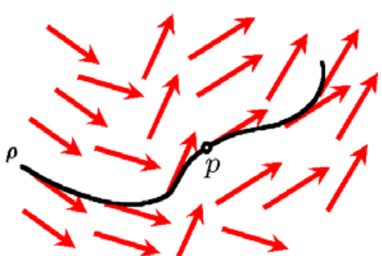
فصل ۵

میدان برداری و معادله دیفرانسیل

۱.۵ منحنی انتگرال

به مطالعهٔ جزئیات بیشتر در خصوص کلاف مماس TM و برش‌های آن (یعنی، میدان‌های برداری) می‌پردازیم. گیریم X میدانی برداری است که در یک همسایگی از $p \in M$ تعریف می‌گردد. مایلیم بدانیم که آیا منحنی‌ای $p:(-\epsilon,\epsilon)\to M$ گذرنده از p وجود دارد که بردارهای مماسش با بردارهای حاصل از میدان برداری X باشد؟ یعنی، منحنی‌ای p یا $p(\circ)=p$ وجود دارد که

$$p_*\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right)=\frac{dp}{dt}\Big|_t=X(p(t))$$



شکل ۱.۵: میدان برداری

چون X برشی موضعی است، دستگاهی مختصاتی (x,U) حول p چنان می‌توانیم مطرح کنیم، که به موجب آن X به روی $x(U)\in\mathbb{R}^n$ منتقل شود. یادآور می‌شویم که

در حالت کلی $\alpha_* X$ ممکن است برای تابع هموار $\alpha : M \longrightarrow N$ با معنی نباشد. البته، اگر α دیفئومورفیسم باشد، می‌توانیم تعریف کنیم

$$(\alpha_* X)_q = \alpha_{*\,\alpha^{-1}(q)}(X_{\alpha^{-1}(q)}) \quad \text{یا} \quad (\alpha_* X)_q := \alpha_*(X_{\alpha^{-1}(q)})$$

تحقیق اینکه $\alpha_{ast} X$ بر $\alpha(M)$ هموار است، مشکل نیست (مسالهٔ ۱).به ویژه، میدانی برداری $x_* X$ بر $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ داریم. تابعی $f : x(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد که به ازاء هر q ای

$$(x_* X)_q = f(q)_q \in T_q\mathbb{R}^n$$

به عبارت دیگر، مؤلفه‌های $(x_* X)_q$ عبارتند از $f^1(q)$، $\cdots$ و $f^n(q)$. منحنی $c = x \circ p$ را در نظر بگیرید. در این صورت شرط $\frac{dp}{dt} = X(p(t))$ به معنی $p_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) = X(p(t))$ است. بنابراین

$$\frac{dc}{dt}\Big|_t = x_* p_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) = x_*(X(p(t))) = (x_*, X)_{x(p(t))} = (x_* X)_{c(t)}$$

پس، اگر از نماد $c'(t)$ برای نمایش مشتق معمولی تابع $\mathbb{R}^n-$ مقداری c استفاده کنیم، آنگاه تساوی بالا را به شکل سادهٔ

$$c'(t) = f(c(t))$$

می‌توان نوشت. این مثال ساده‌ای از یک معادله دیفرانسیل برای تابع $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ است، که اگر آنرا بر حسب مختصات c^i بنویسیم، به یک دستگاه معادلات می‌رسیم

$$c^{i'}(t) = f^i(c^1(t), \cdots, c^n(t)) \qquad i = 1, \cdots, n$$

بعلاوه، مایلیم که شرایط آغازی

$$c^i(0) = x^i(p)$$

برقرار باشد. روند حل اینگونه معادلات را «انتگرال‌گیری» از معادله می‌گویند (دلیل آن شاید این باشد که برای حل حالت سادهٔ $c'(t) = f(t)$ که $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، از طرفین آن انتگرال گرفته می‌شود). جواب‌هایی که به این ترتیب بدست می آیند را «انتگرال‌های» معادله می‌نامند. هنوز هم بخشی از این اصطلاحات وجود دارد. منحنی $p : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ با $p(0) = p$ و $dp/dt = X(p(t))$ را **منحنی انتگرال برای X با شرط آغازی $p(0) = p$ می‌نامیم.**

قبل از طرح قضیهٔ اصلی وجود و یکتایی چنین منحنی‌های انتگرالی، چند حالت خاص را در نظر می‌گیریم.
معادلهٔ $c'(t) = -(c(t))^2$ در مورد منحنی c با برد $\mathbb{R}$ که در حالت کلاسیک بر حسب تابع $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $dy/dx = -y^2$ نوشته می‌شود. در اینجا $f(a) = -a^2$. روش استاندارد حل این معادله به صورت زیر است:

$$\frac{dy}{-y^2} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{-y^2} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = x + c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x+c}$$

بنابراین، منحنی‌های $c(t) = 1/(t+c)$ جواب هستند. این موضوع را مستقیماً و بدون متوسل شدن به بحث بالا می‌توان انجام داد. معادلهٔ داده شده را به صورت $y' = f \circ y$ می‌توان نوشت، پس

$$\left(\frac{1}{t} \circ y\right).y' = 1$$

و لذا اگر $F' = 1/f$، آنگاه $(F \circ y)' = 1$ و لذا $F(y(x)) = x + c$ که C عددی ثابت و دلخواه اسن. برای حصول به شرط اولیهٔ $c(0) = a$، بایستی فرض شود $c(t) = 1/(t + 1/a)$. این در همهٔ حالات بجز $a = 0$ درست است. در این حالت، جواب درست «$\forall t : c(t) = 0$» است. منحنی‌های c به زبان میدان‌های برداری، منحنی‌های $X(a) = -a^2 \frac{d}{dt}$ هستند.

شکل ۲.۵: میدان برداری $X(a) = -a^2 \frac{d}{dt}$

توجه کنید، در حالی که X بر کل $\mathbb{R}$ تعریف می‌شود، هیچ منحنی انتگرالی از X بجز $c(t) = 0$ بر کل $\mathbb{R}$ تعریف نمی‌شود و تنها بر بخشی از آن تعریف می‌گردد. می‌شود این موضوع را منبعث از این مطلب دانست که $X(0) = 0$. که با این حالت کاری نمی‌شود کرد. اگر $a > 0$، منحنی $c(t) = 1/(t + 1/a)$ برای همهٔ t های به اندازه کافی بزرگ می‌گردد و وقتی $t \to \alpha$ به صفر نزدیک می‌شود ولی هیچ‌گاه به صفر نمی‌رسد. از سوی دیگر، وقتی $t \to -1/a$، به دلیل اینکه میدان برداری بسیار بزرگ می‌شود، منحنی به بینهایت میل می‌کند. حتی اگر میدان برداری را در همسایگی صفر اصلاح کنیم، باز هم بحث بالا درست است منحنی به صفر نزدیک نمی‌شود.
با مطالعهٔ معادلهٔ $c'(t) = c(t)^{2/3}$ می‌توان رفتار دیگری را مشاهده کرد. اینرا به شکل کلاسیک به صورت $dy/dx = y^{2/3}$ می‌توان نوشت. با شرط اولیهٔ $c(0) = 0$، دو

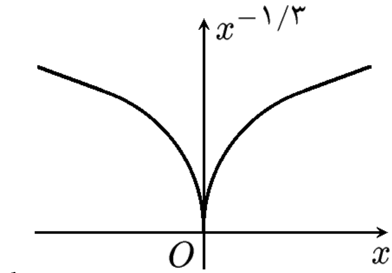
جواب مختلف دارد، یعنی

$$1)\ \forall\, t\ :\ c(t) = 0 \qquad\qquad 2)\ \forall\, t\ :\ c(t) = t^3/27$$

در این حالت، تابع f با ضابطهٔ $f(a) = a^{2/3}$ است و در $a = 0$ دیفرانسیل‌پذیر نیست. اغلب وقتی تابع $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ از کلاس C^1 است، یکتایی نتیجه می شود، اما یکتایی از این شرط کمی قوی‌تر است. در صورتی می‌گوئیم f بر U در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند که k ای چنان یافت گردد که

$$\forall x, y \in U\ :\quad \Big|f(x) - f(y)\Big| \leq k\Big|x - y\Big|$$

توجه شود که $f(a) = a^{2/3}$ درشرط لیپ شیتز صدق نمی‌کند؛ عملاً هیچ K ای نیست که به ازاء هر x در نزدیکی صفر نامساوی $\Big|f(x) - f(0)\ \leq\ k\Big|x\Big|$ برقرار باشد، زیرا $\lim_{x\to 0\pm} \frac{x^{2/3}}{x} = x^{-1/3} \to \alpha$ به وضوح، هر تابع لیپ شیتز، پیوسته است، اما لزومی ندارد که دیفرانسیل‌پذیر باشد. (مثلاً، $f(x) = \Big|x\Big|$). از سوی دیگر، هر تابع از کلاس C^1 به صورت موضعی لیپ شیتز است، یعنی، در همسایگی‌ای از هر نقطه‌اش، در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند. این از لم ۲–۵ نتیجه می‌شود. به علاوه، روشن است که هر تابع لیپ شیتز بر هر مجموعهٔ کرانداری، کراندار است.



شکل ۳.۵: نمودار تابع $f(a) = a^{2/3}$

۲.۵ قضایای وجود و یکتایی

قضیهٔ وجود و یکتایی برای معادلات دیفرانسیل به لمی ساده در مورد فضاهای متری کامل نیاز دارد.

۱.۲.۵ قضیه (لم انقباض). گیریم (M,p) یک فضای متری کامل غیر تهی است، و $f: M \Longrightarrow M$ انقباض است، یعنی، عددی $\circ < C < ۱$ چنان یافت می‌شود که

$$\forall x, y \in N \ : \quad p(f(x), f(y)) \leq c\, p(x,y)$$

در این صورت، $x \in M$ ای منحصر بفرد وجود دارد که $f(x) = x$ (تابع f نقطه ثابت منحصر بفرد دارد).

اثبات: توجه شود که به وضوح f پیوسته است. گیریم $x_\circ \in M$ و دنبالهٔ $\{x_n\}$ را به استقراء به شکل $x_{n+۱} = f(x_n)$ تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر،

$$x_{n+۱} = f^n(x_n) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\text{بار}n}(x_\circ)$$

در این صورت، بنا به استقراء داریم $p(x_n, x_{n+۱}) \leq C^n\, p(X_\circ, x_۱)$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+k}) &\leq p(x_n, x_{n+۱}) + \cdots + p(x_{n+k-۱}, x_{n+k}) \\ &\leq (C^n + \cdots + C^{n+k-۱}) p(x_\circ, x_۱) \end{aligned}$$

چون $C < ۱$، مجموع $\sum_{n=\circ}^{\alpha} C^n$ همگرا است، بنابراین $\lim_{n\to\alpha} (C^n + \cdots + C^{n+k+۱}) = \circ$. در نتیجه، دنبالهٔ $\{x_n\}$ کوشی است، و لذا x ای هست که $x = \lim_{n\to\alpha} x_n$. پیوستگی f نشان می‌دهد که

$$f(x) = \lim_{n\to\alpha} f(x_n) = \lim_{n\to\alpha} x_{n+۱} = x$$

و برهان تمام است. □

اکنون بر آنیم که از لم انقباض برای فضاهای بخصوصی از توابع بکار بگیریم. یادآور می‌شویم که اگر (M,p) فضای متری باشد و X فشرده، آنگاه مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته $f: X \longrightarrow M$ فضایی است متری با متر σ با تعریف

$$\sigma(f,g) := \sup_{x\in X} p(f(x), g(x))$$

چنانچه M کرندار باشد، لزومی ندارد فرض شود X فشرده است. به علاوه، اگر M کامل باشد، آنگاه فضای متری جدید نیز کامل خواهد بود. این حکم اساساً قضیه‌ای است که می‌گوید حد یک شکل از توابع پیوسته، پیوسته است، و همچنین اینکه به دلیل

کامل بودن M، به ازاء هر x ای $\lim_{n\to\alpha} f_n(x)$ وجود دارد. بویژه اگر M زیر مجموعه‌ای فشرده از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته $f : X \longrightarrow M$ با متر زیر کامل است:

$$\Big|\Big|f\Big|\Big| := \sup_{x\in X}\Big|f(x)\Big| \quad \text{که} \quad \sigma(f,y) := \Big|f-g\Big|$$

استراتژی اصلی ما در حل معادلات دیفرانسیل، جایگزینی توابع دیفرانسیل‌پذیر و مشتقات با توابع پیوسته و انتگرال‌ها است. اگر $U \subseteq \mathbb{R}^n$ و $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ پیوسته باشد، آنگاه روشن است که در صورتی تابع پیوسته $\alpha : (-b,b) \longrightarrow U$ که بر بازه‌ای به گرد $\circ$ تعریف می‌شود، در روابط

$$\alpha(\circ) = x \qquad \alpha'(\circ) = f(\alpha(t)) \qquad (۱)$$

صدق می‌کند که معادلهٔ انتگرال

$$\alpha(t) = x + \int_\circ^t f(\alpha(\theta))d\theta \qquad (۲)$$

برقرار باشد، که انتگرال (۲)، انتگرالی از یک تابع $\mathbb{R}^n-$ مقداری است که به صورت انتگرال‌گیری از هر یک از مؤلفه‌های آن به صورت جدا از هم تعریف می‌گردد. بالعکس، اگر α در (۱) صدق کند، آنگاه α دیفرانسیل‌پذیر است و لذا پیوسته است. بنابراین $\alpha' = f\circ\alpha$ نیز پیوسته است، و لذا

$$\alpha(t) - x = \alpha(t) - \alpha(\circ) = \int_\circ^t \alpha'(u)du = \int_\circ^t f(\alpha(u))du$$

برای اثبات قضیهٔ اصلی، تنها به یک تقریب ساده نیاز است. اگر تابع پیوسته‌ای $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ در شرط $\Big|f\Big| \le k$ صدق کند، آنگاه $\Big|\int_a^b f(u)du\Big| \le k(b-a)$. برای اثبات این موضوع، کافی است توجه شود که این حکم برای توابع ثابت درست است، و لذا برای توابع پله‌ای هم به راحتی ثابت می‌گردد، و آنگاه برای توابع پیوسته قابل اثبات است، چرا که ر تابع پیوسته، حد یک شکل توابع پله‌ای بر $[a,b]$ است.

