فصل ۷

فرم دیفرانسیل

مجدداً به میدان‌های تانسوری توجه نومده، و به نوع به خصوصی از آنها میپردازیم. در این راستا به مقدمات جبری بیشتری نیاز داریم.

۱.۷ توابع تناوبی

گیریم V یک فضای برداری $n-$بعدی روی $\mathbb{R}$ است. عنصر $t\in T^k(V)$ را در صورتی **تناوبی** گوئیم که اگر به ازاء یک i و j با $j\neq i$ داشته باشیم $v_i=v_j$، آنگاه

$$T(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots,v_k)=0$$

اگر T تناوبی باشد، آنگاه به ازاء هر v_1، $\cdots$ و v_k ای

$$\begin{aligned}
0 &= (v_1,\cdots,v_i+v_j,\cdots,v_i+v_j,\cdots,v_k)\\
&= T(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_i,\cdots,v_k)+T(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots,v_k)\\
&\quad +T(v_1,\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots,v_k)+T(v_1,\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots,v_k)\\
&= 0+T(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots,v_k)+T(v_1,\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots,v_k)+0
\end{aligned}$$

بنابراین، T **متقارن کج** است:

$$T(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots,v_k)=-T(v_1,\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots,v_k)$$

البته، اگر T متقارن کج باشد، آنگاه T نوسانی نیز خواهد بود. [این مطلب در حالت خاصی از یک فضای برداری روی میدانی که $1+1=0$، این مطلب درست نیست؛ در این حالت متقارن بودن به معنی متقارن کج بودن است، و شرط نوسانی به معنای آن می‌افزاید.]

مجموعه‌ها همهٔ $T \in \mathcal{T}^k(V)$ های نوسانی را با نماد $\Omega^k(V)$ نشان می‌دهیم. روشن است که $\Omega^k(V) \subseteq \mathcal{T}^k(V)$ زیرفضایی از $\mathcal{T}^k(V)$ می‌باشد. به علاوه، اگر $f: V \to W$ تبدیلی خطی باشد، آنگاه $f^*: \mathcal{T}^k(W) \to \mathcal{T}^k(V)$ این زیر فضاها را حفظ می‌کند؛ یعنی، $f^*: \Omega^k(W) \to \Omega^k(V)$. توجه کنید که، $\Omega^1(V) = \mathcal{T}^1(V) = V^*$، و لذا $\Omega^1(V)$ با بعد n است. به علاوه، مرسوم است فرض شود که $\Omega^0(V) = \mathcal{T}^0(V)$. در حال حاضر، روشن است که بعد $\Omega^k(V)$ برای $k \rangle 1$ خوش‌تعریف است، در حالی که مقدار آنرا نمی‌دانیم. معروفترین تانسور نوسانی، تابع دترمینان $\det \in \mathcal{T}^n(\mathbb{R})^n$ می‌باشد، مشروط به آنکه آنرا به صورت تابعی از n سطر یک ماتریس تعریف گردد. بزودی خواهیم دید که این تابع، به تعبیری، کلی‌ترین تابع نوسانی است. در بسیاری از کوششها در طرح مفهوم دترمینان، اولین قدم این است که نشان داده می‌شود هر دو تابع $n-$خطی نوسانی بر $\mathbb{R}^n$، مضربی از همبند؛ به بیان دیگر $\dim \Omega^n(\mathbb{R}^n) \leq 1$. سپس با ساخت عملی تابع غیر صفر $\det$ نشان داده می‌شود که $\Omega^n(\mathbb{R})^n = 1$. (البته، اگر V فضای برداری با بعد n دلخواه باشد، آنگاه باز هم $\dim \Omega^n(V) = 1$.) معمولاً، ساخت $\det$ با فرمول صریحی است که حالت خاصی از روش شروح در ذیل است.

گیریم S_k مجموعهٔ همهٔ جایگشت‌های $\{1, \cdots, k\}$ است؛ هر عضو از $u \in S_k$ تابعی است دوسویی $i \mapsto u(i)$. اگر $(v_1, \cdots, v_k)$ یک $k-$تائی دلخواه (از هر نوع اشیائی) باشد، تعریف می‌کنیم

$$\sigma.(v_1, \cdots, v_k) = (v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})$$

این تعریف، ابهامی در ساختش دارد. فی‌المثل، اولین درآیهٔ سمت راست، $\sigma(1)$ امین عنصر از v_i ها است. چنانچه v ها را به کمک اندیس‌های ۱، $\cdots$ و k مرتب نشده داشته باشیم، سخنگفتن از $\sigma(1)$ بی‌معنی است. یک راه برای توصیف $\sigma.(v_3, v_2, v_1, \cdots)$ چنین است؛ فرض کنیم $w_1 = v_3$، $w_2 = v_2$، $w_3 = v_1$ و $\cdots$. در ادامه، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \sigma.(\rho.(v_1, \cdots, v_k)) &= \sigma.(w_1, \cdots, w_k) \\ &= (v_{\rho(\sigma(1))}, \cdots, v_{\rho(\sigma(k))}) \quad (\text{زیرا } w_\alpha = v_{\rho(\alpha)}) \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\sigma.(\rho.(v_۱, \cdots, v_k)) = (\rho\sigma).(v_۱, \cdots, v_k) \qquad (۱.۷)$$

حال، به ازاء هر $T \in \mathcal{T}^k(v)$ مفروض، «نوسان T» را به صورت

$$\text{Alt } T := \frac{۱}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma . T \circ \sigma$$

تعریف می‌کنیم. به بیان دیگر

$$\text{Alt } T(v_۱, \cdots, v_k) = \frac{۱}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma . T(v_{\sigma(۱)}, \cdots, v_{\sigma(k)})$$

که $\operatorname{sgn} \sigma$ برابر $+۱$ است، اگر σ جایگشت زوج باشد و در صورت فرد بودن σ، داریم $\operatorname{sgn} \sigma = -۱$.

۱.۱.۷ گزاره. ۱) اگر $T \in \mathcal{T}^k(V)$، آنگاه $\text{Alt}(T) \in \Omega^k(V)$.

۲) اگر $\omega \in \Omega^k(V)$، آنگاه $\text{Alt}\, \omega = \omega$.

۳) اگر $T \in \mathcal{T}^k(V)$، آنگاه $\text{Alt}(\text{Alt}(T)) = \text{Alt}(T)$.

اثبات: بر عهدهٔ خواننده (یا به صفحات ۷۸ و ۷۹ از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال بر خمینه‌ها توجه شود). □

۲.۷ ضرب گوه‌ای

حال، به ازاء $\omega \in \Omega(V)$ و $\eta \in \Omega^\ell(V)$، عنصر $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+\ell}(V)$ را به صورت

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+\ell)^i}{k!\ell!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

تعریف می‌کنیم. ضریبی که اضافه کرده‌ایم، احتمالاً بی‌مورد به نظر می‌رسد. اما بعداً سودبخشی آن نشان داده خواهد شد.

روشن است که

۱) ضرب گوه‌ای $\wedge$ دو خطی است:

$$(\omega_۱ + \omega_۲) \wedge \eta = \omega_۱ \wedge \eta + \omega_۲ \wedge \eta$$

$$\omega \wedge (\eta_۱ + \eta_۲) = \omega \wedge \eta_۱ + \omega \wedge \eta_۲$$

$$a\omega \wedge \eta = \omega \wedge a\eta = a(\omega \wedge \eta)$$

۲) $f^*(\omega\wedge\eta)=f^*\omega\wedge f^*\eta$.

۳) ضرب گوه‌ای $\wedge$ پاد یا ناجابجایی است: $\omega\wedge\eta=(-1)^{k\ell}\eta=(-1)^{k\ell}\eta\wedge\omega$.
به ویژه اگر k فرد باشد، آنگاه $\omega\wedge\omega=0$.

به علاوه، شرکت‌پذیری ضرب گوه‌ای در حکم زیر اثبات می‌گردد.

۱.۲.۷ قضیه. ۱) $S\in\mathcal{T}^k(V)$ و $T\in\mathcal{T}^\ell(V)$ و $\mathrm{Alt}(S)=0$، آنگاه

$$\mathrm{Alt}(S\otimes T)=\mathrm{Alt}(T\otimes S)=0$$

۲) $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta)\otimes\theta)=\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta)=\mathrm{Alt}(\omega\otimes\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta))$

۳) اگر $\omega\in\Omega^k(V)$، $\eta\in\Omega^\ell(V)$ و $\theta\in\Omega^m(V)$، آنگاه

$$(\omega\wedge\eta)\wedge\theta=\omega\wedge(\eta\wedge\theta)=\frac{(k+\ell+m)!}{k!\ell!m!}\,\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta)$$

اثبات: ۱) داریم

$$\begin{aligned}(k+\ell)!\,\mathrm{Alt}(S\otimes T)(v_1,\cdots,v_{k+\ell})&=\\ &=\sum_{J\in S_{k+\ell}}\mathrm{sgn}\,\sigma.(S\otimes T).(\sigma.(v_1,\cdots,v_{k+\ell}))\\ &=\sum_{J\in S_{k+\ell}}\mathrm{sgn}\,\sigma.S(v\sigma(1),\cdots,v_{\sigma(k+\ell)})\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $G\subset S_{k+1}$ مجموعهٔ همهٔ σ هایی است که $k+1$، $\cdots$ و $k+\ell$ را ثابت نگاه می‌دارد. در این صورت

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in G}\mathrm{sgn}\,\sigma.S(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}).T(v_{\sigma(k+1)},\cdots,v_{\sigma(k+\ell)})\\ &\Big\{\sum_{\sigma'\in S_k}\mathrm{sgn}\,\sigma' S(v_{\sigma'(1)},\cdots,v_{\sigma'(k)})\Big\}.T(v_{k+1},\cdots,v_{k+\ell})=0\end{aligned}$$

اکنون، فرض کنیم $\sigma_0\in G$. گیریم $\sigma_0G=\{\sigma_0\sigma' : \sigma'\in G\}$، در این صورت بنابه (۱.۷) داریم

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in G}\mathrm{sgn}\,\sigma.S(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}).T(v_{\sigma(k+1)},\cdots,v_{\sigma(k+\ell)})\\ &\Big\{\sum_{\sigma'\in S_k}\mathrm{sgn}\,\sigma'.S(v_{\sigma'(1)},\cdots,v_{\sigma'(k)})\Big\}.T(v_{k+1},\cdots,v_{k+\ell})\end{aligned}$$

پس کافی است نشان دهیم که این عبارت صفر است (زیرا $\sigma_\circ.(v_1,\cdots,v_{k+1})$ یک $(k+\ell)$ تایی دیگر از بردارها است). توجه شود که اگر $\sigma\in G\cap\sigma_\circ G$ آنگاه به ازاء یک $\sigma'\in G$ ای $\sigma=\sigma_\circ\sigma'$ و بنابراین $\sigma_\circ=\sigma(\sigma')^{-1}\in G$ که تناقض است. سپس، در مجموع $G\cap\sigma_\circ G=\emptyset$. به این جهت، می‌توانیم $S_{k+\ell}$ را به دو زیر مجموعهٔ مجزا طوری تقسیم کنیم که مجموع بر هر یک از آنها صفر است. رابطهٔ $\mathrm{Alt}(T\otimes S)$ به صورت مشابه قابل اثبات است.

۲) به وضوح

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)-\eta\otimes\theta)=\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)-\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)=0$$

و لذا از (۱) داریم

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{Alt}(\omega\otimes[\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)-\eta\otimes\theta])\\&=\mathrm{Alt}(\omega\otimes\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta))-\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta)\end{aligned}$$

تساوی دیگر، به صورت مشابه قابل اثبات است.

۳) داریم

$$\begin{aligned}(\omega\wedge\eta)\wedge\theta&=\frac{(k+\ell+m)!}{(k+\ell)!m!}\mathrm{Alt}((\omega\wedge\eta)\otimes\theta)\\&=\frac{(k+\ell+m)!}{(k+\ell)!m!}\frac{(k+\ell!)}{k!\ell!}\mathrm{Alt}(\omega\wedge\eta\otimes\theta)\end{aligned}$$

تساوی بعدی، به صورت مشابه قابل اثبات است. □

توجه شود که بر اساس (۲) حتی اگر عامل $(k+\ell)!/k!\ell!$ در تعریف Alt حذف گردد، همچنان ضرب گوه‌ای $\wedge$ شرکت‌پذیر است. از سوی دیگر، عامل $1/k!$ در تعریف Alt اساسی است، زیرا بدون آن، رابطهٔ $\mathrm{Alt}\,T=\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}\,T)$ صحیح نیست، و در نتیجه رابطهٔ اول در اثبات (۲) غلط می‌شود. [چنانچه $\overline{\mathrm{Alt}}$ را همان Alt ولی بدون عامل $1/k!$ تعریف کنیم، بایستی $\wedge$ را به شکل

$$\omega\wedge\eta:=\frac{1}{k!\ell!}\overline{\mathrm{Alt}}(\omega\otimes\eta)$$

تعریف کنیم. این بحث حتی در میدان‌های با مشخصهٔ متناهی نیز درست و با معنی است، چرا که هر یک از جملات $\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta)(v_1,\cdots,v_{k\ell})$ به تعداد $k!\ell!$ مرتبه تکرار

می‌شوند (زیرا ω و η نوسانی‌اند)، و $۱/k!\ell!$ را به این معنی می‌توان تعبیر نمود که این $k!\ell!$ شیء را یک عنصر تصور می‌کنیم.]

