فصل ۸

انتگرال‌گیری

۱.۸ انتگرال خط و سطح کلاسیک

مفهوم اصلی این فصل، تعمیم انتگرالهای خط و سطح است، که اول بار در عالم فیزیک مطرح شدند. مثلاً، فرض کنید $C:[\circ;\text{۱}]\longrightarrow\mathbb{R}^{\text{۲}}$ یک منحنی است و $\omega=f\,dx+g\,dy$ یک ۱−فرم بر $\mathbb{R}^{\text{۲}}$ می‌باشد (که $f,g:\mathbb{R}^{\text{۲}}\longrightarrow\mathbb{R}$ و x و y توابع مختصاتی بر $\mathbb{R}^{\text{۲}}$ هستند).افرازی $\circ=t_\circ<\cdots<t_n=\text{۱}$ برای $[\circ;\text{۱}]$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت منحنی C به n قطعه تقسیم می‌شود که قطعهٔ i ام آن از $c(t_{i-\text{۱}})$ تا $c(t_i)$ می‌باشد (به قسمت (الف) از شکل ۱.۸ توجه شود). در صورتی که تفاضلهای $t_i-t_{i-\text{۱}}$ باندازهٔ کافی کوچک باشند، هر چنین قطعه‌ای را با یک پاره خط می‌توان تقریب زد: قطعهٔ i ام با پاره خطی تقریب می‌زنیم که تصویرافقی آن برابر $c^{\text{۱}}(t_i)-c^{\text{۱}}(t_{i-\text{۱}})$ و تصویر عمودی آن $c^{\text{۲}}(t_i)-c^{\text{۲}}(t_{i-\text{۱}})$ می‌باشد. نقاط $(C\xi_i)$ را بر هر قطعه با انتخاب $\xi_i\in[t_{i-\text{۱}},t_i]$ در نظر می‌گیریم. به ازاء هر افراز P و هر چنین انتخاب $\xi=(\xi_{\text{۱}},\cdots,\xi_n)$ مجموع

$$S(P,\xi):=\sum_{i=\text{۱}}^{n} f(c(\xi_i))[c^{\text{۱}}(t_i)-c^{\text{۱}}(t_{i-\text{۱}})]+g(c(\xi_i))[c^{\text{۲}}(t_i)-c^{\text{۲}}(t_{i-\text{۱}})]$$

را در نظر می‌گیریم. چنان ظرافت $\|P\|$ افراز P به صفر میل کند، یعنی ماکزیموم فواصل $t_i-t_{i-\text{۱}}$ به صفر میل کنند، و این مجموعها به حدی مشخص همگرا شوند، مقدار حد را با $\int_c f\,dx+g\,dy$ نشان می‌دهیم. (این حد بسیار پیچیده است. به بیان دقیق تر، اگر

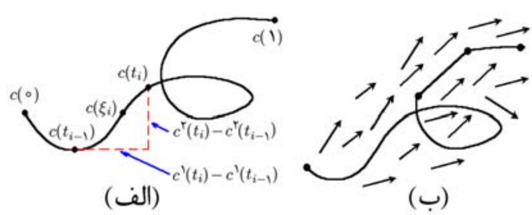
$\|P\| = \max_i\{t_i - t_{i-۱}\}$ آنگاه تساوی

$$\lim_{\|P\|\longrightarrow ۰} S(P,\xi) = \int_c f\,dx + g\,dy$$

یعنی: به ازاء هر $\epsilon > ۰$ یک $\delta > ۰$ ای چنان یافت می‌شود که به ازاء همهٔ افرازهای P با $\|P\| < \delta$ و همهٔ انتخابهای ξ برای P، داشته باشیم

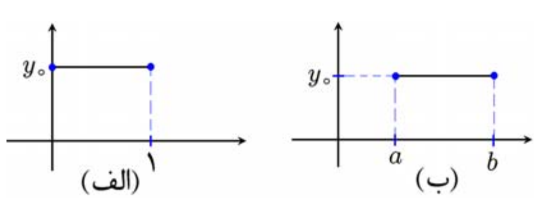
$$\left|S(P,\xi) - \int_c f\,dx - g\,dy\right| < \epsilon$$

که به وضوح بسیار پیچیده است.) حدی که به این ترتیب تعریف می‌گردد، **انتگرال خط** نامیده می شود؛ تعبیر فیزیکی روشنی دارد. اگر میدان نیروی $\mathbb{R}^۲$ با ضابطهٔ $f\dfrac{\partial}{\partial x} + g\dfrac{\partial}{\partial y}$ را در نظر بگیریم (به قسمت (ب) از شکل ۱.۸ توجه شود)، آنگاه $S(P,\xi)$ کار انجام شده توسط یک متحرک به جرم واحد در امتداد منحنی c است با این فرض که c بین هر $t_{i-۱}$ و t_i پاره خط است و f و g نیز بر آن پاره خط ثابت هستند؛ به این ترتیب، حد مذکور عملاً مقدار کار انجام شده در حالت کلی را محاسبه می‌کند. (از نقطه نظر کلاسیک، دیفرانسیل $f\,dx + g\,dy$ را به صورت کار انجام شده توسط میدان نیروبر



شکل ۱.۸

تغییر مکان بی‌نهایت کوچک با مؤلفه‌های dx و dy می‌باشد.)



شکل ۲.۸

قبل از اینکه بگوئیم این حد را در عمل چگونه محاسبه می‌کنیم، حالت خاص $c(t) = (t, y_۰)$ را در نظر می‌گیریم (به قسمت (الف) از شکل ۲.۸ توجه شود). در این حالت

در حالی که $c^1(t_i) - c^1(t_{i-1}) = t_i - t_{i-1}$ بنابراین $c^2(t_i) - c^2(t_{i_1}) = 0$

$$S(P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, y_0)(t_i - t_{i-1})$$

به وضوح، این مجموعها به حد ذیل می‌گرایند:

$$\int_c f\,dx + g\,dy = \int_0^1 f(x, y_0)\,dx$$

از سوی دیگر، اگر $c(t) = (tb + (1-t)a, y_0)$ (به قسمت (ب) از شکل ۲.۸ توجه شود)، آنگاه $c^1(t_i) - c^1(t_{i-1}) = (b-a)(t_i - t_{i-1})$ و لذا

$$S(P,\xi) = (b-a).\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i b + (1-\xi_i)a; y_0)(t_i - t_{i-1})$$

این مجموعها نیز به حد زیر می گرایند

$$(b-a)\int_0^1 f(xb + (1-x)a, y_0)\,dx = \int_a^b f(x_{y_0})(t_i - t_{i-1})$$

در کل، با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین، در مورد هر c دلخواه داریم

$$c^1(t_i) - c^1(t_{i-1}) = c^{1'}(\alpha_i)(t_i - t_{i-1}) \qquad \alpha_i \in [t_{i-1}; t_i]$$
$$c^1(t_i) - c^2(t_{i-1}) = c^{2'}(\beta_i)(t_i - t_{i-1}) \qquad \beta_i \in [t_{i-1}; t_i]$$

بنابراین

$$S(P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \{f\,(c(\xi_i))c^{1'}(\alpha_i) + g(c(\xi_i))c^{2'}(\beta_i)\}(t_i - t_{i-1})$$

می‌شود نشان داد که این مجموع به چیزی شبیه خودش (مسألهٔ ۱) می‌گراید

$$\int_0^1 \left\{f\,(c(t))c^{1'}(t) + g(c(t))c^{2'}(t)\right\} dt$$

نمادگذاری فیزیکی، به یاد آوری این حکم را راحت‌تر می‌کند (به قسمت (الف) از شکل ۳.۸ توجه شود). چنانچه مؤلفه‌های c^1 و c^2 منحنی c را بترتیب با x و y نشان دهیم [یعنی، $x \circ c$ را با x و $y \circ y$ نشان دهیم!] [از نظر فیزیکی، گفته می‌شود $x = x(t)$ و $y = y(t)$]،انتگرال بالا را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\int_c f\,dx + g\,dy = \int_0^1 \left\{f(x,y)\frac{dx}{dt} + g(x,y)\frac{dy}{dt}\right\} dt$$

در مقابل تعبیر فیزیکی «انتگرال خط»، تعبیر هندسی‌تری می‌توانیم مطرح کنیم. یاد آور می‌شویم که $dc/dt(\xi_i)$ نمایشگر بردار مماس به c در لحظهٔ ξ_i است. در این صورت، روشن است که مجموعهای

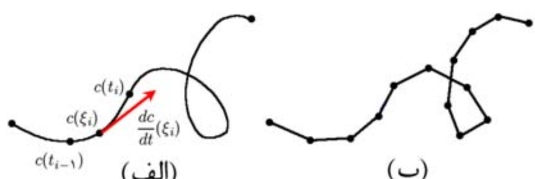
$$\sum_{i=۱}^{n}\omega(c(\xi_i))\frac{dc}{dt}(\xi_i).(t_i-t_{i-۱}) = \qquad (۱.۸)$$

$$= \sum_{i=۱}^{n}\left\{f(c(\xi_i)){c^{۱}}'(\xi_i)+g(c(\xi_i)){c^{۲}}'(\xi_i)(t)\right\}dt$$

نیزبه همان انتگرال

$$\int_{\circ}^{۱}\{f(c(t)){c^{۱}}'(t)+g(c(t)){c^{۲}}'(t)\}dt$$

می‌گراید. حالت خاصی که c بر هر بازهٔ $(t_{i-۱},t_i)$ با سرعت ثابت حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. در هر بازه عنصری $\xi_i\in(t_{i-۱},t_i)$ ای انتخاب می‌کنیم (به قسمت (ب) از شکل ۳.۸ توجه شود). در این صورت



شکل ۳.۸

$$\text{طول } \frac{dc}{dt}(\xi_i) = \text{سرعت ثابت بر } (t_{i-۱};t_i)$$

$$= \frac{۱}{t_i-t_{i-۱}}(\text{طول پاره خط از } c(t_{i-۱}) \text{ تا } c(t_i))$$

در نتیجه

$$\left(\text{طول } \frac{dc}{dt}(\xi_i)\right).(t_i-t_{i-۱}) = \text{طول پاره خط از } c(t_{i-۱} \text{ تا } c(t_i))$$

در این حالت،

$$\sum_{i=۱}^{n}\left(\text{طول } \frac{dc}{dt}(\xi_i)\right).(t_i-t_{i-۱})$$

طول c است، و در نتیجه، مجموع (۱.۸) چنانچه همگرا باشد، به **طول** c میل می‌کند. این را تعریف طول c می‌گیریم. به عبارت دیگر، انتگرال خط

$$\int_c \omega = \text{حد مجموعهای در } (۱.۸)$$

را به صورت طول c می‌توان تعبیر نمود، مشروط به آنکه خطکش به صورت پیوسته به طریقی که ω مشخص می‌کند. تغییر کند: توجه شود که تحدید $\omega(c(t))$ به زیر فضای یک بعدی تولید شده توسط dc/dt از $T_{c(t)}\mathbb{R}^۲$ برابر یک ثابت ضرب «در طول جهت‌دار» است. طریق طبیعی مشخص کردن یک تغییر پیوستهٔ طول در امتداد c، تعیین طول بر هر یک از بردارهای مماسش می‌باشد: این بیان امروزی مفهوم کلاسیکی است که چنین اظهار می‌دارد: چنانچه c را به بی‌نهایت قعطهٔ کوچک تقسیم کنیم، تکهٔ بی‌نهایت کوچک در نقطهٔ $c(t)$ و با مؤلفه‌های dx و dy بطول $f(c(t))\,dx + g(c(t))\,dy$ می‌باشد.

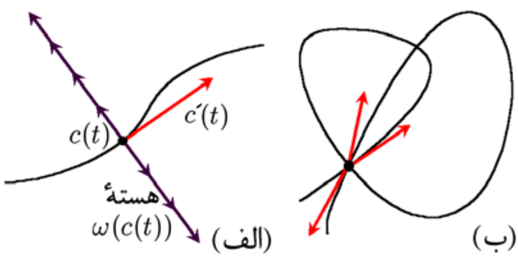
پیش از آنکه به تعابیر هندسی بیشتری بپردازیم، متذکر می‌شویم که هیچ ۱−فرم ω بر $\mathbb{R}^۳$ وجود ندارد که

$$\int_c \omega = c \text{ طول} \qquad \text{به ازاء هر منحنی } c \text{ ای}$$

ثابت می‌شود که به ازاء منحنی یک به یک c، فرمی ω می‌توان ساخت که در مورد c در رابطهٔ بالا صدق می کند؛ $\omega(c(t)) \in \Omega^۱(T_{c(t)}\mathbb{R}^۲)$ را طوری انتخاب می کنیم که

$$\omega(c(t)) = \left(\frac{dc}{dt}\right) = ۱$$

(به قسمت (الف) از شکل ۴.۸ توجه شود) (با انتخاب هستهٔ ω دلخواه) و سپس توسیع ω به $\mathbb{R}^۲$ تعمیم داده می‌شود. اما اگر c یک به یک نباشد، این کار ممکن نیست؛ مثلاً، در حالتی که در شکل مقابل است، هیچ عنصری از $\Omega^۱(T_{c(t)}\mathbb{R}^۲)$ وجود ندارد که بر هر سه بردار مورد نظر با مقدار یک باشد (به قسمت (ب) از شکل ۴.۸ توجه شود).



شکل ۴.۸

در کل، به ازاء هر ω دلخواه بر $\mathbb{R}^۲$ که در همه جا ناصفر است، زیر فضاهای «هستهٔ $\Delta_p = \omega(p)$» توزیعی یک بعدی بر $\mathbb{R}^۲$ تشکیل می‌دهند؛ هر منحنی واقع در یک زیر منیفلد انتگرال برای Δ، الزاماً بطول صفر است. بعداً خواهیم دید که اگر مایل به محاسبهٔ طول معمولی یک منحنی باشیم، این مشکل قابل رفع است. فعلاً، متذکر

می‌شویم که اگر c یک منحنی در منیفلدی مفروض چون M باشد (که بر آن مفهوم طول وجود ندارد) و ω یک ۱−فرم بر M باشد، مجموعهای بشکل (۱.۸) با معنی هستند، و بنابراین $\int_c \omega$ را بصورت حد این مجموعها می‌توان تعریف نمود.

اکنون ویژگی‌ای از انتگرال خط را مطرح می‌کنیم که از دید تعریف اولیه بدیعی است و بعلاوه برای تعریف جدید نیز درست می‌باشد. اگر $p : [\circ;\text{۱}] \longrightarrow [\circ;\text{۱}]$ تابعی صعودی و یک به یک از $[\circ;\text{۱}]$ بروی $[\circ;\text{۱}]$ باشد، آنگاه منحنی $c\circ p : [\circ;\text{۱}] \longrightarrow M$ را **تجدید پارامتره شدهٔ** c می‌نامیم (برد این منحنی برابر برد همان c است، ولی با ضابطهٔ احتمالاً متفاوتی حرکت می‌کند. به وضوح، هر مجموع $S(P,\xi)$ برای c با مجموعی $S(P',\xi')$ برای $c\circ p$ برابر است، و بالعکس، از تعریف اولیهٔ ما معلوم است که به ازاء هر منحنی $c : [\circ;\text{۱}] \longrightarrow \mathbb{R}^{\text{۲}}$ داریم

$$\int_c \omega = \int_{c\circ p} \omega$$

(انتگرال ω بر c از تجدید پارامتر مستقل است). این مطلب هنگامی که در مورد منحنی به شکل $c : [\circ;\text{۱}] \longrightarrow M$ در نظر گرفته شود، چندان واضح به نظر نمی‌رسد. در حالی که در مورد منحنی به شکل $c[\circ,\text{۱}] \longrightarrow \mathbb{R}^{\text{۲}}$ کار دشواری نیست. در حالت مجموعهای (۱.۸) به حدی چون

$$\int_\circ^{\text{۱}} \left\{ f(c(t))c^{\text{۱}\prime}(t) + g(c(t))c^{\text{۲}\prime}(t) \right\} dt$$

میل می‌کنند. سپس حکم مورد نظر از حسابان نتیجه می‌گردد: با جایگذاری $t = p(u)$ داریم

$$\begin{aligned}
&\int_\circ^{\text{۱}} \left\{ f(c(t))c\text{۱}'(t) + g(c(t))c^{\text{۲}\prime}(t) \right\} dt = \\
&= \int_{p^{-\text{۱}}(\circ)}^{p^{-\text{۱}}(\text{۱})} \left\{ f(c(p)(u))c^{\text{۱}\prime}(p(u)) + g(c(p(u)))c^{\text{۲}\prime}(p(u)) \right\} p'(u)\, du \\
&= \int_\circ^{\text{۱}} \left\{ f(c\circ p(u))(c\circ p)^{\text{۱}\prime}(u) + g(c\circ p)^{\text{۲}\prime}(u) \right\} du
\end{aligned}$$

در مورد یک منحنی c در $\mathbb{R}^n$ و یک ۱−فرم $\omega = \sum_{i=\text{۱}}^n \omega_i\, dx^i$، محاسبات مشابهی قابل اجرا است؛ در مورد منیفلد دلخواه M، می‌توانیم دستگاهی مختصاتی برای انجام محاسبات چنان انتخاب کنیم که $c([\circ;\text{۱}])$ را در بر داشته باشد و یا حداقل قسمتی از آن را قطع کند. در حالت اخیر محاسبات به چند محاسبهٔ مشابه (بر دستگاههای مختلف)

شکسته می‌شود. اکنون بر آنیم تا تعریف سومی را مطرح کنیم، که انتخاب عملی ما می‌باشد. باز هم حالت یک ۱–فرم ω بر $\mathbb{R}^۲$ را در نظر بگیرید، که

$$\int_c \omega = \int_۰^۱ \left\{ f(c(t))c^{۱\prime}(t) + g(c(t))c^{۲\prime}(t) \right\} dt$$

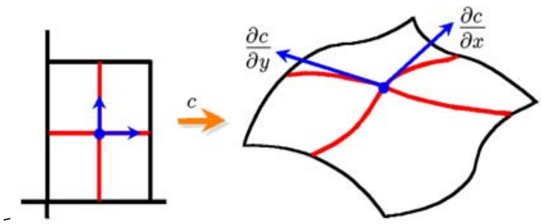
توجه شود که اگر t دستگاه مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه در مورد نگاشت $c : [۰;۱] \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ داریم

$$\begin{aligned} c^*(f\,dx + g\,dy) &= (f\circ c)c^*(dx) + (g\circ c)c^*(dy) \\ &= (f\circ c)\,d(x\circ c) + (g\circ c)\,d(y\circ c) \\ &= (f\circ c)c^{۱\prime}(t)dt + (g\circ c)c^{۲\prime}(t)\,dt \end{aligned}$$

بنابراین، از نقطه نظر سوری، عملاً از $c^*(f\,dx + g\,dy)$ انتگرال گرفته می‌شود؛ به بیان دقیق‌تر، می‌نویسیم $c^*(f\,dx + g\,dy) = hdt$ (که تنها به یک صورت ممکن است) و سپس از h بر $[۰;۱]$ انتگرال می‌گیریم.

هر چه در مورد منحنیهای $c : [۰;۱] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ گفتیم، در مورد توابع تعمیم یافتهٔ $c : [۰;۱]^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نیز می‌توان مطرح نمود. اگر x و y توابع مختصاتی بر $\mathbb{R}^۲$ باشند، فرض می‌کنیم

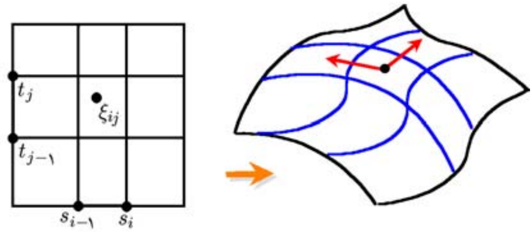
$$\frac{\partial c}{\partial x} = c_*\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) \quad , \quad \frac{\partial c}{\partial y} = c_*\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)$$



شکل ۵.۸

به ازاء هر دو افراز $s_۰ < \cdots < s_m$ و $t_۰ < \cdots < t_n$ از $[۰;۱]$، چنانچه $\xi_{ij} \in [s_{i-۱};s_i] \times [t_{j-۱},t_j]$ و ω یک ۲–فرم بر $\mathbb{R}^n$ باشد، داریم: مجموع

$$\omega(c(\xi_{ij}))\Big(\frac{\partial c}{\partial x}(\xi_{ij}), \frac{\partial c}{\partial y}(\xi_{ij})\Big)(s_i - s_{i-۱})(t_j - t_{j-۱})$$



شکل ٦.٨

برابر مساحت تعمیم یافتهٔ متوازی‌الاضلاع تولید شده توسط بردارهای $\frac{\partial c}{\partial x}(\xi_{ij})$ و $\frac{\partial c}{\partial y}(\xi_{ij})$ است. حد مجموع این جملات را به عنوان «مساحت تعمیم یافتهٔ c» می‌توان دانست. برای کوتاه کردن این داستان، بهتر است چند تعریف رسمی بیاوریم.

