فصل ۲

معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا

بخش ۱.۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱.۲. تعریف معادله دیفرانسیل با مرتبه ≥ 2 را معادله دیفرانسیل مرتبه بالا می‌نامند. فرم کلی این گونه معادلات به صورت:

$$\boxed{\mathscr{E}\ :\ F\Big(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\Big)=0,} \tag{۱.۲}$$

است که $\partial F/\partial y^{(n)}\neq 0$. معادله $\mathscr{E}$ را از مرتبه n ام می‌نامیم. مساله یافتن جواب دستگاه:[۱]

$$\begin{cases} y^{(n)}=f\Big(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}\Big), \quad x\in I,\\ y(x_0)=y_0,\\ y'(x_0)=y'_0,\\ \quad\vdots\\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.\end{cases}$$

را مساله کوشی یا مساله با مقدار اولیه می‌نامیم که $I\subseteq\mathbb{R}$ یک بازه است و $x_0\in I$.

۲.۱.۲. قضیه *فرض کنیم $D\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ و $f\,:\,D\to\mathbb{R}$ و تمام مشتقات جزئی مرتبه اول آن بر D پیوسته باشند و $\partial f/\partial y$، . . . و $\partial f/\partial y^{(n-1)}$ بر D کراندار باشند، در این صورت به ازای هر $\Big(x_0,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)}\Big)$ از D یک $\varepsilon>0$ ای هست و یک تابع $\varphi\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده بر بازه $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ به گونه‌ای که*

$$\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\ :\ \varphi^{(n)}(x)=f\Big(x,\varphi(x),\cdots,\varphi^{(n-1)}(x)\Big),$$
$$\varphi(x_0)=y_0,\ \ \varphi'(x_0)=y'_0,\ \ \cdots,\ \ \varphi^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}(x_0).$$

این تابع در حد یک همسایگی از x_0 منحصر بفرد است. به این معنی که اگر φ و ψ هر دو در شرایط بالا صدق کنند، آنگاه در یک همسایگی از x_0 برابرند.

[۱] —— آخرین بروز رسانی: ۱۴ فروردین ۱۳۹۱ —— تالیف: مهدی نجفی‌خواه، دانشیار ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران. هرگونه انتقاد و یا پیشنهادی را با نویسنده به آدرس m_nadjafikhah@iust.ac.ir در میان بگذارید. این کتاب در دست تهیه است و احتمالا در حال تغییر. لطفا آخرین نسخه آن را تهیه کنید: http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/Courses/ODE/Fa2.pdf

۳.۱.۲. مثال فرض کنیم $\mathscr{E}: y''=\sin y'+\exp(-yx^2)$. در این صورت:

$$f(x,y,y')=\sin y'+\exp(-yx^2),\quad \frac{\partial f}{\partial x}=-2xy\exp(-yx^2),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-x^2\exp(-yx^2),\quad \frac{\partial f}{\partial y'}=\cos y',$$

که جملگی بر $D=\mathbb{R}^2$ پیوسته‌اند و توابع $\partial f/\partial y$ و $\partial f/\partial y'$ بر D کراندارند. در این صورت بنا به ۲.۱.۲ به ازای هر $(x_0,y_0,y_0')\in\mathbb{R}^3$ یک $\varepsilon>0$ ای و یک تابع $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ای وجود دارد که اولا در $\mathscr{E}$ صدق می‌کند به ازای هر $x\in(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$ و در ثانی $\varphi(x_0)=y_0$ و $\varphi'(x_0)=y_0'$. بعلاوه این تابع در حد یک همسایگی از x_0 منحصر به فرد است.

۴.۱.۲. مثال نشان دهید $\mathscr{S}: y=Ax+B$ که A و B اعداد دلخواهند، جواب عمومی معادله $\mathscr{E}: y''=0$ است.

حل: روشن است که اگر $y=Ax+B$، آنگاه $y'=A$ و لذا $y''=0$ که در $\mathscr{E}$ صدق می‌کند. پس توابع در $\mathscr{S}$ در معادله $\mathscr{E}$ صدق می‌کنند. بالعکس فرض کنیم $y=f(x)$ در $\mathscr{E}$ صدق کند. در این صورت $\int y''\,dx=\int 0\,dx$ یا $f'(x)=A$ که A عددی ثابت است. مجدد ملاحظه می‌شود که $\int f'(x)\,dx=\int A\,dx$. در نتیجه $f(x)=Ax+B$ که به $\mathscr{S}$ تعلق دارد.

۵.۱.۲. مثال مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$y''=2\sqrt{y'},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$$

در این صورت توابع $y_1=0$ و $y_2(x)=x^8/3$ هر دو جواب این مساله هستند. یعنی جواب وجود دارد ولی منحصر بفرد نیست! توجه شود که در این مساله:

$$f(x,y,y')=2\sqrt{y'},\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{1}{\sqrt{y'}},$$

که آخری در $(x,y,0)$ بی‌کران است. یعنی، شرط کرانداری $\partial f/\partial y'$ در ۲.۱.۲ الزامی است.

۶.۱.۲. تمرینات در هر مورد نشان دهید که y جواب معادله $\mathscr{E}$ است:

1) $y=x(\sin x-\cos x)$, $\mathscr{E}: y''+y=2(\cos x+\sin x)$,
2) $y=x^2\ln x$, $\mathscr{E}: xy''=2$,
3) $x+c=e^{-y}$, $\mathscr{E}: y''=y'^2$,
4) $x=1+e^t,\ y=te^t$, $\mathscr{E}: (x-1)y''=1$,
5) $x=A+t^4/4,\ y=B+t^5/5$, $\mathscr{E}: y''y'^3=1$.

۶) نشان دهید $y=A\sin x+B\cos x$ جواب عمومی $y''+y=0$ است.

۷) نشان دهید $y=Ae^x+Be^{2x}+1$ جواب عمومی $y''-3y'+2y=2$ است.

بخش ۲.۲ کاهش مرتبه معادلات مرتبه بالا

به عملیاتی بر معادله که در نتیجه آن معادله‌ای از مرتبه پایین‌تر حاصل گردد، کاهش مرتبه می‌گوییم. مثلا، اگر از طرفین معادله $y''=0$ انتگرال بگیریم، به معادله $y'=A$ می‌رسیم که از یک مرتبه پایین‌تر می‌باشد. البته، این طور نیست که مرتبه هر معادله‌ای را بتوان کاهش داد، اما در برخی موارد این کار ممکن است و با این کار (احتمالاً) قسمتی از مشکلات حل می‌شود.

۱.۲.۲. تعریف (معادلات به شکل $\mathscr{E} : y^{(n)} = f(x)$) برای کاهش مرتبه چنین معادلاتی، می‌توان از دو طرف معادله داده شده نسبت به x انتگرال گرفت. با ادامه این کار رفته رفته مرتبه معادله کم شده و نهایتاً y با n بار انتگرالگیری بدست می‌آید. جواب عمومی $\mathscr{E}$ چنین بدست خواهد آمد:

$$\boxed{\mathscr{S} : y = \underbrace{\int\cdots\int}_{n \text{ تا}} f(x)\underbrace{dx\cdots dx}_{n \text{ تا}} + A_{n-1}x^{n+1} + \cdots + A_1x + A_0,} \tag{۲.۲}$$

که $A_{n-1},\cdots,A_1,A_0$ اعداد ثابت دلخواهند.

۲.۲.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y^{(4)} = x+1$ را حل کنید.

حل: به چهار با انتگرالگیری از $x+1$ نیاز است:

$$\begin{aligned}
y &= \iiiint (x+1)\,dxdxdxdx \\
&= \iiint \left\{\frac{x^2}{2}+x\right\} dxdxdx + A \\
&= \iint \left\{\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right\} dxdx + Ax + B \\
&= \int \left\{\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}\right\} dx + A\frac{x^2}{2} + Bx + C \\
&= \frac{x^5}{125}+\frac{x^4}{24}+A\frac{x^3}{6}+A\frac{x^2}{6}+B\frac{x^2}{2}+Cx+D
\end{aligned}$$

پس، در مجموع:

$$\mathscr{S} : y = \frac{x^5}{125}+\frac{x^4}{24}+AX^3+Bx^2+Cx+D.$$

۳.۲.۲. مثال جواب عمومی معادلهٔ $\mathscr{E} : y^{(n)} = e^{-x}$ را بیابید.

حل: با توجه به اینکه در این مساله $f(x) = e^{-x}$ و $\int f(x)\,dx = -e^{-x}$، پس به استقرا می‌توان نوشت:

$$\underbrace{\iint\cdots\int}_{n\text{تا}} f(x)\underbrace{dx\cdots dx\,dx}_{n\text{تا}} = (-1)^n e^x + P(x);$$

که $P(x)$ یک چند جمله‌ای دلخواه با ضرایب ثابت و از درجه $n-1$ است. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = (-1)^n e^{-x} + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1x + A_0.$$

۴.۲.۲. تعریف (معادلاتی که خود تابع y و مشتقات تا مرتبه $(k-1)$ ام آن را در بر ندارند) برای حل معادله دیفرانسیلی به شکل

$$\mathscr{E} : F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0,$$

کافی است از تابع جدید $u = y^{(k)}$ استفاده کرده و بنویسیم:

$$\mathscr{E} : F\left(x, u, u', \cdots, u^{(n-k)}\right) = 0;$$

پس از حل این معادله دیفرانسیل مرتبه $(n-k)$ ام و یافتن u، کافی است معادله $y^{(k)} = u$ را حل کنیم که بحث آن در ۱-۲-۲ آمده است.

۵.۲.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y''' = \sqrt{1+(y'')^2}$ را حل کنید.

حل: در این معادله y و y' حضور ندارند. پس تابع جدید $u = y''$ را معرفی می‌کنیم. به این ترتیب مساله جدید $u' = \sqrt{1+u^2}$ را داریم که معادله‌ای تفکیک پذیر است. در نتیجه

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int dx.$$

پس از انتگرال گیری داریم:

$$x = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) + C = \sinh^{-1} u + C.$$

در نتیجه $u = \sinh(x-C)$، اما توجه داریم که $u = y''$، در نتیجه:

$$\begin{aligned} \mathscr{S} : y &= \iint \sinh(x-C)\,dx\,dx = \int (\cosh(x-C) + A)\,dx, \\ &= \sinh(x-C) + Ax + B; \end{aligned}$$

که A، B و C اعداد ثابت دلخواهند.

۶.۲.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : x^2 + xy^{(4)} = y''' + 1$ را حل کنید.

حل: در این معادله y و y' و y'' حضور ندارند. پس تابع جدید $u = y'''$ را معرفی می‌کنیم. معادله داده شده به شکل $x^2 + xu' = u + 1$ تبدیل می‌گردد که یک معادله خطی مرتبه اول است. پس:

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int \frac{-1}{x}\,dx\right) = \exp(-\ln x) = \frac{1}{x}, \\ u &= x\left(\int \frac{1}{x}\frac{1-x^2}{x}\,dx + C\right) = x\left(\frac{-1}{x} - x + C\right) = Cx - 1 - x^2. \end{aligned}$$

اما بنا به فرض $y''' = u$، در نتیجه، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S} : y &= \iiint \left\{Cx - 1 - x^2\right\} dx\,dx\,dx, \\ &= \iint \left\{\frac{C}{2}x^2 - x - \frac{x^3}{3} + A\right\} dx\,dx, \\ &= \int \left\{\frac{C}{6}x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + Ax + B\right\} dx, \\ &= \frac{C}{24}x^4 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{A}{2}x^2 + Bx + D, \end{aligned}$$

که A، B، C و D اعداد ثابت دلخواهند.

۷.۲.۲. تعریف (معادلاتی که در آنها متغیر مستقل حضور ندارد) شکل کلی این معادلات:

$$\boxed{\mathscr{E} : F\left(y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0,} \qquad (۳.۲)$$

است. برای حل این گونه معادلات از تابع جدید $p = y'$ و متغیر جدید y استفاده می‌کنیم. در ادامه لازم است $\mathscr{E}$ را برحسب p و y بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = p, \\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}, \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\boxed{y' = p, \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}, \qquad y''' = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2.} \tag{۲.۴}$$

به این ترتیب به جای معادله مرتبه n ام $\mathscr{E}$، معادله‌ای از مرتبه $(n-1)$ ام برحسب p و y خواهیم داشت. اگر پس از حل معادله حاصل به $p = \varphi(y)$ برسیم، بایستی معادله تفکیک پذیر حاصل $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$ را به منظور یافتن y بر حسب x حل کنیم.

۲.۲.۸. مثال معادله $\mathscr{E} : y'' + y'^2 = 2e^{-y}$ را حل کنید.

حل: فرض کنیم $y' = p$ و p تابع است و y متغیر باشد. در این صورت مطابق (۲.۴) داریم $y'' = p\frac{dp}{dy}$ و لذا معادله به شکل $p\frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}$ در می‌آید که یک معادله برنولی است. $\frac{dp}{dy} + p = 2e^{-y}p^{-1}$. این معادله را با فرض تابع جدید $u = p^{1-(-1)}$ به معادله خطی مرتبه اول $\frac{du}{dy} + 2u = 4e^{-y}$ تبدیل کنیم. جواب این معادله عبارت از $u = 4e^{-y} + Ae^{-2y}$ است، که A عددی دلخواه است. اما $u = p^2 = (y')^2$. حال، با توجه به $p = \frac{dy}{dx}$، داریم

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + Ae^{-2y}},$$

که معادلاتی تفکیک پذیر بر حسب x و y هستند. در نتیجه، داریم:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4e^{-y} + Ae^{-2y}}} = \pm \int dx.$$

با فرض $t = e^y$ در انتگرال سمت چپ داریم:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4t + A}} = \pm(x + B).$$

پس، در مجموع $\frac{1}{2}\sqrt{4t + A} = \pm(x + B)$ یا $(4t + A) = 4(x + B)^2$ و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} \,:\, y = \ln((x - C_1)^2 + C_2).$$

۲.۲.۹. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E} \,:\, y'' = 2y^3, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1.$$

حل: با فرض تابع جدید $p = y'$ و متغیر y و با توجه به اینکه $y'' = p\frac{dp}{dy}$ داریم

$$p\frac{dp}{dy} = 2y^3,$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است. در نتیجه $p^2 = y^4 + A$ که A عددی ثابت است. اما $p = \frac{dp}{dx}$، پس دو معادله دیفرانسیل داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y^4 + A}, \tag{۲.۵}$$

که این نیز یک معادله تفکیک پذیر است. پس، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$x + B = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{y^4 + A}}. \tag{۲.۶}$$

البته انتگرال سمت راست یک دو جمله‌ای دیفرانسیلی با پارامترهای $m = 0$، $n = 2$ و $p = \frac{-1}{2}$ است؛ که غیر قابل حل (تحلیلی) است. از فرض $y'(0) = 1$ و $y(0) = 1$ نتیجه می‌شود $p(1) = 1$ که اگر آن را (۲.۵) اعمال کنیم، نتیجه خواهیم گرفت که $A = 0$، پس معادله (۲.۶) به صورت $x + B = \pm\int \frac{dy}{y^2}$ می‌شود که قابل حل است. $x + B = \frac{\pm 1}{y}$. اکنون از فرض $y(0) = 1$ استفاده کرده و نتیجه می‌گیریم که $B = \pm 1$. بنابراین، جواب مساله داده شده عبارتست از $x = \pm(\frac{1}{y} - 1)$. اما در این صورت $1 = \pm\frac{y'}{y^2}$ که با توجه به فرضیات $y'(0) = y(0) = 1$ بایستی علامت + انتخاب شود. بنابراین، جواب مساله داده شده عبارت است از $y = \frac{1}{1-x}$.

۲.۲.۱۰. تعریف (معادلاتی که نسبت به $y, y', \cdots, y^{(n)}$ همگن هستند.) فرض کنید

$$\mathscr{E} : F\Big(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\Big) = 0,$$

معادله‌ای دیفرانسیلی است به گونه‌ای که به ازای هر $t > 0$ ای:

$$\boxed{F\Big(x, ty, ty', \cdots, ty^{(n)}\Big) = t^k F\Big(x, y, y', \cdots y^{(n)}\Big).} \tag{۲.۷}$$

در این صورت با معرفی تابع جدید $y = \exp\Big(\int z\,dx\Big)$ و بازنویسی $\mathscr{E}$ بر حسب z و x به معادله‌ای از یک مرتبه پایین‌تر دست می‌یابیم.

۲.۲.۱۱. مثال معادله $\mathscr{E} : x^2yy'' = (y - xy')^2$ را حل کنید.