دلیل حضور عامل $(k+\ell)!/k!\ell!$ در تعریف $\wedge$ چنین است: اگر $v_۱$، $\cdots$ و v_n وپایه‌ای برای V باشند و $\varphi_۱$، $\cdots$ و φ_n پایهٔ دوگان نظیر به آنها، آنگاه

$$\begin{aligned}\varphi_۱ \wedge \cdots \wedge \varphi_n &= \frac{(۱+\cdots+۱)!}{۱!۱!\cdots ۱!}\,\mathrm{Alt}(\varphi_۱ \wedge \cdots \wedge \varphi_n)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma.(\varphi_۱ \otimes \cdots \otimes \varphi_n)\circ\sigma\end{aligned}$$

به ویژه

$$(\varphi_۱ \wedge \cdots \wedge \varphi_n)(v_۱,\cdots,v_n) = ۱$$

(پس، اگر $v_۱$، $\cdots$ و v_n پایهٔ استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\varphi_۱ \wedge \cdots \wedge \varphi_n = \det$.) به صورت ذیل، پایه‌ای برای $\Omega^k(V)$ می‌توان ساخت.

۲.۲.۷ قضیه. مجموعهٔ همهٔ $\varphi_{i_۱}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_k}$ های با $۱\le i_۱<\cdots<i_k\le n$، پایه‌ای برای $\Omega^k(V)$ تشکیل می‌دهد، که در نتیجه، با بعد $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ است. (به خصوص، به ازاء $k\rangle n$ ها $\Omega^k(V)=\{۰\}$.)

اثبات: اگر $\omega\in\Omega^k(V)\subseteq\mathcal{T}^k(V)$، می‌توانیم بنویسیم

$$\omega = \sum_{i_۱,\cdots,i_k} u_{i_۱\cdots i_k}\,\varphi_{i_۱}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_k}$$

و در نتیجه

$$\omega = \mathrm{Alt}(\omega) = \sum_{i_۱,\cdots,i_k} u_{i_۱\cdots i_k}\;\mathrm{Alt}(\varphi_{i_۱}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_k})$$

هر $\mathrm{Alt}(\varphi_{i_۱}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_k})$ یا صفر است و یا اینکه به ازاء $j_۱<\cdots<j_k$ برابر $\pm(۱/k!)\varphi_{j_۱}\wedge\cdots\wedge\varphi_{j_k}$ می‌باشد. در نتیجه عناصر به شکل $\varphi_{j_۱}\wedge\cdots\wedge\varphi_{j_k}$ که $j_۱<\cdots<j_k$ کل $\Omega^k(V)$ را تولید می‌کنند. اگر

$$۰ = \sum_{i_۱<\cdots<i_k} a_{i_۱,\cdots,i_k}\,\varphi_{j_۱}\wedge\cdots\wedge\varphi_{j_k}$$

آنگاه با اعمال دو طرف بر $(v_{i_۱},\cdots,v_{i_k})$ مشاهده می‌گردد که $a_{i_۱,\cdots,i_k}=۰$. $\square$

۳.۲.۷ نتیجه. اگر $\omega_۱, \cdots \omega_k \in \Omega^۱(V)$، آنگاه شرط لازم و کافی برای استقلال خطی $\omega_۱$، $\cdots$ و ω_k این است که $\omega_۱ \wedge \cdots \wedge \omega_k \neq ۰$.

اثبات: اگر $\omega_۱$، $\cdots$ و ω_k مستقل خطی باشند، آنگاه پایه‌ای $v_۱$، $\cdots$، v_k، $\cdots$ و v_n برای V وجود دارد که بردارهای پایه‌ای دوگان $\varphi_۱$، $\cdots$، φ_k، $\cdots$ و φ_n آن به ازاء $۱ \leq i \leq k$ در شرط $\varphi_i = \omega_i$ صدق می‌کنند. بنابراین $\omega_۱ \wedge \cdots \wedge \omega_n$ عنصری از یک پایه برای $\Omega^k(V)$ است و لذا صفر نیست.

از سوی دیگر، اگر $\omega_۱ = a_۲\omega_۲ + \cdots + a_k\omega_k$، آنگاه

$$\omega_۱ \wedge \omega_۲ \wedge \cdots \wedge \omega_k = (a_۲\omega_۲ + \cdots + a_k\omega_k) \wedge \omega_۲ \wedge \cdots \wedge \omega_k = ۰$$

و برهان تمام است. □

به جهت خلاصه‌تر کردن نمادگذاری‌ها، مرسوم است فرض شود I یک اندیس چندگانه $(i_۱, \cdots, i_k)$ است و φ_I نمایشگر $\varphi_{i_۱} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}$ است. در این صورت، هر عضو از $\Omega^k(V)$ به صورت یکتا به شکل $\sum_I a_I\varphi_I$ قابل بیان است. توجه شود که بر طبق قضیهٔ ۲.۲.۷، هر $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ ای به صورت ترکیب خطی توابع به شکل

$$(v_۱, \cdots, v_k) \mapsto \begin{pmatrix} v_۱ \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \text{ مینور } k \times k \text{ از ماتریس }$$

قابل بیان است. ذیلاً قضیه‌ای ساده‌تر، قبل از پرداختن به حالت منیفلدها، مطرح می‌کنیم.

۴.۲.۷ قضیه. گیریم $v_۱$، $\cdots$ و v_n پایه‌ای برای V است و $\omega \in \Omega^k(V)$. به علاوه فرض کنیم

$$\omega_i = \sum_{j=۱}^{n} \alpha_{ji}\, v_j \qquad (i = ۱, \cdots, n)$$

در این صورت

$$\omega(\omega_۱, \cdots, \omega_n) = \det(\alpha_{ij}).\omega(v_۱, \cdots, v_n)$$

اثبات: عنصر $\eta \in \mathcal{T}^n(\mathbb{R}^n)$ را به صورت

$$\eta((a_{۱۱}, \cdots, a_{n۱}), \cdots, (a_{n۱}, \cdots, a_{nn})) = \omega \sum_{j=۱}^{n} a_{ji}\, v_j, \cdots, \sum_{j=۱}^{n} a_{jn}\, v_j$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت روشن است که $\eta \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$، و لذا به ازاء یک $c \in \mathbb{R}$ ای $\eta = c.\det$، و به علاوه $c = \eta(e_1, \cdots, e_n) = \omega(v_1, \cdots, v_n)$ □

۵.۲.۷ نتیجه. اگر V $n-$بعدی بودی و $\Omega^n(V) \neq 0$، در این صورت جهتی منحصر بفرد μ برای V چنان وجود دارد که

$$[v_1, \cdots, v_n] = \mu \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \omega(v_1, \cdots, v_n) > 0$$

اکنون ساخت جبری جدید را به حالت کلاف‌های برداری می‌توانیم تعمیم بدهیم. اگر $\xi = \pi : E \to B$ کلاف برداری باشد، با تعویض هر تار $\pi^{-1}(p)$ با $\Omega^k(\pi^{-1}(p))$ به یک کلاف جدید $\Omega^k(\xi)$ می‌رسیم. برش ω از $\Omega^k(\xi)$، تابعی است چون ω که به ازاء هر $p \in B$ ای $\omega(p) \in \Omega^k(\pi^{-1}(p))$. اگر η برشی از $\Omega^\ell(\xi)$ باشد، برش $\omega \wedge \eta$ از $\Omega^{k+\ell}(\xi)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\omega \wedge \eta)(p) := \omega(p) \wedge \eta(p) \in \Omega^{k+\ell}(\pi^{-1}(p))$$

۳.۷ فرم

برشهای $\Omega^k(TM)$، که دقیقاً عبارتند از میدان‌های برداری کواریان نوسانی از مرتبهٔ k ام، را $k-$فرم بر M می‌نامیم. ۱$-$فرم درست به معنی یک میدان برداری کواریان است. چون به وضوح $\Omega^k(TM)$ کلاف برداری هموار بر M است، از فرم‌های هموار می‌توان سخن گفت؛ از این پس، همهٔ فرم‌ها را هموار می‌دانیم مگر آنکه خلافش تصریح شود. یادآور می‌شویم که تانسورهای کواریان به شکل کنتراواریان عمل می‌کنند: اگر $f : M \to N$ هموار بوده و ω یک $k-$فرم بر N باشد، آنگاه $f^*\omega$ یک $k-$فرم بر M است. عناصر $\omega_1 + \omega_2$ و $w \wedge \eta$ را نیز می‌توان تعریف نمود. خواص ذیل از $k-$فرم‌ها را به سادگی از خواص نظیر بر $\Omega^k(V)$ می‌توان استنتاج نمود:

۱) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$

۲) $\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$

۳) $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$

۴) $f\omega \wedge \eta = \omega \wedge f\eta = f(\omega \wedge \eta)$

۵) $f^*\omega \wedge f^*\eta$

اگر (x,U) دستگاهی مختصاتی باشد، آنگاه $dx^i(p)$ ها پایه‌ای برای T^*M تشکیل می‌دهند، و لذا $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}(p)$ ها که $i_1<\cdots<i_k$، پایه‌ای برای $\Omega^k(p)$ تشکیل می‌دهند. بنابراین، هر $k-$فرم ω را به صورت یکتا به شکل

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\omega_{i_1,\cdots,i_k}\ dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

می‌توان نوشت. یا چنانچه $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ را با ازاء اندیس چندگانهٔ $I=(i_1,\cdots,i_k)$ به شکل dx^I بنویسیم،نگاه $\omega=\sum_I \omega_I\, dx^I$.

مسألهٔ یافتن رابطهٔ بین ω_I و ω'_I ای که در شرط

$$\omega=\sum_I \omega_I\, dx^I\ =\sum_I \omega'_I\, dy^I$$

صدق می‌کنند، به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده (مسألهٔ ۱۶). اما در اینجا حالت خاصی از آنرا مطرح می‌کنیم.

۱.۳.۷ قضیه. اگر $f:M\to N$ تابعی هموار بین $n-$منیفلدها باشد، (x,U) دستگاهی مختصاتی حول $p\in M$ و (y,V) دستگاهی مختصاتی حول $q=f(p)\in N$ باشد، در این صورت

$$f^*(g\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n)=(g\circ f).\det\left(\frac{\partial(y^i\circ f)}{\partial x^j}\right)dx^I\wedge\cdots\wedge dx^n$$

اثبات: اگر $f:M\to N$، کافی است نشان دهیم

$$f^*(g\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n)=\det\left(\frac{\partial(y^i\circ f)}{\partial x^j}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

حال، به کمک مسألهٔ ۴ از فصل ۱ داریم

$$\begin{aligned}
f^*(g\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n)(p)&\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right)=\\
&=(dy^1(q)\wedge\cdots\wedge dy^n(q))(p)\left(f_*\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p,\cdots,f_*\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right)\\
&=(dy^1(q)\wedge\cdots\wedge dy^n(q))\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial(y^i\circ f)}{\partial x^1}(p)\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_q,\cdots\right.\\
&\qquad\left.\cdots,\sum_{i=1}^n\frac{\partial(y^i\circ f)}{\partial x^n}(p)\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_q\right)\\
&\overset{(5)}{=}\det\left(\frac{\partial(y^i\circ f)}{\partial x^j}(p)\right)
\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۲.۳.۷ نتیجه. اگر (x,U) و (y,V) دو دستگاه مختصات بر M باشند و

$$g\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n = h\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

آنگاه $h=g.\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$.

اثبات: با فرض همانی بودن f، قضیه را به کار ببندید. □

این نتیجه نشان می‌دهد که $n-$فرم‌ها، اشیاء هندسی نظیر به «چگال‌های اسکالر زوج» به گونه‌ای در مسألهٔ ۱۰ از فصل ۴ تعریف شدند، هستند.

اگر $\xi=\pi:E\to B$ یک کلاف $n-$صفحه‌ای باشد، آنگاه برش ω همه جا ناصفر از $\Omega^n(\xi)$ اهمیتی به سزا دارد: به ازاء هر $p\in B$، عنصر $\omega(p)\in\Omega^n(\pi^{-1}(p))$ بنا به نتیجهٔ ؟؟ یک جهت μ_p بر $\pi^{-1}(p)$ مشخص می‌کند. به سادگی ملاحظه می‌گردد که گردایهٔ جهت‌های $\{\mu_p\}$ را مجموعه شرایط سازگاری مطرح شده در فصل ۳ صدق می‌کند، و بنابراین $\mu=\{\mu_p\}$ یک جهت بر ξ تعریف می‌کند. به ویژه، اگر یک $n-$فرم ناصفر ω بر منیفلد n بعدی M موجود باشد، آنگاه M جهت‌پذیر است (به عبارت دیگر، کلاف TM جهت‌پذیر است). عکس این مطلب درست است:

۳.۳.۷ قضیه. اگر منیفلد هموار n بعدی M جهت‌پذیر باشد، آنگاه یک $n-$فرم ω بر M وجود دارد که در همه جا ناصفر است.