۲.۸ انتگرال بر k–مکعب تکین

تابع $c:[0;1]\longrightarrow M$ را در صورتی k–**مکعب تکین** در M گوئیم که هموار باشد. اصطلاح **تکین** بر این نکته اشاره دارد که لزومی به یکبیک بودن c نیست. فرض می‌کنیم (قرارداد) که $\mathbb{R}^0\{0\}\in\mathbb{R}=[0,1]^0$ و بنابراین، 0–مکتب تکین c، به معنی مشخص کردن نقطه‌ای $c(0)\in M$ بخصوص است. نگاشت احتوای از $[0;1]^k$ در $\mathbb{R}^k$ را با نماد $I^k:[0;1]^k\longrightarrow\mathbb{R}^k$ نشان می‌دهیم و به آن k–**مکعب استاندارد** می‌گوئیم.

اگر ω یک k–فرم بر $[0;1]^k$ و x^1، $\cdots$ و x^1 توابع مختصاتی باشند، آنگاه ω را به صورتی یکتا به شکل $\omega=f\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k$ می‌توان نوشت. در این صورت، تعریف می‌کنیم

$$\int_{[0;1]^k} f := \int_{[0;1]^k} f(x^1,\cdots,x^k)\,dx^1\cdots dx^k$$

که انتگرال آخری به معنی کلاسیک آن است.

اگر ω یک k–فرم بر M و c یک k–مکعب تکین در M باشد، تعریف می‌کنیم

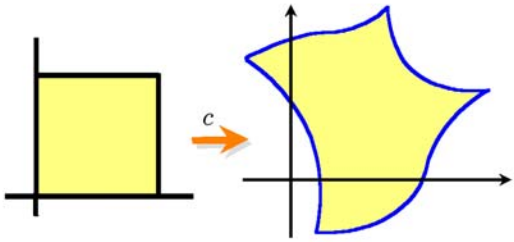
$$\int_c \omega := \int_{[0;1]^k} c^*\omega$$

که سمت راستی را چند خط بالاتر تعریف نمودیم. در مورد $k=0$، تعریفی خاص داریم: 0–فرم به معنی یک تابع است و برای هر 0–مکعب تکین تعریف می‌کنیم

$$\int_c f = f(c(0))$$

۱.۲.۸ گزاره. گیریم $c:[0;1]^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ یک n–مکعب تکین و یکبیک است که $\det c'\geq 0$ بر $[0;1]^n$. گیریم ω فرم–n $\omega=f\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ است. در این صورت

$$\int_c\omega=\int_{c([0;1]^n)}f$$



شکل ۷.۸

اثبات: بنا به تعریف

$$\begin{aligned}\int_c\omega &= \int_{[0;1]^n}c^*(\omega)\\ &\overset{(1)}{=} \int_{[0;1]^n}(f\circ c)(\det c')\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\\ &\overset{(2)}{=} \int_{[0;1]^n}(f\circ c)|\det c'|\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\\ &\overset{(3)}{=} \int_{c([0;1]^n)}f\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) از قضیهٔ ۱.۳.۷، در (۲) از تعریف و در (۳) از قاعدهٔ تغییر متغیر استفاده شده است. □

۲.۲.۸ نتیجه. گیریم $p:[0;1]^k\longrightarrow[0;1]^k$ نگاشتی یکبیک و پوشا است که $\det p'\geq 0$ گیریم c یک k–مکعب تکین در M است و ω یک k–فرم در M می‌باشد. در این صورت

$$\int_c\omega=\int_{c\circ p}\omega$$

اثبات: داریم

$$\int_{c\circ p}\omega=\int_{[\circ;\text{۱}]^k}(c\circ p)^*\omega=\int_{[\circ;\text{۱}]^k}p^*(c^*\omega)\overset{(\text{۱})}{=}\int_{[\circ;\text{۱}]^k}c^*(\omega)$$

توضیح اینکه در (۱) از از پوشایی p و گزاره بالا استفاده شده است. $\square$

نگاشت M $c\circ p\,:\,[\circ;\text{۱}]^k\longrightarrow$ را در صورتی **تجدید پارامتر** c گوئیم که $p\,:$ $[\circ;\text{۱}]^k\longrightarrow[\circ;\text{۱}]^k$ نگاشتی یکبیک، پوشا، هموار و با $\det p'\neq\circ$ باشد، (بنابراین، $p^{-\text{۱}}$ نیز هموار است)؛ این را در صورتی **حافظ جهت** یا **جهت برگردان** گوئیم که به ترتیب، در همه جا $\det p'>\circ$ یا در همه جا $\det p'<\circ$ باشد. نتیجه نشان می‌دهد که انتگرال ω بر c مستقل از تجدید نظرهای حافظ جهت است؛ روشن است که تجدید پارامتر جهت برگردان، علامت انتگرال را عوض می‌کند. توجه شود که اگر سعی کنیم انتگرال یک تابع هموار $f:M\longrightarrow M$ بر منحنی c را به صورت

$$\int_{[\circ;\text{۱}]^k}f\circ c$$

تعریف کنیم، حکم مشابه نتیجهٔ ۲.۲.۸ در این حالت غلط خواهد بود. مثلاً اگر $c:$ $[\circ;\text{۱}]\longrightarrow M$، آنگاه در حالت کلی

$$\int_\circ^\text{۱}f(c(p(t)))dt\quad,\quad\int_\circ^\text{۱}f(c(t))dt$$

متفاوتند. از دیدگاه نظری، چیزهایی که از آنها می‌توان انتگرال گرفت، فرمهای دیفرانسیل هستند، زیرا به شکل صحیح تبدیل می‌شوند (یعنی، بر طبق قضیهٔ ۱.۳.۷، فرمول تغییر متغیر برقرار است)؛ از توابع بر منیفلدها نمی‌توان انتگرال گرفت (تنها از یک تابع f بر منیفلد $\mathbb{R}^k$ می‌توان انتگرال گرفت، چرا که موجب فرم دیفرانسیل $f\,dx^\text{۱}\wedge\cdots\wedge dx^k$ بر $\mathbb{R}^k$ می‌شود).

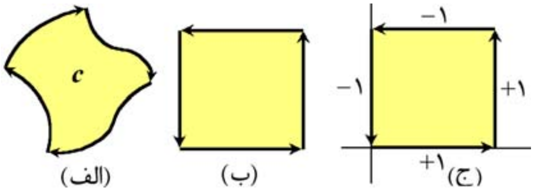
۳.۸ انتگرال بر k–زنجیر

تعریف انتگرال یک k–فرم ω روی یک k–مکعب تکین c را بی‌درنگ می‌توان تعمیم داد. منظور از k–**زنجیر** مجموعی صوری (و متناهی) از k–مکعبهای تکین ضرب در اعداد صحیح است. به عبارت دیگر، عباراتی نظیر $\text{۱}.c_\text{۱}-\text{۲}c_\text{۲}+\text{۳}c_\text{۳}$ k–زنجیر $\text{۱}.c_\text{۱}$ را به صورت ساده‌تر $c_\text{۱}$ نیز می‌توان نوشت. k–رنجیرها را به شکل کاملاً صوری می‌توان با هم جمع و یا عددی را در آنها ضرب نمود. نظیر

$$\text{۲}(c_\text{۱}+\text{۳}c_\text{۴})+(-\text{۲})(c_\text{۱}+c_\text{۲}+c_\text{۳})=-\text{۲}c_\text{۲}-\text{۲}c_\text{۳}+\text{٦}c_\text{۴}$$

به علاوه، انتگرال ω بر k–زنجیر به شکل $c=\sum_i a_i c_i$ را به صورت بدیهی تعریف می‌کنیم:

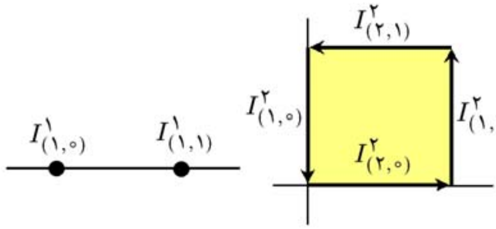
$$\int_{\Sigma_i a_i c_i}\omega=\sum_i a_i\int_{c_i}\omega$$



شکل ۸.۸

دلیل طرح k–زنجیر این است که به هر k–زنجیر c (که می‌تواند تنها یک k–مکعب باشد) یک $(k-۱)$–زنجیر ∂c به نام مرز c می‌توانیم نظیر کنیم که برابر مجموع $(k-۱)$–مکعبهای در سراسر مرز هر یک از k–مکعبهای در c فرض می‌شود. به ویژه، به شکل خیلی روشن می‌توان این ایده را اصلاح نمود. مثلاً، مرز $I^۲$ به صورت مجموع چهار ۱–مکعب تکین مشخص شده در شکل سمت چپ نیست، بلکه بایستی ضریب متناظر در سمت راست را اعمال کرد. (توجه شود که این کار باعث تغییر انتگرال یک ۱–فرم روی $\partial I^۲$ را تغییر نمی‌دهد.) به ازاء هر i با $۱\le i\le n$، ابتدا دو $(n-۱)$–مکعب تکین $I^n_{(i,\circ)}$ و $I^n_{i,\circ}$ (به نام $(i,\circ)$–وجه $(i,۱)$–وجه I^n) به شکل زیر تعریف می‌کنیم: اگر $[\circ;۱]^{n-۱}$، آنگاه

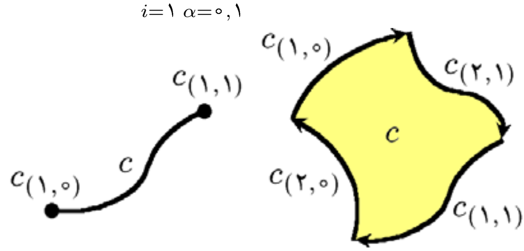
$$\begin{aligned}
I^n_{(i,\circ)}(x) &= I^n(x^۱,\cdots,x^{i-۱},\circ,x^i,\cdots,x^{n-۱})\\
&= (x^۱,\cdots,x^{i-۱},\circ,x^i,\cdots,x^{n-۱})\\
I^n_{(i,۱)}(x) &= I^n(x^۱,\cdots,x^{i-۱},\circ,x^i,\cdots,x^{n-۱})\\
&= (x^۱,\cdots,x^{i-۱},۱,x^i,\cdots,x^{n-۱})
\end{aligned}$$



شکل ۹.۸

به این ترتیب، (i,α)–وجه n–مکعب تکین c را به صورت $c_{i,\alpha} = c\circ(I^n_{i,\alpha})$ تعریف می‌کنیم. اکنون، تعریف می‌کنیم

$$\partial c := \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha}c_{(i,\alpha)}$$



شکل ۱۰.۸

سرانجام، مرز n–زنجیر $\sum_i a_ic_i$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

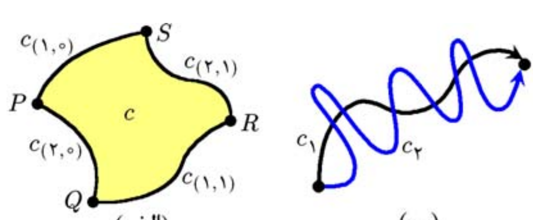
$$\partial(\sum_i a_ic_i) = \sum_i a_i\partial(c_i) = \sum_i a_i$$

تمام این تعاریف در مورد $n \le 1$ با معنی هستند. در حال ۰–مکعب $c:[0,1]^0 \longrightarrow M$، که ما اغلب آن را با تک نقطهٔ $p = c(0)$ یکی می‌گیریم، ∂c را عدد $1\in\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم؛ و در مورد ۰–زنجیر $\sum_i a_ic_i$ تعریف می‌کنیم

$$\partial(\sum_i a_ic_i) = \sum_i a_i\partial(c_i) = \sum_i a_i$$

توجه شود که در مورد ۱–مکعب $c:[0,1] \longrightarrow M$ داریم $\partial c = c_{(1,1)} - c_{(1,0)}$ بنابراین $\partial(\partial c) = 1 - 1 = 0$. همچنین، در مورد ۲–مکعب تکین $c:[0;1]^2 \longrightarrow M$ ملاحظه می‌گردد که

$$\partial c = c_{(1,1)} - c_{(2,1)} - c_{(1,0)} + c_{(2,0)}$$
$$\partial(\partial c) = (R-Q) - (R-S) - (S-P) + (Q-p)$$



شکل ۱۱.۸

به کمک ترسیم شکل (نظیر قسمت (الف) از شکل ۱۱.۸) می‌توان ملاحظه کرد که همین مطلب برای هر ۳–مکعب تکین صحیح است. تجسم اینکه مرز یک ۳–مکعب چه می‌تواند باشد، تمرین خوبی است. در کل، داریم:

۱.۳.۸ گزاره. اگر c یک n–مکعب دلخواه در M باشد، آنگاه $\partial(\partial c) = ۰$ به اختصار $\partial^۲ = ۰$.

اثبات: گیریم $۱ \leq j \leq n-۱$ و $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$ را در نظر می‌گیریم. در مورد $x \in [۰;۱]^{n-۲}$ به کمک تعریف داریم

$$
\begin{aligned}
(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(x) &= I^n_{(i,\alpha)}(I^{n-۱}_{(j,\beta)}(x)) \\
&= I^n_{(i,\alpha)}(x^۱,\cdots,x^{j-۱},\beta,x^j,\cdots,x^{n-۲}) \\
&= I^n(x^۱,\cdots,x^{i-۱},\alpha,x^i,\cdots,x^{j-۱},\beta,x^j,\cdots,x^{n-۲})
\end{aligned}
$$

به صورت مشابه

$$
\begin{aligned}
(I^n_{(j+۱,\beta)})_{(i,\alpha)} &= I^n_{(j+۱,\beta)}(I^{n-۱}_{(i,\alpha)}(x)) \\
&= I^n_{(j+۱,\beta)}(x^۱,\cdots,x^{i-۱},\alpha,x^i,x^{n-۲}) \\
&= I^n(x^۱,\cdots,x^{i-۱},\alpha,x^i,\cdots,x^{j-۱},\beta,x^j,\cdots,x^{n-۲})
\end{aligned}
$$

بنابراین، به ازاء هر $۱ \leq j \leq n-۱$ داریم $(I^n)_{(j,\beta)} = (I^n_{(j+۱,\beta)})_{(i,\alpha)}$. از این مطلب به سادگی نتیجه می‌گردد که به ازاء هر n–مکعب تکین c و به ازاء هر $i \leq j \leq n-۱$ داریم

$$(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (c_{(j+۱,\beta)})_{(i,\alpha)}$$

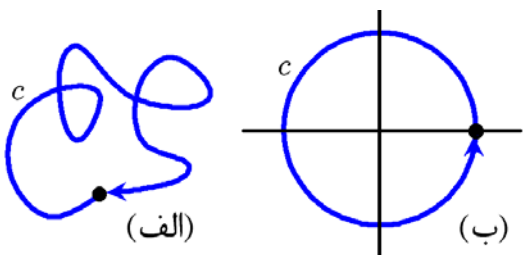
به این ترتیب

$$
\begin{aligned}
\partial(\partial c) &= \partial\left(\sum_{i=۱}^{n}\sum_{\alpha=۰,۱}(-۱)^{i+\alpha}c_{(i,\alpha)}\right) \\
&= \sum_{i=۱}^{n}\sum_{\alpha=۰,۱}\sum_{j=۱}^{n}\sum_{\beta=۰,۱}(-۱)^{i+\alpha+j+\beta}(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}
\end{aligned}
$$

در این مجموع $(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$ و $(c_{(j+۱,\beta)})_{(i,\alpha)}$ با علامت متفاوت ظاهر می‌شوند. بنابراین، همهٔ جملات دو به دو حذف می‌شوند و در نتیجه $\partial(\partial c) = ۰$. چون قضیه برای

n–مکعبهای تکین درست است، به وضوح برای کلیهٔ n–زنجیرهای تکین نیز درست است. □

توجه کنید که ممکن است برای یک n–زنجیر c نه فقط $\partial(\partial c) = 0$ بلکه $\partial c = 0$. مثلاً، چنانچه $c = c_1 - c_2$ که c_1 و c_2 دو ۱–مکعب با $c_1(0) = c_2(0)$ و $c_2(1) = c_1(1)$ باشند، این وضع رخ می‌دهد (به قسمت (الف) از شکل ۱۱.۸ توجه شود). اگر c تنها یک ۱–مکعب تکین باشد، آنگاه $\partial c = 0$ تنها در صورتی ممکن است که $c(0) = c(1)$؛ به بیان دیگر c منحنی بسته باشد. در کل، k–زنجیر c را در صورتی **بسته** گوئیم که $\partial c = 0$ (به قسمت (الف) از شکل ۱۲.۸ توجه شود).



شکل ۱۲.۸

۴.۸ قضیهٔ استوکس

یادآور می‌شویم که فرم دیفرانسیل ω با $d\omega = 0$ را نیز **بسته** می‌نامیم؛ این اصطلاح در راستای اصطلاح مشابه در مورد زنجیرها انتخاب شده است (از سوی دیگر، هر زنجیر به شکل ∂c را بر طبق این روند به صورت کلاسیک **دقیق** نمی‌گویند، بلکه اصطلاح مرز در این مورد استفاده می‌شود). این اصطلاحات موازی نه به خاطر تشابه ظاهری d و ∂ است، بلکه به واسطهٔ وجود روابط $d^2 = 0$ و $\partial^2 = 0$ می‌باشد. ارتباط بین فرم و زنجیر عمیق‌تر از این است. مثلاً، ملاحظه کردیم که بر $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ یک ۱–فرم $d\theta$ بسته ولی غیر دقیق وجود دارد. همچنین، یک ۱–زنجیر c وجود دارد که بسته است ولی مرز نیست، یعنی، یک منحنی بستهٔ در $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ که مبداء را دور می‌زند. البته، از نظر شهودی روشن است که c مرز هیچ ۲–زنجیر در $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ نیست. ولی اثبات دقیق آن عملاً به معنی اثبات مجدد حکم زیر درخصوص رابطهٔ بین d و ∂ به شرح زیر است (به قسمت (ب) از شکل ۱۲.۸ توجه شود).

۱.۴.۸ قضیه (قضیهٔ استوکس). اگر ω یک $(k-1)$–بر M و c یک k–زنجیر در M باشد، آنگاه $\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$.

اثبات: قسمت اعظم اثبات در ارتباط با حالت خاصی است که ω یک $(k-1)$–فرم بر $\mathbb{R}^k$ است و نیز $c = I^k$. در این حالت، ω مجموعی از $(k-1)$–فرمهای به شکل

$$f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx^k$$

هستند، و لذا کافی است قضیه برای هر یک از اینها اثبات گردد. اکنون محاسبه می‌کنیم. ابتدا، با کمی ترجمهٔ نمادها ملاحظه می‌گردد که

$$\int_{[0;1]^{k-1}} I^{k^*_{(j,\alpha)}}(f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge (dx^k)) =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ \displaystyle\int_{[0;1]^k} f(x^1, \cdots, \alpha, \cdots, x^k)\, dx^1 \cdots dx^k & \text{اگر } i = j \end{cases}$$

بنابراین

$$\int_{\partial I^k} f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k =$$
$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{[0;1]^{k-1}} I^{k^*_{(j,\alpha)}}(f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k) \\ &= (-1)^{i+1} \int_{[0;1]^k} f(x^1, \cdots, 1, \cdots, x^k)\, dx^1 \cdots dx^k \\ &\qquad +(-1)^i \int_{[0;1]^k} f(x^1, \cdots, 0 \cdots, x^k)\, dx^1 \cdots dx^k \end{aligned}$$

از سوی دیگر

$$\int_{I^k} d(f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k) =$$
$$\begin{aligned} &= \int_{[0;1]^k} D_i f\, dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= (-1)^{i-1} \int_{[0;1]^k} D_i f \end{aligned}$$

بنا به قضیهٔ فوبینی و نیز قضیهٔ بنیادی حسابان، داریم

$$\int_{I^k} d(f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^k) =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{i-1}\int_0^1\cdots(\int_0^1 D_i f(x^1,\cdots,x^k)\,dx^i)\,dx^1\cdots\widehat{dx}^i\cdots dx^k\\
&= (-1)^{i-1}\int_0^1\cdots\int_0^1\Big\{f(x^1,\cdots,1,\cdots,x^k)\\
&\qquad -f(x^1,\cdots,0,\cdots,x^k)\Big\}\,dx^1\cdots\widehat{dx}^i\cdots dx^k\\
&= (-1)^{i-1}\int_{[0;1]^k} f(x^1,\cdots,1,\cdots,x^k)\,dx^1\cdots dx^k\\
&\qquad (-1)^i\int_{[0;1]^k} f(x^1,\cdots,0,\cdots,x^k)\,dx^1\cdots dx^k
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_{I^k} d\omega=\int_{\partial I^k}\omega$$

در مورد، یک $k-$مکعب تکین دلخواه، با توجه به تعریف داریم

$$\int_{\partial c}\omega=\int_{\partial I^k} c^*\omega$$

بنابراین

$$\int_c d\omega=\int_I c^*(d\omega)=\int_{I^k} d(c^*\omega)=\int_{\partial I^k} c^*\omega=\int_{\partial c}\omega$$

اکنون، به وضوح قضیه برای $k-$زنجیر دلخواه نیز نتیجه می‌گردد. □

توجه شود که قضیهٔ استوکس تنها به کمک قضیهٔ بنیادی حسابان اثبات گردید، وی در حالت خاص $c=I^1$ و $\omega=f$، عملاً به همان قضیه منتهی می‌شود.

