

فصل ۱

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

بخش ۱.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه

بطور کلی، معادله دیفرانسیل رابطه‌ای بین یک تابع و مشتقات آن است. به بیان دقیق‌تر،^۱

۱.۱.۱. تعریف یک معادله دیفرانسیل یا معادله دیفرانسیلی، رابطه‌ای است به شکل

$$\mathcal{E} : F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

که در آن F تابعی $n+2$ متغیره و y تابعی مجهول است: $y = y(x)$. معادله $\mathcal{E}$ را از مرتبه n ام گوییم هرگاه $y^{(n)}$ صراحتاً در F حضور داشته باشد و n بزرگترین عدد با این خاصیت باشد.

۲.۱.۱. مثال ۱ $\frac{dy}{dx} + xy = 0$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است.

۲ $y'' + y + x = \cos x$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است.

۳ $(x^2 - y^2)dx + (x + y)dy = 0$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است.

۴ $\frac{d^2y}{dt^2} - t\frac{dy}{dt} = y + t$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بر حسب $y(t)$ است.

۳.۱.۱. تعریف فرض کنیم I یک بازه از خط حقیقی است $I := (a; b)$. البته ممکن است a و b بینهایت باشد.

در صورتی تابع $y = f(x)$ را یک جواب (خصوصی) معادله $\mathcal{E}$ بر I گوییم که

$$\forall x \in I : F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

یعنی اصطلاحاً f در $\mathcal{E}$ صدق کند.

مجموعه همه جواب‌های $\mathcal{E}$ بر I را جواب (عمومی) $\mathcal{E}$ بر I نامیده و با نماد $\mathcal{S}$ نشان می‌دهیم.

۴.۱.۱. مثال فرض کنیم $\mathcal{E} : y'' + y = 0$ و $I = \mathbb{R}$. در این صورت $\sin x$ ، $\cos x$ و $2\sin x - \cos x$ جوابهای خصوصی $\mathcal{E}$ بر I هستند. جواب عمومی $\mathcal{E}$ بر I عبارت است از

$$\mathcal{S} = \{A \sin x + B \cos x : A, B \in \mathbb{R}, x \in I\};$$

که A و B اعداد ثابت دلخواهند. اغلب به اختصار می‌نویسیم: $\mathcal{S} : y = A \sin x + B \cos x$.

^۱ — آخرین بروز رسانی: ۱۴ فروردین ۱۳۹۱ — تالیف: مهدی نجفی‌خواه، دانشیار ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران. هرگونه انتقاد و یا پیشنهادی را با نویسنده به آدرس m_nadjafikhah@iust.ac.ir در میان بگذارید. این کتاب در دست تهیه است و احتمالاً در حال تغییر. لطفاً آخرین نسخه آن را تهیه کنید: http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/Courses/ODE/Fa1.pdf

۵.۱.۱. مثال معادله $\mathcal{E}: y' = y/x + \sqrt{xy}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $I = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. در این صورت $y = 0$ و تابع ضمنی y صادق در $x = y \ln^2 y$ جواب خصوصی $\mathcal{E}$ بر I هستند. جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \{y : x = Ay \ln^2 y, A \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{y = 0\}.$$

۶.۱.۱. مثال معادله $\mathcal{E}: y^2 + y'^2 = 0$ را در نظر بگیرید. تنها جواب این معادله $y = 0$ است.

۷.۱.۱. مثال معادله $\mathcal{E}: y'^2 + 1 = 0$ فاقد هر گونه جوابی است!

۸.۱.۱. تعریف فرض کنید $\mathcal{E}$ معادله‌ای دیفرانسیلی و I بازه‌ای باز در $\mathbb{R}$ است و $x_0 \in I$. مسأله یافتن جوابی از $\mathcal{E}$ که بر I تعریف شود و $y(x_0) = y_0$ را اصطلاحاً مسأله مقدار اولیه یا مسأله کوشی می‌نامند. جواب مسأله را، جواب $\mathcal{E}$ آغازی از x_0 یا (x_0, y_0) می‌نامند. نمودار جواب را خم یا منحنی انتگرال $\mathcal{E}$ آغازی از (x_0, y_0) می‌نامیم.

۹.۱.۱. قضیه (وجود یکتایی جواب مسأله کوشی) فرض کنید $f(x, y)$ تابعی است که در دامنه $D \subseteq \mathbb{R}^2$ از $-xy$ صفحه تعریف می‌شود و $(x_0, y_0) \in D$. فرض کنیم:

(الف) f بر D پیوسته باشد؛

(ب) مشتق جزئی $\frac{\partial f}{\partial y}$ در D کراندار باشد، و

در این صورت $\varepsilon > 0$ ای و تابعی $y = h(x)$ بر $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ چنان وجود دارد که $h(x_0) = y_0$ و به ازای هر $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ای $h'(x) = f(x, h(x))$. بعلاوه h با این ویژگی منحصر بفرد است.

۱۰.۱.۱. یادداشت شرایط قضیه ۹.۱.۱ لازم نیستند، بلکه تنها شرایط کافی‌اند. یعنی ممکن است یکی و یا هر دوی آنها برقرار نباشند، ولی جواب منحصر بفرد وجود داشته باشد. مثلاً اگر $\mathcal{E}: y' = 1/y^2$ و $(x_0, y_0) = (1, 0)$ و $D: 0 < y$ در این صورت $f(x, y) = 1/y^2$ و $\partial f / \partial y = -2/y^3$ که هیچ یک در (x_0, y_0) حتی تعریف نمی‌شوند. یعنی شرایط الف و ب از ۹.۱.۱ برقرار نیستند. در حالی که $y = \sqrt[3]{3(x-1)}$ تنها جواب $\mathcal{E}$ است و در شرایط $y(1) = 0$ نیز صدق می‌کند. یعنی، جواب یکتا است.

۱۱.۱.۱. مثال فرض کنیم $\mathcal{E}: y' = xy + e^{-y}$. در این صورت، هر دو تابع

$$f = xy + e^{-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y},$$

بر $\mathbb{R}^2$ پیوسته‌اند. پس اگر دامنه D کراندار باشد، آنگاه بنا به ۹.۱.۱ معادله $\mathcal{E}$ به‌ازای هر $(x_0, y_0) \in D$ ای دارای یک جواب منحصر بفرد آغازی از (x_0, y_0) است. توجه شود که اگر $D = \mathbb{R}^2$ ، آنگاه $\partial f / \partial y$ کراندار نیست، اما همچنان جواب منحصر بفرد وجود دارد.

۱۲.۱.۱. مثال فرض کنیم $\mathcal{E}: y' = \sqrt{1+y^2}$. در این صورت $f = \sqrt{1+y^2}$ و لذا $\partial f / \partial y = y \sqrt{1+y^2}$. اگر $D = \mathbb{R}^2$ ، آنگاه f بر D پیوسته است و بعلاوه:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\pm 1}{\sqrt{1/y^2 + 1}} = \pm 1.$$

پس $\partial f / \partial y$ بر D کراندار است و بنابراین، معادله $\mathcal{E}$ بر کل $\mathbb{R}^2$ جواب منحصر بفرد دارد.

۱۳.۱.۱. مثال معادله $y' = \frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\partial f / \partial y = 1 / \sqrt[3]{y}$ که وقتی $y \rightarrow 0$ به بینهایت میل می کند. یعنی $\partial f / \partial y$ کراندار نیست جواب $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \left\{ y = \frac{1}{8}(x+c)^3 : c \in \mathbb{R} \right\} \cup \{y = 0\}.$$

ملاحظه می گردد که اگر $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ ، آنگاه $y = \frac{1}{8}(x-x_0)^3$ و $y = 0$ در جواب $\mathcal{E}$ یا آغاز از $(x, 0)$ هستند. یعنی جواب منحصر بفرد نیست.

۱۴.۱.۱. تعریف فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ و $D \subseteq D_f$. در صورتی می گوئیم f نسبت به y بر D در شرط لپشیتز صدق می کند که عددی مانند λ با $0 < \lambda < 1$ یافت گردد که به ازای هر $(x, y), (x, z) \in D$ داشته باشیم:

$$|f(x, y) - f(x, z)| < \lambda |y - z|.$$

۱۵.۱.۱. یادداشت اینکه f نسبت به y بر D در شرط لپشیتز صدق می کند از کرانداری $\partial f / \partial y$ بر D نتیجه می گردد، ولی عکس آن در حالت کلی ممکن است غلط باشد. نظیر تابع $f = |y| \cos x$ و $D : x^2 + y^2 \leq 1$. در این حالت $\partial f / \partial y$ کراندار نیست، در حالی که f بر D با $\lambda = 2$ نسبت به y در شرط لپشیتز صدق می کند.

۱۶.۱.۱. قضیه اگر تابع f بر D پیوسته و نسبت به y در شرط لپشیتز صدق کند، آنگاه مسأله مقدار اولیه زیر دارای جواب منحصر بفرد است:

$$\mathcal{E} : y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in D.$$

۱۷.۱.۱. یادداشت صدق f در شرط لپشیتز نسبت به y بر D برای برقراری قضیه ۱۶.۱.۱ الزامی است. مثلاً اگر $\mathcal{E} : y' = f(x, y)$ که

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

و $D : x^2 + y^2 \leq 1$ و $(x_0, y_0) = (0, 0)$. در این صورت f بر D نسبت به y در شرط لپشیتز صدق نمی کند. از طرفی $\mathcal{E}$ در $(0, 0)$ بینهایت جواب دارد:

$$y = c - \sqrt{x^4 + c^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

۱۸.۱.۱. مثال فرض کنیم $\mathcal{E} : y' = \sqrt{1-y^2}$. در این صورت $f = \sqrt{1-y^2}$ و ملاحظه می گردد که

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x, z)| &= \left| \sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-z^2} \right| = \frac{|z^2 - y^2|}{\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-z^2}} \\ &= \frac{|y+z|}{\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-z^2}} |y-z| \leq \frac{|y| + |z|}{\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-z^2}} |y-z|. \end{aligned}$$

چنانچه فرض شود $u = \max\{|y|, |z|\}$ ، آنگاه

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq \frac{u+u}{\sqrt{1-u^2} + \sqrt{1-u^2}} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

حال اگر $D = \{(x, y) : -1 < y < 1\}$ و $(x_0, y_0) \in D$ با فرض $\varepsilon = |y_0|/2$ و $U = \{(x, y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < (1-\varepsilon)^2\}$.

ملاحظه می‌گردد که به ازای هر (x, y) و هر (x, z) در U داریم:

$$|f(x, y) - f(x, z)| < \frac{|y_0| + 1 - \varepsilon}{\sqrt{1 - (y_0 - 1 + \varepsilon)}} |y - z| < \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{2}|y_0|}} |y - z|.$$

پس f بر U نسبت به y در شرط لپشیتز صدق می‌کند و بنابراین $\mathcal{C}$ بر U دارای جواب منحصر بفرد است.

مثال ۱۹.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}: y' = \frac{x}{y}$. فرض کنیم $D = \{(x, y) : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$. در این صورت اگر $(x, y), (x, z) \in D$ آنگاه:

$$|f(x, y) - f(x, z)| < \left| \frac{x}{y} - \frac{x}{z} \right| = \frac{|x|}{|yz|} |y - z| \leq \frac{R}{r \times r} |y - z| < \frac{2R}{r^2} |y - z|.$$

پس f بر D نسبت به y در شرط لپشیتز صدق می‌کند و لذا $\mathcal{C}$ بر D دارای جواب یکتا است.

بخش ۲.۱ روش خطوط همشیب

تعریف ۱۰.۲.۱. روش خطوط همشیب یکی از روشهای کلی برای تعیین رفتار کلی جواب یک معادله است. در این روش از یک معادله

$$\mathcal{C}: y' = f(x, y),$$

آغاز شده و y' را به عنوان شیب منحنی جواب در نقطه (x, y) تعبیر می‌کنیم. پس اگر c عددی ثابت باشد و C منحنی به معادله $f(x, y) = c$ باشد آنگاه کلیه جوابهایی از $\mathcal{C}$ که از نقطه‌ای از C می‌گذرند، می‌بایستی این منحنی را با شیب c قطع کنند. به همین دلیل C را یک خط یا منحنی همشیب برای $\mathcal{C}$ نظیر به عدد c می‌نامیم. پس از این مرحله، بر منحنی C خطوط کوچک با شیب c رسم می‌کنیم و این کار را برای مقادیر مختلف c تکرار می‌کنیم. توجه شود که اگر $c = 0$ آنگاه C نظیر به نقاط تکین جوابهای $\mathcal{C}$ است (ماکزیموم، مینیموم یا نقاط عطف). از طرفی:

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y}.$$

پس اگر

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + c \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)},$$

آنگاه با علامت Δ می‌توان کیفیت جواب را هنگامی که منحنی $C: f(x, y) = c$ را در نقطه (x_0, y_0) قطع می‌کند بررسی نمود. اگر در حالت خاص $c = 0$ ، آنگاه:

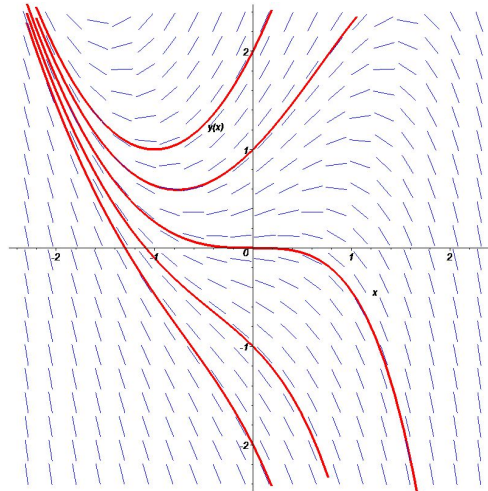
- اگر $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) < 0$ نقطه (x_0, y_0) یک نقطه مینیموم موضعی جوابی از $\mathcal{C}$ است.

- اگر $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) > 0$ نقطه (x_0, y_0) یک نقطه ماکزیموم موضعی جوابی از $\mathcal{C}$ است.

- اگر $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ نقطه (x_0, y_0) یک نقطه عطف موضعی جوابی از $\mathcal{C}$ است.

در مرحله آخر باید منحنی‌هایی را ترسیم کنیم که مماس بر آنها همین خطوط کوچک ترسیم شده - هستند.

۲.۲.۱. مثال فرض کنیم $\mathcal{E}: y' = y - x^2$. در این صورت $f = y - x^2$ و به ازای هر $c \in \mathbb{R}$ ای منحنی $C_c: y - x^2 = c$ یک سهمی رو به بالا با رأس در $(0, c)$ و در جهت محور y ها است. از طرفی چون $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ پس نقاط $(x, y) \in C_0$ با $x > 0$ نقاط ماکزیموم موضعی جوابهای $\mathcal{E}$ هستند و نقاط $(x, y) \in C_0$ با $x < 0$ نقاط مینیموم موضعی جوابهای $\mathcal{E}$ هستند.^۲

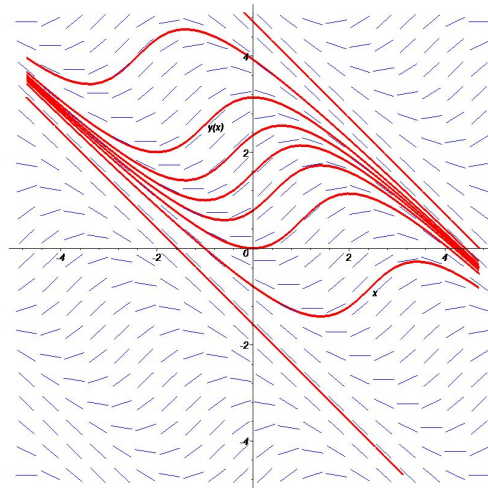


منحنیهای انتگرال معادله $y' = y - x^2$

۳.۲.۱. مثال فرض کنیم $\mathcal{E}: y' = \sin(x + y)$. در این صورت $f = \sin(x, y)$. پس اگر $c \in \mathbb{R}$ ، آنگاه:

$$C_c: f(x, y) = c: \sin(x + y) = c.$$

بنابراین $C_c = \{(x, y): y = \arcsin c - x\}$. پس شیب جوابهای $\mathcal{E}$ بر خط $x + y = \sin \alpha$ برابر α است. اگر $\arcsin c = 0$ یعنی $c = k\pi$ که $k \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه نقاط بر منحنی C_c نقاط تکیه منحنیهای جواب $\mathcal{E}$ هستند.



منحنیهای انتگرال معادله $y' = \sin(x + y)$

چون $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x + y)$ ، اگر $x_0 + y_0 = k\pi$ آنگاه (x_0, y_0) یک نقطه تکیه جوابی از $\mathcal{E}$ است. حال اگر k زوج باشد، آن نقطه مینیموم موضعی است و اگر k فرد باشد یک نقطه ماکزیموم موضعی است.

^۲ توضیح اینکه، در ترسیم این شکل از دستور ذیل در محیط Maple ۱۵ استفاده شده است:

```
DETools[DEplot](diff(y(x),x)=y(x)-x^2,y(x), x=-3..3, y=-3..3, [y(0)=-3, y(0)=-2, y(0)=-1, y(0)=0, y(0)=1, y(0)=2, y(0)=3], arrows=line, color=blue, linecolor=red, thickness=4);
```

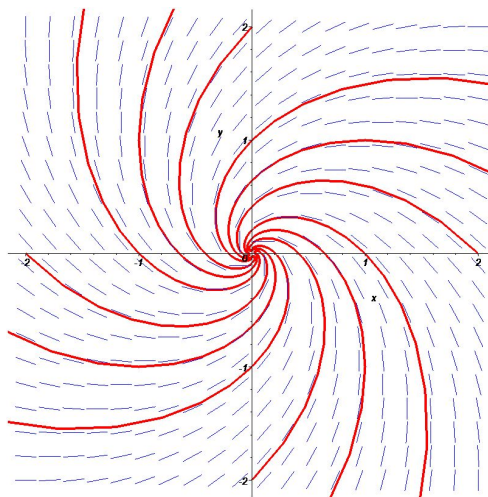
۴.۲.۱. مثال فرض کنیم $y' = \frac{y-x}{y+x} : \mathcal{E}$. در این صورت اگر $c \in \mathbb{R}$ آنگاه

$$\begin{aligned} C_c : \quad & \frac{y-x}{y+x} = c, \\ & : y-x = c(y+x), x+y \neq 0, \\ & : y = \frac{1+c}{1-c}x, x+y \neq 0. \end{aligned}$$

مشروط به اینکه $c \neq 1$. اما اگر $c = 1$ آنگاه:

$$\begin{aligned} C_1 : \quad & \frac{y-x}{y+x} = 1, \\ & : y-x = y+x, x+y \neq 0, \\ & : x = 0, x+y \neq 0 : x = 0 \neq y. \end{aligned}$$

بعلاوه $C_0 := y = x, x \neq 0$. در این صورت، در مجموع داریم:^۳



منحنیهای انتگرال معادله $y' = \frac{y-x}{y+x}$

۵.۲.۱. تمرینات

(۱) زاویه بین منحنیهای انتگرال $\mathcal{E}_1 : y' = x+y$ و $\mathcal{E}_2 : y' = x-y$ در نقطه $(2,1)$ را بیابید.

