gamma|^2 + |\alpha-\gamma|^2 = |\beta+\gamma|^2 + |\beta-\gamma|^2$.

۵) نشان دهید که اگر $|\alpha| < 1$ و $|\beta| \le 1$، آنگاه $|\beta+\alpha| \le |1+\overline{\alpha}\beta|$. در چه صورتی تساوی برقرار می‌شود؟

در هر مورد، مجموعهٔ همهٔ z های صادق در روابط داده شده را بنویسید:

6) $\mathrm{Re}(z) \ge \mathrm{Im}(z)$, 7) $|z-1+3i| < 4$,

8) $|z-1| + |z+i| = 2$, 9) $|z-1+i| = |z+1-i|$,

10) $|z-1| \le |z+1|$, 11) $|z| + \mathrm{Re}(z) \le 1$,

12) $\left(\dfrac{z+1}{z-i}\right)^4 = 1$, 13) $3|z| - \mathrm{Re}(z) = 12$,

14) $|z-2| = |1-2\overline{z}|$ 15) $2|z-i| = \mathrm{Re}(z)+1$

فرض کنید $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$، نشان دهید که

15) $|\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta| = |\alpha+\beta+\gamma|$, 16) $\dfrac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{R}$.

۱۷) نشان دهید که اگر a و b و c و نیز x و y و z رئوس دو مثلث در $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ باشند، آنگاه در صورتی این دو مثلث متشابه‌اند:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

۱۸) معادلات زیر را با فرض $x \in \mathbb{R}$ حل کنید:

1) $(x+i)^n - (x-i)^n = 0$,

2) $\cos x + i\sin x = \sin x + i\cos x$.

۱۹) فرض کنید α عدد طبیعی دلخواهی است، ثابت کنید که $\left(\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n = \dfrac{1+i\tan(n\alpha)}{1-i\tan(n\alpha)}$.

۲۰) فرض کنید $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 1$، در این صورت ثابت کنید که $(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = 1$.

۲۱) فرض کنید a و b اعداد مختلط مخالف یک و صفر می‌باشند. نشان دهید که دو مثلث با رئوس O، 1 و a و نیز با رئوس O، b و ab متشابه هستند.

۱۰.۶.۱ نمایش قطبی اعداد مختلط. فرض کنید $z = a+bi \in \mathbb{C}$ یک عدد مختلط مخالف صفر است. فاصلهٔ نقطهٔ z تا مبداء را r و زاویهٔ مثبت بین محور Re و نیمخط Oz را θ می‌نامیم:

$$r := |z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

$$\theta := \arg(z) = \begin{cases} \arctan(b/a) & a>0 \text{ اگر} \\ \pi/2 & a=0<b \text{ اگر} \\ 3\pi/2 & a=0>b \text{ اگر} \\ \arctan(b/a)+\pi & a<0 \text{ اگر} \end{cases}$$

در این صورت، r را طول z و θ را آرگومان z می‌نامیم. بعلاوه تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{Arg}(z) := \{\arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

بسادگی اثبات می‌شود که $a = r\cos\theta$ و $b = r\sin\theta$. در این حالت می‌نویسیم

$$z = re^{i\theta} \quad \text{یا} \quad z = r\exp(i\theta)$$

۱۱.۶.۱ مثال. با توجه به تعریف داریم:

$z=a+bi$	$\mathrm{Re}(z)$	$\mathrm{Im}(z)$	$\lvert z\rvert$	$\arg(z)$	$z=re^{\theta}$
1	1	0	1	0	$1e^{0i}$
-1	-1	0	1	π	$1e^{\pi i}$
i	0	1	1	$\pi/2$	$1e^{\pi i/2}$
$-i$	0	-1	1	$3\pi/2$	$1e^{3\pi i/2}$
$1+i$	1	1	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	$\sqrt{2}e^{\pi i/4}$
$1-i$	1	-1	$\sqrt{2}$	$-\pi/4$	$\sqrt{2}e^{-\pi i/4}$
$-1+i$	1	-1	$\sqrt{2}$	$3\pi/4$	$\sqrt{2}e^{3\pi i/4}$
$-1-i$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$5\pi/4$	$\sqrt{2}e^{5\pi i/4}$

