فصل ۲

هندسهٔ تحلیلی

هندسه را به صورت علم مطالعهٔ خواص اشکال می‌توان تعریف نمود. مثلاً اینکه اگر دو ضلع و زاویه بین دو مثلث با هم برابر باشند، آن دو مثلث قابل انطباقند، یک حکم هندسی است. روشهای متعددی برای حل مسایل هندسی وجود دارد. از جمله هندسهٔ اصل موضوعی که مبتنی بر منطق است و یا هندسهٔ دیفرانسیل که مبتنی بر حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد. هدف از این فصل استفاده از جبر خطی در حل مسایل هندسه است. این علم را هندسهٔ تحلیلی می‌نامند.

۱.۲ ضرب داخلی

موضوع این بخش بسیار اساسی است، زیرا همان طوری که خواهید دید، این ادعا درست است که تقریباً تمام هندسهٔ تحلیلی را تنها با داشتن ضرب داخلی می‌توان ساخت.

۱.۱.۲ تعریف. اگر $\mathbf{v}=\overrightarrow{(a,b,c)}, \mathbf{w}=\overrightarrow{(x,y,z)}\in\mathbb{R}^3$، حاصلضرب داخلی $\mathbf{v}$ در $\mathbf{w}$ را با نماد $\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}$ نشان داده و به شکل

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}=ax+by+cz$$

تعریف می‌کنیم.

به صورت مشابه ضرب داخلی در $\mathbb{R}^n$ را می‌توان تعریف نمود: اگر $\mathbf{v}=\overrightarrow{(a_1,\cdots,a_n)}$ و $\mathbf{w}=\overrightarrow{(b_1,\cdots,b_n)}$ دو بردار در $\mathbb{R}^n$ باشند، تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}:=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$$

از این پس، تنها در مورد خواص ضرب داخلی در $\mathbb{R}^3$ سخن خواهیم گفت، اما این مطالب بدون هیچ محدودیتی برای $\mathbb{R}^n$ صحیح هستند.

۲.۱.۲ قضیه. اگر $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ و $a\in\mathbb{R}$، آنگاه:

۱) $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}$

۲) $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}+\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}$

۳) $a(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})=(a\mathbf{u})\bullet\mathbf{v}$

۴) $\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}\geq 0$

۳.۱.۲ تعریف. به دلیل ویژگی (۴) از قضیه ۲.۱.۲، **طول** (**نرم** یا **اندازه**) بردار مفروض $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$ را به صورت

$$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}}$$

تعریف می‌کنیم. یعنی،

$$\|\overrightarrow{(a,b,c)}\|:=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

۴.۱.۲ قضیه. اگر $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ و $a\in\mathbb{R}$، آنگاه:

۱) $\|\mathbf{u}\|\geq 0$

۲) $\|a\mathbf{u}\|=|a|\|\mathbf{u}\|$

۳) $\|\mathbf{u}\|=0\Leftrightarrow\mathbf{u}=\mathbf{0}$

۴) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\leq\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$

۵) $|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|\leq\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$

نامساوی ۴) و ۵) را بترتیب نامساوی مثلثی و نامساوی کوشی می‌نامند.

۵.۱.۲ تعریف. به دلیل وجود نامساوی کوشی، داریم $-1\leq\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\leq 1$. در نتیجه، زاویه بین بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ را به صورت

$$\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}):=\arccos\left(\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$

توان تعریف نمود.

بنابراین، اگر زاویه بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ برابر α باشد، آنگاه

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\alpha$$

۶.۱.۲ قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ **متعامد** باشند، آن است که $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=۰$.

۷.۱.۲ تعریف. فرض کنید $A,B\in\mathbb{R}^۳$. در این صورت **فاصلهٔ A تا B** را به صورت اندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ تعریف نموده و با نماد $d(A,B)$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر

$$d\big((x,y,z),(a,b,c)\big) := \sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲+(z-c)^۲}$$

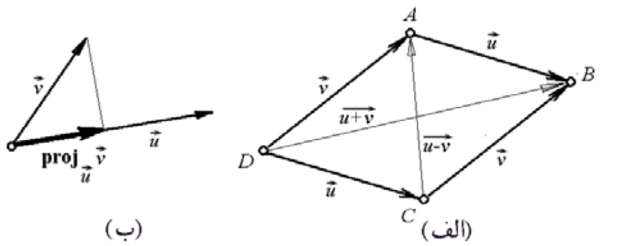
۸.۱.۲ قضیه. اگر $A,B,C\in\mathbb{R}^۳$، آنگاه:

۱) $d(A,B)\geq ۰$ ۲) $d(A,B)=۰ \Leftrightarrow A=B$

۳) $d(A,B)=d(B,A)$

۴) $d(A,B)+d(B,C)\geq d(A,C)$

نامساوی ۳) را **نامساوی مثلثی** می‌نامند.



شکل ۱.۲: الف) ضرب داخلی
ب) تصویر یک بردار بر دیگری

۹.۱.۲ مثال. ۱) زاویه بین بردارهای

$$\mathbf{u}=\overrightarrow{\left(۲,-۴,\sqrt{۵}\right)} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}=\overrightarrow{\left(-۲,۴,\sqrt{۵}\right)}$$

برابر است با

$$\begin{aligned}\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \arccos\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right)\\ &=\arccos\left(\frac{(۲)(-۲)+(-۴)(۴)+(\sqrt{۵})(\sqrt{۵})}{\sqrt{۲^۲+(-۴)^۲+(\sqrt{۵})^۲}\sqrt{(-۲)^۲+۴^۲+(\sqrt{۵})^۲}}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{-۱۵}{۵\times ۵}\right)=\arccos(۰٫٦)\approx ۰٫۹۲۷\end{aligned}$$

مثال ۲) مثلثی که رئوس آن $A=(۱,۱,۰)$، $B=(۱,۰,۱)$ و $C=(۰,۱,۱)$ هستند، متساوی الاضلاع است. زیرا:

$$\begin{aligned}d(A,B) &= \sqrt{(۱-۱)^۲+(۰-۱)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۲}\\ d(A,C) &= \sqrt{(۰-۱)^۲+(۱-۱)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۲}\\ d(B,C) &= \sqrt{(۰-۱)^۲+(۱-۰)^۲+(۱-۱)^۲}=\sqrt{۲}\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید A، B، C و D رئوس یک متوازی الاضلاعند. ثابت کنید که مجموع توان دوم طول اضلاع با مجموع توان دوم طول دو قطر برابر است. (شکل ۱.۲—الف):

$$AB^۲+BC^۲+CD^۲+DA^۲=AC^۲+BD^۲$$

حل. فرض کنیم $\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DA}=\mathbf{v}$. در این صورت $\overrightarrow{DC}=\mathbf{u}$، $\overrightarrow{CB}=\mathbf{v}$، $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$ و $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}=\mathbf{v}-\mathbf{u}$. بنابراین حکم مورد نظر

$$\|\mathbf{u}\|^۲+\|-\mathbf{v}\|^۲+\|-\mathbf{u}\|^۲+\|\mathbf{v}\|^۲=\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^۲+\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^۲$$

است. یا به بیان دیگر

$$۲\|\mathbf{u}\|^۲+۲\|\mathbf{v}\|^۲=\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^۲+\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^۲$$

برای اثبات، کافی است از تعریف اندازه استفاده شود:

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^۲+\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^۲ =\\ &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})+(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+۲\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}-۲\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\\ &= ۲\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+۲\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|^۲+۲\|\mathbf{v}\|^۲\end{aligned}$$

۱۰.۱.۲ تمرین. در هر یک از موارد زیر، $\|\mathbf{u}\|$، $\|\mathbf{v}\|$، $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ و $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$ را محاسبه کنید:

۱) $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۱,۲,-۲)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(۳,۲,۱)}$

۲) $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۰,۱,۱)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(۱,۰,۰)}$

۳) $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۱,۰,۱)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(۱,۱,۰)}$

۴) $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۴,۳,-۵)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(-۵,۳,۴)}$

۵) فرض کنید $A=(۱,۲,-۱)$، $B=(۳,۰,۱)$ و $C=(۴,۳,۰)$. قسمت (۳) از قضیه ۸.۱.۲ را در این مورد تحقیق کنید.

۱۱.۱.۲ تعریف. فرض کنید $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^۳$ برداری مخالف صفر است. بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ را به صورت $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ تعریف می‌کنیم. دلیل این اسم گذاری آن است که اندازه این بردار یک است و بعلاوه: $\mathbf{u}=\|\mathbf{u}\|\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$.

۱۲.۱.۲ تصویر یک بردار بر برداری دیگر. فرض کنید $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^۳$ و $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$. در این صورت تصویر $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{u}$ برابر

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}=\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}$$

است. به شکل ۱.۲—ب توجه شود.

اثبات: طول تصویر بردار $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{u}$ برابر

$$\|\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\||\cos\alpha| = \|\mathbf{v}\|\frac{|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|}$$

است، که α زاویهٔ $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$ است. روشن است که اگر $\pi/۲ < \alpha \leq \pi$، آنگاه $\cos\alpha < ۰$ و لذا طول منفی می‌شود. به همین دلیل در محاسبه بالا $|\cos\alpha|$ ظاهر شده است. از طرفی، اگر $۰ \leq \alpha < \pi/۲$، آنگاه بردار یکهٔ تصویر با بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ برابر است و اگر که $\pi/۲ < \alpha \leq \pi$، آنگاه با $-\mathbf{u}$ برابر است. در نتیجه

$$\frac{\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}}{\|\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\|} = \mathrm{sgn}\,(\cos\alpha)\,\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

پس در مجموع، داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} &= \|\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\|\frac{\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}}{\|\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\|}\\
&= \frac{|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|}\mathrm{sgn}\,(\cos\alpha)\,\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\\
&= \frac{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\||\cos\alpha|}{\|\mathbf{u}\|}\,\frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}\,\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\alpha}{\|\mathbf{u}\|^۲}\mathbf{u}\\
&= \left(\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}
\end{aligned}$$

۱۳.۱.۲ مثال. ۱) تصویر بردار $\mathbf{v} = \overrightarrow{(۱,۲,-۱)}$ بر بردار $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۱,-۱,۲)}$ را بدست آورید.

حل. با توجه به تعریف داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} &= \left(\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}\\
&= \frac{(۱)(۱)+(-۱)(۲)+(۲)(-۱)}{(۱)^۲+(-۱)^۲+(۲)^۲}\overrightarrow{(۱,-۱,۲)}\\
&= \overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},-۱\right)}
\end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنید $A = (۱,۲,-۱)$، $B = (۱,۲,۳)$ و $C = (۰,-۱,۱)$. طول ارتفاع وارد از رأس A بر ضلع BC را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور ابتدا فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \overrightarrow{CB} = \mathbf{B}-\mathbf{C} = \overrightarrow{(۱,۳,۲)}\\
\mathbf{v} &= \overrightarrow{CA} = \mathbf{A}-\mathbf{C} = \overrightarrow{(۱,۳,-۲)}
\end{aligned}$$

اگر تصویر A بر ضلع BC را H نامیده و فاصلهٔ A تا H را h بنامیم (شکل ۲—۲.الف) آنگاه در مثلث قائم الزاویهٔ CAH، برای محاسبه h می‌توان ضلع CA و ضلع CH را محاسبه کرد. یعنی $h^۲ = \|\mathbf{v}\|^۲ - l^۲$، که در آن l عبارت از تصویر $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{u}$ است. یعنی

$$l = \|\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\| = \frac{|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{|۱+۹-۴|}{\sqrt{۱+۹+۴}} = \frac{۶}{\sqrt{۱۴}}$$

در نتیجه، طول خواسته شده برابر $\sqrt{۸۰/۷}$ می‌باشد. زیرا

$$\begin{aligned}
h^۲ &= \left(\sqrt{۱+۹+۴}\right)^۲ - \left(\frac{۶}{\sqrt{۱۴}}\right)^۲\\
&= ۱۴ - \frac{۳۶}{۱۴} = \frac{۸۰}{۷}
\end{aligned}$$

۱۴.۱.۲ تمرین. در هر مورد، تصویر $\mathbf{u}$ را بر $\mathbf{v}$ بیابید:

۱) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۱,-۱,۲)},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{(۲,۳,-۱)}$

۲) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۱,۱,۱)},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{(۰,۱,۱)}$

۳) مساحت مثلث با رئوس $A = (۱,۱,۰)$، $B = (-۱,۲,۳)$ و $C = (۰,۱,-۱)$ را محاسبه کنید.

۴) نشان دهید که اگر $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ سه بردار یکه و دو به دو عمود بر هم باشند، آنگاه به ازای هر بردار دلخواه $\mathbf{x}$ ای:

۱) $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{x} = (\mathbf{u}\bullet\mathbf{x})\,\mathbf{u}$ ۲) $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{x} = (\mathbf{v}\bullet\mathbf{x})\,\mathbf{v}$

۳) $\mathrm{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{x} = (\mathbf{w}\bullet\mathbf{x})\,\mathbf{w}$

۴) $\mathbf{x} = (\mathbf{u}\bullet\mathbf{x})\,\mathbf{u} + (\mathbf{v}\bullet\mathbf{x})\,\mathbf{v} + (\mathbf{w}\bullet\mathbf{x})\,\mathbf{w}$

۵) (کسینوسهای هادی) فرض کنید زاویه بین محور x ها و بردار $\mathbf{u}$ را α، زاویه بین محور y ها و بردار $\mathbf{u}$ را β و زاویه بین محور z ها و بردار $\mathbf{u}$ را γ بنامیم. (شکل ۲.۲—ب). نشان دهید که در این صورت $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ با $\overrightarrow{(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)}$ برابر است. بخصوص

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$$

۶) در صورتی که $\|\mathbf{u}\| = ۴$، $\|\mathbf{v}\| = ۳$ و $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = ۲\pi/۳$، مقدار هر یک از عبارات زیر را محاسبه کنید:

$a)$ $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$ $b)$ $\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}$

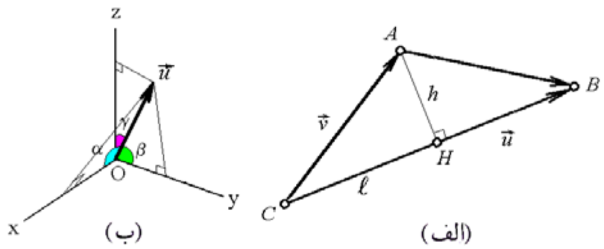
$c)$ $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^۲$ $d)$ $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$

$e)$ $(۳\mathbf{u}-۲\mathbf{v})\bullet(\mathbf{u}+۲\mathbf{v})$ $f)$ $\|۳\mathbf{u}+۲\mathbf{v}\|$

۷) فرض کنید بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ یکه‌اند و $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{0}$، مقدار مجموع $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} + \mathbf{u}\bullet\mathbf{w} + \mathbf{v}\bullet\mathbf{w}$ را بدست آورید.

۸) در صورتی که $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{۳}$، $\|\mathbf{v}\| = ۱$ و $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \pi/۶$، زاویه بین $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ را بدست آورید.

۹) نشان دهید که به ازای هر سه بردار دلخواه $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردار $\mathbf{v}\,(\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}) - \mathbf{w}\,(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})$ بر $\mathbf{u}$ عمود است.



شکل ۲.۲: الف) تصویر یک بردار بر برداری دیگر
ب) کسینوسهای هادی

۲.۲ پایهٔ متعامد و روش گرام—اشمیت

کار کردن با پایه‌های متعامد معمولاً راحت است و در برخی مسایل نظیر نرمالسازی منحنیها و یا رویه‌های درجه دوم لازم است تا پایهٔ داده شده را متعامد کنیم. هدف از این بخش پاسخ به این احتیاجات است.

۱.۲.۲ تعریف. فرض کنید $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ پایه‌ای برای زیر فضای برداری V از $\mathbb{R}^n$ باشد. در صورتی می‌گوئیم $\mathcal{B}$ **یک پایهٔ متعامد برای** V است که بازای هر i و هر $j \neq i$ ای $\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{v}_j = ۰$. این پایه را در صورتی **متعامد یکه** گویند که به ازای هر i ای $\|\mathbf{v}_i\| = ۱$.

۲.۲.۲ مثال. ۱) فرض کنید $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۰, -۱)}$ و $\mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۱, ۲, ۱)}$. در این صورت $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲\}$ یک پایهٔ متعامد برای $V = \mathrm{span}\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲\}$ است.

مثال ۲) فرض کنید

$$\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)}$$

در این صورت $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲\}$ یک پایهٔ متعامد برای $V = \mathrm{span}\{\overrightarrow{(۱, ۰, -۱)}, \overrightarrow{(۱, ۱, ۱)}\}$ است.

مثال ۳) فرض کنید $\mathbf{e}_i$ برداری در $\mathbb{R}^n$ باشد به همهٔ درایه‌های آن صفرند بجز درآیهٔ i ام که برابر یک است. در این صورت $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_۱, \mathbf{e}_۲, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای $\mathbb{R}^n$ است.

۳.۲.۲ قضیه. اگر $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ پایه‌ای متعامد برای زیر فضای برداری V از $\mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت بازای هر $\mathbf{v} \in V$ ای

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{v}_۱ \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v}_۱ \bullet \mathbf{v}_۱}\right) \mathbf{v}_۱ + \left(\frac{\mathbf{v}_۲ \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v}_۲ \bullet \mathbf{v}_۲}\right) \mathbf{v}_۲ + \cdots + \left(\frac{\mathbf{v}_k \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v}_k \bullet \mathbf{v}_k}\right) \mathbf{v}_k$$

۴.۲.۲ مثال. فرض کنیم

$$\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۱, ۱)}\ ,\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(-۱, ۰, ۱)}\ ,\ \mathbf{v}_۳ = \overrightarrow{(۱, -۲, ۱)}$$

و $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳\}$. در این صورت $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۳$ است. بعلاوه، اگر $\mathbf{v} = \overrightarrow{(a, b, c)} \in \mathbb{R}^۳$، در این صورت

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left(\frac{\mathbf{v}_۱ \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v}_۱ \bullet \mathbf{v}_۱}\right) \mathbf{v}_۱ + \left(\frac{\mathbf{v}_۲ \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v}_۲ \bullet \mathbf{v}_۲}\right) \mathbf{v}_۲ + \left(\frac{\mathbf{v}_۳ \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v}_۳ \bullet \mathbf{v}_۳}\right) \mathbf{v}_۳ \\ &= \left(\frac{a+b+c}{۳}\right) \mathbf{v}_۱ + \left(\frac{-a+c}{۲}\right) \mathbf{v}_۲ + \left(\frac{a-۲b+c}{۶}\right) \mathbf{v}_۳ \end{aligned}$$

۵.۲.۲ روش گرام اشمیت. فرض کنید $\mathcal{B}$ پایه‌ای چون $\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ برای زیر فضای برداری V از $\mathbb{R}^n$ باشد، و تعریف کنیم

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_۱ &= \mathbf{v}_۱ \\ \mathbf{w}_۲ &= \mathbf{v}_۲ - \frac{\mathbf{v}_۲ \bullet \mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱ \bullet \mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ \\ \mathbf{w}_۳ &= \mathbf{v}_۳ - \frac{\mathbf{v}_۳ \bullet \mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱ \bullet \mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ - \frac{\mathbf{v}_۳ \bullet \mathbf{w}_۲}{\mathbf{w}_۲ \bullet \mathbf{w}_۲}\mathbf{w}_۲ \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_k &= \mathbf{v}_k - \frac{\mathbf{v}_k \bullet \mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱ \bullet \mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ - \frac{\mathbf{v}_k \bullet \mathbf{w}_۲}{\mathbf{w}_۲ \bullet \mathbf{w}_۲}\mathbf{w}_۲ - \cdots \\ &\qquad \cdots - \frac{\mathbf{v}_k \bullet \mathbf{w}_{k-۱}}{\mathbf{w}_{k-۱} \bullet \mathbf{w}_{k-۱}}\mathbf{w}_{k-۱} \end{aligned}$$

در این صورت $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_۱, \mathbf{w}_۲, \cdots, \mathbf{w}_k\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای زیر فضای برداری V از $\mathbb{R}^n$ است.