(۲) منحنیهای انتگرال معادله $y' = x^2 + y^2 + 1 : \mathcal{E}$ محور x ها را در نقطه $(0,0)$ با چه زاویهای قطع می کنند؟

(۳) نقاط ماکزیموم موضعی جوابهای معادله $y' = xy^2 : \mathcal{E}$ را بیابید.

در هر مورد، به روش خطوط همشیب، جوابهای معادله داده شده را ترسیم کنید:

- | | | |
|------------------------|----------------------|----------------------|
| 4) $y' = x+1,$ | 8) $y' = y-x,$ | 13) $y' = x^2+2x-y,$ |
| 5) $y' = \cos(x-y),$ | 9) $y' = x^2+y,$ | 14) $y' = x^2-y^2,$ |
| 6) $y' = x+y,$ | 10) $y' = (y-1)x^2,$ | 15) $y' = y(1-y^2).$ |
| 7) $y' = (x+y)/(x-y),$ | 11) $y' = -y/x,$ | |
| | 12) $y' = y^2,$ | |

^۳ توضیح اینکه، در ترسیم این شکل از دستور ذیل در محیط Maple ۱۵ استفاده شده است:

```
DETools[DEplot]([diff(y(t),t)=y(t)-x(t), diff(x(t),t)=y(t)+x(t)], [x(t), y(t)], t=-4..4, x=-2..2, y=-2..2,
[[x(0)=-1, y(0)=-1], [x(0)=-1, y(0)=1], [x(0)=1, y(0)=-1], [x(0)=1, y(0)=1], [x(0)=1, y(0)=0], [x(0)=-1, y(0)=0],
[x(0)=0, y(0)=-1], [x(0)=0, y(0)=1], [x(0)=-2, y(0)=0], [x(0)=2, y(0)=0], [x(0)=0, y(0)=-2], [x(0)=0, y(0)=2]],
arrows=line, color=blue, linecolor=red, thickness=4);
```

بخش ۳.۱ روش تقریبات متوالی - روش پیکارد

در این روش مسأله

$$\mathcal{E} : y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

به کمک الگوریتمی با یک حلقه محاسبه می‌گردد. به بیان دقیق‌تر؛

۱.۳.۱. قضیه فرض کنیم معادله $y' = f(x, y)$ بر مستطیل:

$$D : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b,$$

دارای جواب منحصر بفرد است و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ای

$$y_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt. \quad (۱.۱)$$

در این صورت اگر

$$M := \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)| \quad N := \max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|,$$

و $h := \min\{a, \frac{b}{M}\}$ در این صورت به ازای هر x ای که $|x - x_0| < h$ داریم:

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{M}{n!} N^{n-1} h^n.$$

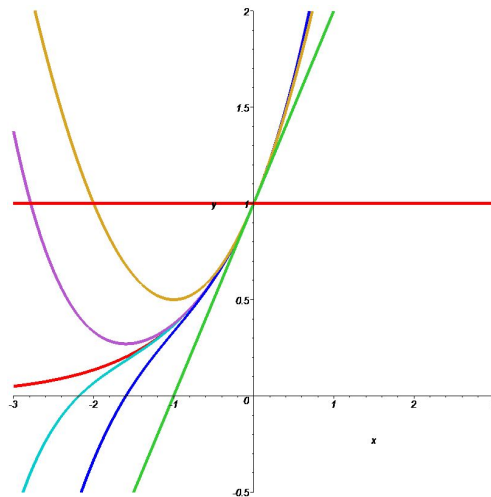
پس اگر $h < 1$ ، دنباله $y_n(x)$ ها به $y(x)$ یعنی جواب مسأله همگرا است.

۲.۳.۱. مثال برای مسأله $y' = y$ و $y(0) = 1$ داریم

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y_1 &= y_0 + \int_0^x y_0 dx = 1 + x, \\ y_2 &= y_0 + \int_0^x y_1 dx = 1 + \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \\ y_3 &= y_0 + \int_0^x y_2 dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \\ &\vdots \\ y_n &= y_0 + \int_0^x y_{n-1} dx = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

روشن است که

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x.$$



اعمال روش پیکارد برای مساله $y' = y, y(0) = 1$

که جواب مساله است.^۴

مثال ۳.۳.۱. مساله $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنیم $D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$. در این صورت:

$$M = \max_{(x,y) \in D} |x^2 + y^2| = 1 + 1 = 2, \quad h = \min\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2},$$

$$N := \max_{(x,y) \in D} |2y| = 2 \times 1 = 2, \quad a = 0, \quad b = 1.$$

پس اگر y جواب $\mathcal{E}$ باشد، آنگاه:

$$\forall (x, y) \in D : |x| < \frac{1}{2} \implies |y(x) - y_n(x)| \leq \frac{2^n}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{n!}.$$

از طرفی، ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ y_1 &= \int_0^x (t^2 + y_0^2) dt = \frac{x^3}{3}, \\ y_2 &= \int_0^x (t^2 + y_1^2) dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9}\right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}, \\ y_3 &= \int_0^x (t^2 + y_2^2) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2579} + \frac{x^{15}}{59535}. \end{aligned}$$

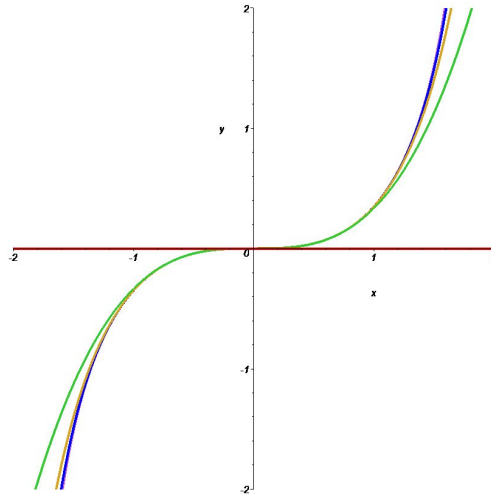
بعلاوه تنها برای $n = 3$ داریم:

$$\forall x : \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \implies |y_3(x) - y(x)| < \frac{1}{6}.$$

به شکل زیر توجه شود.

^۴ توضیح اینکه، در ترسیم این شکل از دستور ذیل در محیط Maple ۱۵ استفاده شده است:

```
> y[1]:= y[0]+int(y[0],x=0..x); y[2]:= y[0]+int(y[1],x=0..x);
> y[3]:= y[0]+int(y[2],x=0..x); y[4]:= y[0]+int(y[3],x=0..x);
> y[5]:= y[0]+int(y[4],x=0..x); y[infty]:=exp(x);
> plot({y[0],y[1],y[2],y[3],y[4],y[5],y[infty]},x=-3..3,y=-1/2..2,thickness=5);
```

اعمال روش پیکارد برای مساله $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0$

۴.۳.۱. یادداشت اگر مساله $\mathcal{E}$ جواب منحصر بفرد نداشته باشد، آنگاه دنباله توابع $\{y_n(x)\}$ در قضیه ۱.۳.۱ به حدی میل نخواهد کرد. بعنوان مثال اگر

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = 0, \quad y \in \mathbb{R} \\ 2x & 0 < x \leq 1, \quad y < 0 \\ 2x - 4y/x & 0 < x \leq 1, \quad 0 < y < x^2 \\ -2x & 0 < x \leq 1, \quad x^2 < y \end{cases}$$

و $D: y \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1$ ، در این صورت به ازای هر n ای:

$$y_{2n+1} = x^2, \quad y_{2n} = -x^2.$$

۵.۳.۱. تمرینات در هر مورد به روش پیکارد مساله داده شده را تا $n = 4$ حل کنید:

- | | |
|--|--|
| 1) $y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 0,$ | 5) $y' = 2x - y, \quad y(1) = 2,$ |
| 2) $y' = x + y^2, \quad y(0) = 0,$ | 6) $y' = y - e^{-x}, \quad y(0) = -1,$ |
| 3) $y' = x + y, \quad y(0) = 1,$ | 7) $y' = xy + 1, \quad y(-1) = 0$ |
| 4) $y' = 2y - 2x^2 - 3, \quad y(0) = 2,$ | 8) $y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad y(0) = 1.$ |

بخش ۴.۱ معادلات تفکیک پذیر

۱.۴.۱. تعریف معادلات دیفرانسیل مرتبه اول $\mathcal{E}$ را در صورتی تفکیک پذیر گوئیم که آن را به یکی از دو شکل زیر بتوان نوشت:

$$\mathcal{E}_1 : y' = f(x).g(y),$$

$$\mathcal{E}_2 : f(x).g(y) dx + h(x).i(y) dy = 0.$$

۲.۴.۱. تمرینات در هر مورد، همه عبارت بر حسب x را در یک طرف و همه عبارت بر حسب y را در طرف دیگر جمع می کنیم و سپس از دو طرف انتگرال می گیریم:

$$\mathcal{S}_1 : \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx,$$

$$\mathcal{S}_2 : \int \frac{i(y)}{g(y)} dy = - \int \frac{f(x)}{h(x)} dx.$$

مثال ۳.۴.۱. معادله $3e^x \tan y \, dx = (e^x - 2) \sec^2 y \, dy$ را حل کنید.
حل: با توجه به صورت مسأله داریم:

$$\frac{3e^x dx}{e^x - 2} = \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy. \quad (2.1)$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله، داریم

$$3 \ln|e^x - 2| + \ln C_1 = \ln|\tan y|.$$

پس $|\tan y| = C_1 |e^x - 2|^3$ و بنابراین $\mathcal{S}_1 : y = \tan^{-1}(C(e^x - 2)^3)$ که C عدد ثابت دلخواهی است. توجه شود که رابطه (۲.۱) تنها وقتی درست است که $\tan y$ و $e^x - 2$ مخالف صفر باشند. یعنی، $x \neq \ln 2$ و y مضربی از π نباشد. از طرفی ملاحظه می گردد توابع $x = \ln 2$ و نیز $y = k\pi$ که $k \in \mathbb{Z}$ جوابهای معادله هستند. بنابراین، جواب عمومی معادله عبارتست از

$$\mathcal{S} = \{y = \tan^{-1}(C(e^x - 2)^3) : C \in \mathbb{R}, x \neq \ln 2\} \cup \{x = \ln 2\} \cup \{y = \ell\pi : \ell \in \mathbb{Z}\}.$$

مثال ۴.۴.۱. معادله $(1 + e^x)yy' = e^x$ را حل کنید.

حل: با توجه به اینکه $y' = \frac{dy}{dx}$ و صورت مسأله داریم:

$$y \, dy = \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx. \quad (3.1)$$

پس از انتگرال گیری از طرفین، داریم:

$$\frac{1}{2}y^2 = \ln(e^x + 1) + \frac{1}{2} \ln C_1.$$

بنابراین $y^2 = 2 \ln(e^x + 1) + \ln C_1$ یا $y = C \sqrt{\ln(e^x + 1)^2}$ که C عددی ثابت و دلخواه است. ملاحظه می گردد که رابطه (۳.۱) همواره برقرار است و مانعی ندارد. بنابراین $\mathcal{S}_1$ جواب عمومی معادله داده شده است.

مثال ۵.۴.۱. هر یک از مسایل زیر را حل کنید:

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} y' \sin x = y \ln y, \\ y(\pi/2) = e. \end{cases} \quad \mathcal{E}_2 : \begin{cases} y' \sin x = y \ln y, \\ y(\pi/2) = 1. \end{cases}$$

حل: در هر دو مسأله معادله $y' \sin x = y \ln y$ مطرح است که تفکیک پذیر می باشد:

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}. \quad (4.1)$$

پس از انتگرال گیری از طرفین، داریم:

$$\ln|\ln y| = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \ln C_1;$$

یا $\ln y = C \tan \frac{x}{2}$ که C_1 عدد مثبت دلخواه و C عددی دلخواه است: $C = \pm C_1$.

بنابراین جواب عمومی معادله مفروض $y = A \exp\left(\tan \frac{x}{2}\right)$ است که $A = e^C$ عددی مثبت است. از طرفی (۴.۱) تنها وقتی ممکن است که $\sin x \neq 0$ و $y \ln y \neq 0$ یعنی x مضربی از π نباشد و $0 < y \neq 1$. بعلاوه $x = k\pi$ و $y = 0$ جواب معادله نیستند و تنها $y = 1$ در آن صدق می‌کند. پس جواب عمومی معادله عبارتست از

$$\mathcal{S} = \left\{ y = A \exp\left(\tan \frac{x}{2}\right) \mid A > 0 \right\} \cup \{y = 1\}.$$

اما شرط $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ در $\mathcal{E}_1$ به معنی $A = 1$ است. پس جواب $\mathcal{E}_1$ عبارتست از $y = \exp\left(\tan \frac{x}{2}\right)$. به صورت مشابه، شرط $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ در $\mathcal{E}_2$ به جواب $y = \frac{1}{e} \exp\left(\tan \frac{x}{2}\right)$ می‌انجامد. بعلاوه، $y \equiv 1$ نیز در $\mathcal{E}_2$ صدق می‌کند؛ یعنی، مساله $\mathcal{E}_2$ دو جواب دارد!

۶.۴.۱. مثال معادله $\mathcal{E} : y' = x(1 - y^2)$ را حل کنید.

حل: با توجه به صورت مساله و اینکه $y' = dy/dx$ داریم:

$$\frac{dy}{1 - y^2} = x dx. \quad (5.1)$$

اما $2/(1 - y^2) = 1/(1 + y) + 1/(1 - y)$. بنابراین، از (۵.۱) داریم:

$$\frac{1}{2} \ln|1 + y| - \frac{1}{2} \ln|1 - y| = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln C_1.$$

در نتیجه $\left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = C_1 \exp(x^2)$ که C_1 عددی مثبت است. اما اگر $C_1 = \pm C$ داریم $\frac{1 + y}{1 - y} = C \exp(x^2)$ یا $y = \frac{C e^{x^2} - 1}{C e^{x^2} + 1}$ از طرفی (۵.۱) وقتی ممکن است که $y^2 = 1$ یا $y \neq \pm 1$ ، که هر دو جواب $\mathcal{E}$ هستند. بنابراین جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \left\{ y = \frac{C e^{x^2} - 1}{C e^{x^2} + 1} : C \in \mathbb{R} \right\} \cup \{y = 1\} \cup \{y = -1\}.$$

۷.۴.۱. مثال فرض کنید یک فضا پیما پس از انجام مأموریتش به اقیانوس می‌افتد. فرض کنیم دمای فضا پیما در لحظه t پس از سقوط برابر $T(t)$ است و در لحظه برخورد برابر α است. اگر دمای آب اقیانوس β باشد و ثابت انتقال گرما بین اقیانوس و فضا پیما ثابت k باشد، در این صورت مطابق قانون سرد شدن نیوتن، مساله زیر را داریم:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - \beta), \\ T(0) = \alpha. \end{cases}$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر در بر دارد. آن را به روش زیر حل می‌کنیم:

$$\frac{dT}{T - \beta} = -k dt;$$

$$\ln|T - \beta| = -kt + C$$

چون در عمل دمای فضا پیما $T(t)$ از دما اقیانوس β بالاتر است، بنابراین $T(t) = \beta + \exp(C - kt)$. از شرط $T(0) = \alpha$ داریم $\exp C = \alpha - \beta$. در نتیجه $T(t) = \beta + (\alpha - \beta) \exp(-kt)$.

۸.۴.۱. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0,$ | 2) $e^{-y}(1+y') = 1,$ |
| 3) $(1+y^2)dx + xydy = 0,$ | 4) $y' = \exp(x+y),$ |
| 5) $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0,$ | 6) $y' = \sin(x-y),$ |
| 7) $2x\sqrt{1-y^2}dx = (1+x^2)dy,$ | 8) $\sqrt{2xy}y' = 1,$ |
| 9) $(1+x^2)dy = ydx,$ | 10) $y' = \frac{(y+1)^2}{x^2+x-2},$ |

هر یک از مسائل زیر را حل کنید:

- | | |
|--|--|
| 11) $2(y^2-1)dx + \sec x \sec y dy = 0,$ | $y(\pi/4) = 0.$ |
| 12) $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{t}(p^2-p),$ | $p(1) = 2.$ |
| 13) $y + xy' = a(xy+1),$ | $y(\frac{1}{a}) = -a.$ |
| 14) $(a^2+y^2)dx + 2x\sqrt{ax-x^2}dy = 0,$ | $y(a) = 0.$ |
| 15) $(1+x+xy^2+y^2)dy = \frac{dx}{1-x},$ | $y(0) = 1.$ |
| 16) $x^2y' \cos y + 1 = 0,$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{16}{3}\pi.$ |
| 17) $x^3y' = 1 + \sin y,$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 5\pi.$ |

۱۸) جواب خاص مسئله $y' = y|\ln y|^\alpha$ که $0 < \alpha$ و $y(0) = 0$ را بیابید. به ازای کدام مقادیر از α جواب منحصر بفرد است؟

۱۹) فرض کنید شخصی با دمای بدن α در هوایی به دمای ثابت β و ضریب انتقال حرارت ثابت k فوت کرده است. اگر دمای کتونی بدن او γ باشد، زمان فوت او را بر حسب دمای الان بدن او مشخص کنید.