حل: در این مساله $F(x, y, y', y'') = x^2yy'' - (y - xy')^2$ و ملاحظه می‌شود که

$$F(x, ty, ty', ty'') = x^2.ty.ty'' - (ty - x.ty')^2 = t^2.F(x, y, y', y'')$$

پس F نسبت به y، y' و y'' همگن است. فرض کنیم z تابعی جدید است که $y = \exp(\int z\,dx) = e^{\int z\,dx}$ در این صورت

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\exp\Big(\int z\,dx\Big) = z\exp\Big(\int z\,dx\Big), \\ y'' &= \frac{d}{dx}\Big(z\exp\Big(\int z\,dx\Big)\Big) = (z' + z^2)\exp\Big(\int z\,dx\Big). \end{aligned}$$

پس از قرار دادن در $\mathscr{E}$ نتیجه می‌گیریم:

$$x^2(z'+z^2)\exp\Big(2\int z\,dx\Big)=\Big(\exp\Big(\int z\,dx\Big)-xz\exp\Big(\int z\,dx\Big)\Big)^2.$$

و یا به عبارت دیگر $z^2(z'+z^2)=(1-xz)^2$، که یک معادله خطی مرتبه اول است:

$$z'+\frac{2}{x}z=\frac{1}{x^2}.$$

پس از حل این معادله، داریم $x^2z=x+A$ که A عددی ثابت است. اما مطابق فرض $y=\exp\big(\int z\,dx\big)$، بنابراین:

$$y=\exp\Big(\int\frac{x+A}{x^2}\,dx\Big)=\exp\Big(\ln|x|-\frac{A}{x}+\ln B\Big);$$

که $B>0$ نیز عددی ثابت است. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}=\Big\{y=Bxe^{-A/x}\ :\ A,B\in\mathbb{R}\Big\}.$$

حالت $B<0$ برای وقتی است که $x<0$ و حالت $B=0$ به $y=0$ منجر می‌شود که یک جواب مساله است.

۱۲.۲.۲. مثال معادله $2yy''=3y'^2+4y^2\ :\ \mathscr{E}$ را حل کنید.

حل: در این مساله $F(x,y,y',y'')=2yy''-3y'^2-4y^2$ که به وضوح نسبت به y، y' و y'' همگن از مرتبه دو است. پس فرض می‌کنیم z تابع جدید است و $y=\exp\big(\int z\,dx\big)$. در این صورت:

$$2\exp\Big(\int z\,dx\Big)\times(z'+z^2)\exp\Big(\int z\,dx\Big)=3\exp\Big(\int z\,dx\Big)^2+4\exp\Big(\int z\,dx\Big)^2,$$

یا $2(z'+z^2)=3z^2+4$، که معادله‌ای تفکیک پذیر بر حسب z و x است:

$$2\int\frac{dz}{z^2+4}=\int dx,$$

که جواب عمومی آن $\frac{1}{2}\arctan\frac{z}{2}=x+C$ است. بنابراین $z=2\tan(2x+A)$، که A عددی دلخواه است. اما $y=e^{\int z\,dx}$، بنابراین

$$y=\exp\Big(\int z\tan(2x+A)\,dx\Big)=\exp\Big(-\ln|\cos(2x+A)|+\ln B_1\Big),$$

که B_1 عددی مثبت است. بنابراین

$$\mathscr{S}\ :\ y=\frac{B}{\cos(2x+A)},$$

که B عددی دلخواه است. در واقع اگر مخرج مثبت باشد $B=B_1$ و اگر منفی باشد $B=-B_1$ حالت $B=0$ به $y=0$ نظیر است که جواب $\mathscr{E}$ است.

۱۳.۲.۲. معادلات همگن نسبت به $d^n y,\cdots,d^2y,dy,dx,y,x$ فرض کنید معادله مرتبه n ام $\mathscr{E}$ را به شکل تابعی از متغیرهای

$$\mathscr{E}\,:\,G\big(x,y,d,d'y,d^2y,\cdots,d^ny\big)=0,$$

تصور کنیم، فرض کنید G به گونه‌ای است که به ازای هر t مثبت:

$$\boxed{G\big(t.x,t^m.y,t.dx,t^m.dy,t^m.d^2y,\cdots,t^m.d^ny\big)=t^k.G\big(x,y,dx,dy,d^2y,\cdots,d^ny\big),} \tag{۸.۲}$$

که k عددی ثابت است. در این صورت از تابع جدید u و متغیر جدید t استفاده می‌کنیم به گونه‌ای که

$$x=e^t,\qquad y=ue^{mt}.$$

پس از اعمال این تغییر متغیر و تابع به معادله‌ای می‌رسیم که در آن مقادیر t حضور ندارد، یعنی از نوع ۷.۲.۲ است.

۱۴.۲.۲. مثال معادله $\mathscr{E}\,:\,x^3y''=(y-xy')^2$ را حل کنید.

حل: در این مساله

$$G\big(x,y,dx,dy,d^2y\big)=x^3\frac{d^2y}{dx^2}-\big(y-x\frac{dy}{dx}\big)^2.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}G\big(tx,t^m.y,t.dx,t^m.dy,t^m.d^2y\big)&=(t.x)^3\frac{t^m.d^2y}{(t.dx)^2}-\big(t^m.y-(t.x).\frac{t^m.dy}{t.dx}\big)^2,\\&=t^{m+1}.x^3\frac{d^2y}{dx^2}-t^{2m}.\big(y-x\frac{dy}{dx}\big)^2.\end{aligned}$$

پس در صورتی می‌توان توانی از t را فاکتور گرفت که $m+1=2m$ یا $m=1$. در این صورت مطابق ۱۳.۲.۲ از تابع جدید u و متغیر جدید t استفاده می‌کنیم که $x=e^t$ و $y=ue^t$، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}y'&=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{e^tdu/dt+e^tu}{e^t}=\frac{du}{dt}+u,\\y''&=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{e^td^2u/dt^2+du/dt}{e^t}=\left(\frac{d^2u}{dt}+\frac{du}{dt}\right)e^{-t}.\end{aligned}$$

پس معادله $\mathscr{E}$ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$(e^t)^3\left(\frac{d^2u}{dt}+\frac{du}{dt}\right)e^{-1}=\left(ue^t-e^t\left(\frac{du}{dt}+u\right)\right)^2.$$

یا به بیان دیگر

$$\mathscr{E}\,:\,\frac{d^2u}{dt^2}=\left(\frac{du}{dt}\right)^2-\frac{du}{dt},$$

که با فرض $p=du/dt$ کاهش مرتبه می‌یابد:

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d(du/dt)}{dt}=\frac{dp}{dt}=\frac{dp}{du}\frac{du}{dt}=p\frac{dp}{du}.$$

پس معادله $\mathscr{E}$ به شکل

$$p\frac{dp}{du}+p=p^2,$$

درمی‌آید. پس یا $p=0$ و لذا $u=C$ و چون $y=ue^t$، داریم $x=Cy$ اگر $p\neq 0$ پس باید $\frac{dp}{du}+1=p$ که یک معادله تفکیک پذیر است. بنابراین

$$\int\frac{dp}{p-1}=\int du \quad\Longrightarrow\quad p=1+Be^u,$$

که B عددی دلخواه است. اما $p=du/dt$؛ بنابراین $du/dt=1+Be^u$ که معادله‌ای تفکیک پذیر است. بنابراین

$$\int\frac{du}{1+Be^u}=\int dt \quad\Longrightarrow\quad u=\ln\frac{e^t}{Be^t+A}.$$

از طرفی $x=e^t$ و $y=ue^t$، بنابراین $\frac{y}{x}=\ln(\frac{x}{Bx+A})$ و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{E}\ :\ y=\ln\left(\frac{x}{Bx+A}\right).$$

۱۵.۲.۲. مثال معادله $2y''=\frac{y'}{x}+\frac{x}{y}$ را به یک معادله مرتبه اول تبدیل کنید.

حل: در این مساله

$$G(x,y,dx,dy,d^2y)=2\frac{d^2y}{(dx)^2}-\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y};$$

و ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned}G(tx,t^m.y,t.dx,t^m.dy,d^m.d^2y) &= 2\frac{t^m.d^2y}{(t.dx)^2}-\frac{1}{t.x}\frac{t^m.dy}{t.dx}+\frac{t.x}{t^m.y},\\ &= t^{m-2}.\left(2\frac{d^2y}{(dx)^2}\right)-t^{m-2}.\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right)+t^{1-m}.\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

پس در صورتی می‌توان توانی از t را فاکتور گرفت که $m-2=1-m$ یعنی $m=\frac{3}{2}$. بنابراین، از تابع جدید u و متغیر t استفاده می‌کنیم که

$$y=ue^{3t/2},\qquad x=e^t.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\div\frac{dx}{dt}=\left(\frac{du}{dt}e^{3t/2}+\frac{3}{2}ue^{3t/2}\right)\div e^t,\\ &= e^{3t/2}\left(\frac{du}{dt}+\frac{3}{2}u\right),\\ y'' &= \frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\div\frac{dx}{dt}=\left(\frac{3}{2}e^{3t/2}\left\{\frac{du}{dt}+\frac{3}{2}u\right\}+e^{3t/2}\left\{\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{3}{2}\frac{du}{dt}\right\}\right)\div e^t,\\ &= e^{-t/2}\left(\frac{d^2u}{dt^2}+2\frac{du}{dt}+\frac{3}{4}u\right),\end{aligned}$$

اکنون معادله $\mathscr{E}$ را بر حسب u و t بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{3}{2}\frac{du}{dt}=\frac{1}{2u},$$

که معادله‌ای فاقد متغیر مستقل t است. پس تابع جدید $p=du/dt$ و متغیر u را به کار می‌گیریم:

$$\frac{dp}{du}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2up}.$$

چنانچه فرض شود $z=p+\frac{3}{2}u$؛ در این صورت داریم $\frac{dz}{du}=\frac{1}{2u(z-3u/2)}$ و به بیان دیگر

$$\frac{du}{dz}=u(2z-3u),$$

که یک معادله برنولی است. پس فرض می‌کنیم $u=s^{1-2}$ و مساله را برحسب s و z بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{ds}{dz}=2zs-3,$$

که یک معادله خطی مرتبه اول است. جواب آن عبارتست از $s=e^{-z^2}\left(3\int e^{z^2}\,dz+C\right)$ یا

$$e^{1/(p+3u/2)^2}=3u\int_0^{p+3u/2}e^{t^2}\,dt+Cu.$$

معادله آخر عملا روش حل تحلیلی ندارد، زیرا مطابق $p=du/dt$ که معادله حاصل غیر خطی و بسیار پیچیده است.

۱۶.۲.۲. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

1) $y^{(4)}=x,$	9) $xy=y'\ln(y'/x),$	17) $2y''=3y^2,$
2) $y''(x+2)^5=1,$	10) $2y''=y'/x+x^2/y',$	18) $y'''+y''^2=0,$
3) $y'''=x+\cos x,$	11) $y'''=\sqrt{1-y''^2},$	19) $3y'y''=2y,$
4) $y'=xy'',$	12) $y''=1+y'^2,$	20) $y''=2yy'',$
5) $xy''=(1+2x^2)y',$	13) $xy'''=y'',$	21) $y^3y''=-1,$
6) $xy''+y'=0,$	14) $y''+y'+2=0,$	22) $yy''=y'^2+y^2y',$
7) $xy''+y'=x^2,$	15) $yy''=y'^2,$	23) $2yy''=3y'^2+4y^2,$
8) $xy''\ln x=y',$	16) $y''=y'(1+y'),$	24) $y'''=3yy'.$

بخش ۳.۲ معادلات خطی مرتبه بالا

۱.۳.۲. تعریف فرض کنید $a_0(x)$، $a_1(x)$، . . . ، $a_n(x)$ و $f(x)$ توابعی بر بازه $I\subseteq\mathbb{R}$ هستند. معادله به فرم

$$\boxed{\mathscr{E}\ :\ a_n(x)y^{(n)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x),} \tag{۹.۲}$$

را **معادله دیفرانسیل خطی** می‌نامند. اگر $a_n(x)\neq 0$، n را مرتبه $\mathscr{E}$ می‌نامیم. اگر $f(x)$ بر I صفر باشد، معادله $\mathscr{E}$ را **همگن** می‌نامیم. معادله

$$\boxed{\mathscr{E}_h\ :\ a_n(x)y^{(n)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0,} \tag{۱۰.۲}$$

را **معادله همگن نظیر به** $\mathscr{E}$ می‌نامیم.

۲.۳.۲. قضیه *فرض کنید y_h جواب عمومی $\mathscr{E}_h$، y جواب عمومی $\mathscr{E}$ و y_p یک جواب خصوصی معادله $\mathscr{E}$ باشد. در این صورت $y = y_h + y_p$.*

برهان : اگر y یک جواب دلخواه معادله $\mathscr{E}$ باشد، آنگاه $y - y_p$ در معادله همگن $\mathscr{E}_h$ صدق می‌کند، زیرا

$$\begin{aligned}
a_n(x)(y-y_p)^{(n)} + \cdots + a_1(x)(y-y_p)' + a_0(x)(y-y_p) &= \\
&= \big(a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y\big) - \big(a_n(x)y_p^{(n)} + \cdots + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p\big) \\
&= f(x) - f(x) = 0.
\end{aligned}$$

به عبارت دیگر، $y - y_p$ باید به صورت یک y_h ای باشد. □

۳.۳.۲. نتیجه *برای حل معادله دیفرانسیل خطی $\mathscr{E}$ ابتدا جواب عمومی $\mathscr{E}_h$ را بدست آورده، سپس یک جواب خصوصی از $\mathscr{E}$ بدست می‌آوریم و آنگاه آنها را جمع می‌کنیم.*

بنابراین، حل مساله معادله خطی مرتبه بالا به دو مساله تقسیم می‌گردد:

۱) مساله حل یک معادله خطی مرتبه بالای همگن و

۲) مساله یافتن یک جواب خصوصی معادله مفروض.

مساله اول در قالب موارد بسیار ساده حل می‌شود، ولی برای حل مساله دوم فصول متعددی ظاهر می‌گردد که هر یک دامنه‌ای از توابع $f(x)$ را پوشش می‌دهد.

۴.۳.۲. تعریف فرض کنید $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ توابعی بر بازه $I \subseteq \mathbb{R}$ هستند و $C_1, C_2, \cdots, C_n$ اعداد ثابت دلخواهند. تابع:

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \cdots + C_n f_n(x),$$

را یک **ترکیب خطی توابع** $f_1, f_2, \cdots, f_n$ بر بازه I می‌نامیم. ترکیب بالا را در صورتی صفر می‌گوییم که به ازای هر $x \in I$ ای $f(x) = 0$. ترکیب بالا را در صورتی بدیهی می‌گوییم که همه ضرایب آن صفر باشند: $\forall i \,:\, c_i = 0$.
در صورتی می‌گوییم توابع $f_1, f_2, \cdots, f_n$ بر I **مستقل خطی‌اند** که هر ترکیب خطی صفر آنها بدیهی باشد. به بیان دیگر

$$\forall x \in I \,:\, C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \cdots + C_n f_n(x) = 0 \implies C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0.$$

توابع را در صورتی **وابسته خطی** گوییم که مستقل خطی نباشند.

۵.۳.۲. مثال فرض کنیم $f_1 = 1$، $f_2 = x$ و $f_3 = x^2$. در این صورت f_1، f_2 و f_3 بر $I = \mathbb{R}$ مستقل خطی‌اند. زیرا اگر $f = C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3$، آنگاه اگر $f \equiv 0$، داریم:

$$\left\{\begin{array}{r} f(0) = 0, \\ f(1) = 0, \\ f(-1) = 0, \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{r} C_1(1) + C_2(0) + C_3(0) = 0, \\ C_2(1) + C_3(1) = 0, \\ C_2(-1) + C_3(1) = 0, \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{r} C_1 = 0, \\ C_2 + C_3 = 0, \\ -C_2 + C_3 = 0. \end{array}\right.$$

پس $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ و برهان تمام است.

۶.۳.۲. مثال فرض کنید $f_1 = 1$، $f_2 = \sin^2 x$ و $f_3 = \cos^2 x$. در این صورت f_1، f_2 و f_3 بر $I = \mathbb{R}$ وابسته خطی‌اند، زیرا

$$(1)f_1 + (-1)f_2 + (-1)f_3 = 0.$$

این تساوی به معنی $\sin^2 + \cos^2 x = 1$ است.

۷.۳.۲. مثال در هر خانواده از توابع که تابع صفر وجود داشته باشد، آن خانواده وابسته خطی است.

۸.۳.۲. قضیه *فرض کنید $a_0(x)$، $a_1(x)$، . . . و $a_n(x)$ توابعی پیوسته بر $I \subseteq \mathbb{R}$ هستند در این صورت n تابع مستقل خطی $f_1(x)$، $f_2(x)$، . . . و $f_n(x)$ بر I به گونه‌ای وجود دارند که جواب عمومی همگن*

$$\mathscr{E}_h : a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

برابر مجموعه ترکیبات خطی این توابع است:

$$\mathscr{S}_h : y_h = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x), \qquad c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}.$$

۹.۳.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y'' + y = 1$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h : y'' + y = 0$. ملاحظه می‌شود که توابع $y_1 = \sin x$ و $y_2 = \cos x$ جواب $\mathscr{E}_h$ هستند و مستقل خطی هستند. پس بنا به ۸.۳.۲ جواب عمومی $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_h = A\sin x + B\cos x$ که A و B اعداد دلخواهند. بعلاوه، به وضوح $y_p = 1$ در $\mathscr{E}$ صدق می‌کند. بنابراین، بنا به قضیه ۲.۳.۲ جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y = y_p + y_h = 1 + A\sin x + B\cos x,$$

که A و B اعداد ثابت دلخواهند. در این مساله $I = \mathbb{R}$.