۲.۲.۵ قضیه. گیریم $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی دلخواه است، که $U \subset \mathbb{R}^n$ باز می‌باشد. گیریم $x_\circ \in U$ و نیز $a > \circ$ عددی است که گوی بستهٔ $\bar{B}_{۲a}(x_\circ)$ به شعاع $۲a$ و مرکز در $x_\circ$ تماماً در U قرار می‌گیرد. فرض کنید که

۱) $|f| \le L$ بر $\bar{B}_{۲a}(x_\circ)$

۲) $\forall x,y \in \bar{B}_{۲a}(x_\circ) \; : \; |f(x)-f(y)| \le k|x-y|$

$b > ۰$ را طوری انتخاب کنید که

$$۳) \quad b \leq a/L$$

$$۴) \quad b < ۱/k$$

در این صورت، به ازاء هر $x \in \bar{B}_a(x_۰)$، یک $\alpha_x : (-b,b) \longrightarrow U$ ای منحصر بفرد وجود دارد که

$$\alpha_x'(t) = f(\alpha_n(t)) \quad , \quad \alpha_x(۰) = x$$

اثبات: فرض کنیم $x \in \bar{B}_a(x_۰)$ دلخواه و از این پس ثابت است. گیریم

$$M = \left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha : (-b,b) \longrightarrow \bar{B}_{۲a}(x_۰) \text{ پیوسته است} \right\}$$

در این صورت، M یک فضای متری کامل است. به ازاء هر $\alpha \in M$، منجنی $S\,\alpha$ را بر $(-b,b)$ به صورت $S\,\alpha(t) = x + \int_۰^۱ f(\alpha(x))du$ تعریف می‌کنیم. (چون f بر $\bar{B}_{۲a}(x_۰)$ پیوسته است، انتگرال وجود دارد). روشن است که منحنی $S\,\alpha$ پیوسته می‌باشد. به علاوه، به ازاء هر $t \in (-b,b)$ ای داریم

$$|S\,\alpha(t) - x| = \left| \int_۰^t f(\alpha(u))du \right| \overset{(۱)}{<} bL \overset{(۳)}{\leq} a$$

چون $|x - x_۰| \leq a$، نتیجه می‌گیریم که به ازاء هر $t \in (-b,b)$ ای $|S\alpha(t) - x_۰| < ۲a$. پس

$$\forall t \in (-b,b) \;:\; S\,\alpha(t) \in B_{۲a}(x_۰) \subset \bar{B}_{۲a}(x_۰) \qquad (۱.۵)$$

و بنابراین $S : M \longrightarrow M$.

حال فرض کنیم $\alpha, \beta \in M$. در این صورت

$$\begin{aligned} \left| S\,\alpha - S\,\beta \right| &= \sup_t \left| \int_۰^t f(\alpha(u)) - f(\beta(u))du \right| \\ &\overset{(۲)}{<} bk \sup_{-b<u<b} \left| \alpha u - \beta u \right| = bk \left| \alpha - \beta \right| \end{aligned}$$

چون (بنا به (۴)) فرض شده است $bk < ۱$، از این نامساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که $S : M \Rightarrow M$ انقباضی است. در نتیجه، S نقطه منحصر بفردی داد؛ یعنی: یک $\alpha : (-b,b) \longrightarrow \bar{B}_{۲a}(x_۰)$ منحصر بفرد است که $\alpha(t) = x + \int_۰^t f(\alpha(u))du$.

با این حال، این دقیقاً آن چیزی نیست که قضیه می‌گوید. بلکه حتی به کمک لم مهم انقباض، هنوز حکم دقیق‌تر زیر ثابت نشده است:

نگاشت α تنها $\beta c(-b,b)\longrightarrow U$ است که در شرط ذیل صدق می‌کند:

$$\beta(t)=x+\int_{\circ}^{t}f(\beta(u))du$$

دلیل این حکم چنین است: یادآور می‌شویم که هر چنین β ای عملاً در $\bar{B}_{۲a}(x_{\circ})$ قرار دارد و حتی در $B_{۲a}(x_{\circ})$. ابتدا اعداد $t>\circ$ را در نظر بگیریم. قبلاً (در (۱.۵)) ملاحظه شد که به ازاء هر t با $\circ\leq t<b$ داریم

$$\beta(t)=x+\int_{\circ}^{t}f(\beta(u))du\in\beta_{۲a}(x_{\circ})\quad \text{(گوی باز است)} \qquad (۲.۵)$$

به شرطی که به ازاء هر u با $\circ\leq u<t$ داشته باشیم $\beta(u)\in\bar{B}_{۲a}(x_{\circ})$. یعنی، به بیان دیگر، به ازاء هر u با $\circ\leq u\leq t$ داشته باشیم $\beta(u)\in B_{۲a}(x_{\circ})$. اکنون از استدلال مبتنی بر sup استفاده می‌کنیم. گیریم

$$A=\{t\big|\circ\leq t<b,\beta(u)\in B_{۲a}(x_{\circ})\ \text{ای}\ u\in[\circ,t)\}$$

گیریم $\alpha=\sup A$. فرض کنید $\alpha<b$. به وضوح به ازاء هر u با $\circ\leq u<\alpha$ داریم $\beta(u)\in B_{۲a}(x_{\circ})$ سپس، بنا به (۲.۵) داریم $\beta(\alpha)\in B_{۲a}(x_{\circ})$. به وضوح، از این نتیجه می‌شود که به ازاء همهٔ $s>\circ$ های باندازه کافی کوچک $\beta(\alpha+s)\in B_{۲a}(x_{\circ})$، که با فرض $\alpha=\sup A$ در تضاد است. پس بایستی $\sup A=b$ استدلال مشابهی برای حالت $-b<t\leq\circ$ قابل اجرا است.

در جمع، نقطهٔ ثابت α_x نگاشت s که یکتا است، همان منحنی منحصر بفرد مورد انتظار ما است. □

توجه شود که جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیل $\alpha'(t)=f(\alpha(t))$ نسبت به تغییر جمعی در پارامتر، ثابت می‌ماند یعنی، اگر فرض شود $\beta(t):=\alpha(t_{\circ}+t)$، آنگاه

$$\beta'(t)=\alpha'(t_{\circ}+t)=f(\alpha_{\circ}+t)=f(\beta(t))$$

و لذا β نیز یک جواب است. این نکته، انگیزه‌ای برای گسترش قسمت یکتایی قضیهٔ ۲.۲.۵ است.

۳.۲.۵ قضیه. فرض کنید $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ موضعاً لیپ شیتز است، یعنی گرد هر نقطه از U یک گوی وجود دارد که f بر آن در شرط (۲) از قضیهٔ ۲.۲.۵ به ازاء k ای

مشخص، صدق می‌کند (و لذا به ازاء L ای مشخص نیز در شرط (۱) صدق می‌کند).
گیریم $x \in U$ و α_1 و α_2 دو نگاشت بر بازه‌ای I باز هستند که $\alpha_2(I), \alpha_1(I) \subseteq U$ و

$$\alpha_i'(t) = f(\alpha_i(t)) \qquad \alpha_i(0) = x \qquad i = 1, 2$$

در این صورت $\alpha_1 = \alpha_2$ بر I.

اثبات: فرض کنید $\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0)$ به ازاء یک $t_0 \in I$. چنانچه تعریف کنیم $\beta_i(t) := \alpha_i(t_0 + t)$، آنگاه توابع β_i در یک معادله دیفرانسیل واحد صدق می‌کنند (یعنی $\beta_i'(t) = f(\beta_i(t))$) و شرایط اولیهٔ آنها نیز یکی است (یعنی $\beta_i(0) = \alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0) \in U$). بنابراین، به ازاء t های باندازهٔ کافی، بنا به قضیهٔ ۱.۲.۵، داریم $\beta_1(t) = \beta_2(t)$. در نتیجه، مجموعهٔ $\{t \in I \big| \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\}$ باز است. به وضوح این مجموعه بسته و غیر تهی است، و لذا برابر I است. $\square$

حال به وضعیت در قضیهٔ ۲.۲.۵ باز می‌گردیم. با نوشتن $\alpha(t, x)$ بجای $\alpha_x(t)$، نگاشت

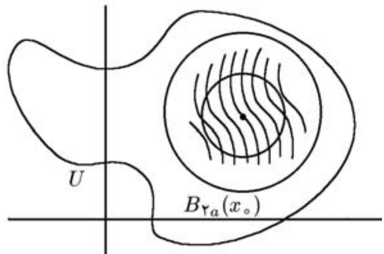
$$\alpha : (-b, b) \times B - a(x_0) \longrightarrow U$$

حاصل می‌شود که در

$$\alpha(0, x) = x \qquad , \qquad \frac{d}{dt}\alpha(t, x) = f(\alpha(t, x))$$

صدق می‌کند. [در واقع $D_1\alpha(t, x) = f(\alpha(t, x))$، اما اغلب از نماد $\partial/\partial t$ یا d/dt در این گونه موارد استفاده می‌کنیم]. این نگاشت α را فلوی موضعی (یا شارموضعی) برای f در $(-b, b) \times B_a(x_0)$ می‌نامیم. بهترین کاری که برای تجسم این نگاشت می‌توانیم انجام دهیم، ترسیم تصویرر منحنی‌های انتگرال α_x است. اگر $y = \alpha_x(t_0)$، آنگاه منحنی انتگرال α_x با شرط آغازی $x = \alpha_x(0)$، تنها با یک تغییر پارامتر با منحنی انتگرال α_y آغازی از $y = \alpha_y(0)$ تفاوت می‌کند، و بنابراین بر هم منطبق هستند. به ازاء هر x دلخواه و از این پس ثابت، نگاشت $t \mapsto \alpha(t, x)$ با $-b < t < b$ تماماً در بخشی از منحنی گذرنده از x قرار دارد. از سوی دیگر، اگر t را ثابت نگاه داریم، آنگاه نگاشت $x \mapsto \alpha(t, x)$ حاصل می‌شود که توسط آن هر نقطهٔ x ای در امتداد منحنی انتگرال گذرنده از آن، باندازهٔ t واحد زمانی حرکت می‌کند. برای توجه بیشتر به این نگاشت، آن را با نماد φ_t نشان می‌دهیم:

$$\varphi_t(x) := \alpha(t, x) = \alpha_x(t)$$



شکل ۴.۵

این نگاشت همواره پیوسته است. در واقع کل شار α پیوسته است (یعنی، به عنوان نگاشتی بر حسب t و x).

۴.۲.۵ قضیه. اگر $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ موضعاً لیپ شیتز باشد، آنگاه شار $\alpha : (-b,b)\times B_a(x_{۰}) \longrightarrow U$ که در قضیهٔ ۲.۲.۵ مطرح شد، پیوسته است.

اثبات: نگاشت S معرفی شده در اثبات قضیهٔ ۲.۲.۵ را با نماد S_x نشان می‌دهیم، با این کار نقش x مشخص‌تر می‌شود. در این صورت، داریم

$$\Big|\alpha_x - S_y\alpha_x\Big| = \Big|S_x\alpha_x - S_y\alpha_x\Big| = \Big|x-y\Big|$$

یاد آور می‌شویم که $\Big|S\alpha - S\beta\Big| \leq bk\Big|\alpha-\beta\Big|$. اگر S_y^n نمایشگر n بار تکرار S_y باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\Big|\alpha_x - S_y^n\alpha_x\Big| &\leq \Big|\alpha_x - S_y\alpha_x\Big| + \Big|S_y\alpha_x - S_y^{۲}\alpha_x\Big| + \cdots + \Big|S_y^{n-۱}\alpha_x - S_y^n\alpha_x\Big|\\ &\leq (۱ + bk + \cdots + (bk)n-۱)\,|x-y|\\ &\leq \frac{۱}{۱-bk}\,|x-y|\end{aligned}$$

یادآور می‌شویم که بنا به قضیهٔ ۱.۲.۵، نقطهٔ ثابت α_y نگاشت S_y با حد $S_y^n\alpha$ با $n \to \alpha$ برابر است. در این صورت $\alpha_y = \lim\limits_{n\to\alpha} S_y^n\,\alpha_x$ و بنابراین

$$\Big|\alpha_x - \alpha_y\Big| \leq \frac{۱}{۱-bk}\,|x-y|$$

چون $\Big|\alpha(t,x) - \alpha(t,y)\Big| = \sup_t \Big|\alpha_x - \alpha_y\Big|$، به این ترتیب پیوستگی α ثابت شده است.
$\square$

چنانچه شرایط بیشتری بر نگاشت f تحمیل کنیم، امکان اثبات همواری α وجود دارد. در واقع اگر $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ از کلاس C^k باشد، آنگاه شار $\alpha : (-b,b)\times B_a(x_{۰}) \to U$ نیز از کلاس C^k است.

متأسفانه، این قضیه بسیار دشوار است. در کتاب مقدمه‌ای به منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر اثر لانگ (ویرایش دوم)، اثباتی کلاسیک از آن مطرح شده است. همچنین در صفحات ۱۲۶ تا ۱۳۸ کتاب آنالیز ۲ اثر لانگ نیز اثباتی جدیدتر مطرح شده است. برای مطالعهٔ این اثبات دشوار، لازم است که ابتدا اصول قضایای باناخ شامل قضیهٔ هان—باناخ را مطالعه کنید و سپس حساب دیفرانسیل در فضاهای باناخ را مطالعه کنید، شامل قضایای تابع وارون و ضمنی (صفحات ۹۳ تا ۱۲۶ از آنالیز ۲). با این حال، این کار از مطالعهٔ اثبات کلاسیک راحت‌تر است (و حتی، پس از اتمام کار، اطلاعاتی در خصوص فضاهای باناخ و حساب دیفرانسیل در آنها را نیز کسب نموده‌اید).