اثبات: بنا به قضایای ؟؟۱ و ۳.۶.۲، یک پوشش ϑ برای M متشکل از گردایه‌ای از دستگاه‌های مختصاتی $\{(x,U)\}$، و نیز یک افراز یکانی $\{\varphi_U\}$ زیر دست ϑ می‌توان انتخاب نمود. گیریم μ جهتی برای M است. به ازاء هر (x,U) یک $n-$فرم ω_U بر U طوری انتخاب می‌کنیم که به ازاء هر $p\in U$ و $v_1,\cdots,v_n\in T_pM$ داشته باشیم

$$\omega_U=(v_1,\cdots,v_n)>0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad [v_1,\cdots,v_n]=\mu_p$$

حال فرض کنیم $\omega=\sum\limits_{U\in\vartheta}\varphi_U\omega_U$. در این صورت ω یک $n-$ فرم هموار است. به علاوه، به ازاء هر p ای، اگر $v_1,\cdots,v_n\in T_pM$ در $[v_1,\cdots,v_n]=\mu_p$ صدق کند، آنگاه به ازاء هر U ای که $p\in U$ داریم

$$(\varphi_U\,\omega_U)(p)(v_1,\cdots,v_n)\geq 0$$

و نامساوی بر حداقل یک U ای اکید است. بنابراین $\omega(p) \neq 0$. □

توجه شود که کلاف $\Omega^n(TM)$ یک بعدی است. نشان داده‌ایم که اگر M جهت‌پذیر باشد، آنگاه $\Omega^n(TM)$ برشی ناصفر (در همه جا ناصفر) دارد، که در نتیجه، کلاف $\Omega^n(TM)$ بدیهی است. اما، بالعکس اگر کلاف $\Omega^n(TM)$ بدیهی باشد، آنگاه برش همه جا ناصفری وجود دارد و لذا M جهت‌پذیر است. [در کل، اگر ξ یک کلاف $n-$ صفحه‌ای باشد، آنگاه وقتی و تنها وقتی $\Omega^n(\xi)$ بدیهی است که ξ جهت‌پذیر باشد، به شرط آنکه فضای پایه B پیرافشرده باشد (یعنی، هر پوشش آن دارای یک زیر پوشش موضعاً متناهی باشد).]

۴.۷ دیفرانسیل یک فرم

درست مثل $\Omega^\circ(V)$ که بیان دیگری از $\mathbb{R}$ بود، $0-$فرم بر M را به صورت تابعی f بر M تلقی می‌کنیم (و $f\wedge\omega$ به معنی $f.w$ است). به ازاء هر $0-$ فرم f، $1-$ فرم df (یادآور می‌شویم که $(d\,f(X) = X(f)$) را این طور تعریف می‌کنیم که در دستگاه مختصاتی (x, U) مفروض بر M، داریم

$$d\,f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^j$$

چنانچه ω برابر $k-$ فرم $\omega = \sum_I \omega_I\,dx^I$ باشد، که هر یک از ω_I ها $0-$ فرمند، می‌توان $1-$ فرم‌های $d\omega_I$ را تشکیل داد و $(k+1)-$ فرم $d\,w$ را به صورت

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I = \sum_I \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x^\alpha}\,dx^\alpha \wedge dx^I$$

تعریف نمود. $d\omega$ را دیفرانسیل ω می‌نامیم. ثابت می‌شود که این تعریف به انتخاب دستگاه مختصاتی بستگی ندارد. این مطلب را به جند طریق میتوان اثبات نمود یک راه که به محاسبات فوق العاده زیادی ایجاد مقایسهٔ ضرایب w'_I در عبارت $\omega = \sum_I w'_I\,dx^I$ با ضرایب قبلی ω_I است.

روش دیگر، بحث کمتری دارد. بایافتن خواصی از $d\omega$ آغاز می‌کنیم (که آنها را هم با بیان نسبت به یک دستگاه مختصات بخصوص، ثابت میکنیم .)

۱.۴.۷ گزاره. ۱) $d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$.
۲) اگر ω_1 یک $k-$ فرم باشد، آنگاه $d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^k\omega_1\wedge d\omega_2$.
۳) $d(d\omega)=0$ یا به اختصار $d^2=0$.

اثبات: ۱) واضح است.
۲) برای اثبات (۲) ابتدا توجه می‌کنیم که بنا به (۱) کافی است تنها حالت $\omega_1=f\,dx^I$ و $\omega_2=g\,dx^J$ فرض شود. در این صورت $\omega_1\wedge\omega_2=f\,g\,dx^I\wedge dx^J$ و

$$\begin{aligned} d(\omega_1\wedge\omega_2) &= d(fg)\wedge dx^I\wedge dx^J\\ &= gdf\wedge dx^I\wedge dx^J+fdg\wedge dx^I\wedge dx^J\\ &= d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^k\,fdx^I\wedge dg\wedge dx^J\\ &= d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^k\omega_1\wedge d\omega_2\end{aligned}$$

۳) به وضوح، کافی است $k-$ فرم‌های به شکل $\omega=f dx^I$ را در نظر بگیریم. در این صورت

$$d\omega=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\,dx^\alpha\wedge dx^I$$

در نتیجه

$$d(d\omega)=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\,dx^\beta\wedge dx^\alpha\wedge dx^J\right)$$

جملات $\frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta\partial x^\alpha}\,dx^\beta\wedge dx^\alpha\wedge dx^I$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta\partial x^\alpha}\,dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^I$ دو به دو در این مجموع حذف می‌شوند. □

در ادامه سه خاصیت مشخص کنندهٔ d بر U را مطرح می‌کنیم.

۲.۴.۷ گزاره. فرض کنید d' هر $k-$ فرم بر U را به $(k+1)-$ فرمی بر U بنگارد، k عددی دلخواه است، و به علاوه

۱) $d'(\omega_1+\omega_2)=d'\omega_1+d'\omega_2$ ۳) $d'(d'f)=0$

۲) $d'(\omega_1\wedge\omega_2)=d'\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^k\omega_1\wedge d'\omega_2$ ۴) $d'f=$ قدیمی df

در این صورت، $d=d'$ بر U.

اثبات: روشن است که کافی است دهیم که اگر $\omega = f dx^I$، آنگاه $d'\omega = d\omega$. اما، بنا به (۲) داریم

$$\begin{aligned} d'(f dx^I) &= d' f \wedge dx^I + f \wedge d'(dx^I) \\ &\overset{(۴)}{=} df \wedge dx^I + f \wedge d'(dx^I) \end{aligned}$$

پس، کافی است نشان دهیم که $d'(dx^I) = ۰$، که در آن

$$dx^I = dx^{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \overset{(۴)}{=} d'x^{i_۱} \wedge \cdots \wedge d'x^{i_k}$$

به استقراء بر k عمل می‌کنیم. با فرض درستی حکم برای $k-۱$، داریم

$$\begin{aligned} d'(dx^I) &= d'(d'x^{i_۱} \wedge \cdots \wedge d'x^{i_k}) \\ &\overset{(۲)}{=} d'(d'x^{i_۱}) \wedge d'x^{i_۲} \wedge \cdots \wedge d'x^{i_k} \\ &\quad -d'x^{i_۱} \wedge d'(d'x^{i_۱} \wedge \cdots \wedge d'x^{i_k}) \\ &\overset{A}{=} ۰ - ۰ \end{aligned}$$

که در A از (۲) و فرض استقراء استفاده شده است؛ و برهان تمام است. □

۳.۴.۷ نتیجه. عملگری d منحصر بفرد از $k-$ فرم‌های بر M به $(k+۱)-$ فرم‌های بر M، به ازاء k دلخواه، وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند

$$۱)\ d(\omega_۱ + \omega_۲) = d\omega_۱ + d\omega_۲ \qquad ۲)\ d^۲ = ۰$$
$$۳)\ d(\omega_۱ \wedge \omega_۲) = d\omega_۱ \wedge \omega_۲ + (-۱)^k d_۱ \wedge d\omega_۲$$

و در مورد توابع، با دیفرانسیل قدیمی d یکی است.

اثبات: به ازاء هر دستگاه مختصات (x, U)، عملگر منحصر بفردی d_U در اختیار است. به ازای هر ω مفروض، و $p \in M$، U ای با $p \in U$ انتخاب می‌کنیم و تعریف می‌کنیم $d\omega(p) = d_U(w|U)(p)$. □

سومین طریق در اثبات استقلال تعریف d نسبت به دستگاه مختصات، ارائهٔ تعریف ناوردای آن است.

۴.۴.۷ قضیه. اگر ω یک $k-$ فرم بر M باشد، آنگاه یک $(k+۱)-$ فرم منحصر بفرد $d\omega$ بر M چنان وجود دارد که به ازاء هر مجموعهٔ از میدان‌های برداری $X_۱$، $\cdots$ و

X_{k+1} داریم

$$\begin{aligned} d\omega(X_1,\cdots,X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{k+1}) \\ &= \sum_1+\sum_2 \end{aligned} \tag{۲.۷}$$

که علامت $\wedge$ بر X_i به معنی حذف آن جمله است. این $(k+1)-$ فرم $d\omega$ آنگونه که قبلاً تعریف شد، یکی است.

اثبات: عملگری که $(X_1,\cdots,X_{k+1})$ را به $\sum_1+\sum_2$ می‌نگارد، به وضوح خطی است بر $\mathbb{R}$. به علاوه، عملاً بر مجموعهٔ توابع هموار $\mathcal{F}$ خطی است. در واقع، اگر X_{i_0} را با fX_{i_0} تعویض کنیم، آنگاه $\sum_1$ به

$$f\sum_1+\sum_{i\neq i_0}(-1)^{i+1}(X_if)\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+1})$$

تبدیل می‌شود، و با استفاده از فرمول‌های

$$[fX,Y]=f[X,Y]+Yf.X \qquad [X,fY]=f[X,Y]-Xf.Y$$

به سادگی مشاهده می‌گردد که $\sum_2$ به

$$\begin{aligned} f\sum_2&-\sum_{i<i_0}(-1)^{i+i_0}(X_if)\omega(X_{i_0},X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_{i_0},\cdots,X_{k+1}) \\ &+\sum_{i_1<i}(-1)^{i_0+j}(X_jf)\omega(X_{i_0},X_1,\cdots,\hat{X}_{i_0},\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{k+1}) \end{aligned}$$

تبدیل می‌گردد؛ پس با کمی دقت، ملاحظه می‌گردد که $\sum_1+\sum_2$ به $f\sum_1+f\sum_2$ تبدیل می‌شود.

قضیهٔ ۱.۵.۴ نشان می‌دهد که میدان برداری کواریان منحصر بفرد $d\omega$ صادق در (۵.۷) وجود دارد. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $d\omega$ نوسانی است، و لذا یک $(k+1)-$ فرم می‌باشد.

برای محاسبهٔ $d\omega$ در دستگاه مختصاتی (x,U)، روشن است که کافی است $d(fdx^I)$ را محاسبه کنیم. به علاوه، یادآور می‌شویم که می‌توانیم فرض کنیم $\omega=fdx^1\wedge\cdots\wedge$

dx^k. در مورد $d\omega$، همچون هر فرم دلخواه دیگر، داریم

$$d\omega = \sum_{\alpha_1<\cdots<\alpha_k} d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}\right) = 0$$

از (۵.۷) روشن است که $d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}\right)=0$ صفر است مگر آنکه یک اندیس چندگانهٔ به شکل $(\alpha_1,\cdots,\hat{\alpha_i},\cdots,\alpha_{k+1})$ جایگشتی از $(1,\cdots,k)$ باشد. چون α ها صعودی هستند، این تنها وقتی ممکن است که

$$(\alpha_1,\cdots\alpha_{k+1}) = (1,\cdots,k,j) \qquad\qquad (j>k)$$

که در این حالت

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_k}},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = (-1)^k\frac{\partial f}{\partial x^j}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j\rangle k}(-1)^k\frac{\partial f}{\partial x^k}\,dx^1\wedge\cdots,\wedge dx^k\wedge dx^j \\ &= \sum_{j\rangle k}\frac{\partial f}{\partial x^j}\,dx^j\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^j}\,dx^j\wedge dx^i\wedge\cdots\wedge dx^k \end{aligned}$$

که درست با همان تعریف قدیمی d است. □

این اولین مثال حقیقی ما از یک تعریف ناوردا برای تانسوری مهم است، و نیز اولین استفادهٔ ما از قضیهٔ ۱.۵.۴ است. ما $d\omega(p)(v_1,\cdots,v_{p+1})$ به شکل صریح مشخص نکردیم، بلکه ابتدا $d\omega(X_1,\cdots,X_{k+1})$ را پیدا کردیم، که X_i ها میدان‌های برداری توسیع دهندهٔ v_i هستند، و سپس این تابع را در p محاسبه کردیم. به همین سبک می‌توان عمل کرد و اثبات نمود که توسیع‌های X_1، $\cdots$ و X_{k+1} مستقل هستند. این کار بسیار کوتاه‌تر از آن است که موضوع را در دستگاهی مختصاتی معرفی کرد و سپس استقلال را نشان داد. اما به نظر پذیرش این موضوع سخت است. در کل، مقدار $d\omega(X_1,\cdots,X_{k+1})(p)$ تنها به مقادیر X_i در p بستگی دارد و به مقدار آنها در سایر نقاط هیچ گونه بستگی‌ای ندارد. به علاوه این مقدار به مقادیر ω در نقاطی به جز p (اطراف آن) نیز بستگی دارد. بایستی در فرمول قرار داده شود. یکی دیگر از جنبه‌های تعریف ما، که با تعریف

ناوردای تانسورهای مهم دیگر مشترک است، ظهور جملات شامل براکت میدان‌های برداری مختلف در آن است. این گونه جملات هستند که نشان می‌دهند چگونه عملگر تعریف شده بر توابع هموار خطی است، ولی این خصوصیت در روش کار کردن بر دستگاه‌های مختصاتی مشهود نیست.