۱۰.۳.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : x'y'' - xy' + 2y = x\ln x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $\mathscr{E} : x'y'' - xy' + 2y = 0$. توابع $f_1 = \sin(\ln x)$ و $f_2 = \cos(\ln x)$ بر $I = (0;\infty)$ جواب $\mathscr{E}_h$ هستند و مستقل خطی می‌باشند. بعلاوه $y_p = x\ln x$ یک جواب خصوصی $\mathscr{E}$ بر I است. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y = y_p + y_h = x\ln x + A\sin(\ln x) + B\cos(\ln x).$$

۱۱.۳.۲. تمرینات در هر مورد نشان دهید که توابع داده شده مستقل خطی‌اند:

1) $y_1 = 1, \quad y_2 = e^x, \quad y_3 = e^{-x}, \qquad I = \mathbb{R},$
2) $y_1 = \tan x, \quad y_2 = \cot x, \qquad I = (0;\pi/2),$
3) $y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x, \quad y_3 = x^2e^x, \quad y_4 = x^3e^x, \qquad I = \mathbb{R},$
4) $y_1 = \sin x, \quad y_2 = \sin 2x, \quad y_3 = \sin 3x, \qquad I = \mathbb{R}.$

۵) نشان دهید که اگر در خانواده‌ای دو تابع مضربی از هم باشند، آن خانواده از توابع وابسته خطی هستند.

بخش ۴.۲ رونسکی و گرامی

اغلب تحقیق استقلال توابع کار وقت گیری است. دو راه برای ساده‌تر شدن این کار وجود دارد که توسط رونسکی و گرامی مطرح شده است.

۱.۴.۲. تعریف فرض کنید $y_1, y_2, \cdots, y_n$ توابعی بر $I \subseteq \mathbb{R}$ هستند. منظور از **رونسکی** این توابع، دترمینان

$$\boxed{W(y_1, y_2, \cdots, y_n) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.} \qquad (۱۱.۲)$$

می‌باشد. حاصل تابعی از x است که بر I تعریف می‌گردد.

۲.۴.۲. قضیه (قضیه لزوم) *فرض کنید $y_1, y_2, \cdots, y_n$ بر بازه I وابسته خطی هستند. در این صورت، رونسکی این توابع بر I متحد با صفر است. به بیان دیگر، اگر رونسکی این توابع بر I متحد صفر نباشد (یعنی، در لااقل یک $x_0 \in I$ ای مخالف صفر باشد) در این صورت این توابع مستقل خطی هستند.*

۳.۴.۲. مثال فرض کنید $y_1 = e^{ax}$، $y_2 = e^{bx}$ و $y_3 = e^{cx}$. در چه صورت این توابع مستقل خطی‌اند؟

حل: ابتدا رونسکی این توابع را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2, y_3) &= \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} & e^{cx} \\ ae^{ax} & be^{bx} & ce^{cx} \\ a^2e^{ax} & b^2e^{bx} & c^2e^{cx} \end{vmatrix} \\
&= e^{ax}e^{bx}e^{cx}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\
&= e^{(a+b+c)x}(a-b)(b-c)(c-a).
\end{aligned}$$

پس اگر حتی به ازای یک $x_0 \in \mathbb{R}$ ای قرار باشد رونسکی این سه تابع صفر شود، لازم است که حاصلضرب $(a-b)(b-c)(c-a)$ صفر شود. یعنی $a = b$ یا $b = c$ یا $a = c$. یعنی، اگر این سه عدد a، b و c متفاوت باشند، آنگاه این سه تابع مستقل خطی هستند. بالعکس، روشن است که اگر برخی از این سه عدد a، b و c با هم برابر باشند، آنگاه توابع نظیر یکی می‌شوند و لذا مجموعه آنها وابسته خطی می‌شود.

۴.۴.۲. مثال نشان دهید توابع زیر به بازه $I = [0; 1]$ مستقل خطی هستند در حالی که رونسکی آنها بر این بازه صفر است. به بیان دیگر، شرط لازم برای وابستگی این است که رونسکی متحد با صفر باشد و این شرط کافی نیست:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1/2 \text{ اگر } \\ (x-1/2)^2 & 1/2 < x \le 1 \text{ اگر } \end{cases} \\
y_2(x) &= \begin{cases} (x-1/2)^2 & 0 \le x \le 1/2 \text{ اگر } \\ 0 & 1/2 \le x \le 1 \text{ اگر } \end{cases}
\end{aligned}$$

حل: با توجه به تعریف رونسکی داریم:

$$W(y_1, y_2) = \begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & (x-1/2)^2 \\ 0 & 2(x-1/2) \end{vmatrix} = 0 & 0 \le x \le 1/2 \text{ اگر } \\ \begin{vmatrix} (x-1/2)^2 & 0 \\ 2(x-1/2) & 0 \end{vmatrix} = 0 & 1/2 \le x \le 1 \text{ اگر } \end{cases}$$

از طرفی اگر c_1 و c_2 اعدادی باشند که

$$f(x) := c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

بر I متحد صفر باشند، در این صورت با انتخاب $x = 1/4$ و $x = 3/2$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} f(1/2) = 0, \\ f(3/2) = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2(1/4-1/2)^2 = 0, \\ c_1(3/4-1/2)^2 = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ c_1 = 0. \end{cases}$$

پس این توابع مستقل خطی هستند.

۵.۴.۲. قضیه (قضیه کفایت) *فرض کنید $y_1, y_2, \cdots, y_n$ توابعی بر بازه I هستند و همگی جواب یک معادله دیفرانسیل خطی همگن هستند. اگر به ازای هر $x \in I$ ای رونسکی این توابع صفر باشد، آنگاه توابع مذکور بر I وابسته خطی هستند. بعلاوه، اگر رونسکی این توابع در یک نقطه از I صفر باشد، آنگاه بر کل I صفر است.*

۶.۴.۲. مثال توابع $y_0 = (x+1)^2$، $y_1 = 1$، $y_2 = x$ و $y_3 = x^2$ جواب معادله $\mathscr{E} : y^{(3)} = 0$ هستند. بعلاوه

$$W(y_0, y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} (x-1)^2 & 1 & x & x^2 \\ 2(x+1) & 0 & 1 & 2x \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

پس این توابع وابسته خطی هستند.

۷.۴.۲. مثال توابع $y_1 = 1$، $y_2 = \sin 2x$ و $y_3 = (\sin x - \cos x)^2$ جواب معادله $\mathscr{E} : y''' + 4y' = 0$ هستند. بعلاوه

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & \sin 2x & (\sin x - \cos x)^2 \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \\ 0 & 4\sin 2x & 4\sin 2x \end{vmatrix} = 0.$$

در نتیجه، این سه تابع وابسته خطی هستند.

۸.۴.۲. قضیه *فرض کنید $y = y_1(x)$ و $y = y_2(x)$ توابعی بر $I = [a,b]$ هستند. تعریف می‌کنیم:*

$$\boxed{\langle y_1, y_2 \rangle := \int_a^b y_1(x) y_2(x)\, dx.}$$

اگر $y_1, y_2, \cdots, y_n$ توابعی بر I باشند، دراین صورت ***گرامی*** *این توابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\boxed{\Gamma(y_1, y_2, \cdots, y_n) := \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_2, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_1 \rangle \\ \langle y_1, y_2 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_1, y_n \rangle & \langle y_2, y_n \rangle & \cdots & \langle y_n, y_n \rangle \end{vmatrix}.} \quad (۱۲.۲)$$

۹.۴.۲. قضیه *فرض کنید توابع $y_1, y_2, \cdots, y_n$ بر بازه $I \subseteq \mathbb{R}$ تعریف شوند. در این صورت شرط لازم و کافی برای اینکه توابع مفروض بر I مستقل خطی باشند این است که گرامی آنها بر I مخالف صفر باشد.*

۱۰.۴.۲. مثال نشان دهید توابع $y_1 = x$ و $y_2 = 2x$ بر بازه $I = [0,1]$ وابسته خطی هستند.

حل: با توجه به ۷-۴-۲ داریم:

$$\begin{aligned} \langle y_1, y_1 \rangle &= \int_0^1 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}, \\ \langle y_1, y_2 \rangle &= \langle y_2, y_1 \rangle = \int_0^1 2x^2\, dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}, \\ \langle y_2, y_2 \rangle &= \int_0^1 4x^2\, dx = 4\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\Gamma(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_1, y_2 \rangle \\ \langle y_2, y_1 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

۱۱.۴.۲. مثال نشان دهید توابع $y_1 = 1$، $y_2 = \sin x$ و $y_3 = \cos x$ بر $I = [0, 2\pi]$ مستقل خطی هستند.

حل: به کمک ۷-۴-۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\Gamma(y_1, y_2, y_3) &= \begin{vmatrix} \int_0^{2\pi} 1dx & \int_0^{2\pi} \sin x dx & \int_0^{2\pi} \cos x dx \\ \int_0^{2\pi} \sin x dx & \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx & \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx \\ \int_0^{2\pi} \cos x dx & \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx & \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x\Big|_0^{2\pi} & -\cos x\Big|_0^{2\pi} & \sin x\Big|_0^{2\pi} \\ -\cos x\Big|_0^{2\pi} & \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{2\pi} & \dfrac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{2\pi} \\ \sin x\Big|_0^{2\pi} & \dfrac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{2\pi} & \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{2\pi} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{vmatrix} = 2\pi^3 \neq 0.
\end{aligned}$$

۱۲.۴.۲. تمرینات در هر مورد مشخص کنید که دسته توابع داده شده مستقل خطی‌اند یا خیر.

1) $2,\ x,$
2) $1,\ 2,\ x,\ x^2,$
3) $\log_a x,\ \log_a x^2,$
4) $e^x,\ e^{-x},\ xe^x,$
5) $1,\ \arcsin x,\ \arccos x,$
6) $5,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x,$
7) $2,\ \sin^2 x,\ \cos 2x,$
8) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x,$
9) $e^{-x}\sin x,\ e^{-x}\cos x,$
10) $\sin x,\ \sin(x + \pi/4).$

در هر مورد نشان دهید رونسکی توابع داده شده صفر است، ولی وابسته خطی نیستند:

11) $y_1(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \le x \le 0 \ \text{اگر} \\ 0 & 0 \le x \le 1 \ \text{اگر} \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \ \text{اگر} \\ x^2 & 0 \le x \le 1 \ \text{اگر} \end{cases}$

12) $y_1(x) = \begin{cases} x^3 & -2 \le x \le 0 \ \text{اگر} \\ 0 & 0 \le x \le 1 \ \text{اگر} \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} 0 & -2 \le x \le 0 \ \text{اگر} \\ x^2 & 0 \le x \le 1 \ \text{اگر} \end{cases}$

۱۴) نشان دهید که اگر A خانواده‌ای از توابع مستقل خطی بر I باشد و B زیرمجموعه‌ای از A باشد، در این صورت B نیز مستقل خطی است.

بخش ۵.۲ معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

۱.۵.۲. تعریف معادله دیفرانسیل به شکل

$$\mathscr{E}\ :\ a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f,$$

که $a_1, a_2, \cdots, a_n$ اعداد ثابتند و f یک تابع است **معادله خطی با ضرایب ثابت** نامیده می‌شود. اگر $f \equiv 0$ معادله $\mathscr{E}$ را **معادله خطی همگن با ضرایب ثابت** می‌نامند.

۲.۵.۲. تعریف فرض کنید که $D = \dfrac{d}{dx}$ **عملگر مشتقگیری** نسبت به x است. در واقع D تابعی از مجموعه توابع بتوی مجموعه توابع است: $D(f) = f'$. حاصل دو بار به کارگیری D را با نماد D^2 نشان می‌دهیم. به صورت مشابه D^n قابل تعریف است:

$$D(f) = f, \qquad D^2(f) = f'', \qquad D^3(f) = f''', \qquad \ldots.$$

ترکیب خطی با ضرایب تابعی نیز می‌شود تعریف نمود: اگر $a_0(x)$، $a_1(x)$، . . . و $a_n(x)$ توابعی مفروض باشند، در این صورت

$$\boxed{L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0,} \qquad (۲.۱۳)$$

یک عملگر است و به ازای هر تابع f و هر متغیر x به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$(Lf)(x) = a_n(x) f^{(n)} + a_{n-1}(x) f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x) f'(x) + a_0(x) f(x).$$

۲.۵.۳. مثال $L = xD^2 - D + 1$ یک عمگر است. اگر $y = f(x)$ یک تابع باشد، آنگاه

$$L(f) = xf'' - f' + f.$$

مثلا اگر $y = \sin x$، آنگاه:

$$L(y) = x(-\sin x) - \cos x + \sin x.$$

۲.۵.۴. مثال اگر $L = xD - 1$ و $M = D - x$، آنگاه $ML \neq LM$ زیرا اگر f تابعی دلخواه باشد، در این صورت:

$$\begin{aligned}
(ML)(f) &= M(L(f)) = M(xf' - f)\\
&= (xf' - f)' - x(xf' - f) = xf'' - x^2 f' + xf,\\
(LM)(f) &= L(M(f)) = L(f' - xf)\\
&= x(f' - xf')' - (f' - xf) = xf'' - (1 + x^2) f',
\end{aligned}$$

که با هم متفاوتند.

۲.۵.۵. قضیه *اگر L و M عملگر خطی باشند و a و b توابع دلخواه، در این صورت $aL + bM$، LM و ML نیز عملگر خطی هستند. بعلاوه، اگر L و M با ضرایب ثابت باشند، آنگاه $LM = ML$.*

۲.۵.۶. تعریف در صورتی می‌گوییم عملگر خطی با ضرایب ثابت L **تجزیه پذیر** است که دو عملگر خطی با ضرایب ثابت M و N چنان یافت گردند که $L = MN$ و بعلاوه، M و N هیچ یک به صورت عدد ثابت نباشند. اگر چنین عملگرهایی به L نتوان نظیر کرد، می‌گوییم L یک عملگر خطی با ضرایب ثابت **اول** است.

۲.۵.۷. قضیه *فرض کنید L یک عملگر خطی با ضرایب ثابت است:*

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0.$$

در این صورت، شرط لازم و کافی برای اول بودن L آن است که

(الف) یا $n = 1$ و $L = a_1 D + a_0$ با $a_1 \neq 0$ و

(ب) یا اینکه $n = 2$ و $L = a_2 D^2 + a_1 D + _0$ با $a_2 \neq 0$ و $\Delta = a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$.

هر عملگر با ضرایب ثابت یا اول است و یا به صورت یکتا به شکل حاصل ضربی از عملگرهای اول قابل تجزیه است. این یکتایی در حد ضریب ثابت در عملگر است و نیز ترتیب عوامل در تجزیه است.

۸.۵.۲. مثال عملگرهای D، $D+1$، D^2+1، D^2+D+1 و D^2-2D+2 اولند، عملگرهای D^2، D^2+5D+6 و D^3+1 و D^4-1 اول نیستند، زیرا:

$$\begin{aligned} D^2 &= D.D, \\ D^2+5D+6 &= (D+2)(D+3), \\ D^3+1 &= (D+1)(D^2-D+1), \\ D^3-1 &= (D^2-1)(D^2+1) = (D-1)(D+1)(D^2+1). \end{aligned}$$

۹.۵.۲. مثال فرض کنید $L = D^2-1$. در این صورت می‌توان نوشت:

$$L = (D-1)(D+1) = (D+1)(D-1) = 2\left(\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}D-1\right).$$

اما همه این تجزیه‌ها را یکی می‌دانیم. زیرا، دومی تغییر ترتیب داده شده اولی است و سومی با ضرب و تقسیم یک عامل عددی حاصل شود است. این مثال یکتایی تجزیه ادعا می‌شود در قضیه ۶-۵-۲ را توضیح می‌دهد.

۱۰.۵.۲. مثال عملگر $L = D^4+1$ اول نیست. زیرا، می‌توان نوشت:

$$L = (D^2+1)-3D^2 = \left(D^2+\sqrt{2}D+1\right)\left(D^2-\sqrt{2}D+1\right).$$

۱۱.۵.۲. تمرینات در هر مورد مشخص کنید که آیا عملگر داده شده اول است یا خیر. در صورتی که اول نباشد، آن را به حاصلضربی از عوامل اول تجزیه کنید.

1) $L = D^2$, 2) $L = D^2+D$,
3) $L = D^2+4$, 4) $L = D^2-2D-3$,
5) $L = D^3+4D^2+13D$, 6) $L = D^5+9D^3$,

در هر مورد عملگر دیفرانسیلی نظیر به معادله خطی داده شده را تعیین و سپس آن را تجزیه کنید.

7) $y'''-2y''=0$, 8) $y'''-3y''-2y'=0$,
9) $2y''-3y'-5y=0$, 10) $y'''+2y''-y'-2y=0$,
11) $y'''-8y=0$, 12) $y^{(4)}+y=0$.

