بسمه تعالی

آزمون میان ترم درس هندسه دیفرانسیل موضعی، ترم دوم 96-95

1، 2 و 3: احکام ذیل را اثبات کنید:

۶.۲. لم. اگر ϕ و ψ، ۱-فرمی باشند، دراین صورت:

$$\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$$

۳.۲. قضیه. (فرمولهای‌فرنه). اگر $\beta : I \to \mathbf{E}^3$ خمی با تندی‌واحد و خمیدگی $\kappa > 0$ و تاب τ باشد، دراین‌صورت:

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

۲.۳. قضیه. به ازای هر دو سه‌وجهی مفروض بر $\mathbf{E}^3$ مثل $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ در نقطهٔ $\mathbf{p}$ و $\mathbf{f}_1$، $\mathbf{f}_2$، $\mathbf{f}_3$ در نقطهٔ $\mathbf{q}$، یك ایزومتری یکتای F از $\mathbf{E}^3$ وجود دارد، به‌طوری‌که $F_*(\mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_i$ به‌ازای $1 \leqslant i \leqslant 3$.

4، 5 و 6: هر یک از مسایل ذیل را حل کنید:

۵. به‌ازای هرسه ۱ - فرمی $\phi_i = \sum_j f_{ij}\, dx_j$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ ثابت کنید:

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} dx_1\, dx_2\, dx_3$$

۴. نشان دهید که به‌ازای هر تابع f ماتریس:

$$A=\begin{pmatrix} \cos^{۲} f & \cos f \sin f & \sin f \\ \sin f \cos f & \sin^{۲} f & -\cos f \\ -\sin f & \cos f & ۰ \end{pmatrix}$$

ماتریس ایستاری یك میدان سه‌وجهی است، و فرمهای همبندی آن را محاسبه کنید.

۳. در $\mathbf{E}^{۲}$ مثلثهایی با رأسهای

$$\Delta_{۱}:(۳,\ ۱),(۷,\ ۱),(۷,\ ۴) \quad \Delta_{۲}:(۲,\ ۰),(۲,\ ۵),\left(-\frac{۲}{۵},\ \frac{۱۶}{۵}\right)$$

رادرنظرمی‌گیریم. ثابت کنید که این مثلثها قابل انطباق‌اند، بدین‌ترتیب یك ایزومتری F که $\Delta_{۱}$ را به $\Delta_{۲}$ منتقل کند بیابید.

موفق و سربلند باشید،

مهدی نجفی خواه،

1395/3/21