۶.۲.۲ مثال. ۱) فرض کنید $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۰, ۱, ۰)}$، $\mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۲, ۱, ۲, ۱)}$، $\mathbf{v}_۳ = \overrightarrow{(-۱, ۲, -۳, ۴)}$ و بعلاوه $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳\}$. در این صورت به کمک روش گرام—اشمیت پایه‌ای متعامد و نیز یک پایه‌ای متعامد یکه برای زیر فضای $\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳\}$ از $\mathbb{R}^۴$ بسازید.

حل. برای این منظور با توجه به قضیهٔ ۶.۲.۲ داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_۱ &= \mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۰, ۱, ۰)} \\ \mathbf{w}_۲ &= \mathbf{v}_۲ - \frac{\mathbf{v}_۲ \bullet \mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱ \bullet \mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ \\ &= \overrightarrow{(۲, ۱, ۲, ۱)} - \frac{۲+۰+۲+۰}{۱+۰+۱+۰}\overrightarrow{(۱, ۰, ۱, ۰)} \\ &= \overrightarrow{(۲, ۱, ۲, ۱)} - ۲\overrightarrow{(۱, ۰, ۱, ۰)} = \overrightarrow{(۰, ۱, ۰, ۱)} \\ \mathbf{w}_۳ &= \mathbf{v}_۳ - \frac{\mathbf{v}_۳ \bullet \mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱ \bullet \mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ - \frac{\mathbf{v}_۳ \bullet \mathbf{w}_۲}{\mathbf{w}_۲ \bullet \mathbf{w}_۲}\mathbf{w}_۲ \\ &= \overrightarrow{(-۱, ۲, -۳, ۴)} - \frac{-۱+۰-۳+۰}{۱+۰+۱+۰}\overrightarrow{(۱, ۰, ۱, ۰)} \\ &\quad - \frac{۰+۲+۰+۴}{۰+۱+۰+۱}\overrightarrow{(۰, ۱, ۰, ۱)} \\ &= \overrightarrow{(-۱, ۲, -۳, ۴)} + ۲\overrightarrow{(۱, ۰, ۱, ۰)} - ۳\overrightarrow{(۰, ۱, ۰, ۱)} \\ &= \overrightarrow{(۱, -۱, -۱, ۱)} \end{aligned}$$

در نتیجه $\mathcal{B}' = \left\{\mathbf{w}_۱, \mathbf{w}_۲, \mathbf{w}_۳\right\}$ یک پایهٔ متعامد است و چنانچه فرض شود

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_۱ &= \frac{\mathbf{w}_۱}{||\mathbf{w}_۱||} = \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰\right)},\\
\mathbf{u}_۲ &= \frac{\mathbf{w}_۲}{||\mathbf{w}_۲||} = \overrightarrow{\left(۰, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)},\\
\mathbf{u}_۳ &= \frac{\mathbf{w}_۳}{||\mathbf{w}_۳||} = \overrightarrow{\left(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)}
\end{aligned}$$

در این صورت، $\mathcal{B}'' = \left\{\mathbf{u}_۱, \mathbf{u}_۲, \mathbf{u}_۳\right\}$ یک پایهٔ متعامد یکه است.

مثال ۲) فرض کنید $\mathbf{v}_۱$، $\mathbf{v}_۲$ و $\mathbf{v}_۳$ بترتیب برابر $\overrightarrow{(-۱, ۰, ۰, ۱)}^t$، $\overrightarrow{(-۱, ۰, ۱, ۰)}^t$ و $\overrightarrow{(-۱, ۱, ۰, ۰)}^t$ باشند. روش گرام—اشمیت را برای پایهٔ $\mathcal{B} = \left\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳, \mathbf{v}_۴\right\}$ اجرا می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_۱ &= \mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(-۱, ۰, ۰, ۱)}^t\\
\mathbf{w}_۲ &= \mathbf{v}_۲ - \frac{\mathbf{v}_۲ \bullet \mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱ \bullet \mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱\\
&= \overrightarrow{(-۱, ۰, ۱, ۰)}^t - \frac{۱+۰+۰+۰}{۱+۰+۰+۱}\overrightarrow{(-۱, ۰, ۰, ۱)}^t\\
&= \overrightarrow{(-۱, ۰, ۱, ۰)}^t - \frac{۱}{۲}\overrightarrow{(-۱, ۰, ۰, ۱)}^t\\
&= \overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۲}, ۰, ۱, -\frac{۱}{۲}\right)}^t\\
\mathbf{w}_۳ &= \mathbf{v}_۳ - \frac{\mathbf{v}_۳ \bullet \mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱ \bullet \mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ - \frac{\mathbf{v}_۳ \bullet \mathbf{w}_۲}{\mathbf{w}_۲ \bullet \mathbf{w}_۲}\mathbf{w}_۲\\
&= \overrightarrow{(-۱, ۱, ۰, ۰)}^t - \frac{۱+۰+۰+۰}{۱+۰+۰+۱}\overrightarrow{(-۱, ۰, ۰, ۱)}^t\\
&\quad -\frac{۱/۲+۰+۰+۰}{۱/۴+۰+۱+۱/۴}\overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۲}, ۰, ۱, -\frac{۱}{۲}\right)}^t\\
&= \overrightarrow{(-۱, ۱, ۰, ۰)}^t - \frac{۱}{۲}\overrightarrow{(-۱, ۰, ۰, ۱)}^t\\
&\quad -\frac{۱}{۳}\overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۲}, ۰, ۱, -\frac{۱}{۲}\right)}^t\\
&= \overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۳}, ۱, -\frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۳}\right)}^t\\
\mathbf{w}_۴ &= \mathbf{v}_۴ - \frac{\mathbf{v}_۴ \bullet \mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱ \bullet \mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ - \frac{\mathbf{v}_۴ \bullet \mathbf{w}_۲}{\mathbf{w}_۲ \bullet \mathbf{w}_۲}\mathbf{w}_۲ - \frac{\mathbf{v}_۴ \bullet \mathbf{w}_۳}{\mathbf{w}_۳ \bullet \mathbf{w}_۳}\mathbf{w}_۳\\
&= \overrightarrow{(۱, ۱, ۱, ۱)}^t - \frac{۰+۰+۰+۰}{۱+۰+۰+۱}\overrightarrow{(-۱, ۰, ۰, ۱)}^t\\
&\quad -\frac{۰+۰+۰+۰}{۱/۴+۰+۱+۱/۴}\overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۲}, ۰, ۱, -\frac{۱}{۲}\right)}^t\\
&\quad -\frac{۰+۰+۰+۰}{۱/۹+۱+۱/۹+۱/۹}\overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۳}, ۱, -\frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۳}\right)}^t\\
&= \overrightarrow{(۱, ۱, ۱, ۱)}^t
\end{aligned}$$

به این ترتیب $\mathcal{B}' = \left\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳, \mathbf{v}_۴\right\}$ پایه‌ای متعامد است. در ادامه این پایه را یکه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_۱ &= \frac{\mathbf{w}_۱}{||\mathbf{w}_۱||} = \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰, ۰, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}^t,\\
\mathbf{u}_۲ &= \frac{\mathbf{w}_۲}{||\mathbf{w}_۲||} = \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}, ۰, \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}, -\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)}^t,\\
\mathbf{u}_۳ &= \frac{\mathbf{w}_۳}{||\mathbf{w}_۳||} = \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۳}}{٦}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}, -\frac{\sqrt{۳}}{٦}, -\frac{\sqrt{۳}}{٦}\right)}^t,\\
\mathbf{u}_۴ &= \frac{\mathbf{w}_۴}{||\mathbf{w}_۲||} = \overrightarrow{\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)}^t.
\end{aligned}$$

در این صورت، $\mathcal{B}'' = \left\{\mathbf{u}_۱, \mathbf{u}_۲, \mathbf{u}_۳, \mathbf{u}_۴\right\}$ یک پایهٔ متعامد یکه است.

۷.۲.۲ تمرین. در هر مورد به کمک روش گرام—اشمیت، یک پایهٔ متعامد و سپس یک پایهٔ متعامد یکه بیابید:

۱) $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۲)},\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۲, ۱)}$

۲) $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱, -۱)},\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۰, ۱)}$

۳) $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۱, ۰)},\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۱, ۰, ۱)},\ \mathbf{v}_۳ = \overrightarrow{(۰, ۱, ۱)}$

۴) $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۲, ۳)},\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۲, ۳, ۱)},\ \mathbf{v}_۳ = \overrightarrow{(۳, ۲, ۱)}$

۵) $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۱, ۱, ۰)},\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۱, ۱, ۰, ۱)},\ \mathbf{v}_۳ = \overrightarrow{(۱, ۰, ۱, ۱)},\ \mathbf{v}_۴ = \overrightarrow{(۰, ۱, ۱, ۱)}$

٦) $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۱, ۰, ۰)},\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۱, ۰, ۰, ۱)},\ \mathbf{v}_۳ = \overrightarrow{(۰, ۰, ۱, ۱)},\ \mathbf{v}_۴ = \overrightarrow{(۰, ۱, ۰, ۱)}$

هر یک از مارتریسهای زیر را به شکل قطری تبدیل کنید

۷) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ۸) $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$

۹) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۱۰) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$

۳.۲ ضرب خارجی

۱.۳.۲ تعریف. فرض کنید

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{(x, y, z)}, \mathbf{u} = \overrightarrow{(a, b, c)} \in \mathbb{R}^۳$$

حاصلضرب دکارتی (یا **خارجی**) بردار $\mathbf{u}$ در $\mathbf{v}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a & b & c\\ x & y & z\end{vmatrix}\\ &= \overrightarrow{(bz-cy, cx-az, ay-bx)}\end{aligned}$$

۲.۳.۲ قضیه. به ازای هر $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^۳$ و هر $a\in\mathbb{R}$

۱) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$

۲) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$

۳) $a\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(a\mathbf{u})\times\mathbf{v}$

۴) $\mathbf{u}\perp\mathbf{u}\times\mathbf{v}\ \ ,\ \ \mathbf{v}\perp\mathbf{u}\times\mathbf{v}$

۵) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin(\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}))$

۶) $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$

۷) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{u}\|\mathbf{v}$ اگر و تنها اگر $\lambda\in\mathbb{R}$ ای یافت گردد که $\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v}$.

۸) بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ کنج راستگرد تشکیل می‌دهند.

۹) اگر بردار $\mathbf{w}$ به بردارهای مفروض $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ عمود باشد، آنگاه $\mathbf{w}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

۳.۳.۲ مثال. ۱) فرض کنیم

$$\mathbf{u}=\overrightarrow{(۱,۲,-۱)}\quad,\quad \mathbf{v}=\overrightarrow{(۱,۱,-۱)}$$

در این صورت:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۱ & ۲ & -۱\\ ۱ & ۱ & -۱\end{vmatrix}\\ &= \overrightarrow{(-۲+۱,-۱+۱,۱-۲)}=\overrightarrow{(-۱,۰,-۱)}\end{aligned}$$

مثال ۲) در صورتی که $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۱,۰,۲)}$، $\mathbf{v}=\overrightarrow{(۳,-۱,۰)}$ و $\mathbf{w}=\overrightarrow{(۰,-۱,۱)}$، داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= \mathbf{u}\times\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۳ & -۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۱\end{vmatrix}\\ &= \mathbf{u}\times\overrightarrow{(-۱,-۳,-۳)}\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۱ & ۰ & ۲\\ -۱ & -۳ & -۳\end{vmatrix}=\overrightarrow{(۶,۱,-۳)}\\ (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۱ & ۰ & ۲\\ ۳ & -۱ & ۰\end{vmatrix}\times\mathbf{w}\\ &= \overrightarrow{(۲,۶,-۱)}\times\mathbf{w}\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۲ & ۶ & -۱\\ ۰ & -۱ & ۱\end{vmatrix}=\overrightarrow{(۰,-۲,-۲)}\end{aligned}$$

بنابراین، ضرب خارجی شرکتپذیر نیست.

مثال ۳) در مورد بردارهای پایهٔ استاندارد $\mathbb{R}^۳$، داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}\times\mathbf{j}&=-\mathbf{j}\times\mathbf{i}=\mathbf{k}\\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}&=-\mathbf{k}\times\mathbf{j}=\mathbf{i}\\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}&=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}=\mathbf{j}\end{aligned}$$

مثال ۴) فرض کنید $\mathbf{u}=\overrightarrow{(a,b,c)}$، $\mathbf{v}=\overrightarrow{(x,y,z)}$ و $\mathbf{w}=\overrightarrow{(\alpha,\beta,\gamma)}$، در این صورت:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= \mathbf{u}\bullet\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x & y & z\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}\\ &= \mathbf{u}\bullet\overrightarrow{\left(\begin{vmatrix}y & z\\ \beta & \gamma\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x & z\\ \alpha & \gamma\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x & y\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}\right)}\\ &= a\begin{vmatrix}y & z\\ \beta & \gamma\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}x & z\\ \alpha & \gamma\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}x & y\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}a & b & c\\ x & y & z\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}\end{aligned}$$

۴.۳.۲ تمرین. در هر مورد، حاصلضرب خارجی $\mathbf{u}$ در $\mathbf{v}$ را محاسبه کنید:

۱) $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۱,-۱,۲)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(۲,۰,۱)}$

۲) $\mathbf{u}=\mathbf{i}-\mathbf{j},\ \mathbf{v}=۲\mathbf{i}+\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$

۳) $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۰,۱,۱)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(۱,۱,۰)}$

۴) $\mathbf{u}=\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(۱,-۱,۰)}$

۵) فرض کنید $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۱,-۱,۲)}$، $\mathbf{v}=\overrightarrow{(-۵,۳,۴)}$، $\mathbf{w}=\overrightarrow{(۱,۱,۱)}$ و $a=۲$. موارد یک تا هفت قضیهٔ ۲.۳.۲ را در این مورد تحقیق کنید.

۶) ثابت کنید که $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\times(\mathbf{u}+\mathbf{v})=۲\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. معنی هندسی این تساوی چیست؟

۷) در صورتی که $\|\mathbf{u}\|=۱$، $\|\mathbf{v}\|=۲$ و $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\sqrt{۳}$، مقدار $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ را محاسبه کنید.

۸) در صورتی که $\|\mathbf{u}\|=۳$، $\|\mathbf{v}\|=۲۶$ و $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=۷۲$، مقدار $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$ را محاسبه کنید.

۹) ثابت کنید $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^۲+(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})^۲=\|\mathbf{u}\|^۲\|\mathbf{v}\|^۲$.

۱۰) نشان دهید که همواره $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|\le\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. تساوی در چه صورتی برقرار است؟

۱۱) فرض کنید $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{0}$، ثابت کنید
$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\mathbf{w}\times\mathbf{u}$.

۱۲) ثابت کنید که $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}=(\mathbf{u}\bullet\mathbf{w})v-(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})\mathbf{w}$.

۱۳) ثابت کنید که
$[\,(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})\,]\bullet(\mathbf{u}+\mathbf{w})=۲\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$.

۱۴) ثابت کنید که
$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})+\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})+\mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{0}$.

۱۵) نشان دهید که اگر $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$، آنگاه
$\mathbf{u}\times\{\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times[\mathbf{u}\times\mathbf{v}])\}=\|\mathbf{u}\|^{۴}\mathbf{v}$.

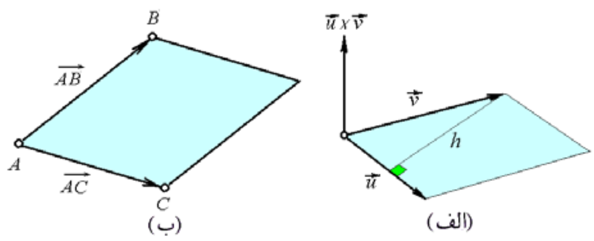
۱٦) فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای معلوم و $\mathbf{x}$ برداری مجهول باشد، چه شرایطی باید بر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ اعمال شود تا معادلهٔ برداری $\mathbf{u}\times\mathbf{x}=\mathbf{v}$ دارای جواب باشد؟ در صورت برقراری این شرایط، چواب مسأله را مشخص کنید.

۵.۳.۲ تعبیر هندسی اندازهٔ ضرب خارجی.

اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار دلخواه باشند و ابتدای هر دوی آنها را در مبداء فرض کنیم، با حرکت دادن $\mathbf{u}$ در امتداد $\mathbf{v}$ و نیز $\mathbf{v}$ در امتداد $\mathbf{u}$، یک متوازی الاضلاع حاصل می‌شود (شکل ۲ .۳—الف). مساحت این متوازی الاضلاع برابر طول بردار $\mathbf{u}$ ضرب در ارتفاع وارد از رأس $\mathbf{v}$ بر ضلع $\mathbf{u}$ می‌باشد. اما ارتفاع مورد نظر برابر طول بردار $\mathbf{v}$ ضرب در سینوس زاویهٔ بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است. در نتیجه

$$A=\|\mathbf{u}\|h=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin(\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}))$$

که این چیزی جز اندازهٔ بردار $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ نیست. یعنی، اندازه حاصلضرب خارجی $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ برابر است با مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$. توجه شود که $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ بر صفحه‌ای که این متوازی الاضلاع در آن قرار دارد، عمود است.



شکل ۳.۲: الف) تعبیر هندسی اندازه ضرب خارجی ب) محاسبهٔ مساحت به کمک ضرب خارجی

٦.۳.۲ مثال.

فرض کنید A، B و C بترتیب برابر $(۱,-۲,۱)$، $(۲,۳,۷)$ و $(-۱,۲,۳)$ هستند. مساحت مثلث $\triangle ABC$ را محاسبه کنید.

حل. بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را در نظر می‌گیریم. روشن است (شکل ۳.۲—ب) که متوازی الاضلاع حاصل از این دو بردار، دارای دو برابر مساحت مثلث $ABC\triangle$ است. بنابرانی کافی است که نصف $\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\mathbf{B}-\mathbf{A}=\overrightarrow{(۱,۵,٦)}\\ \overrightarrow{AC}&=\mathbf{C}-\mathbf{A}=\overrightarrow{(-۲,۴,۲)}\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(\triangle ABC)&=\frac{۱}{۲}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|\\ &=\frac{۱}{۲}\left\|\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۱&۵&٦\\ -۲&۴&۲\end{vmatrix}\right\|\\ &=\frac{۱}{۲}\|\overrightarrow{(-۱۴,-۱۴,۱۴)}\|=۷\sqrt{۳}\end{aligned}$$

۷.۳.۲ تمرین.

در هر مورد، مساحت مثلث $\triangle ABC$ را در محاسبه کنید:

۱) $A=(۱,۲,-۱)\,,\ B=(۳,-۱,۴)\,,\ C=(۰,۱,-۱)$

۲) $A=(۳,۰,۲)\,,\ B=(۲,۱,۱)\,,\ C=(-۱,۱,۰)$

۴.۲ ضرب سه گانه

اعمال ضرب داخلی و خارجی دو تایی‌اند، یعنی دو بردار در آنها نقش دارند. در حالی که ضرب سه گانه یک عمل سه تایی است. ضرب جدید کاربردهای بسیاری دارد.