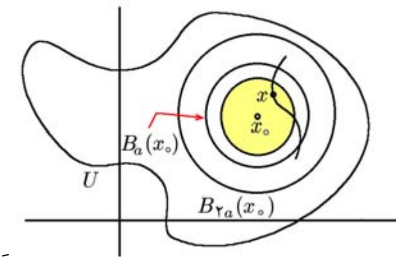
ما فقط این حکم را بدون اثبات می‌پذیریم. توجه شود که اگر f هموار C^α باشد، آنگاه همهٔ نگاشت‌های φ_t نیز هموار C^α هستند.

چون نگاشت $\alpha:(-b,b)\times B_a(x_\circ)\longrightarrow U$ در شرط $\alpha(\circ,x)=y$ صدق می‌کند، داریم

$$\alpha:\{\circ\}\times \bar{B}_{a/۲}(x_\circ)\longrightarrow \bar{B}_a(x_\circ)\subseteq B_a(x_\circ)$$

از پیوستگی α و فشردگی $\{\circ\}\times \bar{B}_{a/۲}(x_\circ)$ نتیجه می‌شود که $\epsilon>\circ$ ای چنان وجود دارد که

$$\alpha:(-\epsilon,\epsilon)\times B_{a/۲}(x_\circ)\longrightarrow B_a(x_\circ)$$



شکل ۵.۵

(اگر $x\in B_{a/۲}(x_\circ)$، آنگاه منحنی انتگرال با شرط آغازی x به ازاء هر t ای که $|t|<$ در $B_a(x_\circ)$ واقع است.) پس اگر $\left|s\right|<\epsilon$ و $x\in B_{a/۲}$، آنگاه نقطهٔ $\alpha(s,x)$ به $B_a(x_\circ)$ متعلق است، و لذا می‌توانیم تعریف کنیم

$$\partial(t):=\alpha(t,\alpha(s,x)) \qquad |t|<\epsilon$$

این نگاشت در شرایط $\partial'(t) = f(\partial(t))$ و $\partial(\circ) = \alpha(s,x)$ صدق می‌کند. همچنین، توجه داریم که به ازاء هر t ای که $\left|s+t\right| < \epsilon$، نگاشت $\beta(t) = \alpha(s+t,x)$ نیز در شرایط $\beta'(t) = f(\beta(t))$ و $\beta(\circ) = \alpha(s,x)$ صدق می‌کند. نتیجتاً بر $|t| < \epsilon$ داریم $\beta(t) = \alpha(t,\alpha(s,x))$. به بیان دیگر اگر $|t|, \left|s\right|, \left|t+s\right| < \epsilon$، آنگاه $\alpha(t,\alpha(s,x)) = \alpha(s+t,x)$. حال اگر نگاشت $\varphi_t : B_{a/۲}(x_\circ) \to \mathbb{R}^n$ را به صورت $\varphi_t(x) := \alpha(t,x)$ تعریف کنیم، می‌توانیم بگوئیم که اگر $|t|, \left|s\right|, \left|t+s\right| < \epsilon$ و $\varphi_t(x) \in B_{a/۲}(x_\circ)$ آنگاه $\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{t+s}(x)$. این بویژه نشان می‌دهد که به ازاء هر $\left|s\right| < \epsilon$ ای φ_s دیفئومورفیسم است و وارون آن $\varphi_s^{-۱}$ برابر φ_{-s} است. چون همهٔ بحث‌هایی که داشتیم موضعی بودند، بدون هیچ اثبات و یا نکته‌ای، می‌توان نتیجه گرفت که همهٔ آنها در مورد منیفلد نیز صحیح هستند.

۵.۲.۵ قضیه. گیریم X یک میدان برداری هموار بر M است و $p \in M$. در این صورت، مجموعه‌ای باز V شامل p و $\epsilon > \circ$ ای چنان وجود دارند که گردایه‌ای منحصر بفرد از دیفئومورفیسم‌ها $\varphi_t : V \to \varphi_t(V) \subseteq N$ با $|t| < \epsilon$ و خواص زیر وجود دارد:

(۱) $\varphi : (-\epsilon,\epsilon) \times V \longrightarrow M$ با ضابطهٔ $\varphi(t,p) := \varphi_t(p)$ هموار C^α است.

(۲) $|t|, \left|s\right|, \left|s+t\right| < \epsilon$ و $q, \varphi_t(q) \in V$، آنگاه $\varphi_{s+t}(q) = \varphi_s \circ \varphi_t(q)$.

(۳) $q \in V$، آنگاه X_q در $t = \circ$ به منحنی $t \mapsto \varphi_t(q)$ مماس است (به عنوان بردار مماس).

مثال‌هایی که قبلاً مطرح کردیم، نشان می‌دهند که نمی‌توان انتظار داشت در حالت کلی φ_t به ازاء همهٔ t ها تعریف شود و یا φ_t بر کل M تعریف گردد. در حالتی این مکان وجود دارد. **محمل میدان برداری X را درست به صورت بستار $\{p \in M \big| X_p \neq \circ\}$ تعریف می‌کنیم.**

۶.۲.۵ قضیه. **اگر X با محمل فشرده باشد (بویژه، اگر M فشرده باشد)، آنگاه به ازاء هر $t \in \mathbb{R}$ ای دیفئومورفیسم‌های $\varphi_t : M \to M$ با خواص (۱)، (۲) و (۳) وجود دارند.**

اثبات: **محمل X را با تعدادی متناهی مجموعهٔ باز $V_۱$، $\cdots$ و V_n می‌پوشانیم، که بر طبق قضیهٔ ۵.۲.۵ به** $\epsilon_۱$، $\cdots$ و ϵ_n و دیفئومورفیسم‌های $\varphi_t^۱$، $\cdots$ و φ_t^n متناظرند. گیریم

$\epsilon = \min\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$. توجه شود که بنا به یکتایی به ازاء هر $q \in V_i \cap V_j$ ای $\varphi_t^i(q) =$ $\varphi_t^i(q)$. پس میتوانیم تعریف کنیم

$$\varphi_t(q) := \begin{cases} \varphi_t^i(q) & \text{اگر } q \in V_i \\ q & \text{اگر } q \notin \mathrm{Supp}X \end{cases}$$

به وضوح $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \longrightarrow M$ هموار است و اگر $|t|, \Big|s\Big|, \Big|t+s\Big| < \epsilon$ آنگاه $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ و هر یک از φ_t ها دیفئومورفیسم هستند.

برای تعریف φ_t برای $|t| \geq \epsilon$، می‌نویسیم: $t = k.\frac{\epsilon}{2} + r$ که k عددی صحیح است و $\Big|r\Big| < \frac{\epsilon}{2}$. اکنون تعریف می‌کنیم

$$\varphi_t = \begin{cases} \varphi_{\epsilon/2} \circ \cdots \circ \varphi_{\epsilon/2} \circ \varphi_r & (\text{ترکیب } k \text{ تا } \varphi_{\epsilon/2} \text{ با } \varphi_r) \quad \text{اگر } k \geq 0 \\ \varphi_{-\epsilon/2} \circ \cdots \circ \varphi_{-\epsilon/2} \circ \varphi_r & (\text{ترکیب } -k \text{ تا } \varphi_{-\epsilon/2} \text{ با } \varphi_r) \quad \text{اگر } k < 0 \end{cases}$$

به راحتی می‌توان تحقیق کرد که $\{\varphi_t\}$ همان خانوادهٔ مورد نظر است. □

۳.۵ گروه یک پارامتری از دیفئومورفیسمهای

گردایهٔ منحصر بفرد $\{\varphi_t\}$ معرفی شده در قضیهٔ ۶.۲.۵، یا دقیق‌تر، نگاشت $t \mapsto \varphi_t$ از $\mathbb{R}$ به گروه همهٔ دیفئومورفیسم‌های M را گروه ۱−پارامتری از دیفئومورفیسمهای تولید شده توسط X می‌نامیم. در حالت قضیهٔ ۵.۲.۵ که موضعی است، به یک گروه ۱− پارامتری موضعی از دیفئومورفیسم‌های موضعی می‌رسیم. میدان برداری X را مولد بینهایت کوچک خانوادهٔ $\{\varphi_t\}$ نیز نامیده می‌شود (در این دیدگاه، میدان‌های برداری را تبدیلات بینهایت کوچک می‌نامند).

شرط (۳) در قضیهٔ ۵.۲.۵ را بر اساس عمل X_q بر توابع هموار $f : M \to \mathbb{R}$ می‌توان بیان کردو یادآور می‌شویم که

$$\frac{dc}{dt}(f) = df\frac{(c(t))}{dt} = (f \circ c)'(t)$$

بنابراین، اینکه X_q بردار مماس به منحنی $t \mapsto \varphi_t(q)$ در $t = 0$ است، درست به این معنی است که

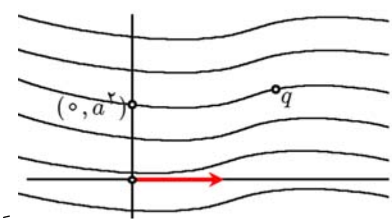
$$(Xf)(q) = X_q f = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(\varphi_h(q)) - f(q)\right)$$

این معادله بسیار کاربردی است. اولین استفادهٔ آن، در استخراج قضیه‌ای منتج از قضیهٔ ۵.۲.۵ است که امکان ساده کردن بسیاری از محاسبات در ارتباط با میدان‌های برداری را فراهم می‌سازد، و کاربردهای نظری مهمی نیز دارد.

۱.۳.۵ قضیه. گیریم X یک میدان برداری هموار است و $X(p) \neq 0$. در این صورت، دستگاهی مختصاتی (x, U) بگرد p چنان وجود دارد که $X = \partial/\partial x^1$ بر U.

اثبات: به سادگی ملاحظه می‌شود که می‌توانیم فرض کنیم $M = \mathbb{R}^n$ (با دستگاه مختصات استاندارد $((t^1, \cdots, t^n))$ و $p = 0 \in \mathbb{R}^n$. به علاوه، می‌توانیم فرض کنیم $X(0) = \partial/\partial t^1\big|_0$. ایدهٔ اثبات این است که در یک همسایگی از 0 یک منحنی انتگرال منحصر بفرد وجود دارد که از هر نقطهٔ $(0, a^2, \cdots, a^n)$ می‌گذرد؛ اگر q بر منحنی گذرنده از این نقطه قرار داشته باشد، از a^2، $\cdots$ و a^n برای $n-1$ مختص آخر q و از بازهٔ زانی نظیر به منحنی‌ای که q بر آن واقع است به عنوان اولین مختص می‌توانیم استفاده کنیم. برای این منظور فرض کنیم X خانوادهٔ $\{\varphi_t\}$ را تولید کند و نگاشت X با ضابطهٔ

$$X(a^1, \cdots, a^n) = \varphi_{a^1}(0, a^2, \cdots, a^n)$$



شکل ۶.۵

که در یک همسایگی از $0 \in \mathbb{R}$ تعریف می‌شود را در نظر بگیرید. اکنون به ازاء $a = (a^1, \cdots, a^n)$ داریم

$$\begin{aligned}
X_*\left(\frac{\partial}{\partial t^1}\right)(f) &= \frac{\partial}{\partial t^1}\Big|_a (f \circ x) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{f(x(a^1 + h, a^2, \cdots, a^n)) - f(x(a))\} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{f(\varphi_{a^1+h}(0, a^2, \cdots, a^n)) - f(x(a))\} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{f(\varphi_h(x(a) - f(x(a))\} = (Xf)(x(a))
\end{aligned}$$

به علاوه به ازاء هر $i > 1$، داریم

$$X_*\left(\frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_0\right)(f) = \frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_a (f \circ x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to\circ} \frac{1}{h}\{f(x\Big|_\circ, \cdots, h, \cdots, \circ) - f(\circ)\} \\
&= \lim_{h\to\circ} \frac{1}{h}\{f(\circ, \cdots, h, \cdots, \circ) - f(\circ)\} = \left(\frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_\circ\right)
\end{aligned}
$$

چون $X(\circ) = \partial/\partial t^1\Big|_\circ$ بنا به فرض، این نشان می‌دهد که $X_{*\circ} = I$ ناتکین است. در نتیجه، $x := X^{-1}$ را به عنوان دستگاهی مختصاتی در یک همسایگی از $\circ$ می‌توان در نظر گرفت. این همان دستگاه مختصاتی مورد نظر است، چرا که به راحتی می‌توان تحقیق نمود که معادلهٔ $X \circ X_*(\partial/\partial t^1) = X$ برقرار است، که این درست، معادل با $X = \partial/\partial x^1$ است. □

۴.۵ مشتق و براکت لی

دومین استفاده از معادلهٔ $(Xp) = \lim_{h\to\circ} \frac{1}{h}\{f(\varphi_h(p)) - f(p)\}$ ملموس‌تر است. اینکه Xf را بر حسب دیفئومورفیسم‌های φ_h کاملاً می‌توان توضیح داد، امکان تعریف عمل X بر اشیاء دیگر را به همین منوال فراهم می‌سازد. برای نمایان کردن تشابه ذاتی این مفاهیم، با این قرارداد آغاز می‌کنیم که Xf را با نماد $\mathcal{L}_X\, f$ نشان می‌دهیم. $\mathcal{L}_X\, f$ را مشتق (لی) f نسبت به X می‌نامیم؛ این تابع دیگری است که مقدار آن در p به صورت

$$(\mathcal{L}_X\, f)(p) = \mathcal{L}_X\, f(p) = (Xf)(p) = X_p(f)$$

محاسبه می‌گردد. حال اگر w یک میدان برداری کواریان هموار باشد، میدان برداری کواریان جدیدی بنام مشتق لی w نسبت به X به صورت

$$(\mathcal{L}_X\, f)(p) = \lim_{h\to\circ} \frac{1}{h}\{(\varphi_h^*\, w)(p) - w(p)\}$$