۱۲.۶.۱ قضیه. نمایش قطبی اعداد مختلط دارای خواص به شرح زیر است:

1) $re^{i\theta} = r_1e^{i\theta_1} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r_1, \\ \theta = \theta_1 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$

2) $re^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow r = 1$ و $\theta = 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$

3) $re^{i\theta} = r\cos\theta + r\sin\theta i,$

4) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}),$

5) $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$

6) $(r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2}) = (r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)},$

7) $(re^{i\theta})^n = r^ne^{n\theta i},$

8) $-re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)},$

9) $\overline{re^{i\theta}} = re^{-\theta i},$

10) $(re^{i\theta})^{-1} = \dfrac{1}{r}e^{-\theta i},$

۱۳.۶.۱ مثال. ۱) چون $1 + i = \sqrt{2}e^{\pi/4}$، داریم:

$$\begin{aligned}
(1+i)^{25} &= \left(\sqrt{2}e^{\pi i/4}\right)^{25} \overset{(7)}{=} \left(\sqrt{2}\right)^{25} e^{25\pi/4i} \\
&= 2^{12}\sqrt{2}e^{(6\pi+\pi i/4)} \overset{(3)}{=} 2^{12}\sqrt{2}e^{\pi i/4} \\
&\overset{(2)}{=} 2^{12}\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2^{12}\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= 2^{12}(1+i)
\end{aligned}$$

توضیح اینکه، اعداد داخل پرانتزها، به شمارهٔ حکم مورد استفاده از قضیهٔ ۱۲.۶.۱ اشاره دارند.

مثال ۲) چون $1+\sqrt{3}i = 2e^{\pi i/4}$ و $1-i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$، داریم:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{30} &= \left(\frac{2e^{\pi i/3}}{\sqrt{2}e^{-\pi i/4}}\right)^{30}\\ &\overset{(6)}{=} \left(\sqrt{2}e^{(\pi i/3+\pi i/4)}\right)^{30} \overset{(7)}{=} (\sqrt{2})^{30}e^{30(7\pi i/12)}\\ &= 2^{15}e^{(17\pi+\pi i/2)} \overset{(3)}{=} 2^{15}e^{-\pi i/2}\\ &\overset{(2)}{=} 2^{15}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2^{15}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2^{15}i.\end{aligned}$$

توضیح اینکه، اعداد داخل پرانتزها، به شمارهٔ حکم مورد استفاده از قضیهٔ ۱۲.۶.۱ اشاره دارند.

مثال ۳) مقدار عبارت $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta$ را بدست می‌اوریم.
با استفاده از قسمت (۱) از قضیه ۱۲.۶.۱، داریم:

$$\begin{aligned}\sin\theta+\sin(2\theta)+\cdots+\sin(n\theta) &= \mathrm{Im}(e^{\theta i})+\mathrm{Im}(e^{2\theta i})+\cdots+\mathrm{Im}(e^{n\theta i})\\ &= \mathrm{Im}(e^{\theta i}+e^{2\theta i}+\cdots+e^{n\theta i}) \overset{(7)}{=} \mathrm{Im}(e^{\theta i}+(e^{\theta i})^2+\cdots+(e^{\theta i})^n)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1-(e^{\theta i})^n}{1-e^{\theta i}}e^{\theta i}\right) \overset{(2)}{=} \mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{n\theta i}}{1-e^{\theta i}}e^{\theta i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{n\theta i/2}(e^{n\theta i/2}-e^{-n\theta i/2})}{e^{\theta i/2}(e^{\theta i/2}-e^{\theta i/2})}e^{\theta i}\right)\\ &\overset{(5)}{=} \mathrm{Im}\left(e^{(n+1)\theta i/2}\frac{2i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \overset{(3)}{=} \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\ \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\end{aligned}$$

توضیح اینکه، اعداد داخل پرانتزها، به شمارهٔ حکم مورد استفاده از قضیهٔ ۱۲.۶.۱ اشاره دارند.

۱۴.۶.۱ تمرین.

۱) هر یک از اعداد 2، -2، $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ،$-1-i\sqrt{3}$ ،$-$ $\left(\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}\right)^{22}$ را به شکل قطبی بنویسید.

۲) هر یک از مقادیر $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{41}$، $(1-i)^{10}$، $\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$ و $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{22}$ را محاسبه کنید.

