

بسمه تعالی
آزمون پایانی درس هندسه منیفلد ۱
دانشکده ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران

۱. گیریم $F: M \rightarrow N$ نگاشتی هموار بین منیفلدها بوده و $p \in M$ نقطه‌ای دلخواه باشد. فرض کنیم $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ و $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ به ترتیب چارتی برای M و N باشند، که $p \in U$ و $q = F(p) \in V$. در این صورت، ثابت کنید که

$$T_p F \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^j}{\partial z^i} \Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q,$$

که $(z^1, \dots, z^n)$ مختصات در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

۲. شار میدان برداری $X = -y\partial_x + x\partial_y$ بر صفحه $\mathbb{R}^2$ و دامنه ماکسیمال آن را بدست آورید. نشان دهید که حاصل یک عمل از گروه $(\mathbb{R}, +)$ بر صفحه تعریف می‌کند.

۳. ثابت کنید که اگر $c: I \rightarrow M$ منحنی هموار باشد، آنگاه $\dot{c}: I \rightarrow TM$ نیز منحنی هموار است.

۴. گیریم $A \in \mathcal{T}en_k^\ell(M)$ میدان تانسوری، $X \in \mathfrak{X}(M)$ میدان برداری هموار و s, t اعداد حقیقی باندازه کافی کوچک باشند. در این صورت ثابت کنید که

$$(\mathcal{T}^* \mathcal{F}l_t^X)((\mathcal{T}^* \mathcal{F}l_s^X)A) = \mathcal{T}^* \mathcal{F}l_{t+s}^X(A) \quad (\text{آ})$$

$$\forall t: (\mathcal{T}^* \mathcal{F}l_t^X)A = A \Leftrightarrow \mathcal{L}_X A = 0 \quad (\text{ب})$$

۵. گیریم M منیفلدی هموار، $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ و $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ میدان‌های برداری بر M باشند. در این صورت، نشان دهید که

$$l_X \circ l_X = 0 \quad (\text{آ})$$

$$\mathcal{L}_X \circ l_Y - l_Y \circ \mathcal{L}_X = l_{[X, Y]} \quad (\text{ب})$$

۶. نشان دهید که فرم دیفرانسیلی $\omega = ydx \wedge dy + zdy \wedge dz + xdz \wedge dx \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ بسته است. سپس با استفاده از قضیه پوانکاره، فرم η را طوری بیابید که $d\eta = \omega$.