۱.۴.۲ تعریف.

به ازای سه بردار $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^{۳}$، **حاصلضرب سه تایی** این سه را به صورت $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ تعریف کرده و با نماد $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$ نشان می‌دهیم. بنابه قسمت (٦) از قضیهٔ ۲.۳.۲، داریم $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$. بعلاوه، بنابه قسمت (۴) از مثال ۳.۳.۲، داریم

$$[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]=\begin{vmatrix}x_u&y_u&z_u\\ x_v&y_v&z_v\\ x_w&y_w&z_w\end{vmatrix}$$

۲.۴.۲ قضیه.

اگر $\mathbf{u}$، $\mathbf{u}_۱$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردار باشند و $a\in\mathbb{R}$، آنگاه:

۱) $[\mathbf{u}+\mathbf{u}_۱,\mathbf{v},\mathbf{w}]=[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]+[\mathbf{u}_۱,\mathbf{v},\mathbf{w}]$

۲) $[a\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]=a[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$

۳) $[\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}]=[\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w}]=-[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$

۴) $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]=[\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v}]=[\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}]$

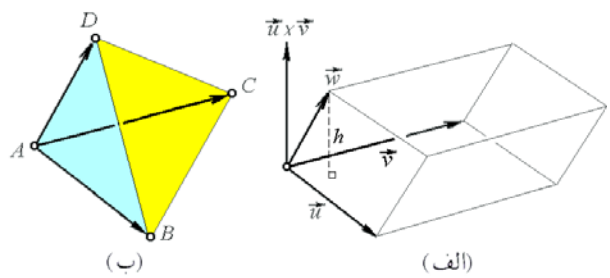
۵) وقتی و تنها وقتی $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]=۰$ که بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ وابستهٔ خطی باشند.

۳.۴.۲ تعبیر هندسی ضرب سه گانه. با سه بردار $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ یک متوازی السطوح مشخص می‌گردد (شکل ۴.۲—الف). حجم این متوازی السطوح برابر است با مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ ضرب در ارتفاع وارد از رأس $\mathbf{w}$ بر این متوازی الاضلاع. چون $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ بر این ارتفاع الاضلاع عمود است، ارتفاع مورد نظر برابر است با طول تصویر بردار $\mathbf{w}$ بر $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$، یعنی

$$h=\|\mathrm{proj}_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\mathbf{w}\|=\frac{|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\boldsymbol{\cdot}\mathbf{w}|}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|}$$

از طرفی مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ برابر $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ است، حجم متوازی السطوح برابر است با:

$$V=\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|\,h=\Big|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\boldsymbol{\cdot}\mathbf{w}\Big|=\Big|[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]\Big|$$



شکل ۴.۲: الف) تعبیر هندسی ضرب سه گانه
ب) محاسبهٔ حجم مکعب به کمک ضرب سه گانه

۴.۴.۲ مثال. ۱) حجم هرمی را بیابید که رئوس آن عبارتند از $A=(۱,۲,-۱)$، $B=(۱,۰,۱)$، $C=(۳,۴,۲)$ و $D=(۱,-۱,۱)$.

حل. با سه بردار $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ متوازی السطوحی مشخص می‌گردد. بنابه خواص هندسی متوازی السطوح و هرم، حجم هرم با رئوس A، B، C و D برابر یک ششم حجم متوازی السطوح است. به شکل ۴.۲—ب توجه شود. پس کافی است که یک ششم ضرب سه گانه‌ی بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\mathbf{B}-\mathbf{A}=\overrightarrow{(۰,-۲,۲)}\\ \overrightarrow{AC}&=\mathbf{C}-\mathbf{A}=\overrightarrow{(۲,۲,۳)}\\ \overrightarrow{AD}&=\mathbf{D}-\mathbf{A}=\overrightarrow{(۰,-۳,۲)}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$V=\frac{۱}{۶}\Big|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\Big|=\frac{۱}{۶}\left\|\begin{matrix}۰&-۲&۲\\ ۲&۲&۳\\ ۰&-۳&۲\end{matrix}\right\|=\frac{۲}{۳}$$

مثال ۲) آیا نقاط $A=(۱,۲,-۱)$، $B=(۳,۲,۱)$، $C=(۰,۱,-۱)$ و $D=(۴,۱,۳)$ هم صفحه‌اند؟

حل. برای پاسخ به این پرسش، به این نکته توجه می‌کنیم که چهار نقطه مذکور وقتی و تنها وقتی در یک صفحه قرار دارند که حجم هرم حاصل از آنها صفر باشد. پس کافی است حاصلضرب سه گانهٔ $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ را محاسبه کنیم. اگر این ضرب صفر باشد، نقاط بر یک صفحه‌اند و بالعکس. اما

$$\begin{aligned}\Big[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\Big]&=\Big[\mathbf{B}-\mathbf{A},\mathbf{C}-\mathbf{A},\mathbf{D}-\mathbf{A}\Big]\\ &=\Big[\overrightarrow{(۲,۰,۲)},\overrightarrow{(-۱,-۱,۰)},\overrightarrow{(۳,-۱,۴)}\Big]\\ &=\begin{vmatrix}۲&۰&۲\\ -۱&-۱&۰\\ ۳&-۱&۴\end{vmatrix}=-۸+۰+۸=۰\end{aligned}$$

پس نقاط مذکور در یک صفحه واقعند.

۵.۴.۲ تمرین. ۱) قضیهٔ ۲.۴.۲ را اثبات کنید.

۲) حجم هرمی با رئوس $A=(۱,۲,۰)$، $B=(۱,۱,۱)$، $C=(-۱,۲,۱)$ و $D=(۴,۲,۳)$ را بیابید.

۳) حجم هرمی را بیابید که رئوس آن عبارتند از $A=(۱,۱,۰)$، $B=(۱,۰,۱)$، $C=(۰,۱,۱)$ و $D=(۱,۲,۳)$.

۴) آیا چهار نقطهٔ $A=(۱,-۱,۰)$، $B=(-۱,۲,۰)$، $C=(۱,۱,۲)$ و $D=(۲,۱,۳)$ در یک صفحه واقعند؟

۵) آیا پنج نقطهٔ $A=(۱,۱,۰)$، $B=(۲,۳,-۴)$، $C=(۱,۱,۱)$، $D=(۱,۲,۴)$ و $E=(۰,۱,۱)$ در یک صفحه قرار دارند؟

۶) ثابت کنید که $[\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{w}+\mathbf{u}]=۲[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$.

*۷) ثابت کنید که
$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times(\mathbf{w}\times\mathbf{x})=[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x}]\mathbf{w}-[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]\mathbf{x}$.

۸) ثابت کنید که $[\mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{v}\times\mathbf{w},\mathbf{w}\times\mathbf{u}]=[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]^{۲}$.

۵.۲ خط در صفحه

بنابه تعریف، اگر ذره‌ای در خلاء واقع باشد و هیچ نیرویی بر آن وارد نشود و ناگهان ضربه‌ای به آن وارد شود، ذره مسیری را در پی می‌گیرد. این مسیر را خط می‌نامند. بنابراین هر خط با یک تکیه گاه (مکان اولیهٔ ذره) و یک بردار هادی (جهت بردار نیروی وارد بر ذره) مشخص می‌گردد.

۱.۵.۲ تعریف. خط راست ℓ با **تکیه گاه** $X_0 = (x_0, y_0)$ و **بردار هادی** $\mathbf{v} = \overrightarrow{(a,b)}$ عبارت است از مجموعه همه نقاط به شکل $\overrightarrow{X_0} + t\mathbf{v}$ که $t \in \mathbb{R}$. در این حالت می‌نویسیم:

$$\ell \,:\, \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + t\mathbf{v} \;;\; t \in \mathbb{R}$$

به شکل ۵.۲—الف توجه شود. این معادله را **معادلهٔ برداری — پارامتری خط** ℓ می‌نامند.

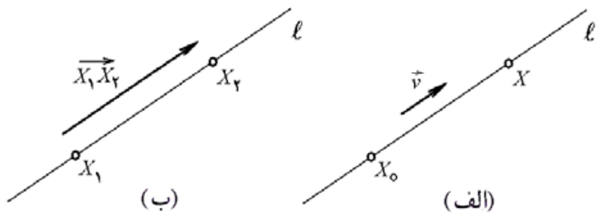
معادلات پارامتری خط ℓ عبارتند از

$$\ell \,:\, x = x_0 + at \;,\; y = y_0 + bt \;;\; t \in \mathbb{R}$$

در صورتی که a و b مخالف صفر باشند، **معادلهٔ کانونی خط** ℓ عبارت است از

$$\ell \,:\, \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

۲.۵.۲ قضیه. فرض کنید ℓ_1 خط با تکیه گاه X_1 و هادی $\mathbf{v}_1$ است و ℓ_2 خط با تکیه گاه X_2 و هادی $\mathbf{v}_2$ می‌باشد. در این صورت وقتی و تنها وقتی ℓ_1 و ℓ_2 یکی‌اند که $\mathbf{v}_1$ موازی $\mathbf{v}_2$ باشد و X_1 به ℓ_2 تعلق داشته باشد.



شکل ۵.۲: الف) تعریف خط
ب) خط گذرنده از دو نقطه

یک نتیجهٔ خاص از قضیهٔ ۲.۵.۲ این است که بردار هادی یک خط مفروض را با مضربی غیر صفر از همان می‌توان عوض کرد. بعلاوه، تکیه گاه را می‌توان هر نقطه‌ای بر خط فرض گرفت.

۳.۵.۲ مثال. ۱) معادلهٔ خط راستی که از نقاط $X_1 = (x_1, y_1)$ و $X_2 = (x_1, y_2)$ می‌گذرد را در صورتی بیابید که $X_1 \neq X_2$.

حل. X_1 را تکیه گاه و بردار $\overrightarrow{X_1X_2}$ را هادی می‌توانیم بگیریم. به شکل ۵.۲—ب توجه شود. در نتیجه معادله خط ℓ گذرنده از نقاط X_1 و X_2 برابر است با:

$$\begin{aligned}
\ell \;&:\; \mathbf{X} = (1-t)\,\mathbf{X}_1 + t\mathbf{X}_2 \;;\; t \in \mathbb{R} \\
&:\; \begin{cases} x = (1-t)\,x_1 + tx_2 \\ y = (1-t)\,y_1 + ty_2 \end{cases} ;\; t \in \mathbb{R} \\
&:\; \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}
\end{aligned}$$

مثال ۲) وضعیت دو خط

$$\ell_1 \;:\; x + 2y = 3$$
$$\ell_2 \;:\; x = t + 1 \,,\, y = 3t - 1 \,;\, t \in \mathbb{R}$$

را نسبت به هم مشخص کنید.

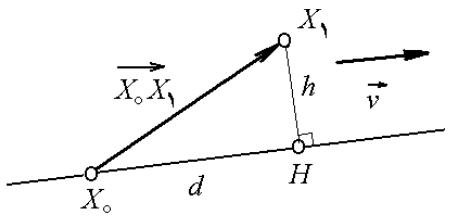
حل. نظر به مباحث هندسهٔ دبیرستانی، هر دو خط غیر موازی در $\mathbb{R}^2$ الزماً متقاطعند. پس کافی است موازی بودن این خطوط را تحقیق کنیم. ابتدا ℓ_1 را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$\ell_1 \,:\, x + 2y = 3 \,:\, x - 3 = -2y \,:\, \frac{x-3}{2} = \frac{y-0}{-1}$$

بنابراین، داریم $X_1 = (3, 0)$ و $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{(2,-1)}$. بعلاوه، $X_2 = (1, -1)$ و $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{(1,3)}$. شرط توازی دو خط نسبت به هم، توازی بردارهای هادی آندو است، اما $\mathbf{v}_1 \| \mathbf{v}_2$ به معنی $\frac{-1}{3} = \frac{2}{1}$ می باشد، که غلط است. پس دو خط موازی نیستند. بنابراین، متقاطع می‌باشند. بعلاوه:

$$\ell_1 \cap \ell_2 \;:\; \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x = t + 1 \\ y = 3t - 1 \end{cases} : \begin{cases} t + 1 + 6t - 2 = 3 \\ x = t + 1 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$$
$$: \begin{cases} x = 11/7 \\ y = 5/7 \end{cases}$$

یعنی دو خط مذکور در $X_0 = (11/7, 5/7)$ متقاطع می‌باشند.



شکل ۶.۲: فاصلهٔ نقطه تا خط

مثال ۳) فاصلهٔ نقطهٔ $X_1 = (x_1, y_1)$ تا خط ℓ به معادلهٔ $ax + by + c = 0$ را بیابید.

حل. فرض کنیم H تصویر نقطهٔ X_1 بر خط ℓ باشد (به شکل ۶.۲ توجه شود). در این مثلث اضلاع $\overrightarrow{X_0X_1}$ و $d = \overrightarrow{X_0H}$ قابل محاسبه‌اند:

$$\begin{aligned}
\overline{X_0X_1} &= \|\overrightarrow{X_0X_1}\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\
d &= \|\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\overrightarrow{X_0X_1}\| = \frac{|\overrightarrow{X_0X_1} \bullet \mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|} \\
&= \frac{|a\,(x_1 - x_0) + b\,(y_1 - y_0)\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}
\end{aligned}$$

که در اینجا $X_0 = (x_0, y_1)$ تکیه گاه و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(a,b)}$ هادی ℓ است. سه حالت ممکن است رخ دهد:

الف) اگر a و b مخالف صفر باشند، می‌توان نوشت

$$\ell\,:\,\frac{x-0}{-b}=\frac{y+c/b}{a}$$

بنابراین X_1 را $(0,-c/b)$ و $\mathbf{v}$ را $\overrightarrow{(-b,a)}$ می‌توان فرض کرد. در نتیجه:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{\overline{X_0X_1}^2-d^2} \\ &= \sqrt{(x_1)^2+\left(y_1+\frac{c}{b}\right)^2-\frac{(-bx_1+a\,(y_1+c/b))^2}{b^2+a^2}} \\ &= \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

ب) اگر $a=0$ و b مخالف صفر باشد، می‌توانیم بنویسیم $l\;:\;x=t\,,y=-c/b$ بنابراین $X_0=(0,-c/b)$ و $\mathbf{v}=\overrightarrow{(1,0)}$. در نتیجه:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{\overline{X_0X_1}^2-d^2} \\ &= \sqrt{(x_1)^2+\left(y_1+\frac{c}{b}\right)^2-\frac{|x_1|^2}{1+0}} \\ &= \left|y_1+\frac{c}{b}\right|=\frac{|by_1+c|}{|b|} \end{aligned}$$

ج) اگر $b=0$ و a مخالف صفر باشد، مشابه حالت ب داریم $h=\dfrac{|ax_1+c|}{|a|}$.

پس، در هر حالت، فرمول $h=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ برقرار است.

۴.۵.۲ تمرین.

۱) معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $X_1=(1,3)$ و $X_2=(3,2)$ را بیابید.

۲) فاصلهٔ نقطهٔ $X_0=(1,2)$ را از خط گذرنده از نقاط $X_1=(1,-1)$ و $X_2=(2,2)$ را بیابید.

۳) نشان دهید که اگر خط ℓ، $x-$ محور را در a و $y-$ محور را در b قطع کند، آنگاه معادلهٔ کانونی آن $x/a+y/b=1$ خواهد بود.

۴) نشان دهید که اگر $\ell_1\;:\;a_1x+b_1y+c_1=0$ و $\ell_2\;:\;a_2x+b_2y+c_2=0$ دو خط متقاطع باشند، آنگاه معادلهٔ هر خط $\ell=\ell_2$ گذرنده از محل تلاقی آن دو را به شکل $\ell\,:\,a_1x+b_1y+c_1+\lambda\,(a_2x+b_2y+c_2)=0$ می‌توان نوشت، که λ یک عدد حقیقی است. مجموعهٔ خطوط ℓ را دسته خط مشخص شده توسط ℓ_1 و ℓ_2 می‌نامند.

۵) نشان دهید که سه نقطهٔ $X_i=(x_i,y_i)$ که $i=1,2,3$ وقتی و تنها وقتی بر یک خط مواقعند که:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

۶) نشان دهید که خطوط $\ell_1\;:\;ax+by+c=0$ و $\ell_2\;:\;-ax+by+c=0$ نسبت به $y-$ محور متقارن هستند.

۷) نشان دهید که خطوط $\ell_1\;:\;ax+by+c=0$ و $\ell_2\;:\;ax-by+c=0$ نسبت به $x-$ محور متقارن هستند.

۸) نشان دهید که خطوط $\ell_1\;:\;ax+by+c=0$ و $\ell_2\;:\;-ax-by+c=0$ نسبت به مبداء متقارن هستند.

۹) نشان دهید که مساحت مثلث ساخته شده توسط خط $l\;:\;ax+by+c=0$، $x-$محور و $y-$محور برابر با $c^2/2|ab|$ است.

۱۰) معادلهٔ خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط $\ell_1\;:\;x-2y+3=0$ و $\ell_2\;:\;x+y=2$ و نیز نقطهٔ $X_3=(2,5)$ می‌گذرد.

۶.۲ صفحه در فضا

بنابه قضیه‌ای از هندسهٔ دبیرستانی، اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، آن خط بر جمیع خطوط موجود در صفحه عمود است. این را مبنای تعریف صفحه می‌گیریم:

۱.۶.۲ تعریف. صفحهٔ P با **تکیه گاه** $X_0=(x_0,y_0,z_0)$ و **بردار نرمال** $\mathbf{n}=\overrightarrow{(a,b,c)}$ مجموعهٔ همهٔ نقاطی است مانند $X=(x,y,z)$ که $\overrightarrow{X_0X_1}$ بر $\mathbf{n}$ عمود است، یعنی:

$$P\,:\,\mathbf{n}\bullet(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)=0$$

معادلهٔ مذکور را **معادلهٔ برداری صفحهٔ** P می‌نامند. به شکل مختصاتی این معادله عبارت است از

$$P\,:\,a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)+c\,(z-z_0)=0$$

که **معادلهٔ کانونی صفحه** نامیده می‌شود. به شکل ۷.۲—الف توجه شود.

۲.۶.۲ مثال. ۱) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $X_0=(1,2,-1)$ گذشته و بر بردار $\mathbf{n}=\overrightarrow{(2,1,0)}$ عمود است.
حل. با توجه به ۱.۶.۲ داریم

$$2\,(x-1)+(y-2)+0\,(z+1)=0$$

یا $2x+y=4$.

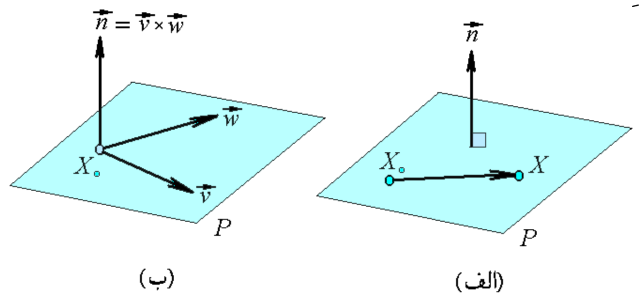
مثال ۲) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $X_0 = (1,-1,2)$ می‌گذرد و با دو بردار مفروض $\mathbf{v} = \overrightarrow{(0,1,1)}$ و $\mathbf{w} = \overrightarrow{(1,1,0)}$ موازی است. به شکل ۷.۲—ب توجه شود.