۳) نشان دهید که اگر $\theta\in\mathbb{R}$، آنگاه
الف) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$،   ب) $\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$ ، و
ج) $\sin 4\theta = 8\sin\theta\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

۴) در صورتی که $n\geq 2$، ثابت کنید که $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = n/2^{n-1}$

۵) کوچکترین اعداد طبیعی n و m ای را بیابید که $\left(1+\sqrt{3}i\right)^m = (1-i)^n$.

۶) اگر $z=a+bi\in\mathbb{C}$، تعریف می‌کنیم

$$e^z := e^a e^{bi} = e^a\cos b+(e^a\sin b)i$$

در این صورت با فرض

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{zi} - e^{-zi}\right) \quad \text{و} \quad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{zi} + e^{-zi}\right)$$

در این صورت ثابت کنید

الف) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$، ب) $\tan z = \dfrac{\sin(2a) + i\sinh(2b)}{\cos(2a) + \cosh(2b)}$ و

ج) $\sin z = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$.

۷) در صورتی که $x_n + iy_n = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$، نشان دهید:

الف) $x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n = \sqrt{3}\, 2^{2n}$ و ب) $x_{n+1} x_n + y_{n+1} y_n = 2^{2n}$.

۸) مجموع هر یک از عبارتهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)$ و ب) $\sin x + \sin(3x) + \cdots + \sin((2n-1)x)$.

۱۵.۶.۱ قضیهٔ دموآور. گیریم $z = re^{\theta i} \in \mathbb{C} - \{0\}$ و $n \in \mathbb{N}$. در اینصورت n ریشهٔ n ام عدد z عبارتند از

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} i\right)$$

که در آن $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

برهان: فرض کنید $z = re^{i\theta}$، $w = r_1 e^{i\theta_1}$ و $w = \sqrt[n]{z}$. بنابراین $z = w^n$ و بنابه قسمت (۷) از قضیهٔ ۱۲.۶.۱، داریم $re^{i\theta} = r_1^n e^{in\theta_1}$. اکنون از قسمت (۱) از قضیهٔ ۱۲.۶.۱ نتیجه می‌گیریم $r = r_1^n$ و $n\theta_1 = \theta = 2k\pi$، که $k \in \mathbb{Z}$ دلخواه است. بنابراین $r_1 = \sqrt[n]{r}$ و $\theta_1 = (\theta + 2k\pi)/n$.

اگر فرض کنیم $u = \sqrt[n]{r} e^{\theta i/n}$ و $v = e^{2\pi i/n}$، آنگاه می‌توان نوشت

$$\sqrt[n]{r} e^{(\theta + 2k\pi)i/n} = \sqrt[n]{r} e^{\theta i/n} \left(e^{2\pi i/n}\right)^k = uv^k.$$

از طرفی $u^n = \left(e^{2\pi i/n}\right)^n = e^{2\pi} = 1$، بنابراین uv^n عملاً همان $uv^0 = u$ است. پس کافی است که k مقادیر بین صفر و $n-1$ را اختیار کند. □

۱۶.۶.۱ مثال. ۱) فرض کنید $z = 1$ و $n = 3$ در این صورت، سه ریشهٔ سوم عدد یک برابرند با

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1e^{0i}} = \sqrt[3]{1} \exp\left\{\frac{0 + 2k\pi}{3} i\right\}$$

که در آن $k = 0, 1, 2$. برای $k = 0$، داریم

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} 1e^{0i} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

برای $k = 1$، داریم

$$\sqrt[3]{1} = 1e^{2\pi/2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

برای $k=2$، داریم

$$\sqrt[3]{1}=1e^{4\pi i/3}=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