بخش ۵.۱ معادلات همگن

پس از معادلات تفکیک پذیر، معادلات دیفرانسیل همگن حداکثر فراوانی را دارند. قبل از معرفی این گونه معادلات، به ذکر یک تعریف نیاز است.

۱.۵.۱. تعریف فرض کنیم $z = f(x, y)$ تابعی دو متغیره و D زیر مجموعه‌ای از دامنه تعریف f است. در صورتی می‌گوییم f بر D همگن از مرتبه k است، که به ازای هر $(x, y) \in D$ و هر $(\lambda x, \lambda y) \in D$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y).$$

تابع f را همگن از درجه k می‌گوییم.

۲.۵.۱. مثال تابع $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 - \frac{x^4}{y}$ بر $D: y \neq 0$ همگن از مرتبه ۳ است. زیرا:

$$f(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda^3 x^3 + \lambda x \lambda^2 y^2 - \frac{\lambda^4 x^4}{\lambda y} = \lambda^3 f(x, y).$$

۳.۵.۱. مثال تابع $f(x, y) = \frac{y-x}{2y+x}$ بر $D = \{(x, y) : 2y+x \neq 0\}$ همگن از درجه صفر است. زیرا

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y - \lambda x}{2\lambda y + \lambda x} = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y).$$

۴.۵.۱. مثال تابع $f(x, y) = x - y^2$ همگن نیست. زیرا اگر فرض شود همگن از مرتبه k است، پس باید:

$$\forall x \forall y \forall \lambda > 0 : f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y).$$

یا $\lambda x - \lambda^2 y^2 = \lambda^k (x - y^2)$. با مشتق گیری از طرفین نسبت به x و y به دو معادله به شرح زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x = \lambda^k x \\ -2\lambda^2 y = -2\lambda^k y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^k = 1 \\ \lambda^2 y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

که خلاف فرض دلخواه بودن λ است.

۵.۵.۱. تعریف معادله دیفرانسیل $\mathcal{E}$ را در صورتی همگن گوئیم که به یکی از دو صورت زیر قابل بیان باشد:

الف) $y' = f(x, y)$ که f تابعی است همگن از درجه صفر.

ب) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ که P و Q توابعی همگن از یک مرتبه‌اند.

در هر دو صورت، با فرض $z = y/x$ می‌توان تابعی h یافت و نوشت:

$$\mathcal{E} : y' = h(z). \quad (۶.۱)$$

۶.۵.۱. روش حل پس از اینکه معادله را به صورت (۶.۱) نوشتیم، از طرفی $z = \frac{y}{x}$ نتیجه می‌گیریم $y' = z + xz'$ یا $z + xz'(z) = h(z)$ که یک معادله تفکیک‌پذیر بر حسب تابع جدید z است:

$$\frac{dz}{h(z) - z} = \frac{dx}{x}, \quad (۷.۱)$$

و کافی است از طرفین انتگرال بگیریم.

توجه شود که (۷.۱) تنها وقتی مجاز است که $h(z) \neq z, x \neq 0$. اگر قرار باشد $x = 0$ یک جواب (۶.۱) باشد، لازم است $h(z) \equiv z$. اما، اگر $h(\alpha) = \alpha$ که $\alpha \in \mathbb{R}$ عددی خاص است، در این صورت $z = \alpha$ یک جواب (۶.۱) است، یعنی $y = \alpha x$. پس خطوط $y = \alpha x$ که $h(\alpha) = \alpha$ جواب خصوصی معادله مفروض هستند. پس، در مجموع

(۱) اگر $h(z) = z$ ، آنگاه جواب عمومی معادله همگن داده شده عبارتست از

$$\mathcal{S} = \{y = Ax : A \in \mathbb{R}\} \cup \{x = 0\}.$$

(۲) اگر $h(z) \neq z$ ، آنگاه:

$$\mathcal{S} = \left\{ y = xz : \int \frac{dz}{h(z) - z} = \int \frac{dx}{x} \right\} \cup \{y = \alpha x : h(\alpha) = \alpha\}.$$

۷.۵.۱. مثال معادله $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ را حل کنید.

حل: با فرض $y = zx$ داریم $x(z + xz') = \sqrt{x^2 - x^2 z^2} + xz$ و بنابراین

$$z + xz' = \pm \sqrt{1 - z^2} + z;$$

که $\pm$ به علامت x مربوط می‌شود. پس به معادله تفکیک‌پذیر $xz' = \pm \sqrt{1 - z^2}$ می‌رسیم. در نتیجه، داریم

$$\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \pm \frac{dx}{x},$$

و پس از انتگرال گیری، داریم $\arcsin z = C_1 \pm \ln|x|$ ، که C_1 عددی ثابت است. چون $z = y/x$ ، پس بایستی $z = \sin(C_1 \pm \ln|x|)$ یا $y = x \sin(C_1 \pm \ln|x|)$ با فرض $C = \pm C_1$ ؛ و با توجه به اینکه $\sin$ تابع فرد است. نتیجه می گیریم $y = |x| \sin(C \pm \ln|x|)$.

از طرفی معادله $h(\alpha) = \alpha$ به معنی $\sqrt{1-\alpha^2} + \alpha = \alpha$ یا $\alpha^2 = 1$ است. بنابراین $\alpha = \pm 1$ و $y = x$ و $y = -x$ جوابهای خاص $\mathcal{S}$ هستند. پس در مجموع جوابهای $\mathcal{S}$ عبارتند از

$$\mathcal{S} = \{y = |x| \sin(C \pm \ln|x|) : C \in \mathbb{R}\} \cup \{y = x, y = -x\}.$$

۸.۵.۱. مثال معادله $(x+y)dx = (2y-3x)dy$ را حل کنید.

حل: با فرض $z = y/x$ ملاحظه می کنیم که $dy = zdx + xdz$ و

$$\begin{aligned}(x+xz)dx &= (2xz-3x)(zdx+xdz), \\ (1+z)dx &= (2z-3)(zdx+xdz),\end{aligned}$$

که معادله ای تفکیک پذیر است؛ در واقع

$$\frac{2z-3}{2z^2-4z-1} dz = -\frac{dx}{x}.$$

پس از انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}(z-1)) + \frac{1}{2} \ln|2z^2-4z-1| = -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln C,$$

که C عددی ثابت است. اکنون با توجه به اینکه $z = \frac{y}{x}$ داریم:

$$\mathcal{S} : y = x + x \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \ln\{C(2y^2-4xy+x^2)\}\right).$$

چون در این مسأله $h(z) = \frac{1+z}{2z-3}$ ، $h(\alpha) = \alpha$ به معنی $\alpha(2\alpha-3) = 1+\alpha$ یا $2(\alpha-1)^2 + 1 = 0$ است که فاقد هر گونه جواب حقیقی است. پس جواب $\mathcal{S}$ دقیقاً همان دسته توابع $\mathcal{S}$ است.

۹.۵.۱. مثال معادله $2xydy = (x^2+3y^2)dx$ را حل کنید.

حل: این معادله را به شکل $2\frac{y}{x}dy = \left(1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)dx$ می توان نوشت. پس با فرض $z = y/x$ داریم:

$$2z(zdx+xdz) = (1+3z^2)dx,$$

که به معادله $(1+z^2)dx = 2zx dz$ می رسیم؛ که معادله ای تفکیک است. بنابراین

$$\frac{2zdz}{1+z^2} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|1+z^2| = \ln|x| + \ln C_1,$$

و با قرار دادن $z = y/x$ داریم:

$$\mathcal{S} : y^2 + x^2 = Ax,$$

که A عددی دلخواه است. بعلاوه چون در این مسأله $h(\alpha) = \frac{1+3\alpha^2}{2\alpha}$ معادله $h(\alpha) = \alpha$ به معنی $\alpha^2 + 1 = 0$ است که دو جواب حقیقی ندارد. پس جواب معادله دیفرانسیل داده شده دقیقاً همان $\mathcal{S}$ معرفی شده در بالا می باشد.

۱۰.۵.۱. مثال معادله $xy' = y(\ln y - \ln x)$ را حل کنید.

حل: با توجه به صورت مسئله $0 < y$ و $0 < x$ بعلاوه $y' = \frac{y}{x} \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ پس $h(z) = z \ln z$ با فرض $z = \frac{y}{x}$ داریم $z + xz' = z \ln z$ یا

$$\frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

با انتگرال گیری از طرفین، داریم $\ln|\ln z - 1| = \ln x + \ln C$ ، که $C > 0$ عددی ثابت است. بنابراین $\ln z - 1 = Cx$ یا $z = \exp(Cx + 1)$. با توجه به اینکه $z = y/x$ داریم $y = x \exp(Cx + 1)$. اما معادله $h(\alpha) = \alpha \ln \alpha = \alpha$ به معنی $\alpha \ln \alpha = \alpha$ است. پس یا $\alpha = 0$ و یا اینکه $\ln \alpha = 1$ که اولی غیرممکن است و دومی به معنی $\alpha = e$ است. بنابراین $y = ex$ یک جواب خاص معادله دیفرانسیل داده شده است و در مجموع، داریم:

$$\mathcal{S} = \{y = x \exp(Cx + 1) : C > 0\} \cup \{y = ex\}.$$

۱۱.۵.۱. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $xy' = y + x \cos^2(y/x)$, | 2) $(x - y)dx + x dy = 0$, |
| 3) $x^2 dy = (y^2 - xy + x^2) dx$, | 4) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$, |
| 5) $2x^2 y' = x^2 + y^2$, | 6) $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$, |
| 7) $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$, | 8) $(x - y)xy' = x^2 + y^2$, |
| 9) $(y + \sqrt{x^2 - xy})dx = x dy$, | 10) $y' - y/x = \cos(1 - y/x)$. |

بخش ۶.۱ معادلات به شکل $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

۱.۶.۱. تعریف فرض کنیم:

$$\mathcal{E} : y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right), \quad (۸.۱)$$

عددی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a\beta - \alpha b.$$

اگر $\Delta = 0$ معادله $\mathcal{E}$ را از نوع یک و در غیر این صورت آن را از نوع دو می نامیم.

۲.۶.۱. روش حل معادلات از نوع یک در اینگونه معادلات عددی مانند u وجود دارد که $\alpha = au$ و $\beta = bu$. از تغییر تابع $z = ax + by + c$ استفاده می کنیم. نتیجه معادله ای تفکیک پذیر بر حسب z و x خواهد بود.

۳.۶.۱. مثال فرض کنیم $\mathcal{E} : (x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$ این معادله را حل کنید.

حل: در این مسئله $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ و لذا $\mathcal{E}$ از نوع یک است. فرض کنیم $z = x + y + 1$ تابع جدید است. در این صورت $dz = dx + dy$ یا $dy = dz - dx$ بنابراین:

$$z dx + (2z - 3)(dz - dx) = 0,$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است:

$$(z-3)dx = (2z-3)dz.$$

با انتگرال گیری از طرفین، داریم:

$$\int \left\{ 2 + \frac{3}{z-3} \right\} dz = \int dx. \quad (9.1)$$

بنابراین $2z + 3 \ln|z-3| = x + C_1$ یا:

$$x + 2y + 3 \ln|x+y-2| = C,$$

که C عددی ثابت است. بعلاوه (۹.۱) در صورتی ممکن است که $z \neq 3$. شرط $z = 3$ معادل $x+y=2$ یا $y=2-x$ است که در معادله $\mathcal{E}$ صدق می‌کند. بنابراین، جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \{x + 2y + 3 \ln|x+y-2| = C : C \in \mathbb{R}, y \neq 2-x\} \cup \{x+y=2\}.$$

۱.۶.۴. مثال $(x-y-1)^2 dx = (x-y+1)^2 dy$ را حل کنید.

حل: در این معادله $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. با در نظر گرفتن تابع جدید $z = x-y-1$ ، داریم:

$$z^2 dx = (z-2)^2 (dx - dz),$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است:

$$\frac{(z-2)^2}{4(1-z)} dz = dx. \quad (10.1)$$

با انتگرال گیری از طرفین (۱۰.۱) داریم:

$$\int \left\{ 3 - z + \frac{1}{1-z} \right\} dz = \int dx.$$

در نتیجه

$$3z - \frac{z^2}{2} - \ln|z-1| = x + \frac{C}{2},$$

و با توجه به اینکه $z = x-y-1$ ، داریم:

$$2xy + 6x = 8y + 6 + x^2 + \ln|x-y-2| + C.$$

از طرفی (۱۰.۱) تنها وقتی ممکن است که $z \neq 1$ یا $x \neq y+2$. اما $y = x-2$ یک جواب خصوصی $\mathcal{E}$ است. بنابراین، جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \{2xy + 6x = 8y + x^2 + \ln|x-y-2| + C : C \in \mathbb{R}\} \cup \{y = x-2\}.$$

۵.۶.۱. روش حل معادلات از نوع دو در این حالت دستگاه معادلات

$$ax + by + c = 0, \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

دارای جواب یکتا است:

$$x_0 = \begin{vmatrix} -c & b \\ -\gamma & \beta \end{vmatrix} \div \Delta = \frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - \alpha b}, \quad y_0 = \begin{vmatrix} a & -c \\ -\alpha & -\gamma \end{vmatrix} \div \Delta = \frac{ac - a\gamma}{a\beta - \alpha b}.$$

اکنون از متغیر جدید $X = x - x_0$ و تابع جدید $Y = y - y_0$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه معادله $\mathcal{E}$ از ۱.۶.۱ به صورت زیر تبدیل می‌گردد که معادله‌ای همگن بر حسب X و Y است:

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{\alpha X + \beta Y}\right).$$

۶.۶.۱. مثال معادله $(x - y + 4)dy = (2 - x - y)dx$ را حل کنید.

حل: در این مسأله $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$ و لذا معادله داده شده از نوع دوم است. با حل دستگاه معادلات:

$$x + y - 2 = 0, \quad x - y + 4 = 0,$$

داریم $y_0 = 3, x_0 = -1$. پس فرض می‌کنیم $Y = y - 3, X = x + 1$ به ترتیب متغیر و تابع جدید هستند. در نتیجه، معادله جدید عبارتست از

$$-(X + Y)dX = (X - Y)dY,$$

که معادله‌ای همگن است. فرض کنیم $Z = Y/X$. در این صورت، داریم:

$$-(X + XZ)dX = (X - XZ)(ZdX + XdZ),$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است:

$$\frac{1 - Z}{Z^2 - 2Z - 1} dZ = \frac{dX}{X}. \quad (11.1)$$

با انتگرال گیری از طرفین، داریم:

$$-\frac{1}{2} \ln|Z^2 - 2Z - 1| = \ln X - \frac{1}{2} \ln C,$$

که C عددی ثابت است. در نتیجه، چون $Z = Y/X$ داریم:

$$Y^2 - 2XY - X^2 = C.$$

حال با توجه به اینکه $X = x + 1$ و $Y = y - 3$ داریم:

$$(y - x + 4)^2 - 2(x + 1)^2 = C.$$

از طرفی (۱۱.۱) وقتی ممکن است که $Z^2 - 2Z - 1 \neq 0, X \neq 0$ یعنی $Y - X \neq \pm \sqrt{2}X, x \neq -1$. به بیان دیگر

$$x \neq -1, y \neq (1 - \sqrt{2})x + (4 + \sqrt{2}), y \neq (\sqrt{2} - 1)x + (4 - \sqrt{2}).$$

از طرفی هر دو خط اول در $\mathcal{E}$ صدق می‌کنند ($x = -1$ جواب $\mathcal{E}$ نیست). بنابراین، جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \{(y - x + 4)^2 - 2(x + 1)^2 = C : C \in \mathbb{R}\}.$$

توجه شود که حالت $C = 0$ به دو خط آخر متناظر است.

فصل ۱. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ۷.۱. معادلاتی که با تغییر تابع $Y = Z^\alpha$ به معادله‌ای همگن تبدیل می‌شوند

۷.۶.۱. مثال $(x+y-1)dx + (x-y-2)dy = 0$ را حل کنید.

حل: در اینجا $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$ و لذا $\mathcal{E}$ از نوع دو است. با حل دستگاه معادلات:

$$2x + y - 1 = 0, \quad x - y - 2 = 0.$$

داریم $x_0 = 1$ و $y_0 = 1$. از متغیر جدید $X = x - 1$ و تابع جدید $Y = y - 1$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه، به معادله همگن:

$$(2X + Y)dX + (X - Y)dY = 0,$$

می‌رسیم. حال فرض می‌کنیم $Z = Y/X$. در نتیجه:

$$(2X + XZ)dX + (X - XZ)(ZdX + XdZ) = 0,$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است:

$$\frac{Z-1}{Z^2-2Z-2}dZ = -\frac{dX}{X}. \quad (12.1)$$

با انتگرال گیری از طرفین، داریم:

$$\frac{1}{2} \ln|Z^2 - 2Z - 2| = -\ln|X| + \frac{1}{2} \ln C,$$

که C عددی مثبت است. با توجه به اینکه $Z = Y/X$ ، داریم:

$$\ln|Y^2 - 2XY - 2X^2| = \ln C.$$

اما $X = x - 1$ و $Y = y - 1$ ، پس:

$$(y-x+2)^2 - 3(x-1)^2 = \pm C. \quad (13.1)$$

اما (۱۲.۱) وقتی ممکن است که $Z^2 - 2Z - 2 \neq 0, X \neq 0$ که معادل با $x \neq 1$ و $y - x + 2 \neq \pm \sqrt{3}(x-1)$ است. دو خط آخر جواب $\mathcal{E}$ هستند و اگر در (۱۳.۱) حالت $C = 0$ را هم بپذیریم، رخ می‌دهند. پس، در مجموع جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \{(y-x+2)^2 - 3(x-1)^2 = C : C \in \mathbb{R}\}.$$

۸.۶.۱. تمرینات هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

- | | |
|---|--|
| 1) $x + y - 2 + (1-x)y' = 0,$ | 4) $3x + 4y - 1 + (4x + 2y + 1)y' = 0,$ |
| 2) $(3y - 7x + 7)dx = (3x - 7y - 3)dy,$ | 5) $(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0,$ |
| 3) $2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' = 0,$ | 6) $(y - 3x)dx + (x + y)dy = 0.$ |

بخش ۷.۱ معادلاتی که با تغییر تابع $y = z^\alpha$ به معادله‌ای همگن تبدیل می‌شوند

در اینگونه موارد با قرار دادن $y = z^\alpha$ به معادله‌ای برحسب x و z می‌رسیم. اکنون α را طوری تعیین می‌کنیم که معادله حاصل همگن باشد.