در حالت خاصی که ω یک ۱–فرم باشد، قضیهٔ ۴.۴.۷ فرمول ذیل را بیان می‌دارد:

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$$

این فرمول امکان بیان دومی از قضیهٔ ۴.۲.۶ (قضیهٔ انتگرالپذیری فروبینیوس) براساس فرمهای دیفرانسیلی را فراهم می سازد. حلقهٔ $\Omega(M)$ را به صورت مجموع مستقیم حلقهٔ $\ell-$ فرمهای بر M با ℓ دلخواه، تعریف می‌کنیم، اگر Δ توزیعی $k-$ بعدی بر M باشد، آنگاه $\mathcal{D}(\delta) \subset \Omega(M)$ را بصورت حلقهٔ تولید شده توسط همهٔ فرمهای با خاصیت زیر تعریف می‌کنیم: اگر ℓ از درجهٔ ℓ باشد، آنگاه

$\omega(X_1,\cdots,X_\ell)$ هر گاه $X_1,\cdots,X_\ell$ به δ متعلق باشند.

روشن است که اگر $\omega_1,\omega_2 \in \mathcal{D}(\Delta)$ آنگاه $\omega_1 + \omega_2 = \mathcal{D}(\Delta)$ و نیز اگر $\eta\wedge\omega \in \mathcal{D}(\Delta)\eta\wedge\omega \in \mathcal{D}(\Delta)$. بنابراین $\mathcal{D}(\Delta)$ ایده آلی در حلقهٔ $\Omega(M)$ است. ایده آل $\mathcal{D}(\Delta)$ به شکل موضعی توسط $n-k$ یک فرم مستقل ω^{k+1}، $\cdots$ و ω^n تولید می‌گردد. در واقع، در همسایگی‌ای از هر نقطه $p\in M$، دستگاهی مختصاتی (x,U) چنان می‌توانیم انتخاب کنیم که بردارهای $\partial/\partial x^k\Big|_p$، $\cdots$ و $\partial/\partial x^k\Big|_p$ تار Δ_p را تولید می‌کنند. در این صورت عنصر $dx^1(p)\wedge\cdots\wedge dx^k(p)$ بر Δ_p ناصفر است. بنا به پیوستگی، این مطلب برای هر q نزدیک (باندازه کافی) به p نیز درست است، که براساس نتیجهٔ ۳.۲.۷ نتیجه می‌گیریم $dx^1(q)$، $\cdots$ و $dx^k(q)$ در Δ_q مستقل خطی هستند. بنابراین، توابع هموار f^α_β طوری وجود دارند که

$$dx^\alpha(q) = \sum_{\beta=1}^{k} f^\alpha_\beta(q)\,dx^\beta(q) \ (\text{تحدید شده به}\ \Delta) \qquad \alpha = k+1,\cdots,n$$

بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم

$$\omega^\alpha = dx^\alpha - \sum_{\beta=1}^{k} f^\alpha_\beta\, dx^\beta$$

۵.۷ قضیهٔ انتگرالپذیری فروبینیوس (نوع دوم)

۱.۵.۷ گزاره. (قضیهٔ انتگرالپذیری فروبینیوس؛ نوع دوم). توزیع Δ بر M وقتی و تنها وقتی انتگرالپذیر است که $d(\mathcal{D}(\Delta)) \subseteq \mathcal{D}(\Delta)$.

اثبات: به شکل موضعی ۱− فرمهای ω^1، $\cdots$ و ω^n را طوری می‌توانیم انتخاب کنیم که به ازاء هر q ای T_q^*M را تولید می‌کنند، وبعلاوه ω^{k+1}، $\cdots$ و w^n ایده آل $\mathcal{D}(\Delta)$ را تولید می‌کنند. گیریم X_1، $\cdots$ و X_n میدان‌های برداری با $\omega^i(x_j)\delta_j^i$ هستند. بنابراین، X_1، $\cdots$ و X_k توزیع Δ را تولید می‌کنند. پس وقتی و تنها وقتی Δ انتگرالپذیر است که توابع هموار C_{ij}^β چنان یافت شوند که

$$[X_i, X_j] = \sum_{\beta=1}^{k} C_{ij}^\beta X_\beta \qquad i, j = 1, \cdots, k$$

اکنون

$$d\omega^\alpha(X_i, X_j) = X_i(\omega^\alpha(X_j)) - X_j(\omega^\alpha(X_i)) - \omega^\alpha([X_i, X_j])$$

برای $k \leq j$ و $i \leq 1$ و $\alpha\rangle k$ دو جملهٔ اول در سمت راست صفرند. پس وقتی و تنها وقتی $d\omega^\alpha(X_i, X_j) = 0$ که $\omega^\alpha([x_i, X_j]) = 0$. اما، وقتی و تنها وقتی به ازاء هر α ای $\omega^\alpha([X_i, X_j]) = 0$ که هر $[X_i, X_j]$ ای به Δ متعلق است، (به عبارت دیگر، Δ انتگرالپذیراست.) حال آنکه هر $d\omega^\alpha(X_i, X_j)$ ای وقتی و تنها وقتی صفر است که هر $d\omega^\alpha$ ای به $\mathcal{D}(\Delta)$ متعلق باشد. □

توجه کنید که به ازاء فرم‌های q ای $(i < j)\omega^i \wedge \omega^j$ فضای $\Omega^2(T_qM)$ را تولید می‌کند. بنابراین، به ازاء فرم‌های θ_j^α بخصوص، می‌توانیم بنویسیم

$$d\omega^\alpha = \sum_{i<j} C_{ij}^\alpha\, \omega^i \wedge \omega^j = \sum_j \theta_j^\alpha \wedge \omega^j$$

اگر $\alpha\rangle k$ و $j_0, i_0 \leq k$ متمایز باشند، داریم

$$0 = d\omega^\alpha(X_{i_0}, X_{j_0}) = \sum_j (\theta_j^\alpha \wedge \omega^j)(X_{i_0}, X_{j_0}) = \theta_{j_0}^\alpha(X_{i_0})$$

و بنابراین، شرط $\mathcal{D}(\mathcal{D}(\Delta)) \subseteq \mathcal{D}(\Delta)$ را به صورت

$$d\omega^\alpha = \sum_{\beta\rangle k} \theta_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta$$

می‌توان نوشت. چنانچه دستگاهی مختصاتی (x, U) چنان مطرح کنیم که باریکه‌های

$$\{q \in U : x^{k+1}(q) = u^{k+1}, \cdots, x^n(q) = a^n\}$$

منیفلدهای انتگرال Δ باشند، در این صورت dx^{k+1}، $\cdots$ و dx^n پایداری برای $\mathcal{D}(\Delta)$ تشکیل می‌دهند، و لذا ω^{k+1}، $\cdots$ و ω^n بایستی ترکیبی خطی از آنها باشند. پس، ثابت شد که

۲.۵.۷ نتیجه. اگر ω^{k+1}، $\cdots$ و ω^n یک فرمهای مستقل خطی در یک همسایگی از $p \in M$ باشند، آنگاه ۱ $-$ فرمهای $(\alpha, \beta\rangle k)\theta^\alpha_\beta$ با

$$d\omega^\alpha = \sum_\beta \theta^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta$$

وقتی و تنها وقتی وجود دارند که توابع $(\alpha, \beta\rangle k) g^\beta, f^\alpha_\beta$ طوری وجود داشته باشند که

$$\omega^\alpha = \sum_\beta f^\alpha_\beta \, dg^\beta$$

با اینکه قضیهٔ ۴.۴.۷ در کانون توجه به تعاریف ناوردا قرار دارد، بکارگیری آن در حالتهای ۱ $k\rangle$ دشوار است (در فصل پایانی جلد ۵ یک استثناً خاص آورده شده است). مسألهٔ ۱۸ تعریف ناوردای دیگری از $d\omega$ را بر اساس استقراً بر درجهٔ ω را مطرح می‌کند، که بسیار ساده تر است. خواننده می‌تواند مشکلات موجود در بکارگیری تعریف در قضیهٔ ۴.۴.۷ برای اثبات ویژگی مهم ذیل از d را تجربه کند:

۳.۵.۷ گزاره. اگر $f : M \to N$ هموار و ω یک $k-$ فرم بر N باشد، آنگاه $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

اثبات: برای $p \in M$، فرض می‌کنیم (x, U) دستگاهی مختصاتی حول $f(p)$ است. می‌توانیم فرض کنیم

$$\omega = g\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

به استقراً بر k عمل می‌کنیم. برای $k = 0$ داریم

$$f^*(dg)(X) = dg(f_* X) = [f_* X](g) = X(g \circ f) = d(g \circ f)(X)$$

(و البته، f^*g را به صورت $g\circ f$ می‌توان تعبیر کرد). با فرض فرمول برای $k-1$ داریم

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d((f^*g\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{k-1}})\wedge f^*\,dx^{i_k}) \\ &= d(f^*g\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{k-1}})\wedge f^*\,dx^{i_k}+0 \end{aligned}$$

(زیرا $d\,f^*dx^{i_k}=dd(x^{i_k}\circ f)=0$)

$$\begin{aligned} &= f^*(d(g\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{k-1}}))\wedge f^*\,dx^{i_k} \quad \text{(بنا به فرض استقراء)} \\ &= f^*(dg\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{k-1}})\wedge f^*\,dx^{i_k} \\ &= d((f^*(dg\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{k-1}}\wedge dx^{i_k})=f^*(d\omega) \end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۶.۷ فرم بسته و دقیق

بنا به آنچه که در فصل قبل ملاحظه شد، خاصیتی کیفی از d وجود دارد که قضیه‌ای اساسی از هندسه دیفرانسیل را تشکیل می‌دهید: رابطهٔ $d^2=0$ طریقی قابل توجه برای بیان این مطلب است که مشتقات جزئی مرکب برابرند. مجموعه اصطلاحات دیگری برای بیان این مطلب وجود دارد. فرم ω را در صورتی بسته گوئیم که $d\omega=0$ و آنرا در صورتی دقیق گوئیم که به ازاً یک η ای $d\eta=\omega$. (اصطلاح «دقیق» کلاسیک است — فرم دیفرانسیل را ساده «دیفرانسیل» مینامند. پس دیفرانسیل وقتی دقیق گفته می‌شود که عملاً دیفرانسیل یک دیفرانسیل دیگر باشد. اصطلاح بسته مبتنی بر اصطلاح مشابهی در خصوص زنجیره‌ها است، که در فصل بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت.) چون $d^2=0$، هر فرم دقیق، بسته است. به بیان دیگر، $d\omega=0$ شرط لازم برای حل $d\eta=\omega$ است. اگر ω یک ۱ — فرم باشد (با $\omega=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,dx^i$)، آنگاه شرط $d\omega=0$ به این معنی است که

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}=\frac{\partial\omega^j}{\partial x^i}$$

و این شرایط برای حل $\omega=df$ لازمند به عبارت دیگر ما برای

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}=\omega_i$$

اکنون، براساس قضیهٔ ۲.۱.۶، این شرایط کافی نیزهستند در مورد ۲— فرمها وضعیت دشوارتر است اگر ω یک ۲— فرم در $\mathbb{R}^۳$ به شکل

$$\omega = A\,dy \wedge dz - B\,dx \wedge dz + C\,dx \wedge dy$$

باشد، آنگاه وقتی و تنها وقتی $\omega = d(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$ که

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C.$$

شرط لازم $d\omega = ۰$ عبارتست از

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = ۰$$

در حالت کلی، با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی پیچیده‌تری سروکار داریم (وبنابراین شرایط انتگرالپذیری پیچیده‌تری بدست می‌آید). ثابت می شود که این شرایط لازم، کافی هستند: اگر ω بسته باشد،آنگاه دقیق است ۰ این حکم نیز مثل سایر احکام ما در خصوص معادلات دیفرانسیل، موضعی هستند. البته، محدود کردن بحثها به حالت موضعی دلایل خاص خود را دارد. حالت ۱—فرم بسته ω بر $\mathbb{R}^۲$ را در نظر بگیرید:

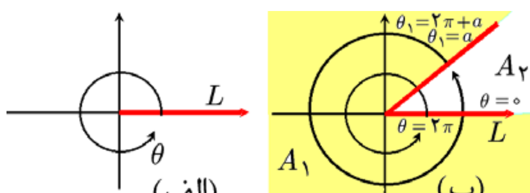
$$\omega = f\,dx + g\,dy \quad \text{با} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