مثال ۲) فرض کنید $z\neq 1$ یکی از ریشه‌های پنجم یک است، در این صورت ثابت کنید که

$$\frac{z}{1+z^2}+\frac{z^2}{1+z^4}+\frac{z^3}{1+z}+\frac{z^4}{1+z^3}=2$$

حل: چون $z^5=1$، بنابراین $zz^4=1$. یعنی $\frac{1}{z}=z^4$. همچنین $z^2z^3=1$، یعنی $\frac{1}{z^2}=z^3$. بنابراین، طرف اول تساوی بالا عبارت است از

$$\begin{aligned}\frac{z}{1+z^2}+\frac{z^2}{1+1/z}+\frac{z^3}{1+z}+\frac{z^4}{1+1/z^2}&=\frac{z}{1+z^2}+\frac{z^3}{z+1}+\frac{z^3}{1+z}+\frac{z^6}{z^2+1}\\&=\frac{2z^3}{1+z}+\frac{2z}{1+z^2}=\frac{2z^5+2z^3+2z^2+2z}{(1+z^2)(1+z)}\\&=\frac{2(1+z+z^2+z^3)(1-z)}{(1+z^2)(1-z^2)}=\frac{2(z^4-1)}{(z^2+1)(z^2-1)}=2.\end{aligned}$$

۱۷.۶.۱ تمرین.

۱) هر یک از مقادیر $\sqrt[4]{-8}$، $\sqrt[3]{i}$، $\sqrt[3]{-2+2i}$، $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$، $\sqrt{2+2\sqrt{2}i}$ و $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$ را محاسبه کنید.

۲) تمام ریشه‌های پنجم ۳۲ را بیابید.

۳) عدد $8-8\sqrt{3}i$ را بشکل قطبی نوشته و سپس ریشه‌های چهارم آن را بیابید.

۴) تمام مقادیر مختلف $(1-i)^{5/4}$ را محاسبه کنید.

۵) نشان دهید که اگر $1=w_1,\cdots,w_n$ ریشه‌های n ام یک باشند، آنگاه $w_1+w_2+\cdots+w_n=0$.

۶) فرض کنید $a\in\mathbb{R}$ و $m\in\mathbb{N}$، نشان دهید که عبارت زیر برابر $\frac{x^{2m}-a^{2m}}{x^2-a^2}$ است:

$$\left(x^2-2ax\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)+a^2\right)\cdots\left(x^2-2ax\cos\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)+a^2\right).$$

۷) نشان دهید که اگر $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، آنگاه

$$(x+y+z)(x+yw+zw^2)(x+yw^2+zw)=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

۸) معادلهٔ $x^3-3ax+(a^3+1)=0$ که $a\in\mathbb{R}$ را حل کنید.

۱۸.۶.۱ کرهٔ ریمان و صفحهٔ مختلط گسترش یافته. می‌دانیم که $\mathbb{C}$ را با $\mathbb{R}^2$ می‌شود یکی گرفت. بعلاوه $\mathbb{R}^2$ را نیز با صفحه xOy از فضا $\mathbb{R}^3$ می‌توان یکی گرفت. در نتیجه می‌شود $\mathbb{C}$ را با $xOy := \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ یکی گرفت. حال کره‌ای به مرکز $(0,0,1)$ و به شعاع واحد را در نظر بگیرید:

$$S : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

همچنین فرض کنید $N(0,0,2)$ قطب شمال S می‌باشد (به شکل ۱.۳-الف توجه شود). بازاء هر نقطه $x+iy = (x,y,0)$ از $\mathbb{C}$، خط راست و اصل بین این نقطه و N را در نظر گرفته و محل تلاقی آن را با کرهٔ S را با نماد $f(x+iy)$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب نگاشتی یک‌به‌یک از $\mathbb{C}$ به $S-\{N\}$ بدست می‌آید. این نگاشت را **نگاشت ریمانی** و S را **کرهٔ ریمان** می‌نامند:

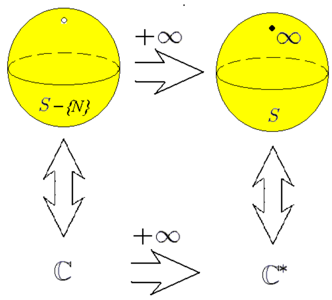
$$f : \mathbb{C} \longrightarrow S - \{N\}, \qquad f(x+yi) = \frac{1}{1+x^2+y^2}\left(x, y, x^2+y^2\right).$$

با استفاده از نگاشت ریمان (یا، تصویر گنجگاری) هر خط راست و هر دایره بر S نگاشته می‌شود. خطوط راست به دوایری بر S تصویر می‌شوند که از N می‌گذرند. پس تمام خطوط در $\mathbb{C}$ در بینهایت به یک نقطه می‌رسند! این نقطهٔ (انگاری) را با نماد ∞ نشان می‌دهیم (به شکل ۱.۳-ب توجه شود). این نقطه به $N \in S$ متناظر است. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ را که با N در تناظر است، **صفحهٔ مختلط گسترش یافته** می‌نامند. مهمترین خواص ∞ عبارتند از