حل. حاصلضرب خارجی $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ بر دو بردار غیر موازی $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ از صفحهٔ P عمود است، لذا برخورد P نیز عمود می‌باشد. به همین دلیل نرمال صفحه به شمار می‌آید. بنابراین:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-1,1,-1)}$$

$$P\ :\ -(x-1)+(y+1)-(z-2)=0$$

$$:\ z+x=y+4$$



شکل ۷.۲: صورتهای مختلف تعریف صفحه در فضا

مثال ۳) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطهٔ $A = (1,2,-1)$، $B = (1,2,3)$ و $C = (0,-1,4)$ می‌گذرد.

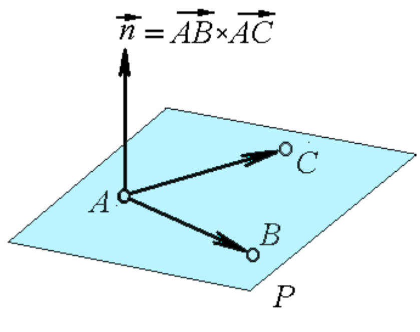
حل. چون A، B و C بر صفحه P واقعند، بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بر صفحه قرار دارند و بنابراین موازی صفحه‌اند. (به شکل ۸.۲ توجه شود). پس می‌توانیم مانند مثال قبل فرض کنیم که $X_0 = A$ و $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. از طرفی:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\mathbf{B}-\mathbf{A}) \times (\mathbf{C}-\mathbf{A}) \\ &= \overrightarrow{(0,0,4)} \times \overrightarrow{(-1,-3,5)} = \overrightarrow{(12,-4,0)} \end{aligned}$$

بنابراین، معادله صفحه عبارت است از

$$12\,(x-1) - 4\,(y-2) + 0\,(z+1) = 0$$

یا $y = 3x - 1$.



شکل ۸.۲: صفحهٔ گذرنده از سه نقطهٔ مفروض

مثال ۴) وضعیت دو صفحهٔ $P_1\ :\ x - 2y + 3z = 4$ و $P_2\ :\ 2x + y = z + 3$ را نسبت به هم مشخص کنید.

حل. دو صفحه در فضا یا متقاطع هستند و یا موازی. شرط توازی دو صفحه، توازی نرمال آنها است. اما در این مسأله $\mathbf{n}_1 = \overrightarrow{(1,-2,3)}$ و $\mathbf{n}_2 = \overrightarrow{(2,1,-1)}$. $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ در صورتی موازیند که نسبت مختصاتشان برابر باشد. به بیان دیگر

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{1} = \frac{3}{-1}$$

که چنین نیست. بنابراین دو صفحهٔ مذکور متقاطعند.

۳.۶.۲ تمرین.

۱) محل تلاقی سه صفحهٔ $x + y + z = 1$، $x = 2y$ و نیز $2x + y + 3z + 1 = 0$ را بیابید.

۲) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقاط $A = (1,2,1)$، $B = (0,1,1)$ و $C = (1,-1,3)$ می‌گذرد.

۳) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $X_1 = (1,2,-1)$ به موازات صفحهٔ $P\ :\ x - 2y = z$ می‌گذرد.

۴) نشان دهید که معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از سه نقطهٔ $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ که $i = 1,2,3$ برابر است با:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

۵) نشان دهید که اگر صفحهٔ P سه محور x، y و z را بترتیب در سه مقدار مخالف صفر a، b و c قطع کند، آنگاه معادلهٔ P به صورت $x/a + y/b + z/c = 1$ خواهد بود.

۶) نشان دهید که فاصلهٔ نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) تا صفحهٔ $ax + by + cz + d = 0$ برابر است با

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

۷) زاویهٔ بین دو صفحهٔ به معادلات $2x + y = 2z + 3$ و $6y + 2z = 3x + 15$ را مشخص کنید.

۸) فاصلهٔ دو صفحهٔ $x + 2y - 3z = 2$ و $x + 2y = 3z + 5$ از یکدیگر را محاسبه کنید.

۹*) نشان دهید که اگر دو صفحهٔ $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ متقاطع باشند، آنگاه صفحهٔ $P \neq P_2$ وقتی و تنها وقتی از محل تلاقی آن دو می‌گذرد که به ازای λ ای بتوان نوشت:

$$\begin{aligned} P\ :\ & a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\ & + \lambda\,(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \end{aligned}$$

۱۰) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که درست از وسط زاویهٔ ساخته شده دو صفحهٔ داده شده می‌گذرد:
$P_۱ : x + ۲y + ۲z = ۴ \, , \, P_۲ : ۲x + y + ۲z + ۱ = ۰$

۷.۲ خط در فضا

خط در فضا کاملاً شبیه به خط در صفحه تعریف می‌گردد. یعنی با یک نقطه و یک بردار موازی با آن تعریف می‌شود.

۱.۷.۲ تعریف. خط راست با **تکیه گاه** در نقطهٔ $X_۰ = (x_۰, y_۰, z_۰)$ و **بردار هادی** $\mathbf{v} = \overrightarrow{(a,b,c)}$، مجموعه همهٔ نقاطی $X = (x,y,z)$ است که با بردار $\overrightarrow{X_۰X}$ موازی $\mathbf{v}$ است. یعنی $t \in \mathbb{R}$ ای وجود دارد که $\overrightarrow{X_۰X} = t\mathbf{v}$. بنابراین، **معادلهٔ برداری—پارامتری خط** به صورت

$$\ell : \mathbf{X} = \overrightarrow{X_۰} + t\mathbf{v} \; ; \; t \in \mathbb{R}$$

است و معادلات پارامتری آن به صورت:

$$\ell : x = x_۰ + at \, , \, y = y_۰ + bt \, , \, z = z_۰ + ct \; ; \; t \in \mathbb{R}$$

می‌باشد و معادلات کانونی آن عبارتند از

$$\ell : \frac{x - x_۰}{a} = \frac{y - y_۰}{b} = \frac{z - z_۰}{c}$$

۲.۷.۲ مثال. ۱) معادلهٔ خط گذرنده از نقاط به مختصات $X_۱ = (x_۱, y_۱, z_۱)$ و $X_۲ = (x_۲, y_۲, z_۲)$ را بنویسید.
حل. $X_۱$ را تکیه گاه و $\overrightarrow{X_۱X_۲} = \overrightarrow{(x_۲ - x_۱, y_۲ - y_۱, z_۲ - z_۱)}$ را بردار هادی می‌توانیم بگیریم. پس معادلهٔ این خط

$$\ell : \frac{x - x_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{y - y_۱}{y_۲ - y_۱} = \frac{z - z_۱}{z_۲ - z_۱}$$

می‌باشد.

مثال ۲) معادلات کانونی خط حاصل از برخورد دو صفحهٔ به معادلات $P_۱ : x - ۲y + ۳z = ۱$ و $P_۲ : ۲x + y + ۵z = ۳$ را بدست آورید.
حل. برای یافتن تکیه گاهی از خط ℓ، معادلهٔ آن دو صفحه را در دستگاهی حل می‌کنیم. البته چون این دستگاه بینهایت جواب دارد. پس می‌توانیم یکی از متغیرها را مقدار گذاری کرده، دو تای دیگر را بر حسب آن محاسبه کنیم. پس فرض می‌کنیم $z_۰ = ۰$ و بنابراین (به شکل ۹.۲—الف توجه شود):

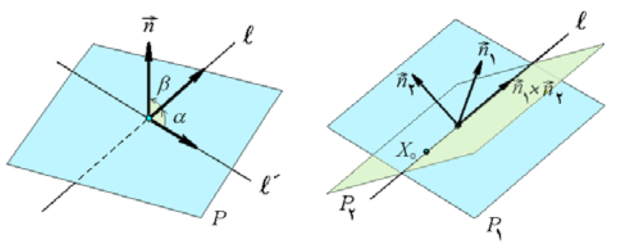
$$\begin{cases} x_۰ - ۲y_۰ = ۱ \\ ۲x_۰ + y_۰ = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵x_۰ = ۷ \\ ۵y_۰ = ۱ \end{cases} \Rightarrow X_۰ = \left(\frac{۷}{۵}, \frac{۱}{۵}, ۰\right)$$

چون خط ℓ بر صفحهٔ $P_۱$ واقع است، لذا بردار هادی آن $\mathbf{v}$ بر بردار نرمال $\mathbf{n}_۱$ صفحهٔ $P_۱$ عمود است. به همین دلیل $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{n}_۲$ عمود است. در نتیجه می‌توان فرض نمود

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_۱ \times \mathbf{n}_۲ = (۱, -۲, ۳) \times (۲, ۱, ۵) = (-۱۳, ۱, ۵)$$

بنابراین معادلهٔ خط ℓ عبارت است از:

$$\ell : \frac{x - ۷/۵}{-۱۳} = \frac{y - ۱/۵}{۱} = \frac{z - ۰}{۵}$$



شکل ۹.۲: الف) تعبیر هندسی طول حاصلضرب دکارتی ب) زاویه بین خط و صفحه

مثال ۳) وضعیت خط $\ell_۱$ به معادلات $x+y+z = ۱۶$ و $۲x = y$ و نیز $\ell_۲$ به معادلات $x = ۲t - ۱$، $y = ۳t + ۱$ و $z = t - ۲$ را نسبت به هم مشخص کنید.
حل. دو خط در فضا دارای سه وضعیت کلی هستند: موازی، متقاطع و متنافر. قبل از بحث بیشتر، تکیه گاه و هادی دو خط داده شده را می‌یابیم: $\ell_۱$ را بصورت:

$$\ell_۱ \; : \; \begin{cases} ۲x = y \\ x + y + z = ۱۶ \end{cases} : \begin{cases} ۲x = y \\ ۳x + z = ۱۶ \end{cases}$$
$$: \; \frac{x - ۰}{۱} = \frac{y - ۰}{۲} = \frac{z - ۱۶}{-۳}$$

می‌نویسیم. پس $X_۱ = (۰, ۰, -۱۶)$ و $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۲, -۳)}$. بعلاوه، $X_۲ = (-۱, ۱, -۲)$ و $\mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۲, ۳, ۱)}$.
این دو خط در صورتی موازیند که $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ موازی باشند، یعنی $\frac{-۳}{۱} = \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۲}$ که غلط است. پس موازی نیستند. برای تحقیق متقاطع بودن آنها، معادلات آنها را در یک دستگاه حل می‌کنیم. مقادیر x، y و z بر حسب t را از معادلات $\ell_۲$، در معادلات $\ell_۱$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} ۴t - ۲ = ۳t + ۱ \\ ۲t - ۱ + ۳t + ۱ + t - ۲ = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = ۳ \\ ۶t = ۱۸ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \; t = ۳$$

پس دو خط متقاطعند (اگر مقادیر t متفاوت می‌شدند، دو خط متنافر بودند) و محل برخورد آنها عبارت است از نقطهٔ $X_۰ = (۵, ۱۰, ۱)$.

مثال ۴) زاویه بین خط $\ell : ۲x = ۲y + ۲۴ \, , \, ۳x = z - ۴$ و صفحهٔ $P : ۲x + ۲y + ۳z + ۱ = ۰$ را محاسبه کنید.

حل. همان طوری که از شکل ۹.۲—ب بر می‌آید، زاویهٔ بین ℓ و P برابر است با زاویهٔ بین ℓ و تصویر ℓ بر P (یعنی ℓ'). این زاویه α مکمل زاویهٔ β بین هادی خط و نرمال صفحه است اما ℓ محل برخورد دو صفحه است، پس هادی آن برابر حاصلضرب خارجی نرمال آن دو صفحه می‌باشد:

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \overrightarrow{(3,-2,0)} \times \overrightarrow{(3,0,-1)} = \overrightarrow{(2,3,6)}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\angle(l,P) &= \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \angle(\mathbf{v},\mathbf{n}) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{n}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{n}\|}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{36}{49}\right)\end{aligned}$$

مثال ۵) فاصلهٔ نقطهٔ $X_1 = (2,1,-1)$ تا خط به معادلات $\ell : x = 2y, z = 3y+1$ را بیابید.

حل. اگر تصویر X_1 بر ℓ را H بنامیم، آنگاه فاصلهٔ مورد نظر h با طول ضلع $\overrightarrow{HX_1}$ برابر است. چون مثلث X_0X_1H قائم الزاویه است. $\overrightarrow{HX_1}$ برابر وتر در سینوس زاویهٔ α بین $\overrightarrow{X_0X_1}$ و هادی خط $\mathbf{v}$ است:

$$\begin{aligned}h &= \|\overrightarrow{X_0X_1}\| \sin\left(\angle(\overrightarrow{X_0X_1},\mathbf{v})\right) \\ &= \|\overrightarrow{X_0X_1}\| \frac{\|\overrightarrow{X_0X_1} \times \mathbf{v}\|}{\|\overrightarrow{X_0X_1}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\overrightarrow{X_0X_1} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\end{aligned}$$

بنابراین، در حالت کلی داریم: $d(X_1,l) = \frac{\|\overrightarrow{X_0X_1} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$.

چون در این مسأله خاص معادلات کانونی ℓ به صورت

$$l : x = 2t, y = t, z = 3t+1$$

است، پس $\mathbf{v} = (2,1,3)$ و $X_0 = (0,0,1)$. بنابراین فاصلهٔ مورد نظر برابر است با:

$$\begin{aligned}d(X_1,l) &= \frac{\left\|(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) \times \mathbf{v}\right\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{\left\|\overrightarrow{(2,1,-2)} \times \overrightarrow{(2,1,3)}\right\|}{\sqrt{4+1+9}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}\left\|\overrightarrow{(5,-10,0)}\right\| = 5\sqrt{\frac{5}{14}}\end{aligned}$$

مثال ٦) معادلهٔ تصویر خط

$$l : 2x+3y+4z+5 = 0 \quad x-6y+3z-7 = 0$$

بر صفحهٔ $P : 2x+2y+z+15 = 0$ را بنویسید.

حل. چون ℓ محل برخورد دو صفحه است، معادلهٔ دسته صفحات گذشته از ℓ بصورت:

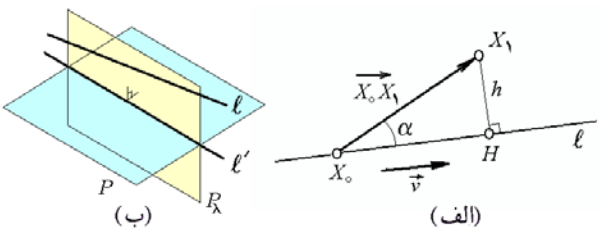
$$P_\lambda : 2x+3y+4z+5+\lambda(x-6y+3z-7) = 0$$

است. اکنون تصویر ℓ بر P عبارت است از محل برخورد آن عضو از P_λ که بر P عمود است. (به شکل ۱۰.۲—ب). لذا کافی است شرط عمود بودن P_λ و P را تحقیق کنیم. این امر به معنی تحقیق عمود بودن بردار $\mathbf{n}_\lambda = \overrightarrow{(2+\lambda, 3-6\lambda, 4+3\lambda)}$ نرمال بر P_λ و بردار $\mathbf{n} = \overrightarrow{(2,2,1)}$ نرمال بر P است؛ اما

$$\mathbf{n}\bullet\mathbf{n}_\lambda = 2(2+\lambda) + 2(3-6\lambda) + (4+3\lambda) = -7\lambda + 14$$

پس باید $\lambda = 2$. با قرار دادن مقدار λ در معادلهٔ P_λ بدست می‌آوریم $P_2 : 4x-9y+10z-9 = 0$. بنابراین:

$$\begin{aligned}\ell' = P \cap P_2 \quad &: \quad \begin{cases} 2x+2y+z+15 = 0 \\ 4x-9y+10z-9 = 0 \end{cases} \\ &: \quad \begin{cases} -13y+6z = 39 \\ -16x-19y = 159 \end{cases}\end{aligned}$$



شکل ۱۰.۲: الف) فاصلهٔ نقطه تا خط
ب) تصویر خط بر صفحه

مثال ۷) آیا دو خط ℓ_1 و ℓ_2 در یک صفحه واقعند؟ چرا؟

$$\begin{aligned}\ell_1 &: x = 2t-1, y = 5t+2, z = 1-t \\ \ell_2 &: x = y-1 = \frac{1}{2}(z-2)\end{aligned}$$

حل. فرض کنیم خط ℓ_i دارای تکیه گاه X_i و هادی $\mathbf{v}_i$ باشد. از نقطهٔ X_1 به نقطهٔ X_2 بردار $\overrightarrow{X_1X_2}$ را متصل می‌کنیم (شکل ۱۱.۲—الف). اگر این دو خط بر یک صفحه واقع باشند، و بلعکس. پس این دو خط وقتی همصفحه هستند که بردارهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\overrightarrow{X_0X_1}$ وابستهٔ خطی باشند. یعنی

$$[\overrightarrow{X_0X_1}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = 0$$

اما، در این حالت بخصوص، داریم $X_1 = (-1,2,1)$، $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{(2,5,-1)}$ و $X_2 = (0,1,2)$ و $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{(1,1,2)}$. در نتیجه:

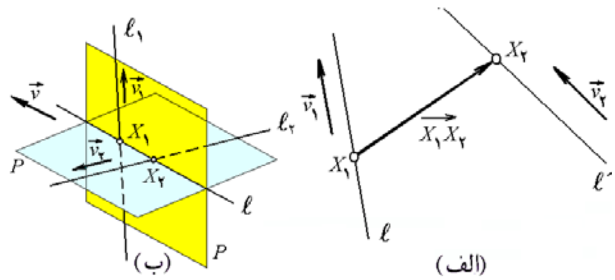
$$\begin{aligned}[\overrightarrow{X_1X_2}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] &= \left[\overrightarrow{(1,-1,1)}, \overrightarrow{(2,5,-1)}, \overrightarrow{(1,1,2)}\right] \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0\end{aligned}$$

پس دو خط مذکور همصفحه نیستند.

مثال ۸) معادله عمود مشترک خطوط داده شده را بیابید:

$$\ell_۱ : \begin{cases} x = ۲t + ۲ \\ y = ۴t + ۳ \\ z = ۳t + ۱ \end{cases} \quad \text{و ;} \quad \ell_۲ : \begin{cases} x = ۲s + ۵ \\ y = ۳s + ۴ \\ z = ۶s - ۱ \end{cases}$$

حل. بنابه تعریف، عمود مشترک دو خط عبارت از خطی است که هر دو را قطع کرده و بر آنها عمود نیز می‌باشد (شکل ۱۱.۲—ب). فرض کنیم مسأله حل شده است و پاسخ آن خط ℓ است. فرض کنیم: $\mathbf{v}$، $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۲,۴,۳)}$ و $\mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۲,۳,۶)}$ بترتیب بردار هادی خط ℓ، $\ell_۱$ و $\ell_۲$ باشند. $X_۱$ و $X_۲$ بترتیب محل برخورد خط ℓ با خط $\ell_۱$ و $\ell_۲$ باشند. $P_۱$ صفحه‌ای باشد که از خط $\ell_۱$ و نقطهٔ $X_۲$ می‌گذرد. $P_۲$ صفحه‌ای باشد که از خط $\ell_۲$ و نقطهٔ $X_۱$ می‌گذرد. $\mathbf{n}_۱$ و $\mathbf{n}_۲$ بترتیب بردار نرمال صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ باشند.