تعریف می‌کنیم. به این ترتیب، $\mathcal{L}_X\, w$ حد اعضاء مشخصی از T_h^*M است. یادآور می‌شویم که اگر $X_p \in T_pM$، آنگاه

$$(\varphi_h^* w)(p)(X_p) = w(\varphi_h(p))(\varphi_h^* X_p)$$

با استدلالی کاملاً ساده می‌توان نشان داد (مسالهٔ ۸) که همواره این حد وجود دارد، و میدان برداری کواریانی که به این ترتیب تعریف می‌شود، $\mathcal{L}_X\, w$ هموار C^∞ است. در ادامه این میدان برداری را بر حسب مختصات بطور صریح محاسبه گردد و احکام مذکور را به صورت احکام بدیهی استخراج خواهیم کرد:

اگر Y یک میدان برداری دیگر باشد، مشتق لی Y نسبت به X را به صورت

$$(\mathcal{L}_X Y)(p) = \lim_{h\to \circ} \frac{۱}{h}\{Y_p - (\varphi_{h*}Y)_p\}$$

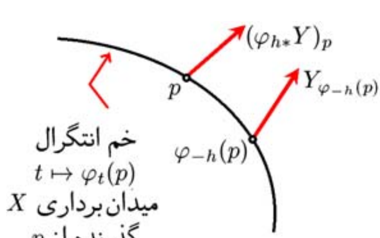
می‌توانیم تعریف کنیم. میدان برداری $\varphi_{h*}Y$ ظاهر شده در این فرمول، حالت خاصی از میدان برداری $\alpha_* Y$ است که در ابتدای این فصل برای هر دیفئومورفیسم $\alpha : M \longrightarrow N$ و هر میدان برداری Y بر M تعریف گردید. در نتیجه، $(\varphi_{h*}Y)_p = \varphi_{h*}(Y_{\varphi-h}(p))$ با تعیین مقدار Y در $\varphi_h^{-۱}(p) = \varphi_{-h}(p)$ تهیه می‌شود، که در ادامه توسط φ_{h*} به p برگشت داده شده است.

تعریف $\mathcal{L}_X Y$ را با توجه به بحث ذیل بسیار نزدیک‌تر به $\mathcal{L}_X f$ و $\mathcal{L}_X w$ می‌توان دانست. اگر $\alpha : M \longrightarrow N$ دیفئومورفیسم و Y میدان برداری بر برد N باشد، آنگاه میدان برداری $\alpha^* Y$ بر M را به صورت

$$(\alpha^* Y)_p := (\alpha^{-۱})_*(Y_{\alpha(p)})$$

می‌توانیم تعریف کنیم. البته، روشن است که $\alpha^* Y$ درست همان $(\alpha^{-۱})_* Y$ است. حال توجه کنید که

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to\circ} \frac{۱}{h}\{(\varphi_h^* Y)_p - Y_p\} &= \lim_{h\to\circ} \frac{۱}{h}\{Y_p - (\varphi_h^* Y)_p\} \\
&= \lim_{h\to\circ} \frac{۱}{k}\{Y_p - (\varphi_{-k}^* Y)_p\} \\
&= \lim_{h\to\circ} \frac{۱}{k}\{Y_p - (\varphi_{k*} Y)_p\} = (\mathcal{L}_x Y)(p)
\end{aligned}$$



شکل ۷.۵

با این حال ترجیه می‌دهیم، همواره همان تعریف اولیه را مورد توجه قرار دهیم.

اکنون $\mathcal{L}_X w$ و $\mathcal{L}_X Y$ را در یک دستگاه مختصاتی محاسبه می‌کنیم. با استفاده از گزارهٔ زیر، محاسبات بسیار ساده‌تر خواهد شد.

۱.۴.۵ گزاره. اگر به ازاء $i = ۱,۲$ اشیاء $\mathcal{L}_X Y_i$ و $\mathcal{L}_X w_i$ وجود داشته باشند، در این صورت

$$۱) \quad \mathcal{L}_X(Y_۱ + Y_۲) = \mathcal{L}_X Y_۱ + \mathcal{L}_X Y_۲$$
$$۲) \quad \mathcal{L}_X(w_۱ + w_۲) = \mathcal{L}_X w_۱ + \mathcal{L}_X w_۲$$

اگر $\mathcal{L}_X Y$ و $\mathcal{L}_X w$ موجود باشند، در این صورت

$$۳) \quad \mathcal{L}_X(fY) = Xf.Y + f.\mathcal{L}_X Y$$
$$۴) \quad \mathcal{L}_X(fw) = Xf.w + f.\mathcal{L}_X w$$

بالاخره، اگر $w(Y)$ نمایشگر تابع $p \mapsto w(p)(Y_p)$ بوده و $\mathcal{L}_X w$ و $\mathcal{L}_X Y$ موجود باشند، آنگاه

$$۵) \quad \mathcal{L}_X(w(Y) = (\mathcal{L}_X w)(Y) + w(\mathcal{L}_X Y)$$

اثبات: (۱) و (۲) بدیی هستند. سایر معادلات را شبیه روشی که برای یافتن $(fg)'(x)$ انجام دادیم، بدست می آوریم. در اینجا تنها (۳) را ثابت می‌کنیم و سایر موارد به عنوان تمرین بر عهدهٔ شما.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X fY)_p &= \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}\{(fY)_p - (\varphi_{h*} fY)_P\} \\
&= \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}\{f(p)Y_p - f(\varphi_{-h}(p))\varphi^{(}_{h*} fY)\varphi_{-h}(p)\} \\
&= \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}\{f(p)Y_p - f(\varphi_{-h})\varphi_{h*}(fY)\varphi_{-h}(p)\} \\
&= \lim_{h\to ۰} f(p)\frac{۱}{h}\{Y_p - \varphi_{h*} Y_{\varphi-h}(p)\} \\
&\qquad + \lim_{h\to ۰} [\frac{۱}{k}\{f(p) - f(\varphi_{-h}(p))\}]\varphi_{h*} Y_{\varphi-h(p)}
\end{aligned}$$

روشن است که حد اول با $f(p).\mathcal{L}_X Y(p)$ برابر می‌باشد. در مورد حد دوم نیز، حد داخل کروشه برابر

$$\lim_{k\to ۰} \frac{-۱}{k}(f(p) - f(\varphi_k(p))) = Xf(p)$$

است و همچنین، ملاحظه می‌گردد که $\lim_{h\to ۰} \varphi_{h*} Y_{\varphi-h(p)} = Y_p$ و برهان تمام است. □

اکنون آماده‌ایم تا $\mathcal{L}_X$ را بر حسب دستگاهی مختصاتی (x, U) بر M محاسبه کنیم.
فرض کنیم $X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. ابتدا $\mathcal{L}_X(dx^i)$ را محاسبه می‌کنیم. یادآور می‌شویم (از مسالهٔ ۴–۱) که اگر $f : M \longrightarrow N$ و y دستگاه مختصاتی بر N باشد، در این صورت

$$f^*(dy^i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j} dx^j$$

این را بر φ_h^* می‌توانیم اعمال کنیم و y را x بگیریم. در این صورت

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(dx^i)(p) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{(\varphi_h^*)dx^i(p) - dx^i(p)\}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}(p)\, dx^j(p) - dx^i(p)\}\end{aligned}$$

به این ترتیب، ضریب $dx^j(p)$ عبارتست از

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\partial(x^i\circ\varphi_h)}{\partial x^j} - \delta^i_j\right] &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\partial(x^i\circ\varphi_h)}{\partial x^j}(p) - \frac{\partial(x^i\circ\varphi_0)}{\partial x^j}(p)\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[(x^i\circ\varphi_h) - (x^i\circ\varphi_0)] \qquad (۳.۵)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p X(x^i) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p)\end{aligned}$$

به منظور تحقیق رابطهٔ (۳.۵) توجه شود که $A(h, q) = x^i(\varphi_h(q))$ نگاشتی هموار از $M \times \mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است؛ پس $\partial^2 A/\partial h\partial x^j = \partial^2 A/\partial x^j \partial h$، که این همان (۳.۵) است که در آن جای حد و مشتق عوض شد. نتیجه اینکه

$$\mathcal{L}_X\, dx^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a^i}{\partial x^j} dx^j$$

اکنون از قسمت‌های (۲) و (۴) از گزارهٔ ۸ برای محاسبهٔ فرم کلی $\mathcal{L}_X w$ استفاده می‌کنیم، اما در حقیقت متوجه محاسبهٔ $\mathcal{L}_X Y$ می‌باشیم. برای محاسبهٔ $\mathcal{L}_X(\partial/\partial x^i)$ از محاسبات در ارتباط با $\mathcal{L}_X dx^i$ می‌توانیم بهره ببریم؛ اما چون φ_{h*} در ارتباط با میدان‌های برداری دارای یک ترکیب بیشتر از φ_h^* در ارتباط با میدان‌های بردارای کواریان است که همین امر مشکلاتی را بوجود می‌آورد. تکنیکی که در این وضعیت به کار می‌آید، قبلاً در مورد اثبات (۳) و (۴) و (۵) از گزارهٔ ۱.۴.۵ استفاده شده است. پاسخ مساله را به راحتی با استفاده از قسمت (۵) گزارهٔ ۱.۴.۵ می‌توان بدست آورد:

$$0 = \mathcal{L}_X \delta^i_j = \mathcal{L}_X\left[dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j})\right] = (\mathcal{L}_X dx^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + dx^i\left(\mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

بنابراین

$$dx^i\left(\mathcal{L}_X\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=-\frac{\partial a^i}{\partial x^j}$$

و لذا

$$\mathcal{L}_X\frac{\partial}{\partial x^j}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

حال، با استفاده از (۳) داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\left(b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)&=\mathcal{L}_Xb^j.\frac{\partial}{\partial x^j}+b^j\mathcal{L}_X\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^j}-\sum_{i=1}^{n}b^j\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^j}\end{aligned}$$

با جمع بستن روی j و سپس تعویض i و j در مجموع دوگانهٔ حاصل، نتیجه می‌گیریم که:

۲.۴.۵ نتیجه. اگر $X=\sum_{i=1}^{n}a^i\partial/\partial x^i$ و $Y=\sum_{i=1}^{n}b^i\partial/\partial x^i$، در این صورت

$$\mathcal{L}_XY=\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}-b^i\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right\}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

این فرمول به ظاهر پیچیده را اگر به شکل مختصات آزاد مطرح کنیم، به بیان ساده‌ای برای $\mathcal{L}_XY$ خواهیم رسید. اگر $f:M\longrightarrow N$ تابعی هموار باشد، آنگاه Yf تابع است، و لذا $XYf=X(Yf)$ نیز با معنی است. روشن است که

$$X(Yf)=\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{i=1}^{n}b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum_{i,j}a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}+a^ib^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}$$

چنانچه عبارت $X(Yf)-Y(Xf)$ را تشکیل دهیم، جملات شامل مشتقات مرتبه دوم در $X(Yf)$ توسط جملات مشابه در $Y(Xf)$ حذف می‌شوند، و نتیجه می‌گیریم که

$$\mathcal{L}_XY=XY-YX$$

عبارت $XY-YX$ را با نماد $[X,Y]$ نشان داده و براکت X و Y می‌نامیم؛ توجه شود که

$$[X,Y]_p:=X_p(Yf)-Y_p(Xf)$$

با محاسبات کاملاً مستقیم نشان داد که

$$[X,Y]_p(fg) = f(p)[X,Y]_p(g) + g(p)[X,Y]_p(f)$$

بنابراین $[X,Y]_p$ مشتقی در p است و لذا عضوی از T_pM می‌باشد.

اکنون به یک وضع پیچیده‌ای رسیده‌ایم. میدان‌های برداری $\mathcal{L}_xY$ و $[X,Y]$ به صورت مستقل از انتخاب دستگاه مختصات تعریف شدند، ولی تنها به یک دستگاه خاص ثابت شد که آنها برابرند! این نوع استدلال از دید خیلی‌ها کامل است، اما در اصل چنین نیست. متأسفانه، اثبات خالی از مختصات دشوار و غیر ملموس است.

در فصل ۳ لمی را اثبات کردیم که در حالت خاص $\mathbb{R}$ می‌گوید هر تابع هموار $f : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ با $f(\circ) = \circ$ را به شکل $f(t) = tg(t)$ می‌توان نوشت، که $g : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار با $g(\circ) = f'(\circ)$ است. در حقیقت

$$g(t) = \int_\circ^1 f'(s\,t)ds$$

این حکم را به شکل زیر می‌توان تعمیم داد:

۳.۴.۵ لم. اگر $f : (-\epsilon,\epsilon)\times M \longrightarrow \mathbb{R}$ هموار بوده و به ازاء هر $p \in M$ ای $f(\circ,p) = \circ$، آنگاه تابعی هموار $g : (-\epsilon,\epsilon)\times M \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان یافت می‌شود که

$$f(t,p) = t\,g(t,p) \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(\circ,p) = g(\circ,p)$$

اثبات: کافی است تعریف شود $g(t,p) = \int_\circ^1 \frac{\partial}{\partial s} f(st,p)ds$. □

۴.۴.۵ قضیه. اگر X و Y میدان برداری هموار باشند، در این صورت $\mathcal{L}_XY = [X,Y]$.