به عنوان کاربردی از قضیهٔ استوکس، نشان می‌دهیم که منحنی $c:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}^2-\{0\}$ با ضابطهٔ $c(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$ با اینکه بسته است، به ازاء هیچ ۲$-$زنجیر c^2 ای ∂c^2 نیست. چنانچه $c=\partial c^2$، بایستی داشته باشیم

$$\int_c d\theta=\int_{\partial c^2} d\theta=\int_{c^2} d(d\theta)=\int_{c^2} 0=0$$

اما محاسبهٔ مستقیم (که به خودی خود مهم است) نشان می‌دهد که

$$\int_c d\theta=\int_c\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=2\pi$$

(استدلال غیر محاسباتی در این زمینه نیز وجود دارد، که در آن از این واقعیت استفاده می شود که $d\theta$ واقعاً به ازاء یک $\theta:\mathbb{R}^2-([1;\infty)\times\{0\})$ ای به شکل $d\theta$ است: داریم

$$\int_{c|[\epsilon;1-\epsilon]} d\theta=\theta(1-\epsilon)-\theta(\epsilon)$$

و $\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} (\theta(1-\epsilon) - \theta(\epsilon)) = 2\pi$.)

در حالی که از این اثبات برای نشان دادن مرز نبودن c استفاده کردیم، از آن برای نشان دادن اینکه $\omega = "d\theta"$ دقیق نیست نیز می‌توان بهره برد. زیرا، اگر به ازاء یک تابع هموار $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} - \mathbb{R}$ ای $\omega = df$، آنگاه بایستی داشته باشیم

$$2\pi = \int_c \omega = \int_c df = \int_{\partial c} f = \int_0 f = 0$$

قبلاً با استدلال ساده‌تری قادر به اثبات دقیق نبودن $"d\theta"$ بودیم، اما قضیهٔ استوکس ابزاری است که ما را قادر به پرداختن به فرمهای بر $\mathbb{R}^n - \{0\}$ می‌سازد. مثلاً، قادر به طرح ۲–فرم ω بر $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ هستیم که بسته است ولی دقیق نیست:

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

در حال حاضر منشاء ظهور ω را مخفی نگه می‌داریم، ولی با محاسبهٔ مستقیم می‌توان نشان داد که $d\omega = 0$. برای اثبات اینکه ω دقیق نیست، از آن بر یک ۲–زنجیر که قادر به نمایش ۲–کره $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 - \{0\}$ است، انتگرال می‌گیریم. روشهای متعددی برای این کار وجود دارد، ولی نتیجهٔ همهٔ آنها یکی است. در واقع، ابتدا می‌خواهیم روشی برای انتگرال‌گیری از n–فرمها روی n–منیفلدها را تشریح کنیم. این تنها وقتی ممکن است که M جهت‌پذیر باشد؛ دلیل این مطلب از حکم بعدی که برای تعریف ما اساسی است، روشن می‌باشد.

۵.۸ انتگرال بر منیفلد

۱.۵.۸ قضیه. گیریم M یک n–منیفلد همراه با جهت μ است، و $c_1, c_2 : [0;1]^n \longrightarrow M$ دو n–زنجیر تکین هستند که آنها را به دیفیومورفیسمهای در همسایگیهای از $[0;1]^n$ می توان توسیع داد. فرض کنید c_1 و c_2 حافظ جهت هستند (نسبت به جهت μ بر M و جهت معمولی بر $\mathbb{R}^n$). اگر ω یک n–فرم بر M باشد به گونه‌ای که

$$\sup(\omega) \subseteq c_1([0;1]^n) \cap c_2([0;1]^n)$$

آنگاه

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$$

اثبات: از نتیجهٔ ۲.۲.۸ می‌توانیم استفاده کنیم، و بنویسیم

$$\int_{c^{۲}} \omega = \int_{c_۲ \circ (c_۲^{-۱} \circ c_۱)} \omega = \int_{c_۱} \omega$$

تنها مشکل این است که $c_۲^{-۱} \circ c_۱$ بر کل $[۰; ۱]^n$ تعریف نمی‌شود (چون $c_۱$ و $c_۲$ هر دو حافظ جهت هستند، داریم $\det(c_۲^{-۱} \circ c_۱)' \geq ۰$). اما، با کمی توجه به اثبات نتیجهٔ ۲.۲.۸ نشان می‌دهد که چون $\sup(\omega)$ هم در $c_۱([۰; ۱]^n)$ قرار دارد و هم در $c_۲([۰; ۱]^n)$، این قضیه از نتیجهٔ ۲.۲.۸ قابل استنتاج است.

عدد مشترک $\int_c \omega$ برای $n-$مکعبهای تکین $c : [۰; ۱]^n \longrightarrow M$ با $\sup \omega \subseteq c([۰; ۱]^n)$ و حافظ جهت، را با $\int_M \omega$ نشان می‌دهیم. اگر ω یک $n-$فرم دلخواه بر M باشد، آنگاه پوششی V برای M به وسیلهٔ مجموعه‌های باز U وجود دارد، که هر یک در یک $c([۰; ۱]^n)$ ای قرار دارد، که c یک $n-$مکعب از این قسم است؛ اگر Φ افرازی یکانی و زیردست این پوشش باشد، آنگاه $\int_M \varphi.\omega$ برای هر φ از Φ قابل تعریف است. می‌خواهیم تعریف کنیم

$$\int_M \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi.\omega$$

این تعریف را تنها وقتی می‌توانیم بپذیریم که ω با محمل فشرده باشد، که در این حالت عملاً مجموع متنهای است، زیرا محمل ω تنها تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\{p : \Phi(p) \neq ۰\}$ را قطع می‌کند، چرا که گردایه‌ای موضعاً متناهی تشکیل می‌دهند. اگر Ψ افراز یکانی دیگری (زیردست V') باشد، آنگاه

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi.\Phi = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \sum_{\psi \in \Psi} \psi.\varphi.\omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\psi \in \Psi} \int_M \psi.\varphi.\omega$$

که همهٔ این مجموعها متناهی‌اند، و به وضوح مجموع آخر را به شکل

$$\sum_{\psi \in \Psi} \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi.\psi.\omega = \sum_{\psi \in \Psi} \int_M \psi.\omega$$

نیز می‌توان نوشت. در نتیجه، تعریف ما مستقل از انتخاب افراز یکانی است. (حقیقتاً، بهتر است این مجموع را با نماد $\int_{(M,\mu)} \omega$ نشان دهیم. زیرا در مورد جهت $-\mu$ برای M، به وضوح داریم

$$\int_{(M,-\mu)} \omega = -\int_{(M,\mu)} \omega$$

با این حال، مطابق مرسوم، μ را ذکر نمی‌کنیم)

با کمی اصلاح در تعریف $\int_M \omega$، حتی برای حالتی که M منیفلد n بعدی مرزدار باشد نیز می‌توان $\int_M \omega$ را تعریف کرد. اگر $M \subset \mathbb{R}^n$ یک منیفلد مرزدار $n-$بعدی باشد و $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ با محمل فشرده باشد، آنگاه

$$\int_M f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_M f$$

که سمت راست یک انتگرال عادی را نشان می‌دهد. این نتیجه‌ای ساده از گزارهٔ ۱.۲.۸ است. به صورت مشابه، اگر $f : M^m \longrightarrow N^n$ دیفئومورفیسم برو باشد و ω یک $n-$فرم با محمل فشرده بر N باشد، آنگاه

$$\int_M f^*\omega = \begin{cases} \displaystyle\int_N \omega & \text{اگر } f \text{ حافظ جهت باشد} \\ \displaystyle-\int_N \omega & \text{اگر } f \text{ جهت برگردان باشد} \end{cases}$$

۶.۸ المان حجم

با اینکه $n-$فرمها را تنها روی منیفلدهای جهت‌پذیر می‌توان تصور کرد، روشی برای توصیف انتگرال‌گیری بر منیفلدهای جهت‌گیری وجود دارد. فرض کنید W تابعی بر M است به گونه‌ای که به ازاء هر $p \in M$ ای داریم

$$W(p) = \|n_p\| \quad \text{به ازای } \eta_p \in \Omega^n(T_pM) \text{ ای}$$

به عبارت دیگر، به ازاء هر n بردار $v_1, \cdots, v_n \in T_pM$ داریم

$$W(p)(v_1, \cdots, v_n) = |\eta_p(v_1, \cdots, v_n)| \geq 0$$

چنین تابعی W را المان حجم می‌نامند (بر هر فضای برداری، روشی برای اندازه‌گیری حجم $n-$بعدی (نه حجم علامتدار) وجود دارد) اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی باشد، آنگاه می‌توانیم بر U بنویسیم

$$W = f\,|dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n| \quad \text{به ازای یک } f \geq 0 \text{ ای}$$

یادآور می‌شویم که ω در صورتی المان حجم هموار است که f هموار باشد. یک راه برای بدست آوردن المان حجم این است که از یک $n-$فرم η آغاز نموده و سپس

تعریف کنیم $\omega(p) = |\eta(p)|$. البته، این طور نیست که هر المان حجمی به این صورت حاصل شده باشد — ممکن است فرم η_p نسبت به p به شکل پیوسته تغییر نکند. مثلاً، نوار موبیوس M نشانده شود در $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. چون T_pM را به صورت زیرفضایی از $T_p\mathbb{R}^۳$ می‌توان در نظر گرفت، می‌شود تعریف کرد.

$$\omega(p)(v_p, w_p) = \text{مساحت متوازی الضلاع تولید شده توسط } v \text{ و } w$$

مشاهدهٔ اینکه ω المان حجم است، کار دشواری نیست؛ ω به شکل موضعی به فرم $\omega = |\eta|$ است که η یک ۲—فرم می‌باشد. اما این برای کل M نمی‌تواند درست باشد، زیرا هیچ ۲—فرم η بر M وجود ندارد که در همه جا ناصفر باشد.

قضیهٔ ۱.۳.۷ اصلاحی واضح در مورد المانهای حجمی دارد:

۱.۶.۸ قضیه. اگر $f: M \longrightarrow N$ تابعی هموار بین n—منیفلدها باشد، (x, U) دستگاهی مختصاتی حول $p \in M$ و (y, V) دستگاهی مختصاتی حول $q = f(p) \in N$ باشد، آنگاه تابع نامنفی $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ به گونه‌ای وجود دارد که

$$f^*(g|dy^۱ \wedge \cdots \wedge dy^n|) = (g \circ f).\left| \det \left(\frac{\partial (y^i \circ f)}{\partial x^j} \right) \right| |dx^۱ \wedge \cdots \wedge dx^n|$$

اثبات: کافی است به اثبات قضیهٔ ۱.۳.۷ رفته و هر کجا لازم است از نماد قدر مطلق استفاده کنید. $\square$

۲.۶.۸ نتیجه. اگر (x, u) و (y, v) دو دستگاه مختصات بر M باشند و

$$g|dy^۱ \wedge \cdots \wedge dy^n| = h\,|dx^۱ \wedge \cdots \wedge x^n| \quad (g, h \geq ۰)$$

آنگاه $h = g. \left|\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^i} \right) \right|$.

(این نتیجه نشان می‌دهد که المانهای حجم، اشیأ هندسی متناظر به «چگالیهای اسکالر فرد» معرفی شده در مسألهٔ ۱۰ از فصل ۴ می‌باشد.)

با توجه به مطالب فوق الذکر، موضوع انتگرال‌گیری از یک المان حجم ω روی منیفلد دلخواه، کار ساده‌ای است. ابتدا تعریف می‌کنیم

$$\int_{[۰;۱]^n} \omega = \int_{[۰;۱]^n} f \quad \text{برای } \omega = f\,|dx^۱ \wedge \cdots \wedge dx^n| \text{ با } f \geq ۰$$

و سپس در مورد n−زنجیر $c : [0;1]^n \longrightarrow M$ تعریف می‌کنیم

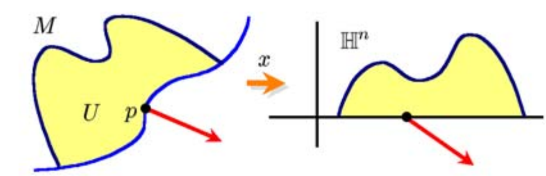
$$\int_c \omega := \int_{[0;1]^n} c^*\omega$$

قضیهٔ ۱.۳.۷ نشان می‌دهد که گزارهٔ ۱.۲.۸ برای المان حجم $\omega = f\,|dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n|$ برقرار است، حتی اگر $\det c' \geq 0$ نباشد. بنابراین، نتیجهٔ ۲.۲.۸ در مورد المان حجم درست است حتی اگر $p' \geq 0$ نباشد. از این نتیجه می‌گیریم که نتیجهٔ قضیهٔ ۱.۵.۸ در مورد المان حجم دلخواه M برقرار است، حتی اگر فرض حافظ جهت بودن c_1, c_2 در میان نباشد (یا M جهت‌پذیر نباشد). نتیجتاً، $\int_M \omega$ را در مورد هر المان حجم ω با عمل فشرده می‌شود تعریف نمود.

البته، وقتی M جهت‌پذیر است، این مباحث بی‌موردند. زیرا یک n−فرم در همه جا ناصفر η بر M وجود دارد، و نتیجتاً هر المان حجمی را به شکل $\omega = f|\eta|$ برای یک $f \geq 0$ می‌توان نوشت. اگر جهتی μ برای M چنان انتخاب کنیم که به ازای هر پایهٔ با جهت مثبت چون $v_1, \cdots, v_n$ داشته باشیم $\omega(v_1, \cdots, v_n)$، آنگاه می‌توانیم تعریف کنیم

$$\int_M \omega := \int_{(M,\mu)} f\eta$$

المان حجم بعداً مهم است، اما در ادامهٔ این فصل به انتگرالگیری از فرمها روی منیفلدهای جهتدار می‌پردازیم. در واقع حکم ما در خصوص انتگرال فرمها بر منیفلدها، حکمی است شبیه قضیهٔ استوکس در مورد انتگرال از فرمها بر زنجیرها، و این حکم در مورد المان حجم کارایی ندارد.



شکل ۱۳.۸

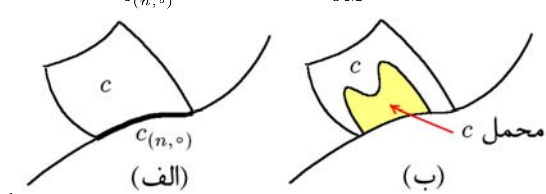
از مسألهٔ ۱۶ از فصل ۳ به یاد می‌آوریم که اگر M منیفلد بدون مرز باشد و $p \in \partial M$، آنگاه بردارهایی $v \in T_pM$ را می‌توان کشخص نمود، با این خصوصیت که به ازای هر دستگاه مختصات $x : v \longrightarrow v$ حول n بردار M بروتسوی باشد. چنین بردارهایی $v \in T_pM$ را **بروتسوی** می گوییم. اگر M دارای جهت M باشد، **جهت القایی** $\partial\mu$ بر ∂M را با انتخاب $[v_1, \cdots, v_{n-1}] \in (\partial\mu)_p$ ها به گونه ای که به ازاء یک بردار بروتسوی

$\omega \in T_pM$ ای $[\omega, v_1, \cdots, v_{n-1}] \in \mu_p$ تعریف می کنیم. اگر μ جهت معمولی بر $\mathcal{H}^n$ باشد، آنگاه به ازاء $p = (a, 0) \in \mathcal{H}^n$ داریم

$$\begin{aligned} \mu_p &= [(e_1)_p, \cdots, (e_n)_p] \\ &= (-1)^{n-1}[(e_n)_p, (e_1)_p, \cdots, (e_{n-1})_p \\ &= (-1)^n[(-e_n)_p, (e_1)_p, \cdots, (e_{n-1})_p] \end{aligned}$$

چون بردار $(-e_n)_p$ بروتسوی است، این نشان می‌دهد که جهت القایی بر $\mathbb{R}^{n-1} \times \partial\mathbb{H}^n = \{0\}$ برابر $(-1)^n$ در جهت معمولی است. دلیل این انتخاب، مشاهدهٔ به شرح ذیل است: گیریم c یک $n-$مکعب تکین حافظ جهت در (M, μ) است به گونه‌ای که $\partial M \cap c([0;1]^n) = c_{(n,0)}([0;1]^{n-1})$ در این صورت $c_{n,0} : [0;1]^{n-1} \longrightarrow (\partial M, \partial M)$ برای n های فرد حافظ جهت و برای n های زوج جهت بر گردان است.
اگر ω یک $(n-1)-$فرم بر M باشد که محمل آن در درون تصویر c قرار دارد (این درون ،نقاط در تصویر $c_{(n,0)}$ را شامل است)، آنگاه

$$\int_{c_{(n,0)}} \omega = (-1)^n \int_{\partial M} \omega$$



شکل ۱۴.۸

اما $C_{(n,0)}$ در ∂C با ضریب $(-1)^n$ ظاهر می‌گردد. بنابراین

$$\int_{\partial C} \omega = \int_{(-1)^n c_{(n,0)}} \omega = (-1)^n \int_{c_{(n,0)}} \omega = \int_{\partial\mu} \omega \qquad (۲.۸)$$

چنانچه این انتخاب را برای $\partial\mu$ در نظر نمی گرفتیم ،علامت منهنی ناجوری در قضیهء ذیل رخ می‌داد.

۷.۸ قضیهٔ استوکس

۱.۷.۸ قضیهٔ استوکس. اگر M یک منیفلد n بعدی ،مرزدار وجهتوار باشد و بر ∂M جهت القایی قرار داشته باشد و ω یک $(n-1)$ فرم بر M با محمل فشرده باشد

۰، آنگاه

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

اثبات: ابتدا فرض کنید یک n مکعب تکین حافظ جهت c در $M - \partial M$ چنان وجود دارد که محمل ω در درون تصویر ω قرار دارد. در این صورت

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega \overset{(1)}{=} \int_{\partial c} \omega \overset{(2)}{=} 0$$

توضیح اینکه در (۱) از قضیهٔ ۱.۴.۸ استفاده شده است و در (۲) از این نکته استفاده شده است که محمل ω در درون تصویر c قرار دارد. حال آنکه به وضوح داریم

$$\int_{\partial M} \omega = 0$$

حال فرض کنیم یک n مکعب حافظ جهت c در M چنان وجود دارد که $\partial M \cap c([0;1]^n) = c_{(n,0)}([0;1]^{n-1})$ و محمل $\omega \subset$ درون تصویر c قرار دارد. در این صورت نیز، به کمک (۲.۸) داریم

$$\int_M d\omega = \int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

در کل، یک پوشش باز O برای M و یک افراز یکانی Φ زیر دست به O چنان وجود دارد که به ازاء هر $\varphi \in \Phi$ فرم $\varphi.\omega$ به یکی از دو صورت مشروط در این صورت، داریم

$$0 = d(1) = d(\sum_{\varphi\in\Phi} \varphi) = \sum_{\varphi\in\Phi} d\varphi$$

و بنابراین،

$$\sum_{\varphi\in\Phi} d\varphi \wedge \omega = 0$$

چون ω بامحمل فشرده است، این مجموع در اساس متناهی، و نتیجه اینکه

$$\sum_{\varphi\in\Phi} \int_M d\varphi \wedge \omega = 0$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \sum_{y\in\Phi} \int_M \varphi.d\omega = \sum_{\varphi\in\Phi} d\varphi \wedge \omega + \varphi\, d\omega \\ &= \sum_{\varphi\in\Phi} \int_M d(\varphi.\omega) = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{\partial M} \varphi.\omega = \int_{\partial M} \omega\end{aligned}$$

و برهان تمام است. $\square$

یکی از ساده ترین کاربردهای قضیهٔ استوکس، در صورتی است که n–منیفلد جهتدار (M,μ) فشرده است (و لذا هر فرمی بر آن با محمل فشرده است) و $\partial M=\phi$. در این حالت، اگر ν یک $(n-۱)$–فرم دلخواه باشد، آنگاه

$$\int_M d\nu=\int_{\partial M}\nu=\circ$$

بنابراین، یک n–فرم ω بر M می‌توانیم بیابیم که دقیق نیست (و حتی این فرم بسته نیز هست، زیرا همهٔ $(n+۱)$–فرمهای بر M صفرند). برای این منظور کافی است فرمی ω را بیابیم که

$$\int_M\omega\neq\circ$$

چنین فرمی همواره وجود دارد. چرا که می‌دانیم یک فرم ω چنان وجود دارد که به ازاء هر $v_۱$، $\cdots$ و v_n از T_pM داریم

$$[v_۱,\cdots,v_n]=\mu_p\quad\text{اگر}\quad\omega(v_۱,\cdots,v_n)>\circ\qquad(۳.۸)$$

اگر $c:[\circ;۱]^n\longrightarrow(M,\mu)$ حافظ جهت باشد، آنگاه فرم $c^*\omega$ بر $[\circ;۱]^n$ به وضوح به ازاء یک $g>\circ$ بر $[\circ;۱]^n$ به شکل $g\,dx^۱\wedge\cdots\wedge dx^n$ است. در نتیجه $\int_c\omega>\circ$. در نتیجه اینکه $\int_M\omega>\circ$. یعنی، بعلاوه نیازی به انتخاب فرمی ω که درهمه جا در (۳.۸) صدق کند، نیست؛ می‌توانیم $>$ را با $\geq$ عوض کنیم . پس حتی یک n–فرم غیر دقیق بر M می‌توانیم چنان بیابیم که محملش در یک همسایگی مختصات قرار بگیرد.