۷.۱. معادلاتی که با تغییر تابع $Y = Z^\alpha$ به معادله‌ای همگن تبدیل می‌شوند فصل ۱. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱.۷.۱. مثال معادله $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ را حل کنید.

حل: با فرض $y = z^\alpha$ داریم $dy = \alpha z^{\alpha-1} dz$ و لذا

$$(x^2z^{2\alpha} - 1)\alpha z^{\alpha-1} dz + 2xz^{2\alpha} dx = 0. \quad (14.1)$$

بایستی ضریب dz همگن (از مرتبه‌ای مثلاً $3\alpha + 1$) باشد، پس لازم است دو جمله آن همگن از یک مرتبه باشند. چون $\alpha x^2 z^{2\alpha-1}$ از مرتبه $3\alpha + 1$ و $-\alpha z^{\alpha-1}$ از مرتبه $\alpha - 1$ است. پس باید $\alpha = -1$. در این صورت (۱۴.۱) به صورت

$$\alpha(x^2/z^2 - 1)z^{-2} dz + 2xz^{-3} dx = 0,$$

در می‌آید که معادله‌ای همگن است. اکنون فرض می‌کنیم $u = z/x$. در این صورت

$$(1/u^2 - 1)\frac{1}{x^2u^2}(xdu + udx) + \frac{2}{x^2u^3} dx = 0,$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است:

$$x(u^2 - 1)du + (u^3 + u)dx = 0,$$

و در نتیجه

$$\frac{u-1}{u^3+u} du = -\frac{dx}{x}. \quad (15.1)$$

با انتگرال گیری از طرفین داریم

$$\int \left\{ \frac{2u}{u^2+1} - \frac{1}{u} \right\} du = - \int \frac{dx}{x}.$$

در نتیجه، داریم

$$\ln(u^2 + 1) - \ln|u| = -\ln|x| + \ln C_1,$$

یا $x(u^2 + 1) = \pm C_1 u$ عددی مثبت است. اما $u = z/x$ ، پس $z^2 + x^2 = Cx$ ، که C عددی مخالف صفر است. از طرفی $z = 1/y$ ، پس

$$1 + x^2y^2 = Cxy^2.$$

اما (۱۵.۱) در صورتی ممکن است که $u^3 + u \neq 0, x \neq 0$ یعنی $u \neq 0, x \neq 0$ و یا $\frac{1}{xy} \neq 0, x \neq 0$ که لازم است $y \neq 0$. در حالتی که $y = 0$ جواب خصوصی $\mathcal{C}$ است. بنابراین، جواب عمومی $\mathcal{C}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \{1 + x^2y^2 = Cy^2 : C \neq 0\} \cup \{y = 0\}$$

۲.۷.۱. مثال معادله $2xy'(x - y^2) + y^3 = 0$ را حل کنید.

حل: با فرض $y = z^\alpha$ داریم

$$2x(\alpha z^{\alpha-1} dz)(x - z^{2\alpha}) + z^{2\alpha} dx = 0.$$

بایستی جمله $2\alpha x^2 z^{\alpha-1}$ و $-2\alpha x z^{3\alpha-1}$ هم مرتبه باشند. یعنی

$$3\alpha = \alpha + 1.$$

پس $\alpha = \frac{1}{2}$ و لازم است $0 \leq z$. در این صورت

$$2\alpha x^2 z^{-1/2} dz - 2\alpha x z^{1/2} dx + z^{3/2} dx = 0$$

که معادله‌ای همگن است. با فرض $u = z/x$ داریم

$$\frac{1 - u^{1/2}}{u^2 - u^{-3/2} + u} du = -\frac{dx}{x}. \quad (۱۶.۱)$$

چون $v = u^{1/2}$ داریم

$$2 \int \frac{v-1}{v^3 - v^2 + v} dv = \int \frac{dx}{x}.$$

با انتگرال گیری از طرفین، داریم

$$\ln|v^2 - v + 1| + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(2v-1)\right) - 2 \ln|v| = \ln|x| + \ln C,$$

که در اینجا $v = y/\sqrt{x}$. بنابراین، داریم:

$$\ln|y^2 - y\sqrt{x} + x| + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}(2y - \sqrt{x})\right) = \ln|Cx| + 2 \ln y,$$

که در آن $0 < C$. اما (۱۶.۱) در صورتی مجاز است که $x \neq 0$ و $u^2 - u^{3/2} + u \neq 0$. این معادل با $y \neq 0, x \neq 0$ است. از طرفی $y = 0$ یک جواب خصوصی $\mathcal{E}$ است. همچنین جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از خانواده $\{y = 0\}$ به همراه $y = 0$.

۳.۷.۱. تمرینات هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

- 1) $4y^6 + x^3 = 6xy^5y'$,
- 2) $y(1 + \sqrt{x^2y^4 + 1}) dx + 2x dy = 0$,
- 3) $(x + y^3) dx + 3(y^2 - x)y^2 dy = 0$,
- 4) $3(x^2 - y^6) dy = xy dx$,
- 5) $(x^2 - xz^4 + z^8) dx + 8z^7(x^2 + xz^4 + z^8) dz = 0$,
- 6) $(2xy^2 - x) dx + (x^2y + y) dy = 0$.

بخش ۸.۱ معادله خطی مرتبه اول

۱.۸.۱. تعریف معادله دیفرانسیل به شکل

$$\mathcal{E} : y' + p(x)y = q(x), \quad (۱۷.۱)$$

را خطی مرتبه اول می‌نامیم، که p و q توابعی دلخواه از x هستند.

۲.۸.۱. روش حل ابتدا فرض می‌کنیم $\mathcal{E}_h : y' + p(x)y = 0$ شکل همگن معادله $\mathcal{E}$ باشد. روشن است که این معادله تفکیک پذیر است و جواب آن عبارتست از

$$y_h = \exp\left(-\int p(x) dx\right),$$

که C عددی ثابت است. حال فرض کنیم جواب مسأله y به شکل

$$y = C(x) \exp\left(-\int p(x) dx\right),$$

است! در این صورت با قرار دادن y در (۱۷.۱) داریم:

$$\begin{aligned} q(x) &= (C'(x) - p(x)C(x)) \exp\left(-\int p(x)dx\right) + p(x)C(x) \exp\left(-\int p(x)dx\right), \\ C'(x) &= q(x) \exp\left(\int p(x)dx\right), \\ C(x) &= \int q(x) \exp\left(\int p(x)dx\right) dx. \end{aligned}$$

پس در مجموع، داریم:

$$y = \frac{1}{h} \left(\int h q dx + C \right), \quad h = \exp\left(\int p dx\right). \quad (18.1)$$

۳.۸.۱. مثال معادله $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ را حل کنید.

حل: با توجه به (۱۸.۱) داریم:

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int p dx\right) = \exp\left(\int 2x dx\right) = e^{x^2} \\ y &= \frac{1}{e^{x^2}} \left(\int e^{x^2} 2xe^{-x^2} dx + C \right) = e^{-x^2} \left(\int 2x dx + C \right) = e^{-x^2} (x^2 + C). \end{aligned}$$

۴.۸.۱. مثال مسأله زیر را حل کنید:

$$\mathcal{E} : x(x-1)y' + y = x^2(2x-1), \quad y(2) = 4.$$

حل: در این مسأله $q = x \frac{2x-1}{x-1}$ و $p = \frac{1}{x(x-1)}$ در نتیجه:

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int \frac{dx}{x(x-1)}\right) = \exp\left(\int \left\{ \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} \right\} dx\right) \\ &= \exp(-\ln|x| + \ln|x-1|) = \frac{x-1}{x}, \\ y &= \frac{x}{x-1} \left(\int \frac{x-1}{x} x \frac{2x-1}{x-1} dx + C \right) \\ &= \frac{x}{x-1} \left(\int (2x-1) dx + C \right) = \frac{x}{x-1} (x^2 - x + C). \end{aligned}$$

پس در مجموع جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} : y = x^2 + \frac{Cx}{x-1}.$$

اما $y(2) = 4$ ، پس $C = 0$ و لذا جواب مسأله $y = x^2$ است.

۵.۸.۱. مثال معادله $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$ را حل کنید.

حل: این مسأله را به صورت $\frac{dx}{dy} = x \cos y + \sin 2y$ می‌توان نوشت. یعنی، اگر x را تابعی از y بدانیم، یک معادله خطی مرتبه اول داریم. در این حالت:

$$q = \sin 2y, \quad p = -\cos y.$$

در نتیجه، داریم:

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int p(y) dy\right) = \exp(-\cos y dy) = \exp(-\sin y), \\ x &= \frac{1}{h}\left(\int hq(y) dy + C\right) = \exp(\sin y)\left(\int \sin 2y e^{-\sin y} dy + C\right) \\ &\stackrel{(1)}{=} e^n\left(-2 \int u e^{-u} du + C\right) = e^u(2(u+1)e^{-u} + C). \end{aligned}$$

بنابراین، جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$S : x = 2(\sin y + 1) + C e^{\sin y},$$

که در (۱) فرض شده است $u = \sin y$.

۶.۸.۱. مثال جوابی از معادله $y' - y = \cos x - \sin x$ بیابید که در $(0; \infty)$ کراندار باشد.

حل: در این مسأله، ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int -1 dx\right) = e^{-x}, \\ y &= e^{+x}\left(\int e^{-x}(\cos x - \sin x) dx + C\right) \\ &= e^x(e^{-x} \sin x + C) = C e^x + \sin x. \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که اگر $C \neq 0$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow \infty} y$ بینهایت می‌شود و کراندار نیست، پس لازم است که $C = 0$ و لذا $y = \sin x$ جواب خواسته شده است.

۷.۸.۱. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $y' + 2y = e^{-x}$, | 2) $y' + 2xy = 3e^{-x^2}$, |
| 3) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$, | 4) $xy' - 2y = x^3 \cos x$, |
| 5) $y' = 1/(2y \ln y + y - x)$, | 6) $y' x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$, |
| 7) $y' + x e^x y = e^{(1-x)e^x}$, | 8) $y' = 1/(x e^y + 2y e^{e^y})$, |
| 9) $y' - \cot xy = \csc x$, | 10) $y' = 3y \tan x + 2$. |

هر یک از مسائل زیر را حل کنید:

- | | |
|--|---|
| 11) $xy' = 2y - x^2$, | $y(1) = 0$ |
| 12) $\sin \theta \frac{dr}{d\theta} + r \cos \theta = 0$, | $r(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, |
| 13) $xy' + 2y = x^2$, | $y(-1) = 5/4$, |
| 14) $y' \cos x - y \sin x = 2x$, | $y(0) = 0$, |
| 15) $2xy' - y = 1 - 2/\sqrt{x}$, | $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -1$, |
| 16) $x^2 y' + y = 2x$, | $\lim_{x \rightarrow 0} y(x)$ کراندار، |
| 17) $y' \cos x + \sin 2x = y \sin x$, | $\lim_{y \rightarrow 0} x(y) = \frac{\pi}{2}$. |

بخش ۹.۱ معادله برنولی

۱.۹.۱. تعریف معادله مرتبه اول

$$\mathcal{E} : y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad (19.1)$$

که n عددی حقیقی و مخالف ۰ و ۱ است را اصطلاحاً معادله برنولی می‌نامند.

۲.۹.۱. روش حل اگر از تغییر تابع $z = y^{1-n}$ استفاده کنیم حاصل یک معادله مرتبه اول خطی خواهد شد.

۳.۹.۱. مثال معادله $\mathcal{E} : y' - y \cos x = y^2 \cos x$ را حل کنید.

حل: در اینجا $n = 2$ ، پس از تابع جدید $z = y^{1-2} = 1/y$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$-z^{-2}z' - z^{-1} \cos x = z^{-2} \cos x. \quad (20.1)$$

چنانچه طرفین این تساوی را در $-z^2$ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$z' + z \cos x = -\cos x,$$

که یک معادله خطی مرتبه اول است. در نتیجه:

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int \cos x dx\right) = \exp(\sin x), \\ z &= \frac{1}{\exp(\sin x)} \left(\int \exp(\sin x)(-\cos x) dx + C \right) \\ &= \exp(-\sin x)(-\exp(\sin x) + C) = Ce^{-\sin x} - 1. \end{aligned}$$

اما $z = 1/y$ ، پس جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از (در (۲۰.۱) فرض شده است $y \neq 0$):

$$\mathcal{S} = \{y = 1/(Ce^{-\sin x} - 1) : C \in \mathbb{R}\} \cup \{y = 0\}.$$

۴.۹.۱. مثال معادله $\mathcal{E} : y' = xy - xy^3$ را حل کنید.

حل: در اینجا $n = 3$ ، پس از تغییر تابع $z = y^{1-3} = 1/y^2$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $y = z^{-1/2}$ و معادله داده شده، عبارت است از

$$-\frac{1}{2}z^{-3/2}z' = xz^{-1/2} - xz^{-3/2}. \quad (21.1)$$

اگر طرفین این تساوی را در $-2z^{3/2}$ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$z' + 2xz = 2x,$$

که یک معادله خطی مرتبه اول است. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int 2x dx\right) = \exp(x^2), \\ z &= \frac{1}{\exp(x^2)} \left(\int \exp(x^2) 2x dx + C \right) \\ &= e^{-x^2}(e^{x^2} + C) = 1 + Ce^{x^2}. \end{aligned}$$

اما $z = 1/y^2$ ، پس جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \{y^2(1 + Ce^{x^2}) = 1 : C \in \mathbb{R}\} \cup \{y = 0\}.$$

توضیح اینکه در (۲۱.۱) فرض ده بود $y \neq 0$ ، به همین دلیل $y = 0$ اضافه شده است.

مثال ۵.۹.۱. معادله $y' - 2ye^x = 4\sqrt{ye^x}$ را حل کنید.

حل: در این مسأله $n = \frac{1}{2}$ ، پس از تغییر تابع $z = y^{1-1/2} = \sqrt{y}$ استفاده می‌کنیم. نتیجه اینکه

$$2zz' - 2z^2e^x = 4ze^x. \quad (22.1)$$

با تقسیم طرفین بر $2z$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$z' - 2e^xz = 2e^x,$$

که یک معادله خطی مرتبه اول است. بنابراین:

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int -2e^x dx\right) = \exp(-2e^x), \\ z &= \exp(2e^x) \left(\int \exp(2e^x) + C \right) = C \exp(2e^x) - 1 \\ &= \exp(2e^x) (-\exp(2e^x) + C) = C \exp(2e^x) - 1. \end{aligned}$$

از طرفی $z = \sqrt{y}$ ، بنابراین جواب عمومی معادله داده شده عبارتست از

$$\mathcal{S} = \{y = (C \exp(2e^x) - 1)^2 : C \in \mathbb{R}\} \cup \{y = 0\}.$$

جواب $y = 0$ از این رو به وجود آمد که در (۲۲.۱) طرفین را بر $2z$ تقسیم کرده‌ایم، یعنی فرض نموده‌ایم که $z \neq 0$. $z = 0$ به معنی $y = 0$ است که یک جواب خصوصی مسأله است.

تمرینات ۶.۹.۱. هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

- | | |
|--|--|
| 1) $(x^3 + e^y)y' = 3x^2$ | 2), $y' + 2xy = y^2 \exp(x^2),$ |
| 3) $y' + y = y^{2/3},$ | 4) $(x^2 + y^2 + 1) dy + xy dx = 0,$ |
| 5) $2y' \ln x + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{y},$ | 6) $2y' \sin x + y \cos x = y^3 \sin^2 x,$ |
| 7) $y' + xy = xy^{-3},$ | 8) $y' = y + y^2 e^{-x},$ |
| 9) $y' + xy^3 e^{-2x} = y,$ | 10) $x dy = y(xy - 1) dx,$ |
| 11) $xy' + y + x^2 y^2 e^x = 0,$ | 12) $xy' = x^2 y^2 - y.$ |

بخش ۱۰.۱ معادله ریکاتی

تعریف ۱۰.۱۰.۱. معادله مرتبه اول غیر خطی

$$\mathcal{E} : y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x), \quad (23.1)$$

را به افتخار ریاضیدان ایتالیایی کنت ژاکوپو فرانچسکو ریکاتی (۱۶۷۶-۱۷۵۴)، معادله ریکاتی می‌نامند. روشن است که اگر $r \equiv 0$ معادله $\mathcal{E}$ از نوع برنولی می‌شود و اگر $q \equiv 0$ از نوع خطی مرتبه اول خواهد شد. پس فرض می‌شود r و q صفر نیستند.

۲.۱۰.۱. روش حل فرض کنید $y = y_1$ یک جواب خصوصی معادله $\mathcal{E}$ است، در این صورت از تابع جدید $u = u(x)$ استفاده می‌کنیم که $y = y_1 + \frac{1}{u}$ یا $u = \frac{1}{y - y_1}$. پس از جایگذاری به یک معادله خطی مرتبه اول می‌رسیم:

$$u' - (p + 2y_1q)u = q.$$

۳.۱۰.۱. مثال چنانچه بدانیم $y_1 = x$ یک جواب از معادله $x^2y' + y^2 = xy + x^2$ است، جواب عمومی آن را بیابید.
حل: در این مسأله $y' - (\frac{1}{x})y + (\frac{1}{x^2})y^2 = 1$ ، یعنی $p = -1/x$ و $q = 1/x^2$ و $r = 1$. پس فرض می‌کنیم $u = 1/(y - x)$ یا $y = x + 1/u$ در این صورت:

$$(1 - \frac{u'}{u^2}) - (\frac{1}{x})(x + \frac{1}{u}) + (\frac{1}{x^2})(x + \frac{1}{u})^2 = 1,$$

یا پس از ساده کردن $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1}{x^2}$ ، که یک معادله خطی مرتبه اول است. بنابراین

$$h = \exp\left(\int -\frac{1}{x} dx\right) = \exp(-\ln x) = \frac{1}{x},$$

$$u = x\left(-\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} dx + C\right) = x\left(\frac{x^{-2}}{-2} + C\right) = Cx - \frac{1}{2x}.$$

اما $y = x + 1/u$ ، پس جواب مسأله داده شده عبارتست از

$$\mathcal{S}: y = x + \frac{2x}{Cx^2 - 1}.$$

۴.۱۰.۱. مثال فرض کنید $y' - y^2 + 2e^xy = e^{2x} + e^x$ و $y_1 = e^x$ یک جواب خصوصی آن است. $\mathcal{E}$ را حل کنید.