اثبات: گیریم $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ هموار است. گیریم X خانوادهٔ $\{\varphi_t : |t| < \epsilon\}$ را تولید می‌کند. بنا به لم ۳.۴.۵ خانواده‌ای از توابع هموار g_t بر M چنان وجود دارد که

$$f\circ\varphi_t = f + t\,g_t \qquad , \qquad g_\circ = Xf$$

بنابراین، داریم

$$(\varphi_{h*}Y)_p(f) = \varphi_{h*}(Y_{\varphi-h}(p))(f) = Y_{\varphi_{-h(p)}}(f\circ\varphi_h) = Y_{\varphi_{-h}(p)}(f + hg_h)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{Y_p-(\varphi_{h*}Y)_p\}(f) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{(Yf)(p)-(Yf)(\varphi_{-h}(p))\}\\ &\quad -\lim_{h\to 0}(Yg_h)(\varphi_{-h}(p))\\ &= (\mathcal{L}_XY)(p)-(Yg_0)(p)\\ &= X_p(Yf)-Y_p(Xf)\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

تساوی $\mathcal{L}_XY=XY-YX$ احکام خاصی در رابطهٔ $\mathcal{L}_XY$ نتیجه می‌دهد، که از روی تعریف اولیهٔ آن به هیچ عنوان بدیهی نیست. به وضوح $[X,Y]=-[Y,X]$ و لذا $[X,Y]=0$. نتیجتاً

$$\mathcal{L}_XX=0 \qquad , \qquad \mathcal{L}_XY=-\mathcal{L}_XX$$

چون به وضوح $\mathcal{L}_X[aY_1+bY_2]=a\mathcal{L}_XY_1+b\mathcal{L}_XY_2$، نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{L}$ نسبت به Y خطی است. به علاوه، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\mathcal{L}$ نسبت به X نیز خطی است:

$$\mathcal{L}_{aX_1+bX_2}Y=a\mathcal{L}_{X_1}Y+b\mathcal{L}_{X_2}Y$$

بالاخره، با محاسبهٔ مستقیم می‌توان اتحاد ژاکوبی را اثبات کرد:

$$[X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y[Z,X]]=0$$

این معادله را بر اساس مشتق لی به دو صورت می‌توان توجیه کرد:

(الف) $\mathcal{L}_X[Y,Z]=[\mathcal{L}_XY,Z]+[Y,\mathcal{L}_XZ]$.

(ب) به عنوان عملگرهای بر توابع هموار، داریم $\mathcal{L}_{[X,Y]}=\mathcal{L}_X\circ\mathcal{L}_Y-\mathcal{L}_Y\circ\mathcal{L}_X$. یا به بیانی داریم

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}=[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]$$

سرانجام لازم است گفته شود که $\mathcal{L}_Y$ نسبت به ثابت‌ها خطی است، نه نسبت به توابع هموار $\mathcal{F}$. در واقع، بنا به گزارهٔ ۸ و یا حتی محاسبات ساده‌تر که مبتنی بر تعریف $[X,Y]$ است، می‌توان نشان داد که

$$[fX,gY]=fg[X,Y]-f(Xg)Y+g(Yf)X$$

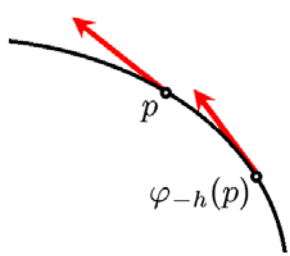
بنابراین، $[X, Y]$ تانسور نیست—یعنی $[X, Y]_p$ نه تنها به X_p و Y_p بستگی دارد، بلکه به میدان‌های برداری X و Y بستگی دارد! (حتی، جالب اینکه می‌توان بجای X و Y از ترکیبی خطی از آنها نیز استفاده کرد.) بویژه، حتی اگر $X_p = 0$،هیچ دلیلی برای نتیجه‌گیری $[X, Y]_p = 0$ وجود ندارد. چرا که، در عبارت

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

جملهٔ اول $X_p(Yf)$ صفر است، ولی جملهٔ دوم ممکن است صفر نباشد، زیرا در آن مشتق Xf در راستای Y_p محاسبه می‌شود. حتی اگر $(Xf)(p) = 0$ باز هم ممکن است جملهٔ دوم صفر نباشد.

براکت $[X, Y]$ با اینکه تانسور نیست، در تعریف بسیاری از تانسورهای خاص، به دلایلی که رفته رفته روشنتر خواهد شد، بکار می‌رود. بیش از آنکه به بیان تعبیر هندی براکت بپردازیم، به اثبات دو حکم در ارتباط با $\mathcal{L}_X Y$ به شکل مستقیم می‌پردازیم. البته این دو حکم با استفاده از تعریف $[X, Y]$ بدیهی‌اند.

۵.۴.۵ لم. به ازاء هر میدان برداری X داریم $\mathcal{L}_X X = 0$.



شکل ۸.۵

اثبات: اگر X خانوادهٔ $\{\varphi_t\}$ را تولید کند، کافی است نشان دهیم که به ازاء هر h ای $X_p = (\varphi_{h*}X)_p$ یادآور می‌شویم که $(\varphi_{h*}X)_p = \varphi_{h*}X_{\varphi_{-h}(p)}$. اکنون $X_{\varphi_{-h}(p)}$ دقیقاً عبارت است از بردار مماس به منحنی $t \mapsto \varphi_t(p)$ در نقطهٔ $t = -h$، و لذا برابر مماس به منحنی $?(t) := \varphi_{t-h}(p)$ در لحظهٔ $t = 0$ است. بنابراین $\varphi_{h*}X_{\varphi_{-h}(p)}$ بردار مماس به منحنی $\varphi_h \circ ?(t) = \varphi_h(\varphi_{t-h}(p)) = \varphi_t(p)$ در $t = 0$ می‌باشد. اما این درست همان بردار مماس X_p است. □

۶.۴.۵ لم. اگر X_p و Y_p صفر باشند، در این صورت $\mathcal{L}_X Y(p) = 0$.

اثبات: چون $X_p = 0$، منحنی انتگرال منحصر بفرد C ای وجود دارد که $C(0) = p$ و $dc/dt = X(C(t))$. روشن است که این منحنی $C(t) = p$ است (منحنی انتگرالی که از p آغاز می‌شود و هیچ‌گاه p را ترک نمی‌کند؛ بالعکس، اگر منحنی انتگرالی از نقطه‌ای بجز p آغاز شود، آنگاه هیچ‌گاه به p نخواهد رسید.) بنابراین چون $Y_p = 0$ داریم

$$(\varphi_{h*}Y)_p = \varphi_{h*}Y_{\varphi_{-h}(p)} = \varphi_{h*}Y_p = \varphi_{h*}(0) = 0$$

و بنابراین $\mathcal{L}_X Y(p) = 0$. □

برای اینکه تعبیری از $[X,Y]$ ارائه کنیم، به لم‌های زیر نیاز است.

۷.۴.۵ لم. گیریم $\alpha : M \longrightarrow M$ دیفئومورفیسم و X میدانی برداری بر M است که $\{\varphi_t\}$ را تولید می‌کند. در این صورت $\alpha_* X$ نیز $\{\alpha \circ \varphi_t \circ \alpha^{-1}\}$ را تولید می‌کند.

اثبات:

$$\begin{aligned}
(\alpha_* X)_q(f) &= [\alpha_* X_{\alpha^{-1}(q)}](f) = X_{\alpha^{-1}(q)}(f \circ \alpha) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{(f\circ\alpha)(\varphi_h(\alpha^{-1}(q))) - (f\circ\alpha)(\alpha^{-1}(q))\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{f(\alpha\circ\varphi_h\circ\alpha^{-1}(q)) - f(q)\}
\end{aligned}$$

. □

۸.۴.۵ نتیجه. اگر $\alpha : M \longrightarrow M$، آنگاه وقتی و تنها وقتی $\alpha_* X = X$ که به ازاء هر t ای $\varphi_t \circ \alpha = \alpha \circ \varphi_t$.

۹.۴.۵ لم. گیریم X و Y به ترتیب $\{\varphi_t\}$ و $\{\psi_t\}$ را تولید کنند. در این صورت، وقتی و تنها وقتی $[X,Y] = 0$ که به ازاء هر t و s ای $\psi_s \circ \varphi_t = \circ\psi_s$.

اثبات: اگر به ازاء هر s ای $\varphi_t\psi_s = \psi_s\varphi_t$، آنگاه بنا به نتیجهٔ ۸.۴.۵ داریم $\varphi_{t*}Y = Y$. اگر این مطلب برای همهٔ t ها درست باشد، آنگاه به وضوح $\mathcal{L}_X Y = 0$.
بالعکس، فرض کنیم $[X,Y] = 0$، در نتیجه به ازاء هر q ای

$$0 = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{Y_q - (\varphi_{h*}T = Y)_q\} \tag{۴.۵}$$

به ازاء هر $p \in M$ مفروض، منحنی $c : (-\epsilon, \epsilon) \to T_pM$ را به صورت $c(t) := (\varphi_{t*}Y)_p$ تعریف می‌کنیم. در مورد مشتق $c'(t)$ این نگاشت بتوی فضای برداری T_pM

داریم

$$\begin{aligned} c'(t) &= \lim_{h\to } \frac{۱}{h}\{c(t+h)-c(t)\} \\ &= \lim_{h\to } \frac{۱}{h}\{(\varphi_{(t+h)*}Y)_p-(\varphi_{t*}Y)_p\} \\ &= \lim_{h\to } \frac{۱}{h}\{\varphi_{t*}(\varphi_{h*}Y)_{\varphi_t(p)}-\varphi_{t*}Y_{\varphi-t}(p)\} \\ &= \varphi_{t*}\{\lim_{h\to } \frac{۱}{h}[(\varphi_{h*}Y)_{\varphi-t(p)}-Y_{\varphi-t}(p)]\} \\ &\overset{(۱)}{=} \varphi_{t*}(۰)=۰ \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (1) از (۴.۵) با $q=\varphi_{-t}(p)$ استفاده کرده‌ایم. نتیجتاً $c(t)=c(۰)$ و لذا $\varphi_{t*}Y=Y$. پس بنا به نتیجهٔ ۸.۴.۵، به ازاء هر t و s ای داریم $\varphi_t\psi_s=\psi_s\varphi_t$. □

کمی قبل نشان دادیم که اگر $X(p)\neq ۰$، آنگاه دستگاه مختصاتی‌ای وجود دارد که نسبت به آن می‌توان نوشت: $X=\partial/\partial x^۱$. اگر Y میدان برداری دیگری باشد، که در همه جا نسبت به X مستقل خطی است، در این صورت، ممکن است دستگاه مختصاتی‌ای x بتوان یافت که

$$X=\partial/\partial x^۱ \qquad , \qquad Y=\partial/\partial x^۲$$

اما، در این صورت، با محاسبه‌ای ساده می‌توان نتیجه گرفت که $[\partial/\partial x^۱,\partial/\partial x^۲]=۰$ و لذا انتظار وجود یک دستگاه x که برای آن (۵.۵) برقرار باشد، تنها وقتی برآورده می‌شود که $[X,Y]=۰$. حکم قابل توجه این است که شرط $[X,Y]=۰$ نه تنها لازم است، بلکه کافی نیز هست.

۱۰.۴.۵ قضیه. اگر $X_۱$، $\cdots$ و X_k میدان‌های برداری‌ای باشند در یک همسایگی از p مستقل خطی‌اند و نیز اگر به ازاء هر $۱\leq\alpha,\beta\leq k$ داشته باشیم $[X_\alpha,X_\beta]=۰$، آنگاه دستگاهی مختصاتی (x,U) به گرد p چنان یافت می‌شود که به ازاء هر $\alpha=۱,\cdots,k$ ای بر U داریم $X_\alpha=\partial/\partial x^\alpha$.

اثبات: همچون در اثبات قضیهٔ ۱.۳.۵ می‌توانیم فرض کنیم که $M=\mathbb{R}^n$ و $p=۰$ و با احتمالاً یک تغییر مختصات خطی می‌توانیم فرض کنیم که به ازاء هر $\alpha=۱,\cdots,k$ ای $X_\alpha(۰)=\partial/\partial t^\alpha\Big|_۰$. اگر هر X_α ای $\{\varphi_t^\alpha\}$ را تولید کند، نگاشت X را به صورت

$$X(a^۱,\cdots,a^n)=\varphi^۱_{a^۱}(\varphi^۲_{a^۲}(\cdots(\varphi^k_{a^k}(۰,\cdots,۰,a^{k+۱},\cdots,a^n))\cdots))$$

تعریف می‌کنیم. مانند اثبات قضیه ۱.۳.۵، می‌توانیم محاسبه کنیم و نتیجه بگیریم که

$$X_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right|_\circ\right)=\begin{cases} X_\alpha(\circ)=\left.\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right|_\circ & \alpha=1,\cdots,k\\ \left.\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right|_\circ & \alpha=k+1,\cdots,n\end{cases}$$

بنابراین $x=\mathcal{X}^{-1}$ را به عنوان دستگاهی مختصاتی در یک همسایگی از $p=\circ$ می‌توان در نظر گرفت. به علاوه، درست مثل قبل ملاحظه می‌گردد که $X_1=\partial/\partial x^1$. اکنون وقت آن رسیده که از مفروضات $[X_\alpha,X_\beta]=\circ$ استفاده کنیم. برای این منظور، لم ۹.۴.۵ را به میان می‌آوریم؛ نظر به این لم، به ازاء هر $1\le\alpha\le k$ نگاشت $\mathcal{X}$ را به صورت

$$X(a^1,\cdots,a^n)=\varphi^\alpha_{a^\alpha}(\varphi^1_{a^1}(\cdots(\cdots(\circ,\cdots,\circ,a^{k+1},\cdots,a^n)\cdots))$$

نیز می‌شود نعریف کرد، و استدلال قبل نشان می‌دهد که $X_\alpha=\partial/\partial x^\alpha$. □

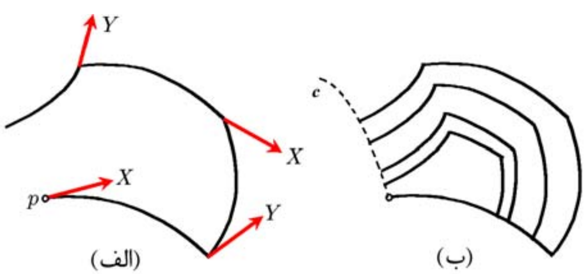
پس، ملاحظه می‌کنیم که $[X,Y]$ به تعبیری، میزان امکان استفاده از منحنی‌های انتگرال X و Y به عنوان خطوط مختصاتی یک دستگاه مختصات را تعیین می‌کند. حکمی که اثبات آن دشوارتر ولی اهمیتش کمتر است، وجود دارد که این موضوع را دقیق‌تر توضیح می‌دهد. اگر X و Y میدان‌های برداری‌ای در یک همسایگی از p باشند، آنگاه به ازاء h های باندازهٔ کافی کوچک می‌توانیم

۱) در امتداد منحنی انتگرال X گذرنده از p باندازهٔ h واحد زمانی حرکت کنیم؛

۲) با شروع از این موقعیت، در امتداد منحنی انتگرال Y باندازهٔ h واحد زمانی حرکت کنیم؛

۳) پس، در امتداد منحنی انتگرال X باندازهٔ h واحد زمانی به عقب برگردیم؛

۴) پس، در امتداد منحنی Y باندازهٔ h واحد زمانی به عقب برگردیم.