این حکم به خودی خود یک قضیه است: هر منیفلد جهتدار فشرده امکان ندارد به شکل هموار به یک نقطه منقبض گردد. همان طورکه قبلا گفتیم، شکل M نه اندازهٔ آن در این تعیین این موضوع که هر فرم بسته بر M دقیق است، نقش دارد. به تعبیری، با تحلیل بیشتر اینکه در چه صورت فرمهای بسته الزاماً دقیق می‌شوند، اطلاعات بیشتری در خصوص شکل M می‌توانیم بدست بیاوریم. بخصوص، مایلیم بپرسیم که چه میزان از n–فرمهای غیر دقیق بر یک n–منیفلد جهتدار فشرده وجود دارند. طبیعی است که اگر ω دقیق نباشد این مطلب برای کلیهٔ $\omega+d\nu$ هایی که ν یک $(n-۱)$–فرم دلخواه است، درست می‌باشد. بنابراین، بجا است که ω و $\omega+d\nu$ را هم‌ارز بگیریم. یعنی، به این ترتیب، رفتن به فضاهای خارج قسمتی، مسیری طبیعی در این مطالعه است. این ساخت را نه تنها در مورد n–فرمها، بلکه در مورد فرمهای از هر مرتبه‌ای اجرا می‌کنیم.

۸.۸ کوهومولوژی دورام

به ازاء هر k، گردایهٔ $Z^k(M)$ همهٔ k–فرمهای بسته بر M فضایی برداری است. فضای $B^k(M)$ همهٔ k–فرمهای دقیق، زیر فضایی از آن است (زیرا $d^2 = 0$)، و لذا امکان در نظر گرفتن فضای خارج قسمتی

$$H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$$

وجود دارد؛ این فضای برداری $H^k(M)$ را فضای برداری **کوهومولوژی دورام** k–بعدی نظیر به M گفته می‌شود. [قضیه دورام اذعان می‌دارد که این فضای برداری با یک فضای برداری بخصوص که اساساً بر حسب توپولوژی M تعریف می‌گردد، ایزومورف است. (که M دلخواه است)؛ آن فضا را گروه کوهومولوژی k–بعدی از M با ضرایب حقیقی نامیده می‌شود؛ نمادهای Z^k و B^k به نمادهای رایج در توپولوژی جبری مربوطند، که این گروهها موجب می‌گردند.]

هر عضو از $H^k(M)$ دسته‌ای هم‌ارزی $[\omega]$ از یک k–فرم بسته ω است. دو k–فرم بستهٔ ω_1 و ω_2 را در صورتی هم ارز می‌گیریم که تفاضل آنها دقیق باشد. به زبان این فضاهای برداری، لم پوانکاره چنین اذعان می‌دارد که $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$ (یعنی، فضای برداری با تنها عضو ۰ است) مشروط به آنکه $k > 0$ و یا حتی کلیتر، اگر M انقباض‌پذیر باشد و $k > 0$، آنگاه $H^k(M) = 0$.

برای محاسبهٔ $H^\circ(M)$ ابتدا توجه می‌کنیم که $B^\circ(M = 0)$ (هیچ ۰–فرم دقیق غیر صفری وجود ندارد، زیرا هیچ (-1)–فرمی در اختیار نداریم که از آن دیفرانسیل بگیریم). پس $H^\circ(M)$ به عنوان فضای برداری همهٔ توابع هموار به شکل $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ با $df = 0$ است. چنانچه M همبند باشد، از شرط $df = 0$ نتیجه می‌گیرد f ثابت است، بنابراین $H^\circ(M) \simeq \mathbb{R}$. (در کل، بعد $H^\circ(M)$ برابر تعداد مؤلفه‌های M است.)

صرف نظر از این نکات بدیهی، ما عملاً یک مطلب دیگر درخصوص $H^k(M)$ می‌دانیم — اگر M فشرده و همبند باشد، آنگاه $H^n(M)$ با بعد ≤ 1 است. مطالعهٔ بیشتر $H^k(M)$ به توجه دقیق‌تر به کره‌ها و فضاهای اقلیدسی نیاز دارد.

بر $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ انتخابی طبیعی از یک $(n-1)$–فرم σ با $0 < \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sigma'$ وجود دارد: به ازاء هر $(v_1)_p, \cdots, (v_{n-1})_p \in T_pS^{n-1}$ تعریف می‌کنیم.

$$\sigma'((v_1)_p, \cdots, (v_{n-1})_p) = \det \begin{pmatrix} p \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

به وضوح وقتی $\{(v_1)_p,\cdots,(v_{n-1})_p\}$ پایه‌ای با جهت مثبت باشد، عبارت بالا مثبت است. در واقع، به این ترتیب، عملاً یک جهت بر $\mathbb{S}^{n-1}$ تعریف می‌کنیم— این جهت درست همان جهت القایی بر $\mathbb{S}^{n-1}$ به عنوان مرز گوی بستهٔ واحد $\{p\in\mathbb{R}^n : \|p\|\leq 1\}$ است؛ که جهت بر آن نیز از $\mathbb{R}^n$ به ارث برده می‌شود. با بسط دترمینان بر حسب مینورهایش نسبت به سطر بالا، ملاحظه می‌کنیم که σ' تحدید فرم σ بر $\mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x^i\,dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

بروی زیرمنیفلد $\mathbb{S}^{n\circ 1}$ است.

اکنون از فرم σ' بر $\mathbb{S}^{n-1}$ استفاده کرده و $(n-1)$–فرمی بر $\mathbb{R}^n-\{0\}$ می‌یابیم که بسته است، ولی دقیق نیست (و لذا نشان داده‌ایم $H^{n-1}(\mathbb{R}^\circ-\{0\})\neq 0$). نگاشت $r:\mathbb{R}^n-\{0\}\longrightarrow\mathbb{S}^{n-1}$ با ضابطهٔ

$$r(p)=\frac{p}{\|p\|}=\frac{p}{v(p)}$$

را در نظر بگیرید. روشن است که اگر $p\in\mathbb{S}^{n-1}$، آنگاه $r(p)=p$؛ به بیان دیگر، اگر $i:\mathbb{S}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}^n-\{0\}$ احتوا باشد، آنگاه $r\circ i$ برابر نگاشت همانی $\mathbb{S}^{n-1}$ است. (در کل، اگر $A\subset X$ و $i:X\longrightarrow A$ به ازاء $a\in A$ ای در $r(a)=a$ صدق کند، آنگاه r را یک **انقباض** از X بروی A می‌نامند.)

به وضوح، σ' بسته است، زیرا $d(r^*\sigma')=r^*\,d\sigma'=0$. اما، دقیق نیست، زیرا اگر $r^*\sigma'=d\nu$، آنگاه $\sigma'=i^*r^*\sigma'=di^*\nu$. در حالی که می‌دانیم σ' دقیق نیست.

به عنوان تمرینی مشکل ولی آمونده، بجا است نشان دهید که

$$\begin{aligned}
r^*\sigma' &= \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\frac{x\,dy-y\,dx}{v^2}=d\theta\\
r^*\sigma' &= \frac{x\,dy\wedge dz-y\,dx\wedge dz+z\,dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\
&= \frac{1}{v^s}(x\,dy\wedge dz-y\,dx\wedge dz+z\,dx\wedge dy)
\end{aligned}$$

چون عملاً لازم است $r^*\sigma'$ را در حالت کلی بدانیم، آنها را به طریقی دیگر محاسبه می‌کنیم:

۱.۸.۸ لم. اگر σ فرمی با ضابطهٔ $\sigma=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x^i\,dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge$

dx^n بر $\mathbb{R}^n$ باشد و σ' تحدید $i^*\sigma$ به $\mathbb{S}^{n-1}$ باشد، آنگاه

$$r^*\sigma'(p) = \frac{\sigma(p)}{\|p\|^n} \tag{۸.۴}$$

بنابراین

$$r^*\sigma' = \frac{1}{v^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x^i\,dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

اثبات: در هر نقطهٔ $p\in\mathbb{R}^n-\{0\}$، فضای مماس $T_p\mathbb{R}^n$ توسط p_p و بردارهای مماس v_p در فضای مماس به کرهٔ $\mathbb{S}^{n-1}(\|p\|)$ به شعاع $\|p\|$ تولید می‌گردد. بنابراین، کافی است تحقیق شود که دو طرف (۸.۴) وقتی به هر یک از $n-1$ بردار تأثیر می‌کنند، به یک نتیجه می‌رسند. اما p_p بردار مماس به منحنی ∂ واقع در امتداد خط راست گذرنده از 0 و p است؛ این منحنی توسط نگاشت r به تک نقطهٔ $r(p)$ تصویر می‌گردد، و بنابراین $r_*(p_p)=0$. از سوی دیگر

$$\sigma(p)(p_p,(v_1)_p,\cdots,(v_{n-2})_p) = \det\begin{pmatrix} p\\ p\\ v_1\\ \vdots\\ v_{n-2}c\end{pmatrix} = 0$$

بنابراین، کافی است دو سوی (۸.۴) را بر بردارهای در فضای مماس به $\mathbb{S}^{n-1}(\|p\|)$ تأثیر دهیم. بنابراین (مطابق مسألهٔ ۱۵) کافی است نشان دهیم که به ازاء هر چنین بردار v_p ای، داریم

$$r_*(v_p) = \frac{1}{\|p\|}v_{r(p)}$$

اما این تقریباً بدیهی است، یرا بردار v_p بردار مماس به دایره γ واقع در $\mathbb{S}^{n-1}(\|p\|)$ و مماس بر $\mathbb{S}^{n-1}$ در p با بردار مماس v است، و لذا منحنی $r\circ\gamma$ در $\mathbb{S}^{n-1}$ قرار دارد و همزمان به $1/\|p\|$ می‌رود. □

۲.۸.۸ نتیجه (انترالگیری در مختصات قطبی). گیریم $f:B\longrightarrow\mathbb{R}$ که $B=\{p\in\mathbb{R}^n:\|p\|\le 1\}$ و $g:\mathbb{S}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ

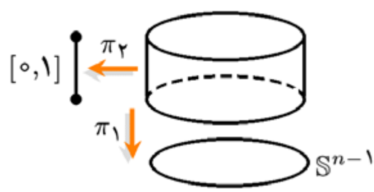
$$g(p) := \int_0^1 u^{n-1}f(u-p)du$$

تعریف کنیم. در این صورت

$$\int_B f = \int_B f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\sigma'$$

اثبات: فضای $\mathbb{S}^{n-1} \times [0;1]$ و دو نگاشت تصویری

$$\pi_1 : \mathbb{S}^{n-1} \times [0;1] \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \qquad \pi_2 : \mathbb{S}^{n-1} \times [0;1] \longrightarrow [0;1]$$



شکل ۱۵.۸

را در نظر می‌گیریم. از اختصار نویسیهای

$$\sigma' \wedge dt = \pi_1^*\sigma' \wedge \pi_1^* dt$$

استفاده می‌کنیم. اگر (y,U) دستگاهی مختصاتی بر $\mathbb{S}^{n-1}$ باشد، دستگاه مختصاتی $(y\circ\pi_1, \pi_2) = \tilde{y}, t$ را بر $\mathbb{S}^{n-1} \times [0;1]$ نظیر می‌کنیم و نیز فرض می‌کنیم

$$\sigma' \alpha\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n-1}$$

در این صورت روشن است که

$$\sigma' \wedge dt = \alpha \circ \pi_1 d\tilde{y}^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{y}^{n-1} \wedge dt$$

از این به سادگی ملاحظه می‌گردد که اگر $h : \mathbb{S}^{n-1} \times [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $h(p,u) = u^{n-1} f(up)$ تعریف کنیم، در این صورت

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\sigma' = \int_{\mathbb{S}^{n-1}\times[0;1]} h\sigma' \wedge dt$$

اکنون دیفئومورفیسمی $\varphi : B - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times (0;1]$ با ضابطهٔ

$$\varphi(p) = (r(p), v(p)) = (p/\|p\|, \|p\|)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned}\varphi^*(\sigma'\wedge dt) &= \varphi^*(\pi_1^*\sigma'\wedge\pi_2^*dt)=\varphi^*\pi_1^*\sigma'\wedge\varphi^*\pi_2^*dt\\ &= (\pi\circ\varphi)^*\sigma'\wedge(\pi_2\circ\varphi)^*dt=r^*\sigma\wedge v^*dt\\ &= \frac{1}{v_n}(\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\,x^i\,dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx}^i\wedge\cdots\wedge dx^n)\wedge\sum_{i=1}^n\frac{x^i}{v}\,dx^i\\ &= \frac{1}{v^{n+1}}\sum_{i=1}^n(x^i)^2\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\frac{1}{v^{n-1}}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\varphi^*(h\sigma'\wedge dt) &= (h\circ\varphi)\varphi^*(\sigma'\wedge dt)=v^{n-1}\,f.\frac{1}{v^{n-1}}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\\ &= f\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\end{aligned}$$

و لذا

$$\begin{aligned}\int_B f\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n &= \int_{B-\{0\}}\varphi^*(h\sigma'\wedge dt)\\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}\times(0;1]}h\sigma'\wedge dt=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}g\sigma'\end{aligned}$$

(مرحله آخر به کمی بررسی نیاز دارد، که احتمالاً به خواننده کمک می‌کند، زیرا فرمهای درگیر دارای عمل فشده بر منیفلدهای $(B-\{0\})$ و $\mathbb{S}^{n-1}\times(0;1]$ که بر آنها تعریف شده‌اند، ندارند.)

اکنون آماده‌ایم تا $H^k(M)$ را برای چند حالت بخصوص دیگر نیز محاسبه کنیم. برآنیم تا محاسبات را به محاسبات در خلال همسایگیهای مختصاتی تقلیل دهیم، که زیرمنیفلدهایی فشرده در M هستند. بنابراین، لازم است گردایه‌ای از فضاهای برداری دیگر را مطرح کنیم که در این حالت قابل توجه می‌باشند.

فضاهای برداری کوهومولوژی دورام با محمل فشرده $H_c^k(M)$ را به صورت $H_c^k(M):=Z_c^k(M/B_c^k(M)$ تعریف می‌کنیم، که $Z_c^k(M)$ فضای برداری $k-$فرمهای بستهٔ با محمل فشرده است، و $B_c^k(M)$ فضای برداری همهٔ $k-$فرمهای به شکل $d\nu$ است که ν یک $(k-1)-$فرم با محمل فشرده است. البته، اگر M فشرده باشد، آنگاه $H_c^k(M)=H^k(M)$. توجه شود که $B_c^k(M)$ همان مجموعهٔ همهٔ $k-$فرمهای دقیق با محمل فشرده نیست. مثلاً، اگر $f\geq 0$ بر $\mathbb{R}^n$، تابعی با محمل فشرده باشد و در نقطه‌ای $f>0$، آنگاه $\omega=f\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ دقیق است (هر فرم بسته بر $\mathbb{R}^n$ چنین است) و با محمل

فشرده می‌باشد، ولی ω به ازاء هیچ فرم ν با محمل فشردهٔ ν ای به شکل $\omega = d\nu$ نیست. در حقیقت، اگر $\omega = d\nu$ که ν با محمل فشرده است، آنگاه بنا به قضیهٔ استوکس

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} d\nu = \int_{\partial\mathbb{R}^n} \nu = ۰$$

این مثال نشان می‌دهد که $H_c^n(\mathbb{R}^n) \neq ۰$، و استدلالی مشابه نشان می‌دهد که اگر M منیلد جهت‌پذیر دلخواهی باشد، آنگاه $H_c^n(M \neq)۰$. اکنون برآنیم که نشان دهیم به ازاء هر منیفلد جهت‌پذیر همبند M، عملاً $H_c^n(M) \approx \mathbb{R}$. این نشان می‌دهد که اگر ω ی ثابتی با $\int_M \omega \neq ۰$ انتخاب شود، آنگاه به ازاء هر n-فرم ω' با محمل فشرده، عددی حقیقی α چنان وجود دارد که $\omega' - \alpha\omega$ دقیق است. عدد α را به راحتی می‌توان توصیف کرد: اگر $\omega' - \alpha\omega = \nu$ آنگاه

$$\int_M \omega' - \int_M \alpha\omega = \int_M d\nu = ۰$$

در نتیجه $\alpha = \int_M \omega' / \int_M \omega$. البته، مسأله نشان دادن وجود η است. توجه شود که ادعای $H_c^n(M) \approx \mathbb{R}$ با این ادعا معادل است که $\int_M \omega \longmapsto [\omega]$ ایزومورفیسمی از $H_c^n(M)$ بروی $\mathbb{R}$ می‌باشد. به عبارت دیگر، هر فرم بستهٔ ω با عمل فشرده برابر دیفرانسیل فرم دیگری با محمل فشرده است، مشروط به اینکه $\int_M \omega = ۰$.

۳.۸.۸ قضیه. اگر M یک n-منیفلد جهت‌پذیر همبند باشد، آنگاه $H_c^n(M) \approx \mathbb{R}$.

اثبات: قضیه را در سه مرحله اثبات می‌کنیم:

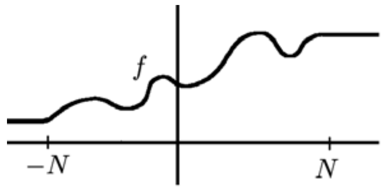
۱) قضیه برای $M = \mathbb{R}$ درست است.

۲) قضیه برای $(n-۱)$-منیفلدها اگر درست باشد، به ویژه برای $\mathbb{S}^{n-۱}$، آنگاه قضیه برای $\mathbb{R}^n$ درست است.

۳) اگر قضیه برای $\mathbb{R}^n$ درست باشد، آنگاه برای هر n-منیفلد همبند و جهت‌دار دلخواه درست است.

مرحلهٔ ۱. گیریم ω یک ۱-فرم با محمل فشرده بر $\mathbb{R}$ است طوری که $\int_{\mathbb{R}} \omega = ۰$. تابعی f (نه لزوماً با محمل فشرده) طوری وجود دارد که $\omega = df$. چون محمل ω فشرده است، df بر خارج بازه‌ای به شکل $[-N; N]$ صفر است. در نتیجه، f بر $(-\infty; -N)$ ثابت $c_۱$ و بر $[N; \infty)$ برابر ثابت $c_۲$ است. به علاوه

$$۰ = \int_{\mathbb{R}} \omega = \int_{\mathbb{R}} df = \int_{\mathbb{R}} f'(t)dt = c_۲ - c_۱$$



شکل ۱۶.۸

در نتیجه $c_1 = c_2 = c$ و داریم $\omega = d(f - c)$، که $f - c$ با محمل فشرده است.