می‌دانیم که چگونه تابعی α برکل $\mathbb{R}^۲$ با $\omega = d\alpha$ می‌توانیم بیابیم؛ یعنی

$$\alpha(x,y) = \int_{x_۰}^{x} f(t,y_۰)dt + \int_{y_۰}^{y} g(x,t)dt$$

ازسوی دیگر، اگر ω تنها بر $\mathbb{R}^۲ - \{۰\}$ تعریف شود، وضعیت خیلی متفاوت خواهد شد. یادآور می‌شویم که هرگاه $L \subset \mathbb{R}^۲$ برابر $\{۰\} \times [۰,\infty]$ باشد، آنگاه

$$\theta : \mathbb{R}^۲ - L \to \mathbb{R}$$



شکل ۱.۷

به گونه‌ای که در فصل ۲ تعریف شد، هموار است (به قسمت (الف) از شکل ۱.۷ توجه شود)؛ در واقع

$$(r,\theta):\mathbb{R}^{2}-L\to\{r\,:\,r>0\}+(0;2\pi)$$

وارون نگاشت $(a,b)\mapsto(a\cos b,a\sin b)$ است، که دترمینان مشتق آن در (a,b) برابر $a\neq 0$ است. باحذف شعاعی دیگر L_1 بجای L، می‌توانیم تابعی دیگر θ_1 تعریف کنیم. در این صورت $\theta_1=\theta$ بر ناحیهٔ A_1 و $\theta_1=\theta+2\pi$ در ناحیهٔ A_2. نتیجتاً، $d\theta$ و $d\theta_1$ بر ناحیهٔ مشترکشان برابرند، ولذا یک ۱—فرم ω بر $\mathbb{R}^{2}-\{0\}$ تعریف می کنند ∘ باکمی محاسبه (مسألهٔ ۲۰) می‌توان نشان داد که

$$\omega=\frac{-x}{x^{2}+y^{2}}dx+\frac{x}{x^{2}+y^{2}}dy$$

۱—فرم ω را معمولاً به شکل $d\theta$ نشان میدهند، اما این نمادگذاری ابهام دارد، زیرا $\omega=d\theta$ تنها بر $\mathbb{R}^{2}-L$ برقرار است (به قسمت (ب) از شکل ۱.۷ توجه شود)∘ درواقع، ω به ازاء هیچ تابع هموار از کلاس C^1 نظیر $f:\mathbb{R}^{2}-\{0\}\to\mathbb{R}$ به شکل df نیست چرا که اگر $\omega=df$ آنگاه $df=d\theta$ بر $\mathbb{R}^{2}-L$ و بنابراین $d(f-\theta)=0$، که درنتیجه $\partial f/\partial x=\partial\theta/\partial x$ و $\partial f/\partial y,\partial\theta/\partial y$. بایستی «ثابت» $f=\theta+$ بر $\mathbb{R}^{2}-L$، که محال است. زیرا هیچ کجا $d\omega=0$ نیست. (زیرا، $d(d\theta)=0$ بر $\mathbb{R}^{2}-L$ و $d(d\theta)$ بر $(\mathbb{R}^{2}-L_1)$. پس ω بسته است، ولی دقیق نیست. (بااین حال، در همسایگی‌ای از هر نقطهٔ $\mathbb{R}^{2}-\{0\}$ دقیق است.)

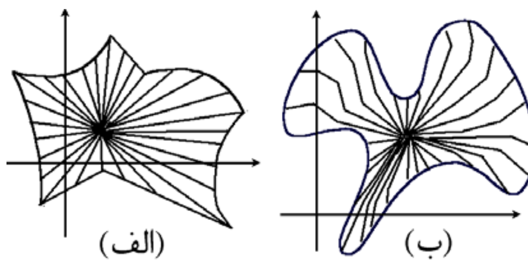
روشن است که ω در هیچ همسایگی حتی کوچک از ∘ دقیق نیست. این مثال نشان می‌دهد که شکل ناحیه، و نه اندازهٔ آن، دراینکه هر فرم بسته‌ای دقیق باشد یا نه دخالت دارد.

منیفلد M را در صورتی (به شکل هموار) **انقباض‌پذیر** گوئیم به نقطهٔ $p_0\in M$ که تابعی هموار چون

$$H:M\times[0;1]\to M$$

چنان یافت گردد که به ازاء هر $p\in M$ ای $H(p,1)=p$ و $H(p,0p_0$. مثلاً، $\mathbb{R}^n$ به $0\in\mathbb{R}^n$ به شکل هموارانقباض‌پذیراست؛ تابع $H:\mathbb{R}^n\times[0;1]\to\mathbb{R}^n$ رابه صورت $H(p,t)=t_p$ می‌توانیم تعریف کنیم کلی تر، در صورتی $U\subset\mathbb{R}^n$ به نقطهٔ

$p_\circ \in U$ انقباض پذیراست که دارای این ویژگی باشد که اگر $p \in U$، آنگاه به اندازهٔ هر $t \in [\circ, ۱]$ ای $p_\circ + t(p - p_\circ) \in U$ (چنین ناحیه‌ای U را **ستاره شکل** نسبت به $p_\circ$ می‌نامیم).البته، بسیاری از نواحی به نقطه قابل انقباض هستند. چنانچه $[\circ, ۱]$ را نمایشگر بازدهٔ زمانی درنظر بگیریم، آنگاه به ازاء هر زمان مفروض t، نگاشت $p \mapsto H(p,t)$ از M بتوی خودش است؛ درلحظهٔ $t = ۱$ درست همان نگاشت همانی است و در لحظهٔ $t = \circ$، نگاشت ثابت می‌باشد (به قسمت (الف) از شکل ۲.۷ توجه شود).



شکل ۲.۷

نشان خواهیم داد که اگر M بشکل هموارانقباض‌پذیر باشد به یک نقطه، آنگاه هرفرم بسته بر M دقیق است. (بالطبع،این حکم و تحلیل ما در مورد فرم $d\theta$ در بالا، از نظر شهودی روشن است که فضای $\mathbb{R}^۲ - \{\circ\}$ به هیچ نقطه‌ای انقباض پذیراست؛ همین استدلال برای فضای $\mathbb{R}^n - \{\circ\}$ درست است، اما تا فصل بعد آنرا ثابت نمی‌کنیم.) تکنیک در اثبات حکم مااین است که $M \times [\circ; ۱]$ (برای منیفلد دلخواه M) را بررسی می کنیم، و به سختی به کل H توجه می‌کنیم (به قسمت (ب) از شکل ۲.۷ توجه شود). برای هر $t \in [\circ; ۱]$ ای نگاشت $i_t : M \to M \times [\circ; ۱]$ را به صورت $i_t(p) = (p,t)$ تعریف می‌کنیم. ادعامی کنیم که اگر ω فرمی بر $M \times [\circ; ۱]$ با $d\omega = \circ$ باشد، آنگاه $i_۱^*w - i_\circ^*w$ دقیق است: بعداً خواهیم دید (و شما می‌توانید آنرا همین الان تحقیق کنید) که قضیه از این مطلب به صورت بدیهی نتیجه می‌شود

ابتدا یک ۱—فرم ω بر $M \times [\circ; ۱]$ در نظر می‌گیرم. باکار در یک دستگاه مختصات بر $M \times [\circ; ۱]$ آغاز می‌کنیم تابعی واضح t بر $M \times [\circ; ۱]$ (یعنی، تصویر π برمختص دوم) وجود دارد، و اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی بر M باشد و π_M تصویر بر M، آنگاه

$$(x^۱ \circ \pi_M, \cdots, x^n \circ \pi_M, t)$$

دستگاهی مختصاتی بر $U \times [0;1]$ است $x^i \circ \pi_M$ را با $\bar{x}^i$ نشان می‌دهیم (به جهت خلاصه‌تر شدن بحث). بسادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$i_\alpha^*\left(\sum_{i=1}^n, \omega_i\, d\bar{x}^i + f\,dt\right) = \sum_{i=1}^n \omega_i(0, \alpha) dx^i$$

که $\omega_1(0, \alpha)$ نمایشگر تابع $p \mapsto \omega_i(p, \alpha)$ است. حال، در مورد $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i\, d\bar{x}^i + f\,dt$ داریم

$$d\omega = \left\{ \text{جملاتی که } dt \text{ را در بر دارند} \right\} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial t} d\bar{x}^i \wedge dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}\, d\bar{x}^i \wedge dt$$

سپس، از $d\omega = 0$ نتیجه می‌گردد $\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}$. درنتیجه،

$$\omega_i(p, 1) - \omega_i(p, 0) = \int_0^1 \frac{\partial \omega_i}{\partial t}(p, t)dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}(p, t)dt$$

و لذا

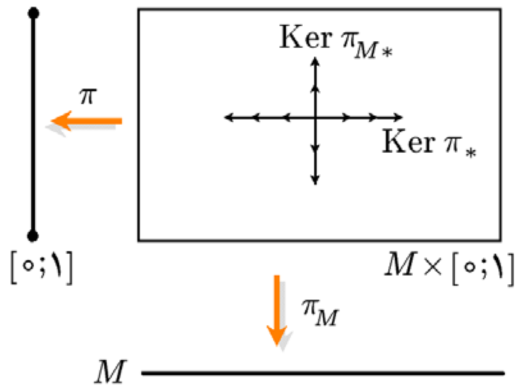
$$\sum_{i=1}^n \omega_i(p, 1)dx^i - \sum_{i=1}^n \omega_i(p, 0)dx^i = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}(p, t)dt\right) dx^i \qquad (۳.۷)$$

اگر $g : M \to \mathbb{R}$ را به صورت $g(p) = \int_0^1 f(p, t)dt$ تعریف کنیم، آنگاه

$$\frac{\partial g}{\partial x^i}(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}(p, t)dt \qquad (۴.۷)$$

معادلات (۳.۷) و (۴.۷) نشان می‌دهند که $i_1^* w - i_0^* = dg$. البته مشهود است که با اینکه از دستگاه مختصات استفاده کرده‌ایم، تابع f و در نتیجه g هم حقیقتاً مستقل ازانتخاب دستگاه مختصات هستند. توجه شود که در مورد فضای مماس $M \times [0; 1]$ داریم

$$T_{(p,t)}(M \times [0; 1]) = \mathrm{Kernel}(\pi_*) \oplus \mathrm{Kernel}(\pi_{M*}) \qquad (۵.۷)$$



شکل ۳.۷

اگر فضای برداری V مجموع مستقیم $V=V_1\oplus V_2$ زیر فضا باشد، آنگاه هر $\omega\in\Omega^i(V)$ ای را به صورت $\omega=\omega_1+\omega_2$ می‌توان نوشت، که

$$\omega_1(v_1+v_2)=\omega(v_1)=\omega(v_1)\qquad \omega_2(v_1+v_2)=\omega(v_2)$$

با بکارگیری این مطلب در مورد تجزیهٔ (۵.۷)، ۱—فرم ω بر $M\times[0;1]$ رابه صورت $\omega_1+\omega_2$ می‌توان نوشت، در نتیجه f ای منحصر بفرد هست که $\omega_2=f\,dt$.

در کل، برای $k-$ فرم مفروض ω، بسادگی ملاحظه می‌شود (مسألهٔ ۲۲) که ω را به صورتی یکتا به شکل

$$\omega=\omega_1+(dt\wedge\eta)$$

می‌توان نوشت، که $\omega_1(v_1,\cdots,v_k)=0$ اگر به ازاء یک i ای $v_i\in\mathrm{Kernel}\pi_{M*}$، و η یک $(k+1)-$ فرم باخاصیتی مشابه است. $(k-1)-$ فرم $I\omega$ بر M را به شکل زیر تعرف می‌کنیم:

$$I\omega(p)(v_1,\cdots,v_{k-1})=\int_0^1\eta(p,t)(i_{t*}v_1,\cdots,i_{t*}v_{k-1})dt$$

ادعا می‌کنیم که از $d\omega=0$ نتیجه می‌شود $i_1^*w-i_0^*=d(I\omega)$ در واقع، یافتن فرمولی برای $i_1^*w-i_0^*w$ که حتی وقتی $d\omega\neq0$ بر قرار باشد، ساده‌تر است.

۱.۶.۷ قضیه. به ازاء هر $k-$ فرم ω بر $M\times[0;1]$ داریم

$$i_1^*w-i_0^*\omega=d(I\omega)+I(d\omega)$$

(نتیجتاً، اگر $d\omega = 0$ آنگاه $d(I\omega) = i_1^* w - i_0^*$.)

اثبات: چون $I\omega$ را قبلاً به شکل نادر را تعریف کرده‌ایم، به خوبی می‌توانیم در دستگاهی مختصاتی کار کنیم. نظیر $(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n, t)$ روشن است که عملکرد I خطی است، و لذا تنها دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $\omega = f\, d\bar{x}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}^{i_k} = f\, d\bar{x}^I$، آنگاه

$$d\omega = \cdots + \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge d\bar{x}^I$$

بسادگی ملاحظه می گردد که

$$\begin{aligned} I(d\omega)(p) &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(p,t)\, dt \right) d\bar{x}^I(p) \\ &= \{f(p,1) - f(p,0)\} dx^I(p) = i_1^*(p) - i_0^*(p) \end{aligned}$$

چون $I\omega = 0$ این حکم را در این حالت ثابت می‌کند.

۲) اگر $\omega = f\, dt \wedge d\bar{x}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}^{i_{k-1}} = f\, dt \wedge d\bar{x}^I$، آنگاه $i_1^*\omega = i_0^*\omega = 0$. اکنون

$$\begin{aligned} I(d\omega)(p) &= I \left(-\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^\alpha} dx \wedge d\bar{x}^\alpha \wedge d\bar{x}^I \right)(p) \\ &= -\sum_{\alpha=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^\alpha}(p,t) dt \right) dx^\alpha \wedge dx^I \end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned} d(I\omega) &= \left(\int_0^1 f(p,t) dt \right) dx^I \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\int_0^1 f(p,t) dt \right) dx^\alpha \wedge dx^I \end{aligned}$$

روشن است که در این صورت $I(d\omega) + d(I\omega) = 0$. □

۷.۷ لم پوانکاره

۱.۷.۷ نتیجه. اگر M بطور هموار به نقطه‌ای $p_0 \in M$ انقباض پذیر باشد، آنگاه هر فرم بسته ω بر M دقیق است.