شکل ۹.۵

اگر در یک همسایگی از p رابطهٔ $[X,Y]=0$ برقرار باشد، x دستگاهی مختصاتی با $x(p)=0$ باشد و نیز

$$X=\partial/\partial x^1 \qquad , \qquad Y=\partial/\partial x^2$$

در این صورت، در هر یک از چهار مرحلهٔ بالا، نقطهٔ انتهایی چنین است:

۱) $(h,0,0,\cdots,0)$ ۳) $(0,h,0,\cdots,0)$
۲) $(h,h,0,\cdots,0)$ ۴) $(0,0,0,\cdots,0)$

لذا، در این حالت همواره متواضی الاضلاع مذکور بسته است! حتی اگر $[X,Y]\neq 0$ این متوازی الاضلاع بستهٔ از مرتبهٔ یک است. به این معنی که (دو منحنی δ و c را در صورتی برابر از مرتبهٔ اول در نقطهٔ 0 گوئیم که $c(0)=\delta(0)$ و $c'(0)=\delta'(0)$). گیریم $c(h)$ نقطهٔ در انتها مرحلهٔ (۴) باشد.

در این صورت $c(h)=\psi_{-h}(\varphi_{-h}(\psi_{-h}(\varphi_h(0))))$ با منحنی ثابت p برابر از مرتبهٔ یک است. یعنی

۱۱.۴.۵ گزاره. $c'(0)=0$.

اثبات: چنانچه تعریف کنیم

$$\begin{aligned}\alpha_1(t,h) &= \psi_t(\varphi_h(p))\\ \alpha_2(t,h) &= \varphi_{-t})(\psi_h(\varphi_h(p)))\\ \alpha_3(t,h) &= \psi_{-t}(\varphi_{-h}(\psi_h(\varphi_h(p))))\end{aligned}$$

در این صورت $c(t)=\alpha_3(t,t)$. به علاوه

$$a)\quad \alpha_2(0,t)=\alpha_1(t,t)$$

$$b)\quad \alpha_3(0,t)=\alpha_2(t,t)$$

و به ازاء هر تابع عموار $f:M\to\mathbb{R}$ ای

$$c)\quad \partial(f\circ\alpha_1)/\partial t=Yf\circ\alpha_1$$

$$d)\quad \partial(f\circ\alpha_2)/\partial t=Yf\circ\alpha_2$$

$$e)\quad \partial(f\circ\alpha_3)/\partial t=Yf\circ\alpha_3$$

و حال آنکه

$$f)\quad \partial(f\circ\alpha_1)/\partial h(h) = Xf(\alpha_1(0,h))$$

نتیجتاً، با استفاده مکرر از قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق، داریم

$$\begin{aligned}(f\circ c)'(0) &= D_1(f\circ\alpha_3)(0,0)+D_2(f\circ\alpha_3)(0,0)\\ &\overset{(b)}{=} D_1(f\circ\alpha_3)(0,0)+\{D_1(f\circ\alpha_2)(0,0)\\ &\qquad +D_2(f\circ\alpha_2)(0,0)\}\\ &\overset{(a)}{=} D_1(f\circ\alpha_3)(0,0)=D_1(f\circ\alpha_2)(0,0)\\ &\qquad +\{D_1(f\circ\alpha_1)(0,0)+D_2(f\circ\alpha_1)(0,0)\}\end{aligned}$$

اکنون، از (c)، (d)، (e) و (f) نتیجه می‌گیریم که

$$(f\circ c)'(0) = -Yf(p)-Xf(p)+Xf(p)=0$$

. □

هرگاه یک منحنی $c:(-\epsilon,\epsilon)\to M$ با $c(0)=p$ و $c'(0)=0\in T_pM$ باشد، بردار جدیدی $c''(0)$ یا $\left.\frac{d^2c}{dt^2}\right|_0$ به صورت

$$c''(0)(f) := (f\circ c)''(0)$$

تعریف می‌کنیم. با محاسبهٔ ساده می‌توان نشان داد که چون $c'(0)=0$، بنابراین عملگر $c''(0)$ مشروح در بالا یک مشتق است، و بنابراین $c''(0)\in T_pM$. (در مسالهٔ ۱۷ ساختی کلی‌تر مطرح می‌شود.) ثابت می‌شود که منحنی c تعریف شده در قبل، براکت $[X,Y]_p$ با مشتق مرتبهٔ دوم ارتباط دارد. تا هنگامی که گروه لی مطرح نشده، ممکن است قضیهٔ بعدی کمی بی‌مورد به نظر بیاید. اثبات آن که عملاً انتهای فصل است را می‌توان حذف کرد، اما محاسبات هوشمندانه‌ای در آن وجود دارد. ضمیمهٔ این فصل شامل احکام به خصوصی در ارتباط با معادلات دیفرانسیل است که بعداً مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۱۲.۴.۵ قضیه. $c''(0)=2[X,X]_p$.

اثبات: با استفاده از نمادگذاری‌های قبلی، چون $(f\circ c)(t)=(f\circ\alpha_3)(t,t)$ داریم

$$\begin{aligned}(f\circ c)'' &= D_{1,1}(f\circ\alpha_3)(0,0)+2D_{2,1}(f\circ\alpha_3)(0,0)\\ &\qquad +D_{2,2}(f\circ\alpha_3)(0,0)\qquad (*)\end{aligned}$$

در این صورت

$$D_{1,1}(f\circ\alpha_3)(0,0)\overset{(e)}{=}D_1(-Yf\circ\alpha_3)(0,0)\overset{(e)}{=}YYf(p)\qquad(1)$$

همچنین، ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned}
2D_{2,1}(f\circ\alpha_3)(0,0) &\overset{(e)}{=} 2D_1(-Yf\circ\alpha_3) \qquad (2)\\
&\underset{c.r.}{\overset{(b)}{=}} 2\{D_1(Yf\circ\alpha_2)(0,0)+D_2(Yf\circ\alpha_1)(0,0)\}\\
&\overset{(d)}{=} 2XYf(p)-2D_2(Yf\circ\alpha_2)(0,0)\\
&\underset{c.r.}{\overset{(a)}{=}} 2XYf(p)-2\{D_1(Yf\circ\alpha_1)(0,0)\\
&\qquad +D_2(Yf\circ\alpha_1)(0,0)\}\\
&\underset{(f)}{\overset{(c)}{=}} -2XYf(p)-2XYf(p)
\end{aligned}$$

که $c.r$ مخفف قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق است. با استفاده از (b) داریم

$$\begin{aligned}
D_2(f\circ\alpha_3)(0,0) &= D_{1,1}(f\circ\alpha_2)+2D_{2,1}(f\circ\alpha_2)(0,0)\\
&\qquad +D_{2,2}(f\circ\alpha_2)(0,0)\\
&\overset{(d)}{=} D_1(-Xf\circ\alpha_2)(0,0)+2D_2(-Xf\circ\alpha_2)(0,0)\\
&\qquad +D_{2,2}(f\circ\alpha_2)(0,0)\\
&\underset{c.r.}{\overset{(d)}{=}} XXf(p)-2\{D_1(Xf\circ\alpha_1)(0,0)\\
&\qquad +D_2(Xf\circ\alpha_1)(0,0)\}+D_{2,2}(f\circ\alpha_2)(0,0)\\
&\underset{(f)}{\overset{(c)}{=}} XXf(p)-2YXf(p)-2XXf(p)\\
&\qquad +D_{2,2}(f\circ\alpha_2)(0,0)
\end{aligned}$$

سرانجام، با توجه به (a) داریم

$$D_{2,2}(f\circ\alpha_2)(0,s)=D_1(f\circ\alpha_1)(s,s)+D_2(f\circ\alpha_2)(s,s)$$

و لذا

$$\begin{aligned}
D_{2,2}(f\circ\alpha_2)(0,0) &= D_{1,1}(f\circ\alpha_1)(0,0)+2D_{2,1}(f\circ\alpha_1)(0,0)\\
&\qquad +D_{2,2}(f\circ\alpha_1)(0,0)\\
&\underset{(f)}{\overset{(c)}{=}} YYf(p)+2XYf(p)+XXf(p) \qquad (4)
\end{aligned}$$

با جاگذاری (۱) تا (۴) در $(*)$ قضیه نتیجه می‌گردد. $\square$

۵.۵ ضمیمه. معادلات دیفرانسیل

با اینکه در اغلب موارد معادلات دیفرانسیل به شکل

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t,x)=f(\alpha(t,x))$$

با شرط آغازی $\alpha(\circ,x)$ را حل می‌کنیم، در برخی موارد لازم می‌آید که به ازاء $t_\circ$ ای داشته باشیم

$$\alpha(t_\circ,x)=x$$

برای اثبات این می‌توان در همه جا $\circ$ را با $t_\circ$ در اثبات قضیهٔ ۲.۲.۵ عوض کرد، و یا اینکه به جای α از نگاشت $t\mapsto\alpha(t-t_\circ,x)$ استفاده نمود.
مطلب دیگری که در ارتباط با معادلات دیفرانسیل لازم به ذکر است، چنین می‌باشد: معادلهٔ سادهٔ $\alpha'(t)=g(t)$ در بین معادلات دیفرانسیل $\alpha'(t)=f(\alpha(t))$ نیست. حتی $\alpha'(t)t\alpha(t)$ نیز جزو این معادلات نیست. در حالت کلی مایلیم معادلات به شکل

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\alpha}(t,x)=f(t,\alpha(t,x))\qquad \alpha(\circ,x)=x$$

را حل کنیم، که $f:(-c,c)\times U\to\mathbb{R}^n$. برای انجام اینکار، کافی است در سراسر برهان هر جا $f(\alpha(t,x))$ است، از $f(t,\alpha(t,x))$ استفاده کنیم. روش هوشمندانه‌ای نیز در این مورد وجود دارد. تعریف می‌کنیم:

$$\bar{f}:(-c,c)\times U\to\mathbb{R}^{n+1}\qquad \bar{f}(s,x)=(1,f(s,x))$$

در این صورت، شاری $\bar{\alpha}=(\alpha^{-1},\alpha^{-2})$ به شکل $(-b,b)\times W\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ با

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\alpha}(t,s,x)=\bar{f}(\bar{\alpha}(t,s,x))\qquad \bar{\alpha}(\circ,s,x)=(s,x)$$

وجود دارد. در مورد اولین تابع مولفه‌ای $\bar{\alpha}^1$، این بدان معنی است که

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\alpha}^1(t,s,x)=1\qquad \bar{\alpha}^1(\circ,s,x)=s$$

در نتیجه $\bar{\alpha}^1(t,s,x)=s+t$. در مورد دومین تابع مولفه‌ای $\bar{\alpha}^2$ داریم

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\alpha}^2(t,s,x)=f(\bar{\alpha}(t,s,x))=f(\bar{\alpha}(t,s,x))=f(s+t,\bar{\alpha}^2(t,s,x))$$

در این صورت، $\beta(t,x)=\bar{\alpha}^{2}(t,0,x)$ شار مورد نظر با شرایط زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta(t,x)=f(t,\beta(t,x)) \qquad \beta(0,x)=x$$

البته، می‌توانستیم فرض کنیم $\beta(t_0,x)=x$ (و در ابتدا $\bar{\alpha}$ را به شکل $\bar{\alpha}(t_0,s,x)=(s,x)$ بگیریم، و منحنی $t\mapsto\beta(t-(t_0,x))$ را در نظر نگیریم).

سرانجام، حالت خاص معادله دیفرانسیل خطی $\bar{\alpha}^{1}(t)=g(t.\alpha(t))$ را در نظر می گیریم، که g تابعی بر (a,b) با مقادیر ماتریس $n\times n$ است. در این حالت $f(t,x)=g(t).x$. اگر c یک ماتریس $n\times n$ (ثابت) دلخواه باشد، در این صورت

$$(c.\alpha)'(t)=c.\alpha'(t)=g(t).c.\alpha(t)$$

و لذا $c.\alpha$ نیز جوابی از همین معادله دیفرانسیل است. این نکته، مطلب مهمی در مورد معادلات دیفرانسیل خطی را به ثبوت می‌رساند، که وجه تمییز آن از سایر انواع معادلات دیفرانسیل می‌باشد، $\alpha'(t)=f(t,\alpha(t))$، و آن اینکه ممکن است جواب‌ها تنها در بازهٔ کوچکی از زمان تعریف شوند، حتی اگر $f:(a,b)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ هموار باشد.