مرحلهٔ ۲. گیریم $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ یک n–فرم با محمل فشرده بر $\mathbb{R}^n$ است به گونه‌ای که $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$. برای ساده‌تر شدن بحث، فرض می‌کنیم محمل $\omega \subset \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| < 1\}$. می‌دانیم یک $(n-1)$–فرم η بر $\mathbb{R}^n$ چنان وجود دارد که $\omega = d\eta$. در واقع، از مسألهٔ ۲۳ از فصل ۷، به یک فرمول صریح برای η می‌رسیم

$$\eta(p) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \Big(\int_0^1 t^{n-1} f(t.p)\, dt \Big)\, x^i\, dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

با جایگزینی $u = \|p\| t$ در این فرمول، داریم

$$\begin{aligned} \eta(p) &= \Big(\int_0^{\|p\|} u^{n-1} f\Big(u.\frac{p}{\|p\|}\Big)\, du \Big) \frac{1}{\|p\|^n}. \\ &\quad .\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, x^i\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &\overset{(1)}{=} \Big(\int_0^{\|p\|} u^{n-1}\, f\Big(u.\frac{p}{\|p\|}\Big)\, du \Big) .r^*\sigma'(p) \end{aligned}$$

که در (۱) از لم ۱.۸.۸ استفاده شده است. $g : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ

$$g(p) = \int_0^1 u^{n-1}\, f(u.p) du$$

تعریف می‌کنیم. بر مجموعهٔ $A = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| > 1\}$ داریم $f = 0$ و لذا بر A داریم

$$\eta(p) = \Big(\int_0^1 u^{n-1} f\Big(u.\frac{p}{\|p\|}\Big)\, du \Big) .r^*\sigma'(p)$$

یا $\eta = (g\circ r).r^*\sigma' = r^*(g\sigma')$. به علاوه، بنا به نتیجهٔ ۲.۸.۸، به ازاء یک $(n-1)-$ فرم $g\sigma'$ بر $\mathbb{S}^{n-1}$ داریم

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\sigma' = \int_B f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_{R^n} \omega = 0$$

در نتیجه، بنابه مفروضات مرحلهٔ ۲ داریم

$$\text{به ازای یک } (n-2)- \text{ فرم } \lambda \text{ بر } S^{n-1} \qquad g\sigma' = d\lambda$$

بنابراین $\eta = r^*(d\lambda) = d(r^*\lambda)$. گیریم $h : R^n \longrightarrow [0;1]$ تابعی هموارست که بر A برابر یک و در همسایگی‌ای از صفر برابر است صفر است. در این صورت $hr^*\lambda$ فرمی هموار بر r^n است و $\omega = d\eta = d(\eta - d(hr^*\lambda)) = 0$. در این صورت، فرم $\eta - d(hr^*\lambda)$ با محمل فشرده است، زیرا بر A داریم

$$\eta - d(h^*r^*\lambda) = \eta - d(r^*\lambda) = 0$$

مرحلهٔ ۳ یک $n-$فرم ω چنان انتخاب می‌کنیم که $\int_M \omega \neq 0$ و ω دارای محمل فشرده در یک مجموعهٔ باز $U \subset M$ است، که U با R^n دیفئومورف است. اگر ω' یک $n-$فرم دیگر و با محمل فشرده باشد، می‌خواهیم نشان دهیم که عددی c و فرمی η با محمل فشرده، طوری وجود دارند که $\omega' = c\omega + d\eta$. با استفاده از یک افراز یکانی، می‌توانیم بنویسیم $\omega = \varphi_1\omega + \cdots + \varphi_k\omega$، که هر یک از $\varphi_i\omega$ها محملی فشرده در یک مجموعهٔ باز $U_i \subset M$ است که U_i با $\mathbb{R}^n$ دیفئومورف است. به وضوح، کافی است c_i ها و η_i هایی بیابیم که به ازاء هر i ای داشته باشیم $\varphi_i\omega = c_i\,\omega + \eta_i$. به عبارت دیگر، می‌توانیم فرض کنیم ω' دارای محمل فشردهٔ در یک مجموعهٔ باز $V \subset M$ است که با $\mathbb{R}^n$ دیفئومورف است.

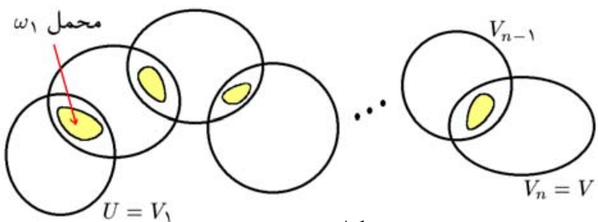
با توجه به همبندی M، روشن است که دنباله‌ای از مجموعه‌های باز

$$U = V_1, \cdots, V_r = V$$

دیفئومورف با $\mathbb{R}^n$ طوری می‌توانیم بیابیم که $V_i \cap V_{i+1} \pm \phi$. فرمهای ω_i را طوری انتخاب می‌کنیم که محمل ω_i زیر مجموعهٔ $V_i \cap V_{i+1}$ است و $\int_{V_i} \omega_i \neq 0$. چون درستی قضیه را برای $\mathbb{R}^n$ به عنوان فرض داریم، در نتیجه

$$\omega_1 - c_i\omega = d\eta_1 \quad , \quad \omega_2 = c_2\omega_1 = d\eta_2, \cdots, \omega' = c_r\omega_{r-1} = d\eta_r$$

که همهٔ η_i با محمل فشرده $(V_i \supset)$ است. از این موضوع به وضوح، حکم مورد نظر استنتاج می‌شود. □



شکل ۱۷.۸

روش به کار رفته در مرحلهٔ آخر را برای استخراج حکم دیگری می‌توان استفاده نمود.

۴.۸.۸ قضیه. اگر M یک $n-$منیفلد جهت ناپذیر همبند باشد، آنگاه $H_c^n(M) = 0$.

اثبات: یک $n-$فرم ω با محمل فشردهٔ واقع در یک مجموعهٔ باز U دیفئومورف با $\mathbb{R}^n$ طوری در نظر می‌گیریم که $\int_U \omega \neq 0$ (چون U جهت‌پذیر است، این انتگرال با معنی است). به وضوح کافی است نشان دهیم که به ازاء یک فرم η با محمل فشرده، $\omega = d\eta$. دنباله‌ای از دستگاه‌های مختصاتی (V_i, x_i) به صورت

$$U = V_1, \cdots, V_r = V$$

در نظر می‌گیریم که هر یک از $x_i \circ x_{i+1}^{-1}$ ها حافظ جهتند. فرمهای ω_i در مرحلهٔ سوم را با استفاده از جهت V_i که $x_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ حافظ جهت باشد، طوری انتخاب می‌کنیم که $\int_{V_i} \omega_i > 0$؛ در این صورت، همچنین داریم $\int_{V_{i+1}} \omega_i > 0$. نتیجتاً، اعداد

$$c_i := \int_{V_i} \omega_i / \int_{V_i} \omega_{i-1}$$

مثبتند. نتیجه اینکه $\omega_i = c\omega + \eta$ با $c > 0$. حال اگر M جهت‌ناپذیر باشد، چنین دنباله‌ای از V_i ها یافت می‌شود که $V_r = V_1$، ولی $x_r \circ x_1^{-1}$ حافظ جهت نیست. با فرض $\omega = -\omega$ داریم $-\omega - c\omega + d\eta$ با $c > 0$. در نتیجه $(-c-1)\omega = d\eta$ برای یک c با $c \neq -1$. □

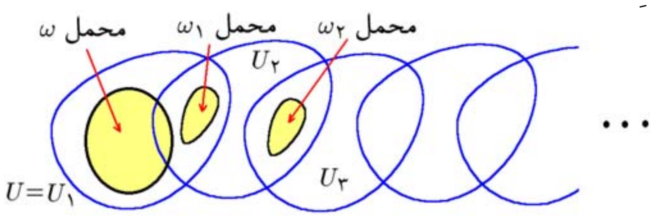
$H^n(M)$ را برای M های غیر فشرده نیز می‌توان استفاده نمود.

۵.۸.۸ قضیه. اگر M یک $n-$منیفلد غیر فشردهٔ همبند (جهت‌پذیر و یا غیر جهت‌پذیر) باشد، آنگاه $H^n(M) = 0$.

اثبات: یک $n-$فرم ω با محمل فشردهٔ مشمول در یک دستگاه مختصاتی U که با $\mathbb{R}^n$ دیفئومورف باشد، در نظر بگیرید. چون M فشرده نیست، دنباله‌ای نامتناهی

$$U = U_1, U_2, U_3, \cdots$$

از چنین دستگاه‌های مختصاتی به گونه‌ای یافت می‌شود که $U_i \cap U_{i+۱} \neq \phi$، و چنین دنباله‌ای عملاً در تکمیل یک مجموعهٔ فشردهٔ دلخواه است.



شکل ۱۸.۸

حال، n–فرمهای ω_i با محمل فشردهٔ مشمول در $U_i \cap U_{i+۱}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\int_{U_i} \omega_i \neq ۰$. اعداد ثابت c_i و فرمهای η_i با محمل فشردهٔ زیر مجموعهٔ U_i چنان وجود دارند که

$$\begin{aligned} \omega &= c_۱\omega_۱ + d\eta_۱ \\ \omega_i &= c_{i+۱}\omega_{i+۱} + d\eta_{i+۱} \qquad i \leq ۱ \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \omega &= d\eta_۱ + c_۱\omega_۱ \\ &= d\eta_۱ + c_۱ d\eta_۱ + c_۱ c_۲ \omega_۲ \\ &= d\eta_۱ + c_۱ d\eta_۲ + c_۱ c_۲ d\eta_۳ + c_۱ c_۲ c_۳ \omega_۳ \\ &= \cdots \end{aligned}$$

چون هر نقطهٔ $p \in M$ ای اساساً در متمم یکی از U_i ها قرار دارد، داریم

$$\omega = d\eta_۱ + c\_۱ d\eta_۱ + c_۱ c_۲ d\eta_۳ + c_۱ c_۲ c_۳ d\eta_۳ + \cdots$$

که سمت راست به علت اینکه U_i ها عملاً خارج هر مجموعهٔ فشرده هستند، با معنی است.

اکنون می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۲۰) که عملاً چنین دنباله‌ای $U_۱$، $U_۲$، $U_۳$ و $\cdots$ یافت می‌شود که اجتماعشان کل M است (تکرار جملات مجاز است)، و U_i ها می‌توانند بسیاری از U_j های با $j < ۱$ را قطع کنند، ولی دنباله همچنان خارج مجموعه‌ای فشرده قرار دارد). پوشش $O = \{U_i\}$ به این ترتیب، موضعاً متناهی است. گیریم $\{\varphi_{U_i}\}$ یک

افراز یکانی زیر دست O است. اگر ω یک $n-$فرم بر M باشد، آنگاه به ازاء هر U_i ای ملاحظه می‌گردد که
$\varphi_{U_i}\,\omega = d\eta_i$ که η_i دارای محمل فشردهٔ در $U_i \cup U_{i+1} \cup U_{i+2} \cup \cdots$ است. بنابراین

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{U_i}\,\omega = \sum_{i=1}^{\infty} d\eta_i = d(\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i)$$

و برهان تمام است. □

۹.۸ خلاصه‌ای از احکام به دست آمده

(۱)

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \text{ اگر} \\ 0 & k > 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

(۲) اگر M یک $n-$منیفلد همبند باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} H^0(M) &\approx \mathbb{R} \\ H^n_c(M) &\approx \begin{cases} \mathbb{R} & \text{اگر } M \text{ جهت‌پذیر باشد} \\ 0 & \text{اگر } M \text{ جهت‌پذیر نباشد} \end{cases} \\ H^n(M) &\approx \begin{cases} H^n_c & \text{اگر } M \text{ فشرده باشد} \\ 0 & \text{اگر } M \text{ فشرده نباشد} \end{cases} \end{aligned}$$

همچنین، می‌دانیم که $H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \neq 0$، ولی در این احکام فهرست نشده است، زیرا اساساً آنرا اثبات نکردیم. به منظور ادامهٔ بحث در خصوص فضاهای برداری کوهمولوژی دورام، لازم است رفتار آنها نسبت به نگاشتهای هموار $f : M \longrightarrow N$ را بررسی کنیم. اگر ω یک $k-$فرم بسته بر N باشد، آنگاه $f^*\omega$ نیز بسته است ($d\,f^*\,\omega = f^*d\omega = 0$)، و لذا f^* فضای $Z^k(N)$ را بتوی $Z^k(M)$ تصویر می‌کند. از سوی دیگر، f^* فضای برداری $B^k(N)$ را نیز بتوی $B^k(M)$ تصویر می‌کند، زیرا $f^*(d\eta) = d(f^*\eta)$. این نشان می‌دهد که f^* نگاشتی به فرم

$$Z^k(N)/B^k(N) \longrightarrow Z^k(M)/B^k(M)$$

القاء می‌کند، که آن را نیز با نماد f^* نشان می‌دهیم: $f^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M)$.

مثلاً، حالت $k = \circ$ را در نظر بگیرید. اگر N همبند باشد، آنگاه $H^\circ(N)$ دقیقاً عبارت است از مجموعهٔ توابع ثابت $c : N \longrightarrow \mathbb{R}$. در نتیجه $f^*(c) = c \circ f$ نیز تابعی ثابت است. اگر M همبند باشد، آنگاه $f^* : H^\circ(N) \longrightarrow H^\circ(M)$ دقیقاً عبارت است از نگاشت همانی، البته با اعمال یکی گیری $H^\circ(N)$ و $H^\circ(M)$ با $\mathbb{R}$– اگر M همبند نباشد و مؤلفه‌های آن $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ باشند، آنگاه $H^\circ(M)$ با جمع مستقیم $\bigoplus_{\alpha\in A} \mathbb{R}_\alpha$ ایزومورف است، که هر یک از $\mathbb{R}_\alpha$ ها با $\mathbb{R}$ دیفئومورفند؛ نگاشت f^* ثابت $c \in \mathbb{R}$ را به عنصری از فضای $\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{R}_\alpha$ می‌برد که همهٔ درآیه‌های آن ثابت و برابر c هستند. اگر N نیز عنصر غیر همبند باشد، و مؤلفه‌های آن $\{N_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ باشد، آنگاه

$$f^* : \bigoplus_{\beta\in\mathcal{B}} \mathbb{R}_\beta \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{R}_\alpha$$

عناصر $\{c_\beta\}$ از $\bigoplus_{\beta\in\mathcal{B}}$ را به $\{c')_\alpha\}$ از $\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{R}_\alpha$ می‌نگارد که $c'_\alpha = c_\beta$ وقتی $f(M_\alpha) \subset N_\beta$.

حالت جالب‌تر، و حالتی که عملاً به آن در این جا توجه می‌کنیم، حالت $k = n$ است. یعنی نگاشت $f^* : H^n(N) \longrightarrow H^n(M)$، که M و N هر دو منیفلد n بعدی جهت‌پذیر، همبند و فشرده هستند. هیچ راه طبیعی برای ایزومورف نمودن $\mathbb{R}$ با $H^n(M)$ وجود ندارد، به دنبال محاسبهٔ

$$\int_N \omega \quad \text{و} \quad \int_M f^* \omega$$

برای n–فرم دلخواه ω بر N هستیم. $\omega_\circ$ ای با $\int_N \omega_\circ \neq \circ$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت، عددی a چنان یافت می‌شود که

$$\int_M f^*\omega_\circ = a. \int_N \omega_\circ$$

چون $\omega \mapsto \int_N \omega$ ایزومورفیسمی از $H^n(M)$ به $\mathbb{R}$ است (و به صورت مشابه برای N)، نتیجه می‌گیریم که به ازاء هر فرم ω داریم

$$\int_M f^* e\omega = a. \int_N \omega$$

عدد $a = \deg f$، که تنها به f بستگی دارد، را **درجهٔ** f می‌نامیم. اگر M و N فشرده نباشد، ولی f سره باشد (تصویر وارون هر مجموعهٔ فشرده، فشرده باشد)، آنگاه نگاشت

$f^*: H^n_c(N) \longrightarrow H^n_c(M)$ را داریم. بعلاوه عددی $\deg f$ چنان یافت می‌شود که به ازاء هر فرم ω بر N با محمل فشرده

$$\int_M f^*\omega = (\deg f)\int_N \omega$$

مادامی که قضیهٔ ذیل اثبات نگردد، باور این مطلب که همواره این عدد، عددی صحیح است، کار دشواری می‌باشد.

۱.۹.۸ قضیه. گیریم $f: M \longrightarrow N$ یک نگاشت سره بین $n-$منیفلدهای جهت‌دار و همبند (M,μ) و (N,v) است. گیریم $q \in N$ مقدار منظم برای f است. به ازاء هر $p \in f^{-1}(q)$ فرض کنیم

$$\operatorname{sgn}_p f := \begin{cases} 1 & \text{اگر } f_{*p}: T_pM \longrightarrow T_qN \text{ حافظ جهت باشد، } \mu_p \\ & \text{البته با جهت } \mu_p \text{ بر } T_pM \text{ و } v_p \text{ بر } T_qN \\ -1 & \text{اگر } f_{*p} \text{ جهت برگردان باشد.} \end{cases}$$

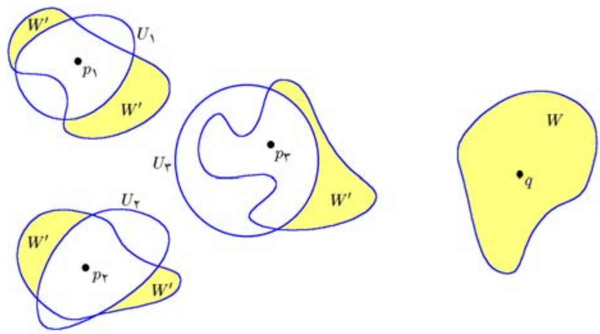
در این صورت

$$\deg(f) = \int_{p\in f^{-1}(q)} \operatorname{sgn}_p(f)$$

و اگر $f^{-1}(p) = \phi$، آنرا صفر تعریف می‌کنیم.

اثبات: ابتدا توجه شود که بنا به قضیهٔ سارد، مقادیر منظم وجود دارند. بعلاوه، $f^{-1}(q)$ متناهی است، زیرا فشرده است و نقاط ایزوله دارد، و لذا مجموع بال بر مجموعه‌ای متناهی صورت می‌پذیرد.

گیریم $f^{-1}(q) = \{p_1, \cdots, p_k\}$. دستگاه‌های مختصاتی (U_i, x_i) به گروه p_i ها را چنان انتخاب می‌کنیم که همهٔ نقاط در U_i مقادیر منظم f باشند، و U_i ها مجزا باشند. می‌خواهیم دستگاهی مختصاتی (V,y) حول q چنان بیابیم که $f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_k$. برای این منظور، ابتدا، یک همسایگی فشرده ω از q انتخاب نموده و $W' \subset M$ را مجموعهٔ فشردهٔ $W' = f^{-1}(W) - (U_1 \cup \cdots \cup U_k)$ می‌گیریم.



شکل ۱۹.۸

در این صورت، $f(W')$ مجموعه‌ای بسته است که q را در بر ندارد. بنابراین، می‌توانیم V را زیرمجموعه‌ای از $W'-f(W')$ بگیریم. این به ما اطمینان می‌دهد که $f^{-1}(V)\subset U_1\cup\cdots\cup U_k$. بالاخره، هر یک U_i را با $U_i\cap f^{-1}(V)$ عوض می‌کنیم.

اکنون ω را بر N به شکل $\omega=g\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n$ انتخاب می‌کنیم که $g\geq 0$ دارای محمل فشردهٔ در V است. در این صورت محمل $f^*\omega$ زیر مجموعهٔ $U_1\cup\cdots\cup U_k$ استو بنابراین

$$\int_M f^*\omega=\sum_{i=1}^k\int_{U_i}f^*\omega$$

چون f دیفئومرفیسمی از هر یک از U_i ها به V است، داریم

$$\begin{aligned}\int_{U_i}f^*\omega &= \int_V\omega &&\text{اگر } f \text{ حافظ جهت باشد}\\ &= -\int_V\omega &&\text{اگر } f \text{ جهت برگردان باشد}\end{aligned}$$

چون f جهت‌پذیر [جهت] است، این درست وقتی ممکن است که $\operatorname{sgn}_p f=1$ [یا به صورت مشابه $\operatorname{sgn}_p f=-1$] و برهان تمام است. □

به عنوان کاربردی بلافصل از قضیه، درجهٔ نگاشت متقاطر $A:\mathbb{S}^n\longrightarrow\mathbb{S}^n$ با ضابطهٔ $A(p)=-p$ را محاسبه می‌کنیم. قبلاً ملاحظه کرده‌ایم که A در کلیهٔ نقاط حافظ جهت است و یا جهت برگردان است، مشروط به اینکه n فرد باشد یا زوج. چون $A^{-1}(p)$ درست یک عضو دارد، نتیجه می‌گیریم که $\deg A=(-1)^{n-1}$. از این حکم نتیجه‌ای جالب می‌توانیم استخراج کنیم، ولی پیش از آن به یک مفهوم مهم دیگر نیاز می‌باشد. دو تابع $f,g:M\longrightarrow N$ بین منیفلدهای هموار را در صورتی (به شکل

هموار) هموتوپ گوئیم که تابعی هموار $H : M \times [0;1] \longrightarrow N$ چنان یافت گردد که

$$\forall p \in M : \quad H(p,0) = f(p) \ , \ H(p,1) = g(p)$$

نگاشت H را یک هوموتوپی (هموار) بین f و g می‌نامیم. توجه شود که M وقتی و تنها وقتی به نقطهٔ $p_0 \in M$ به شکل هموار انقباض‌پذیر است که نگاشت ثابت p_0 هوموتوپ باشد. یادآور می‌شویم که به ازای هر K—فرم ω بر $M \times [0;1]$، یک $(k-1)$—فرم $I\omega$ بر M چنان وجود دارد که $i_1^*\omega - i_0\omega = d(I\omega) + I(d\omega)$. از این واقعیت برای نشان دادن اینکه همهٔ فرمهای بسته بر هر منیفلد به شکل هموار انقباض‌پذیر، دقیق هستند، استفاده می‌کنیم. حال حکمی کلی‌تر را ثابت می‌کنیم.