شکل ۱۱.۲: الف) فاصلهٔ دو خط از هم
ب) عمود مشترک دو خط

در این صورت، همان طوری که در شکل ۱۱.۲—ب مشهود است، چون صفحهٔ $P_۱$ خطوط $\ell_۱$ و ℓ را شامل است، بنابراین با هر دوی آنها موازی است و در نتیجه $\mathbf{n}_۱ = \mathbf{v} \times \mathbf{v}_۱$. خطوط $P_۲$ $\ell_۲$ و ℓ را شامل است، بنابراین با هر دوی آنها موازی است و در نتیجه $\mathbf{n}_۲ = \mathbf{v} \times \mathbf{v}_۲$. از این که خط ℓ بر هر دو خط $\ell_۱$ و $\ell_۲$ عمود است نتیجه می‌گردد که $\mathbf{v} = \mathbf{v}_۱ \times \mathbf{v}_۲$. پس در مجموع

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_۱ &= \left(\mathbf{v}_۱ \times \mathbf{v}_۲\right) \times \mathbf{v}_۱ = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲ & ۴ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۶ \end{vmatrix} \times \mathbf{v}_۱ \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱۵ & -۶ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۳ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-۱۰,-۴۹,۷۲)} \\ \mathbf{n}_۲ &= \left(\mathbf{v}_۱ \times \mathbf{v}_۲\right) \times \mathbf{v}_۲ = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱۵ & -۶ & -۲ \\ ۲ & ۳ & ۶ \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{(-۳۰,-۹۴,۵۷)} \end{aligned}$$

چون $(۲,۳,۱) \in \ell_۱ \subset P_۱$، معادلهٔ صفحهٔ $P_۱$ عبارت است از

$$-۱۰(x-۲) - ۴۹(y-۳) + ۷۲(z-۱) = ۰$$

به صورت مشابه، چون $(۵,۴,-۱) \in \ell_۲ \subset P_۲$، معادلهٔ صفحهٔ $P_۲$ عبارت است از

$$-۳۰(x-۲) - ۹۴(y-۳) + ۵۷(z-۱) = ۰$$

در نتیجه، ℓ که مقطع $P_۱$ و $P_۲$ می‌باشد، عبارت است از

$$\ell \;:\; \begin{cases} -۱۰(x-۲) - ۴۹(y-۳) + ۷۲(z-۱) = ۰ \\ -۳۰(x-۲) - ۹۴(y-۳) + ۵۷(z-۱) = ۰ \end{cases}$$

$$: \begin{cases} ۱۰x + ۴۹y - ۷۲z - ۹۵ = ۰ \\ ۳۰x + ۹۴y - ۵۷z - ۲۸۵ = ۰ \end{cases}$$

۳.۷.۲ تمرین.

۱) معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(۲,۰,-۳)$ به موازات خط $x = y = \frac{z-۱}{۳}$ می‌گذرد.

۲) آیا خط گذرنده از نقاط $(۳,-۱,۱۰)$ و $(۱,۱,-۲)$ صفحهٔ $۲x + y = z + ۱$ را قطع می‌کند؟

۳) ثابت کنید که خط $\frac{x+۲}{۳} = \frac{y-۱}{-۲} = \frac{z}{۱}$ با خط فصل مشترک دو صفحهٔ $x + y - z = ۰$ و $x = y + ۵z + ۸$ موازی است.

۴) معادلهٔ خط حاصل از اشتراک دو صفحهٔ $x - ۲y + ۳z = ۱$ و $۲x + ۲y = ۳z$ را بیابید.

۵) خطی را بیابید که از نقطهٔ $(۳,-۵,-۴)$ گذشته و دو خط متنافر زیر را قطع کند: $\ell_۱ \;:\; \frac{x+۱}{۳} = \frac{y+۳}{-۲} = \frac{z-۲}{-۱}$ و $\ell_۲ \;:\; \frac{x-۲}{۲} = \frac{y+۱}{۳} = \frac{z-۱}{-۵}$.

۶) قرینهٔ نقطهٔ $X_۱ = (۲,-۵,۷)$ نسبت به خط به معادلات $\frac{x+۳}{۲} = \frac{y-۱}{۲} = z$ را بیابید.

۷) فرمولی برای محاسبهٔ کوتاهترین فاصلهٔ بین دو خط بیابید و سپس در مورد دو خط داده شده را بکار ببندید:

$$\ell_۲ \;:\; x = ۲t - ۴ \,,\, y = ۴ - t \,,\, z = -۲t - ۱$$

$$\ell_۲ \;:\; x = ۴t - ۵ \,,\, y = -۳t + ۵ \,,\, z = -۵t + ۵$$

۸) تصویر خط $\frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۲}{-۲} = \frac{z-۱}{۳}$ را بر تک تک صفحه‌های مختصاتی بیابید.

۹) نشان دهید که معادلهٔ صفحهٔ گذشته از نقطهٔ $(x_۱, y_۱, z_۱)$ و خط ℓ با تکیه گاه $(x_۰, y_۰, z_۰)$ و هادی $\mathbf{v} = (a,b,c)$، به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x - x_۱ & y - y_۱ & z - z_۱ \\ x_۰ - x_۱ & y_۰ - y_۱ & z_۰ - z_۱ \end{vmatrix} = ۰$$

۸.۲ مقاطع مخروطی

منحنیهای درجه دوم یا مقاطع مخروطی همان طوری که از اسمشان بر می‌آید، تصاویر حاصل از برخورد مخروط استاندارد $x^2+y^2=z^2$ و یک صفحهٔ دلخواه بر xy–صفحه هستند. به بیان دقیقتر

۱.۸.۲ تعریف. **منحنی درجه دوم** یا **مقطع مخروطی**، مجموعهٔ جوابهای معادله‌ای به شکل

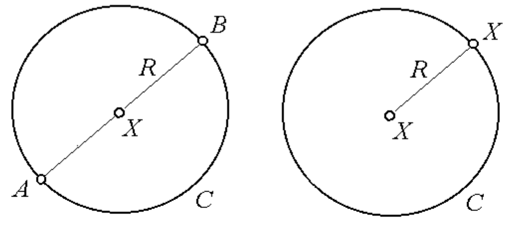
$$C\ :\ ax^2+by^2+2cxy+dx+ey+f=0$$

است که در آن $a^2+b^2+c^2\neq 0$. چنانچه $c=0$، منحنی C را **استاندارد** می‌نامیم.

در ادامه به طبقه‌بندی همهٔ منحنیهای استاندارد می‌پردازیم و سپس با برداشتن شرط $c=0$، صورت کلی این گونه منحنیها را بررسی خواهیم نمود.

۲.۸.۲ دایره. مکان هندسی همهٔ نقاطی که از نق‌طه‌ای بخصوص به یک فاصله‌اند را دایره می‌نامند. نقطهٔ ثابت را مرکز و عدد ثابت را شعاع دایره می‌نامیم. به شکل ۱۲.۲—الف توجه شود. اگر مختصات مرکز را $X_0=(x_0,y_0)$ و شعاع را R فرض کنیم، آنگاه نقطهٔ $X=(x,y)$ وقتی و تنها وقتی بر دایره C قرار دارد که فاصلهٔ X تا X_0 برابر R شود، یعنی $R=\|\overrightarrow{X_0X}\|$ و یا به شکل مختصاتی:

$$C\ :\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$



شکل ۱۲.۲: الف) تعریف دایره ب) کوچکترین دایرهٔ گذرنده از دو نقطهٔ مفروض

۳.۸.۲ مثال. ۱) دایرهٔ به مرکز $X_0=(1,-1)$ و شعاع $R=2$ به معادلهٔ $(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$ است، یا

$$x^2+y^2-2x+2y=2$$

مثال ۲) معادلهٔ $x^2+y^2-6x+4y+9=0$ معرف یک دایره است. زیرا با مربع کامل کردن آن به معادلهٔ

$$(x-3)^2+(y+2)^2=2^2$$

می‌رسیم که معادلهٔ دایره‌ای به شعاع $R=2$ و با مرکز در نقطهٔ $X_0=(3,-2)$ است.

مثال ۳) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که قطر آن پاره خط $AB=(3,6)\,(3,2)$ است. روشن است که در این حالت، شعاع R دایره برابر نصف فاصلهٔ A تا B است و مرکز آن نیز دقیقاً نقطهٔ X_0 وسط پاره خط AB است. به شکل ۱۲.۲—ب توجه شود. در نتیجه، معادلهٔ دایره عبارت است از $(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$. زیرا

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}d(A,B)=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{(0,-4)}\|=2\\ \mathbf{X}_0 &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\frac{1}{2}\overrightarrow{(6,8)}=\overrightarrow{(3,4)} \end{aligned}$$

مثال ۴) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از سه نقطهٔ $A=(1,2)$، $B=(-1,2)$ و $C=(3,4)$ می‌گذرد.

حل. فرض کنیم معادلهٔ دایره $S\ :\ x^2+y^2+ax+by+c=0$ است. از فرض $A,B,C\in S$ به ترتیب نتیجه می‌شود که

$$\left\{\begin{array}{l} 1+4+a+2b+c=0\\ 1+4-a+2b+c=0\\ 9+16+3a+4b+c=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b+c=-5\\ -a+2b+c=-5\\ 3a+4b+c=-25 \end{array}\right.$$

که پس از حل دستگاه، مقادیر $a=0$، $b=-10$ و $c=15$ حاصل می‌شود. بنابراین دایرهٔ مورد نظر عبارتست از:

$$\begin{aligned} S\ &:\ x^2+y^2-10y+15=0\\ &:\ (x-0)^2+(y-5)^2=10 \end{aligned}$$

۴.۸.۲ تمرین.

۱) وضعیت خط $l\ :\ x+y=1$ و دایرهٔ $C\ :\ x^2+y^2=2$ نسبت به هم را مشخص کنید.

۲) مکان هندسی نقاطی را بیابید که از $X_0=(2,-1)$ به فاصلهٔ $R=5$ هستند. آیا $X_1=(3,6)$ بر روی آن واقع است؟ آیا X_1 درون آن واقع است؟

۳) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن در $X_0=(3,2)$ است و بر خط $3y=2x+5$ مماس است.

۴) مرکز و شعاع دایره‌ای را بیابید که معادلهٔ آن عبارتست از:

الف) $2x^2+2y^2+6x-8y=0$

ب) $x^2+y^2-4y=5$

۵) وضعیت نقطهٔ $A=(1,-2)$ و دایرهٔ $C\ :\ x^2+y^2-2y=0$ نسبت به هم را مشخص کنید.

۶) وضعیت دوایر $C_۱ \ : \ x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۳$ و $C_۲ \ : \ x^۲ + y^۲ = x + y + ۲$ نسبت به هم را مشخص کنید.

۷) نشان دهید که دایرهٔ به مرکز $X_\circ = (x_\circ , y_\circ)$ و شعاع R را بصورت ذیل می‌توان پارامتره کرد:
$C \ : \ x = x_\circ + R\cos t \, , \, y = y_\circ + R \sin t ; \ \circ \le t < ۲\pi$.

۸) مکان هندسی مرکز همه دوایر مماس بر دو خط مفروض $l_۱ : x + y = ۵$ و $l_۲ \ : \ ۲x = ۳y$ را بیابید.

۹) مکان هندسی مرکز همهٔ دایره‌های مماس بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ و خط $x = ۳$ را بیابید.

۵.۸.۲ بیضی. مکان هندسی همهٔ نقاطی که مجموع فواصل آنها تا دو نقطهٔ مشخص برابر عددی معلوم است را **بیضی** می‌نامند. نقاط مشخص شده را **کانونهای بیضی** و عدد معلوم را **نرم** آن می‌نامند (شکل ۱۳.۲—الف). برای سهولت در بحث می‌توان فرض کرد که کانونها $A = (-c, \circ)$ و $B = (c, \circ)$ اند و عدد ثابت $۲a$ است. پس اگر C بیضی مورد نظر باشد و $X = (x, y)$ بر C واقع باشد، آنگاه بنابه تعریف داریم:

$$d\,(X, A) + d\,(X, B) = ۲a$$
$$\sqrt{(x+c)^۲ + y^۲} + \sqrt{(x-c)^۲ + y^۲} = ۲a$$

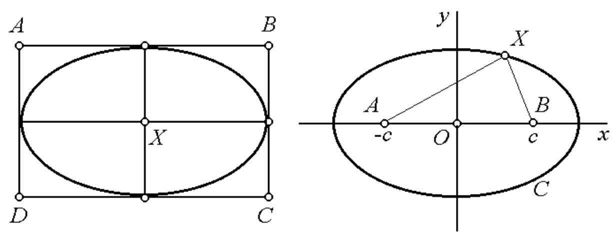
که پس از ساده کردن، و با فرض $b^۲ = c^۲ - a^۲$ داریم

$$C \ : \ \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$$

توجه شود که محل برخورد C با x—محور برابر $\pm a$ و با y—محور برابر $\pm b$ است. عدد a و b را بترتیب نیم—قطر نظیر به x و y می‌نامند. مرکز این بیضی $(\circ, \circ)$ است. در حالت کلی، بیضی با نیم قطرهای a و b و با مرکز در $X_\circ = (x_\circ , y_\circ)$ به معادله‌ی زیر است (تمرین):

$$C \ : \ \frac{(x - x_\circ)^۲}{a^۲} + \frac{(y - y_\circ)^۲}{b^۲} = ۱$$

اگر فرض کنیم $a > b$ و $c = \sqrt{a^۲ - b^۲}$، آنگاه کانونهای C عبارتند از $(x_\circ \pm c, y_\circ)$ و نرم آن نیز $۲a$ است. در حالی که اگر $a < b$ و فرض کنیم $c = \sqrt{b^۲ - a^۲}$، آنگاه کانونهای C عبارتند از $(x_\circ , y_\circ \pm c)$ و نرم آن $۲b$ خواهد بود.



(ب) (الف)

شکل ۱۳.۲: الف) تعریف بیضی
ب) بیضی محاط در یک مستطیل

۶.۸.۲ مثال. ۱) یک منحنی به معادلهٔ

$$C \ : \ ۹x^۲ + ۴y^۲ = ۱۸x + ۱۶y + ۱۱$$

داده شده است. نوع آن را مشخص کنید.
حل. با مربع کامل کردن به معادلهٔ

$$C \ : \ \frac{(x-۱)^۲}{۲^۲} + \frac{(y-۲)^۲}{۳^۲} = ۱$$

می‌رسیم، که یک بیضی با مرکز در $X_\circ = (۱, ۲)$ و نیم قطرهای $a = ۲$ و $b = ۳$ است.

مثال ۲) معادلهٔ بیضی با کانونهای $A = (۱, ۲)$ و $B = (۱, ۴)$ و نرم ۴ را بنویسید.
حل. چون مختص x هر دو نقطه یکی است، پس کانونها به شکل $(x_\circ , y_\circ \pm c)$ هستند، که حالت $a < b$ و $c = \sqrt{b^۲ - a^۲}$ است. چون مرکز بیضی وسط دو کانونش است. در نتیجه، داریم $X_\circ = \frac{۱}{۲}(A + B) = (۱, ۳)$. بعلاوه $۲c = ۴ - ۲ = ۲$ یا $c = ۱$. اما مطابق فرض $۲b = ۴$. بنابراین $b = ۲$ و $\sqrt{۴ - a^۲} = ۱$ در نتیجه $a = \sqrt{۳}$. پس معادلهٔ بیضی عبارت است از

$$C \ : \ \frac{(x-۱)^۲}{۳} + \frac{(y-۳)^۲}{۴} = ۱$$

مثال ۳) معادلهٔ بیضی محاط در متوازی الاضلاع با رئوس $A = (۲, ۵)$، $B = (۶, ۵)$، $C = (۶, ۳)$ و $D = (۲, ۳)$ را بیابید.
حل. اگر نقاط داده شده را بترتیب A، B، C و D باشند، آنگاه مطابق شکل ۱۳.۲—ب، نیم قطرها برابرند با:

$$a \ = \ \frac{۱}{۲}\overline{AB} = \frac{۱}{۲}\|\mathbf{B} - \mathbf{A}\| = ۲$$
$$b \ = \ \frac{۱}{۲}\overline{BC} = \frac{۱}{۲}\|\mathbf{C} - \mathbf{B}\| = ۱$$

بعلاوه مرکز بیضی، وسط چهارضلعی است، بنابراین

$$X_\circ = \frac{۱}{۴}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}) = (۴, ۴)$$

در نتیجه معادلهٔ بیضی

$$\frac{(x-۴)^۲}{۴} + \frac{(y-۴)^۲}{۱} = ۱$$

است. (چرا؟)

۷.۸.۲ تمرین. معادلهٔ کانونی بیضیهای داده شده را بیابید:

۱) $۹x^۲ + ۴y^۲ = ۳۶$

۳) $x^۲ + ۴y^۲ = ۸x + ۳۲y - ۷۶$

۲) $۵x^۲ + ۴y^۲ = ۱۰x + ۲۴y - ۲۱$

۴) $۴x^۲ + y^۲ + ۸x = ۲y - ۱$

۵) معادلهٔ بیضی با کانونهای $(۴,۳)$ و $(۱۰,۳)$ و نرم ۱۰ را بیابید.

٦) نشان دهید که بیضی به مرکز $X_۰ = (x_۰, y_۰)$ و نیم قطرهای a و b را بصورت زیر می‌توان پارامتره کرد:

$$C\ :\ x = x_۰ + a\cos t, y = y_۰ + b\sin t;\ ۰ \leq t < ۲\pi$$

۷) وضعیت نقطهٔ $X_۰ = (۱, -۱)$ و بیضی $۹x^۲+۴y^۲ = ۳٦$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۸) وضعیت خط $x+y = ۲$ و بیضی $۴x^۲+y^۲+۸x+۱ = ۲y$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۹) فرض کنید $C\ :\ x^۲ + y^۲ = ۹$ و

$$F(x,y) = (x + ۲y - ۳, x + y + ۱)$$

وضعیت C را پس از تاثیر F مشخص کنید. آیا شکل حاصل بیضی است؟

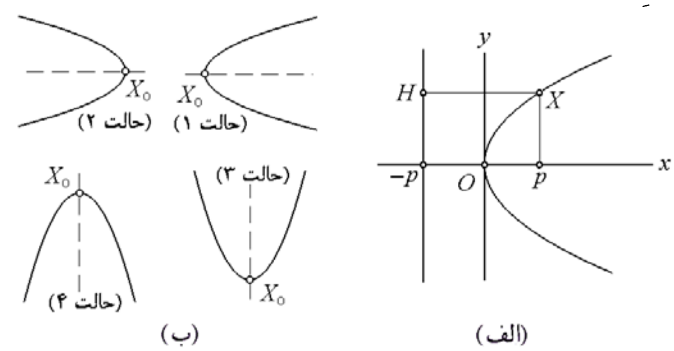
۸.۸.۲ سهمی. مطابق تعریف سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آنها تا یک خط مفروض برابر فاصلهٔ آنها تا یک نقطهٔ مفروض است. خط را مولد و نقطه را کانون سهمی می‌نامند. نصف فاصلهٔ مولد تا کانون را فاصلهٔ کانونی می‌نامند. برای سهولت در بحث فرض می‌کنیم کانون سهمی نقطه‌ی $(p, ۰)$ و مولد آن خط $x = -p$ باشد. اکنون وقتی و تنها وقتی $X = (x,y)$ بر سهمی C واقع است که فاصلهٔ X تا $(p, ۰)$ برابر فاصلهٔ X تا $x = -p$ باشد (به شکل ۱۴.۲—الف توجه شود):

$$C \quad : \quad \overline{(p,۰)\,(x,y)} = (x - (-p))$$
$$: \quad \sqrt{(x-p)^۲ + y^۲} = x + p\ :\ x = \frac{y^۲}{۴p}$$

به صورت مشابه می‌توان چهار شکل استاندارد برای سهمی‌ها بدست آورد:

معادلهٔ سهمی	کانون	مولد
$x - x_۰ = a(y - y_۰)^۲$	$\left(x_۰ + \frac{۱}{۴a}, y_۰\right)$	$x = x_۰ - \frac{۱}{۴a}$
$x - x_۰ = -a(y - y_۰)^۲$	$\left(x_۰ - \frac{۱}{۴a}, y_۰\right)$	$x = x_۰ + \frac{۱}{۴a}$
$y - y_۰ = a(x - x_۰)^۲$	$\left(x_۰, y_۰ + \frac{۱}{۴a}\right)$	$y = y_۰ - \frac{۱}{۴a}$
$y - y_۰ = -a(x - x_۰)^۲$	$\left(x_۰, y_۰ - \frac{۱}{۴a}\right)$	$y = y_۰ + \frac{۱}{۴a}$

توضیح اینکه در هر چهار حالت فاصلهٔ کانونی $۱/۴a$ است و رأس آنها $(x_۰, y_۰)$ است (در شکل ۱۴.۲—الف رأس $(۰,۰)$ است) و a عددی مثبت می‌باشد. برای مشاهدهٔ حالتهای ممکن به شکل ۱۴.۲—ب توجه کنید.