حل: فرض کنیم $y = e^x + 1/u$ ، در این صورت

$$e^x - u'/u^2 - (e^u + 1/u)^2 + 2e^x(e^x + 1/u) = e^{2x} + e^x - u'/u^2 - 1/u^2 = 0.$$

بنابراین $u' = -1$ یا $u = C - u$. اما $y = e^x + 1/u$ ، در نتیجه جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$S: y = e^x + \frac{1}{C - x}.$$

۵.۱۰.۱. مثال نشان دهید که اگر y_2, y_1 دو جواب خصوصی متفاوت از یک معادله ریکاتی باشند و ضریب y^2 برابر $q(x)$ باشد، آنگاه جواب عمومی معادله مفروض عبارتست از

$$\mathcal{S}: \frac{y - y_1}{y - y_2} = C \exp\left(\int q(x)(y_2 - y_1) dx\right).$$

حل: فرض کنیم $\mathcal{E}$ معادله در $1 - 10 - 1$ است، مطابق فرض بایستی $y_1' + py_1 + qy_1^2 = r$ پس با کم کردن این معادله از $\mathcal{E}$ ، داریم:

$$(y - y_1)' + p(y - y_1) + q(y^2 - y_1^2) = 0. \quad (24.1)$$

به صورت مشابه، داریم:

$$(y - y_2)' + p(y - y_2) + q(y^2 - y_2^2) = 0. \quad (25.1)$$

معادله (24.1) را بر $y - y_1$ و معادله (25.1) را بر $y - y_2$ تقسیم کرده و معادلات حاصل را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{(y - y_1)'}{y - y_1} - \frac{(y - y_2)'}{y - y_2} + q(y - y) &= 0, \\ (\ln(y - y_1))' - (\ln(y - y_2))' + 1(y - y) &= 0, \\ \left(\ln \left(\frac{y - y_1}{y - y_2} \right) \right)' &= q(y_2 - y_1). \end{aligned}$$

که نتیجه مورد نظر، با انتگرال گیری از طرفین حاصل می‌شود.

۶.۱۰.۱ مثال در صورتی که بدانیم $1/x \pm m/x^2$ جواب خصوصی معادله $y' + y^2 = \frac{m^2}{x^4}$ هستند، جواب عمومی آن را بیابید.

حل: با توجه به مثال ۳ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{y - 1/x - m/x^2}{y - 1/x + m/x^2} &= C \exp \left(\int \frac{2m}{x^2} dx \right), \\ \frac{yx^2 - x - m}{yx^2 - x + m} &= C \exp \left(\frac{-2m}{x} \right), \end{aligned}$$

۷.۱۰.۱ تمرینات در صورتی که y_1 یک جواب خصوصی معادله داده شده باشد، جواب عمومی آن را بیابید.

- 1) $y' e^{-x} + y^2 - 2y e^x = 1 - e^{2x}, \quad y_1 = e^x,$
- 2) $y' + y^2 - 2y \sin x + \sin^2 x = \cos x, \quad y_1 = \sin x,$
- 3) $xy' - y^2 + (2x + 1)y = x^2 + 2x, \quad y_1 = x,$
- 4) $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1, \quad y_1 = -1/x,$
- 5) $y' = 1 + y/x - y^2/x^2, \quad y_1 = x,$
- 6) $y' = x^3(y - x)^2 + y/x, \quad y_1 = x,$
- 7) $y' = -2/x + (1/x - 2)y - y^2, \quad y_1 = 2, \quad x > 0,$
- 8) $y' = x^3 + 2y/x - y^2/x, \quad y_1 = -x^2,$
- 9) $y' = xy^2 + (1 - 2x)y + x - 1, \quad y_1 = 1.$

بخش ۱۱.۱ معادله دیفرانسیل کامل

۱.۱۱.۱ تعریف منظور از یک عبارت دیفرانسیلی، عبارتی به صورت

$$\eta = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

است که P و Q توابعی دو متغیره هستند. در صورتی η را کامل گوئیم که تابعی دو متغیره $z = f(x, y)$ چنان یافت گردد که $df = \eta$ یا بطور معادل، باید:

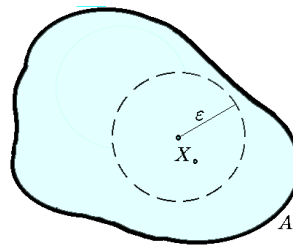
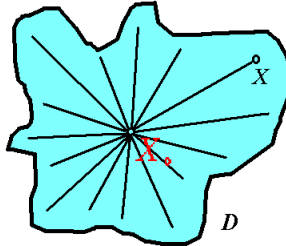
$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y).$$

معادله دیفرانسیل $P dx + Q dy = 0$ را در صورتی کامل گوئیم که عبارت دیفرانسیلی سمت چپ آن کامل باشد.

۲.۱۱.۱. تعریف زیر مجموعه D از $\mathbb{R}^2$ را در صورتی باز گوئیم که به ازای هر $X_0 \in D$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $X_0 \in D$ عددی $0 < \varepsilon$ چنان یافت گردد که

$$\forall X : \|X - X_0\| < \varepsilon \implies X \in D.$$

به شکل توجه شود. این مجموعه را در صورتی ستاره شکل گوئیم که نقطه‌ای $X_0 \in D$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $X \in D$ ای پاره خط $\overline{XX_0}$ در D قرار داشته باشد. به شکل توجه شود.



۳.۱۱.۱. تعریف عبارت دیفرانسیلی $\eta = Pdx + Qdy$ را در صورتی دقیق گوئیم که $P_y = Q_x$.

روشن است که هر عبارت کامل دقیق است، زیرا اگر f ای باشد که $f_x = P$ و $f_y = Q$ ، آنگاه

$$P_y = (f_x)_y = f_{xy} = f_{yx} = (f_y)_x = Q_x.$$

اما عکس این مطلب در حالت کلی ممکن است درست نباشد.

۴.۱۱.۱. قضیه (پوانکاره) اگر مجموعه D باز و ستاره شکل باشد و توابع P و Q بر D مشتق پذیر باشند، در این صورت اگر عبارت $\eta = Pdx + Qdy$ دقیق باشد، آنگاه کامل است. یعنی f ای بر D هست که $f_x = P$ و $f_y = Q$.

۵.۱۱.۱. نتیجه فرض کنید D مجموعه‌ای باز و ستاره شکل است و توابع P و Q بر D مشتق پذیرند. اگر $P_y = Q_x$ ، آنگاه معادله دیفرانسیل $Pdx + Qdy = 0$ کامل است. بنابراین، تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ بر D وجود دارد به نحوی که $f_x = P$ و $f_y = Q$. در این صورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل مورد نظر عبارتست از $\mathcal{S} : f(x, y) = C$ که C عددی دلخواه است.

۶.۱۱.۱. مثال معادله

$$\mathcal{C} : (x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$$

را حل کنید.

حل: در این مسأله $P = x^3 + xy^2$ و $Q = x^2y + y^3$ و $D = \mathbb{R}^2$. چون $P_y = 2xy = Q_x$ ، این معادله کامل است. پس $z = f(x, y)$ ای هست که

$$\begin{cases} f_x = x^3 + xy^2, \\ f_y = x^2y + y^3, \end{cases} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} f = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + A(y), \\ f = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + B(x). \end{cases} \quad (26.1)$$

توضیح اینکه در (۱) از طرفین معادله اول نسبت به x و از طرفین معادله دوم نسبت به y انتگرال گرفته‌ایم و A و B توابعی دلخواهند. با مقایسه (۲۶.۱) نتیجه می‌گیریم که $(y) = \frac{1}{2}y^4 + C_1$ و $B(x) = \frac{1}{4}x^4 + C_2$ که C_1 و C_2 اعداد ثابت هستند. پس صورت کلی f عبارت از $f = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + C_3$ است که C_3 عددی ثابت است. پس جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده عبارت است از $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = C_4$. با فرض $C_4 = C$ ، که $C \geq 0$ ، داریم

$$\mathcal{S} : x^2 + y^2 = C^2,$$

که C عددی دلخواه و نامنفی است. یعنی، نمودار جوابهای این معادله عبارتند از مبدا و همه دوائر به مرکز در مبدا.

۷.۱۱.۱. مثال معادله

$$\mathcal{E} : \left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y} \right) dx - \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy = 0$$

را حل کنید.

حل: در این مسأله

$$P = 2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}, \quad Q = \frac{x^2 + y^2}{xy^2}, \quad D : x \neq 0 \neq y.$$

ملاحظه می‌شود که $-1/y^2 + 1/x^2 = P_y = Q_x$ اما مجموعه D ستاره شکل نیست. آن را به چهار قسمت باز و ستاره شکل می‌توان تقسیم نمود:

$$D = D_{++} \cup D_{+-} \cup D_{-+} \cup D_{--},$$

$$\begin{aligned} D_{++} &: 0 < x, 0 < y, \\ D_{+-} &: 0 < x, 0 > y, \\ D_{-+} &: 0 > x, 0 < y, \\ D_{--} &: 0 > x, 0 > y, \end{aligned}$$

پس بنا به ۵.۱۱.۱ معادله بر هر یک از مجموعه‌ها دارای جواب است. اگر $f_x = P$ و $f_y = Q$ ، آنگاه:

$$\begin{cases} f_x = 2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y} \\ f_y = -\frac{x^2 + y^2}{xy^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + A(y) \\ f = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + B(x) \end{cases}$$

و با مقایسه آنها داریم $f = x^2 + x/y - y/x$. بنابراین، جواب عمومی معادله داده شده عبارتست از توابع چهار ضابطه‌ای ضمنی به شرح زیر:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = C_1, & 0 < x, 0 < y \text{ اگر} \\ x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = C_2, & 0 < x, 0 > y \text{ اگر} \\ x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = C_3, & 0 > x, 0 < y \text{ اگر} \\ x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = C_4, & 0 > x, 0 > y \text{ اگر} \end{cases}$$

۸.۱۱.۱. مثال معادله

$$\mathcal{E} : \frac{y + \sin x \cos^2 xy}{\cos^2 xy} dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y \right) dy = 0,$$

را حل کنید.

حل: دامنه معادله مذکور عبارتست از

$$D : \cos xy \neq 0 : xy \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

که اجتماعی از بینهایت مجموعه باز از هم جدا می‌باشد که هیچ کدام بجز داخلی ترین آنها ستاره شکل نیست. با این حال معادله کامل است:

$$P_y = Q_x = \frac{1}{\cos^2 xy} + y(1 + \tan^2(xy)) = (1 + 2 \tan(xy)) \times (1 + \tan^2(xy)).$$

بعلاوه، بر هر زیر مجموعه ستاره شکل از D ، f ای هست که

$$\begin{cases} f_x = \frac{y}{\cos^2 xy} + \sin x, \\ f_y = \frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y, \end{cases} \implies \begin{cases} f = \tan(xy) - \cos x + A(y), \\ f = \tan(xy) - \cos y + B(y). \end{cases}$$

و پس از مقایسه داریم:

$$\mathcal{S} : \tan(xy) = \cos x + \cos y + C.$$

۹.۱۱.۱. تعریف فرض کنید D زیر مجموعه‌ای از صفحه است. در صورتی می‌گوییم D همبند است که به ازای هر منحنی بسته C در D ، کل داخل C در D قرار داشته باشد. به شکل زیر توجه شود. روشن است که هر مجموعه ستاره شکل همبند ساده است ولی عکس آن غلط است.

۱۰.۱۱.۱. قضیه (تعمیم قضیه پوانکاره) اگر D همبند ساده و باز باشد و توابع P و G بر D مشتقپذیر باشند و $P_y = Q_x$ آنگاه معادله $Pdx + Qdy = 0$ بر D کامل است.

۱۱.۱۱.۱. تمرینات هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

- 1) $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0,$
- 2) $(3x^2 + 6xy^2)dx + 6x^2y + 4y^3)dy = 0,$
- 3) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0,$
- 4) $\left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2y}\right)dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2}dy,$
- 5) $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0,$
- 6) $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0,$
- 7) $y(x^2 + y^2 + a^2)dy + x(x^2 + y^2 - a^2)dx = 0,$
- 8) $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0,$
- 9) $\left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0,$
- 10) $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0.$

بخش ۱۲.۱ فاکتورانتگرال

ممکن است یک معادله کامل نباشد، اما با ضرب کردن تابعی در آن، به یک معادله کامل تبدیل گردد. این تابع را اصطلاحاً فاکتورانتگرال می‌نامند.

۱.۱۲.۱. تعریف تابع $\mu = \mu(x, y)$ را در صورتی یک فاکتورانتگرال معادله

$$\mathcal{E} : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

گوییم که معادله حاصلضربی:

$$\mathcal{E}_e : \mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0, \quad (27.1)$$

کامل باشد.

چنانچه معادله غیر کاملی در اختیار باشد، و بتوانیم فاکتور انتگرالی برای آن بیابیم، آنگاه در اغلب موارد جوابهای معادله کامل حاصله با جوابهای معادله اولیه یکی هستند. در واقع

۲.۱۲.۱. قضیه فرض کنید $\mu(x, y)$ فاکتور انتگرالی برای معادله $\mathcal{E}_i$ است که بر دامنه I مخالف صفر است و $\mathcal{E}_e$ معادله کامل شده باشد. در این صورت مجموعه جوابهای $\mathcal{E}_i$ و $\mathcal{E}_e$ بر I با هم برابرند.

۳.۱۲.۱. مثال معادله دیفرانسیل $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$: $\mathcal{E}$ کامل نیست. توابع $1/(x-y)^2$ ، $1/(x+y)^2$ ، $1/(x^2+y^2)$ و بسیاری توابع دیگر، فاکتور انتگرال آن هستند! جواب عمومی معادله حاصل، عبارت است از

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = C.$$

در نتیجه، فاکتور انتگرال μ در صورت وجود منحصر بفرد نیست.

۴.۱۲.۱. روش حل شرط لازم برای کامل بودن $\mathcal{E}_e$ عبارتست از

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q),$$

و یا

$$\mathcal{E}_i : P \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial y} - Q \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x} = Q_x - P_y,$$

(۲۸.۱)

که البته $\mathcal{E}_i$ یک معادله با مشتقات جزئی است و حل آن اغلب دشوارتر از خود $\mathcal{E}$ است! اغلب با حدس زدن تیپ کلی μ ، حداقل یک μ (که کافی است) یافت می شود.

۵.۱۲.۱. نتیجه (μ تابعی از x) اگر μ تابعی از x باشد. در این صورت بایستی $(P_y - Q_x)/Q$ تابعی فقط از x باشد و بعلاوه

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx\right).$$

(۲۹.۱)

۶.۱۲.۱. مثال معادله $(x+y^2)dx = 2xydy$: $\mathcal{E}$ را حل کنید.

حل: فرض کنید $\mathcal{E}$ یک فاکتور انتگرال به شکل $\mu(x)$ دارد. پس بنا به ۵.۱۲.۱ باید:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \exp\left(\int \frac{(x+y^2)_y - (-2xy)_x}{-2xy} dx\right) \\ &= \exp\left(\int \frac{2y+2y}{2xy} dx\right) = \exp\left(\int \frac{2dx}{x}\right) = \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

پس صورت کامل شده $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{E}_e : \frac{x+y^2}{x^2} dx - \frac{2y}{x} dy = 0.$$

توجه شود که فرض کرده ایم $x \neq 0$ ، در حالی که $x = 0$ یک جواب مسئله $\mathcal{E}$ است. معادله کامل $\mathcal{E}_e$ را حل می کنیم:

$$\begin{cases} f_x = \frac{x+y^2}{x^2}, \\ f_y = -\frac{2y}{x}, \end{cases} \implies \begin{cases} f = \ln|x| - \frac{y^2}{x} + A(y), \\ f = -\frac{y^2}{x} + B(y), \end{cases}$$

و با مقایسه داریم $f = \ln|x| - \frac{y^2}{x}$. پس جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \{x \ln|x| = y^2 + xC \mid C \in \mathbb{R}, x \neq 0\} \cup \{x = 0\}.$$

۷.۱۲.۱. مثال معادله $\mathcal{E} : (x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2 dy = 0$ را حل کنید.

حل: با فرض اینکه فاکتور انتگرال $\mathcal{E}$ به شکل تابعی از x است، داریم:

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{(x^4 \ln x - 2xy^3)_y - (3x^2y^2)_x}{3x^2y^2} dx\right) = \exp\left(-4 \int \frac{dx}{x}\right) = \frac{1}{x^4}.$$

پس شکل کامل شده $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{E}_e : \left(\ln x - 2\frac{y^3}{x^3}\right) dx + 3\frac{y^2}{x^2} dy = 0.$$

البته، فرض کرده‌ایم $x \neq 0$. اما $x = 0$ در دامنه $\mathcal{E}$ نیست و مشکلی پیش نمی‌آورد. اکنون $\mathcal{E}_e$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f = \ln x - 2\frac{y^3}{x^3}, \\ f = 3\frac{y^2}{x^2}, \end{cases} \implies \begin{cases} f = x \ln x - x + \frac{y^3}{x^2} + A(y), \\ f = \frac{y^3}{x^2} + B(x). \end{cases}$$

و با مقایسه آنها، داریم $f = x \ln x - x + y^3/x^2$. پس جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} : x \ln x + \frac{y^3}{x^2} = x + C, \quad x > 0.$$

۸.۱۲.۱. نتیجه (μ تابعی از y) اگر μ تابعی از y باشد، در این صورت بایستی $(Q_x - P_y)/P$ تابعی از فقط y باشد و بعلاوه:

$$\mu(y) = \exp\left(\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy\right). \quad (۳۰.۱)$$

۹.۱۲.۱. مثال معادله $\mathcal{E} : 2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) dy = 0$ را حل کنید.