۲.۹.۸ قضیه. اگر $f, g : M \longrightarrow N$ به شکل هموار هوموتوپ باشند، آنگاه نگاشتهای

$$f^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M) \qquad g^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M)$$

برابراند، $f^* = g^*$.

اثبات: بنابه فرض، نگاشتی هموار $H : M \times [0;1] \longrightarrow N$ با $f = H \circ i_0$ و $g = H \circ i_1$ وجود دارد. هر عضو از $H^*(N)$ دستهٔ هم‌ارزی $[\omega]$ یک k—فرم بسته ω بر N است. در این صورت

$$\begin{aligned} g^*\omega - f^*\omega &= (H \circ i_1)^*\omega - (H \circ i_0)^*\omega \\ &= i_1^*(H^*\omega) - i_0^*(H^*\omega) \\ &= d(IH^*\omega) + I(dH^*\omega) \\ &= d(IH^*\omega) + 0 \end{aligned}$$

اما این به این معنی $g^*([\omega]) = f^*([\omega])$ است.

۳.۹.۸ نتیجه. اگر M و N دو n—منیفلد جهت‌پذیر و فشرده باشند و $f, g : N \longrightarrow M$ هوموتوپ، آنگاه $\deg \ f = \deg \ g$.

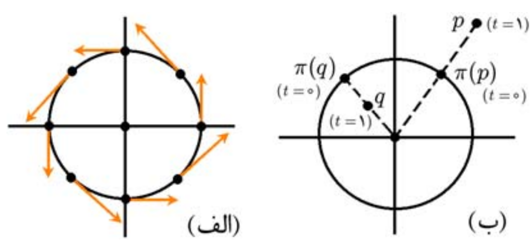
۴.۹.۸ نتیجه. اگر n زوج باشد، آنگاه هیچ میدان برداری همه جا ناصفر بر $\mathbb{S}^n$ وجود ندارد.

اثبات: قبلاً ملاحظه کرده‌ایم که درجهٔ نگاشت متناظر $A:\mathbb{S}^n\longrightarrow\mathbb{S}^n$ برابر $(-۱)^{n-۱}$ است. چون نگاشت همانی از درجهٔ یک است، در حالت n زوج، A با نگاشت همانی نمی‌تواند هوموتوپ باشد. اما اگر یک میدان برداری همه‌جا ناصفر بر $\mathbb{S}^n$ موجود باشد، آنگاه یک هوموتوپی بین A و نگاشت همانی به شکل ذیل می‌توانیم بسازیم. به ازای هر p، یک نیم—دایرهٔ بزرگ منحصر بفرد ∂_p از p تا $-p=A(p)$ وجود دارد که بردار مماس در p از آن، مضربی از $X(p)$ می‌باشد. تعریف می‌کنیم $H(p,t)=\partial_p(t)$. $\square$

به ازای n زوج، یک میدان برداری همه‌جا ناصفر بر $\mathbb{S}^n$ می‌توانیم بسازیم. به ازای $p=(x_۱,\cdots,x_{n+۱})\in\mathbb{S}^n$ تعریف می‌کنیم

$$X(p)=(-x_۱,x_۰,-x_۳,x_۲,\cdots,-x_{n+۱},x_n)$$

$X(p)$ به $p=(x_۱,x_۲,\cdots,x_{n+۱})$ در $\mathbb{R}^{n+۱}$ عمود است، و بنابراین در T_pS^n قرار دارد. (این نگاشت در حالت $\mathbb{S}^۱$ به شکل استاندارد زیر است.) میدان برداری X بر $\mathbb{S}^n$ را برای ساخت یک هوموتوپی بین A و نگاشت همانی استفاده می‌کنیم.



شکل ۲۰.۸

به عنوان کاربرد دیگری از قضیهٔ ؟؟، انقباض $\vec{r}:\mathbb{R}^{-}\{۰\}\longrightarrow\mathbb{S}^{n-۱}$ با ضابطهٔ $r(p)=p\backslash\|p\|$ را در نظر می‌گیریم. اگر $i:\mathbb{S}^{n-۱}\longrightarrow\mathbb{R}^{-}\{۰\}$ احتوی باشد، آنگاه $r\circ i:\mathbb{S}^{n-۱}\longrightarrow\mathbb{S}^{n-۱}$ نگاشت همانی Id از $\mathbb{S}^{n-۱}$ به $\mathbb{S}^{n-۱}$ است. اما، نگاشت $i\circ r:\mathbb{R}^n-\{۰\}\longrightarrow\mathbb{R}^n-\{۰\}$ با ضابطهٔ $i\circ r(p)=p\backslash\|p\|$ همانی است، ولی با نگاشت همانی وموتوپ است؛ هوموتوپی H را با ضابطهٔ $H(p,t)=t_p+(۱-t)r(p)\in\mathbb{R}^n-\{۰\}$ تعریف می‌کنیم. انقباضی با این ویژگی را **انقباض دگردیسی** می‌گوئیم. هرگاه r انقباض دگردیسی باشد، نگاشتهای $(r\circ i^*)$ و $(i\circ r)^*$ یکی هستند. بنابراین ، در حالت $\mathbb{S}^{n-۱}\subset\mathbb{R}^n-\{۰\}$ داریم

$$H^k(\mathbb{S}^{n-۱})\xrightarrow{r^*}H^k(\mathbb{R}^n-\{۰\})\xrightarrow{i^*}H^k(\mathbb{S}^{n-۱})$$

و به علاوه

همانی $i^* o r^* = (r o i)^* = H^k(\mathbb{S}^{n-1})$ همانی $r^* o i^* = (i o r)^* = H^k(\mathbb{R}^n - \{0\})$
پس i^* و r^* وارون یکدیگرند، در نتیجه

$$H^k(\mathbb{S}^{n-1}) = H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}) \quad \text{به ازای هر } k \text{ ای}$$

به ویژه، داریم $H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\})$. مولد $H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ فرم بستهٔ $r^*\sigma'$ است.

حال به محاسبهٔ $H^k(\mathbb{R}^n - \{0\})$ به ازای k های مختلف می‌پردازیم. برای این منظور به مشاهدهٔ دیگری نیاز داریم. روشن است که منیفلد $M \times \{0\} \subset M \times \mathbb{R}^l$ انقباض‌پذیر دگردیسی از $M \times \mathbb{R}^l$ است. بنابراین، به ازای هر l ای $H^k(M) \approx H^k(M \times \mathbb{R}^l)$.

۵.۹.۸ قضیه. به ازاء هر $0 < k < n - 1$ داریم

$$H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}) = H^k(\mathbb{S}^{n-1}) = 0$$

اثبات: به استقراء بر n عمل می‌کنیم. حالتاولی که چیزی برای اثبات آن عملاً وجود دارد، حالت $n = 3$ است. ادعا می‌کنیم که $H^1(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = 0$.
گیریم ω یک ۱‒فرم بسته بر $\mathbb{R}^3$ است. گیریم A و B دو مجموعه باز در $\mathbb{R}^3$ به شرح زیرند:

$$A = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0) \times (-\infty; 0]\} \quad B = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0) \times [0; +\infty)\}$$

چون A و B ستاره شکلند (نسبت به نقاط به ترتیب $(0, 0, 1)$ و $(0, 0, -1)$)، لذا ۰‒فرمهای f_A و f_B به ترتیب بر A و B چنان وجود دارند که

$$\omega = d\, f_A \text{ بر } A \qquad \omega = d\, f_B \text{ بر } B$$

در نتیجه

$$[\mathbb{R}^2 - \{0\}] \times \mathbb{R} = A \cap B \quad \text{بر} \quad d(f_A, f_B) = 0$$

بنابراین، $f_A - f_B$ بر $A \cap B$ ثابت c است. در نتیجه، ω دقیق است، زیرا

$$\omega = \begin{cases} d(f_A - c) & \text{بر } A \\ d(f_B) & \text{بر } B \end{cases}$$

و $f_A - c = f_B$ بر $A \cap B$.

اگر ω یک ۱–فرم بسته بر $\mathbb{R}^۴$ باشد، با استدلالی مشابه و با استفاده از

$$A = \mathbb{R}^۴ - \{(۰,۰,۰) \times (-\infty; ۰)\} \qquad B = \mathbb{R}^۴ - \{(۰,۰,۰) \times [۰;\infty)\}$$

می‌توان عمل کرد. چنانچه ω یک ۲–فرم بسته بر $\mathbb{R}^۴$ باشد، آنگاه ۱–فرمهای η_A و η_B را طوری بدست می آوریم که

$$\omega = d\eta_B \text{ بر } B \quad , \quad \omega = d\eta_A \text{ بر } A$$

اکنون $d(\eta_A - \eta_B) = ۰$ بر $A \cap B$ و

$$H^۱(A\cap B) = H^۱([\mathbb{R}^۳ - \{۰\}] \times \mathbb{R}) \approx H^۱(\mathbb{R}^۳ - \{۰\}) = ۰$$

در نتیجه، به ازاء یک ۰–فرم λ بر $A\cap B$ داریم $\eta_A - \eta_B = d\lambda$. بر خلاف حالت قبل، نمی‌توانیم خیلی ساده $\eta_A - d\lambda$ را در نظر بگیریم، زیرا بر A تعریف نمی‌شود. برای رفع این مشکل، توجه می‌کنیم که یک افراز یکانی $\{\varphi_A, \varphi_B\}$ برای پوشش $\{A, B\}$ از $\mathbb{R}^۳ - \{۰\}$ وجود دارد:

$$\varphi_A + \varphi_B = ۱ \quad d\varphi_A + d\varphi_B = ۰ \quad \mathrm{Supp}\,\varphi_A \subseteq A \quad \mathrm{Supp}\varphi_B \subseteq B$$

حال اگر $\varphi_B\lambda$ را برای نمایش تابع

$$\begin{cases} \varphi_B\lambda & \text{ بر } A\cap B \\ ۰ & \text{ بر } A-(A\cap B) \end{cases}$$

استفاده می‌کنیم و به صورت مشابه $\varphi_A\lambda$ را تعریف کنیم، داریم

$$\varphi_B\lambda \text{ یک فرم هموار بر } A \text{ است} \quad , \quad \varphi_A\lambda \text{ یک فرم هموار بر } B \text{ است}$$

به علاوه، بر $A\cap B$ داریم

$$\begin{aligned} \eta_A - d(\varphi_B\lambda) &= \eta_A - \varphi_B d\lambda - d\varphi_B \wedge \lambda = \eta_A - d\lambda + d(\varphi_A\lambda) \\ &= \eta_A - d\lambda + d(\varphi_A\lambda) = \eta_B + d(\varphi_A\lambda) \end{aligned}$$

پس با فرض $\eta_A - d(\varphi_B\lambda)$ بر A و نیز $\eta_B + d(\varphi_A\lambda)$ بر B، می‌توانیم یک فرم هموار بر $A\cup B = \mathbb{R} - \{۰\}$ تعریف کنیم. به وضوح

$$\omega = \begin{cases} d\eta_A = d(\eta_A - d(\varphi_B\lambda)) & \text{ بر } A \\ d\eta_B = d(\eta_B - d(\varphi_A\lambda)) & \text{ بر } B \end{cases}$$

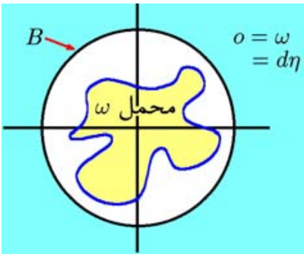
و لذا ω دقیق است.

مرحلهٔ کلی استقراء به شکل مشابه است. □

این فصل را با محاسبه‌ای دیگر، که در فصل ۱۱ به کار خواهد آمد، به پایان می‌بریم.

۶.۹.۸ قضیه. به ازاء هر $0 \le k < n$، داریم $H_c^{0}(\mathbb{R}^n) = 0$.

اثبات: اثبات اینکه $H_c^{0}(\mathbb{R}^n) = 0$ به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده است.



شکل ۲۲.۸

گیریم ω یک k–فرم با محمل فشرده بر $\mathbb{R}^n$ است، که $0 < k < n$. می‌دانیم که به ازاء یک $(k-1)$–فرم η بر $\mathbb{R}^n$ داریم $\omega = d\eta$. گیریم B یک گوی بستهٔ شامل محمل ω است. در این صورت $A = \mathbb{R}^n - B$ داریم $d\eta = 0$. چون A با $\mathbb{R}^n - \{0\}$ دیفئومورف است و $k-1 < n-1$، از قضیهٔ ۵.۹.۸ می‌دانیم که

به ازاء یک $(k-2)-$ فرم λ بر A داریم $\eta = d\lambda$

گیریم $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0;1]$ تابعی هموار است که بر یک همسایگی از B برابر صفر، و بر $\mathbb{R}^n - 2B$ برابر یک است، که $2B$ نمایشگر گوی با شعاع دو برابر B است. در این صورت، $d(f\lambda)$ بر کل $\mathbb{R}^n$ با معنی است و $\omega = d\eta = d(\eta - d(f\lambda))$؛ فرم $\eta - d(f\lambda)$ به وضوح با محمل فشردهٔ در $2B$ می‌باشد. $\square$

۱۰.۸ تمرینات

۱. نوع انتگرال ریمان برای انتگرال داربو. گیریم $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ کراندار است. به ازای هر افراز $P = \{t_1 < \cdots < t_n\}$ از $[a;b]$، فرض می‌کنیم $m_i = m_i(f)$ اینفیموم f بر $[t_{i-1};t_i]$ است و به صورت مشابه $M_i = M_i(f)$ را تعریف می‌کنیم. منظور از یک انتخاب برای P، یک n–تایی $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ با $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ است. مجموع پایین، مجموع بالا و مجموع ریمان برای افراز P و انتخاب ξ را به ترتیب به صورت

$$L(f,P) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} m_i(f).(t_i - t_{i-1}) \qquad (\text{مجموع پایین})$$

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f).(t_i - t_{i-1}) \quad (\text{مجموع بالایی}) \\ S(f,P,\xi) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).(t_i - t_{i-1}) \quad (\text{مجموع ریمان}) \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم. به وضوح $L(f,P) \le S(f,P,\xi) \le U(f,P)$. f را در صورتی **انتگرال‌پذیر—داربو** گوییم که سوپریموم همهٔ $L(f,P)$ ها برابر اینفیموم همهٔ $U(f,P)$ ها باشد؛ این سوپریموم و یا اینفیموم را **انتگرال داربوی** f بر $[a;b]$ می‌نامیم. f را در صورتی انتگرال‌پذیر ریمان گوئیم که

$$\lim_{\|P\| \longrightarrow 0} S(f,P,\xi)$$

موجود باشد؛ مقدار این حد را انتگرال ریمان f بر $[a,b]$ می‌نامیم.

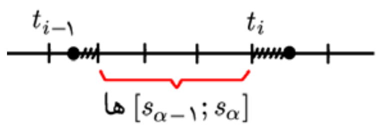
الف) $S(f,P,\xi)$ را حتی اگر f بی‌کران باشد، می‌توان تعریف نمود. اما نشان دهید که اگر f بی‌کران باشد، آنگاه $\lim_{\|P\|} \longrightarrow 0(f,P,\xi)$ وجود ندارد.

ب) اگر f بر $[a;b]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیر داربو و نیز انتگرال‌پذیر ریمان است، و در این حالت، دو انتگرال برابرند. (از پیوستگی یکنواخت f بر $[a;b]$ استفاده کنید.

ج) اگر f بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آنگاه f بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیر داربو است و هر دو انتگرال با هم برابرند.

د) گیریم $m \le f \le M$ بر $[a;b]$. گیریم $P=\{s_0 < \cdots < s_m\}$ و $Q=\{t_0 < \cdots < t_n\}$ دو افراز برای $[a;b]$ هستند. به ازای هر $i=1,\cdots,n$ فرض می‌کنیم

$$e_i = \text{طول } [t_{i-1};t_i] - \left\{ \begin{array}{c} \text{مجموع طول همهٔ } [s_{\alpha-1};s_\alpha] \text{ ها} \\ \text{که مشمول در } [t_{i-1};t_i] \text{ نیستند} \end{array} \right\}$$



شکل ۲۳.۸

نشان دهید که اگر M_i نمایشگر سوپریموم f بر $[t_{i-1};t_i]$ باشد، آنگاه

$$U(f,P) \le U(f,Q) + \sum_{i=1}^{n}(M-M_i)e_i \le U(f,Q) + (M-m)\sum_{i=1}^{n} e_i$$

حکمی مشابه در مورد مجموع پایین وجود دارد.

ه) نشان دهید که هرگاه $\circ \longrightarrow \|P\|$ $\sum\limits_{i=۱}^{n} e_i\|P\|$ به صفر می‌راید، و قضیهٔ داربو را نتیجه بگیرید:

$$\sum_{\|P\|\longrightarrow\circ} U(f,P) = inf\{U(f,Q) : \text{است } [a;b] \text{ افرازی از } Q\}$$

$$\lim_{\|P\|\longrightarrow\circ} L(f,P) = \sup\{L(f,Q) : \text{است } [a;b] \text{ افرازی از } Q\}$$

و) اگر f انتگرال‌پذیر داربو بر $[a;b]$ باشد، آنگاه f بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است.

ز) **(قضیهٔ اسگود)**. گیریم f و g بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیرند. نشان دهید که به ازای هر دو انتخاب ξ و ξ' برای P، داریم

$$\sum_{\|P\|\longrightarrow\circ} \sum_{i=۱}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-۱} = \int_a^b fg)$$

راهنمایی: اگر $|g| \leq M$ بر $[a;b]$، آنگاه $|f(\xi_i'),(\xi_i') - f(\xi_i),(\xi_i')| \leq M|f(\xi_i') - f(\xi_i)|$.

ح) نشان دهید $\int_c f\,dx + g\,dy$ چنانچه به صورت حد مجموع تعریف گردد، با مقدار زیر برابر است

$$\int_a^b [f(c(t))c^{۱'}(t) + g(c(t))c^{۲'}(t)]dt$$

۲. $\int_c d\theta = \int_{[\circ;۱]} c^* d\theta$ را محاسبه کنید، که $c(t) = (\cos(۲\pi t), \sin(۲\pi t))$ با $\circ \leq t \leq ۱$.

۳. به ازای هر عدد صحیح nو هر $R > \circ$، گیریم $C_{R,n} : [\circ;۱] \longrightarrow \mathbb{R}^۲ - \{\circ\}$ با ضابطهٔ زیر است:

$$c_{R,n}(t) = (R\cos(۲n\pi t), R\sin(۲n\pi t))$$

الف) نشان دهید که یک ۲—مکعب تکین $c : [\circ;۱]^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲ - \{\circ\}$ چنان وجود دارد که $c_{R_۱,n} - c_{R_۲,n} = \partial c$

ب) اگر $c : [\circ;۱] \longrightarrow \mathbb{R}^۲ - \{\circ\}$ منحنی دلخواه با $c(\circ) = c(۱)$ باشد، نشان دهید که n ای چنان وجود دارد که $c - c_{۱,n}$ یک مرز در $\mathbb{R}^۲ - \{\circ\}$ است.

ج) نشان دهید n منحصر بفرد است. این عدد را **عدد چرخش** c حول 0 می‌نامیم.

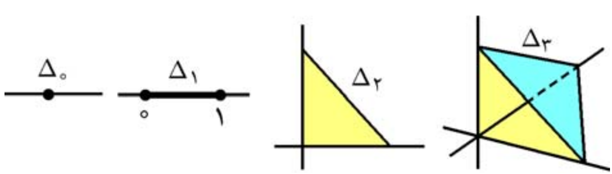
۴. گیریم $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ یک چند جمله‌ای $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ است، که $n \geq 1$. نگاشت $\mathbb{C}_{R,f} : [0;1] \longrightarrow C$ را با ضابطهٔ $c_{R,f} = f \circ c_{R,1}$ تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید که اگر R باندازهٔ کافی بزرگ باشد، آنگاه $c_{R,f} - c_{R,n}$ مرز یک زنجیر در $\mathbb{C} - \{0\}$ است. **راهنمایی** : توجه شود که $c_{R,n}(t) = [c_{R,1}(t)]^n$ و بنویسید

$$f(z) = z^n\left(1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right)$$

ب) نشان دهید که به ازای یک $z \in \mathbb{C}$ ای $f(z) = 0$ (قضیهٔ اساسی جبر). **راهنمایی**: اگر به ازای هر z با $|z| \leq R$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$، آنگاه $c_{R,f} -$ $c_{0,f}$ یک مرز است.