اثبات: مطابق فرض $H: M \times [۱;۰] \to M$ ای داریم که به ازأ هر $p \in M$ ای $H(p,۰) = p_\circ$ و $H(p,۱) = p$. بنابراین $H \circ i_۱ : M \to M$ نگاشت همانی است، $H \circ i_\circ : M \to M$ نگاشت ثابت $p_\circ$ است، اما $d(H^*\omega) = H^*(d\omega) = ۰$ و لذا بنا به قضیه

$$\omega - ۰ = i_۱^*(H^*\omega) - i_\circ^*(H^*\omega) = d(I(H^*\omega))$$

وبرهان تمام است. □

نتیجه ۲.۵.۷ را برخی لم پوانکاره می‌دانند، در حالی که همه $d^۲ = ۰$ را لم پوانکاره می شناسند. (البته، من به هیچ وجه نمی‌دانم پوانکاره با آن چه ارتباطی داشته است.) در حالت زیر مجموعهٔ باز ستاره شکل U از $\mathbb{R}^n$، که فرمول صریح H را داریم، فرمول صریح برای $I(H^*\omega)$ را به ازاء هر فرم ω بر U می‌توانیم بیابیم (مسألهٔ ۳۲). چون فرم جدید با انتگرال ساخته می‌شود بنابراین دستگاه معادلات با مشتقات جزیی $\omega = d\eta$ را بکمک انتگرال‌ها می‌توانیم حل کنیم. قضایای کلاسیک در خصوص میدان‌های برداری در $\mathbb{R}^۳$ وجود دارند، که قابل استنتاج از لم پوانکاره و وارون آن هستند (مسألهٔ ۲۷)، و در واقع منشأ طرح d در تعمیم یک شکل همهٔ این احکام بوده است. با اینکه لم پوانکارد و وارونش به شکل زیبایی در بحث ما و به صورت قضایای بنیادی هندسه دیفرانسیل مطرح شدند، اما همواره دلیل اهمیت d برای من یک راز بود. پاسخ این پرسش را پالیس درمقالهٔ «عملگرهای طبیعی بر فرم‌های دیفرانسیل» که در صفحات ۱۲۵ تا ۱۴۱ از مجلهٔ Trans. Amer. Math, Soc, 92(1959) به چاپ رسانده است، داده است. فرض کنید عملگری D از $k-$ فرم‌ها به $\ell-$فرمها داریم که به ازاء هر نگاشت هموار $f: M \to N$، دیاگرام

$$\begin{array}{ccc}
k - \text{فرمهای بر } M & \xleftarrow{f^*} & k - \text{فرمهای بر } M \\
\downarrow D & & \downarrow D \\
\ell - \text{فرمهای بر } M & \xleftarrow{f^*} & \ell - \text{فرمهای بر } M
\end{array}$$

تعویض پذیر است. قضیهٔ پالیس اذعان می‌دارد که بجز مواردی بخصوص، همیشه $D = ۰$. این موارد خاص به تعبیری چنین هستند: اگر $k = \ell$، آنگاه D می‌تواند مضربی از نگاشت همانی باشد، و نه چیز دیگر. اگر $\ell = k + ۱$ آنگاه D تنها میتواند مضربی از d باشد. (در نتیجه، $d^۲ = ۰$، چرا که $d^۲$ می‌تواند دیاگرام بالا را تعویض‌پذیر کند!) تنها یک حالت دیگر وجود دارد که D ی غیر صفر ممکن است وجود داشته باشد

وقتی k برابر بعد M است و $\ell = 0$. در این حالت، D می‌تواند مضربی از «انتگرال» باشد که در فصل بعد مورد بررسی قرار می گیرد.

۸.۷ تمرینات

۱. نشان دهید که اگر تعریف کنیم $\sigma(v_1,\cdots,v_k) = (v_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,v_{\sigma^{-1}(k)})$ آنگاه $\sigma.p.(v_1,\cdots,v_k) = \sigma p.(v_1,\cdots,v_k)$.

۲. گیریم $\overline{\mathrm{Alt}}$ ولی بدون عامل $1/k!$ است، و تعریف کنیم $w\overline{\wedge}\eta = \mathrm{Alt}(w\otimes\eta)$. نشان دهید $\overline{\wedge}$ شرکتپذیر نیست. (حالت $\eta\in\omega^1(V)$ و ω و $\theta\in\omega^2(V)$ را بررسی کنید.)

۳. گیریم S' زیر گروه $S_{k+\ell}$ متشکل از همهٔ σ هایی است که هر دو مجموعهٔ $\{1,\cdots,k\}$ و $\{k+1,\cdots,k+\ell\}$ را حفظ می کنند. **برش موضعی** S' زیر مجموعه‌ای $k\subset S_{k+\ell}$ است که از هر همدستهٔ چپ S' درست یک عضو را در بردارد.

الف) نشان دهید که به ازاء هر برش گذری K داریم

$$\omega\wedge\eta(v_1,\cdots,v_{k+\ell}) = \sum_{\sigma\in k}\mathrm{sgn}\,\sigma.w\otimes\eta(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k+\ell)})$$

این تعریف راحتی در حالت میدانهای با مشخصهٔ متناهی می‌توان استفاده کرد.

ب) از این تعریف نشان دهید که $\omega\wedge\eta$ نوسانی است، و $\omega\wedge\eta = (-1)^{k\ell}\eta\wedge\omega$. (اثبات شرکت‌پذیری خیلی شلوغ است.)

ج) جایگشت $\sigma\in S_{k+\ell}$ را در صورتی «جایگشت برزن» گوئیم که $\sigma(1)<\sigma(2)<\cdots<\sigma(k)$ و نیز $\sigma(k+1)<\sigma(k+2)<\cdots<\sigma(k+1)$ نشان دهید که مجموعه همهٔ جایگشت‌های برزن، یک برش گذری برای S' است.

۴. برای $v\in V$ و $w\in\omega^k(v)$ **ضرب داخلی یا انقباض** $v\rfloor w\in\Omega^{k-1}(V)$ را به صورت

$$(v\rfloor w)(v_1,\cdots,v_{k-1}) = \omega(v,v_1,\cdots,v_{k-1})$$

تعریف می‌کنیم. نماد $i_v\,w$ نیز خیلی مرسوم است.

الف) نشان دهید

$$v\rfloor(w\rfloor w) = -w\rfloor(v\rfloor w)$$

ب) نشان دهید که اگر v_1، $\cdots$ و v_n پایه‌ای برای V با پایهٔ همزاد (دوگان) φ_1، $\cdots$ و φ_n باشد، آنگاه

$$v_j\rfloor(\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_k})=\begin{cases}0 & \text{اگر } j \text{ با هیچ } i_\alpha \text{ ای برابر نباشد}\\ (-1)^{\alpha-1}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\varphi}_{i_\alpha}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_k} & \text{اگر } j=i_\alpha\end{cases}$$

ج) ثابت کنید که اگر $\omega_1\in\Omega^k(V)$ و $\omega_2\in\Omega^\ell(V)$ آنگاه

$$v\rfloor(\omega_1\wedge\omega_2)=(v\rfloor\omega_1)\wedge\omega_2+(-1)^k\omega_1\wedge(v\rfloor\omega_2)$$

(از (ب) و خطی بودن همه چیز استفاده کنید.)

د) فرمول (ج) را برای تعریف $\omega_1\wedge\omega_2$ به کمک استقراء بر $k+\ell$ میتوان استفاده کرد (که برای حالت فضای برداری بر میدان دلخواه عمل می کند): اگر $\wedge$ برای فرم‌های از درجهٔ با مجموع $k+\ell\rangle$ تعریف شده باشد، تعریف می کنیم

$$\begin{aligned}\omega_1\wedge\omega_2(v_1,\cdots,v_{k+\ell}) &= [(v_1\rfloor\omega_1)\wedge\omega_2](v_2,\cdots,v_{k+\ell})\\ &\quad+(-1)^k[\omega_1\wedge(v_1\rfloor\omega_2)](v_2,\cdots,v_{k+\ell})\end{aligned}$$

نشان دهید که $\omega_1\wedge\omega_2$ با این تعریف، متقارن کج است (کافی است بررسی شود که اگر v_1 با v_2 عوض کنیم، علامت سمت راست عوض می‌شود).

ه) به استقراء ثابت کنید که $\wedge$ دو خطی است وبعلاوه $\omega_1\wedge\omega_2=(-1)^{k\ell}\omega_2\wedge\omega_1$.

و) اگر X میدانی برداری بر M و ω یک $k-$ فرم بر M باشد، $(k-1)-$ فرم $X\rfloor w$ را به صورت $(X\rfloor w)(p)=X(p)\rfloor\omega(p)$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که اگر ω_1 یک $k-$ فرم باشد، آنگاه

$$X\rfloor(\omega_1\wedge\omega_2)=(X\rfloor\omega_1)\wedge\omega_2+(-1)^k\omega_1\wedge(X\rfloor\omega_2)$$

۵. نشان دهید که n تابع $f_1,\cdots,f_n:M\to\mathbb{R}$ وقتی و تنها وقتی در همسایگی‌ای از نقطهٔ $p\in M$ تشکیل یک دستگاه مختصات می‌دهند که $df_1\wedge\cdots\wedge df_n(p)\neq 0$.

۶. عنصر $w\in\Omega^k(V)$ را در صورتی **تجزیه‌پذیر** گوئیم که به ازاء یک $\varphi_i\in V^*=\Omega^1(V)$ ای $\omega=\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k$. در این صورت نشان دهید که

الف) اگر $\dim V\leq 3$ آنگاه $w\in\Omega^2(V)$ ای تجزیه‌پذیر است.

ب) اگر φ_i های با $i=1,\cdots,4$ مستقل باشند، آنگاه $\omega=\varphi_1\wedge\varphi_1+\varphi_3\wedge\varphi_4$ تجزیه‌پذیر نیست.

[راهنمایی: به $\omega\wedge\omega$ توجه شود.]

۷. برای هر $\omega \in \Omega^k(V)$ پوچساز ω را $\mathrm{Ann}(\omega) = \{\varphi \in V^* : \varphi \wedge \omega = 0\}$ تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید $\dim \mathrm{Ann}(\omega) \leq k$ و تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است، که ω تجزیه‌پذیر باشد.

ب) هر زیرفضا از V^* پوچساز $\mathrm{Ann}(\omega)$ یک ω تجزیه‌پذیر است، که در حد ضریب یکتا است.

ج) اگر ω_1 و ω_2 تجزیه‌پذیر باشند، آنگاه وقتی و تنها وقتی $\mathrm{Ann}(\omega_1) \subset \mathrm{Ann}(\omega_2)$ که به ازاء یک η ای $\omega_2 = \omega_1 \wedge \eta$.

د) اگر ω_i ها تجزیه‌پذیر باشند، آنگاه وقتی و تنها وقتی

$$\mathrm{Ann}(\omega_1) \cap \mathrm{Ann}(\omega_2) = \{0\}$$

که $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. در این حالت

$$\mathrm{Ann}(\omega_1) + \mathrm{Ann}(\omega_2) = \mathrm{Ann}(\omega_1 \wedge \omega_2)$$

ه) اگر V با بعد n باشد، آنگاه هر $w \in \Omega^{n-1}(V)$ ای تجزیه‌پذیر است.

و) چون $v_i \in V$ ها را به عنوان اعضایی از V^{**} می‌توان تصور کرد، بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Omega^k(V^*)$ قسمتهای (الف) تا (د) را بر حسب این $\wedge$ ضرب بیان کنید.

۸. الف) گیریم $w \in \Omega^2(V)$. نشان دهید پایه‌ای φ_1، $\cdots$ و φ_n از V^* چنان وجود دارد که

$$\omega(\varphi_1 \wedge \varphi_2) + \cdots + (\varphi_{2r-1} \wedge \varphi_{2r})$$

راهنمایی : اگر $\omega = \sum_{i<j} a_{ij} \psi_i \wedge \psi_j$، φ_1 را بین ψ_1، π_3 و ψ_n و φ_2 را بین ψ_2، $\cdots$ و ψ_n طوری انتخاب کنید

$$\omega = \varphi_1 \wedge \varphi_2 + w'$$

که w' نه ψ_1 را در بردارد و نه ψ_2 را.

ب) نشان دهید که ضرب گوه‌ای r تایی $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ تا صفر و تجزیه‌پذیر است، و ضرب گوه‌ای $(r+1)$ تایی ω در خودش صفر است. بنابراین، r خوشتعریف است؛ آنرا رتبهٔ ω است.

ج) اگر $\omega = \sum_{i<j} a_{ij}\psi_i \wedge \psi_j$، نشان دهید رتبهٔ ω برابر رتبهٔ (a_{ij}) است.