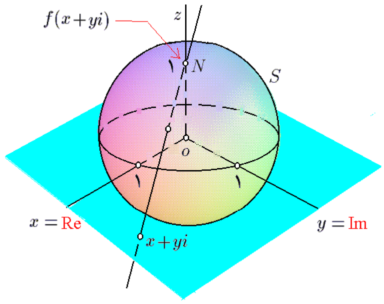
$$1)\ \forall z \in \mathbb{C}^* \ :\ z + \infty = \infty, \qquad 2)\ \forall z \in \mathbb{C}^* - \{0\} \ :\ \frac{z}{0} = \infty,$$

$$3)\ \forall z \in \mathbb{C}^* - \{0\} \ :\ z\infty = \infty, \qquad 4)\ \forall z \in \mathbb{C} \ :\ \frac{z}{\infty} = 0.$$

بنابراین، با بینهایت اعداد مختلط ∞ همانند خود اعداد مختلط می‌توان کارکرد. تنها نکته‌ای که می‌بایستی در نظر گرفته شود این است که به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ و یا $\frac{\infty}{\infty}$ نرسیم. در این صورت محاسبات کاملاً صحیح هستند!



(ب)



(الف)

شکل ۱.۳: الف) نگاشت گنجنگاری ب) گسترش صفحهٔ مختلط با افزودن ∞

۱۹.۶.۱ تمرین.

۱) فرض کنید معادلهٔ جبری درجهٔ سومی به شکل

$$\mathcal{E} : X^3 + AX^2 + BX + C = 0$$

داده شده است، که ضرایب آن اعداد حقیقی هستند. در این صورت نشان دهید که با فرض $X = x - A/3$ می‌توان معادلهٔ $\mathcal{E}$ را به فرم ساده‌تر $\mathcal{E}' : x^3 + bx + c = 0$ تبدیل نمود. حال فرض کنید که $x = s + t$ و نشان دهید که بایستی $st = -b/3$ و $s^3 + t^3 = -c/2$. اکنون، با حذف t بین دو معادلهٔ بالا، به معادله‌ای درجهٔ دوم بر حسب s^3 برسید. سپس، با حل معادلهٔ بدست آمده، جوابهای $\mathcal{E}$ را بیابید. به ۵.۵.۲ توجه شود.

۲) نشان دهید که اگر $M = a^2 + b^2$ و $N = c^2 + d^2$ دو عدد طبیعی باشند که به صورت مجموعی از دو عدد طبیعی نوشته شده‌اند، آنگاه MN را نیز به صورت مجموعی از دو عدد طبیعی می‌توان نوشت. (راهنمایی: عبارت $|(a+bi)(c+di)|^2$ را در نظر بگیرید.)

۲۰.۶.۱ تمرین. چند مساله مبارزه طلب:

۱) دستگاه معادلات $x^5 + y^5 = 33$ و $x + y = 3$ را با فرض $x, y \in \mathbb{C}$ حل کنید.

۲) فرض کنید A، B، C و D چهار نقطه در صفحه هستند (بعبارت دیگر چهار عدد مختلط هستند). نامساوی افلاطون $|AB|.|CD| + |BC|.|AD| \geq |AC|.|BD|$ را اثبات کنید.

۳) فرض کنید $A_1A_2A_3$ و $B_1B_2B_3$ دو مثلث متساوی الضلاع دلخواهند (رئوس آنها را اعداد مختلط می‌توانید در نظر بگیرید). فرض کنید C_i وسط پاره خط A_iB_i است، که $i = 1,2,3$. ثابت کنید مثلث $C_1C_2C_3$ نیز متساوی الاضلاع است.

۴) فرض کنید n عددی طبیعی و a عددی حقیقی است. در این صورت، بکمک اعداد مختلط مقدار عبارت

$$\binom{n}{1}\sin a + \binom{n}{2}\sin(2a) + \cdots + \binom{n}{n}\sin(na)$$

را بدست آورید.