۵. روشی برای انتگرال‌گیری به کمک مجتمعهای بجای مکعبهای تکین وجود دارد. البته در این حالت و قضیهٔ استوکس پیچیده‌تر می‌شود، با این حال همانطور که در مسألهٔ بعد خواهیم دید، دارای مزایایی خاص به خود است. گیریم $\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ مجموعهٔ همهٔ $x \in \mathbb{R}^n$ هایی باشد که $\sum_{i=1}^{n}$ و $0 \leq x^i \leq 1$.



شکل ۲۵.۸

n—سادک تکین در M، تابعی است هموار چون $c : \Delta^n \longrightarrow M$ و n—زنجیر عبارت است از یک مجموع سوری از n—مجتمعهای تکین. همانند قبل، گیریم $I^n : \Delta_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشت احتوی است. به ازای $0 \leq i \leq n$ تعریف می‌کنیم $\partial_i : \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n$

$$\partial_i(x) = \begin{cases} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1}, x^1, \cdots, x^{n-1}\right) & \text{اگر } i = 1 \\ (x^1, \cdots, x^{i-1}, 0, x^i, \cdots, x^{n-1}) & \text{اگر } 0 < i < n \end{cases}$$

و در مورد n–سادک نکین c تعریف می‌کنیم $\partial_i c = c \circ \partial_i$. سپس، تعریف می‌کنیم $\partial c = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i c$

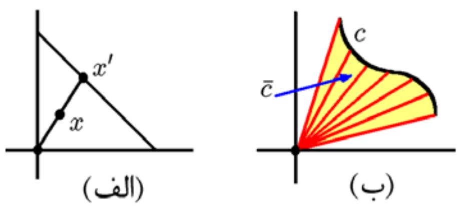
الف) شکل $\partial_i(\Delta_{n-1})$ در Δ_n را از نظر هندسی توصیف کنید.

ب) نشان دهید $\partial^2 = 0$.

ج) نشان دهید که اگر $\omega = f\, dx^i \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n$ یک $(n-1)$–فرم بر $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\int_{I^n} d\omega = \int_{\partial I^n} \omega$. (اثبات در مورد مکعبها را محدود کنید.)

د) به ازاء هر k–زنجیر c در M و هر k–فرم ω بر M انتگرال $\int_c \omega$ را تعریف نموده و ثابت کنید که به ازاء هر $(k-1)$–فرم ω داریم $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$.

۶. هر $x \in \Delta_{k+1}$ را به صورت tx' می‌توان نوشت که $0 \leq t \leq 1$ و $x' \in \partial_0(\Delta_k)$. بعلاوه، وقتی $t = 0$ نقطهٔ x' منحصر بفرد است. به ازاء هر k–سادک تکین $c : \Delta_k \longrightarrow \mathbb{R}^n$، نگاشت $\bar{c} : \Delta_{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را با ضابطهٔ $\bar{c}(x) = t.c(x')$ تعریف می‌کنیم. به ازاء هر زنجیر c و $\bar{c}$ به شکل بدیهی تعریف می‌گردد.



شکل ۲۶.۸

الف) نشان دهید که از $\partial c = 0$ نتیجه می‌شود $c = \partial \bar{c}$.

ب) گیریم $c : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ یک منحنی بسته است. نشان دهید c مرز هیچ مجموع σ از ۲–مکعبهای تکین نیست. **راهنمایی**: اگر $\partial\sigma = \sum_i a_i c_i$، در بارهٔ $\sum_i a_i$ می‌توان پرسید.

ج) نشان دهید که می‌توان نوشت $c = \partial\sigma + c'$، که c' **بتاهیده** است، یعنی $c'([0;1])$ تک نقطه است.

د) اگر $c_1(0) = c_2(0)$ و $c_1(1) = c_2(1)$، نشان دهید $c_1 - c_2$ یک مرز است، چه با استفاده از – مکعبها و چه با استفاده از سادکها.

۷. گیریم ω یک ۱–فرم بر منیفلد M است. فرض کنید به ازای هر منحنی بستهٔ c در M، $\int_c \omega = 0$. نشان دهید ω دقیق است. **راهنمایی:** اگر داشته باشیم $\omega = df$، آنگاه به ازای هر منحنی c ای داریم $\int_c \omega = f(c(1)) - f(c(0))$.

۸. منیفلد M را در صورتی **همبند ساده** گوئیم که M همبند بوده و هر نگاشت هموار $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^n$ انقباض‌پذیر هموار به یک نقطه باشد. [عملاًیک فضای دلخواه (نه لزوماً منیفلد) را در صورتی همبند ساده گوئیم که همبند بوده و هر نگاشت پیوسته $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ به شکل پیوسته انقباض‌پذیر به یک نقطه باشد.]

الف) اگر به شکل هموار انقباض‌پذیر به یک نقطه باشد، آنگاه M همبند راهی است.

ب) $\mathbb{S}^1$ همبند راهی نیست.

ج) به ازای هر $n > 1$ ای $\mathbb{S}^n$ همبند راهی است. **راهنمایی:** نشان دهید هر $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^n$ هموار، الزاماً غیر پوشا است.

د) اگر M همبند راهی بوده و $p \in M$، آنگاه هر نگاشت هموار $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ به شکل هموار به p انقباض‌پذیر است.

ه) اگر $M = U \cup V$ که U و V زیر مجموعه‌های همبتد راهی با $u \cap V$ همبند باشند، آنگاه M همبند ساده است. (این اثباتی دیگر برای همبند راهی بودن $\mathbb{S}^n$ است.) **راهنمایی:** به ازای $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ مفروض، $\mathbb{S}^1$ را به تعدادی متناهی قوس طوری تقسیم کنید که هر یک با در U قرار دارد و یا در V.

و) اگر M همبند راهی باشد، آنگاه $H^1(M) = 0$. (به مسألهٔ ۷ توجه شود.)

۹. الف) گیریم $U \subset \mathbb{R}^2$یک مجموعهٔباز کراندار است به گونه‌ای که $\mathbb{R}^2 - U$ همبند نیست. نشان دهید که U به شکل هموار به یک نقطه انقباض‌پذیر است. (عکس مسألهٔ ۲۴ از فصل ۷.) **راهنمایی:** اگر p یک مؤلفهٔ کراندار از $\mathbb{R}^2 - U$ باشد، نشان دهید که یک منحنی در U وجود دارد که p را دور می‌زند (احاطه می‌کند). به قسمت (الف) از شکل ۲۷.۸ توجه شود.

ب) هر مجموعهٔ باز همبند و کراندار $U \subset rr^2$ وقتی و تنها وقتی به یک نقطه به شکل هموار انقباض‌پذیر است که همبند راهی باشد.

ج) این مطلب در مورد زیر مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}^3$ غلط است.

۱۰. گیریم ω یک n−فرم بر منیفلد جهتدار M^n است. گیریم Φ و Ψ دو افراز یکانی از توابع با محمل فشرده هستند، و بعلاوه $\sum_{\varphi\in\Phi} \int_M \varphi.|\omega| < \infty$. ثابت کنیللف)
از این نتیجه می‌گردد که مجموع $\sum_{\varphi\in\Phi}\int_M \varphi.\omega$ همگرای مطلق است.

ب) نشان دهید

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\int_M \varphi.\omega = \sum_{\varphi\in\Phi}\sum_{\Psi\in\Psi}\int_M \Psi.\varphi.\omega$$

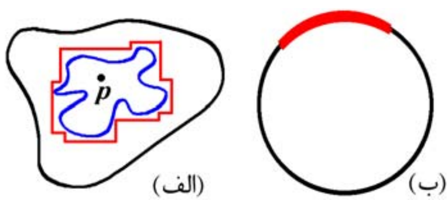
و اگر ω را با $|\omega|$ عمض کنیم، همین رابطه درست است. (نوجه کنید که به ازای هر φ، تنها تعدادی متناهی Ψ وجود دارد که بر $\sup p\varphi$ ناصفر است.)

ج) نشان دهید که $\sum_{\psi\in\Psi}\int_M \psi.|\omega| < \infty$ و نیز $\sum_{\varphi\in\Phi}\int_M \varphi.\omega = \sum_{\psi\in\Psi}\int_M \psi.\omega$. این مجموع مشترک را $\int_M \omega$ تعریف می‌کنیم.

د) گیریم $A_n \subset (n; n+۱)$ مجموعه‌های بسته‌اند. گیریم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار با $\int_{A_n} = (-۱)^n/n$ است و $\text{Supp} f \subset \bigcup_n A_n$. دو افراز یکانی Φ و Ψ طوری بیابید که $\sum_{\varphi\in\Phi}\int_{\mathbb{R}} \varphi.f\,dx$ و $\sum_{\psi\in\Psi}\int_{\mathbb{R}} \psi.f\,dx$ هر دو موجود و همگرای مطلق باشند، ولی متفاوت.

۱۱. در ادامهٔ تمرین ۱۲ از فصل ۷، اشیاء هندسی متناظر به تانسورهای نسبی فرد از نوع $\binom{k}{\ell}$ و به وزن ω را تعریف می‌کنیم (که ω عددی است حقیقی).

۱۲. الف) گیریم M مجموعهٔ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : |(x,y)| < ۱\}$ به همراه بخشی مشخص از مرزش می‌باشد، و نیز $\omega = xdy$. نشان دهید $\int_M d\omega \neq \int_{\partial M}\omega$ حتی اگر هر دو طرف با معنی باشند. از مسألهٔ ۱۰ استفاده شود. (محاسبه نیاز نیست، توجه کنید که تساوی تنها وقتی برقرار است که کل مرز را داشته باشیم.)
به قسمت (ب) از شکل ۲۷.۸ توجه شود.



شکل ۲۷.۸

ب) به صورت مشابه، مثال نقضی برای قضیهٔ استوکس بیابید که در آن $M = (۰;۱)$ و ω یک ۰–فرمی است که محمل آن فشرده نیست.

ج) با بررسی یک افراز یکانی برای $(۰;۱)$ توسط توابع با محمل فشرده، نشان دهید که چرا حکم قضیهٔ استوکس در این حالت نقض می‌گردد.

۱۳. فرض کنید M یک n–منیفلد جهت‌پذیر و فشرده (بدون مرز) است، و θ یک $(n-۱)$–فرم بر M می‌باشد. نشان دهید که $d\theta$ در نقطه‌ای صفر است.

۱۴. گیریم $M_۲ \subseteq \mathbb{R}^۲$ و $M_۱$ دو n–منیفلد مرزدار و فشرده‌اند که $M_۲ \subset M_۱ - \partial M_۱$. نشان دهید که به ازای هر $(n-۱)$–فرم ω بر $M_۱$ داریم $\int_{\partial M_۱}\omega = \int_{\partial M_۲}\omega$ به قسمت (الف) از شکل ۲۸.۸ توجه شود.

۱۵. عامل $۱/\|p\|^n$ در لم ۷ را حساب کنید (در این لم گفته می‌شود که $r_*(V_p) = ((۱/\|p\|)v_{r(p)})$ توجیهی برای عامل $۱/\|p\|^{n-۱}$ است، زیرا $n-۱$ تا بردار $u_{n-۱},\cdots,v_۱$ وجود دارد).

۱۶. با استفاده از فرمول برای r^*dx^i (مسألهٔ ۱ از فصل ۴) $R^*\sigma'$ را محاسبه کنید. (توجه شودکه $r^*\sigma' = r^*i^*\sigma = (i\circ r)^*\sigma$؛ نگاشت $i\circ r : \mathbb{R}^n - \{۰\} \longrightarrow (\mathbb{R}^n - \{۰\})$ درست r است، به شرطی که به عنوان نگاشتی بتوی $\mathbb{R}^n - \{۰\}$ در نظر گرفته شود.)

۱۷. الف) گیریم M^n و N^m منیفلد جهتدارند و ω و η به ترتیب n–فرم با محمل فشرده بر M و N هستند. $M\times N$ را مجاز دانستن $\{v_۱,\cdots,v_n,\omega_۱,\cdots,\omega_m\}$ در $T_{p,q}^{M\times N}\tilde{T}_pM \oplus T_qN$ تعریف می‌کنیم، که $\{v_۱,\cdots,v_n\}$ و $\{\omega_۱\cdots,\omega_m\}$ پایه‌های مثبت در به ترتیب T_pM و T_qN هستند. اگر $\pi_۱ : M\times N \longrightarrow M$ و $\pi_۲ : M\times N \longrightarrow N$ تصاویر بدیهی باشند، نشان دهید

$$\int_{M\times N}\pi_۱^*\omega\wedge\pi_۲^*\eta = \int_M\omega.\int_N\eta$$

ب) اگر $h : M\times N \longrightarrow \mathbb{R}$ هموار باشد، آنگاه $\int_{M\times N} h\pi_۱^*\omega\wedge\pi_۲^*\eta \int_M g\omega$ که

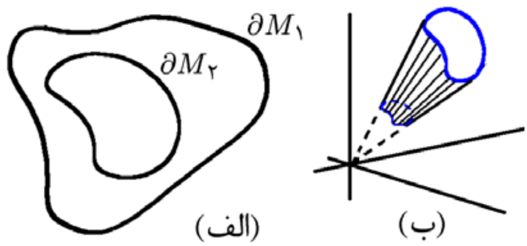
$$g(p) = \int_N h(p,۰)\pi_۲^*\eta \qquad h(p,۰) = q \mapsto h(p,q)$$

ج) هر $(m+n)$–فرم بر $M\times N$ به ازای یک ω و η ای به شکل $\pi_۱^*\omega\wedge\pi_۲^*\eta$ است.

۱۸. الف) گیریم $p \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. گیریم $\omega_1, \cdots, \omega_{n-2} \in T_p\mathbb{R}^n$ و $\nu \in T_p\mathbb{R}^n$ به ازای یک $\lambda \in \mathbb{R}$ ای بشکل $(\lambda p)_p$ باشد. نشان دهید که

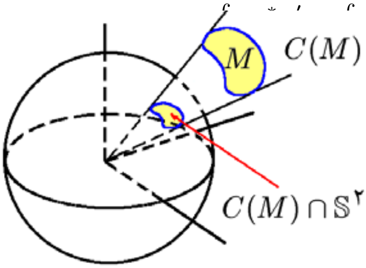
$$r^*\sigma'(\nu, \omega_1, \cdots, \omega_{n-2}) = 0$$

ب) گیریم $M \subseteq \mathbb{R}^n - \{0\}$ یک $(n-1)$–منیفلد مرزدار و فشرده است که اجتماعی از پاره‌خطهای از شعاعهای گذرنده از مبدأ O می‌باشد. نشان دهید $\int_M r^*\sigma' = 0$. به قسمت (ب) از شکل ۲۸.۸ توجه شود.



شکل ۲۸.۸

ج) گیریم $M \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ یک $(n-1)$–منیفلد مرزدار فشرده است که هر شعاع گذرنده از 0 را یکبار قطع می‌کند و $c(M) = \{\lambda p : p \in M, \lambda \geq 0\}$. نشان دهید که $r^*\sigma'$ $M)\cap\mathbb{S}^2$

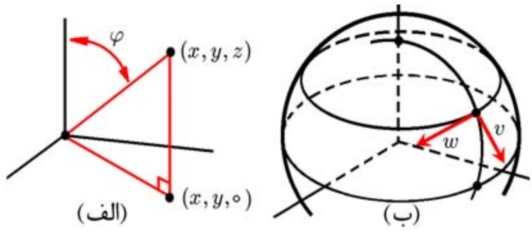


شکل ۲۹.۸

انتگرال آخر مقدار زاویهٔ حجمی M را محاسبه می‌کند. به همین دلیل اغلب انتگرال را با $d\theta_n$ نشان می‌دهند.

۱۹. به ازاء همهٔ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ بجز آنهایی که $x = 0$، $y = 0$ یا $z \in (-\infty; 0)$، $\varphi(x, y, z)$ را زاویهٔ بین z–محور و شعاع واصل بین مبدأ و (x, y, z) تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید $\varphi(x, y, z) = \arctan(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2})$.



شکل ۳۰.۸

ب) اگر $P(p) = \|p\|$، و θ به عنوان تابعی با ضابطهٔ $\theta(x,y,z) = \arctan\frac{y}{x}$ بر $\mathbb{R}^۳$ باشد، در این صورت نشان دهید که (p,θ,φ) یک دستگاه مختصات بر مجموعهٔ همهٔ نقاطی چون $(x,,y,z)$ در $\mathbb{R}^۳$ بجز آنهایی که $y=\circ$ و $y\in[\circ;\infty)$ و یا آنهایی که $x=\circ$، $y=\circ$ و $z\in(-\infty;\circ]$، تشکیل می‌دهند.

ج) اگر v بردار مماس یکهٔ بر کرهٔ $\mathbb{S}^۲(r)$ به شعاع r باشد، ثابت کنید $d\varphi(v) = ۱$. چنانچه ω بردار یکهٔ مماس در نقطهٔ $p=(x,y,z)\in\mathbb{S}^۲(r)$ باشد، ثابت کنید $d\theta(\omega_p) = ۱/\sqrt{x^۲+y^۲}$.

د) اگر θ و φرا به معنی تحدید θ و φ به $\mathbb{S}^۲$ (البته بخشی مشخص از آن) در نظر بگیریم، نشان دهید که در این صورت $\sigma' = hd\theta\wedge dy$ که $h:\mathbb{S}^۲\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع $h(x,y,z) = -\sqrt{x^۲+y^۲}$ است (منهی به دلیل جهت‌دار بر $\mathbb{S}^۲$ است).

ه) نتیجه بگیرید که $\sigma' = d(-\cos\varphi d\theta)$.

و) گیریم $r_۲:\mathbb{R}^۲-\{\circ\}\longrightarrow\mathbb{S}^۱$ انقباض به گونه‌ای که $d\theta = r_۲^*i^*\sigma$ برای یک فرم σ بر $\mathbb{R}^۲$. نشان دهیدی $r_۲^*d\theta = d\theta$. اگر $\pi:\mathbb{R}^۳\longrightarrow\mathbb{R}^۲$ تصویر طبیعی باشد، آنگاه فرم $d\theta$ بر (قسمتی از) $\mathbb{R}^۳$ درست $\pi^*d\theta$ است، که $d\theta$ فرمی بر (قسمتی از) $\mathbb{R}^۲$ می‌باشد. از این استفاده نموده و ثابت کنید که $r^*d\theta = d\theta$.

ز) با استفاده از قسمت (ج) و اینکه به ازای هر v مماس به $\mathbb{S}^۲(\|p\|)$ داریم $r_*(v_p) = v_{r(p)}/\|p\|$، مستقیماً ثابت کنید $r^*d\theta = d\theta$.

ح) نتیجه بگیرید که $d\theta_۳ = r^*\sigma' = d(-\cos(\varphi\circ r)d\theta) = d(-\cos\varphi d\theta)$ (به صورت مشابه $d\theta_n$ را بر $\mathbb{R}^n-\{\circ\}$ بر حسب $d\theta_{n-۱}$ بر $\mathbb{R}^{n-۱}-\{\circ\}$ بسط دهید.

۲۰. ثابت کنید که هر منیفلد همبند به شکل اجتماع $U_۱\cup U_۲\cup U_۳\cup\cdots$ است، که U_i ها دستگاههای مختصاتی هستند، $U_i\cap U_j\neq\rho$، و دنباله عاقبت در خارج مجموعه‌ای فشرده قرار دارد.

۲۱. گیریم $f : M^n \longrightarrow N^n$ یک نگاشت سره بین n−منیفلدها به گونه‌ای که $f_* : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ حافظ جهت است، مادامی که ρ نقطه‌ای منظم باشد. نشان دهید که اگر N همبند باشد، آنگاه f بروی N است، و یا درغیر این صورت، همهٔ نقاط، نقطهٔ تکین f هستند.

۲۲. الف) نشان دهید که هر نگاشت چند جمله‌ای $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $f(z) = z^n + a_۱ z^{n-۱} + \cdots + a_n$ سره است $(۱ \leq n)$.

ب) گیریم $f'(z) = nz^{n-۱} + (n-۱)a_۱ z^{n-۲} + \cdots + a_{n-۱}$. نشان دهید $f'(z) = \lim_{\omega \longrightarrow ۰} \dfrac{f(z+\omega) - f(z)}{\omega}$ که ω بر اعداد مختلط حرکت می‌کند.