۱۲.۵.۲. تعریف فرض کنید:

$$\mathscr{E} \; : \; a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^2 + a_0 y = f,$$

یک معادله خطی با ضرایب ثابت مرتبه n ام باشد. چند جمله‌ای

$$\boxed{p(\lambda) := a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,} \tag{۱۴.۲}$$

را **چند جمله‌ای مشخصه** $\mathscr{E}$ می‌نامند. معادله $p(\lambda)=0$ را با نماد $C_{\mathscr{E}}$ نشان داده و **معادله مشخصه** $\mathscr{E}$ می‌نامند:

$$\boxed{C_{\mathscr{E}} \; : \; a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.} \tag{۱۵.۲}$$

در واقع $p(\lambda)$ همان عملگر خطی نظیر به $\mathscr{E}$ است که به جای D^m از λ^m استفاده شده است!

۱۳.۵.۲. قضیه (قضیه اساسی معادلات همگن با ضرایب ثابت) *فرض کنیم:*

$$\mathscr{E} \; : \; a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

یک معادله خطی همگن و با ضرایب ثابت است و $C_{\mathscr{E}}$ معادله مشخصه نظیر به $\mathscr{E}$ است. فرض کنید معادله $C_{\mathscr{E}}$ را حل کرده و به جوابهای به شرح زیر رسیده‌ایم:

۱) $\lambda = \lambda_1$ با تکرار m_1، $\lambda = \lambda_2$ با تکرار m_2، $\cdots$ و $\lambda = \lambda_k$ با تکرار m_k.

۲) $\lambda = \alpha_i \pm i\beta_1$ با تکرار p_1، $\lambda = \alpha_i \pm i\beta_2$ با تکرار p_2، و $\cdots$ و $\lambda = \alpha_\ell \pm i\beta_\ell$ با تکرار p_ℓ.

روشن است که بنا به قضیه اساسی جبر بایستی $m_1 + \cdots + m_k + 2(p_1 + \cdots + p_l) = n$. در این صورت، خانواده‌ای از توابع به شرح زیر معرفی می‌کنیم:

$$\begin{array}{lllll}
e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & x^2e^{\lambda_1 x}, & \cdots, & x^{m-1}e^{\lambda_1 x},\\
e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & x^2e^{\lambda_2 x}, & \cdots, & x^{m-1}e^{\lambda_2 x},\\
 & & \vdots & & \\
e^{\lambda_k x}, & xe^{\lambda_k x}, & x^2e^{\lambda_k x}, & \cdots, & x^{m_k-1}e^{\lambda_k x},\\
\\
e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x), & xe^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x), & \cdots, & x^{p_1}e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x), &\\
e^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x), & xe^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x), & \cdots, & x^{p_1}e^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x), &\\
\\
e^{\alpha_2 x}\cos(\beta_2 x), & xe^{\alpha_2 x}\cos(\beta_2 x), & \cdots, & x^{p_1}e^{\alpha_2 x}\cos(\beta_2 x), &\\
e^{\alpha_2 x}\sin(\beta_2 x), & xe^{\alpha_2 x}\sin(\beta_2 x), & \cdots, & x^{p_1}e^{\alpha_2 x}\sin(\beta_2 x), &\\
 & & \vdots & & \\
e^{\alpha_\ell x}\cos(\beta_\ell x), & xe^{\alpha_\ell x}\cos(\beta_\ell x), & \cdots, & x^{p_\ell}e^{\alpha_\ell x}\cos(\beta_\ell x), &\\
e^{\alpha_\ell x}\sin(\beta_\ell x), & xe^{\alpha_\ell x}\sin(\beta_\ell x), & \cdots, & x^{p_\ell}e^{\alpha_\ell x}\sin(\beta_\ell x). &
\end{array} \tag{۱۶.۲}$$

در این صورت توابع مشروح در بالا مستقل خطی‌اند و هر جواب از $\mathscr{E}$ به صورت ترکیب خطی از آنها قابل بیان است.

۱۴.۵.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y''' - 2y'' - 3y' = 0$ را حل کنید.

حل: در این مساله $C_{\mathscr{E}} : \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$ که در نتیجه:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda(\lambda+1)(\lambda-3) = 0.$$

پس $p(\lambda)$ دارای ریشه‌های حقیقی متمایز $\lambda_1 = 0$، $\lambda_2 = -1$ و $\lambda_3 = 3$ است که هر سه با تکرار یک هستند: $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. پس بنا به ۱۳.۵.۲، توابع

$$e^{0x} = 1, \quad e^{(-1)x} = e^{-x}, \quad e^{3x},$$

جوابهای مستقل خطی $\mathscr{E}$ هستند و به علاوه جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = A + Be^{-x} + Ce^{3x},$$

که A، B و C اعداد ثابت دلخواهند.

۱۵.۵.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y''' + 2y'' + y' = 0$ را حل کنید.

حل: در این مساله $C_{\mathscr{E}} : \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$. ملاحظه می‌شود که

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = (\lambda+1)2 = 0.$$

پس $\lambda_1 = 0$ با تکرار $m_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$ با تکرار $m_2 = 2$ ریشه‌های $C_{\mathscr{E}}$ هستند. بنابراین مطابق ۱۳.۵.۲ توابع

$$e^{0x} = 1, \quad e^{-1x} = e^{-x}, \quad xe^{-1x} = xe^{-x},$$

جوابهای مستقل خطی $\mathscr{E}$ هستند و جواب عمومی آن عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = A + Be^{-x} + Cxe^{-x},$$

که A، B و C اعداد ثابت دلخواهند.

۱۶.۵.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y''' + 4y'' + 13y' = 0$ را حل کنید.

حل: در این مساله $C_{\mathscr{E}}: \lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$. برای حل $C_{\mathscr{E}}$ ملاحظه می‌شود:

$$\lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \quad \text{یا} \quad \lambda = -2 \pm i,$$

که هر دو با تکرار یک هستند. پس بنا به ۱۳.۵.۲ توابع

$$e^{0x} = 1, \quad e^{-2x}\cos 3x, \quad xe^{-2x}\sin 3x,$$

مستقل خطی‌اند و جواب $\mathscr{E}$ هستند و بعلاوه جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}: y = A + Be^{-2x}\cos 3x + Ce^{-2x}\sin 3x,$$

که A، B و C اعداد ثابت دلخواهند.

۱۷.۵.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y^{(5)} - 2y^{(4)} + 3y'''4y'' + y' - 2y = 0$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه این معادله دیفرانسیل عبارتست از

$$C_{\mathscr{E}}: \lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

که آن را به صورت $(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0$ می‌توان نوشت. پس، $\lambda = 2$ یک ریشه با تکرار یک و $\lambda = 0 \pm i$ دو ریشه مختلط مزدوج با تکرار دو هستند. بنابراین، مطابق ۱۳.۵.۲ توابع

$$\begin{aligned} &e^{2x}, \quad e^{0x}\cos 1x = \cos x, \quad e^{0x}\sin 1x = \sin x, \\ &xe^{0x}\cos 1x = x\cos x, \quad xe^{0x}\sin 1x = x\sin x, \end{aligned}$$

جوابهای مستقل خطی $\mathscr{E}$ هستند و جواب عمومی آن عبارتست از

$$\mathscr{S}: y = A + B\cos x + C\cos x + Dx\cos x + Ex\sin x,$$

که A، B، C، D و $\mathscr{E}$ اعداد ثابت دلخواهند.

۱۸.۵.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه این معادله عبارتست از

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} \quad &: \quad \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0, \\ &: \quad (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0. \end{aligned}$$

که ریشه‌های آن $\lambda = -1 \pm i$ با تکرار دو هستند. پس بنا به ۱۳.۵.۲ توابع

$$e^{-x}\cos x, \quad e^{-x}\sin x, \quad xe^{-x}\cos x, \quad xe^{-x}\sin x,$$

جوابهای مستقل خطی $\mathscr{E}$ هستند و جواب عمومی آن عبارتست از

$$\mathscr{S}: y = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x + Cxe^{-x}\cos x + Dxe^{-x}\sin x,$$

که A، B، C و D اعداد ثابت دلخواهند.

۱۹.۵.۲. تمرینات در هر مورد معادله خطی همگن داده شده را حل کنید:

1) $y'' = y,$	2) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,$
3) $3y'' - 2y' - 8y = 0,$	4) $y'' + 2y' + y = 0,$
5) $y^{(10)} = 0,$	6) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0,$
7) $y''' - 8y = 0,$	8) $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0,$
9) $y^{(4)} + 4y''' + 15y'' + 12y' = 0,$	10) $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0,$
11) $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 5y''' - 6y' - 4y = 0,$	12) $y^{(8)} + 4y^{(6)} + 6y^{(4)} + 4y'' + y = 0.$

بخش ۲.۶ یافتن معادله خطی همگنی که مجموعه جوابش مفروض است

از قضیه ۲.۵.۱۳ برای روند برعکس می‌توان استفاده کرد. یعنی می‌توان با داشتن چند تابع مستقل خطی، معادله خطی همگن را ساخت که توابع مفروض جواب آن باشند. اصول این کار در مثالهای زیر مشهود است.

۲.۶.۱. مثال معادله‌ای بیابید که $y_1 = 1$، $y_2 = e^x$ و $y_3 = e^{-x}$ جواب آن باشند.

حل: روشن است که توابع داده شده مستقل خطی هستند. به علاوه می‌توان نوشت $y_1 = e^{0x}$ پس معادله مورد نظر $\mathscr{E}$ باید دارای معادله مشخصه‌ای باشد با سه ریشه حقیقی $\lambda_1 = 0$، $\lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = -1$ که هر یک با تکرار $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ هستند. بنابراین

$$C_{\mathscr{E}} : (\lambda - 0)(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0 \quad : \lambda^3 - \lambda = 0.$$

بنابراین عملگر L نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $L = D^3 - D$ و خود معادله عبارتست از

$$\mathscr{E} : Ly = 0 \quad : y''' - y' = 0.$$

۲.۶.۲. مثال معادله‌ای بیابید که $y_1 = 1$، $y_2 = x^2$ و $y_3 = e^x$ جواب آن باشند.

حل: این توابع مستقل خطی‌اند (تمرین). به علاوه می‌توان نوشت:

$$y_1 = e^{0x}, \qquad y_2 = x^2 e^{0x}.$$

پس معادله مشخصه $C_{\mathscr{E}}$ معادله $\mathscr{E}$ که به دنبال آن هستیم. دارای ریشه $\lambda_1 = 1$ با تکرار یک (نظیر به y_3) و ریشه $\lambda_2 = 0$ با تکرار سه (نظیر به y_1 و y_2) می‌باشد. بنابراین:

$$C_{\mathscr{E}} : (\lambda - 0)^3(\lambda - 1) = 0 \quad : \lambda^4 - \lambda^3 = 0.$$

پس عملگر نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $L = D^4 - D^3$ و خود معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$Ly = 0 \quad : y^{(4)} - y''' = 0.$$

۲.۶.۳. مثال معادله‌ای بیابید که $y_1 = \sin 2x$ و $y_2 = \cos 2x$ جواب آن باشند.

حل: این توابع مستقل خطی‌اند (چرا؟). معادله مشخصه $C_{\mathscr{E}}$ معادله مورد نظر $\mathscr{E}$ می‌بایستی دارای ریشه‌های مختلط مزدوج $\lambda = 0 \pm 2i$ باشد، زیرا

$$y_1 = e^{0x}\sin(2x), \qquad y_2 = e^{0x}\cos(2x).$$

چون این ریشه‌ها با تکرار یک هستند، بنابراین

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} \quad &: \quad (\lambda - (0+2i))(\lambda - (0-2i)) = 0 \\ &: \quad \lambda - 2(0)\lambda + ((0)^2 + (2)^2) = 0 \; : \; \lambda^2 + 4 = 0 \end{aligned}$$

پس عملگر L نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $L = D^2 + 4$ و معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\mathscr{E} : y'' + 4y = 0.$$

۴.۶.۲. مثال معادله‌ای بیابید که $y_1 = x^2 \sin x$، $y_2 = -\cos x$ و $y_3 = 2x\cos x$ جوابهای آن باشند.

حل: این توابع مستقل خطی هستند و به علاوه می‌توان نوشت:

$$y_1 = x^2 e^{0x}\sin(10x), \quad y_2 = (-1)e^{0x}\cos(10x), \quad y_3 = (3)x^1 e^{0x}\cos(1,x).$$

پس معادله مشخصه $C_{\mathscr{E}}$ معادله مورد نظر $\mathscr{E}$ دارای جوابهای مختلط $0 \pm i$ با تکرار سه است. بنابراین $C_{\mathscr{E}}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} \quad &: \quad \{(\lambda-(0+i))(\lambda-(0-i))\}^3 = 0, \\ &: \quad \{\lambda^2+1\}^3 = 0, \\ &: \quad \lambda^6 + 3\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

پس عملگر L بیه به $\mathscr{E}$ عبارتست از $L = D^6 + 3D^4 + 4D^2 + 1$ و معادله $\mathscr{E}$ نیز چنین است:

$$\mathscr{E} : y^6 + 3y^{(4)} + 3y^{(2)} + y = 0.$$

۵.۶.۲. مثال معادله‌ای بیابید که توابع زیر جواب آن باشند:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = x\sin 2x, \quad y_4 = 2e^x - xe^{-x} + \sin 2x.$$

حل: جمله $2e^x$ در y_4 را با y_1 می‌توان تولید کرد. بعلاوه، اگر $y_4 = x^2e^{-x}$ جواب معادله‌ای باشد، آنگاه توابع e^{-x} و xe^{-x} نیز جواب آن هستند و لذا جمله دوم در y_4 را نیز می‌توان با حضور y_2 منتفی است. پس، در بحث لازم نیست y_4 گنجانده شود. از طرفی y_1 نظیر به $\lambda_1 = 1$ با تکرار یک، y_2 نظیر $\lambda_2 = -1$ با تکرار ۳ و y_3 نظیر $\lambda_3 = 0 \pm 2i$ با تکرار دو است. پس معادله مشخصه $C_{\mathscr{E}}$ معادله مورد نظر $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$C_{\mathscr{E}} : (\lambda - 1^1(\lambda+1)^3(\lambda^2+4)^2 = 0.$$

و لذا عملگر L نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} L &= (D-1)(D+1)^3(D^2+4)^2, \\ &= (D^2-1)(D^2+2D+1)(D^4+8D^2+14). \end{aligned}$$

معادله $\mathscr{E}$ به صورت $Ly = 0$ می‌باشد.

۶.۶.۲. تمرینات در هر مورد معادله‌ای خطی و با ضرایب ثابت بیابید که توابع داده شده جواب آن باشند و مرتبه معادله حداقل مقدار ممکن باشد.

1) $e^{-x},\ e^x,$	2) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x,$
3) $1,\ e^x,$	4) $e^x,\ xe^x,\ e^{2x},$
5) $e^{-2x},\ xe^{-2x},$	6) $1,\ x^3,\ e^x,$
7) $e^{2x},\ e^{2x}\sin x,\ \cos 4x,$	8) $1,\ \sin x,\ \cos x,$
9) $10,\ xe^x,\ -x^2e^x,$	10) $1+x,\ x^2,\ e^{-x}.$

در هر مورد معادله خطی همگن با ضرایب ثابت و با درجه حداقل ۲ را طوری بیابید که رتبه‌های آن به شرح داده شده باشند:

۱۱) $\lambda_1 = 0$ با تکرار دو و $\lambda_2 = -1$ با تکرار یک.

۱۲) $\lambda_1 = 1$ با تکرار سه و $\lambda_2 = 1 \pm i$ با تکرار یک.

۱۳) $\lambda_1 = 2 \pm i$ با تکرار دو.

۱۴) $\lambda_1 = 0 \pm 2i$ با تکرار سه و $\lambda_2 = 2$ با تکرار یک.

۱۵) $\lambda_1 = \pm i$ با تکرار دو و $\lambda_2 = 1 \pm 2i$ با تکرار دو.

۱۶) نشان دهید که اگر $y_n, \cdots, y_2, y_1$ توابع مستقل خطی باشند، آنگاه معادله همگنی که از حداقل مرتبه است و این توابع جواب آن هستند، عبارتست از $W(y, y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$. به بیان دیگر

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & \cdots & y_n \\ y' & y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

۱۷) نشان دهید معادله مشخصه معادله همگنی که $x^n e^x \cos bx$ و $x^n e^{ax} \sin bx$ در آن صدق می‌کنند عبارتست از $\left(\lambda^2 - 2\lambda + a^2 + b^2\right)^{n+1} = 0$.

بخش ۷.۲　روش ضرایب نامشخص برای یافتن جواب خصوصی

در این قسمت روشی مطرح می‌گردد که طی آن برای معادلات خطی با ضرایب ثابتی که طرف ثانی آنها به شکل:

$$ax^n e^{bx} \cos cx, \qquad ax^n e^{bx} \sin cx,$$

و یا مجموع آنها است، جواب خصوصی تعیین می‌کنیم.