بخش ۷.۱ استفاده از میپل

میپل (Maple) نام یک نرم افزار کامپیوتری بسیار قوی است. از این نرم افزار به شکل گسترده‌ای در آموزش، تحقیق و کاربرد ریاضی استفاده می‌شود. میپل دارای مزایای بیشماری است که آن را از سایر نرم افزارهای مشابه (نظیر، متمتیکا، متلب، متکد، درایو و . . .) متمایز می‌سازد. برخی از این ویژگیها به شرح زیرند:

۱) محاسبات با اعداد صحیح را در آن می‌توان انجام داد.
۲) محاسبات عددی را با هر تعداد رقم می‌توان انجام داد.
۳) محاسبات نمادین را به کمک آن می‌توان انجام داد.
۴) توابع ساخته شده و بسته‌های نرم افزاری بیشماری به زبان میپل وجود دارد که هر کدام می‌تواند در موضوعی بخصوص بکار آید.
۵) هر گونه محاسبه‌ای را می‌توان ضبط کرده و در دفعات بعدی استفاده نمود.
۶) از محیط آن به عنوان یک ادیتور مناسب کامپیوتری می‌توان استفاده نمود.
۷) میپل یک زبان برنامه نویسی بسیار قوی و در عین حال ساده است.
۸) تعداد بیشماری از کاربران با آن کار می‌کنند و به همین دلیل دارای مشکلات پنهانی احتمالی کمتری است.

میپل در اساس نرم افزاری است که در دانشگاه واترلو کانادا به وجود آمد و رفته رفته سیر تکاملی خود را طی نمود. برای ملاحظهٔ تاریخچه و ویژگیهای در حال گسترش آن می‌توانید به آدرس http:\www.maplesoft.com بر شبکهٔ اینترنت مراجعه کنید.

۱.۷.۱ چرا. شاید بتوان دلایل زیر را در این مورد مطرح نمود که هر کدام به تنهایی می‌توان دلیل کافی برای استفاده از میپل در آموزش باشد، در حالی که اینها تنها دلایلی هستند که تا کنون به نظر می‌رسند:

۱) مدرس، متعلم و خواننده از درگیر شدن با مباحث تکراری معاف می‌شود.

۲) مدرس به کمک آن می‌تواند چیزهایی که در تخیل می‌گنجد را به عیان بیان نشان داده و چگونگی تفهیم مطلب را تسریع کند.

۳) مدرس می‌توان از فرصت بدست آمده حاصل از بکارگیری میپل، به عمق مطالب بپردازد و یا تمرینات بیشتری را در کلاس حل کند.

۴) خواننده می‌تواند ایده‌های احتمالی خود را سریعتر اجرا نموده و چگونگی درستی آن مطلع شود.

۲.۷.۱ چگونه. در میان متخصصین علوم تربیتی در مورد نحوه و میزان بکارگیری ابزارهای کمک آموزشی مباحثات فراوانی وجود دارد که در همگی در اصل وجود آن متفق القولند ولی در میزان و چگونگی استفاده از آن دارای نظرات متفاوتی هستند. نکته‌ای که منتقدین استفادهٔ نامحدود ار نرم افزاها مطرح می‌کنند، این است که با بکارگیری گسترده از نرم افزارها، احتمال دور شدن متعلم از عمق مطلب و پناه بردن او ظاهر می‌رود. این مشکل که بظر به حق می‌رسد را می‌توان با شیوهٔ تدریس و ارزشیابی مرتفع نمود. بر همین اساس نویسنده بر خود دانسته است تا به شکل مبسوط در این خصوص تحقیق نموده و راهکارهای عملی برای انجام این مهم را ارائه نماید.

بر همین اساس توصیه می‌شود که خوانندهٔ محترم به نکات زیر توجه کافی داشته باشد:

۱) در ابتدای آشنایی با نرم افزار میپل تا اندازه‌ای با محیط آن آشنا شده و چند مثال ساده را نیز به کمک آن حل کنید ولی از صرف وقت بیشتر خودداری کنید و فرصت دهید تا با کتاب جلو بروید.

۲) در هر موضوع خاص ابتدا ((بحث نظری)) را بطور کامل مورد توجه قرار دهید و سپس به بخش ((استفاده از میپل)) که پایان هر فصلی آورده شده است، مراجعه کنید.

