بسمه تعالی

آزمون پایان ترم درس هندسه دیفرانسیل موضعی، ترم دوم 96-95

1، 2 و 3: احکام ذیل را اثبات کنید:

۴.۱. قضیه. گیریم g تابعی دیفرانسیلپذیر با مقدار حقیقی روی $\mathbf{E}^3$ و c یک عدد باشد. هنگامی زیرمجموعهٔ $M: g(x, y, z) = c$ از $\mathbf{E}^3$ یك رویه است که درهیچ نقطه از M، دیفرانسیل آن یعنی dg صفر نباشد.

۸.۳. لم. اگر $M: g = c$ رویه‌ای در $\mathbf{E}^3$ باشد، دراین‌صورت میدان برداری گرادیان $\nabla g = \sum (\partial g/\partial x_i) U_i$ (که فقط روی نقاط متعلق به M درنظر گرفته می‌شود) یك میدان برداری قائم روی تمام رویهٔ M می‌باشد.

۵.۲. قضیه. (۱) اگر $\mathbf{p}$ یك نقطهٔ نافی رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه عملگر شکلی S در $\mathbf{p}$، همان ضرب دراسکالر $k = k_1 = k_2$ است.

(۲) اگر $\mathbf{p}$ نقطهٔ نافی نباشد، $k_1 \neq k_2$، آنگاه دقیقاً دو امتداد اصلی یافت می‌شود، که متعامدند، وعلاوه براین اگر $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ بردارهای اصلی این امتدادها باشند، داریم:

$$S(\mathbf{e}_1) = k_1 \mathbf{e}_1 \qquad S(\mathbf{e}_2) = k_2 \mathbf{e}_2$$

4، 5 و 6: هر یک از مسایل ذیل را حل کنید:

۹. گیریم $\mathbf{x}: \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^3$ نگاشت

$$\mathbf{x}(u, v) = (u+v, u-v, uv)$$

باشد، نشان دهید که $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی خاص است و نگارهٔ آن رویهٔ $M: z = (x^2 - y^2)/4$ می‌باشد.

۱۰. دستگاه مختصات $\tilde{u}$، $\tilde{v}$ وابسته به‌هریك از حالتهای زیر را بیابید:

(الف) قطعه مختصاتی، مختصات قطبی $\mathbf{x}(u, v) = (u\cos v, u\sin v)$ روی D ،
$u > ۰$ و $۰ < v < ۲\pi$.

(ب) قطعه مختصاتی همانی $\mathbf{x}(u, v) = (u, v)$ در $\mathbf{E}^۲$.

(ج) قطعه مختصاتی جغرافیایی $\mathbf{x}$ در کره .

۱۲. رویهٔ $M : z = f(x, y)$ را که در آن

$$f(۰, ۰) = f_x(۰, ۰) = f_y(۰, ۰) = ۰$$

است درنظر می‌گیریم (اندیسها معرف مشتقهای جزئی‌اند). نشان دهید که

(الف) بردارهای $\mathbf{u}_۱ = U_۱(۰)$ و $\mathbf{u}_۲ = U_۲(۰)$ درمبدأ ۰ بر M مماس‌اند، و

$$U = \frac{-f_x U_۱ - f_y U_۲ + U_۳}{\sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}}$$

یك میدان برداری قائم یکه روی M است.

(ب)
$$S(\mathbf{u}_۱) = f_{xx}(۰, ۰)\mathbf{u}_۱ + f_{xy}(۰, ۰)\mathbf{u}_۲$$
$$S(\mathbf{u}_۲) = f_{yx}(۰, ۰)\mathbf{u}_۱ + f_{yy}(۰, ۰)\mathbf{u}_۲$$

موفق و سربلند باشید،

مهدی نجفی خواه،

1395/3/30