۱.۷.۲. روش حل　فرض کنید $\mathscr{E} : Ly = f$ یک معادله خطی با ضرایب ثابت باشد و M عملگری باشد که $Mf = 0$. در این صورت $LMy_p = 0$ یعنی y_p جواب خصوصی $\mathscr{E}$ یک جواب از معادله همگن $\mathscr{E}_p : LMy = 0$ است. بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}_p$ را یافته و جواب عمومی $\mathscr{E}_h$ را از آن کم می‌کنیم. پس جملات مانده را به عنوان کاندیدی برای y_p انتخاب می‌کنیم. اکنون به منظور یافتن ضرایب مجهول در y_p آن را در معادله $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم.

۲.۷.۲. مثال　معادله $\mathscr{E} : y'' + y = x + 1$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h : y'' + y = 0$ که عملگر نظیر به آن $L = D^2 + 1$ است. معادله مشخصه $\mathscr{E}$ عبارتست از $\lambda^2 + 1 = 0$ که دارای ریشه‌های $0 \pm 1i$ است، پس جواب عمومی $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_n = A \sin x + B \cos x$. از $f = x + 1$ جواب معادله $\mathscr{E}' : y'' = 0$ است که عملگر نظیر به آن $M = D^2$ است. بنابراین، اگر y_p یک جواب خصوصی $\mathscr{E}$ باشد، باید MLy_p. اما جواب عمومی معادله $\mathscr{E}_p : MLy = 0$. باید بدست آید. معادله مشخصه آن عبارتست از

$$C_{\mathscr{E}p} : \lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i.$$

پس جواب عمومی آن به شکل $Ax + B + C \sin x + D \cos x$ است. اما جملات $\cos x$ و $\sin x$ در y_p چنین است: $y_p = Ax + B$. یافتن B و A این تابع y_p را در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم:

$$(0) + (Ax + B) = x + 1.$$

پس $A = 1$ و $B = 1$ بنابراین $y_p = x + 1$ و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = y_p + y_h = x + 1 + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

۳.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E}\ :\ y''-5y'+6y=\sin x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h=Ly=0$ که $L=D^2-5D+0$. معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}}\ :\ \lambda^2-5\lambda+6=0$ است که ریشه‌های آن $\lambda_1=2$ و $\lambda_2=3$ هستند. بنابراین، جواب عمومی همگن عبارتست از: $y_h=Ae^{2x}+Be^{3x}$.
از طرفی $f=\sin x$ جواب معادله $y''+y=0$ است که عملگر نظیر به آن $M=D^2+1$ است. پس، جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ در معادله $\mathscr{E}_p\ :\ LMy=0$ صدق می‌کند. اما معادله مشخصه نظیر به $\mathscr{E}_p$ عبارتست از $(D^2-5D+6)(\lambda^2+1)=0$ که ریشه‌های آن i، $-i$، ۳ و ۲ هستند. بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}_p$ عبارتست از

$$A\sin x+B\cos x+Ce^{2x}+De^{3x}.$$

اما جملات e^{2x} و e^{2x} در y_k ظاهر شده‌اند، پس شکل کلی جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ عبارتست از $y_p=A\sin x+B\cos x$. به منظور یافتن ثابتهای A، B تابع y_p را در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}&(-A\sin x-B\cos x)-5(A\cos x-B\sin x)+6(A\sin x+B\cos x)=\sin x\\ &\Rightarrow\begin{cases}5A+5B=1\\ A+5B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-5B\\ -20B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/4\\ B=-1/20\end{cases}\end{aligned}$$

پس $y_p=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{20}\cos x$ جواب خصوصی $\mathscr{E}$ است. در نتیجه، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}\ :\ y=y_p+y_h=\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{20}\cos x+C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$$

۴.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E}\ :\ y''-4y=x+e^{-x}$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h\ :\ Ly=0$ که $L=D^2-4$ و معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}}\ :\ \lambda^2=4$ است.
پس، جواب عمومی معادله همگن $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_h=Ae^{-2x}+Be^{2x}$.
از طرفی $f_1=e^{-x}$ در معادله $(D+1)y=0$ و $f_1=x$ در معادله $D^2y=0$ صدق می‌کند. پس $y=f+f_2=x+e^{-x}$ در معادله $D^2(D+1)y=0$ صدق می‌کند که عملگر نظیر به آن $M=D^2(D+1)$ است. بنابراین خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ در معادله همگن $\mathscr{E}_p\ :\ LMy=0$ صدق می‌کند. اما، معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}p}\ :\ \lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-2)=0$ است. پس جواب عمومی آن عبارتست از

$$A+Bx+Ce^{-x}+De^{2x}+Ee^{-2x},$$

که جملات e^{-2x},e^{2x} در y_h ظاهر شده‌اند. پس شکل کلی y_p چنین است:

$$\begin{aligned}&(0+0+Ce^{-x})-4(A+Bx+Ce^{-x})=x+e^{-x}\\ &\begin{cases}-4A=0\\ -4B=1\\ -3C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ B=-1/4\\ C=-1/3\end{cases}\end{aligned}$$

در نتیجه $y_p=-\frac{1}{4}x+-\frac{1}{3}e^{-x}$ و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}\ :\ y=y_p+y_h=-\frac{x}{4}-\frac{e^{-x}}{3}+C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$$

۵.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E}:y'''-y''=12x^2+6x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h\ :\ Ly=0$ که $L=D^3-D^2$ و معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}}\ :\ \lambda^3-\lambda^2=0$ است. پس جواب عمومی معادله همگن عبارتست از $y_h=A+Bx+Ce^x$ زیرا ریشه‌های آن $\lambda_1=0$ با تکرار ۲ و $\lambda_2=0$ با تکرار یک است.

از طرفی $f = 12x^2 + 6x$ یک جواب معادله $D^3y = 0$ است که عملگر نظیر به آن $M = D^3$ می‌باشد. پس جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ یک جواب معادله همگن $\mathscr{E}_p : LMy = 0$ است. معادله مشخصه این معادله $\mathscr{E}_p$ عبارتست از

$$C_{\mathscr{E}p} : (\lambda^3 - \lambda^2)(\lambda^3) = 0 : \lambda^5(\lambda - 1) = 0,$$

که ریشه‌های آن $\lambda_1 = 0$ با تکرار ۵ و $\lambda_2 = 1$ با تکرار یک است. پس جواب عمومی آن
$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fe^x$
است. اما جملات A، Bx و Fe^x در y_h ظاهر شده‌اند، پس صورت کلی جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$y_p = Cx^2 + Dx^3 + Ex^4.$$

به منظور یافتن ضرایب y_p آن را در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم:

$$(0 + 6D + 34Ex) - (2C + 6Dx + 12Ex^2) = 12x^2 + 6x.$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} -12E = 12, \\ 16D + 24E = 6, \\ -2C + 6D = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = -1, \\ D = 4E - 1 = -5, \\ C = 3D = -15. \end{cases}$$

بنابراین $y_p = -15 - 5x - x^2$ و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = y_p + y_h = -x^2 - 5x - 15 + C_1 + C_2x + C_3e^x.$$

۶.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y'' + y' = 4x^2e^x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h : Ly = 0$ که $L = D^2 + D$ و معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}} : \lambda^2 + \lambda = 0$ است. پس جواب عمومی معادله همگن $y_h = A + Be^{-x}$ است، زیرا ریشه‌های $C_{\mathscr{E}}$ عبارت از $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = -1$ هستند.
از طرفی $f = 4x^2e^x$ به یک ریشه $\lambda = 1$ با تکرار $m = 2 + 1$ نظیر است، پس جواب معادله $My = 0$ است که $M = (D-1)^3$. بنابراین، جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ یک جواب معادله همگن $\mathscr{E}_p : LMy = 0$ است که معادله مشخصه آن:

$$C_{\mathscr{E}p} : (\lambda^2 + \lambda)(\lambda - 1)^3 = 0 : \lambda(\lambda - 1)^3(\lambda + 1) = 0,$$

است. پس جواب عمومی $\mathscr{E}_p$ عبارتست از

$$A + Be^x + Cxe^x + Dx^2e^x + Ee^{-x},$$

که جملات A و Ee^{-x} ظاهر شده‌اند. بنابراین، شکل کلی جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$y_p = Be^x + Cxe^x + Dx^2e^x.$$

به منظور یافتن ضرایب y_p، آن را در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} &\left\{Be^x + C(2+x)e^x + D(e^x + 4x + 2)e^x\right\} + \\ &\quad + \left\{Be^x + C(x+1)e^x + D(x^2 + 2x)e^x\right\} = 4x^2e^x, \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2B + 3C + 2D = 0, \\ 2C + 6D = 0, \\ 2D = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -D - \frac{3}{2}C = 7, \\ C = -3D = -6, \\ D = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین $y_p = (2x^2 - 6x + 7)e^x$ و لذا جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = y_p + y_h = (2x^2 - 6x + 7)e^x + C_1 + C_2e^{-x}.$$

۷.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h : Ly = 0$ که $L = D^2 + 10D + 25$ و معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}} : \lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ است. پس جواب عمومی معادله همگن $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_h = Ae^{-5x} + Bxe^{-5x}$ زیرا $C_{\mathscr{E}}$ ریشه $\lambda = -5$ با تکرار ۲ دارد.
از طرفی، $f = 4e^{-4x}$ جواب معادله $(D+5)y = 0$ است که عملگر آن $M = D + 5$ می‌باشد. پس جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ در معادله همگن $\mathscr{E}_p : LMy = 0$ صدق می‌کند. اما معادله مشخصه معادله $\mathscr{E}_p$

$$C_{\mathscr{E}_p} : (\lambda+5)(\lambda^2 + 10\lambda + 25) = 0,$$

است؛ یا $(\lambda+5)^3 = 0$ که دارای ریشه $\lambda = -5$ با تکرار ۳ است. پس جواب عمومی $\mathscr{E}_p$ عبارتست از

$$Ae^{-5x} + Bxe^{-5x} + Cx^2e^{-5x},$$

که جملات Ae^{-5x}، Bxe^{-5x} در y_h حاضرند، بنابراین صورت کلی جواب خصوصی y_p عبارتست از

$$y_p = Cx^2e^{-5x}.$$

به منظور یافتن C، مقدار y_p را در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم:

$$\{(25x^2 - 20x + 2)e^{-5x} + 10(2x - 5x^2)e^{-5x} + 25x^2e^{-5x}\}C = 4e^{-5x}.$$

پس $2C = 4$ یا $C = 2$ و $y_p = 2x^2e^{-5x}$. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\mathscr{S} : y = y_p + y_h = C_1e^{-5x} + C_2xe^{-5x} + 2x^2e^{-5x}.$$

اگر در طرف ثانی یک معادله خطی با ضرایب ثابت جملاتی به شکل $ax^he^{bx}\cos cx$ و یا $ax^ne^{bx}\sin cx$ حاضر باشد، یافتن ضرایب مجهول y_p کار دشواری است، برای حل این مشکل از قضیه زیر استفاده می‌کنیم:

۸.۷.۲. قضیه *اگر $Ly = f_1(x) + if_2(x)$ یک معادله خطی با ضرایب حقیقی باشد و $y = u(x) + iv(x)$ جوابی از آن باشد، آنگاه $u(x)$ یک جواب معادله $Ly = f_1(x)$ و $v(x)$ یک جواب معادله $LY = f_2(x)$ است.*

۹.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y'' + y = x\cos x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارت از $\mathscr{E}_h : Ly = 0$ است که $L = D^2 + 1$ و معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}} : \lambda^2 + 1 = 0$ است. بنابراین، جواب عمومی معادله همگن $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_h = A\sin x + B\cos x$.
از طرفی $f = x\cos x$ به ریشه $0 \pm 1i$ با تکرار $2 = 1 + 1$ متناظر است و لذا جوابی از معادله $(D^2+1)^2y = 0$ است. عملگر این معادله $M = (D^2+1)^2$ است و لذا y_p جواب خصوصی $\mathscr{E}$ در معادله همگن $\mathscr{E}_p : LMy = 0$ است. معادله مشخصه $\mathscr{E}_p$ عبارت از

$$C_{\mathscr{E}_p} : (\lambda^2+1)^2(\lambda^2+1) = 0 : (\lambda^2+1)^3 = 0,$$

است که ریشه‌های $0 \pm 1i$ با تکرار سه دارد. بنابراین جواب عمومی $\mathscr{E}_p$ عبارتست از

$$A\sin x + B\cos x + Cx\sin x + Dx\cos x + Ex^2\sin x + Fx^2\cos x,$$

که جملات $A\sin x$ و $B\cos x$ در y_h حاضرند، پس شکل کلی جواب خصوصی y_p چنین است:

$$y_p = Cx\sin x + Dx\cos x + Ex^2\sin x + Fx^2\cos x.$$

به جای اینکه y_p را در $\mathscr{E}$ قرار دهیم، توابع y_2 و y_i را قرار می‌دهیم که:

$$\begin{cases} y_r = Dx\cos x + Fx^2\cos x = (Dx+Fx^2)\cos x, \\ y_i = Cx\sin x + Ex^2\cos x = (Cx+Ex^2)\sin x. \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که $y_r = \operatorname{Re}\left\{\left(Dx+Fx^2\right)e^{xi}\right\}$ و $y_i = \operatorname{Im}\left\{\left(Cx+Ex^2\right)e^{xi}\right\}$. بنابراین به جای یافتن جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$، جواب خصوصی z_p معادله مختلط $z''+z = xe^{ix}$ را می‌یابیم که به شکل $z_p = (ax+bx^2)e^{xi}$ است و a, b اعداد مختلط‌اند. پس z_p را در این معادله قرار می‌دهیم:

$$\{-bx^2+(4b-a)x+(2b+2ai)\}e^{xi} + \{bx^2+ax\}e^{xi} = xe^{xi}.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 4b = 1 \\ 2b+2ai = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a = ib = \frac{i}{4} \end{cases}$$

پس z_p جواب خصوصی معادله $z''+z = xe^{ix}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} z_p &= (\frac{1}{4}x+\frac{i}{4}x^2)e^{xi} \\ &= \frac{x}{4}(1+xi)(\cos x + i\sin x) \\ &= \frac{x}{4}((\cos x - x\sin x)+(\sin x + x\cos x)i) \\ &= \frac{1}{4}(x\cos x - x^2\sin x) + \frac{1}{4}(x\sin x + x^2\cos x)i. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به ۸.۷.۲ و اینکه طرف ثانی معادله $\mathscr{E}$ قسمت حقیقی xe^{xi} است، پس y_p جواب خصوصی $\mathscr{E}$ قسمت حقیقی جواب خصوصی z_p معادله $z''+z = xe^{xi}$ است:

$$y_p = \operatorname{Re}(z_p) = \frac{1}{4}x\cos x - \frac{1}{4}x^2\sin x.$$

بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} \,:\, y = y_p + y_h = \frac{1}{4}x\cos x - \frac{1}{4}x^2\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

۱۰.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E} \,:\, y''-6y'+9y = 25e^x\sin x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارت از $\mathscr{E}_h \,:\, Ly = 0$ است که $L = D^2-6D+9$ و معادله مشخصه $C_{\mathscr{E}} : \lambda^2-6\lambda+9 = 0$ است که ریشه $\lambda = 3$ با تکرار ۲ دارد. پس جواب عمومی معادله همگن $\mathscr{E}_h$ عبارتست از

$$y_h = Ae^{3x} + Bxe^{3x}.$$

از طرفی تابع $f = 25e^x\sin x$ به ریشه‌های مختلط $1 \pm 1i$ با تکرار یک متناظر است و لذا جواب معادله $My = 0$ یا

$$M = D^2 - 2(1)D + ((1)^2+(1)^2) = D^2-2D+2,$$

می‌باشد. پس جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ در معادله همگن $\mathscr{E}_p \,:\, LMy = 0$ صدق می‌کند که دارای معادله مشخصه:

$$C_{\mathscr{E}\,p} \,:\, (\lambda-3)^2(\lambda^2-2\lambda+2) = 0,$$

است. جواب عمومی معادله $\mathscr{E}_p$ چنین است:

$$Ae^{-3x} + Bxe^{3x} + Ce^x \sin x + De^x \cos x,$$

که جملات Ae^{3x} و Bxe^{3x} در y_h حضور دارند. پس شکل کلی خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$y_p = Ce^x \sin x + De^x \cos x.$$

ما به جای y_p از $y_r + iy_i$ استفاده می‌کنیم که $y_r = De^x \cos x$ و $y_i = Ee^x \sin x$. اما با توجه به اینکه $e^x \cos x = \operatorname{Re}\left(e^x e^{xi}\right)$ و $e^x \sin x = \operatorname{Im}\left(e^x e^{xi}\right)$، به جای قرار دادن y_i و y_r در $\mathscr{E}$ کافی است:

$$z_p = ae^x e^{xi} \quad (\text{عدد مختلط است } a)$$

را در معادله دیفرانسیل $z'' - 6z' + 9z = 25e^x e^{xi}$ قرار می‌دهیم، در نتیجه:

$$a(1+i)^2 e^{(1+i)x} - 6a(1+i)e^{(1+i)x} + 9ae^{(1+i)x} = 25e^{(1+i)x}.$$

یا به بیان دیگر داریم:

$$a(2i) - 6a(1+i) + 9a = 25.$$

بنابراین $a = 3+4i$ و

$$\begin{aligned} z_p &= ae^{(1+i)x} = (3+4i)e^x e^{xi} \\ &= e^x(3+4i)(\cos x + i \sin x) \\ &= (3\cos x - 4\sin x)e^x + (3\sin x + 4\cos x)e^x i. \end{aligned}$$