۱.۵.۵ گزاره. اگر g تابعی با مقادیر ماتریس $n\times n$ پیوسته بر (a,b) باشد، آنگاه جواب‌های معادلهٔ $\alpha'(t)=g(t).\alpha(t)$ همگی بر کل (a,b) تعریف می‌شوند.

اثبات: توجه شود که از پیوستگی g، نتیجه می‌شود تابع $f(t,x)=g(t)-x$ لیپ شتیز باشد. پس به ازاء هر $t_0\epsilon(a,b)$ ای می‌توان معادله را با هر شرط آغازی در یک بازهٔ باز شامل t_0 حل نمود. هر کدام را تا جایی که ممکن است، گسترش می‌دهیم. اگر جواب گسترش یافته α به ازاء همهٔ t های با $t_0<t<b$ تعریف نشود، فرض می‌کنیم t_1 کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ t هایی است که α برای آنها تعریف می‌شود. فرض کنیم β طوری است که به ازاء t های نزدیک t_1، داشتیم باشیم $\beta'(t)=g(t)\beta(t)$ و $\beta(t_1)\neq 0$. در این صورت به ازاء هر $t^*<t_1$ باندازهٔ کافی نزدیک به t_1 داریم $\beta(t^*)\neq 0$. بنابراین، c ای با $(c-\beta)(t^*)=\alpha(t^*)$ وجود دارد. بنا به یکتایی جواب $c.\beta$ و α بر بازه‌ای که همزمان تعریف شوند، منطبق هستند. بنابراین α را به صورت $c.\beta$ به قسمت t_1 می‌توان گسترش داد، که تناقض است. به صورت مشابه، α می‌بایستی به ازاء همهٔ t هایی که $a<t\leq t_0$ تعریف گردد. $\square$

۶.۵ تمرینات

۱. الف) اگر $\alpha:M\to N$ هموار باشد، در این صورت $\alpha_*:TM\to TN$ هموار

است.

ب) اگر $\alpha : M \to N$ دیفئومورفیسم باشد، و X میدانی برداری هموار بر M باشد، آنگاه میدان برداری $\alpha_* X$ بر N نیز هموار است.

ج) اگر $\alpha \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $\alpha(t) = t^۳$ باشد، آنگاه میدان برداری هموار X بر $\mathbb{R}$ چنان وجود دارد که $\alpha_* X$ میدان برداری غیر هموار است.

۲. میدان برداری غیر صفری بر $\mathbb{R}$ چنان بیابید که همهٔ منحنی‌های انتگرال آن تنها بر بازه‌ای باز حول صفر تعریف شوند.

۳. مثالی از یک فضای متری کامل (M, p) و یک تابع به شکل $f : M \to M$ بیاورید که به ازاء همهٔ $x, y \in M$ ها $p(f(x), f(y)) \leq p(x, y)$، ولی f هیچ نقطه ثابتی نداشته باشد.

۴. گیریم $f : (-c, c) \times U \times V \to \mathbb{R}^n$ هموار است، که $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ بازند و نیز فرض کنید $(x_\circ, y_\circ) \in U \times V$، ثابت کنید یک همسایگی W از $(x_\circ, y_\circ)$ و عددی مثبت b چنان یافت میشود که به ازاء هر $(x, y) \in W$ ای یک $\alpha = \alpha_{(x,y)} : (-b, b) \to U$ منحصر بفرد چنان وجود دارد که به ازاء هر $t \in (-b, b)$ ای $\alpha'(t) \in V$ و همچنین

$$\alpha''(t) = f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \qquad \alpha(\circ) = x \qquad \alpha'(\circ) = y$$

به علاوه، اگر بنویسیم $\alpha_{(x,y)}(t) = \alpha(t, x, y)$، آنگاه $\alpha : (-b, b) \times W \to U$ هموار است.
راهنمایی: دستگاه معادلات $\alpha'(t) = \beta(t)$ و $\beta'(t) = f(t, \alpha(t), \beta(t))$ را در نظر بگیرید.

برخی اوقات لازم است معادلات وابسته به پارامتر را حل کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha(t, y, x) = f(t, y, \alpha(t, y, x)) \qquad \alpha(\circ, y, x) = x \qquad (*)$$

که $f : (-c, c) \times V \times U \to \mathbb{R}^n$، به ازاء مجموعه‌های باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ و $V \subseteq \mathbb{R}^m$.
هدف یافتن یک تابع $\alpha_{(y,x)} : (-b, b) \to U$ جواب به ازاء هر شرط اولیهٔ x و پارامتر y است. به عنوان مثال، معادلهٔ

$$\alpha'(t) = y\alpha(t) \qquad \alpha(\circ) = x$$

نمونه‌ای از چنین معادلات است که جواب آن $\alpha(t) = xe^{yt}$ می‌باشد.

۵. الف) نگاشت $\bar{f} : (-c, c) \times V \times U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ را به صورت $\bar{f}(t, x, y) = (\circ, f(t, y, x))$ تعریف می‌کنیم. اگر $(\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^2) = \bar{\alpha} : (-b.b) \times W \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ یک فلو برای $\bar{f}$ در همسایگی‌ای از $(y_\circ, x_\circ)$ باشد، آنگاه

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\alpha}(t, y, x) = \bar{f}(t, \bar{\alpha}(t, y, x)) \qquad \bar{\alpha}(\circ, y, x) = (y, x)$$

نشان دهید که به ازاء یک α ای می‌توانیم بنویسیم $\bar{\alpha}(t, y, x) = (y, \alpha(t, y, x))$، و سپس نتیجه بگیرید که α در $(*)$ صدق می‌کند.

ب) نشان دهید که معادلات به شکل

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t, x) = f(t, x, \alpha(t, x)) \qquad \alpha(\circ, x) = x \qquad (**)$$

را به معادلات به شکل $(*)$ می‌توان تبدیل نمود (و در تنیجه، به معادلات به شکل $\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t, x) = f(\alpha(t, x))$.) [وقتی ثابت شود که هر تابع $f : U \to \mathbb{R}^n$ از کلاس C^k داری یک شار $\alpha : (-b, b \times W \to U)$ از کلاس C^k است، قسمت دشوار اثبات این است که اگر f از کلاس C^1 باشد، آنگاه α نسبت به متغیرهای در W مشتق‌پذیر است، و اگر مشتق نسبت به این متغیرها را با نماد $D_2\alpha$ نشان دهیم، آنگاه

$$D_1 D_2\, \alpha(t, x) = D_2 f(\alpha(t, x)).D_2\alpha(t, x) \qquad (***)$$

(چون $D_1 D_2 = D_2 D_1$، اگر f از کلاس C^2 باشد، آنگاه از معادلهٔ اولیهٔ $D_1\, \alpha(t, x) = f(\alpha(t, x))$ این مطلب نتیجه می‌گردد). چون $(***)$ به ازاء هر $D_2\,\alpha$ به شکل $(**)$ برقرار است، نتیجه می‌گیریم که اگر $D_2\, f$ از کلاس C^1 باشد (یعنی f از کلاس C^2 باشد) آنگاه $D_2\,\alpha$ دیفرانسیل‌پذیر است. حال دیفرانسیل‌پذیری از کلاس C^k به صورت مشابه و به کمک استقراء ریاضی قابل استنتاج است.]

۶. الف) معلادله دیفرانیل خطی $\alpha'(t) = g(t)\alpha(t)$ را در نظر بگیرید، که $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. بنابراین، هدف یافتن تابع با مقدار حقیقی α است. نشان دهید که همهٔ جواب‌ها مضاربی از $\alpha(t) = \exp(\int g(t)dt)$ هستند، که $\int g(t)dt$ نمایشگر تابعی G است که $G'(t) = g$. (البته، با تعویض G، تابع α در عددی مثبت ضرب می‌شود.) در ادامهٔ این مسأله نشان می‌دهیم که احکام مشابهی برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی برقرار است.

ب) گیریم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ است و $|A|$ به معنی ماکزیمم همهٔ $\left|a_{ij}\right|$ ها

است. نشان دهید

$$\left|A+B\right| \leq |A| + \left|B\right| \qquad \left|AB\right| |A|.\left|B\right|$$

ج) نتیجه بگیرید که سری نامتناهی از ماتریس‌های $n \times n$ به شکل

$$\exp(A) := e^A := I + A + \frac{۱}{۲}A^{۲} + \cdots + \frac{۱}{n!}A^n + \cdots$$

همگرای مطلق است. [به این معنی که در آیهٔ (i,j) ام از مجموعه‌های جزئی به درایهٔ (i,j) ام از ماتریسی مشخص به صورت مطلق همگرا است.] و بر هر مجموعهٔ کرانداری، همگرای یک شکل است.

د) نشان دهید که $\exp(TAT^{-۱}) = T.\exp(A).T^{-۱}$.

ه) اگر $AB = BA$، آنگاه $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$.
راهنمایی: بنویسید $\sum_{p=۰}^{۲N} \frac{۱}{p!}(A+B)^p = (\sum_{p=۰}^{۲N} \frac{۱}{p!}A^p)(\sum_{p=۰}^{۲N} \frac{۱}{p!}B^p) = R_N$ و نشان دهید که اگر $N \to \infty$ آنگاه $\left|R_N\right|$.

و) ثابت کنید $(\exp A).(\exp(-A)) = I$ و لذا همواره $\exp A$ معکوس‌پذیر است.

ز) به وضوح نگاشت $\exp : \mathbb{R}^{n^{۲}} \to \mathbb{R}^{n^{۲}}$ دیفرانسیل‌پذیر (و حتی تحلیلی) است. نشان دهید

$$\exp'(۰)(B) = \exp(۰).B = B$$

(توج شود که برای نرم معمولی $|A|$ در $A \in \mathbb{R}^{n^{۲}}$ داریم $|A| \leq |A| \leq n|A|$.)

ح) با استفاده از حد توصیف شده در قسمت (ز) نشان دهید که اگر $AB = BA$ داریم $\exp'(A)(B) = \exp(A).B$.

ط) فرض کنید $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^{۲}}$ دیفرانسیل‌پذیر است و $B(t) = \exp(A(t))$. اگر $B'(t)$ ماتریسی باشد که هر درایهٔ آن مشتق درایهٔ نظیر به آن است. نشان دهید که اگر $A(t)A'(t) = A'(t)A(t)$، آنگاه

$$B'(t) = A'(t).\exp(A(t))$$

(روشن است که اگر به ازاء هر t و s ای $A(s)A(t) = A(t)A(s)$، آنگاه $AA' = A'A$).

ی) نشان دهید که اگر به ازاء هر s و t ای $g(s)g(t) = g(t)g(s)$، آنگاه $\alpha(t) = \exp(\int_\circ^t g(s)ds)$ جواب معادله دیفرانسیل خطی $\alpha'(t) = g(t).\alpha(t)$ است. (مشخص است که اگر $g(t)$ ماتریس ثابت A باشد، یعنی دستگاه با ضرایب ثابت باشد، آنگاه $g(s)g(t) = g(t)g(s)$ به ازاء هر t و s. در این حالت $\exp(\int_\circ^t g(s)ds) = \exp(tA)$ را با تبدیل A به شکل کانونی ژروان می‌توان یافت.)

۷. نشان دهید که اگر $\mathcal{X} : \mathbb{R}^n \to M$ ای به شکل $x = \mathcal{X}^{-1}$ است، در این صورت $X = \partial/\partial x^1$ با $\mathcal{X}_*(\partial/\partial t^1) = X \circ \mathcal{X}$ معادل است.

۸. الف) فرض کنید M و N منیفلد هموارند. فرض کنید به ازاء تابع $f : M\times N \to \mathbb{R}$ هموار و $q \in N$، $f(\circ, q)$ نمایشگر تابع $M \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $p \mapsto f(p,q)$ است. اگر (x, U) دستگاه مختصاتی‌ای بر M باشد، نشان دهید که تابع $\partial f/\partial x^i$ با ضابطهٔ

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p,q) := \frac{\partial(f(\circ, q))}{\partial x^i}(p)$$

بر $M \times N$ هموار است.

ب) اگر $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to M$ یک گروه ۱ − پارامتری از دیفئومورفیسم‌ها باشد، نشان دهید که به ازاء هر تابع هموار $f : M \to \mathbb{R}$، حد $\lim_{h\to\circ} \frac{1}{h}(f(\varphi_h(p)) - f(p))$ موجود است، و تابعی هموار بر M تعریف می‌کند.

ج) اگر $\varphi_* : (-\varepsilon, \varepsilon) \times TM \to TM$ به صورت $\varphi_*(t, v) = \varphi_{t*}(v)$ تعریف شود، نشان دهید φ_* هموار است، و نتیجه بگیرید که به ازاء هر میدان برداری هموار X و ۱ − فرم w بر M، حد

$$\lim_{h\to\circ} \frac{1}{h}\{(\varphi_h^* w)(X_p) - w(X_p)\}$$

موجود است و تابعی هموار بر M تعریف می‌کند.

د) با $\mathcal{L}_X Y$ به صورت مشابه عمل کنید.

۹. استدلالی برای قسمتی از گزارهٔ ۸ که در آن Y_p به $\varphi_{h*} Y_{\varphi-h}(p)$ تبدیل شده است، بیاورید.

۱۰. الف) ثابت کنید

$$\mathcal{L}_X\, fw = Xf.w + f.\mathcal{L}_X\, w$$

$$\mathcal{L}_X(w(Y)) = (\mathcal{L}w)(Y) + w(\mathcal{L}Y)$$

ب) در صورتی که $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{(\varphi_{h*}Y)_p - Y_p\}(\mathcal{L}_X Y)(p)$ گزارهٔ ۸ چه تغییری خواهد کرد؟

۱۱. الف) نشان دهید $\varphi^*(df)(Y) = Y(f\circ\varphi)$.