شکل ۱۴.۲: الف) تعریف سهمی
ب) انواع سهمی استاندارد

۹.۸.۲ مثال. ۱) سهمی با رأس در $(۱, -۱)$، رو به جهت منفی y–محور و با فاصلهٔ کانونی $۱/۸$ دارای معادلهٔ

$$y - (-۱) = \frac{-۱}{۴(۱/۸)}(x - ۱)^۲$$

یا $y + ۱ = -۲(x - ۱)^۲$ است.

مثال ۲) سهمی با رأس در نقطهٔ $(۴,۳)$، رو به جهت مثبت x–محور و با فاصلهٔ کانونی $۱/۴$ دارای معادلهٔ

$$x - ۴ = \frac{۱}{۴(۱/۴)}(y - ۳)^۲$$

یا $x - ۴ = (y - ۳)^۲$ است.

مثال ۳) منحنی $y = ۳x^۲ + ٦x$ یک سهمی با رأس در $(-۱,۳)$ و فاصلهٔ کانونی $۱/۱۲$ است، زیرا پس از مربع کامل کردن، می‌توان نوشت $y - ۳ = ۳(x + ۱)^۲$. این سهمی رو به جهت مثبت y–محور می‌باشد.

مثال ۴) منحنی $2y^2 + x = 4y$ یک سهمی با رأس در $(2, 1)$ و فاصلهٔ کانونی $1/8$ است که به جهت منفی x–محور تمایل دارد، زیرا می‌توان نوشت $x - 2 = -2(y-1)^2$.

۱۰.۸.۲ تمرین. معادلهٔ هر یک از سهمی‌های زیر را بنویسید:

۱) رأس آن $(2, 1)$ است و فاصلهٔ کانونی آن ۱ است و به سمت مثبت x–محور جهتدار است.

۲) رأس آن $(1, 2)$ است و فاصلهٔ کانونی آن $1/4$ است و به سمت منفی x–محور جهتدار است.

۳) رأس آن $(-1, 2)$ است و فاصلهٔ کانونی آن ۱ است و به سمت مثبت y–محور جهتدار است.

۴) رأس آن $(1, 1)$ است و فاصلهٔ کانونی آن $1/8$ است و به سمت منفی y–محور جهتدار است.

رأس، کانون و فاصلهٔ کانونی هر یک از سهمی‌های زیر را مشخص کنید:

۵) $x + y^2 = 2y$ ۶) $x^2 + 2y + 1 = 0$

۷) $x = 1 + 4y^2 + 8y$ ۸) $5y = 4x^2$

۹) وضعیت نقطهٔ $(1, -1)$ و سهمی $y = x^2 - 1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۰) وضعیت خط $y = 2x$ و سهمی $x = -2(y-3)^2$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۱) فرض کنید C سهمی $y = x^2$ است و

$$F(x, y) = (x + y + 1, 2x - y)$$

شکل $F(C)$ را رسم کنید. آیا سهمی است؟

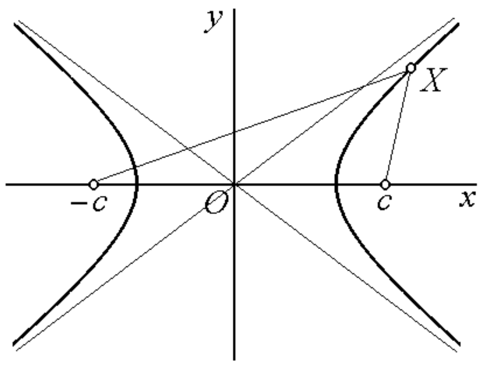
۱۲) منعکس سهمی $y = x^2$ نسبت به مبداء، y–محور و نیمساز ربع اول و سوم را بیابید.

۱۳) فرض کنید $C : y - y_0 = P(x - x_0)$ مشخص کنید که با تغییر x_0، شکل منحنی چه تغییری می‌کند.

۱۴) فرض کنید $C : y - y_0 = P(x - x_0)$ مشخص کنید که با تغییر y_0، شکل منحنی چه تغییری می‌کند.

۱۵) فرض کنید $C : y - y_0 = P(x - x_0)$ مشخص کنید که با تغییر P، شکل منحنی چه تغییری می‌کند.

۱۱.۸.۲ هذلولی. بنابه تعریف هذلولی مجموعه‌ای از نقاط است که تفاضل فواصل آنها از دو نقطه مشخص برابر عددی مشخص است (شکل ۱۵.۲). نقاط مشخص شده را **کانون** و عدد ثابت مورد نظر را **نرم هذلولی** می‌نامند.



شکل ۱۵.۲: تعریف هذلولی

اگر فرض کنیم C هذلولی با کانونهای $(c, 0)$ و $(-c, 0)$ و نرم $2a$ است، آنگاه وقتی و تنها وقتی $X = (x, y)$ بر C واقع است که $\overline{(-c, 0)(x, y)} - \overline{(c, 0)(x, y)} = 2a$ و بنابراین

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

پس از ساده کردن و فرض $b = \sqrt{c^2 - a^2}$، داریم:

$$C : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

هذلولی مذکور دارای دو مجانب $y = \pm\frac{b}{a}x$ است. اعداد a و b را نیم قطرهای هذلولی می‌نامند.

در حالت کلی دو دسته هذلولی داریم:

الف) هذلولی به مرکز $X_0 = (x_0, y_0)$ و نیم قطرهای a و b و در امتداد x–محور (به شکل ۱۶.۲—الف توجه شود):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

ب) هذلولی به مرکز $X_0 = (x_0, y_0)$ و نیم قطرهای a و b و در امتداد y–محور (به شکل ۱۶.۲—ب توجه شود):

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$$

در هر دو حالت مجانبها عبارتند از

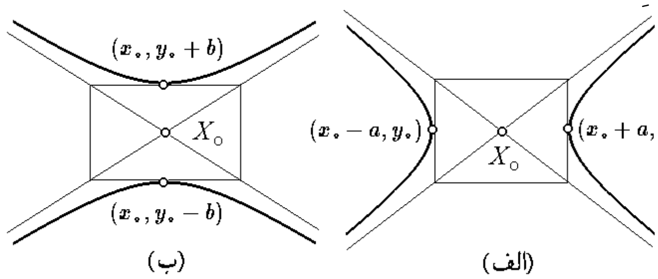
$$y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$$

۱۲.۸.۲ مثال. ۱) هذلولی به مرکز $(1, -1)$ و نیم قطرهای ۳ و ۴ و در امتداد x–محور به معادلهٔ زیر است:

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

مثال ۲) هذلولی $(y-3)^2/9 - (x-2)^2/4 = 1$ به مرکز $(2,3)$ و نیم قطرهای ۲ و ۳ و در امتداد y–محور است.

مثال ۳) منحنی $4x^2 - y^2 + 6y = 25$ یک هذلولی است، زیرا معادلهٔ آن را به صورت $x^2/2^2 - (y-3)^2/4^2 = 1$ می‌توان نوشت. مرکز این هذلولی $(0,3)$ و نیم قطرهایش ۲ و ۴ هستند.



شکل ۱۶.۲: انواع هذلولی استاندارد

۱۳.۸.۲ تمرین. ضمن تعیین مرکز، نیم قطرها و مجانبهای هر یک از هذلولی‌های زیر، آنها را رسم کنید:

۱) $(x-1)^2 - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$ ۲) $x^2 - y^2 = 4$

۳) $\dfrac{(x-2)^2}{4} - y^2 = 1$ ۴) $25y^2 - \dfrac{(x-1)^2}{4} = 1$

۱۴.۸.۲ منحنیهای درجهٔ دوم غیر استاندارد.

تا اینجا به طبقه بندی منحنیهای درجه دوم پرداختیم. اکنون فرض $c = 0$ را برداشته و منحنی کلی

$$C \,:\, ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0 \qquad (1.2)$$

را در نظر می‌گیریم. هدف آن است که نشان دهیم پس از یک انتقال و احتمالاً دوران مناسب، منحنی C را به یک منحنی استاندارد می‌توان تبدیل نمود.

۱۵.۸.۲ نرمال سازی منحنی درجهٔ دوم — روش اول.

با دوران دادن محورها می‌توان ضریب جملهٔ xy در معادلهٔ منحنی درجه دوم (۱.۲) را صفر نمود. در این حالت باید فرض کرد:

$$x = u\cos\alpha - v\sin\alpha \;,\; y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$$

که در آن

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2c}{a-b}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arccot}\left(\frac{a-b}{2c}\right)$$

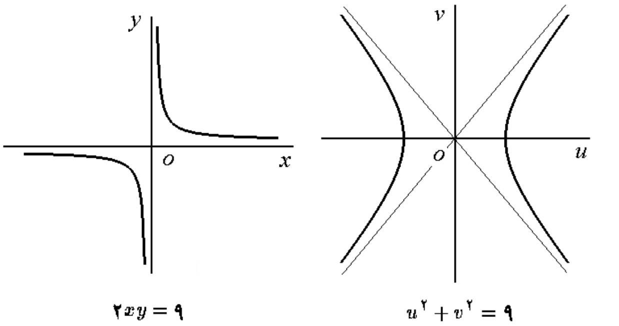
حال اگر (۱.۲) را بر حسب u و v بنویسیم، ضریب uv صفر خواهد بود. به این کار نرمال سازی گفته می‌شود. مهمترین ویژگی منحنی‌های از این دست آن است که محورهای تقارن آنها موازی محورهای مختصاتی می‌باشند.

۱۶.۸.۲ مثال. ۱) منحنی $2xy = 9$ را در نظر بگیرید. در این صورت بنابه ۱۵.۸.۲، داریم:

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arccot}\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = u\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - v\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v) \\ y = u\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + v\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v) \end{cases}$$

پس از جایگذاری، داریم $u^2 - v^2 = 9$ که معادلهٔ یک هذلولی به مرکز $(0,0)$ و نیم قطرهای ۳ و ۳ و در امتداد v–محور در صفحهٔ uv می‌باشد (به شکل ۱۷.۲ توجه شود).



شکل ۱۷.۲: نرمال نمودن یک هذلولی

مثال ۲) منحنی $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 10 = 0$ را در نظر بگیرید. در اینصورت:

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2-1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x = u\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - v\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}u - v\right) \\ y = u\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + v\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(u + \sqrt{3}v\right) \end{cases}$$

پس از جایگذاری x و y در معادلهٔ داده شده و ساده کردن نتیجه، به معادلهٔ $u^2/4 + v^2/20 = 1$ می‌رسیم که یک بیضی به مرکز مبداء و نیم قطرهای ۲ و $2\sqrt{5}$ در uv–صفحه می‌باشد (به شکل ۱۸.۲ توجه شود).

۱۷.۸.۲ تمرین. هر یک از منحنی‌های درجه دوم داده شده را نرمال کنید:

۱) $xy = 2$ ۲) $x^2 + 2y^2 = \sqrt{3}xy + 1$

۳) $xy + 1 = x + y$ ۴) $3x^2 + 4\sqrt{3}xy = y^2 + 7$

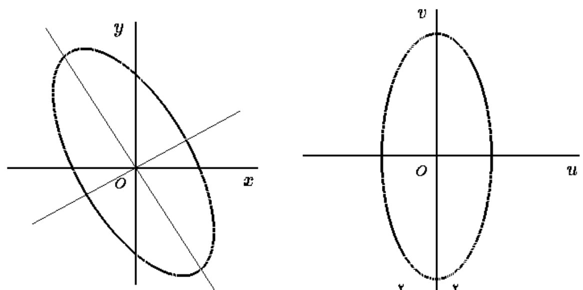
۵) $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 19$

۶) $x^2 + y^2 = 2xy + 2$ ۷) $xy + 2y = 2$

۸) $x^2 + y^2 + 2x = 2xy + 2y + 1$

۱۸.۸.۲ آزمون تعیین نوع منحنی درجهٔ دوم.

به منحنی درجهٔ دوم (۱.۲) مبین $\triangle = c^2 - ab$ را نسبت می‌دهیم. در اینصورت، صرف نظر از حالتهای خاص غیر مهم:
الف) اگر $\triangle = 0$، آنگاه منحنی C سهمی است.
ب) اگر $0 < \triangle$، آنگاه منحنی C هذلولی است.
ج) اگر $0 > \triangle$، آنگاه منحنی C بیضی است.



$2x^2 + y^2 + \sqrt{3}xy = 10$ $\qquad$ $\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{20} = 1$

شکل ۱۸.۲: نرمال نمودن یک بیضی

۱۹.۸.۲ تعیین مرکز و محور تقارن یک منحنی درجهٔ دوم.

به منحنی درجهٔ دوم (۱.۲) دستگاه معادلات:

$$\{2ax + 2cy + d = 0\ ,\ 2by + 2cx + e = 0\}$$

را نظیر می‌کنیم. در اینصورت:
الف) اگر $\triangle = 0$، آنگاه دستگاه دارای یک خط از جوابها است، که این خط محور تقارن شکل بدست آمده است.
ب) اگر $\triangle \neq 0$، آنگاه دستگاه یک جواب دارد. جواب دستگاه مرکز بیضی یا هذلولی C است. هر یک از معالات دستگاه یکی از محورهای تقارن منحنی را مشخص می‌کنند.

۲۰.۸.۲ مثال. ۱) منحنی به معادلهٔ $xy = 2$ را در نظر بگیرید. در اینصورت $\triangle = 1/4$ مثبت است و لذا شکل هذلولی است. دستگاه نظیر به منحنی عبارتست از $\{x = 0, y = 0\}$ پس مرکز این هذلولی $(0, 0)$ است و x–محور و y–محور محورهای تقارن آن هستند.
مثال ۲) منحنی به معادلهٔ $x^2 + y^2 = xy + x$ را در نظر بگیرید. در اینصورت $\triangle = -3/4$ منفی است و لذا شکل بیضی است. دستگاه نظیر به منحنی $\{2x - y - 1 = 0\ ,\ 2y - x = 0\}$ است که جواب آن $(2/3, 1/3)$ است. پس این بیضی با مرکز $(2/3, 1/3)$ و محورهای تقارن $2y = x$ و $y + 1 = 2x$ می‌باشد.
مثال ۳) منحنی به معادلهٔ $x^2 + y^2 + 2xy = x + y + 1$ را در نظر بگیرید. در اینصورت $\triangle = 1 - 1 = 0$ صفر است و لذا شکل سهمی می‌باشد. دستگاه نظیر به این منحنی عبارتست از $\{2x + 2y - 1 = 0, 2y + 2x - 1 = 0\}$ که دارای بینهایت جواب صادق در معادلهٔ $2x + 2y = 1$ است. این معادلهٔ محور تقارن سهمی می‌باشد.

۲۱.۸.۲ تمرین. در هر مورد نوع منحنی، محورهای تقارن و مرکز تقارن را مشخص کنید:

۱) $x^2 + y^2 = 3xy + x$

۲) $3x^2 + 27y^2 + 7y = 18xy + 5x$

۳) $xy + y^2 = 3x + y$ $\qquad$ ۴) $3x^2 + \sqrt{3}xy = y^2$

۵) $2x^2 + 7xy + 9y^2 + 20x = 86$

۶) $x^2 + 4y^2 = 4xy + 5x + y$

در هر مورد،یک منحنی درجهٔ دوم به شکل پارامتری داده شده است. ضمن استخراج معادلهٔ آن منحنی، نوع، محورهای تقارن و مرکز تقارن منحنی را مشخص کنید:

۷) $x = 2\sin t - 1,\ y = 4\cos t + 2,\ 0 \leq t < 2\pi$

۸) $x = 3t, \quad y = 9t^2 - t, \quad -\infty < t < \infty$

۹) $x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1$

۱۰) $x = -\cosh t, \quad y = \sinh t, \quad -\infty < t < \infty$

۱۱) $x = t^2, \quad y = \sqrt{t^4 + 1}, \quad 0 \leq t$

۱۲) $x = 2\sinh t + 1,\ y = \cosh t + 3,\ -\infty < t < \infty$

هر یک از منحنی‌های درجه دوم زیر را پارامتره کنید:

۱۳) $xy = 2$ $\qquad$ ۱۴) $xy + y^2 = 3x + y$

۱۵) $\frac{x^2}{4} - (y - 1)^2 = 1$ $\qquad$ ۱۶) $x^2 + y^2 + 2xy = x - y$

۱۷) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ $\qquad$ ۱۸) $3x^2 + \sqrt{3}xy = y^2$

۱۹) نشان دهید که منحنی
$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = a$$
یک هذلولی با مجانبهای
$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
است، مشروط به آنکه $a_1b_2 \neq a_2b_1$.

۲۰*) نشان دهید که اگر $a_1b_2 \neq a_2b_1$، آنگاه
$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 = (a_2x + b_2y + c_2)^2 + a$$
یک هذلولی است.

۲۲.۸.۲ نرمالسازی منحنی‌های درجهٔ دوم — روش دوم.

هدف از این بخش اثبات این مطلب است که

۲۳.۸.۲ قضیهٔ. هر منحنی درجهٔ دوم یکی از اشکال به شرح زیر است: « دایره، بیضی، هذلولی، سهمی، دو خط متقاطع، یک خط، یک نقطه و یا مجموعه‌ای تهی.»

اثبات: برای اثبات این مطلب، معادلهٔ (۱.۲) را به شکل ماتریسی

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+dx+ey+f=0 \qquad (2.2)$$

نوشته و فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$، که یک ماتریس متقارن 2×2 می‌باشد. بنابه قضیهٔ ۶.۸.۱ ، اگر α و β مقادیر ویژهٔ A باشند، آنگاه دو حالت ممکن است که رخ دهد:

الف) $\alpha \neq \beta$ که در این صورت بردارهای ویژهٔ نظیر به آنها بر هم عمودند و بنابراین می‌توان دو بردار متعامد یکهٔ $\mathbf{v}_1=[a_{11},a_{21}]^t$ و $\mathbf{v}_2=[a_{12},a_{22}]^t$ به گونه‌ای یافت که $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ بترتیب بردار ویژهٔ نظیر به α و β باشند.

ب) $\alpha=\beta$ که در این صورت باز هم می‌توان دو بردار متعامد یکهٔ $\mathbf{v}_1=[a_{11},a_{21}]^t$ و $\mathbf{v}_2=[a_{12},a_{22}]^t$ به گونه‌ای یافت که که هر دو پایه‌ای برای بردارهای ویژهٔ نظیر به α تشکیل می‌دهند.