۹. اگر $v_1 \cdots v_n$ پایه‌ای برای V باشد و $\omega_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} v_j$، نشان دهید

$$\det(\alpha_{ij})\omega_1^* \wedge \cdots \wedge \omega_n^* = v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$$

۱۰. گیریم $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ است. گیریم $1 \leq p \leq n$ ثابت است و $q = n-p$ به ازاء $H = h_1 < \cdots < h_p$ و $K = k_1 < \cdots < k_q$ تعریف می‌کنیم

$$B^H = \begin{vmatrix} a_{1,h_1} & \cdots & a_{1,h_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,h_1} & \cdots & a_{p,h_p} \end{vmatrix}, \quad C^K = \begin{vmatrix} a_{p+1,k_1} & \cdots & a_{p+1,k_q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,k_1} & \cdots & a_{n,k_q} \end{vmatrix}.$$

الف) اگر v_1، $\cdots$ و v_n پایه‌ای برای V باشد و $\omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j$، نشان دهید

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \sum_H B^H v_H \qquad \omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n = \sum_K C^K v_K$$

ب) گیریم $H' = \{1, \cdots n\} - H$ (با ترتیب صعودی) است. نشان دهید

$$v_H \wedge v_K = \begin{cases} 0 & K \neq H' \text{ اگر} \\ e_{H,H'} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n & K = H' \text{ اگر} \end{cases}$$

که $e_{H,H'}$ علامت جایگشت زیر است

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p & p+1 & \cdots & n \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p & k_1 & \cdots & k_q \end{pmatrix}$$

ج) بسط لاپلاس را ثابت کنید: $\det A = \sum_H e_{H,H'} B^H C^{H'}$.

۱۱. **(لم کارتان)**. گیریم $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in V^*$ و مستقلند و $\psi_1, \cdots, \psi_k \in V^*$ در رابطهٔ $\varphi_1 \wedge \psi_1 + \cdots + \varphi_k \wedge \psi_k = 0$ صدق می‌کنند. در این صورت اعداد a_{ij} با $a_{ij} = a_{ji}$ طوری وجود دارند که $\psi_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ji}\varphi_j$.

۱۲. علاوه بر فرم‌ها، برش‌های کلاف‌های ساخته شده از TM با استفاده از Ω و سایر عمل‌گرها را می‌توان در نظر گرفت. مثلاً، اگر $\xi = \pi : E \to B$ کلاف برداری باشد، می‌توانیم کلافی $\Omega^k(\xi^*)$ را در نظر بگیریم که تار در p از آن $\Omega^k(\{\pi^{-1}(p)\}^*)$

است. چون $\partial/\partial x^i\big|_p$ را عنصری از $(T_pM)^{**}$ می‌توان در نظر گرفت، هر برش از $\Omega^k(T^*M)$ را به شکل موضعی به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$h\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n}$$

الف) نشان می‌دهد که برش‌های $\Omega^n(T^*M)$، اشیاء هندسی متناظر به اسکالرهای نسبتی (زوج) به وزن ۱− در ۴ − ۱۰ است.

ب) گیریم $\mathcal{T}_\ell^{k[m]}(TM)$ نمایشگر فضای برداری همهٔ توابع چند خطی به شکل

$$\underbrace{V\times\cdots\times V}_{k \text{ تا}}\times\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{\ell \text{ تا}}\to\Omega^m(V)$$

است. نشان دهید برش‌های $\mathcal{T}_\ell^{k[n]}(TM)$ اشیاء هندسی متناظر به تانسورهای نسبی (زوج) از نوع $\binom{k}{\ell}$ و وزن ۱ هستند.

(توجه کنید که اگر v_1، $\cdots$ و v_n پایه‌ای برای V باشد، آنگاه اعضاء $\Omega^n(V)$ را به عنوان اعداد حقیقی می‌توان تعبیر نمود [در حقیقت، اعداد حقیقی ضرب در عامل مشترک $v_1^*\wedge\cdots\wedge v_n^*$.]

ج) اگر $\mathcal{T}_{\ell[m]}^{k}(V)$ به صورت مشابه تعریف گردد، بجز اینکه $\Omega^m(V)$ را با $\Omega^m(V^*)$ عوض کنیم، نشان دهید برش‌های $\mathcal{T}_{\ell[n]}^{k}(TM)$ اشیاء هندسی نظیر به تانسورهای نسبی (زوج) از نوع $\binom{k}{\ell}$ و وزن ۱− است.

د) نشان دهید که تانسور نسبی کواریان از نوع $\binom{0}{n}$ و وزن یک که در مسألهٔ ۴—۱۰ تعریف شد، چنانچه با مؤلفه‌های $\varepsilon^{i_1\cdots i_n}$ باشد، به نگاشت

$$\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{n \text{ تا}}\to\Omega^n(V)$$

با ضابطهٔ $(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\mapsto\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$ متناظر است. تاسنور نسبی با مؤلفه‌های $\varepsilon^{i_1\cdots i_n}$ را به صورت مشابه تعبیر کنید.

ه) فرض کنید $\Omega^{n;w}(V)$ نمایشگر مجموعهٔ همهٔ توابع $\eta: V\times\cdots\times V\to\mathbb{R}$ به شکل

$$\eta(v_1,\cdots,v_n)=[\omega(v_1,\cdots,v_n)]^w$$

باشد، که w عددی صحیح است و $w\in\Omega^n(V)$ گیریم $\mathcal{T}_\ell^{k[n;w]}(V)$ شبیه $\mathcal{T}_\ell^{k[n]}$ تعریف شود، بجز اینکه $\Omega^n(V)$ را با $\Omega^{n;w}(V)$ عوض کنیم. نشان دهید برش‌های

$\mathcal{T}_\ell^{k[n;w]}(TM)$ اشیاء هندسی نظیر به تانسورهای نسبی (زوج) از نوع $\binom{k}{\ell}$ و وزن ω هستند.

به صورت مشابه با $\mathcal{T}^k_{\ell[n;w]}$ عمل کنید.

و) احکام ذیل بیان کرد مطالبی در خصوص ضرب تانسوری $V\otimes W$ و جبر خارجی $\wedge^k(V)$ است. $\mathcal{T}_\ell^k(V)$ را با

$$\bigotimes^k V^*\otimes\bigotimes^\ell V:=\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{k\ \text{تا}}\otimes\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{\ell\ \text{تا}}$$

می‌توان یکی گرفت. چون $\Omega^m(V)\simeq\Lambda^m(V^*)\simeq\{\Lambda^m(V)\}^*$، فضاهای برداری $\mathcal{T}_\ell^{k[m]}(V)$ و $\mathcal{T}^k_{\ell[m]}(V)$ را بترتیب با $\bigotimes^k V^*\otimes\bigotimes^\ell V\otimes\Lambda^m(V)$ و $\bigotimes^k V^*\otimes\bigotimes^\ell V\otimes\Lambda^m(V^*)$ یکی می‌توان گرفت. به صورت مشابه، فضاهای برداری

$$\mathcal{T}_\ell^{k[m;w]}(V):=\bigotimes^k V^*\otimes\bigotimes^\ell V\otimes\bigotimes^w\Lambda^m(V)$$

$$\mathcal{T}^k_{\ell[m;w]}(V):=\bigotimes^k V^*\otimes\bigotimes^\ell V\otimes\bigotimes^w\Lambda^m(V^*)$$

را در نظر بگیریم. توجه شود که $\Lambda^n(V)\otimes\cdots\otimes\Lambda^n(V)$ همیشه یک بعدی است. نشان دهید که برش‌های $\mathcal{T}_\ell^{k[n;w](TM)}$ و $\mathcal{T}_\ell^k[n;w](TM)$ بترتیب به تانسورهای نسبی زوج از نوع $\binom{k}{\ell}$ و وزن ω و $-w$ متناظرند.

۱۳. الف) اگر V با بعد n بوده و $A:V\to V$ تبدیلی خطی باشد، آنگاه نگاشت $A^*:\Omega^n(V)\to\Omega^n(V)$ بایستی مضربی از یک ثابت، کردن باشد. نشان دهید $c=\det A$. (این را به عنوان تعریف تابع $\det A$ می‌توان قلمداد کرد.)

ب) نتیجه بگیرید که $\det AB=(\det A)(\det B)$.

۱۴. یاد آور می شویم که چند جمله‌ای مشخصهٔ $A:V\to V$ عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\lambda) &:= \det(\lambda I-A)\\ &= \lambda^n-(\text{trace }A)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\det A\\ &= \lambda^n-c_1\lambda^{n-1}+c_2\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^n c_n\end{aligned}$$

الف) نشان دهید C_k برابر اثر نگاشت $A^*:\Omega^k(V)\to\Omega^k(V)$ است.

ب) نتیجه بگیرید $c_k(AB)=c_k(BA)$.

ج) گیریم $\delta^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_k}$ مثل در مسالهٔ ۴—۵ (قسمت ۱۳) تعریف گردد. اگر $A:V\to V$ دارای ماتریس (a^j_i) (نسبت به یک پایه) باشد، نشان دهید

$$c_k(A)=\frac{1}{k!}\sum_{\substack{i_1\cdots i_k\\ j_1\cdots j_k}} a^{j_1}_{i_1}\,a^{j_2}_{i_2}\cdots a^{j_k}_{i_k}\,\delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}$$

بنابراین ، اگر δ مثل در صفحهٔ تعریف گردد و A تانسوری از نوع $\binom{1}{1}$ باشد، آنگاه تابع $p\mapsto c_k(A(p))$ را به صورت انقباض $(2k)$ تایی $A\otimes\cdots\otimes A\otimes\delta$ می‌توان تعریف نمود.

۱۵. گیریم $P(X_{ij})$ یک چند جمله‌ای با n^2 متغیر است. به ازاء هر ماتریس $n\times n$ چون $A(a_{ij})$، عدد $P(a_{ij})$ را به این ترتیب می‌توان تعریف کرد. یاد آور می شویم که P در صورتی **ناوردا** است که به‌ازاء هر A و هر ماتریس معکوس‌پذیر B داشته باشیم $P(A)=P(BAB^{-1})$ این مسألهٔ شمایی است از این حکم که هر P ناوردا به صورت چند جمله‌ای از چند جمله‌ایهای c_1، $\cdots$ و c_n معرفی شده در مسالهٔ ۱۴ هستند. به این حکم جبری نیاز داریم که چند جمله‌ای متقارن $Q(y_1,\cdots,y_n)$ با n متغیر y_1، $\cdots$ و y_n به صورت چند جمله‌ای از σ_1، $\cdots$ σ_n می‌توان نوشت، که σ_i عبارت از i امین چند جمله‌ای متقارن مقدماتی از y_1، $\cdots$ و y_n است.

یاد آور می‌شویم که σ_i ها را به شکل زیر می‌توان معرفی کرد

$$\pi^n_{i=1}(y-y_i)=y^n-\sigma_1y^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$$

بنابراین، صرف نظر از علامت σ_i ها ضرایب چند جمله‌ای با ریشه‌های y_1، $\cdots$ و y_n هستند. چون مقادیر ویژهٔ λ_1، $\cdots$ و λ_n هر ماتریس A بنا به تعریف، ریشه‌های چند جمله‌ای $X(\lambda)$ هستند، نتیجه می گیریم که

$$c_i(A)=\sigma_i(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

ابتدا ماتریسهای A روی اعداد مختلف $\mathcal{C}$ را در نظر می گیریم (ضرایب P ممکن است مختلط باشند).

الف) $Q(y_1,\cdots,y_n)$ را به صورت $P(A)$ تعریف می‌کنیم که A ماتریس نظری

$$\begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & y_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & y_n\end{pmatrix}$$

است. در این صورت یک چند جمله‌ای R طوری وجود دارد که

$$Q(y_۱,\cdots,y_n)=R(\sigma(y_۱,\cdots,y_n),\cdots,\sigma_n(y_۱,\cdots,y_n))$$

ب) چنانچه p با ضرایب حقیقی باشد، چند جمله‌ای R نیز هست.

ج) به ازاء هر ماتریس نظری A داریم $P(A)=R(c_۱(A),\cdots,c_n(A))$.

د) مبین $D(A)$ به صورت $\pi_{i\neq j}(\lambda_i-\lambda_j)^۲$ تعریف می گردد، که λ_i ها مقادیر ویژهٔ A هستند. نشان دهید $D(A)$ را به صورت یک چند جمله‌ای از درآیه‌های A می‌توان نوشت.

ه) نشان دهید که هرگاه $D(A)\neq ۰$، داریم $P(A)=R(c_۱(A),\cdots,c_n(A))$. به کمک پیوستگی نتیجه بگیرید که تساوی برای همهٔ ماتریس‌های A روی $\mathcal{C}$ نیز درست است. (حتی اگر $\mathcal{C}$ را با هر میدان دیگر عوض کنیم، این استنتاج درست است، زیرا مجموعهٔ همهٔ A هایی که $D(A)\neq ۰$ نسبت به توپولوژی زاریسکی چگال است).

حال فرض کنید ضرایب P حقیقی‌اند و به ازاء هر A ی حقیقی و هر B ی معکوس‌پذیر $P(A)=P(BAB^{-۱})$.

و) همین معادله برای A ی مختلط و B ی مختلط معکوس‌پذیر درست است (معادله را به صورت $n^۲$ معادلهٔ چند جمله‌ای بر حسب a_{ij} و b_{ij} در نظر بگیرید.