چون طرف ثانی $\mathscr{E}$ قسمت موهومی طرف ثانی معادله مختلط $z'' - 7z' + 9z = 25e^x e^{xi}$ است، جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y_p = lm(z_p) = (3\sin x + 4\cos x)e^x,$$

و بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\mathscr{S} : y = y_p + y_h = (3\sin x + 4\cos x)e^x + Ae^{3x} + Be^{3x}.$$

۱۱.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارت از $\mathscr{E}_h : Ly = 0$ است که در آن $\mathscr{L} = D^2 + 2D + 5$ ومعادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}} : \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ با ریشه‌های مختلط $-1 \pm 2i$ با تکرار یک است. پس جواب عمومی معادله همگن $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_h = Ae^{-x}\sin 2x + Be^{-x}\cos 2x$.
از طرفی $f = e^{-x}\cos 2x$ یک جواب از معادله همگن $My = 0$ است که $M = L$. بنابراین، y_p جواب خصوصی $\mathscr{E}$ در معادله همگن $\mathscr{E}_p = \mathscr{L}^2 y = 0$ صدق می‌کند. معادله مشخصه $\mathscr{E}_p$ عبارتست از $C_{\mathscr{E}p} : (\lambda^2 + 2\lambda + 5)^2 = 0$ که دارای جواب عمومی:

$$Ae^{-x}\sin 2x + Be^{-x}\cos 2x + Cxe^{-x}\sin 2x + Dxe^{-x}\cos 2x.$$

است. اما جملات $Ae^{-x}\sin 2x$ و $Be^{-x}\cos 2x$ در y_p حاضرند، پس صورت کلی جواب عمومی y_p معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$y_p = Cxe^{-x}\cos 2x + Dxe^{-x}\sin 2x.$$

به جای قرار دادن y_p در $\mathscr{E}$ تابع $z_p = axe^{-x}e^{2xi}$ را در معادله دیفرانسیل $z'' + 2z' + 5z = e^{-x}e^{2xi}$ قرار می‌دهیم، زیرا طرف ثانی معادله $\mathscr{E}$ قسمت حقیقی $e^{-x}e^{2xi}$ است. حاصل چنین است:

$$a\{(-2)+2i)-(3+4i)x\}e^{-x}e^{2xi} + 2a\{1+(-1+2i)x\}e^{-x}e^{2xi} + 5axe^{-x}e^{2xi} = e^{-x}e^{2xi}.$$

بنابراین، داریم $4ai = 1$ یا $a = -\frac{i}{4}$ و لذا

$$\begin{aligned} z_p &= axe^{-x}e^{2xi} \\ &= -\frac{i}{4}xe^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x) \\ &= \frac{x}{4}e^{-x}(\sin 2x - i\cos 2x). \end{aligned}$$

چون طرف ثانی $\mathscr{E}$ قسمت حقیقی طرف ثانی معادله دیفرانسیل $z'' + 2z' + 5z = e^{-x}e^{2xi}$ است، بنابراین بنا به ۸.۷.۲ داریم:

$$y_p = \mathrm{Re}(z_p) = \frac{x}{4}e^{-x}\sin 2x,$$

و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}\ :\ y = y_p + y_h = \frac{x}{4}e^{-x}\sin 2x + C_1e^{-x}\cos 2x + C_2e^{-x}\sin 2x.$$

۱۲.۷.۲. تمرینات در هر مورد شکل جواب خصوصی معادله خطی با ضرایب ثابت $\mathscr{E}$ با طرف ثانی f و ریشه‌های داده شده λ_i را بیابید:

1) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,$ $\quad f = ax^2+bx+c,$
2) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,$ $\quad f = ax^2+bx+c,$
3) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$ $\quad f = ax^2+bx+c,$
4) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,$ $\quad f = e^{-x}(ax+b),$
5) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,$ $\quad f = e^{-x}(ax+b),$
6) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1,$ $\quad f = e^{-x}(ax+b),$
7) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,$ $\quad f = a\sin x + b\cos x,$
8) $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,$ $\quad f = a\sin x + b\cos x,$
9) $\lambda_1 = -1-i,\ \lambda_2 = -1+i,$ $\quad f = e^{-x}(a\cos x + b\sin x),$
10) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$ $\quad f = ax + e^{-x},$
11) $\lambda_1 = \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = \lambda_2 = -i,$ $\quad f = \sin x,$
12) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1+i,\ \lambda_3 = \lambda_2 = 1-i,\ \lambda_5 = 0,$ $\quad f = e^x\cos x,$

هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

13) $y'' + 3y' = 3,$
14) $y'' + 7y' = e^{-2x},$
15) $y'' + 3y' = e^x,$
16) $y'' - 10y' + 25y = e^{5x},$
17) $y'' + 16y = \sin(4x+\alpha),$
18) $y'' + 25y = \cos 5x,$
19) $y^{(4)} - y = 1,$
20) $y'' + ky = x,$
21) $y^{(4)} - y' = 2,$
22) $y''' + y'' = 1,$
23) $y^{(5)} - y''' = 4,$
24) $y'' + 2y' + 2y = 1 + x,$
25) $y'' + 2y' + y = -2,$
26) $7y'' - y' = 14x,$
27) $y'' + 9y' + 2 = 0,$
28) $y'' + 3y' = 3xe^{-3x},$
29) $5y''' - 7y'' - 3 = 0,$
30) $y'' + 8y' = 8x,$
31) $y'' + a^2y = 2\cos mx + 3\sin mx,\ m \neq a,$
32) $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x,$
33) $y^{(4)} - y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x,$
34) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x\cos 2x,$
35) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(\sin x + 2\cos x),$
36) $y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = \sin x.$

در برخی مسائل طرف ثانی جمع دو یا چند جمله است، این گونه مسائل را به دو یا چند مساله ساده‌تر می‌توان تقسیم نمود.

۱۳.۷.۲. قضیه (قضیه برهمنهی) *فرض کنید $\mathscr{E}_i : Ly = f_i$ که $i = 1, 2, \cdots, k$ معادلات دیفرانسیل خطی هستند و $y_{p,i}$ جواب خصوصی $\mathscr{E}_i$ است، در این صورت تابع $y_p = y_{p,1} + y_{p,2} + \cdots + y_{p,k}$ یک جواب خصوصی معادله زیر است:*

$$\mathscr{E} : Ly = f_1 + f_2 + \cdots + f_k.$$

۱۴.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y'' - 6y' + 9y = 4e^x - 16e^{3x}$ را حل کنید.

حل: جواب عمومی معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $y_h = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$ زیرا معادله مشخصه آن دارای ریشه تکراری ۳ است. برای یافتن جواب خصوصی $\mathscr{E}$، یک جواب خصوصی $y_{p,1}$ برای معادله:

$$\mathscr{E} : y'' - 6y' + 9y = 4e^x,$$

و یک جواب خصوصی $y_{p,2}$ برای معادله:

$$\mathscr{E}_2 : y'' - 6y' + 9y = -16e^{2x},$$

می‌یابیم. چنانچه همانند در مثال ۹.۷.۲ عمل کنیم، نتیجه خواهد شد:

$$y_{p,1} = e^x \qquad y_{p,2} = -8x^2e^{3x}.$$

بنابراین یک جواب خصوصی $\mathscr{E}$ چنین است:

$$y_p = y_{p,1} + y_{p,2} = e^x - 8x^2e^{3x},$$

و لذا جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = Ae^{3x} + Bxe^{3x} + e^x - 8x^2e^{3x}.$$

۱۵.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y''' - 2y'' + 2y' = 4\cos x\cos 3x + 6\sin^2 x$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه $\mathscr{E}$ عبارت از $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0$ است که ریشه‌های آن $-i, i, 0$ هستند. لذا جواب عمومی معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y_h = A + B\sin x + B\cos x.$$

به جای یافتن جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$، جواب خصوصی معادله زیر را می‌یابیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_1 &: \quad y''' - 2y'' + 2y' = 2\cos 4x,\\
\mathscr{E}_2 &: \quad y''' - 2y'' + 2y' = -\cos 2x,\\
\mathscr{E}_3 &: \quad y''' - 2y'' + 2y' = 3.
\end{aligned}$$

زیرا ملاحظه می‌گردد که

$$4\cos x\cos 3x + 6\sin^2 x = 2\cos 4x - \cos 2x + 3.$$

چنانچه به روش ۲.۷.۹ جواب خصوصی این سه معادله ساده‌تر را بدست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} y_{p,1} &= \frac{1}{65}\left(\cos 4x - \frac{7}{4} \in 4x\right), \\ y_{p,2} &= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \cos 2x\right), \\ y_{p,3} &= \frac{3}{2}x. \end{aligned}$$

بنابراین یک جواب خصوصی $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\begin{aligned} y_p &= y_{p,1} + y_{p,2} + y_{p,3}, \\ &= \frac{1}{65}\cos 4x - \frac{7}{260}\sin 4x + \frac{1}{20}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{3}{2}x, \end{aligned}$$

و جواب عمومی $\mathscr{E}$ چنین است: $\mathscr{E} : y = y_p + y_h$.

۲.۷.۱۶. مثال معادله $\mathscr{E} : y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + \sin x$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه نظیر به $\mathscr{E}$ عبارت از $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ است که دارای ریشه‌های ۱ و ۲ با تکرار یک است. بنابراین، جواب عمومی همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y_h = Ae^x + Be^{2x}.$$

به جای یافتن جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$، جواب خصوصی هر یک از معادلات زیر را به روش ۲.۷.۹ می‌یابیم:

$$\mathscr{E}_1 : y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} \qquad \mathscr{E}_2 : y'' - 3y' + 2y = \sin x.$$

نتیجه، به ترتیب چنین خواهد بود:

$$y_{p,1} = \frac{x^2}{2}e^{2x} - xe^{2x}, \qquad y_{p,2} = \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x.$$

بنابراین یک جواب خصوصی y_p چنین است: $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$ و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = y_p + y_h = \frac{x^2}{2}e^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x + Ae^x + Be^{2x}.$$

۲.۷.۱۷. تمرینات هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

1) $y'' - y' - 2y = 1 + 4x - 2e^x$,
2) $y'' - 2y' + y = 18x + x^2 + e^x \sin x$,
3) $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2}\cos x$,
4) $y'' - 2y' - 3y = 2x + e^{-x} - 2e^{3x}$,
5) $y'' - 2y' + 5y = e^x(1 - 2\sin^2 x) + 10x + 1$,
6) $y'' + 6y' + 9y = 18e^{-2x} + 8\sin x + 6\cos x$,
7) $y''' - 2y'' + y' = 4x + 3\sin x - \cos x + e^{-x}$.

بخش ۸.۲ روش عملگرهای معکوس برای یافتن جواب خصوصی

روش عملگرهای معکوس، یکی از روشهای متعدد برای یافتن جواب خصوصی یک معادله خطی با ضرایب ثابت است. در این روش نیز باید طرف ثانی معادله به شکل $ax^n e^{bx}\cos cx$ یا $ax^n e^{bx}\sin cx$ و یا مجموعی از آنها باشد.

۱.۸.۲. تعریف فرض کنید L یک عملگر خطی با ضرایب ثابت است و $L(q(x)) = p(x)$. در این صورت می‌نویسیم

$$L^{-1}(p(x)) = q(x)$$

و L^{-1} را **عملگر معکوس** می‌نامیم. به بیان دیگر، $L^{-1}f(x)$ جواب خصوصی معادله $Ly = f(x)$ است که در آن هیچ یک از جملات جواب معادله همگن $\mathscr{E}_h$ وجود ندارد. بعلاوه، ترکیب $L^{-1}L = LL^{-1}$ بدیهی است.

۲.۸.۲. مثال اگر $L = D^2+1$ و $f(x) = x^2$، آنگاه

$$L^{-1}f = x^2 - 2.$$

زیرا جواب عمومی معادله $Ly = f$ یا $y''+y = x^2$ عبارتست از

$$\mathscr{S}\ :\ y = x^2 - 2 + A\sin x + B\cos x.$$

۳.۸.۲. مثال اگر $L = D^2 - D - 2$ و $f = e^x$، آنگاه

$$L^{-1}f = -\frac{1}{2}e^x.$$

زیرا جواب عمومی معادله $Ly = f$ یا $y'' - y' - 2y = e^x$ عبارتست از

$$\mathscr{S}\ :\ y = Ae^{-x} + Be^{2x} - \frac{1}{2}e^x.$$

۴.۸.۲. قضیه

۱) *اگر $p(x)$ یک تابع باشد، آنگاه $D^{-n}p(x)$ عبارتست از انتگرال گیری پی در پی از $p(x)$ به تعداد n بار و حذف ثابت در هر مرحله.*

۲) *اگر $p(x) = bx^k$، آنگاه*

$$\frac{1}{D-a_0}(bx^k) = -\frac{1}{a_0}\left\{1 + \frac{D}{a_0} + \frac{D^2}{a_0^2} + \cdots + \frac{D^k}{a_0^k}\right\}(bx^k),$$

۳) *اگر $p(x) = be^{ax}$، L یک عملگر خطی با ضرایب ثابت باشد، آنگاه:*

$$\frac{1}{L(D)}(be^{ax}) = \frac{b}{L(a)}e^{ax},$$

توجه شود که $L(a)$ یعنی همان عملگر $L(D)$ که هر جا D بوده است، از a استفاده کرده‌ایم. بعلاوه فرض شده است که $L(a) \neq 0$.

۴) *اگر $L(D)$ یک عملگر خطی با ضرایب ثابت باشد، آنگاه*

$$\frac{1}{L(D)}p(x)e^{ax} = e^{ax}\frac{1}{L(D+a)}p(x),$$

۵) اگر $L(D)$ عملگری خطی و با ضرایب ثابت باشد، طوری که $L(D)=(D-a)^r M(D)$ که $M(a)\neq 0$، در این صورت

$$\frac{1}{L(D)}be^{ax}=\frac{b}{r!M(a)}x^r e^{ax},$$

۶) اگر L عملگری خطی باشد، L^{-1} نیز هست، بنابراین

$$\frac{1}{L}(af+bg)=a\frac{1}{L}f+b\frac{1}{L}g.$$

۵.۸.۲. مثال با توجه به قسمت ۱ از ۴.۸.۲ داریم:

$$\begin{aligned} D^{-2}(2x+3) &= \int\int(2x+3)\,dxdx \\ &= \int(x^2+3x)\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}. \end{aligned}$$

۶.۸.۲. مثال مانند مثال قبل داریم:

$$\begin{aligned} D^{-4}(24+e^{-x}) &= D^{-3}\int(24+e^{-x})\,dx \\ &= D^{-3}(24x-e^{-x})=D^{-2}\int(24x-e^{-x})\,dx \\ &= D^{-2}(12x^2+e^{-x})=D^{-1}\int(12x^2+e^{-x})dx \\ &= D^{-1}(4x^3-e^{-x})=\int(4x^3-e^{-x})\,dx \\ &= x^4+e^{-x}. \end{aligned}$$

۷.۸.۲. مثال بنا به قسمت ۲ از ۴.۸.۲ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2-2D-3}(5x^2) &= \frac{1}{D+1}.\frac{1}{D-3}(5x^2) \\ &= \frac{1}{D+1}\left(-\frac{1}{3}\left\{1+\frac{D}{3}+\frac{D^2}{9}\right\}(5x^2)\right) \\ &= \frac{1}{D+1}\left(-\frac{1}{3}\left\{5x^2+\frac{10}{3}x+\frac{10}{9}\right\}\right) \\ &= \frac{-5}{3}\left(-\frac{1}{-1}\left\{1+\frac{D}{-1}+\frac{D^2}{(-1)^2}\right\}\right)\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right) \\ &= -\frac{5}{3}\left(\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)-\left(2x+\frac{2}{3}\right)+(2)\right) \\ &= -\frac{5}{3}\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{14}{9}\right)=-\frac{5}{27}(9x^2-12x+14). \end{aligned}$$

۲.۸.۸. مثال یک جواب خصوصی معادله $y''-2y'=2x$ را بیابید.