۳) سعی کنید مثالهای اولیه را ابتدا با دست و سپس آنها را به کمک میپل حل نمایید.

۴) توصیه می‌شود تا بعد از هفتهٔ دوم درس، هر هفته ۴۵ دقیقه به عنوان (آزمایشگاه ریاضی) در نظر گرفته شود و در آن استاد مسلط به میپل به آموزش چگونگی استفاده و نیز سودبخشی آن بپردازد.

۵) توصیه می‌شود که مدرس مربوطه مسایلی را همراه با حل دستی و حل با استفاده از میپل به طور منظم از شاگردان طلب کند.

۳.۷.۱ پیشنیاز. برای استفاده از میپل لازم است تا خوانندهٔ محترم با مراجعه به یکی از کتب آموزشی مربوطه، ضمن آشنایی با محیط میپل، مطالبی چون استفاده از کمک و چگونگی تایپ مطالب در آن را فربگیرد.

۴.۷.۱ دستور و اجرای آن. هر دستور در محیط میپل دنباله‌ای از حروف و نمادها است که توسط کی‌بورد قابل وارد کرن می‌باشد. در انتهای هر دستور باید از نمادهای : و یا ؛ استفاده شود. اگر از نماد ؛ استفاده شود، دستور اجرا شده و نتیجهٔ آن در خط بعدی ظاهر می‌گردد، ولی اگر ار نماد : در آخر یک دستور استفاده شود، آن دستور تنها در حافظه اجرا می‌شود و نمایش داده نخواهد شد.

۵.۷.۱ طرز استفاده از سی دی همراه کتاب. آن را در درایو مخصوص سی دی قرار داده و به دایرکتوری Maple7 بروید، فایل Setup را اجرا کنید. دستگاه شما به طور خودکار نرم افزار میپل را نصب خواهد نمود.

پس از نصب، یک آیکن که بر آن شکل میپل (یعنی، برگ درخت کاج) نقش بسته است، ظاهر می‌گردد. برای شروع به کار کافی است بر آن آیکن دو بار کلیک کنید. پس از این کار یک صفحهٔ سفید ظاهر می‌گردد

که در گوشهٔ سمت چپ و بالای آن یک کرسر چشمکزن قرار، برای وارد نمودن دستورات کافی است بر صفحهٔ مذکور کلیلک کرده و شروع به تایپ کنید. در آخر هر دستور با انتر Enter زدن، دستور اجرا شده و نتیجه اعلام می‌گردد. چنانچه در حالی که کلید شیفت Shift را فشرده‌اید، کلید انتر را بزنید، بدون اینکه دستور اجرا شود، یک خط جدید برای وارد کردن ادامهٔ دستورات قبلی باز می شود.

برای استفاده از مثالهای موجود در سی دی، کافی است کلیدهای File و Open را بترتیب فشار داده و دایرکتوری Examples\Volume_1 در سی دی را بیاورید. حال داخل هر یک از فصلهای مورد نظر شده و بر صفحه کار (worksheet) شاملِ مثال مورد نظر کلیک کنید.

چنانچه تغییراتی در محتوی مثالها انجام دادید، می‌توانید نتیجهٔ کار را دایرکتوری دیگری (که در دستگاه شما قرار دارد) ذخیره کنید.

۶.۷.۱ نمادهای و توابع معمولی. در جدول زیر برخی از نمادهای معمول ریاضیات و معادل آنها ذکر شده است:

در محیط میپل	در متن معمولی	در محیط میپل	در متن معمولی
a-b	$a-b$	a+b	$a+b$
a/b	a/b	a*b	ab
sin	sin	a^b	a^b
tan	tan	cos	cos
sec	sec	cot	cot
sinh	sinh	csc	csc
tanh	tanh	cosh	cosh
sech	sech	coth	coth
arcsinh	arcsinh	csch	csch
arcsin	arcsin	arccosh	arccosh
arctan	arctan	arccos	arccos
sqrt{x}	$\sqrt{(x)}$	arccot	arccot
floor(x)	$[x]$	ln(x)	$\ln(x)$
root[n]{x}	$\sqrt[n]{(x)}$	abs(x)	$\|x\|$
min{x,y}	$\min(x,y)$	max{x,y}	$\max(x,y)$
log[n](x)	$\log_n(x)$	log10(x)	$\log_{10}(x)$
I	$\mathbf{i} = \sqrt{-1}$	Pi	π
Im(x)	$\mathrm{Im}(x)$	Re(x)	$\mathrm{Re}(x)$
1/x	$1/x$	conjugate(x)	$\bar{x}$
exp(x)	e^x	sgn(x)	$\mathrm{sgn}(x)$