۱٦. الف) فرض کنید $v_۱$، $\cdots$ و v_n پایه‌ای برای V است و $\omega_۱,\cdots,\omega_۲\in V$ با $\omega_j=\sum_{j=۱}^{n}\alpha_{ji}V_j$ هستند. نشان دهید که اگر $w\in\Omega*k(V)$، آنگاه

$$\omega(\omega_۱,\cdots,\omega_k)=\sum_{I=i_۱<\cdots<i_k}\alpha_I\omega(v_{i_۱},\cdots,v_{i_k})$$

که α_I دترمینان زیر ماتریس $k\times k$ از (α_{ij}) حاصل از حذف همهٔ سطرهای بجز سطرهای $i_۱$، $\cdots$ و i_k است.

ب) قضیهٔ ۱.۳.۷ و نتیجهٔ ۲.۳.۷ را به حالت $k-$ فرم‌ها تعمیم دهید.

ج) مستقیماً از (ب) نتیجه بگیرید که تعریف d به دستگاه مختصات بستگی ندارد.

۱۷. نشان دهید $d(\sum_{i<j}\alpha_{ij}\,dx^i\wedge dx^j)$ اگر و تنها اگر به ازاء هر i، j و k ای

$$\frac{\partial\alpha_{ij}}{\alpha x^k}-\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial x^i}=۰$$

۱۸. در مسالهٔ ۵—۱۴ عنصر $\mathcal{L}_X A$ را برای میدان تانسوری دلخواه A تعریف کردیم.

الف) نشان دهید که اگر ω یک $k-$ فرم باشد، آنگاه $\mathcal{L}_X w$ نیز هست.

ب) نشان دهید $\mathcal{L}_X(\omega_۱ \wedge \omega_۲) = \mathcal{L}_X\omega_۱ \wedge \omega_۲ + \omega_۱ \wedge \mathcal{L}_X\omega_۲$ ج) با استفاده از قسمت (ه) از مسالهٔ ۵—۱۴ نشان دهید

$$\begin{aligned} X(\omega(X_۱,\cdots,X_n)) &= \mathcal{L}_X(\omega(X_۱,\cdots,X_k)) \\ &= \mathcal{L}_X\omega(X_۱,\cdots,X_k) \\ &\quad + \sum_{\alpha=۱}^{k}(-۱)^{\alpha+۱}\omega([X,X_i],X_۱,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_k) \end{aligned}$$

د) دو فرمول زیر را اثبات کنید:

$$\begin{aligned} d\omega(X_۱,\cdots,X_{k+۱}) &= \sum_{i=۱}^{k+۱}(-۱)^{i+۱}\,\mathcal{L}_{X_i}\omega(X_۱,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+۱}) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-۱)^{i+j+۱}\omega([X_i,X_j],X_۱,\cdots,\hat{X}_i,\cdots \\ &\qquad \cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{k+۱})\, d\omega(X_۱,\cdots,X_{k+۱}) \\ &= \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{k+۱}(-۱)^{i+۱}\{X_۱(\omega(X_۱,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+۱})) \\ &\qquad \mathcal{L}_{X_i}\omega(X_۱,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+۱}) \end{aligned}$$

ه) نشان دهید $X\rfloor d\omega = \mathcal{L}_X w - d(X\rfloor w)$ به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} d\omega(X_۱,\cdots,X_{k+۱}) &= (\mathcal{L}_{X_۱}w)(X_۲,\cdots,X_{k+۱}) \\ &\quad - d(X_۱\rfloor w)(X_۲,\cdots,X_{k+۱}) \end{aligned}$$

(این را به استقراء می‌توان استفاده کرده و تعریفی از d بدست آورد.)

و) با استفاده از (ه) نشان دهید که $d(\mathcal{L})_X = \mathcal{L}_X(d\omega)$.

۱۹. گیریم a_{ij} عبارت از $n^۲$ تابع بر R^n با $a_{ij} = a_{ji}$ باشند. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای اینکه توابع $u_۱$، $\cdots$ u_n در یک همسایگی از هر نقطهٔ $\mathbb{R}$ به گونه‌ای یافت شوند که

$$a_{ij} = \frac{۱}{۲}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right\}$$

این است که به ازاء هر i، j و k ای

$$\frac{\partial^{۲} a_{ij}}{\partial x^k \partial x^\ell} - \frac{\partial^{۲} a_{ik}}{\partial x^j \partial x^\ell} = \frac{\partial^{۲} a_{\ell j}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^{۲} a_{\ell j}}{\partial x^j \partial x^i}$$

[راهنمایی : ابتدا معادلات دیفرانسیل بامشتقات جزیی برای $f_{jk}\partial u_j \partial x^k - \partial u_k/\partial x^j$ را تشکیل داده و سپس از قضیهٔ ۲.۱.٦ استفاده کنید.]

۲۰. نشان دهید $"d\theta" = \dfrac{xdy - ydx}{x^{۲} + y^{۲}}$." (در بسیاری جاها θ برابر $\arctan(y/x)$ است بجز احتمالاً بعلاوهٔ یک ثابت.)

۲۱. الف) اگر ω یک $f\,dx$ فرم $[۰;۱]$ بر $f(۰) = f(۱)$ باشد، نشان دهید که یک عدد یکتا λ چنان وجود دارد که به ازاء یک تابع g با $g(۰) = g(۱)$ داریم $w - \lambda dx = dy$. [راهنمایی : معادلهٔ $w - \lambda dx = dy$ را بر $[۰;۱]$ انتگرال گرفته و λ رابیابید.]

ب) گیریم $i : S^{۱} \to \mathbb{R}^{۲}$ احتوی است و $\sigma' = i^* d\theta$. اگر $c : [۰;۱] \to S^{۱}$ با ضابطه‌ی $c(x) = (\cos ۲\pi x, \sin ۲\pi x)$ باشد، نشان دهید $c^*(\sigma') = dx$.

ج) اگر ω یک $۱-$ فرم بسته بر $S^{۱}$ باشد، نشان دهید عددی منحصر بفرد λ چنان وجود دارد که $w - \lambda\sigma'$ دقیق است.

۲۲. الف) نشان دهید که هر $w \in \Omega^k(V_{۱} \oplus V_{۲})$ را به صورت مجموع فرم‌های $\omega_{۱} \wedge \omega_{۲}$ می‌توان نوشت که $\omega_{۱}$ از درجهٔ α و $\omega_{۲}$ از درجهٔ $\beta = k - \alpha$ است و
اگر به ازاء یک i ای $v_i \in V_{۲}$، آنگاه $\omega_{۱}(v_{۱}, \cdots, v_\alpha) = ۰$،
اگر به ازاء یک i ای $v_i \in V_{۱}$، آنگاه $\omega_{۲}(v_{۱}, \cdots, v_\beta) = ۰$.

ب) اگر $\dim V_{۲} = ۱$ و $۰ \neq \lambda \in V_{۲}^*$، آنگاه ω را به صورتی یکتا به شکل $\omega_{۱} + (\omega_{۲} \wedge \lambda)$ می‌توان نوشت که $\omega_{۱}$ که $k-$ فرم است و $\omega_{۲}$ یک $(k-۱)-$ فرم است، به گونه‌ای که
اگر به ازاء یک i ای $v_i \in V_{۲}$، آنگاه $\omega_{۱}(v_{۱}, \cdots, v_k) = ۰$،
اگر به ازاء یک i ای $v_i \in V_{۲}$، آنگاه $\omega_{۲}(v_{۱}, \cdots, v_{k-۱}) = ۰$.

۲۳. گیریم مجموعهٔ ستاره شکل نسبت به ۰ و باز است، و $H : [۰;۱] \to U$ را باضابطهٔ $H(p,t) = tp$ تعریف می‌کنیم. اگر

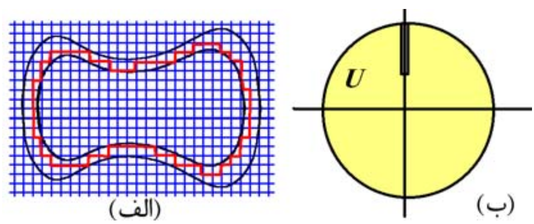
$$\omega = \sum_{i_{۱} < \cdots < i_k} \omega_{i_{۱} \cdots i_k}\, dx^{i_{۱}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

بر U، نشان دهید

$$I(H^*\omega) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1\cdots i_k}(tx)dt \right) x^{i\alpha}$$
$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

۲۴. الف) گیریم $U \subset \mathbb{R}^2$ یک مجموعهٔ باز کراندار است به گونه‌ای که $\mathbb{R}^2 - U$ همبند می‌باشد. نشان دهید U با $\mathbb{R}^2$ دیفئومورف است، و بنابراین به یک نقطه انقباض‌پذیر است. (عکس این مطلب در مسألهٔ ۸–۹ ثابت می‌شود.) [راهنمایی: U را به صورت اجتماعی صعودی از مجموعه‌هابنویسید، که k امین مجموعه برابر اجتماعی متناهی از مربع‌های شامل نقاطی در U باشد که فاصلهٔ $\leq \frac{1}{k}$ تالبهٔ U قرار دارند.] (به قسمت (الف) از شکل ۴.۷ توجه شود).

ب) مجموعهٔ باز کرانداری $U \subset \mathbb{R}^3$ چنان بیابید که $\mathbb{R}^3 - U$ همبند باشد، ولی U به هیچ نقطه‌ای انقباض‌پذیر نباشد.



شکل ۴.۷

۲۵. گیریم $U \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعهٔ ستاره شکل نسبت به ۰ و باز است. آیا U با $\mathbb{R}^n$ همیومورف است؟ (پاسخ این سؤال مثبت است ولی اثبات آن ساده نیست. زیرا، طول شعاع‌های واصل بین ۰ و مرز مجموعه ممکن است به شکل ناپیوسته تغییر کند.) (به قسمت (ب) از شکل ۴.۷ توجه شود).

۲۶. گیریم $\langle , \rangle$ ضرب داخلی معمولی در $\mathbb{R}^n$ است $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

الف) اگر $v_1, \cdots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ نشان دهید برداری منحصر بفرد $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ چنان وجود دارد که به ازاء هر $w \in \mathbb{R}^n$ ای

$$\langle v_1 \times \cdots \times v_{n-1}, w \rangle = \det \begin{pmatrix} w \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

ب) نشان دهید $\times \cdots \times \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ و آنرا بر حسب e_i^* ها بسط دهید.

[راهنمایی: از بسط دترمینان بر حسب مینورها پیش استفاده کنید.]

ج) برای $\mathbb{R}^3$ نشان دهید که

$$v \times w = (v^2 w^3 - v^3 w^2, v^3 w^1 - v^1 w^3, v^1 w^2 - v^2 w^1)$$

[راهنمایی: ابتدا همهٔ $e_i \times e_j$ ها را بیابید.]

۲۷. الف) اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ میدان برداری $\mathrm{grad}(f)$ (گرادیان f) بر $\mathbb{R}^n$ را به صورت

$$\mathrm{grad}(f) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} . \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} D_i f \frac{\partial}{\partial x^i}$$

تعریف می‌کنیم. با طرح نماد صوری $\nabla := \sum_{i=1}^{n} D_i \partial/\partial x^i$ می‌توانیم بنویسیم $\mathrm{grad}(f) = \nabla f$. اگر $f(p) = \omega_p$، نشان دهید $D_v f(p) = \langle v, w \rangle$، که $D_v f(p)$ مشتق استوادی f در نقطهٔ p و در راستای v است (چنانچه، فرض شود $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ آنگاه $D_v f(p) = v_p(f)$). نتیجه بگیرید که $\nabla f(p)$ راستایی است که f در آن حداکثر تغییرات را در p انجام می‌دهد

ب) اگر $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial/\partial x^i$ میدانی برداری بر $\mathbb{R}^n$ باشد، دیورژانس X را به صورت $\mathrm{div} X = \sum_{i=0}^{n} \partial a/\partial x^i$ تعریف می‌کنیم. (به شکل نمادی می‌توانیم بنویسیم $\mathrm{div} X = \langle \nabla, X \rangle$). همچنین، به ازاء $n = 3$ داریم (تعریف):

$$\begin{aligned} \mathrm{Curl}(X) &:= \nabla \times X \\ &:= \left(\frac{\partial a^3}{\partial x^2} - \frac{\partial a^2}{\partial x^3} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial a^1}{\partial x^3} - \frac{\partial a^3}{\partial x^1} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial a^2}{\partial x^1} - \frac{\partial a^1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^3} \end{aligned}$$

فرم‌های ω_X و η_X را به شکل زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned}\omega_X &:= a^1 dx + a^2 dy + a^3 dz\\ \eta_X &:= a^1 dy\wedge dz + a^2 dz\wedge dx + a^3 dx\wedge dy\end{aligned}$$

نشان دهید

$$df = \omega_{\mathrm{grad}(f)}, \qquad d(\omega_X) = \eta_{\mathrm{Curl}(X)}, \qquad d(\eta_X) = (\mathrm{div}X)dx\wedge dy\wedge dz.$$

ج) نتیجه بگیرید

$$\mathrm{Curl}(\mathrm{grad}(f)) = 0, \qquad \mathrm{div}(\mathrm{Curl}(X)) = 0.$$

د) اگر X میدانی برداری بر مجموعهٔ باز ستاره شکل $U\subset\mathbb{R}^n$ باشد و $\mathrm{Curl}X = 0$، آنگاه به ازاء یک تابع $f: U\to\mathbb{R}$ ای به صورت مشابه، اگر $\mathrm{div}X = 0$ آنگاه به ازاء یک میدان برداری Y بر U ای $X = \mathrm{Curl}Y$.