حل: با توجه به قسمت ۲ از ۲.۸.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2-2D}(2x)=\frac{1}{D-2}.\frac{1}{D}(2x)\\
&= \frac{1}{D-2}(\int 2xdx)=\frac{1}{D-2}(x^2)\\
&= \frac{-1}{2}\left\{1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}\right\}(x^2)\\
&= \frac{-1}{2}\left\{x^2+x+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{4}\{2x^2+2x+1\}.
\end{aligned}$$

۲.۸.۹. مثال با توجه به قسمت ۲ از ۲.۸.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^5-D^3}(2x^2) &= \frac{1}{D^3}.\frac{1}{D+1}.\frac{1}{D-1}(2x^2)\\
&= 2\frac{1}{D^3}.\frac{1}{D+1}.\left\{-\frac{1}{1}\left(1+\frac{D}{1}+\frac{D^2}{1}\right)\right\}(x^2)\\
&= -2\frac{1}{D^3}.\frac{1}{D+1}(x^2+2x+2)\\
&= 2\frac{1}{D^3}\left\{-\frac{1}{-1}\left\{1+\frac{D}{-1}+\frac{D^2}{1}\right\}\right\}(x^2+2x+2)\\
&= -2\frac{1}{D^3}\Big((x^2+2x+2)-(2x+2)+(2)\Big)\\
&= -2\frac{1}{D^3}(x^2+2)=-2\frac{1}{D^2}\int(x^2+2)dx\\
&= -2\frac{1}{D^2}\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)=-2\frac{1}{D}\int\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)dx=-2\frac{1}{D}\left(\frac{x^2}{12}+x^2\right)\\
&= -2\int\left(\frac{x^4}{12}+x^2\right)dx=-2\left(\frac{x^5}{60}+\frac{x^3}{3}\right)=-\frac{1}{30}\int(x^5+20x^3).
\end{aligned}$$

۲.۸.۱۰. مثال با توجه به قسمت ۳ از ۲.۸.۴ داریم:

$$\frac{1}{D^3-D^2-1}(3e^{-2x})=\frac{3e^{-2x}}{(-2)^3-(-2)^2+(-2)-1}=\frac{-3}{13}e^{-2x}$$

۲.۸.۱۱. مثال با توجه به قسمت ۳ از ۲.۸.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2-3D+2}3\sin 3x &= \frac{1}{D^2-3D+2}\mathrm{Im}(3e^{3xi})\\
&= 3\mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2-3D+2}e^{3xi}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{e^{3xi}}{(3i)^2-3(3i)+2}\right)\\
&= 3\mathrm{Im}\left(\frac{1}{-1-9i}e^{3xi}\right)=3\mathrm{Im}\left(\frac{9i-1}{82}(\cos 3x+i\sin 3x)\right)\\
&= \frac{3}{82}\mathrm{Im}((-\cos 3x-9\sin 3x)+(9\cos 3x-\sin 3x)i)\\
&= \frac{3}{82}(9\cos 3x-\sin 3x).
\end{aligned}$$

۱۲.۸.۲. مثال با توجه به قسمت ۳ از ۴.۸.۲ داریم:

$$\frac{1}{D^2+2D}(\sin x-\sin 2x+5\cos 3x)=f+g+h,$$

که در آن

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{D^2+2D}\sin x=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2+2D}e^{xi}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{i^2+2i}e^{xi}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2i-1}e^{xi}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{-1}{3}(1+2i)(\cos x+i\sin x)\right)\\
&= \frac{-1}{3}\mathrm{Im}((\cos x-2\sin x)+(\sin x+2\cos x)i)=\frac{-1}{3}(\sin x+2\cos x),\\
g &= \frac{1}{D^2+2D}(-\sin 2x)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2+2D}e^{2xi}\right)=-\mathrm{Im}\left(\frac{e^{2xi}}{4i^2+4i}\right)\\
&= -\frac{1}{4}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{i-1}e^{2xi}\right)=-\frac{1}{4}\mathrm{Im}\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)(\cos 2x+i\sin 2x)\right)\\
&= \frac{1}{8}\mathrm{Im}((\cos 2x-\sin 2x)+(\cos 2x+\sin 2x)i)=\frac{1}{8}(\cos 2x+\sin 2x),\\
h &= \frac{1}{D^2+2D}(5\cos 3x)=5\mathrm{Re}\left(\frac{1}{D^2+2D}e^{3xi}\right)\\
&= 5\mathrm{Re}\left(\frac{1}{(3i)^2+(3i)}e^{3xi}\right)=5\mathrm{Re}\left(\frac{1}{3i-9}e^{3xi}\right)\\
&= \frac{-5}{3}\mathrm{Re}\left(\left(\frac{3}{10}+\frac{i}{10}\right)(\cos 3x+i\sin 3x)\right)\\
&= \frac{-1}{6}\mathrm{Re}((3\cos 3x-\sin 3x)+(8\sin 3x+\cos 3x)i)\\
&= \frac{-1}{6}(3\cos 3x-\sin 3x).
\end{aligned}$$

۱۳.۸.۲. مثال با توجه به قسمت ۴ از ۴.۸.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2+2D-3}\left(x^2e^{2x}\right) &= e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2-2(D+2)-3}x^2\\
&= e^{2x}\frac{1}{D^2+2D-3}x^2=e^{2x}\frac{1}{D+1}\frac{1}{D-3}x^2\\
&= e^{2x}\frac{1}{D+1}\left\{\frac{-1}{3}\left(1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{9}\right)x^2\right\}\\
&= \frac{-1}{3}e^{2x}\frac{1}{D+1}\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{3}x+x^2\right)\\
&= \frac{-1}{3}e^{2x}\left\{\frac{-1}{-1}+\left(1+\frac{D}{-1}+\frac{D^2}{1}\right)\right\}\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{3}x+x^2\right)\\
&= \frac{-1}{3}e^{2x}\left(\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{3}x+x^2\right)-\left(\frac{2}{3}+2x\right)+(2)\right)\\
&= -\frac{1}{3}e^{2x}\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{14}{9}\right)=\frac{-1}{27}e^{2x}(9x^2-12x+14).
\end{aligned}$$

۱۴.۸.۲. مثال بنا به قسمت ۴ از ۴.۸.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2-D}(x^2e^{-x}\sin x) &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2-D}(x^2e^{-x}e^{xi})\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2-D}x^2e^{(-1+i)x}\right)\\
&= \left(\mathrm{Im}e^{(-1+i)x}\frac{1}{(D-1+i)^2-(D-1+i)}x^2\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(e^{-x}e^{xi}\frac{1}{D^2+(2i-1)D+(1-3i)}x^2\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(e^{-x}e^{xi}\frac{1}{1-3i}\frac{1}{1-\frac{7+i}{10}D+\frac{1+3i}{10}D^2}x^2\right)\\
&\overset{(1)}{=} e^{-x}\mathrm{Im}\left(e^{xi}\left\{1+\left(\frac{7+i}{10}D-\frac{1+3i}{10}D^2\right)+\left(\frac{7+i}{10}D-\frac{1+3i}{10}D^2\right)^2+\cdots\right\}x^2\right)\\
&= e^{-x}\mathrm{Im}\left(e^{xi}\left\{1+\left(\frac{7+i}{10}\right)D-\left(\frac{1+3i}{10}\right)D^2+\left(\frac{7+i}{10}\right)^2D^2+\cdots\right\}x^2\right)\\
&= e^{-x}\mathrm{Im}\left(e^{xi}\left(x^2+2\frac{7+i}{10}x-\frac{1+3i}{10}2+\left(\frac{7+i}{10}\right)^2 2\right)\right)\\
&= e^{-x}x^2\mathrm{Im}(e^{xi})+e^{-x}x\mathrm{Im}\left(e^{xi}\left(\frac{7+i}{5}\right)\right)+e^{-x}\mathrm{Im}\left(e^{xi}\frac{29-46i}{100}\right)\\
&= e^{-x}x^2\sin x+\frac{1}{5}e^{-x}x\mathrm{Im}((\cos x+i\sin x)(7+i))\\
&\quad +\frac{1}{100}e^{-x}\mathrm{Im}((\cos x+i\sin x)(29-46i))\\
&= e^{-x}x^2\sin x+\frac{1}{5}e^{-x}x(\cos x+7\sin x)+\frac{1}{100}e^{-x}(-46\cos x+49\sin x).
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) از فرمول زیر استفاده شده است:

$$\frac{1}{1-a}=1+a+a^2+a^3+\cdots$$

۱۵.۸.۲. مثال از تکنیک تفکیک پذیر کسر برای حل برخی مسائل می‌توان استفاده کرد؛ مثلا اگر

$$\frac{1}{D^3-5D^2+8D-4}=\frac{1}{(D-2)^2(D-1)}.$$

فرض می‌کنیم:

$$\frac{1}{(D-2)^2(D-1)}=\frac{A}{D-2}+\frac{B}{(D-2)^2}+\frac{C}{D-1}.$$

در این صورت

$$\begin{cases} A+C=0\\ -3A+B-4C=0\\ 2A-B+4C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C=-A\\ B=-A\\ A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=1\\ B=C=-1\end{cases}$$

در نتیجه، داریم:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{D^3-5D^2+8D-4}xe^{-x} &= \left\{\frac{1}{D-2}+\frac{-1}{(D-2)^2}+\frac{-1}{D-1}\right\}xe^{-x}\\
&= e^{-x}\frac{1}{(D-1)-2}x-e^{-x}\frac{1}{((D-1)-2)^2}x\\
&\quad -e^{-x}\frac{1}{(D-1)-1}x=e^{-x}\left(-\frac{1}{3}\left\{1+\frac{D}{3}\right\}\right)x\\
&\quad -e^{-x}\left(-\frac{1}{3}\left\{1+\frac{D}{3}\right\}\right)^2x-e^{-x}\left(-\frac{1}{2}\left\{1+\frac{D}{2}\right\}\right)x\\
&= -\frac{1}{3}e^{-x}\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{9}e^{-x}\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}e^{-x}\left(x+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{108}e^{-x}(6x+7).
\end{aligned}
$$

۱۶.۸.۲. مثال باتوجه به قسمت ۵ از ۴.۸.۲ داریم:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{D^3-5D^2+8D-4}(3e^{2x}) &= \frac{1}{(D-2)^2(D-1)}3e^{2x}\\
&= 3\frac{1}{2!(2-1)}x^2e^{2x}=\frac{3}{2}x^2e^{2x}.
\end{aligned}
$$

۱۷.۸.۲. مثال با توجه به قسمت ۵ از ۴.۸.۲ داریم:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{D^2+1}\sin x &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2+1}e^{xi}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{D-i}\frac{1}{D+i}e^{xi}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{D-i}\frac{e^{xi}}{2i}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2i}\frac{1}{1!\mathrm{Im}es1}x^1e^{xi}\right)=x\mathrm{Im}\left(\frac{-i}{2}e^{xi}\right)\\
&= \frac{-x}{2}\mathrm{Im}(i(\cos x+i\sin x))=-\frac{x}{2}\cos x.
\end{aligned}
$$

۱۸.۸.۲. مثال با توجه به ۴.۸.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2+1}x^2\cos x &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{D^2+1}x^2e^{xi}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(D+i)(D-i)}x^2e^{xi}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{xi}\frac{1}{(D+2i)D}x^2\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{xi}\frac{1}{D}\left\{\frac{-1}{-2i}\left(1+\frac{D}{-2i}+\frac{D^2}{(-2i)^2}\right)\right\}x^2\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{xi}\frac{1}{D}\left\{\frac{1}{2i}\left(x^2-\frac{x}{i}-\frac{1}{2}\right)\right\}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{xi}\frac{1}{2i}\int(x^2-x/i-1/2)dx\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{xi}\frac{1}{2i}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2i}-\frac{x}{2}\right)\right)\\
&= \frac{-1}{2}\mathrm{Re}\left((\cos x+i\sin x)\left(\frac{i}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{i}{2}x\right)\right)\\
&= \frac{-1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2\cos x+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}\right)\sin x\right)\\
&= \frac{1}{4}x^2\cos x-\frac{x}{12}(2x^2-3)\sin x.
\end{aligned}$$

۱۹.۸.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y''-4y'+13y=-xe^{-2x}\sin 3x$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه نظیر به $\mathscr{E}$ عبارت از $\lambda^2-4\lambda+13=0$ است که ریشه‌های مختلط مزدوج $-2\pm 3i$ با تکرار یک دارد. پس جواب عمومی معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y_h=Ae^{-2x}\sin 3x+Be^{-2x}\cos 3x.$$

برای بدست آوردن جواب خصوصی $\mathscr{E}$ به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2-4D+13}(-xe^{-2x}\sin 3x)=-\mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2-4D+13}xe^{-2x}e^{3xi}\right)\\
&= -\mathrm{Im}\left(e^{-2x}e^{3xi}\frac{1}{(D-2+3i)^2-4(D-2+3i)+13}x\right)\\
&= -\mathrm{Im}\left(e^{-2x}e^{3xi}\frac{1}{D}.\frac{1}{D+6i}x\right)\\
&= -e^{-2x}\mathrm{Im}\left(e^{3xi}\frac{1}{D}.\left\{-\frac{1}{-6i}\left(1+\frac{D}{-6i}\right)\right\}x\right)\\
&= -e^{-2x}\mathrm{Im}\left(e^{3xi}\frac{1}{D}.\left(\frac{-i}{6}\left(x+\frac{i}{6}\right)\right)\right)\\
&= \frac{e^{-2x}}{36}\left(ie^{3xi}\int(6x+i)dx\right)\\
&= \frac{e^{-2x}}{36}\left(i(\cos 3x+i\in 3x)(5x^2+ix)\right)\\
&= \frac{e^{-2x}}{36}(3x^2\cos 3x-x\sin 3x).
\end{aligned}$$

بنابراین جواب عمومی $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\mathscr{S}\;:\; y = y_p + y_h = \frac{x}{36}e^{-2x}(3x\cos 3x - \sin 3x) + e^{-2x}(A \in 3x + B\cos 3x).$$

۲۰.۸.۲. تمرینات حاصل هر یک از عبارات زیر را بدست آورید:

1) $(D-3)^{-1}(x^2+3x-6)$, 2) $(D-1)^{-1}.x^2$,
3) $(D^2-3D+2)^{-1}.\sin 2x$, 4) $(D^2-1)^{-1}.2x$,
5) $(4D^2-5D)^{-1}(x^2e^{-x})$, 6) $(D^2+1)^{-1}.x\sin x$,

در هر مورد به کمک روش عملگر معکوس، یک جواب خصوصی برای معادله بیابید:

7) $y''+3y'+2y=4$, 8) $y''-y=\sin x$,
9) $y''-y=2x$, 10) $y''-y'=xe^x$,
11) $y''+3y'+2y=\cos x$, 12) $y''+^2y=\cos x$,
13) $y''+y=3e^{-2x}$, 14) $y''+y'+y=3x^2e^x$,
15) $y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(2-x^2)$, 16) $y''+4y=4x\cos 2x$,
17) $y^{(4)}+y=x-1$, 18) $y''+y'-2y=3e^{-2x}$,
19) $y'-3y=x^3+3x+e^{3x}$, 20) $y'''+y'=\cos x$,
21) $y^{(5)}+2y'''+y'=2x+\sin x$, 22) $y'''-3y''+3y'-y=2e^x$.

بخش ۹.۲ معادلات اولر

۱.۹.۲. تعریف معادلات به فرم:

$$\boxed{\mathscr{E}\;:\; a_n(x+b)^n y^{(n)} + a_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x+b)y' + a_0 y = f(x),} \qquad (۱۷.۲)$$

که $a_n,\cdots,a_1,a_0,b,a$ اعداد ثابتند را **معادلات اولر** می‌نامیم.

۲.۹.۲. روش حل برای حل معادلات (۱۷.۲) از تغییر متغیر

$$\boxed{x+b=e^t,} \qquad (۱۸.۲)$$

استفاده می‌کنیم که نتیجه یک معادله خطی با ضرایب ثابت بر حسب t و y خواهد بود.

۳.۹.۲. مثال معادله $\mathscr{E}\;:\; x^2y''+2xy'=6y$ را حل کنید.

حل: با توجه به (۱۸.۲) از متغیر جدید t استفاده می‌کنیم که $x=e^t$. در این صورت

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{e^t} = e^{-t}\frac{dy}{dt},\\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(e^t\frac{dy}{dt})}{e^t} = e^{-t}\left(-e^{-t}\frac{dy}{dt}+e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \qquad y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

اکنون $\mathscr{E}$ را بر حسب t می‌نویسیم:

$$x^2\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+2x\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}=6y.$$

به بیان دیگر

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y=0,$$

که یک معادله خطی با ضرایب ثابت همگن است. معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}}:\ \lambda^2+\lambda-6=0$ است. پس جواب عمومی آن عبارتست از

$$y=y_h=Ae^{-2t}+Be^{2t}.$$

زیرا ریشه‌های $C_{\mathscr{E}}$ اعداد -3 و 2 هستند. اما مطابق فرض $x=e^t$، بنابراین

$$\mathscr{S}:\ y=A\frac{1}{x^3}+Bx^2.$$

۴.۹.۲. مثال معادله $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$ را حل کنید.