در هر دو حالت، ماتریس متعامد $B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ را می‌توان تهیه نمود. در این صورت $B^{-1}=B^t$ و $B^tAB=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$.
در نتیجه اگر فرض شود $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=X\mathbf{v}_1+Y\mathbf{v}_2$، آنگاه

$$ax^2+by^2+2cxy=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^t A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\alpha X^2+\beta Y^2$$

بنابراین اگر C را بر حسب X و Y بنویسیم، آنگاه معادلهٔ حاصل نرمال خواهد بود:

$$C\ :\ \alpha X^2+\beta Y^2+\gamma X+\eta Y+\theta=0$$

به این ترتیب، بسته به مقادیر مختلف α، β، γ، η و θ، منحنی C به یکی از موارد زیر است:

۱) اگر α و β مخالف صفر و هم علامت بوده و

$$\phi:=\theta-\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma^2}{\beta}+\frac{\eta^2}{\alpha}\right)$$

صفر باشد، در این صورت با فرض $u=X+\gamma/2\alpha$ و $v=Y+\eta/2\beta$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\alpha u^2+\beta v^2=0$ می‌رسیم که تنها جواب آن یک نقطه است: $u=v=0$. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C یک نقطه است.

۲) اگر α و β مخالف صفر و هم علامت بوده و

$$\phi:=\theta-\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma^2}{\beta}+\frac{\eta^2}{\alpha}\right)$$

نیز با آن دو هم علامت باشد، در این صورت با فرض $u=X+\gamma/2\alpha$ و $v=Y+\eta/2\beta$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\alpha u^2+\beta v^2+\phi$ می‌رسیم که هیچ گونه جوابی ندارد. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C تهی است.

۳) اگر α و β مخالف صفر و هم علامت بوده و

$$\phi:=\theta-\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma^2}{\beta}+\frac{\eta^2}{\alpha}\right)$$

با آنها مختلف العلامه باشد، در این صورت با فرض $u=X+\gamma/2\alpha$ و $v=Y+\eta/2\beta$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\frac{\alpha}{\phi}u^2+\frac{\beta}{\phi}v^2=1$ می‌رسیم که یک بیضی در $uv-$صفحه است. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C یک بیضی است.

۴) اگر α و β مخالف صفر و مختلف العلامه بوده و

$$\phi:=\theta-\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma^2}{\beta}+\frac{\eta^2}{\alpha}\right)$$

صفر باشد، در این صورت با فرض $u=X+\gamma/2\alpha$ و $v=Y+\eta/2\beta$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\frac{\alpha}{\phi}u^2+\frac{\beta}{\phi}v^2=0$ می‌رسیم که آن را به شکل $v=\pm\frac{\alpha}{\beta}u$ می‌توان نوشت و عبارت از دو خط متقاطع در $uv-$صفحه است. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C اجتماعی از دو خط متقاتع است.

۵) اگر α و β مخالف صفر و مختلف العلامه بوده و

$$\phi:=\theta-\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma^2}{\beta}+\frac{\eta^2}{\alpha}\right)$$

مخالف صفر باشد، در این صورت با فرض $u=X+\gamma/2\alpha$ و $v=Y+\eta/2\beta$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\frac{\alpha}{\phi}u^2+\frac{\beta}{\phi}v^2+1=0$ می‌رسیم که آن را به شکل $\frac{u^2}{A^2}-\frac{v^2}{B^2}=\pm 1$ می‌توان نوشت که یک هذلولی در $uv-$صفحه است. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C یک هذلولی است.

۶) اگر $\alpha=0$ و β و γ مخالف صفر باشند، در این صورت با فرض $\phi:=\theta-\eta^2/4\beta$، $u=X$ و $v=Y+\eta/2\beta$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\gamma u+\beta v^2+\phi=0$ می‌رسیم که آن را به شکل $u=-\frac{\phi}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}v^2$ می‌توان نوشت که یک سهمی در $uv-$صفحه است. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C یک سهمی است.

۷) اگر $\beta=0$ و α و γ مخالف صفر باشند، آنگاه وضعیت کاملاً شبیه به (۶) است.

۸) اگر $\alpha=\gamma=0$، $\beta\neq 0$ و $\phi:=\theta-\frac{\eta^2}{4\beta}$ هم علامت با β باشد، در این صورت با فرض $u=X$ و $v=Y+\frac{\eta}{2\beta}$، و

نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\beta v^2+\phi=0$ می‌رسیم که هیچ گونه جوابی ندارد. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C تهی است.

۹) اگر $\beta=\gamma=0$ و α مخالف صفر باشد و $\phi:=\theta-\frac{\gamma^2}{4\alpha}$ هم علامت با α باشد، آنگاه وضعیت کاملاً شبیه به (۸) است.

۱۰) اگر $\alpha=\gamma=0$ و β مخالف صفر باشد و $\phi:=\theta-\frac{\eta^2}{4\beta}$ و β مختلف العلامه باشند، در این صورت با فرض $u=X$ و $v=Y+\frac{\eta}{2\beta}$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\beta v^2+\phi=0$ می‌رسیم که دو خط $v=\pm\sqrt{-\frac{\phi}{\beta}}u$ در uv−صفحه است. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C اجتماعی از دو خط موازی است.

۱۱) اگر $\beta=\gamma=0$ و α مخالف صفر باشد و $\phi:=\theta-\frac{\gamma^2}{4\beta}$ و α مختلف العلامه باشند، آنگاه وضعیت کاملاً شبیه به (۱۰) است.

۱۲) اگر $\alpha=\gamma=0$ و β مخالف صفر باشد و $\phi:=\theta-\frac{\eta^2}{4\beta}=0$، در این صورت با فرض $u=X$ و $v=Y+\frac{\eta}{2\beta}$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\beta v^2=0$ می‌رسیم که یک خط $v=0$ در uv−صفحه است. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C خط راست است.

۱۳) اگر $\beta=\gamma=0$ و α مخالف صفر باشد و $\phi:=\theta-\frac{\gamma^2}{4\alpha}=0$، آنگاه وضعیت کاملاً شبیه به (۱۲) است.

۱۴) اگر $\alpha=\beta=\gamma=0$ و $\theta\neq 0$، در این صورت C تهی است. و به این ترتیب برهان تمام است. □

۲۴.۸.۲ مثال. ۱) منحنی $x^2+y^2=4xy+x$ را در نظر بگیرید. می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}-x=0$$

در نتیجه $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. معادلهٔ مشخصهٔ این ماتریس:

$$0=|\lambda I_2-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-3$$

است. پس مقادیر ویژهٔ آن عبارتند از $\alpha=-1$ و $\beta=3$. بردار یکهٔ ویژهٔ نظیر به $\alpha=-1$ عبارتست از

$$\mathbf{v}_1=\left[\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\right]^t$$

و بردار یکهٔ ویژهٔ نظیر به $\beta=3$ نیز عبارتست از

$$\mathbf{v}_2=\left[\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2\right]^t$$

بنابراین فرض می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=X\mathbf{v}_1+Y\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ \frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{bmatrix}$$

بنابراین $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$ و $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$ که پس از قرار دادن در معادلهٔ داده شده، داریم

$$X^2-3Y^2-\frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y=0$$

اکنون فرض می‌کنیم $u=X-\frac{\sqrt{2}}{4}$ و $v=Y+\frac{\sqrt{2}}{12}$. در نتیجه خواهیم داشت: $u^2-3v^2=\frac{1}{12}$ یا $\frac{u^2}{1/12}-\frac{v^2}{1/4}=1$ که معادلهٔ یک هذلولی در uv−صفحه است.

مثال ۲) منحنی $3x^2=3y^2+8xy+10y+3$ را در نظر بگیرید. می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}-10y-3=0$$

در نتیجه $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$. معادلهٔ مشخصهٔ این ماتریس:

$$0=|\lambda I_2-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 4 \\ 4 & \lambda+3 \end{vmatrix}=\lambda^2-25$$

است. پس مقادیر ویژهٔ آن عبارتند از $\alpha=5$ و $\beta=-5$. بردار یکهٔ ویژهٔ نظیر به $\alpha=5$ عبارتست از

$$\mathbf{v}_1=\left[-2\sqrt{5}/5,\sqrt{5}/5\right]^t$$

و بردار یکهٔ ویژهٔ نظیر به $\beta=-5$ نیز عبارتست از

$$\mathbf{v}_2=\left[\sqrt{5}/5,2\sqrt{5}/5\right]^t$$

بنابراین فرض می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=X\mathbf{v}_1+Y\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5}X+\frac{\sqrt{5}}{5}Y \\ \frac{\sqrt{5}}{5}X+\frac{2\sqrt{5}}{5}Y \end{bmatrix}$$

بنابراین $x=\frac{\sqrt{5}}{5}(-2X+Y)$ و $y=\frac{\sqrt{5}}{5}(X+2Y)$ که پس از قرار دادن در معادلهٔ داده شده، داریم

$$5X^2=5y^2+2\sqrt{5}X+4\sqrt{5}Y+3$$

اکنون فرض می‌کنیم $u=X-\sqrt{5}/5$ و $v=Y-2\sqrt{5}/5$. در نتیجه خواهیم داشت: $u^2=v^2$ یا $v=\pm u$ که معادلهٔ دو خط متقاطع در uv−صفحه است.

۲۵.۸.۲ تمرین. روند بالا را در مورد هر یک از منحنیهای درجه دوم زیر اجرا کنید:

۱) $xy = 2$ ۲) $3x^2 + \sqrt{3}xy = y^2$

۳) $x^2 - y^2 + xy = 1$ ۴) $xy + y^2 = 3x + y$

۹.۲ رویه‌های درجهٔ دوم

تعمیم منحنیهای درجه دوم به حالت سه بعدی را رویه‌ی درجهٔ دوم می‌نامند. هدف از این بخش دسته بندی این اشیاء است. از این رویه‌ها در ادامه بسیار استفاده می‌شود.

۱.۹.۲ تعریف. مجموعهٔ جوابهای یک معادلهٔ چند جمله‌ای درجه دوم بر حسب x، y و z در فضا

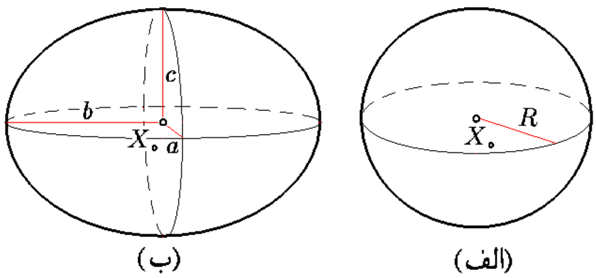
$$\begin{aligned} S \quad : \quad & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy \\ & + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ & + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

را رویه درجه دوم می‌نامند. رویه را در صورتی نرمال گوئیم که ضرایب جملات xy،xz و yz در آن صفر باشند. در قسمت ۱۳.۹.۲ روش نرمال سازی رویهٔ مفروض (۳.۲) نشان داده خواهد شد. فعلاً، برای ایجاد سهولت در بحث فرض می‌کنیم رویهٔ S نرمال باشد: $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. در ادامه به دسته بندی رویه‌های درجهٔ دوم می‌پردازیم.

۲.۹.۲ کره. کرهٔ به مرکز در $X_\circ$ و شعاع R، مجموعهٔ همهٔ نقاطی از فضا است که از نقطهٔ $X_\circ$ به فاصلهٔ R هستند. معادلهٔ چنین رویهٔ درجه دومی به شکل

$$S : (x - x_\circ)^2 + (y - y_\circ)^2 + (z - z_\circ)^2 = R^2$$

است. مرکز کره $X_\circ = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$، نقطه تقارن آن می‌باشد (به شکل ۱۹.۲—الف توجه شود).



شکل ۱۹.۲: کره و بیضی‌گون

۳.۹.۲ بیضی‌گون. شکل فضایی که برخوردش با هر صفحهٔ دلخواهی تهی، یک نقطه و یا یک بیضی باشد را بیضی‌گون می‌نامند. معادلهٔ کلی این رویهٔ درجه دوم

$$S : \frac{(x - x_\circ)^2}{a^2} + \frac{(y - y_\circ)^2}{b^2} + \frac{(z - z_\circ)^2}{c^2} = 1$$

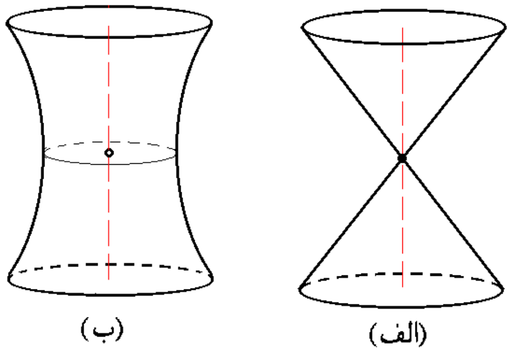
است. $X_\circ = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ را مرکز و اعداد a، b و c را بترتیب نیم قطرهای بیضی‌گون S می‌نامند (به شکل ۱۹.۲—ب توجه شود). شش نقطهٔ $(x_\circ \pm a, y_\circ, z_\circ)$، $(x_\circ, y_\circ \pm b, z_\circ)$ و $(x_\circ, y_\circ, z_\circ \pm c)$ بر سطح بیضی‌گون واقعند.

۴.۹.۲ مخروط. فرض کنید یک بیضی در صفحه‌ای موازی با xy−صفحه، و نقطه‌ای $X_\circ$ غیر واقع بر آن صفحه در اختیار داریم. مکان هندسی نقاط واقع بر خطوط گذرنده از نقاط آن بیضی و نیز نقطهٔ $X_\circ$، مخروطی است با رأس در $X_\circ$ معادلهٔ چنین رویهٔ درجهٔ دومی به شکل

$$S : \frac{(z - z_\circ)^2}{c^2} = \frac{(x - x_\circ)^2}{a^2} + \frac{(y - y_\circ)^2}{b^2}$$

است (به شکل ۲۰.۲—الف توجه شود). محور تقارن مخروط موازی z−محور است. روشن است که اگر طرف اول تساوی بر حسب y باشد، محور تقارن به موازات y−محور است و اگر بر حسب x باشد، محور تقارن آن موازی x−محور است. بنابراین جمعاً سه نوع مخروط نرمال وجود دارد.

همانطوری که قبلاً گفته شد، اگر صفحه‌ای را با مخروط قطع دهیم (مثلاً صفحهٔ $z = ax + b$ را با مخروط $z^2 = x^2 + y^2$)، منحنی بدست آمده یک منحنی درجه دوم است. به همین دلیل منحنیهای درجهٔ دوم را مقاطع مخروطی می‌نامند.



شکل ۲۰.۲: الف) مخروط
ب) هذلولی‌گون یکپارچه

۵.۹.۲ هذلولی‌گون یکپارچه. رویهٔ درجه دوم

$$S : \frac{(x - x_\circ)^2}{a^2} + \frac{(y - y_\circ)^2}{b^2} - \frac{(z - z_\circ)^2}{c^2} = 1$$

را هذلولی‌گون یکپارچه با مرکز $X_\circ = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ و محور تقارن موازی z−محور می‌نامند (به شکل ۲—۲۰.ب توجه شود).

موازی y–محور و x–محور نیز می‌توان هذلولی یکپارچه تعریف نمود. برای این منظور کافی است منفی را قبل از عبارت y و یا x ببریم.

۶.۹.۲ هذلولی‌گون دو پارچه.

رویهٔ درجه دوم

$$S\ :\ -\frac{(x-x_\circ)^۲}{a^۲}-\frac{(y-y_\circ)^۲}{b^۲}+\frac{(z-z_\circ)^۲}{c^۲}=۱$$

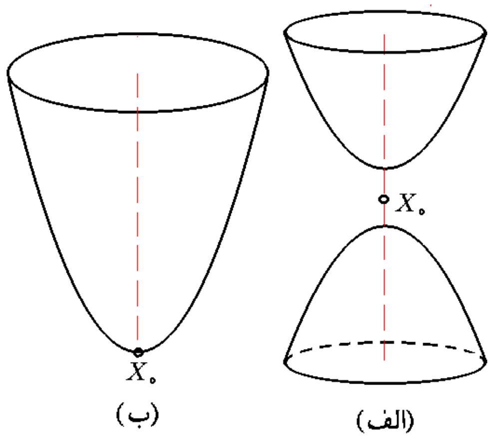
را هذلولی‌گون دو پارچهٔ با مرکز $X_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ و محور تقارن موازی z–محور می‌نامند (به شکل ۲۱.۲–الف توجه شود). با عوض کردن مکان علامت $+$ می‌توان هذلولی گونهای دوپارچهٔ با محور موازی x–محور و یا y–محور را تعریف نمود.

۷.۹.۲ سهمی‌گون بیضوی.

رویه درجه دومی است که مقاطع آن با صفحات عمود بر محورش تهی، تک نقطه و یا بیضی است و مقاطع آن با صفحات موازی محورش همگی سهمی‌اند. سهمی‌گون بیضوی نرمال با رأس در نقطه‌ی $X_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ و محور تقارن موازی z–محور و رو به جهت مثبت z–محور به معادلهٔ:

$$S\ :\ z-z_\circ=\frac{(x-x_\circ)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_\circ)^۲}{b^۲}$$

است. با تعویض علامت سمت راست، سهمی‌گون رو به جهت منفی z–محور خواهد چرخید. اگر بجای اینکه عبارت درجه اول بر حسب z داشته باشیم، عبارتی درجه یک بر حسب y در اختیار باشد، S سهمی‌گون به موازات y–محور خواهد بود. همین مطلب برای x–محور درست است. در نتیجه جمعاً شش نوع سهمی‌گون بیضوی نرمال وجود دارد (به شکل ۲۱.۲–ب توجه شود).



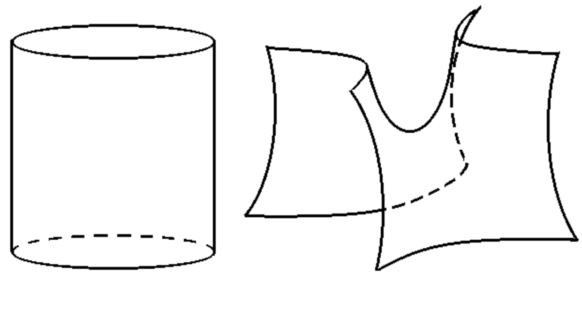
شکل ۲۱.۲: الف) هذلولی‌گون دو پارچه
ب) سهمی‌گون بیضوی

۸.۹.۲ سهمی‌گون هذلولوی.

رویه درجه دومی است که مقاطع آن با صفحات عمود بر محورش هذلولی می‌باشد و مقاطع آن با صفحات موازی با محورش همگی سهمی‌اند. سهمی‌گون بیضوی نرمال با رأس در نقطهٔ $X_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ و با محور تقارن موازی z–محور و دهنهٔ به موازات y–محور، به معادلهٔ:

$$S\ :\ z-z_\circ=\frac{(x-x_\circ)^۲}{a^۲}-\frac{(y-y_\circ)^۲}{b^۲}$$

است. اگر جای $-$ در سمت راست را عوض کنیم، دهنهٔ S رو به x–محور خواهد شد. اگر نقش z و x را عوض کنیم، محور تقارن S، x–محور خواهد شد. همین مطلب برای y–محور درست است. بنابراین شش نوع سهمی گون هذلولوی نرمال وجود دارد (به شکل ۲۲.۲–الف توجه شود).



شکل ۲۲.۲: الف) سهمی‌گون هذلولوی
ب) استوانهٔ بیضوی

۹.۹.۲ استوانهٔ بیضوی.

اگر معادلهٔ

$$S\ :\ \frac{(x-x_\circ)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_\circ)^۲}{b^۲}=۱$$

را در صفحه حل کنیم، پاسخ یک بیضی با مرکز در $(x_\circ,y_\circ)$ و نیم قطرهای a و b خواهد بود. اما اگر نقطهٔ $(x,y,\circ)$ بر این بیضی واقع باشد، آنگاه همهٔ نقاط (y,x,z) که z دلخواه است، بر S قرار دارند. به این ترتیب S یک استوانهٔ با قائدهٔ بیضی و به موازات z–محور است (به شکل ۲۲.۲–ب توجه شود). اگر چنانچه در معادله y نباشد، یعنی جای y را با z عوض کنیم، استوانهٔ موازی با y–محور بدست خواهد آمد. یعنی سه نوع استوانهٔ بیضوی داریم.