ب) با استفاده از الف مستقیماً از تعریف $\mathcal{L}_X$ نشان دهید که به ازاء هر $Y \in T_pM$ ای $\{\mathcal{L}_X df(p)\}(Y_p) = Y_p(\mathcal{L}_X f)$ و نتیجه بگیرید که $\mathcal{L}_X df = d(\mathcal{L}_X f)$. فرمولی که برای $\mathcal{L}_X dx^i$ در متن آمده است، حالت خاصی از این فرمول کلی است. در قسمت بعد، اثباتی ساده‌تر برای $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ مطرح می‌کنیم، که در آن از روش بکار رفته در گزارهٔ ۱۵ استفاده می‌شود.

ج) گیریم X و Y میدان برداری بر M اند و $f : M \to \mathbb{R}$ تابعی هموار است. اگر X خانوادهٔ $\{\varphi_t\}$ را تولید کند، تعریف می‌کنیم $\alpha(t,h) = Y_{\varphi_{-t}(p)}(f\circ\varphi_h)$. نشان دهید که $D_1\alpha(0,0) = -X_p(Yf)$ و $D_2\alpha(0,0) = Y_p(Xf)$. نتیجه بگیرید که به ازاء $c(h) = \alpha(h,h)$ داریم

$$-c'(0) - \mathcal{L}_X Y(p)(f) = [X,Y]_p(f)$$

۱۲. اتحاد ژاکوبی را نشان دهید.

۱۳. فرض کنید X، Y و Z بر $\mathbb{R}^3$ میدان‌های برداری

$$X = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} \qquad Y = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z} \qquad Z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

هستند.

الف) نشان دهید که نگاشت $aX + bY + cZ \mapsto (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ ایزومورفیسمی از مجموعه‌ای به خصوص از میدان‌های برداری به $\mathbb{R}^3$ است و $[U,V]$ به حاصلضرب خارجی تصاویر U و V نظیر می‌شود.

(ب) نشان دهید که شار $aX+bY+cZ$ عبارت از دوران $\mathbb{R}^3$ حول محوری گذرنده از 0 است.

۱۴. اگر $\binom{k}{\ell}$ بر N و $\varphi : M \to N$ دیفئومورفیسم باشد، φ^*A را بر M به شکل زیر تعریف می‌کنین. اگر $v_1,\cdots,v_k \in T_pM$ و $\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell \in T_p^*M$، آنگاه

$$[\varphi^*A(p)](v_1,\cdots,v)k,\lambda)1,\cdots,\lambda_\ell)$$
$$= A(\varphi(p))(\varphi_* v_1,\cdots,\varphi_* v_k,(\varphi^{-1})^*\lambda_1,\cdots,(\varphi^{-1})^*\lambda_\ell)$$

الف) نشان دهید که با یکی‌گیری میدان برداری (یا میدان برداری کواریان) با یک میدان تانسوری از نوع $\binom{0}{1}$ (یا از نوع $\binom{1}{0}$) این نگاشت، با حالت φ^*Y که قبلاً تعریف کردیم، یکی است.

ب) اگر میدان برداری X بر M خانوادهٔ $\{\varphi_t\}$ را تولید کند و A تانسوری از نوع $\binom{k}{\ell}$ بر M باشد، تعریف می‌کنیم

$$(\mathcal{L}_X A)(p) := \lim_{h\to h}\{(\varphi_h^* A)(p) - A(p)\}$$

نشان دهید

$$\mathcal{L}_X(A+B) = \mathcal{L}_X A + \mathcal{L}_X B$$
$$\mathcal{L}_X(A\otimes B) = (\mathcal{L}_X A)\otimes B + A\otimes(\mathcal{L}_X B)$$

(به خصوص $\mathcal{L}_{\S}(\{\mathcal{A})) = \mathcal{X}(\{)\mathcal{A} + \{\mathcal{L}_{\mathcal{X}_{\in}}\mathcal{A}$)).

ج) نشان دهید $\mathcal{L}_{X_1+X_2}A = \mathcal{L}_{X_1}A \neq \mathcal{L}_{X_2}A$. راهنمایی: این مطلب را قبلاً برای حالتی که A از نوع $\binom{0}{0}$ یا $\binom{0}{1}$ یا $\binom{1}{0}$ است، می‌دانیم.

د) گیریم $C:\mathcal{T}_\ell^k(V)\to\mathcal{T}_\ell^{k-1}(V)$ یک انقباض باشد:

$$\begin{aligned}&(CT)(V_1,\cdots,V_{k-1},\lambda_1,\cdots,\lambda_{\ell-1}) :=\\ &(x,\lambda)\mapsto T(v_1,\cdots,v_{\alpha-1},v,v_{\alpha+1},\cdots,v_{k-1},\lambda_1,\cdots\\ &\quad\cdots,\lambda_{\beta-1},\lambda,\lambda_{\beta+1},\cdots,\lambda_{\ell-1})\end{aligned}$$

نشان دهید که $\mathcal{L}_X CA = C(\mathcal{L}_X A)$.

ه) توجه کنید که $A(X_1,\cdots,X_k,w_1,\cdots,w_\ell)$ را با بکارگیری پی در پی انقباض بر $A\otimes X_1\otimes\cdots\otimes X_k\otimes w_1\otimes\cdots\otimes w_\ell$ می‌توان به دست آورد. با استفاده از (د) ثابت کنید

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\{A(X_1,\cdots,X_k,w_1,\cdots,w_\ell)\} &= (\mathcal{L}_X A)(X_1,\cdots,X_k,w_1,\cdots,w_k)\\ &+\sum_{i=1}^{k} A(X_1,\cdots,\mathcal{L}_X X_i,\cdots,X_k,w_1,\cdots,w_\ell)\\ &+\sum_{i=1}^{\ell} A(X_1,\cdots,X_k,w_1,\cdots,\mathcal{L}_X w_i,\cdots,w_\ell)\end{aligned}$$

و) اگر مؤلفه‌های A در یک دستگاه مختصات مفروض x عبارت از $A^{j_1,\dots,j_\ell}_{i_1,\dots i_k}$ باشد
و $X=\sum_{i=1}^{n} a^i\partial/\partial x^i$، نشان دهید که مختصات $\mathcal{L}_X A$ عبارت است از

$$(\mathcal{L}_X A)^{j_1\cdots j_\ell}_{i_1\cdots i_k} = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} A^{j_1\cdots j_\ell}_{i_i\cdots i_k} \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} A^{j_1\cdots j_{\alpha-1}jj_{\alpha+1}\cdots j_\ell}_{i_i\cdots i_k}.\frac{\partial a^{j\alpha}}{\partial x^j}$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{n} A^{j_1\cdots j_\ell}_{i_1\cdots i_{\alpha-1}ii_{\alpha+1}\cdots i_k}.\frac{\partial a^i}{\partial x^{i\alpha}}$$

۱۵. گیریم D عملگری است که توابع هموار $\mathcal{F}$ را به توابع هموار $\mathcal{F}$ می‌نگارد و میدان‌های برداری هموار $\mathcal{H}$ را به $\mathcal{H}$ می‌نگارد، به گونه‌ای که $D:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ و $D:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ بر $\mathbb{R}-$ خطی هستند و

$$D(fY)=f.DY+Df.Y$$

الف) نشان دهید D توسیعی منحصر بفرد به یک عملگر دلرد که میدان‌های تانسوری از نوع $\binom{k}{\ell}$ را به اشیائی نظیر خودشان می‌نگارد، به گونه‌ای که

۱) D بر $\mathbb{R}$ خطی است،

۲) $D(A\otimes B)=DA\otimes B+A\otimes DB$.

۳) به ازاء هر انقباض C، داشته باشیم $DC=CD$.

چنانچه فرض شود $Df=Xf$ و $DY=\mathcal{L}_X Y$، این توسیع منحصر بفرد $\mathcal{L}_X$ است.

ب) گیریم A میدانی تانسوری از نوع $\binom{1}{1}$ است، و لذا می‌توانیم فرض کنیم $A(p)\in End(T_pM)$؛ به این ترتیب، به ازاء هر میدان برداری X، $A(X)$ نیز میدانی برداری است. نشان دهید که اگر تعریف کنیم $D_Af=0$ و $D_AX=A(X)$، آنگاه D_A توسیعی منحصر بفرد دارد که در (۱) و (۲) و (۳) صدق می‌کند.

ج) نشان دهید $(D_Aw)(p)=-A(p)^*(w(p))$.

د) نشان دهید $\mathcal{L}_{fX}=f\mathcal{L}_X-D_{X\otimes df}$. راهنمایی: این را برای توابع و میدان‌های برداری بررسی کنید.

ه) چنانچه T از نوع $\binom{2}{1}$ باشد، نشان دهید

$$(D_AT)^{ij}_k=\sum_{\alpha=1}^{n} T^{\alpha j}_k\,A^i_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n} T^{i\alpha}_k\,A^j_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{n} T^{ij}_\alpha\,A^\alpha_k$$

این را به حالت تانسورهای از نوع $\binom{k}{\ell}$ تعمیم دهید.

۱۶. الف) گیریم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $f'(0)=0$ صدق می‌کند. به ازاء $t\geq 0$ تعریف می‌کنیم $g(t):=f(\sqrt{t})$. نشان دهید که مشتق راست (به کمک قضیهٔ تیلور) عبارتست از

$$g'_+(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(g(h)-g(0))=\frac{1}{2}f''(0)$$

ب) به ازاء $c:\mathbb{R}\to M$ با $c'(0)=0\in T_pM$ و $t\geq 0$ تعریف کنید $\delta(t):=c(\sqrt{t})$. نشان دهید که بردار مماس $c''(0)$ با ضابطهٔ $c''(0)(f)=(f\circ c)''(0)$ را به صورت $c''(0)=2\delta'(0)$ می‌توان در نظر گرفت.

۱۷. الف) گیریم p نقطه‌ای تکین برای تابع $f:M\to\mathbb{R}$ است، بنابراین $f_{*p}=0$. به ازاء بردارهای مفروض $X_p,Y_p\in T_pM$، میدان‌های برداری $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\tilde{X}_p=X_p$ و $\tilde{Y}_p=Y_p$. در این صورت تعریف می‌کنیم $f_{**}(X_p,Y_p):=\tilde{X}_p(\tilde{Y}f)$. با استفاده از اینکه $[X,Y]_p(f)=0$، نشان دهید که $f_{**}(X_p,Y_p)$ متقارن است، و نتیجه بگیرید که خوشتعریف است.

ب) نشان دهید

$$f_{**}\left(\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p,\sum_{j=1}^n b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right)=\sum_{i,j=1}^n a^ib^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(p)$$

ج) نشلان دهید که رتبهٔ $(\partial^2 f/\partial x^i\partial x^j)(p)$ مستقل از انتخاب دستگاه مختصات‌است.

د) گیریم p نقطه‌ای تکین از تابع $f:M\to N$ است. به ازاء $X_p,Y_p\in T_pM$ و $g:N\to\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $f_{**}(X,Y)(g)=\tilde{X}(\tilde{Y}(g\circ f))$. نشان دهید که در این صورت، نگاشت $f_{**}:T_pM\times T_pM\to T_{f(p)}N$ دو خطی و خوشتعریف است.

ه) اگر ۰ نقطهٔ تکین تابع $c:\mathbb{R}\to M$ باشد، نشان دهید $c_{**}:T_0\mathbb{R}\times T_0\mathbb{R}\to T_{c(0)}M$ زوج $(1_0,1_0)$ را به بردار مماس $c''(0)$ با تعریف $c''(0)(f)=(f\circ c)''(0)$ می‌نگارد.

۱۸. گیریم c منحنی در گزارهٔ ۱۱.۴.۵ و قضیهٔ ۱۲.۴.۵ است. اگر x دستگاه مختصاتی حول p با $x(p)=0$ بوده و نیز $[X,Y]_p=\sum_{i=1}^n a^i\partial/\partial x^i\Big|_p$، نشان دهید $x^i(c(t))=$

$a^i t^2 + O(t^2)$، که $O(t^2)$ نمایشگر تابعی است با این ویژگی که $\lim_{t\to 0} O(t^2)/t^2 =$ ۰.

۱۹. الف) نشان دهید که اگر M فشرده بوده و ۰ مقداری منظم برای $f : M \to \mathbb{R}$ باشد، آنگاه همسایگی‌ای U از $0 \in \mathbb{R}$ چنان وجود دارد که $f^{-1}(U)$ با $f^{-1}(0)\times$ U دیفئومورف است به گونه‌ای که دیفئومورفیسم مربوطه $\varphi : f^{-1}(0) \times U \to$ $f^{-1}(U)$ در شرط $f(\varphi(p,t)) = t$ صدق می‌کند. راهنمایی: با استفاده از قضیه ۱.۳.۵ و افراز یکانی، میدانی برداری X بر یک همسایگی از $f^{-1}(0)$ چنان بسازید که $f_* X = -d/dt$.

ب) کلی تر، اگر M فشرده بوده و $q \in N$ مقداری منظم برای $f : M \to N$ باشد، در این صورت نشان دهید که همسایگی‌ای U از q و دیفئومورفیسمی $\varphi :$ $f^{-1}(q) \times U \to f^{-1}(U)$ چنان وجود دارند که $f(\varphi(q,q')) = q'$.

ج) از (ب) نتیجه بگیرید که اگر همهٔ نقاط N مقادیر منظم باشند، آنگاه به ازاء هر q_1 و q_2 باندازهٔ کافی نزدیک به هم، $f^{-1}(q_1)$ و $f^{-1}(q_2)$ دیفئومورفند. اگر f بروی N نباشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که M با $N \times f^{-1}(q)$ دیفئومورف است؟