حل: چنانچه $\mathcal{E}$ یک فاکتور انتگرال به شکل $\mu(u)$ بپذیرد، داریم:

$$\begin{aligned} \mu(y) &= \exp\left(\int \frac{(x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1})_x - (-2xy \ln y)_y}{2xy \ln y} dy\right) \\ &= \exp\left(\int \frac{-2x \ln y}{2xy \ln y} dy\right) = \exp\left(\int \frac{-dy}{y}\right) = \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

پس شکل کامل شده $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{E}_e : 2x \ln y dx + \left(\frac{x^2}{y} + y \sqrt{y^2 + 1}\right) dy = 0.$$

این معادله کامل را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f_x = 2x \ln y, \\ f_y = \frac{x^2}{y} + y \sqrt{y^2 + 1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = x^2 \ln y + A(y), \\ f = x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{3/2} + B(x). \end{cases}$$

با مقایسه آنها، داریم:

$$f = x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{3/2} + \text{ثابت}.$$

پس جواب عمومی معادله $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} : 3x^2 \ln y + (y^2 + 1)^{3/2} = C, \quad y > 0.$$

۱۰.۱۲.۱. مثال معادله $\mathcal{E} : (1+x)e^x dx = (-ye^y + xe^x) dy$ را حل کنید.

حل: اگر $\mathcal{E}$ یک فاکتور انتگرال به شکل $\mu(y)$ داشته باشد، بایستی:

$$\begin{aligned} \mu(y) &= \exp\left(\int \frac{(ye^y - xe^x)_x - ((1+x)e^x)_y}{(1+x)e^x} dy\right) \\ &= \exp\left(\int \frac{-(1+x)e^x}{(1+x)e^x} dy\right) = \exp\left(\int -dy\right) = e^{-y}. \end{aligned}$$

پس شکل کامل شده $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{E} : (1+x)e^{x-y} dx + (y - xe^{x-y}) dy = 0.$$

این معادله کامل را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f_x = (1+x)e^{x-y}, \\ f_y = y - xe^{x-y}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = xe^{x-y} + A(y), \\ f = \frac{y^2}{2} + xe^{x-y} + B(x). \end{cases}$$

با مقایسه آنها، نتیجه می‌گیریم:

$$f = \frac{y^2}{2} + xe^{x-y} + \text{ثابت}.$$

پس جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} : y^2 + 2xe^{x-y} = C.$$

۱۱.۱۲.۱. نتیجه (μ تابعی از $u = u(x, y)$) اگر μ تابعی از $u = u(x, y)$ باشد، در این صورت معادله $\mathcal{E}$ به شکل

$$P \frac{\partial u}{\partial y} \frac{d\mu}{du} - Q \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\mu}{du} = Q_x - P_y,$$

است و در نتیجه

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P.u_y - Q.u_x} du.$$

این معادله در صورتی حل پذیر است که ضریب du در بالا، تابعی فقط از u باشد:

$$\mu = \exp\left(\int \frac{Q_x - P_y}{P.u_y - Q.u_x} du\right). \quad (۳۱.۱)$$

۱۲.۱۲.۱. مثال در صورتی که بدانیم معادله

$$\mathcal{E} : (y^3 + xy^2 + y)dx + (x^3 + x^2y + x)dy = 0,$$

فاکتور انتگرالی به شکل $\mu(xy)$ دارد، آن را حل کنید.

حل: در اینجا $u = xy$ ، پس بنا به ۱۱.۱۲.۱ داریم:

$$\begin{aligned}\mu &= \exp\left(\int \frac{(3x^2 + 2xy + 1) - (3y^2 + 2xy + 1)}{(y^3 + xy^2 + y)x - (x^3 + x^2y + x)y} du\right) \\ &= \exp\left(\int \frac{3x^2 - 3y^2}{y^3x - x^3y} du\right) = \exp\left(\int \frac{-3du}{u}\right) = \frac{1}{u^3} = \frac{1}{x^3y^3}.\end{aligned}$$

پس شکل کامل شده $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{E}_e : \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x^3y^2}\right)dx + \left(\frac{1}{y^3} + \frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y^3}\right)dy = 0,$$

که جواب آن چنین است:

$$\mathcal{S} = \{x^2 + y^2 + xy = 1 + Cx^2y^2 : C \in \mathbb{R}\} \cup \{x = 0\} \cup \{y = 0\}.$$

۱۳.۱۲.۱. مثال در صورتی که بدانیم معادله $\mathcal{E} : ydx = (y^2 + x^2 + x)dy$ فاکتور انتگرالی به شکل $\mu(x^2 + y^2)$ دارد، آن را حل کنید.

حل: در اینجا $u = x^2 + y^2$ ، پس بنا به ۱۱.۱۲.۱ داریم:

$$\begin{aligned}\mu &= \exp\left(\int \frac{(-2x - 1) - (1)}{(y)(2y) + (y^2 + x^2 + x)(2x)} du\right) \\ &= \exp\left(\int \frac{-(x + 1)}{x^3 + x^2 + xy^2 + y^2} du\right) = \exp\left(-\int \frac{du}{u}\right) = \frac{1}{u}.\end{aligned}$$

پس شکل کامل شده $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{E}_e : \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x^2 + y^2 + x}{x^2 + y^2} dy = 0,$$

که جواب عمومی آن چنین است:

$$\mathcal{S} = \left\{y + \arctan \frac{y}{x} = C : C \in \mathbb{R}\right\} \cup \{x = 0\}.$$

۱۴.۱۲.۱. مثال در صورتی که بدانیم $\mathcal{E} : y(x^3 + 2y^4)dx = x(3x^3 + y^4)dy$ دارای فاکتور انتگرال به شکل $\mu(x^\alpha y^\beta)$ است، آن را حل کنید.

حل: در اینجا $u = x^\alpha y^\beta$ که α و β را نمی‌دانیم. مطابق ۱۱.۱۲.۱ می‌بایستی کسر

$$-\frac{11y^4 + 13x^3}{x^\alpha y^\beta ((\beta + 3\alpha)x^3 + (\alpha + 2\beta)y^4)},$$

تابعی فقط از u باشد. این در صورتی ممکن است نسبت ضریب y^4 به ضریب x^3 در صورت با همین نسبت در مخرج برابر باشد. یعنی:

$$\begin{cases} \beta + 3\alpha = 13a, \\ \alpha + 2\beta = 11a, \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 3a, \\ \beta = 4a, \end{cases}$$

که a عددی مخالف صفر است. در این صورت

$$\mu(u) = \exp\left(\frac{-1}{a} \int \frac{du}{u}\right) = u^{-a} = x^{-3a^2} y^{-4a^2}.$$

مثلاً به ازای $a = 1$ به $\mu = 1/(x^3 y^4)$ می‌رسیم. جواب $\mathcal{E}$ با توجه به اینکه صورت کامل شده آن:

$$\mathcal{E}_e : y\left(\frac{1}{y^4} + \frac{2}{x^3}\right) dx = x\left(\frac{3}{y^4} + \frac{1}{x^3}\right) dy,$$

است، عبارتست از

$$\mathcal{S} = \{x^3 = y^4 + Cx^2y^3 : C \in \mathbb{R}\} \cup \{x = 0\} \cup \{y = 0\}.$$

۱۵.۱۲.۱. تمرینات در هر مورد، با علم به اینکه معادله داده شده فاکتور انتگرالی به شکل $\mu = \mu(u)$ است، آن را حل کنید:

- | | |
|--|------------------|
| 1) $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0,$ | $u = x,$ |
| 2) $(x^2 + y)dx = xdy,$ | $u = x,$ |
| 3) $(x + y^2)dx = 2xydy,$ | $u = x,$ |
| 4) $(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0,$ | $u = x,$ |
| 5) $(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0,$ | $u = x,$ |
| 6) $\cos x dx + (y + \sin y + \sin x)dy = 0,$ | $u = y,$ |
| 7) $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0,$ | $u = y,$ |
| 8) $xydx + (1 + x^2)dy = 0,$ | $u = y,$ |
| 9) $y(2x + y^3)dx = x(2x - y^3)dy,$ | $u = y,$ |
| 10) $e^x(x + 1)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0,$ | $u = y,$ |
| 11) $(y^3 + xy^2 + y)dx + (x^3 + x^2y + x)dy = 0,$ | $u = xy,$ |
| 12) $3ydx - xdy = 0,$ | $u = x/y,$ |
| 13) $y(y + 2x + 1)dx = x(2y + x - 1)dy = 0,$ | $u = xy,$ |
| 14) $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0,$ | $u = x + y^2,$ |
| 15) $(x^2 + y^2 + 1)dx = 2xydy,$ | $u = y^2 - x^2,$ |
| 16) $x dx + y dy + x(x dy - y dx) = 0,$ | $u = x + y^2,$ |
| 17) $(y^2 + y - x^2)dx + (x^2 - y^2 - x)dy = 0,$ | $u = y^2 - x^2,$ |
| 18) $(x^4 y^2 - y)dx + (x^2 y^4 - x)dy = 0,$ | $u = xy.$ |

بخش ۱۳.۱ معادلاتی که بر حسب y' حل نشده‌اند.

۱۰.۱۳.۱. تعریف این گونه معادلات به شکل یک چند جمله‌ای مرتبه n ام بر حسب y' با ضرایب توابعی از x و y هستند:

$$\mathcal{E} : (y')^n + P_1(x, y)(y')^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x, y)(y') + P_n(x, y) = 0. \quad (32.1)$$

۲.۱۳.۱. روش حل چنانچه معادله‌ای به شکل $\mathcal{E}$ در **۱.۱۳.۱** داده شده باشد، آن را به عنوان معادله‌ای بر حسب y' حل می‌کنیم. نتیجه یک یا چند معادله معمولی خواهد بود:

$$\mathcal{E}_1 : y' = F_1(x, y), \quad \dots, \quad \mathcal{E}_k : y' = F_k(x, y).$$

اکنون کافی است هر یک از معادلات حاصل را حل و سپس جوابهای آنها را با هم اجتماع کرد.

۳.۱۳.۱. مثال معادله $\mathcal{E} : yy'^2 + (x-y)y' - x = 0$ را حل کنید.

حل: این معادله بر حسب y' یک چند جمله‌ای مرتبه دوم است. در نتیجه:

$$y' = \frac{-(x-y) \pm \sqrt{(x-y)^2 + 4xy}}{2y} = \frac{y-x \pm (x+y)}{2y},$$

که دو معادله حاصل می‌گردد:

$$\mathcal{E}_1 : y' = 1, \quad \mathcal{E}_2 : y' = -\frac{x}{y}.$$

هر یک از آنها را حل می‌کنیم:

$$\mathcal{S}_1 : y = C_1 + x, \quad \mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 = C_2.$$

پس جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \{y = x + C : C \in \mathbb{R}\} \cup \{x^2 + y^2 = C : C > 0\} \cup \{(0, 0)\},$$

که $(0, 0)$ نظیر فرض $y = 0$ است.

۴.۱۳.۱. مثال معادله $\mathcal{E} : yy'^3 - x^2y'^2 - xy^2y' + x^3y = 0$ را حل کنید.

حل: این معادله درجه ۳ بر حسب y' را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$(yy' - x^2)(y'^2 - xy) = 0,$$

که به سه معادله به شرح زیر تبدیل می‌شود:

$$\mathcal{E}_1 : yy' = x^2, \quad \mathcal{E}_2 : y' = \sqrt{xy}, \quad \mathcal{E}_3 : y' = -\sqrt{xy},$$

که هر سه تفکیک پذیرند. آنها را حل می‌کنیم:

$$\mathcal{S}_1 = \{3y^2 = 2x^3 + C : C \in \mathbb{R}\} \cup \{y = 0\},$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ y = \left(\frac{1}{3}x^{3/2} + C \right)^{1/2} : x > 0, y > 0, C \in \mathbb{R} \right\} \\ \cup \left\{ y = -\left(\frac{1}{3}(-x)^{3/2} + C \right)^{1/2} : x < 0, y < 0, C \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ y = \left(-\frac{1}{3}x^{3/2} + C \right)^{1/2} : x > 0, y > 0, C \in \mathbb{R} \right\} \\ \cup \left\{ y = -\left(-\frac{1}{3}(-x)^{3/2} + C \right)^{1/2} : x < 0, y < 0, C \in \mathbb{R} \right\};$$

و جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از اجتماع این سه مجموعه: $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$. توجه شود که $\mathcal{S}_2$ و $\mathcal{S}_3$ تنها در ربع اول و سوم وجود دارند.

۵.۱۳.۱. مثال معادله $y'^3 - xyy' + x^2y' = xy'$ را حل کنید.

حل: فرض کنیم $y' = p$. با تجزیه معادله $\mathcal{E}$ ملاحظه می‌گردد که

$$(p - xy)(p^2y - x) = 0 \implies \mathcal{E}_1 : p = xy \text{ و } \mathcal{E}_2 : x = p^2y$$

معادله $\mathcal{E}_1$ به معنی $y' = xy$ که معادله‌ای تفکیک پذیر است؛ جواب عمومی این معادله عبارتست از

$$\mathcal{S}_1 : y = Ae^x, \quad A \in \mathbb{R}.$$

اما از دیفرانسیل گیری از طرفین معادله $\mathcal{E}_2$ نتیجه می‌گیریم:

$$dx = 2pydy + p^2dy.$$

اما مطابق فرض $\frac{dy}{p} = dx$ ، در نتیجه:

$$(1 - p^3)dy = 2p^2ydp,$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است. جواب این معادله نیز عبارتست از

$$\mathcal{S}_2 = \{(x, y) : y = C(1 - p^3)^{-2/3}, x = p^2y, C \neq 0\} \cup \{x = y\},$$

که خط $x = y$ به $p = 1$ نظیر است. بنابراین، جواب عمومی معادله داده شده $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \\ &= \{y = Ae^x : A \in \mathbb{R}\} \cup \{x = y\} \cup \{(x, y) : y = C(1 - p^3)^{-2/3}, x = p^2y, C \neq 0\}. \end{aligned}$$

۶.۱۳.۱. تمرینات هریک از معادلات زیر را حل کنید.

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $4y'^2 = 9x$, | 2) $y'^2 = 2yy' + y^2(e^{2x} - 1)$, |
| 3) $y'^2 = 2xy' + 8x^2$, | 4) $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$, |
| 5) $y'^2 + x^2 + xy = (2x + y)y'$, | 6) $y'^2 + (x + 2)e^y = 0$, |
| 7) $y'^3 + x^2y' = yy'^2 + x^2y$, | 8) $y'^2 + e^x = yy'$, |
| 9) $y' - 4xy' + 2y + 2x^2 = 0$, | 10) $y'^4 = y^4x^4$. |

بخش ۱۴.۱ معادلات به شکل $f(x, y') = 0$ یا $f(y, y') = 0$

برای حل معادلات به شکل $f(x, y') = 0$ یا $f(y, y') = 0$ از متغیر جدید $y' = p$ استفاده کرده و x و y را به عنوان توابعی از p بیان می‌کنیم. مثلاً اگر $\mathcal{E} : f(y, y') = 0$ باشد، با فرض $y' = p$ داریم $f(y, p) = 0$. این معادله را بر حسب y حل کرده و بدست می‌آوریم $y = \phi(p)$. اکنون از طرفین دیفرانسیل گرفته و نتیجه می‌گیریم $dy = \phi'(p)dp$. اما مطابق فرض $dy = p dx$ ، بنابراین

$$p dx = \phi'(p) dp,$$

معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر بر حسب x و p است و با حل آن x را بر حسب p تعیین می‌کنیم: $x = \psi(p)$. به این ترتیب جواب $\mathcal{E}$ به صورت پارامتری بدست آمده است:

$$\mathcal{S} : x = \psi(p), \quad y = \phi(p). \quad (۳۳.۱)$$

۱.۱۴.۱. مثال معادله $2y'^2 = x^2 + 2xy' + 2y$ را حل کنید.

حل: ابتدا این معادله را بر حسب y حل می‌کنیم:

$$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$$

با فرض $y' = p$ نتیجه می‌گیریم که

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}. \quad (۳۴.۱)$$

با دیفرانسیل‌گیری از رابطه (۳۴.۱) نتیجه می‌شود:

$$dy = (2p - x)dp + (x - p)dx.$$

اما $dy = p dx$ (زیرا $p = y' = dy/dx$) بنابراین:

$$p dx = (2p - x)dp + (x - p)dx \quad (2p - x)(dp - dx) = 0.$$

پس یا $x = 2p$ یا $x = p + C$ و در نتیجه $x = p + C$. بنابراین، در مجموع جواب عمومی معادله داده شده عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{ (x, y) : x = 2p, y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2} \right\} \cup \left\{ (x, y) : x = p + C, y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2} \right\} \\ &= \left\{ y = x^2/4 \right\} \cup \left\{ y = Cx + C^2 + \frac{x^2}{2} : C \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

۲.۱۴.۱. مثال در صورتی که a و b اعداد ثابت باشند، معادله دیفرانسیل $y = ay'^2 + by'^3$ را حل کنید.

حل: فرض کنیم $y' = p$ ، در نتیجه:

$$y = ap^2 + bp^3 \quad (۳۵.۱)$$

با دیفرانسیل‌گیری از طرفین (۳۵.۱) داریم:

$$dy = 2ap dp + 3bp^2 dp.$$

از طرفی $dy = p dx$ ، در نتیجه:

$$p dx = 2ap dp + 3bp^2 dp.$$

پس یا $p = 0$ و لذا از معادله داریم $y = 0$ و یا اینکه $p \neq 0$ و بنابراین:

$$dx = (2a + 3bp)dp,$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است. آن را برای یافتن x حل می‌کنیم:

$$x = 2ap + \frac{3}{2}bp^2 + C.$$

بنابراین: در مجموع جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y) : x = 2ap + \frac{3}{2}bp^2 + C, y = ap^2 + bp^3, C \in \mathbb{R} \right\} \cup \{y = 0\}.$$

مثال ۳.۱۴.۱. معادله $y = \arcsin y' + \ln(1 + y'^2)$ را حل کنید.