۱۰.۹.۲ استوانه هذلولوی.

رویه درجه دوم

$$S\ :\ \frac{(x-x_\circ)^۲}{a^۲}-\frac{(y-y_\circ)^۲}{b^۲}=۱$$

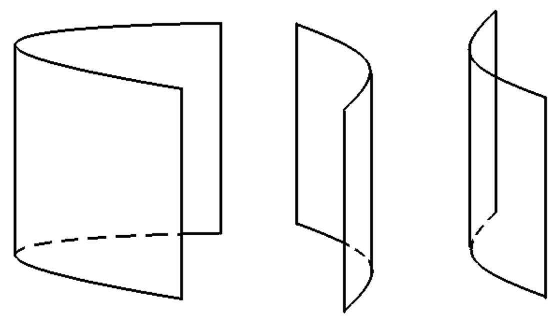
را استوانهٔ هذلولوی می‌نامند. اگر این معادله را در صفحه رسم کنیم، هذلولوی خواهد بود، برای ترسیم S کافی است این هذلولوی را در امتداد محور z ها حرکت دهیم. اگر جای منفی را در معادلهٔ S عوض کنیم، دهنهٔ شکل بجای در امتداد y–محور، x–محور خواهد بود. یعنی S استوانهٔ هذلولوی در امتداد

z-محور و با دهنهٔ در امتداد y-محور است (به شکل ۲۳.۲-الف توجه شود). بنابراین جمعاً شش نوع استوانهٔ هذلولوی نرمال وجود دارد.

۱۱.۹.۲ استوانهٔ سهموی. رویه درجه دوم به معادلهٔ

$$S \,:\, y - y_{\circ} = a\,(x - x_{\circ})^{۲}$$

که $a > \circ$ را استوانهٔ سهموی به موازات z-محور و جهت مثبت x-محور می‌نامیم (به شکل ۲۳.۲-ب توجه شود). اگر $a < \circ$، آنگاه استوانهٔ سهموی رو به جهت منفی x-محور خواهد داشت. اگر نقش y را با z عوض کنیم، استوانهٔ سهموی به موازات y-محور بدست خواهد آمد. بنابراین، جمعاً شش نوع استوانهٔ سهموی نرمال وجود دارد.



(ب) (الف)

شکل ۲۳.۲: الف) استوانهٔ هذلولوی
ب) استوانهٔ سهموی

۱۲.۹.۲ تمرین. نوع هر یک از رویه‌های درجه دوم زیر را مشخص نموده، آنها را رسم کنید:

۱) $x^{۲} + ۴y^{۲} + ۴z^{۲} = ۹$	۲) $x^{۲} + y^{۲} - z^{۲} = ۱$
۳) $x = z^{۲} - y^{۲}$	۴) $x = y^{۲} + ۴z^{۲}$
۵) $y = z^{۲}$	٦) $z = y^{۲} - ۱$
۷) $x^{۲} + y^{۲} = ۴z^{۲}$	۸) $x^{۲} + z^{۲} = y^{۲} + ۲y + ۱$
۹) $z = -\frac{۱}{۲}\left(x^{۲} + y^{۲}\right)$	۱۰) $۱٦x^{۲} + ۹y^{۲} = ۲۵$

۱۳.۹.۲ نرمال سازی رویه‌های درجهٔ دوم. هدف از این بخش نرمال سازی معادلهٔ یک رویهٔ درجهٔ دوم دلخواه است، یعنی انتخاب یک تغییر مختصات مناسب به شکل

$$\begin{cases} x = \alpha_{۱۱}u + \alpha_{۱۲}v + \alpha_{۱۳}w + \alpha_{۱۴} \\ y = \alpha_{۲۱}u + \alpha_{۲۲}v + \alpha_{۲۳}w + \alpha_{۲۴} \\ z = \alpha_{۳۱}u + \alpha_{۳۲}v + \alpha_{۳۳}w + \alpha_{۳۴} \end{cases}$$

به نحوی که بتواند معادلهٔ (۳.۲) را به یک معادلهٔ استاندارد (یعنی، معادله‌ای که در آن ضریب جملات uv، uw و vw صفرند) تبدیل کند. این نوع تغییر مختصات (که تغییر مختصات خطی نامیده می‌شوند) شکل کلی رویه را تغییر نمی‌دهند، بلکه باعث انتقال، دوران، انعکاس و یا تجانس یافتن شکل می‌گردد.

به معادلهٔ (۳.۲) ماتریس ۳ × ۳ متقارن $A = [a_{ij}]$ را نسبت می‌دهیم (توجه شود که در این ماتریس $a_{ij} = a_{ji}$؛ مثلاً، ضریب جملهٔ xy برابر $۲a_{۱۲}xy$ است که بجای آن می‌نویسیم $a_{۱۲}xy+a_{۲۱}yx$). بنابه قضیهٔ ٦.۸.۱ ، ماتریس A دارای ۳ مقدار ویژهٔ حقیقی (احتمالاً، با تکرار) است. می‌دانیم که بردارهای ویژهٔ نظیر به مقادیر ویژهٔ متفاوت بر هم عمودند و بعلاوه اگر مقدار ویژهٔ بخصوصی بیش از یک بار تکرار شود، همواره می‌توان پایه‌ای برای فضای بردارهای ویژهٔ نظیر به آن انتخاب نمود. درنتیجه، حکم زیر را داریم:

۱۴.۹.۲ قضیه. فرض کنیم A ماتریس نظیر به معادلهٔ درجهٔ دوم (۳.۲) باشد و $\lambda_{۳} \leq \lambda_{۲} \leq \lambda_{۱}$ مقادیر ویژهٔ نظیر به A باشند. در این صورت بردارهای متعامد $\left\{\mathbf{v}_{۱}, \mathbf{v}_{۲}, \mathbf{v}_{۳}\right\}$ طوری وجود دارند که $\mathbf{v}_i$ بردار ویژهٔ نظیر به λ_i است.

۱۵.۹.۲ قضیه. فرض کنیم λ_i ها و $\mathbf{v}_i$ ها همانند قضیهٔ ۱۴.۹.۲ باشند و

$$[x\ y\ z]^{t} = X\mathbf{v}_{۱} + Y\mathbf{v}_{۲} + Z\mathbf{v}_{۳}$$

در این صورت، اگر در (۳.۲) بجای x، y و z مقادیر بر حسب X، Y و Z را قرار دهیم، معادلهٔ حاصل نرمال خواهد بود. یعنی، به شکل

$$\lambda_{۱}X^{۲} + \lambda_{۲}Y^{۲} + \lambda_{۳}Z^{۲} + \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \eta = \circ$$

۱٦.۹.۲ قضیه. هر رویهٔ درجه دوم به کمک یک تغییر مختصات خطی قابل تبدیل به یکی از رویه‌های زیر است:

«کره، بیضی، هذلولی‌گون یکپارچه، هذلولی‌گون دوپارچه، مخروط، سهمی‌گون بیضوی، سهمی‌گون هذلولوی، استوانهٔ بیضوی، استوانهٔ سهموی، استوانهٔ هذلولوی، دو صفحهٔ متقاطع، یک صفحه، دو صفحهٔ موازی، دو خط متقاطع، دو خط موازی، یک خط، دو نقطه و یا یک نقطه».

۱۷.۹.۲ مثال. ۱) رویه درجه دوم

$$S \,:\, ۲x^{۲} + ۲y^{۲} + ۲z^{۲} + ۲yz = ۲xz + ۲xy + ۱$$

را در نظر بگیرید. ماتریس A نظیر به S عبارتست از:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

معادلهٔ مفسر این ماتریس متقارن برابر $\lambda^۳ - ۶\lambda^۲ + ۹\lambda - ۴ = ۰$ است. بنابراین، مقادیر ویژهٔ A عبارتند از $\lambda_۱ = \lambda_۲ = ۱$ و $\lambda_۳ = ۴$. بردارهای ویژهٔ نظیر به ۱ عبارتند از $\mathbf{v}_۱ = [۰, ۱, -۱]^t$ و $\mathbf{v}_۲ = [۲, ۱, ۱]^t$ که بر هم عمودند و بردار ویژهٔ نظیر به ۴ نیز عبارت است از $\mathbf{v}_۳ = [-۱, ۱, ۱]^t$. اکنون، فرض می‌کنیم $[x, y, z]^t = X\mathbf{v}_i + Y\mathbf{v}_j + Z\mathbf{v}_۳$، در این صورت $x = ۲Y - Z$، $y = X + Y + Z$ و $z = -X + Y + Z$. پس از جایگزاری این مقادیر در معادلهٔ S، به $۶X^۲ + ۱۲Y^۲ + ۲Z^۲ = ۱$ می‌رسیم. که یک بیضی‌گون در XYZ−فضا است.

مثال ۲) رویه درجه دوم

$$S : y^۲ + ۲xy - ۴xz - ۲yz - ۳x + y - ۳z - ۵ = ۰$$

را در نظر بگیرید. ماتریس A نظیر به S عبارتست از:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ -۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

معادلهٔ مفسر این ماتریس متقارن برابر $\lambda^۳ - \lambda^۲ - ۶\lambda = ۰$ است. بنابراین، مقادیر ویژهٔ A عبارتند از $\lambda_۱ = -۲$، $\lambda_۲ = ۰$ و $\lambda_۳ = ۳$. بردارهای ویژهٔ نظیر به این سه به ترتیب برابرند با: $\mathbf{v}_۱ = [۱, ۰, ۱]^t$، $\mathbf{v}_۲ = [-۱, ۲, ۱]^t$ و $\mathbf{v}_۳ = [-۱, -۱, ۱]^t$. اکنون، فرض می‌کنیم $[x, y, z]^t = X\mathbf{v}_۱ + Y\mathbf{v}_۲ + Z\mathbf{v}_۳$، در این صورت $x = X - Y - Z$، $y = ۲Y - Z$ و $z = X + Y + Z$. پس از جایگزاری این مقادیر در معادلهٔ S، به

$$۹Z^۲ - ۴X^۲ - ۶X + ۲Y - Z - ۵ = ۰$$

می‌رسیم. این معادله را به صورت

$$Y - \frac{۲۵}{۱۸} = \frac{(X + ۳/۲)^۲}{۲(۵/۶)^۲} - \frac{(Z - ۱/۱۸)^۲}{۲(۵/۹)^۲}$$

می‌توان نوشت که یک سهمی‌گون هذلولوی در راستای Y−محور است.

مثال ۳) رویه درجه دوم $S : x^۲ + z^۲ + ۲xz + ۱$ را در نظر بگیرید. ماتریس A نظیر به S عبارتست از:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

معادلهٔ مفسر این ماتریس برابر $\lambda^۳ - ۲\lambda^۲ = ۰$ است. بنابراین، مقادیر ویژهٔ A عبارتند از $\lambda_۱ = \lambda_۲ = ۰$ و $\lambda_۳ = ۲$. بردارهای ویژهٔ نظیر به ۰ عبارتند از $\mathbf{v}_۱ = [۱, ۰, ۱]^t$ و $\mathbf{v}_۲ = [۰, ۱, ۰]^t$ که بر هم عمودند و بردار ویژهٔ نظیر به ۲ نیز عبارت است از $\mathbf{v}_۳ = [-۱, ۰, ۱]^t$. اکنون، فرض می‌کنیم

$$[x, y, z]^t = X\mathbf{v}_۱ + Y\mathbf{v}_۲ + Z\mathbf{v}_۳$$

در این صورت $x = X - Z$، $y = Y$ و $z = X + Z$. پس از جایگزاری این مقادیر در معادلهٔ S، به $۴Z^۲ = ۱$ می‌رسیم. این معادله را به صورت $Z = \pm ۱/۲$ می‌توان نوشت که اجتماعی از دو صفحهٔ موازی XY−صفحه است.

۱۸.۹.۲ تمرین. هر یک از رویه‌های درجه دوم زیر را به شکل نرمال درآورده، نوع آنرا مشخص کنید:

۱) $۳x^۲ + ۳y^۲ - ۲xy + ۴xz + ۴yz = ۰$

۲) $x^۲ - y^۲ + ۲z^۲ + ۲x + ۴y - ۸z = ۰$

۳) $(x + y)^۲ + ۲y + ۲z = ۰$

۴) $x^۲ - ۴y^۲ + xz + ۲x - ۶z + ۵ = ۰$

۵) $xy + xz + yz = ۳$ ‏ ۶) $xy - yz = x$

۷) $۶x^۲ - ۲y^۲ + ۶z^۲ + ۴xz + ۸x - ۴y - ۸z + ۱ = ۰$

۸) $۴x^۲ + ۱۶y^۲ + ۲۵z^۲ + ۴xy + ۶xz$
$-۱۰yz + ۲x = ۴z = ۰$

۱۰.۲ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به صفحهٔ ۲۴۴ و یا فایل `doc.pdf` مراجعه شود.

۱.۱۰.۲ بردار و اعمال بر آن. مانند در ۲.۱۰.۱ به صورت

بردار $\overrightarrow{(a, b, c)} \xmapsto{\text{میپل}} \mathrm{vector([a, b, c])}$

می‌توان بردار را در محیط میپل تعریف نمود. دستورات نرم، مجموع، ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها در بستهٔ نرم افزاری `linalg` قرار دارد که با دستور `with(linalg)` می‌توان آن را در حافظه آماده نمود. اعمال بر بردارها را به شکل زیر می‌توان انجام داد: فرض کنید `u` و `v` بردارند و `a` عدد باشد، در این صورت

تفاضل v از u .... $\xmapsto{\text{میپل}}$ `evalm(u - v)`

مجموع u و v .... $\xmapsto{\text{میپل}}$ `evalm(u + v)`

طول u .... $\xmapsto{\text{میپل}}$ `norm(u)`

حاصلضرب a در u .... $\xmapsto{\text{میپل}}$ `evalm(a * u)`

حاصلضرب داخلی u در v .... $\texttt{dotprod(u,v)} \xmapsto{\text{میپل}}$

حاصلضرب خارجی u در v ..... $\texttt{crossprod(u,v)} \xmapsto{\text{میپل}}$

۲.۱۰.۲ تصویر بردار بر بردار دیگر. از برنامهٔ زیر برای محاسبهٔ تصویر بردار u بر بردار v می‌توان استفاده نمود:

$$\mathrm{proj} := \mathrm{proc(u,v)\ dotprod(u,v), dotprod(v,v) * v\ end;}$$

اکنون برای محاسبهٔ تصویر بردار u بر v کافی است از دستور proj(u,v) استفاده شود.

۳.۱۰.۲ زاویهٔ بین دو بردار. برای محاسبهٔ زاویهٔ بین بردارهای u و v از دستور angle(u,v) استفاده می‌شود.

۴.۱۰.۲ بردار واصل بین دو نقطه. قرارداد می‌کنیم که نقطهٔ P به مختصات (a,b,c) را به صورت P:=[a,b,c] در محیط میپل وارد کنیم. بردار $\overrightarrow{PQ}$ واصل بین دو نقطهٔ P و Q را با دستور evalm(vector(P)-vector(Q)) می‌توان بدست آورد.

۵.۱۰.۲ روش گرام اشمیت. برای اعمال روش گرام اشمیت بر مجموعهٔ بردارهای مفروض v_1، v_2، ... و v_n از دستور GramSchmidt([v_1,v_2,...,v_n]) استفاده می‌کنیم.

از این به بعد تا پایان بخش حاضر، از بستهٔ نرم افزاری Geom3d استفاده می‌کنیم. برای در دسترس بودن آن کافی است دستور with(geom3d) را در محیط میپل اجرا کنیم.

۶.۱۰.۲ نقطه. برای وارد نمودن نقطهٔ P به مختصات (a,b,c) در محیط میپل، از دستور point(P,[a,b,c]) استفاده می‌کنیم. بعلاوه

مختصات نقطهٔ P .... $\texttt{coordinates(P)} \xmapsto{\text{میپل}}$

مختص x نقطهٔ P .... $\texttt{xcoord(P)} \xmapsto{\text{میپل}}$

مختص y نقطهٔ P .... $\texttt{ycoord(P)} \xmapsto{\text{میپل}}$

مختص z نقطهٔ P .... $\texttt{zcoord(P)} \xmapsto{\text{میپل}}$

۷.۱۰.۲ خط. برای وارد نمودن خط l در محیط میپل از یکی از دستورات زیر می‌توان استفاده نمود:

خط گذرنده از نقاط P1 و P2 .... line(l,[P1,P2])

خط با بردار هادی v و تکبه گاه P .... line(l,[P,v])

خط محل تلاقی دو صفحهٔ p1 و p2 ..... line(l,[p1,p2])

line(l,[a*t+x0,b*t+y0,c*t+z0],t) ....

خط با معادلات پارامتری x0+at، y0+bt و z0+ct ....

چنانچه خط l را به یکی از روشهای به غیر از پارامتری بیان نموده باشید، با دستور Equation(l) می‌توانید شکل پارامتری آن را بیابید. دستورات ParallelVector(l) و FixedVector(L) بترتیب یک بردار هادی و یک تکیه گاه برای l را اعلام می‌دارند.

۸.۱۰.۲ صفحه. برای وارد نمودن صفحهٔ P در محیط میپل از یکی از دستورات زیر می‌توان استفاده نمود:

صفحهٔ گذرنده از نقاط X، Y و Z .... plane(P,[X,Y,Z])

صفحهٔ با بردار نرمال v و تکیه گاه X ...... plane(P,[X,v])

صفحهٔ گذرنده از دو خط l1 و l2 ...... plane(P,[l1,l2])

صفحهٔ به معادلهٔ eq .... plane(P,eq)

چنانچه صفحهٔ P را به یکی از روشهای غیر استاندارد بیان نموده باشید، با دستور Equation(P) می‌توانید شکل استاندارد آن را بیابید. دستور NormalVector(P) بردار نرمال صفحهٔ P را اعلام می‌دارد.

۹.۱۰.۲ برخورد دو شیء. فرض کنید A و B نقطه، خط و یا صفحه باشند، دراین صورت محل برخورد C این دو شیء را با دستور intersection(C,A,B) می‌توان بدست آورد.

۱۰.۱۰.۲ فاصلهٔ دو شیء از هم. فرض کنید A و B نقطه، خط و یا صفحه باشند، در این صورت فاصلهٔ این دو شیء از هم را با دستور distance(A,B) می‌توان بدست آورد.

۱۱.۱۰.۲ زاویهٔ بین دو شیء. فرض کنید A و B خط یا صفحه باشند، در این صورت زاویهٔ بین این دو شیء را با دستور FindAngle(A,B) می‌توان بدست آورد.

۱۲.۱۰.۲ تصویر یک شیء بر شیء دیگر. فرض کنید A و B نقطه، خط یا صفحه باشند، در این صورت تصویر C شئ A بر شیء B را با دستور projection(C,A,B) می‌توان بدست آورد.

۱۳.۱۰.۲ انتقال یک شیء باندازهٔ یک بردار. فرض کنید A یک نقطه، خط و صفحه باشد و v یک بردار باشد، در این صورت انتقال یافتهٔ C شیء A باندازهٔ بردار v را با دستور translation(C,A,v) می‌توان بدست آورد.

۱۴.۱۰.۲ یادداشت. در آدرس اینترنتی http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.html مثالها و منابع مربوط به مباحث فوق الذکر آورد شده است.