حل: مانند مثال قبل از متغیر جدید t استفاده می‌کنیم که $x=e^t$، بنابراین شکل جدید معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\begin{aligned}x^2\left\{\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right\}-x\left\{\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right\}+2y &= e^t\ln e^t,\\ \frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2y &= te^t.\end{aligned}$$

معادله مشخصه این معادله خطی عبارتست از $\lambda^2-2\lambda+2=0$ که ریشه‌های آن $1\pm i$ است. پس جواب عمومی معادله همگن آن عبارتست از

$$y_h=Ae^t\cos t+Be^t\sin t.$$

جواب خصوصی آن چنین است:

$$\begin{aligned}y_p &= \frac{1}{D^2-2D+2}te^t=e^t\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+2}\\ &= e^t\frac{1}{D^2+1}t=e^t\left(1-D^2+D^4-\cdots\right)t=te^t.\end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به اینکه $x=e^t$ جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathscr{S}:y &= y_p+y_h=te^t+Ae^t\cos t+Be^t\sin t\\ &= x\ln x+Ax\cos\ln x+Bx\sin\ln x.\end{aligned}$$

۵.۹.۲. مثال معادله $\mathscr{E}:\ (3x-2)^2y''-3(3x-2)y'+9y=x$ را حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم t متغیر جدید است و $3x-2=e^t$، در نتیجه

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{1}{3}e^t}=3e^{-t}\frac{dy}{dt},\\ y'' &= \frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}(3e^{-t}\frac{dy}{dt})}{\frac{1}{3}e^t}=3e^{-t}\left(-3e^{-t}\frac{dy}{dt}+3e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right).\end{aligned}$$

پس $\mathscr{E}$ را چنین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}(e^t)^2\left(9e^{-2t}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right\}\right)-3e^t\left(3e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)+y &= \frac{e^t+2}{3}\\ \frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y &= \frac{e^t+2}{27},\end{aligned}$$

که یک معادله خطی با ضرایب ثابت با معادله مشخصه $\lambda^2-2\lambda+1=0$ است. چون ریشه‌های این معادله $\lambda_1=\lambda_2=1$ هستند، پس جواب عمومی همگن عبارتست از

$$y_h = Ae^{1t}+Bt^1e^{1t}=(A+Bt)e^t.$$

جواب خصوصی را به روش زیرتعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned}y_p &= \frac{1}{D^2-2D+1}\frac{e^t+2}{27}=\frac{1}{D^2-2D+1}\frac{e^t}{27}+\frac{1}{D^2-2D+1}\frac{2}{27}\\ &= \frac{1}{27}\frac{1}{(D-1)^2}e^t+\frac{2}{27}\frac{1}{D^2-2D+1}1\\ &= \frac{1}{27}\frac{1}{2!}t^2e^t+\frac{2}{27}(1+2D-D^2+\cdots).1\\ &= \frac{1}{54}t^2e^t+\frac{2}{27}.\end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به اینکه $t=\ln(3x-2)$، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathscr{S}: y &= y_p+y_h=\frac{1}{54}t^2e^t+\frac{1}{27}+(A+Bt)e^t\\ &= \frac{3x-2}{54}\ln^2(3x-2)+\frac{1}{27}+(3x-2)(A+B\ln(3x-2)).\end{aligned}$$

۶.۹.۲. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

1) $x'y'''+xy'=y,$
2) $x'y'''=2y',$
3) $x^2y''+3xy'+y=0,$
4) $(x+1)^2y'''=12y',$
5) $x^2y''+2xy'+6y=0,$
6) $x^2y''=2y+\sin(\ln x),$
7) $x^2y''+y'=0,$
8) $x^2y''-xy'-3y=-\frac{16}{x}\ln x,$
9) $x^2y'''-3xy''+3y=0,$
10) $x^2y''+xy'=y+x^m, \quad |m|\neq 1,$
11) $(x+2)^2y''+3(x+2)y'-3y=0,$
12) $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+4y=0,$
13) $(2x+1)^2y'''+2(2x+1)y''+y'=0,$
14) $x^2y''-2xy'+2y=x^2-2x+2,$
15) $x^2y''+4xy'+2y=2\ln^2 x+12x,$
16) $(x+1)^3y''+3(x+1)^2y'+(x+1)y=6\ln(x+1).$

بخش ۱۰.۲ روش تغییر پارامتر برای یافتن جواب خصوصی

تاکنون بیشتر معادلات خطی با ضرایب ثابت که سمت راست آنها از فرم بخصوصی است را حل کرده‌ایم. روش حاضر تا حدودی دامنه بحث را گسترش می‌دهیم. این روش را روش لاگرانژ می‌نامند.

۱.۱۰.۲. قضیه *فرض کنید $y_1, y_2, \cdots, y_n$ جوابهای مستقل خطی معادله همگن نظیر به معادله دیفرانسیل*

$$\mathscr{E}: p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdot+p_{n-1}(x)y'+p_ny=f(x),$$

هستند. در این صورت جواب عمومی معادله $\mathscr{E}$ به شکل

$$\boxed{y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n,} \tag{۱۹.۲}$$

است. که توابع مجهول C_1، C_2، . . . ، و C_n از دستگاه زیر بدست می‌آیند:

$$\boxed{\begin{cases} y_1C_1' + y_2C_2' + \cdots + y_nC_n' = 0, \\ y_1'C_1' + y_2'C_2' + \cdots + y_n'C_n' = 0, \\ \quad\vdots \\ y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + \cdots + y_n^{(n-1)}C_n' = \dfrac{f(x)}{p_0(x)}. \end{cases}} \tag{۲۰.۲}$$

۲.۱۰.۲. نتیجه با مفروضات در ۱.۱۰.۲ و با توجه به قضیه کرامر در جبر خطی، داریم:

$$C_k = (-1)^{n+k}\frac{f(x)}{p_0(x)}\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{k-1} & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_{k-1}' & y_{k+1}' & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-2)} & y_{k+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

۳.۱۰.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y'' - 2\tan x.y' = 1$ را حل کنید.

حل: ابتدا معادله همگن $\mathscr{E}_h : y'' = 2y'\tan x$ نظیر به $\mathscr{E}$ را حل می‌کنیم که نسبت به y' و x تفکیک پذیر است: $dy'/y' = 2\tan x dx$. بنابراین:

$$\ln y' = -2\ln\cos x + \ln C,$$

یا $y' = \dfrac{C}{\cos^2 x}$ که باز هم نسبت به y و x تفکیک پذیر است: $dy = \dfrac{Cdx}{\cos^2 x}$. بنابراین:

$$y = C\tan x + A,$$

که C و A ثابت دلخواه با $0 < C$ هستند. پس $y_1 = 1$ و $y_2 = \tan x$ توابع مستقل خطی و جواب $\mathscr{E}_h$ هستند. اکنون فرض می‌کنیم $y_p = C_1(x) + \tan xC_2(x)$، پس بنا به (۲۰.۲) داریم:

$$\begin{cases} 1.C_1' + \tan x.C_2' = 0, \\ 0.C_1' + \dfrac{1}{\cos^2 x}.C_2' = 1. \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} C_2' = \cos^2 x, \\ C_1' = -\sin x\cos x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\displaystyle\int \sin x\cos x dx = -\dfrac{\sin^2 x}{2}, \\ C_2 = \displaystyle\int \dfrac{1+\cos 2x}{2}dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2x. \end{cases}$$

در نتیجه، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathscr{S}:y &= A+B\tan x-\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{2}x\tan x+\frac{1}{4}\sin 2x\tan x\\ &= A+B\tan x+\frac{1}{2}x\tan x.\end{aligned}$$

۴.۱۰.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y''-3y'+2y=\sin(e^{-x})$ را حل کنید.

حل: ابتدا معادله همگن $\mathscr{E}_h: y''-3y'+2y=0$ نظیر به $\mathscr{E}$ را حل می‌کنیم. معادله مشخصه آن $\lambda^2-3\lambda+2=0$ است که ریشه‌های آن ۱ و ۲ هستند. پس جواب عمومی $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_h=Ae^x+Be^{2x}$. پس بنا به (۲۰.۲) فرض می‌کنیم:

$$y_p=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{2x}.$$

بنابراین، می‌باید

$$\begin{cases} e^x.C_1'+e^{2x}.C_2'=0,\\ e^x.C_1'+2e^{2x}.C_2'=\sin(e^{-x}),\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C_1'=-e^{-x}\sin(e^{-x}),\\ C_2'=e^{-2x}\sin(e^{-x}).\end{cases}$$

در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned}C_1 &= -\int e^{-x}\sin(e^{-x})dx=-\cos e^{-x},\\ C_2 &= \int e^{-2x}\sin(e^{-x})dx=\int e^{-x}d\cos e^{-x}\\ &= e^{-x}\cos^{-x}-\int\cos e^{-x}de^{-x}=e^{-x}\cos e^{-x}-\sin e^{-x}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$y_p=-e^x\cos e^{-x}+e^x\cos e^{-x}-e^{2x}\sin e^{-x}=-e^{2x}\sin e^{-x},$$

و لذا جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}: y=-e^{2x}\cos(e^{2x}\cos(e^{-x})+Ae^x+B^{2x}.$$

۵.۱۰.۲. مثال در صورتی که بدانیم $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$ یک جواب معادله همگن نظیر به معادله

$$\mathscr{E}: y''+\frac{2}{x}y'+y=\frac{1}{x}$$

است. این معادله را حل کنید.

حل: فرض کنیم z تابعی جدید است که $y=y_1z$ و در $\mathscr{E}_h$ صدق می‌کند. بنابراین اگر در $\mathscr{E}_h$ قرار دهیم، داریم:

$$\begin{aligned}&(y_1''+2y_1'z'+y_1z'')+\frac{2}{x}(y_1'z+y_1z')+y=0,\\ &\left(y_1''+\frac{2}{x}y_1'+y_1\right)z+y_1z''+\frac{2}{x}(xy_1'+y_1)z'=0.\end{aligned}$$

اما پرانتز اول صفر است، زیرا y_1 در $\mathscr{E}_h$ صدق می‌کند، بنابراین

$$xy_1z''-2(xy_1'+y_1)z'=0;$$

یا پس از ساده کردن، باید $z''\sin x+2z'\cos x=0$ که نسبت به z' و x تفکیک پذیر است:

$$\frac{dz'}{z'}=-2\frac{\cos x}{\sin x}dx.$$

بنابراین $\ln z'=-2\ln\sin x+\ln C$ یا $z'=C/\sin^2 x$ که این نیز تفکیک پذیر است: $dz=Cdx/\sin^2 x$. بنابراین $z=-C\cot x+A$ که C و A اعداد دلخواهند. در مجموع داریم:

$$y=(-C\cot x+A)\frac{\sin x}{x}=-C\frac{\cos x}{x}+A\frac{\sin x}{x}.$$

پس می‌توان y_2 را تابع $\cos x/x$ گرفت.
اکنون نظر به (۱۹.۲) فرض می‌کنیم $y_p=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$. پس باید:

$$\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}C_1'(x)+\dfrac{\cos x}{x}C_2'(x)=0,\\[2mm] \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}C_1'(x)-\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}C_2'(x)=\dfrac{1}{x}.\end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}C_1'=\cos x,\\ C_2'=-\sin x,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}C_1=\sin x,\\ C_2=\cos x.\end{cases}$$

و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathscr{S}:y&=y_p+y_h=\sin x.\frac{\sin x}{x}+\cos x.\frac{\cos x}{x}+A\frac{\sin x}{x}+B\frac{\cos x}{x},\\ &=\frac{1}{x}\big(1+A\sin x+B\cos x\big).\end{aligned}$$

۶.۱۰.۲. مثال در صورتی که بدانیم $y_1=x$ یک جواب معادله همگن نظیر به معادله زیر است، جواب عمومی آن را تعیین کنید:

$$\mathscr{E}\ :\ x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=\frac{(1-\ln x)^2}{x}.$$

حل: فرض کنیم $y=y_1z$ در معادله همگن $\mathscr{E}_h$ نظیر به $\mathscr{E}$ صدق کند. در نتیجه، پس از قرار دادن این فرض در $\mathscr{E}_h$ داریم

$$x^2(1-\ln x)(z''x+zz')+x(xz'+z)-xz=0.$$

پس از ساده کردن، داریم

$$x(1-\ln x)z''+(3-2\ln x)z'=0.$$

در نتیجه، داریم

$$\frac{dz'}{z'}=-\frac{3-2\ln x}{x(1-\ln x)}dx,$$

و پس از انتگرال گیری داریم:

$$z' = A\frac{1}{x^2}(1-\ln x),$$

که A عددی ثابت است. اما این معادله نیز تفکیک پذیر است:

$$\begin{aligned} z &= A\int(1-\ln x)\frac{dx}{x^2} = A\int(\ln x-1)d\frac{1}{x} \\ &= A\frac{1}{x}(\ln x-1)+A\int\frac{1}{x^2}dx = A\frac{1}{x}(\ln x-2)+B. \end{aligned}$$

بنابراین

$$y = y_1 z = A(\ln x - z) + Bx.$$

پس می‌توان y_2 را تابع $\ln x$ گرفت. اکنون نظر به (۲۰.۲) فرض می‌کنیم:

$$y = x.C_1(x) + \ln x.C_2(x),$$

و در نتیجه، باید

$$\begin{cases} x.C_1' + \ln x.C_2' = 0, \\ 1.C_1' + \frac{1}{x}.C_2' = \frac{1}{x^3}(1-\ln x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -\frac{1}{x}\ln x.C_2' = -\frac{1}{x^3}\ln x, \\ C_1 = \frac{-1}{x^3}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \int\frac{-1}{x^3}\ln x dx = \frac{1}{2}\int \ln x d\frac{1}{x^2} = \frac{\ln x}{2x^2} - \int\frac{1}{2x^2}\frac{dx}{x} = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2}, \\ C_2 = \int\left(\frac{1}{x^2}dx\right) = \frac{-1}{x}. \end{cases}$$

بنابراین، جواب خصوصی $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\begin{aligned} y_p &= C_1y_1 + C_2y_2 = \frac{1}{x}(2\ln x+1) - \frac{1}{x}\ln x \\ &= \frac{1}{4x}(1-2\ln x)\ln x - \frac{x}{3}. \end{aligned}$$

جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = y_p + y_h = \frac{1}{4x}(1-2\ln x) + Ax + B\ln x.$$

۷.۱۰.۲. تمرینات هر یک از معادلات زیر راحل کنید.

1) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$, 2) $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$,

3) $y'' - y' = \frac{1}{e^x+1}$, 4) $y'' - y' = e^{-x}$,

5) $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$, 6) $y''' + y'' = \sin^2 x$,

7) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$, 8) $xy'' = (1+2x^2)y' \neq 4x^3e^{x^2}$,

9) $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$, 10) $y'' = 4 + 3y'\tan x$,

11) $x\ln x.y'' = y' + \ln^2 x$, 12) $xy'' + (2x+1)y' + 4x^2 = 0$,

در هر یک از مسائل زیر y_1 یک جواب از معادله همگن نظیر به معادله داده شده است، جواب عمومی معادله را بیابید.

13) $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0, \quad y_1=e^{mx},$
14) $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0, \quad y_1=x,$
15) $y''+(\tan x-2\cot x)y'+2\cot^2 x.y=0, \quad y_1=\sin x,$
16) $y''+\tan x.y'+\cot^2 x.y=0, \quad y_1=\cos(\sin x),$
17) $(1+x^2)y''+xy'-y+1=0, \quad y_1=x,$
18) $x^2y''-xy'-3y=5x^4, \quad y_1=1/x,$
19) $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2e^x, \quad y_1=e^x,$
20) $x^3(x-1)y''+x(2x^2-2x-1)y'-y=(x-1)^2/x, \quad y_1=1/x,$
21) $y''-y'+ye^{2x}=xe^{2x}-1, \quad y_1=\sin e^x,$
22) $x(x-1)y''-(2x-1)y'+2y=x^2(2x-3), \quad y_1=x^2,$

در هر مورد y_1 و y_2 جواب معادله همگن هستند، جواب عمومی معادله را بیابید.

23) $4xy''+2y'+y=1, \quad y_1=\sin\sqrt{x}, \quad y_2=\cos\sqrt{x},$
24) $(1-x)y''+xy'-y=(x-1)^2e^x, \quad y_1=x, \quad y_2=e^x,$
25) $2x^2(2-\ln x)y''+x(4-\ln x)y'-y=(2-\ln x)^2/\sqrt{x}, \quad y_1=\ln x, \quad y_2=\sqrt{x},$
26) $x^3(\ln x-1)y''-x^2y'+xy=2\ln x, \quad y_1=x, \quad y_2=\ln x.$

— آخرین بروز رسانی: ۱۴ فروردین ۱۳۹۱ —

فهرست مطالب

فصل ۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا

۱.۲ مفاهیم و تعاریف اولیه ۱
۲.۲ کاهش مرتبه معادلات مرتبه بالا ۲
۳.۲ معادلات خطی مرتبه بالا ۱۰
۴.۲ رونسکی و گرامی ۱۲
۵.۲ معادله خطی همگن با ضرایب ثابت ۱۵
۶.۲ یافتن معادله خطی همگنی که مجموعه جوابش مفروض است ۲۰
۷.۲ روش ضرایب نامشخص برای یافتن جواب خصوصی ۲۲
۸.۲ روش عملگرهای معکوس برای یافتن جواب خصوصی ۳۱
۹.۲ معادلات اولر ۳۸
۱۰.۲ روش تغییر پارامتر برای یافتن جواب خصوصی ۴۰