حل: با فرض $y' = p$ داریم:

$$y = \arcsin p + \ln(1 + p^2).$$

با دیفرانسیل گیری از طرفین، داریم:

$$dy = \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} + \frac{2p}{1+p^2} dp. \quad (۳۶.۱)$$

اما $dy = p dx$ ، بنابراین:

$$dx = \frac{dp}{p\sqrt{1-p^2}} + \frac{dp}{1+p^2}, \quad (۳۷.۱)$$

و با انتگرال گیری از طرفین این رابطه، داریم:

$$x = \int \frac{dp}{p\sqrt{1-p^2}} + \arctan p + C.$$

با فرض $u = \sqrt{1-p^2}$ داریم:

$$\int \frac{dp}{p\sqrt{1-p^2}} = \int \frac{du}{(1-u^2)} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| + C.$$

پس:

$$x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-p^2}}{1 + \sqrt{1-p^2}} \right| + \arctan p + C.$$

اما در (۳۶.۱) فرض شده است $p^2 \neq 1$ و در (۳۷.۱) فرض شده است $p \neq 0$. این حالتها را جداگانه بررسی می کنیم:

$$\begin{cases} p = 1 \\ p = -1 \\ p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y' = -1 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + C \\ y = -x + C \\ y = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + C = \frac{\pi}{2} + \ln 2 \\ -x + C = -\frac{\pi}{2} + 2 \\ C = 0 \end{cases}$$

که تنها حالت $y = 0$ از این سه حالت می تواند جواب $\mathcal{E}$ باشد. پس جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$S = \left\{ (x, y) : x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1-p^2}}{1 + \sqrt{1-p^2}} \right) + \arctan p + C, y = \arcsin p + \ln(1 + p^2), C \in \mathbb{R} \right\} \cup \{y = 0\}$$

مثال ۴.۱۴.۱. معادله $x = 3y' - 2y'^2$ را حل کنید.

حل: با فرض $y' = p$ داریم:

$$x = 3p - 2p^2. \quad (۳۸.۱)$$

با دیفرانسیل گیری از طرفین (۳۸.۱) داریم:

$$dx = (3 - 4p) dp.$$

اما $dx = dy/p$ ، و در نتیجه:

$$dy = p(3 - 4p)dp, \quad (39.1)$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است. بنابراین

$$y = \frac{3}{2}p^2 - \frac{4}{3}p^3 + C.$$

اما در (39.1) فرض شده است $p \neq 0$. حالت $p = 0$ به معنی $y' = 0$ یا $y = C$ است. با توجه به معادله $\mathcal{E}$ داریم که اگر $p = 0$ آنگاه $x = 0$. پس جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از (38.1)، (39.1) و همه نقاط به شکل $(0, C)$:

$$S = \left\{ (x, y) : x = 3p - 2p^2, y = \frac{3}{2}p^2 - \frac{4}{3}p^3 + C \right\}.$$

۵.۱۴.۱. مثال معادله $x^{3/2} + y^{2/3} = 1$ را حل کنید.

حل: با فرض $y' = p$ داریم $x^{2/3} + p^{2/3} = 1$. اکنون با فرض $x = \cos^3 t$ و $p = \sin^3 t$ ملاحظه می‌شود که رابطه $\mathcal{E}$ برقرار است. با دیفرانسیل گیری از اولین رابطه، نتیجه می‌گیریم:

$$dx = -3 \sin t \cos^2 t dt.$$

اما $dx = dy/p$ ، بنابراین

$$dy = -3 \sin t \cos^2 t dt.$$

اما $p = \sin^3 t$ ، در نتیجه

$$\begin{aligned} dy &= -3 \sin^2 t \cos^2 t dt, \\ y &= -3 \int \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = -\frac{3}{8} \int \{1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t\} dt \\ &= -\frac{3}{8} \int \left\{ 1 - \cos 2t - \frac{1 - \cos 4t}{2} + (1 - \sin^2 2t) \cos 2t \right\} dt \\ &= -\frac{3}{8} \left\{ t - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{t}{2} + \frac{1}{8} \sin 4t + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{\sin^3 2t}{3} \right\} + C. \end{aligned}$$

پس جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y) : x = \cos^3 t, y = -\frac{3}{64}(4t + \sin 4t) + \frac{1}{8} \sin^2 2t + C \right\} \cup \{(1, C) : C \in \mathbb{R}\}.$$

حالت $p = 0$ به معنی $x^{3/2} + 0 = 1$ یا $x = 1$ است. نقاط $(1, C)$ به این منظور افزوده شده‌اند.

۶.۱۴.۱. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید.

- | | |
|-----------------------------|------------------------------------|
| 1) $y = y'^2 e^{y^2},$ | 2) $xy'^2 = e^{1/y^2},$ |
| 3) $y' = e^{y'/y},$ | 4) $x(1 + y'^2)^{3/2} = a,$ |
| 5) $x = \ln y' + \sin y',$ | 6) $y^{2/5} + y'^{2/5} = a^{2/5},$ |
| 7) $x = y'^2 + 2,$ | 8) $x = y' + 4y',$ |
| 9) $y = y' \ln y,$ | 10) $y = y'(1 + y' \cos y'),$ |
| 11) $x + y' = y'^2 + y'^3,$ | 12) $y = (y' - 1)e^{y'}.$ |

بخش ۱۵.۱ معادله لاگرانژ و کلو

۱.۱۵.۱. تعریف معادله دیفرانسیل به شکل:

$$y = x\phi(y') + \psi(y'), \quad (40.1)$$

که $y' \neq \phi(y')$ را معادله لاگرانژ می‌نامیم. اگر $\phi(y') = y'$ ، یعنی

$$y = xy' + \psi(y'), \quad (41.1)$$

معادله حاصل را، معادله کلو می‌نامند.

۲.۱۵.۱. روش حل برای حل چنین معادلاتی فرض می‌کنیم $y' = p$ ، از طرفین دیفرانسیل گرفته و از فرض $dy = p dx$ استفاده می‌کنیم.۳.۱۵.۱. مثال معادله $y = 2xy' + \ln y'$ را حل کنید.حل: با فرض $y' = p$ داریم:

$$y = 2xp + \ln p.$$

با دیفرانسیل گیری از طرفین، نتیجه می‌گیریم:

$$dy = 2x dp + 2p dx + \frac{dp}{p}.$$

اما $dy = p dx$ ، در نتیجه:

$$2x dp + p dx + \frac{dp}{p} = 0,$$

که یک معادله مرتبه اول بر حسب x است:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -\frac{1}{p^2}.$$

آن را حل کرده و x را بدست می‌آوریم:

$$h = \exp\left(\int \frac{2}{p} dp\right) = \exp(2 \ln p) = p^2,$$

$$x = \frac{1}{p^2} \left(\int p^2 \frac{-1}{p^2} dp + C \right) = \frac{1}{p^2} (C - p) = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

پس جواب عمومی $\mathcal{E}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y) : x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}, y = 2xp + \ln p, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

۴.۱۵.۱. مثال معادله $y = xy'^2 - 1/y'$ را حل کنید.حل: با فرض $y' = p$ ، داریم $y = xp^2 - 1/p$. با دیفرانسیل گیری از طرفین این رابطه، نتیجه می‌گیریم:

$$dy = p^2 dx + 2xp dp + \frac{dp}{p^2}.$$

اما $dy = p dx$ و در نتیجه، به معادله خطی مرتبه اول:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p^2(p^2-1)}, \quad (۴۲.۱)$$

می‌رسیم. از حل آن، x را بر حسب p می‌یابیم:

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int \frac{2}{p-1} dp\right) = (p-1)^2, \\ x &= \frac{1}{(p-1)^2} \left(\int (p-1)^2 \frac{dp}{p^2(p^2-p)} + C \right) \\ &= \frac{1}{(p-1)^2} \left(\int \frac{p-1}{p^3} dp + C \right) \\ &= \frac{1}{(p-1)^2} \left(-\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + C \right). \end{aligned}$$

اما در (۴۲.۱) فرض شده است $p \neq 1$. حالت $p = 1$ معادل $y = x$ است که در معادله دیفرانسیل داده شده صدق نمی‌کند. پس جواب عمومی $\mathcal{C}$ عبارتست از

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y) : x = \frac{Cp^2 + 2 - p}{p^2(p-1)^2}, y = xp^2 - \frac{1}{p}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

۱۵.۱.۵. مثال معادله $y = xy' + a/(2y')$ را حل کنید.

حل: با فرض $y = xp + a/2p$ که از $y' = p$ حاصل می‌شود و دیفرانسیل گیری از دو طرف تساوی، نتیجه می‌گیریم:

$$dy = p dx + x dp - \frac{a}{2p} dp.$$

اما $dy = p dx$ و در نتیجه

$$\left(x - \frac{a}{2p^2}\right) dp = 0.$$

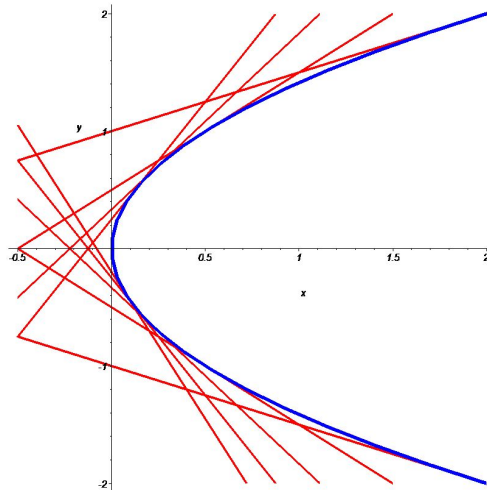
پس یا $dp = 0$ و لذا p ثابت است و بنابراین $y = Cx + a/2C$ و یا اینکه $x - \frac{a}{2p^2} = 0$ یا $x = a/2p^2$. پس جواب عمومی معادله داده شده برابر است با:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{ (x, y) : x = \frac{a}{2p^2}, y = xp + \frac{a}{2p} \right\} \cup \left\{ y = Cx + \frac{a}{2C} : C \neq 0 \right\} \\ &= \{y^2 = 2ax\} \cup \left\{ y = Cx + \frac{a}{2C} : C \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که $\mathcal{S}$ اجتماع یک منحنی (سهمی) $y^2 = 2ax$ و مجموعه‌ای از خطوط است: $y = Cx + a/2C$. چنانچه منحنی و خطوط مذکور را ترسیم کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که خطوط مذکور به منحنی نمی‌رسند. در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود که منحنی $y^2 = 2ax$ پوش دسته خطوط $y = Cx + a/2C$ است. به شکل زیر توجه شود. ^۵

^۵ توضیح اینکه، در ترسیم این شکل از دستور ذیل در محیط Maple ۱۵ استفاده شده است:

```
> a:=plots[implicitplot]({y^2 = 2*x}, x = -1/2.. 4, y = -2.. 2, color = blue, thickness = 6);
> b:=plots[implicitplot]({y = -2*x - 1/4, y = -x - 1/2, y = x + 1/2, y = 2*x + 1/4, y = -2.5*x - .2,
y = -1.5*x -.3, y = -.5*x - 1, y = .5*x + 1, y = 1.5*x +.3}, x = -1/2.. 4, y = -2.. 2, color = red, thickness
= 4, grid = [50, 50]);
> plots[display](a,b);
```



جوابهای معادله دیفرانسیل $y = xy' + a/(2y')$ با $a = 1$.

۶.۱۵.۱. مثال معادله دیفرانسیل $y = xy' + y^3$ را حل کنید.

حل: با فرض $y' = p$ داریم $y = xp + p^3$. اما با دیفرانسیل گیری از طرفین این رابطه داریم

$$dy = p dx + x dp + 3p^2 dp.$$

با قرار دادن $dy = p dx$ ، نتیجه می‌گیریم $(x + 3p^2)dp = 0$. پس یا $dp = 0$ و لذا $p = C$ ثابت است و بنابراین $y = Cx + C^3$ ؛ و یا اینکه $x + 3p^2 = 0$ و بنابراین $x = -3p^2$. پس جواب عمومی $\mathcal{C}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(x, y) : x = -3p^2, y = xp + p^3\} \cup \{y = Cx + C^3 : C \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y = \frac{3}{2}x : x \leq 0\} \cup \{y = Cx + C^3 : C \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

۷.۱۵.۱. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $y = 2xy^2 + y' \ln y'$, | 2) $y = xy' + a/y'^2$, |
| 3) $y = x(1 + y') + y'^2$, | 4) $y = xy' + y'^2$, |
| 5) $y = 2xy' + \sin y'$, | 6) $xy' + 1 = yy' + y'$, |
| 7) $y = xy'^2 - 1/y'$, | 8) $y = xy' + a\sqrt{1 + y'^2}$, |
| 9) $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$, | 10) $xy'^2 = yy' + 1$. |

بخش ۱۶.۱ ساختن معادله دیفرانسیل با داشتن خانواده‌ای از جوابهای آن

فرض کنید خانواده‌ای از منحنی‌ها در صفحه داریم که توسط یک پارامتر a بیان شده است:

$$C : F(x, y, a) = 0.$$

از معادله داده شده به کمک قاعده مشتق تابع ضمنی، y' را می‌یابیم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}.$$

سپس از دستگاه معادلات:

$$\boxed{F(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0,} \quad (۴۳.۱)$$

پارامتر a را حذف می‌کنیم. معادله حاصل همان معادله دیفرانسیل مورد نظر است.

۱.۱۶.۱. مثال معادله دیفرانسیل نظیر به خانواده $y^2 + 1 = \frac{x^2}{a^2}$ را بیابید.

حل: از معادله داده شده y' را پیدا می‌کنیم:

$$y' = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2/a^2 - y^2 - 1)}{\frac{\partial}{\partial y}(x^2/a^2 - y^2 - 1)} = -\frac{2x/a^2}{-2y} = \frac{x}{a^2 y}.$$

بنابراین، چون بنا به فرض $a^2 = \frac{x^2}{y^2+1}$ داریم:

$$\frac{x^2}{y^2+1} y' = \frac{x}{y} = \frac{y^2+1}{xy}.$$

۲.۱۶.۱. مثال معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y^2 = 2Cx + C^2$ را پیدا کنید.

حل: از فرض $y^2 = 2Cx + C^2$ نتیجه می‌گیریم:

$$y' = -\frac{-2C}{2y} = \frac{C}{y}.$$

اما در این صورت $C = yy'$ و در نتیجه:

$$y^2 = 2xyy' + y^2 y'^2.$$

اگر در این معادله فرض کنیم $y' = p$ ، خواهیم داشت $y^2 = 2xyp + y^2 p^2$ ، در نتیجه:

$$\mathcal{E}: y = 2xy' + yy'^2.$$

۳.۱۶.۱. مثال معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y = C \cos x + x$ را پیدا کنید.

حل: با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه، داریم $y' = -C \sin x + 1$. از معادله $y = C \cos x + x$ نتیجه می‌گردد که $C = \frac{1}{\cos x}(y - x)$. بنابراین $y' = -\tan x(y - x) + 1$ ، که یک معادله خطی مرتبه اول است:

$$y' + \tan xy = 1 + x \tan x.$$

۴.۱۶.۱. تمرینات در هر مورد معادله دیفرانسیلی بیابید که خانواده منحنی‌های داده شده در آن صدق کند:

- | | |
|------------------------|-------------------------------------|
| 1) $y = \frac{a}{x},$ | 2) $y = ax + a^2,$ |
| 3) $x^2 - y^2 = ax,$ | 4) $y = \frac{a}{x} + \frac{x}{a},$ |
| 5) $y = ae^{x/a},$ | 6) $y = Cx + C^2,$ |
| 7) $y = Cx - C - C^2,$ | 8) $y^2 = Cx + C^3,$ |
| 9) $y = a + axe^{-x},$ | 10) $y = xy^2 + Cx,$ |
| 11) $x^2 + y^2 = C,$ | 12) $y = x^3 + \frac{C}{x}.$ |

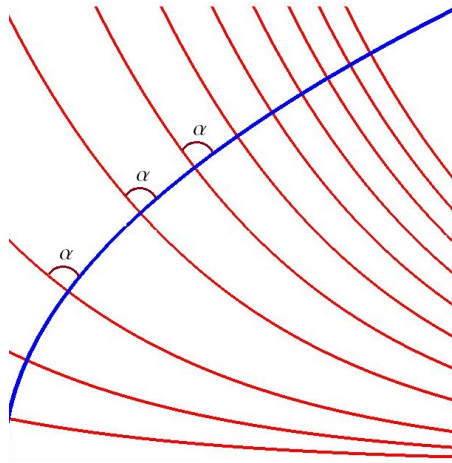
در این مسایل a و C پارامتر دلخواهند.

بخش ۱۷.۱ مسیرهای متعامد و همزاویه

۱.۱۷.۱. تعریف فرض کنید

$$C : F(x, y, a) = 0, \quad (۴۴.۱)$$

خانواده‌ای از منحنی‌های در صفحه است. منحنی $y = f(x)$ را در صورتی یک مسیر همزاویه خانواده C گوئیم که اگر $y = \phi(x)$ عضوی از C باشد و منحنی‌های $y = f(x)$ و $y = \phi(x)$ در x_0 متقاطع باشند، آنگاه زاویه بین آنها برابر عدد ثابت α باشد. چنانچه $\alpha = \pi/2$ ، مسیر $y = f(x)$ را یک مسیر متعامد برای $\mathcal{E}$ می‌نامند.