۷.۷.۱ نمادگزاری. فرض کنید دستور C را اجرا کرده و به نتیجهٔ R رسیده باشیم، در این صورت خواهیم نوشت:

$$\mathrm{C} \equiv\!(\!(\text{میپل})\!)\!\Rrightarrow R$$

۱.۷.۸ اعمال با اعداد صحیح. فرض کنیم n و m اعداد طبیعی باشد، در این صورت

در محیط میپل	در متن معمولی
n mod m	n به پیمانهٔ m
factor(n)	تجزیهٔ عدد n
isprime(n)	آیا n عددی اول است؟
gcd(m,n)	کوچکترین مقسوم علیه مشترک
lcm(m,n)	بزرگترین مضرب مشترک m و n
n!	n فاکتوریل
binomial(m,n)	انتخاب $\binom{n}{m}$
ithprime(n)	n امین عدد اول
sum('e(k)','k'=n..m)	مجموع $e(k)$ از n تا m

۱.۷.۹ اعمال با اعداد گویا. فرض کنیم n و m اعداد گویا باشد، در این صورت علاوه بر دستورات قبل، داریم

در محیط میپل	در متن معمولی
ifactor(n)	تجزیهٔ عدد n
simplify(n)	ساده شدهٔ n
numer(n)	صورت کسر n
denom(n)	مخرج کسر n

۱.۷.۱۰ اعمال با اعداد حقیقی. در حالت عادی *محیط میپل مختلط است* و چنانچه بخواهید اعداد حقیقی فرض شوند بایستی ابتدا دستور with(RealDomain) را اجرا کنید.
فرض کنیم n و m اعداد حقیقی باشد، در این صورت علاوه بر دستورات قبل، داریم

در محیط میپل	در متن معمولی
root[k](m)	ریشهٔ k ام m
sqrt(n)	ریشهٔ n
simplify(n)	ساده شدهٔ n
expand(n)	باز شدهٔ n
evalf(n,m)	نمایش اعشاری n با m رقم
rashnalize(n)	صورت گویا شدهٔ n

۱.۷.۱۱ اعمال با اعداد مختلط. در حالت عادی محیط میپل مختلط است. برای وارد نمودن عدد مختلط $x+yi = x+y\sqrt{-1}$ در محیط میپل، تایپ شود x+y*I. اگر بخواهیم عدد حقیقی x در محاسبه دخالت دهیم، کافی است دستور assume(x,real) را اجرا کنیم.

فرض کنیم z و w اعداد مختلط باشد، در این صورت علاوه بر دستورات قبل، داریم

در محیط میپل	در متن معمولی
Re(z)	قسمت حقیقی z
Im(z)	قسمت موهومی z
conjugate(z)	مزدوج z
abs(z)	نرم یا طول
polar(r,theta)	عدد $z = re^{\theta}$
argument(z)	آرگومان z
convert(z,polar)	نمایش قطبی z
1/z	وارون z

۱۲.۷.۱ حل معادله و نامعادله. هر معادله و یا نامعادله‌ای را با یک اسم در محیط میپل وارد می‌کنیم، این کار با دستور eq_name:=equation صورت می پذیرد که eq_name نام معادله و equation ضابطهٔ معادله می‌باشد. مانند eq_1:=x^2+y^2=1 که معادلهٔ $x^2 + y^2 = 1$ را با نام eq_1 معرفی می‌کند.

چنانچه بخواهیم دستگاه معادلات شامل معادلات eq_1، ... و eq_m را حل کنیم، کافی است از دستور solve({eq_1,...,eq_m},{x_1,...,x_n}) استفاده شود که x_1، ... و x_n مجهولات مسأله هستند.

۱۳.۷.۱ مطالب بیشتر. درآدرس اینترنتی http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r1.html مثالها و منابع بیشتر در این زمینه آورده شده است.