ج) برای توابع با مقدار حقیقی u و v ای می‌نویسیم $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. نشان دهید

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

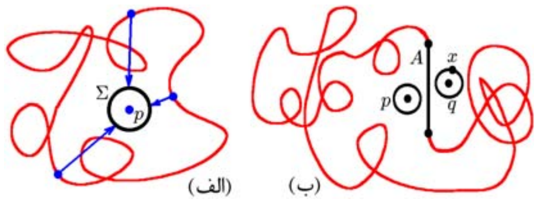
راهنمایی:یکبار ω را عددی حقیقی و بار دیگر، آنرا ih بگیرید.

د) نتیجه بگیرید $|f'(x+iy)|^۲ = \det f'(x,y)$، که f' در سمت چپ همان است که در قسمت (ب) تعریف شد و f' در سمت راست، تبدیل خطی تعریف شده برای هر نگاشتی چون $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ می‌باشد.

ه) به کمک مسألهٔ ۲۱، اثباتی دیگر برای قضیهٔ اساسی جبر ارائه کنید.

و) استدلالی ساده‌تر، بدون استفاده از مسألهٔ ۲۱ (که بسیاری از قضایای این فصل را بکار−می‌برد) وجود دارد. مستقیماً نشان دهید که اگر $f : M \longrightarrow N$ سره باشد، آنگاه تعداد نقاط در $f^{(-۱)}(a)$ تابعی موضعاً ثابت بر مجموعهٔ مقادیر منظم f است. نشان دهید که این مجموعه برای هر چند جمله‌ای $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ همبند است، و نتیجه بگیرید که f همهٔ مقادیر را اختیار می‌کند.

۲۳. گیریم $M^{n-۱} \subset \mathbb{R}^n$ یک منیفلد همبند فشرده است. به ازاء $p \in \mathbb{R}^n - M$، یک کرهٔ $(n-۱)$−بعدی $\sum$ حول p چنان انتخاب می‌کنیم که همهٔ نقاط داخل $\sum$ در $\mathbb{R}^n - M$ قرار داشته باشد. گیریم $r_p : \mathbb{R}^n - \{p\} \longrightarrow \sum$ انقباض بدیهی است. **عدد چرخشی** $\omega(p)$ منیفلد M حول نقطهٔ مفروض p را درجهٔ $r_p|M$ تعریف می‌کنیم.



شکل ۳۱.۸

الف) نشان دهید که این تعریف با آنچه که در مسألهٔ ۳ آورده شد مطابقت دارد.

ب) نشان دهید که این تعریف به انتخاب $\sum$ بستگی ندارد.

ج) نشان دهید که ω در یک همسایگی از p ثابت است. نتیجه بگیرید که ω بر هر مؤلفه از $\mathbb{R}^n - M$ ثابت است.

د) فرض کنید M قسمتی از $(n-۱)$–صفحه را دربردارد. گیریم p و q نقاطی بر این صفحه‌اند، اما در دو طرف مختلف. نشان دهید $\omega(q) = \omega(p) \pm ۱$. (نشان دهید $r_q|M$ با نگاشتی که بر $A - M$ برابر $r_p|M$ است و هیچ نقطه‌ای از A را بروی n نمی‌برد، هموتوپ است.)

ه) نشان دهید که در کل، اگر M جهت‌پذیر باشد، آنگاه $\mathbb{R}^n - M$ حداقل دو مؤلفه دارد. چند مسألهٔ بعد نشان می‌دهند که همین حکم را حتی در حالتی که M جهت‌ناپذیر باشد، چگونه می‌توان اثبات نمود. مطلب دقیق‌تر در این خصوص، در فصل ۱۱ آورده شده است.

۲۴. گیریم M و N دو n–منیفلد فشرده‌اند و $f, g \;:\; M \longrightarrow N$ به شکل هموار هوموتوپند، با هوموتوپی هموار $H : M \times [۰; ۱] \longrightarrow N$.

الف) گیریم $q \in N$ مقداری منظم برای H است. گیریم $\#f^{-۱}(q)$ نمایشگر تعداد (متناهی) نقاط در $f^{-۱}q$ است. نشان دهید (پیمانه ۲) $\#f^{-۱}(q) \equiv \#g^{-۱}(q)$.
راهنمایی: $H^{-۱}(q)$ یک ۱–منیفلد مرزدار فشرده است. تعداد نقاط بر مرزش به وضوح زوج است. (اینجا جایی است که از شکل قوی‌تر قضیهٔ سارد استفاده می‌شود.)

ب) کلیتر، نشان دهید که این حکم در صورتی که q مقدار منظم مشترک f و g باشد، باز هم برقرار است.

۲۵. در صورتی که $f, g : M \longrightarrow N$، برای نمایش اینکه g, f به شکل هموار هوموتوپند، از $f\tilde{g}$ استفاده می‌کنیم.

الف) اگر $f\tilde{g}$، آنگاه یک هوموتوپی هموار $H' : M \times [0; 1] \longrightarrow N$ چنان وجود دارد که

$$H'(p,t) = \begin{cases} f(p) & \text{به ازاء } t \text{ های در یک همسایگی از } 0 \\ g(p) & \text{به ازاء } t \text{ های در یک همسایگی از } 1 \end{cases}$$

ب) ? رابطه‌ای هم‌ارزی است.

۲۶. اگر f به شکل هموار توسط هوموتوپی هموار H با g هوموتوپ باشد، به گونه‌ای که $p \mapsto H(p,t)$ به ازاء هر t دیفئومورفیسم است، می‌گوئیم f به شکل هموار با g **ایزوتوپ** است.

الف)] به شکل هموار ایزوتوپ بودن، رابطه‌ای هم‌ارزی است.

ب)] گیریم $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار است که بر درون یک گوی واحد مثبت است و در سایر جاها صفر. به ازاء $p \in \mathbb{S}^{n-1}$، نگاشت $H' : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ صادق در روابط را در نظر بگیرید (بنا به قضیهٔ ۶.۲.۵، هر جواب این مساله به ازاء همهٔ t ها تعریف می‌گردد.) نشان دهید که هر یک از توابع $x \mapsto H(tmn)$ دیفئومورفیسم هستند و به شکل هموار با نگاشت همانی ایزوتوپند و همهٔ نقاط در خارج یک گوی واحد ثابت را ثابت نگاه می‌دارند.

ج) با انتخاب مناسب p و t نشان دهید که می‌توان $H(t, 0)$ را هر نقطهٔ بخصوص ا درون‌گوی واحد گرفت.

د) اگر M همبند بوه و $p, q \in M$، آنگاه دیفئومورفیسمی $f : M \longrightarrow M$ چنان وجود دارد که $f, f(p) = q$ به شکل هموار با نگاشت همانی ایزوتوپ است.

ه) با استفاده از قسمت (د)، اثباتی دیگر برای قسمت مرحلهٔ سوم از اثبات قضیهٔ ۴.۸.۸ فراهم کنید.

و) اگر M و N دو $n-$منیفلد هموار باشند و $f : M \longrightarrow N$، در این صورت دهید که به ازاء مقادیر منظم $q_1, q_2 \in N$ داریم (پیمانه ۲) $\#f^{-1}(q_1) \equiv \#f^{-1}(q_2)$. (که $\#f^{-1}(q)$ در مسألهٔ ۲۳ تعریف شده است). این عدد را **درجهٔ** f به پیمانهٔ ۲ می‌نامیم.

ز) نشان دهید که با تعویض «درجه» با «درجهٔ به پیمانهٔ ۲» در مسألهٔ ۲۳، چنانچه $M \subset \mathbb{R}^n$ یک منیفلد فشردهٔ $(n-1)-$بعدی باشد، آنگاه $\mathbb{R}^n - M$ حداقل دو مؤلفه دارد.

۲۷. گیریم $\{X^t\}$ خانواده‌ای هموار از میدانهای برداری هموار بر منیفلد فشردهٔ M است (به بیان دقیق‌تر، فرض کنید X یک میدان برداری هموار بر $M \times [0;1]$ است. در این صورت $\pi_M^* X_)(p,t)$ را با نماد $X^t(p)$ نشلن می‌دهیم. از ضمیمهٔ فصل ۵ و نیز استدلال بکاررفته در اثبات قضیهٔ ٦.۲.۵ نتیجه می‌گردد که خانواده‌ای هموار $\{\varphi_t\}$ از دیفئومورفیسمهای M (نه لزوماً گروه ۱−پارامتری) به گونه‌ای وجود دارد که $\{X^t\}$ را تولید می‌کند. به عبارت دیگر، به ازاء هر تابع هموار $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ داریم

$$(X^t f)(p) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h}(f(\varphi_{t+h}(p)) - f(\varphi_t)(p))$$

برای هر خانواده ω_t از k−فرمهای بر M، k−فرمی به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\omega_t := \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h}(\omega_{t+h} - \omega_t)$$

الف) نشان دهید $\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \omega_) t) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{Xt}\omega_t + \omega_t^\circ)$.

ب) گیریم ω_0 و ω_1 در n−فرم هیچ کجا صفر بر یک n−منیفلد جهتدار فشردهٔ M هستند. نشان دهید خانوادهٔ φ_t دیفئومورفیسمهای تولید شده توسط $\{Xt\}$ وقتی و تنها وقتی در شرط $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$ صدق می‌کند که داشته باشیم $\mathcal{L}_X \omega_t = \omega_0 - \omega_1$.

ج) با استفاده از مسألهٔ ۱۸ از فصل ۷، نشان دهید که این وقتی و تنها وقتی ممکن است که $d(X^t \rfloor \omega_t) = \omega_0 - \omega_1$.

د) فرض کنید $\int_M \omega_0 = \int_M \omega_1$ و لذا به ازای یک λ ای $\omega_0 - \omega_1 = d\lambda$. نشان دهید دیفئومورفیسمی $f_1 : M \longrightarrow M$ چنان وجود دارد که $\omega_0 = f^* \omega_1$.

۲۸. گیریم $f : M^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و $g : N^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتهایی هموارند، که M و N منیفلدهای جهت‌پذیر فشرده‌اند، $n = k + \ell + 1$ و $f(M) \cap g(N) = \phi$. نگاشت $\alpha_{f,g} : M \times N \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ را به صورت

$$\alpha_{f,g}(p,q) = r(g(q) - f(p)) = \frac{g(q) - f(p)}{|g(q) - f(p)|}$$

عدد برخورد (ربط) f و g را به صورت $\ell(f,g) = deg\alpha_{f,g}$ تعریف می‌کنیم، که $M \times N$ به تعبیر در مسألهٔ ۱۸ جهت‌پذیر و دارای جهت است.

الف) ثابت کنید $\ell(f,g) = (-1)^{k+\ell+1}\ell(g,f)$.

ب) گیریم $H : M \times [\circ; \text{۱}] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و $k : N \times [\circ; \text{۱}]$ دو هوموتوپی هموار با

$$H(p, \circ) = f(p) \quad H(p, \text{۱}) = f'(p) \quad K(q, \circ) = g(q) \quad K(q, \text{۱}) = g'(q)$$

به گونه‌ای که به ازای هر t ای $\{H(p,t) : p \in M\} \cap \{K(q,t) : q \in N\} = \phi$.
نشان دهید

$$\ell(f, g) = \ell(f', g')$$

ج) نشان دهید که اگر $f, g : \mathbb{S}^\text{۱} \longrightarrow \mathbb{R}^\text{۳}$، آنگاه

$$\ell(f,g) = \frac{-\text{۱}}{\text{۴}\pi} \int_\circ^\text{۱} \left[\int_\circ^\text{۱} \frac{A(u,v)}{\{r(u,v)\}^\text{۳}}\, du \right] dv$$

که $r(u,v) = |g(v) - f(u)|$ و

$$A(u,v) = \det \begin{pmatrix} (f^\text{۱})'(u) & (f^\text{۲})'(u) & (f^\text{۳})'(u) \\ (g^\text{۱})'(v) & (g^\text{۲})'(v) & (g^\text{۳})'(v) \\ g^\text{۱}(v) - f^\text{۱}(u) & g^\text{۲}(v) - f^\text{۲}(u) & g^\text{۳}(u) - f^\text{۳}(v) \end{pmatrix}$$

(عامل $\text{۱}/\text{۴}\pi$ به این دلیل است که $\int_{\mathbb{S}^\text{۲}} \sigma' = \text{۴}\pi$ [مسألهٔ ۱۴ از فصل ۹]).

د) نشان دهید که اگر f و g هر دو در یک صفحه واقع باشند، آنگاه $\ell(f,g) = \circ$ (این را ابتدا برای xy–صفحه انجام دهید). مسألهٔ بعد نشان می‌دهد که چگونه $\ell(f,g)$ را بدون محاسبه می‌توان بدست آورد.

۲۹. الف) به ازای $(a,b,c) \in \mathbb{R}^\text{۳}$ تعریف می‌کنیم

$$d\Theta_{a,b,c} = \frac{(x-a)dy \wedge dz - (y-b)\, dx \wedge dz + (z-c)\, dx \wedge dy}{((x-a)^\text{۲} + (y-b)^\text{۲} + (z-c)^\text{۲})^{\text{۳}/\text{۲}}}$$

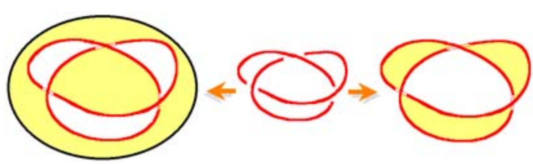
به ازای ۲–منیفلد جهت‌دار و بدون مرز $M \subseteq \mathbb{R}^\text{۳}$ و $(a,b,c) \notin M$، فرض کنیم $\Omega(a,b,c) = \int_M d\Theta_{(a,b,c)}$. گیریم (a,b,c) و (a',b',c') نقاطی در نزدیکی $p \in M$ هستند، که در دو طرف M قرار دارند. فرض کنید (a,b,c) در همین جهتی است که بردار $\omega_p \in T_p\mathbb{R}^\text{۳} - T_pM$ قرار دارد به گونه‌ای که $\{\omega_p, (v_\text{۱})_p, (v_\text{۲})_p\}$ در $T_p\mathbb{R}^\text{۳}$ با جهت مثبت است هرگاه $\{(v_\text{۱})_p, (v_\text{۲})_p\}$ در T_pM با جهت مثبت باشد. نشان دهید $\lim\limits_{(a,b,c) \longrightarrow p} \Omega(a,b,c) - \Omega(a',b',c') = -\text{۴}\pi$.

شکل ۳۲.۸

راهنمایی: ابتدا نشان دهید که $M = \partial N$ نتیجه می‌دهد به ازای هر $(a,b,c) \in N - M$ ای $\Omega(a,b,c) = -4\pi$ و به ازای هر $(a,b,c) \notin N$ ای $\Omega(a,b,c) = 0$.

ب) گیریم $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ نشانده‌ای است که به ازای یک ۲–منیفلد لبه‌دار، جهت‌دارو فشردهٔ M ای $f(\mathbb{S}^1) = \partial M$.(چنین M ای هموار وجود دارد. مثلاً، به صفحهٔ ۱۳۸ از فورت، توپولوژی ۳–منیفلدها، توجه گردد.)

شکل در سمت چپ قسمتی از یک رویهٔ جهتپذیر را نشان می‌دهد که مرز آن گرهٔ سه لایی ؟ است. سایر قسمتهای رویه، یک نیم‌کره است که در پشت کاغذ قرار دارد و مرز آن خارج دایره است. رویهٔ سمت راست جهتپذیر نیست.



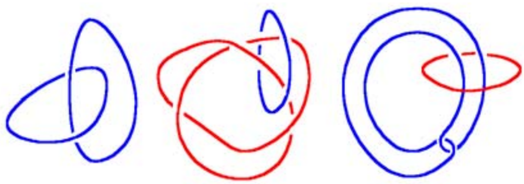
شکل ۳۳.۸

گیریم $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ و وقتی $g(t) = p \in M$، داشته باشیم $dg/dt \notin T_pM$. گیریم n^+ تعداد برخوردهایی است که dg/dt در همان جهت که بردار ω_p از قسمت (الف) قرار دارد، واقع می‌باشد، و n^- تعداد سایر برخودها است. نشان دهید که $n = n^+ - n^- = \frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^1} g^*(d\Omega)$.

ج) نشان دهید

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Omega}{\partial a}(a,b,c) &= \int_{\mathbb{S}^1} f^*\Big(\frac{(y-b)\,dz-(z-c)\,dy}{\|(x,y,z)\|^3}\Big)\\
\frac{\partial\Omega}{\partial b}(a,b,c) &= \int_{\mathbb{S}^1} f^*\Big(\frac{(z-c)\,dx-(x-a)\,dz}{\|(x,y,z)\|^3}\Big)\\
\frac{\partial\Omega}{\partial c}(a,b,c) &= \int_{\mathbb{S}^1} f^*\Big(\frac{(x-a)\,dy-(y-b)\,dx}{\|(x,y,z)\|^3}\Big)
\end{aligned}$$

د) نشان دهید $n = \ell(f,g)$. مقدار $\ell(f,g)$ را برای هر یک از جفت منحنیهای زیر محاسبه کنید:



شکل ۳۴.۸

۳۰. الف) گیریم $p, q \in \mathbb{R}^n$ متفاوتند. مجموعه‌های باز $A, B \subset \mathbb{R}^n - \{p, q\}$ را چنان انتخاب کنید که A و B با د$\mathbb{R}^n -$ دیفئومورفند، و $A \cap B$ با $\mathbb{R}^n$، دیفئومورف است. با استدلالی مشابه آنچه که در اثبات قضیهٔ ۵.۹.۸ بکار رفت نشان دهید که به ازای هر $0 < k < n - 1$ ای $H^k(\mathbb{R}^n - \{p, q\}) = 0$، و نیز $H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{p, q\})$ دو بعدی است.

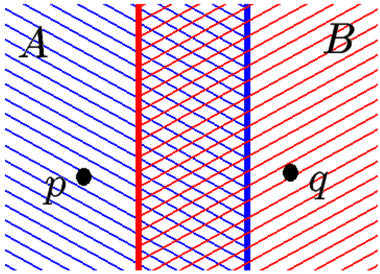
ب) فضاهای برداری کوهمولوژی دورام $\mathbb{R}^n - F$ را بیابید، که $F \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای متناهی است.

۳۱. حاصل‌ضرب فنجانی $U : H^k(M) \times H^\ell(M) \longrightarrow H^{k+\ell}(M)$ را به صورت $[\omega] \wedge [\eta] = [\omega \wedge \eta]$ تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید U خوش‌تعریف است. به عبارت دیگر اگر ω دقیق و η بسته باشد، آنگاه $\omega \wedge \eta$.

ب) نشان دهید U دو خطی است.

ج) نشان دهید که اگر $\alpha \in H^\ell(M)$ و $\beta \in H^k(M)$، آنگاه $\alpha \cup \beta = (-1)^{k\ell} \beta \cup \alpha$.



شکل ۳۵.۸

د) در صوورتی که $f : M \longrightarrow N$، $\alpha \in H^k(N)$ و $\beta \in H^\ell(N)$، ثابت کنید $f^*(\alpha \cup \beta) = f^*\alpha U f^*\beta$.

ه) حاصل‌ضرب خارجی $\times : H^k(M) \times H^\ell(N) \longrightarrow H^{k+\ell}(M \times N)$ را به صورت $[\omega] \times [\eta] = [\pi_M^*\omega \wedge \pi_N^*\eta]$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید $\times$ خوشتعریف است و $\alpha \times \beta = \pi_M^*\alpha \cap \pi_N^*\beta$.

و) اگر $\Delta : M \longrightarrow MM \times M$ با ضابطهٔ $\Delta(p) = (p, p)$ باشد، نشان دهید $\alpha \cup \beta = \Delta^*(\alpha \times \beta)$.

۳۲. فرض کنید بر تیوب $n-$بعدی $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ (حاصل‌ضرب n کپی از $\mathbb{S}^1$) $d\theta^i$ نمایشگر $\pi_i^* d\theta$ است، که $\pi_i : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{S}^1$ تصویر بر مؤلفهٔ i ام است.

الف) نشان دهید که همهٔ $d\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\theta^{i_k}$ ها عناصر مختلفی از $H^k(\mathbb{T}^n)$ را نشان می‌دهند. این ار را با یافتن زیر منیفلدهایی از $\mathbb{T}^n$ که بر آنها انتگرالهای مختلف دارند، استفاده کنید. در نتیجه $\dim H^k(\mathbb{T}^n) \geq \binom{n}{k}$.

ب) نشان دهید که $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ از درجهٔ صفر است. **راهنمایی**: از مسألهٔ ۲۵ استفاده کنید.