برای یافتن مسیرهای متعامد یک معادله دیفرانسیل مفروض، ابتدا معادله دیفرانسیلی می‌یابیم که C جواب آن باشد. سپس توجه می‌کنیم که اگر C_1 و C_2 دو منحنی با شیب m_1 و m_2 باشند، آنگاه زاویه بین آنها برابر است با

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2},$$

از طرفی اگر $y = y(x)$ یک منحنی باشد، در این صورت شیب خط مماس بر آن برابر $y'(x)$ است. پس اگر y_1 و y_2 به ترتیب C_1 و C_2 را معرفی کنند، بایستی داشته باشیم:

$$\tan \alpha = \frac{y'_1 - y'_2}{1 + y'_1 y'_2},$$

اکنون کافی است از معادله دیفرانسیل حاصل y' را بر حسب x و y پیدا کنیم، مثلاً $y' = f(x, y)$ و سپس معادله زیر را تشکیل دهیم:

$$\mathcal{E}' : \tan \alpha = \frac{y' - f(x, y)}{1 + y' f(x, y)}. \quad (45.1)$$

در حالت مسیرهای متعامد، معادله $\mathcal{E}$ به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\mathcal{E}'' : y' = -\frac{1}{f(x, y)}. \quad (46.1)$$

۲.۱۷.۱. مثال مسیرهای متعامد نسبت به دسته خطوط $y = Cx$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله دیفرانسیل دسته خطوط داده شده را پیدا می‌کنیم:

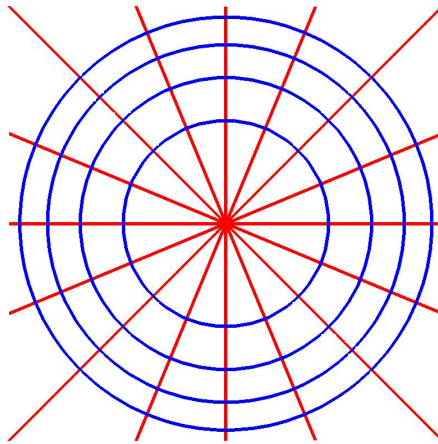
$$\begin{cases} y = Cx \\ y' = C \end{cases} \implies \mathcal{E} : y' = \frac{y}{x}.$$

پس معادله $\mathcal{E}''$ در (۴۶.۱) را تشکیل می‌دهیم:

$$\mathcal{E}'' : y' = -\frac{1}{y/x} = -\frac{x}{y},$$

که یک معادله تفکیک پذیر است؛ پس معادله مسیرهای خواسته شده عبارتست از

$$\mathcal{S} : x^2 + y^2 = C.$$



مثال ۳.۱۷.۱. مسیرهایی را بیابید که با دسته منحنی $y^2 = Cx + x^2$ زاویه ثابت $\pi/3$ می‌سازند.

حل: ابتدا معادله دیفرانسیلی می‌یابیم که این دسته منحنی‌ها در آن صدق کنند:

$$\begin{cases} 2yy' = C + x^2, \\ C = (y^2 - x^2)/x, \end{cases} \implies 2yy' = \frac{y^2 - x^2}{x} + x^2.$$

به این ترتیب $\mathcal{E}: y' = \frac{y^2 - x^2 + x^3}{2xy}$. چون $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ ، پس معادله $\mathcal{E}$ چنین می‌شود:

$$\sqrt{3} = \frac{y' - \frac{y^2 - x^2 + x^3}{2xy}}{1 + y' \frac{y^2 - x^2 + x^3}{2xy}} = \frac{2xyy' - y^2 + x^2 - x^3}{2xy + y^2y' - x^2y' + x^3y'}.$$

و در نتیجه

$$\mathcal{E}': y' = \frac{y^2 + x^3 + 2\sqrt{3}xy - x^2}{2xy + \sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}y^2 - \sqrt{3}x^3}.$$

مثال ۴.۱۷.۱. مسیرهایی را بیابید که با دسته منحنی‌های $x^2 + y^3 = C$ زاویه ثابت $\pi/4$ تشکیل می‌دهند.

حل: ابتدا معادله دیفرانسیلی را می‌یابیم که این دسته منحنی در آن صدق می‌کنند: $\mathcal{E}: 2x + 3y'y^2 = 0$. اکنون با توجه به اینکه $\tan(\pi/4) = 1$ معادله $\mathcal{E}$ از (۴۵.۱) را تشکیل می‌دهیم:

$$1 = \frac{y' - \left(\frac{-2x}{3y^2}\right)}{1 + y' \left(\frac{-2x}{3y^2}\right)} = \frac{3y^2y' + 2x}{3y^2 - 2xy'}.$$

بنابراین، معادله خواسته شده عبارتست از

$$\mathcal{E}': y' = \frac{3y^2 - 2x}{3y^2 + 2x}.$$

مثال ۵.۱۷.۱. مسیرهای متعامد نسبت به دوائر $x^2 + y^2 = 2ax$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله دیفرانسیل این دسته منحنی‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x + 2yy' = 2a, \\ x^2 + y^2 = 2ax, \end{cases} \implies 2x + 2yy' = \frac{x^2 + y^2}{x}.$$

در نتیجه، به معادله دیفرانسیل $2yy' = y^2 - x^2$ می‌رسیم. اکنون بجای y' از $1/y' - 1$ استفاده کرده و معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد می‌رسیم:

$$\mathcal{E}'' : y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

که یک معادله همگن است. جواب این معادله عبارتست از دسته دایره‌های $x^2 + y^2 = Cy$.

۶.۱۷.۱. تمرینات

- (۱) مسیرهایی را بیابید که با دسته خطوط $y = C^2x + C$ زاویه ثابت $\pi/6$ می‌سازند.
 - (۲) مسیرهایی را بیابید که با دسته منحنی‌های $Cx = x^2 + y^2$ زاویه ثابت $\pi/4$ می‌سازند.
 - (۳) مسیرهایی را بیابید که با دسته منحنی‌های $xy = Cx + 1$ زاویه ثابت $\pi/3$ می‌سازند.
- در هر مورد، مسیرهای متعامد نسبت به دسته منحنی‌های داده شده را بیابید:

- | | |
|------------------------------|-------------------------|
| 4) $y^2 + 2ax = 0, a > 0$ | 5) $x^2 + y^2 = 2ay,$ |
| 6) $y = ax^n, n$ ثابت, | 7) $x^2 + y^2/3 = C,$ |
| 8) $x^2 - y^2/2 = C^2,$ | 9) $y = a(1 + \cos x),$ |
| 10) $x^n + y^n = C, n$ ثابت, | 11) $y^2 = 4(x - a).$ |

بخش ۱۸.۱ جوابهای تکین یک معادله دیفرانسیل

۱.۱۸.۱. تعریف فرض کنید معادله دیفرانسیل:

$$\mathcal{E} : F(x, y, y') = 0,$$

داده شده است. جواب $C : f(x, y) = 0$ از $\mathcal{E}$ را در صورتی یک جواب تکین گوئیم که در همه نقاط آن جواب $\mathcal{E}$ منحصر بفرد نباشد. به بیان دیگر به ازای هر $(x_0, y_0) \in C$ جوابی بجز C برای $\mathcal{E}$ یافت گردد که از همان نقطه (x_0, y_0) بگذرد.

۲.۱۸.۱. تمرینات برای یافتن جوابهای تکین معادله $\mathcal{E} : F(x, y, y') = 0$ (البته در صورت وجود) مشروط به اینکه $\partial F / \partial y'$ و $\partial F / \partial y$ در همه نقاط پیوسته باشند، کافی است دستگاه معادلات:

$$\boxed{\mathcal{T} : F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0,} \quad (47.1)$$

را تشکیل داده و y' را بین آن دو حذف کنیم. نتیجه یک جواب تکین $\mathcal{E}$ خواهد بود.

۳.۱۸.۱. مثال جوابهای تکین معادله $\mathcal{E} : xy' + y'^2 = y$ را در صورت وجود بیابید.
حل: در این مسأله

$$F = xy' + y'^2 - y.$$

پس دستگاه معادلات $\mathcal{T}$ از (47.1) به صورت زیر است:

$$xy' + y'^2 - y = 0, \quad x + 2y' - 0 = 0.$$

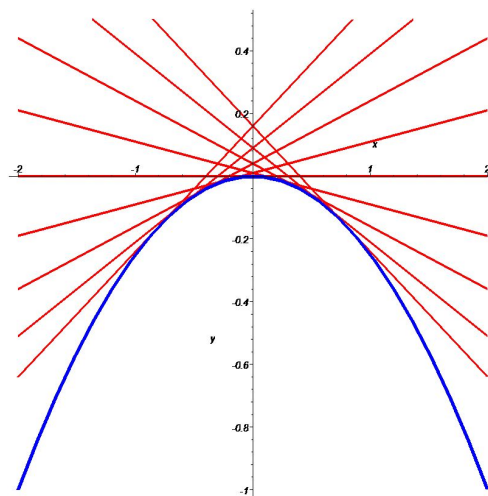
از معادله دوم داریم $y' = -x/2$ که اگر در معادله اول قرار دهیم، نتیجه می‌گردد:

$$x\left(-\frac{1}{2}x\right) + \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 - y = 0.$$

یا $C: y = -x^2/4$. اما معادله داده شده یک معادله کلرو است و جواب عمومی آن عبارتست از

$$\mathcal{S} = \{y = Cx + C^2 : C \in \mathbb{R}\} \cup \{y = -\frac{1}{4}x^2\}.$$

ملاحظه می‌شود که دسته خطوط $y = Cx + C^2$ به ازای هر C ای بر منحنی $y = -x^2/4$ مماس هستند. در واقع در $(x_0, y_0) \in C$ خط $y = -\frac{x_0}{2}x + \left(\frac{x_0}{2}\right)^2$ به C مماس است. یعنی، در آن نقطه علاوه بر C خط مورد نظر هم یک جواب مسأله است. به شکل زیر توجه شود.^۶



منحنی $y = -x^2/4$ که پوش خانواده خطوط $y = C + C^2x$ با $C \in \mathbb{R}$ است.

۱۸.۱.۴. مثال جوابهای تکین معادله دیفرانسیل $xy'^2 + 4x = 2yy'$ را در صورت وجود بیابید.

حل: این یک معادله لاگرانژ است و جواب عمومی آن $x^2 = C(y - C)$ است. در این مسأله

$$F = xy'^2 + 4x - 2yy'.$$

پس دستگاه $\mathcal{S}$ در (۴۷.۱) عبارت است از

$$xy'^2 + 4x - 2yy' = 0, \quad 2xy' - 2y = 0.$$

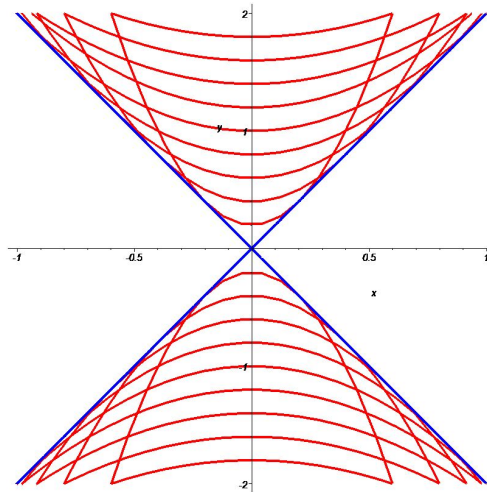
از معادله دوم نتیجه می‌گیریم $y' = y/x$ ، که اگر در معادله اول قرار دهیم، بدست خواهیم آورد که

$$x\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4x - 2y\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

یا به اختصار $4x^2 = y^3$ که اجتماع دو خط $y = \pm 2x$ است. به شکل زیر توجه شود:

^۶ توضیح اینکه، در ترسیم این شکل از دستور ذیل در محیط Maple ۱۵ استفاده شده است:

```
> a:=plots[implicitplot]({y = -x^2/4}, x = -2..2, y = -1..1/2, color = blue, thickness = 6);
> b:=plots[implicitplot]({y = 0, y = 0.1*x + 0.01, y = -0.1*x + 0.01, y = 0.2*x + 0.04, y = -0.2*x + 0.04,
y = 0.3*x + 0.09, y = -0.3*x + 0.09, y = 0.4*x + 0.16, y = -0.4*x + 0.16}, x = -2..2, y = -1..1/2, color =
red, thickness = 4);
> plots[display](a,b);
```



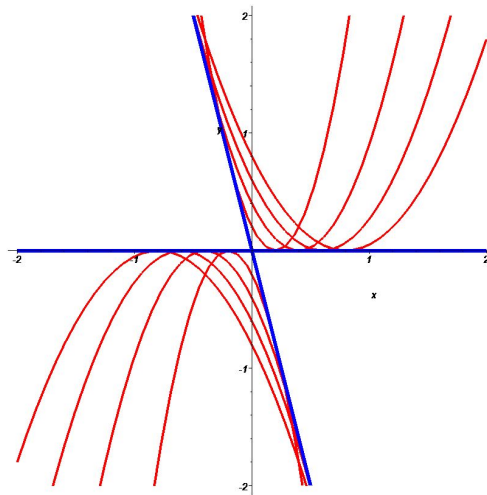
خطوط راست $y = \pm 2x$ که پوش خانواده منحنیهای $x^2 = C(y - C)$ با $C \in \mathbb{R}$ هستند.

۵.۱۸.۱. مثال جوابهای تکین معادله $\mathcal{E}: 2y(y' + 2) = xy'^2$ را در صورت وجود بیابید.

حل: جواب عمومی این معادله $Cy = (C - x)^2$ با $C \in \mathbb{R}$ می باشد. در این مسأله $F = 2y(y' + 2) - xy'^2$ ، پس دستگاه $\mathcal{F}$ از (۴۷.۱) چنین است:

$$2yy' + 4y - xy'^2 = 0, \quad 2y - 2xy' = 0.$$

از معادله دوم داریم $y' = y/x$ که اگر در معادله اول قرار دهیم، نتیجه می شود $y^2 + 4xy = 0$ که اجتماع دو خط $y = 0$ و $y = -4x$ می باشد. به شکل زیر توجه شود:



خطوط راست $y = 0$ و $y = -4x$ که پوش خانواده منحنیهای $Cy = (x - C)^2$ با $C \in \mathbb{R}$ هستند.

۶.۱۸.۱. مثال جوابهای تکین معادله $\mathcal{E}: y'^2(2 - 3y)^2 = 4(1 - y)$ را در صورت وجود بیابید.

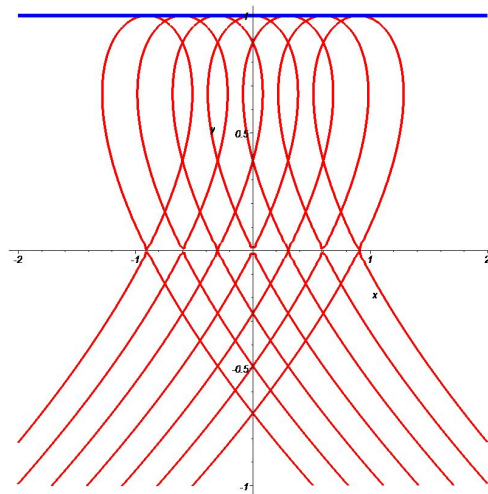
حل: با حل معادله بر حسب y' به دو معادله دیفرانسیل

$$y' = \pm 2 \frac{\sqrt{1-y}}{2-3y},$$

می رسیم؛ که هر دو تفکیک پذیر هستند. با حل آنها به جواب عمومی $y^2(1-y) = (x-C)^2$ می رسیم، که در آن $C \in \mathbb{R}$. در این مسأله $F = y'^2(2-3y)^2 - 4\sqrt{1-y}$ و معادلات $\mathcal{F}$ از (۴۷.۱) عبارتند از

$$y'^2(2-3y)^2 - 4(1-y) = 0, \quad 2y'(2-3y)^2 = 0.$$

پس یا $2 - 3y = 0$ و لذا $y = 2/3$ که در معادله صدق نمی‌کند؛ و یا در غیر این صورت، باید $y' = 0$ ، که اگر آن را در معادله اول قرار دهیم، به $4\sqrt{1-y} = 0$ می‌رسیم. پس تنها جواب تکین $\mathcal{C}$ عبارت است از $y = 1$. به شکل زیر توجه شود.



خط راست $y = 1$ که پوش منحنیهای $y^2(1-y) = (x-C)^2$ با $C \in \mathbb{R}$ است.

۷.۱۸.۱. تمرینات هر یک از معادلات زیر را حل کنید و جوابهای تکین آنها را مشخص کنید:

- | | |
|--|---|
| 1) $(1 + y'^2)y^2 = 4yy' + 4x$, | 2) $y'^2 = y^2$, |
| 3) $y'^2 = 4y$, | 4) $y' = \sqrt[3]{y^2} + a$, |
| 5) $y'^3 + 8y^2 = 4xyy'$, | 6) $(xy' + y)^2 + 3x^5(xy' - 2y) = 0$, |
| 7) $y(y - 2xy')^2 = 2y'$, | 8) $8y'^3 = 27(y - x) + 12y'^2$, |
| 9) $(y' - 1)^2 = y^2$, | 10) $(xy' + y)^2 = y'y^2$, |
| 11) $y + \frac{x^2}{2} = y'^2 - xy'$, | 12) $3y + \frac{2}{x}y'^2 = 2xy'$, |
| 13) $y'^2 + e^x = yy'$, | 14) $3xy'^2 + x + 2y = 6yy'$, |
| 15) $y'^2(1 - y)^2 = 2(1 + y)$, | 16) $y = xy' + \sqrt{a^2y'^2 + b^2}$. |

فهرست مطالب

فصل ۱ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱	مفاهیم و تعاریف اولیه	۱.۱
۴	روش خطوط همشیب	۲.۱
۷	روش تقریبیات متوالی - روش پیکارد	۳.۱
۹	معادلات تفکیک پذیر	۴.۱
۱۲	معادلات همگن	۵.۱
۱۵	معادلات به شکل $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$	۶.۱
۱۸	معادلاتی که با تغییر تابع $y = z^\alpha$ به معادله‌ای همگن تبدیل می‌شوند	۷.۱
۲۰	معادله خطی مرتبه اول	۸.۱
۲۳	معادله برنولی	۹.۱
۲۴	معادله ریکاتی	۱۰.۱
۲۶	معادله دیفرانسیل کامل	۱۱.۱
۲۹	فاکتور انتگرال	۱۲.۱
۳۴	معادلاتی که بر حسب y' حل نشده‌اند	۱۳.۱
۳۶	معادلات به شکل $f(y, y') = 0$ یا $f(x, y') = 0$	۱۴.۱
۴۰	معادله لاگرانژ و کلرو	۱۵.۱
۴۲	ساختن معادله دیفرانسیل با داشتن خانواده‌ای از جوابهای آن	۱۶.۱
۴۳	مسیرهای متعامد و همزاویه	۱۷.۱
۴۶	جوابهای تکین یک معادله دیفرانسیل	۱۸.۱