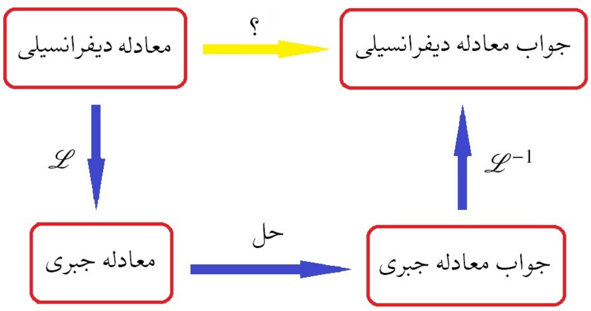
فصل ۳

تبدیلات لاپلاس

[۱] چنانچه طرف ثانی یک معادله خطی با ضرایب ثابت ناپیوسته باشد، روشهای قبلی برای یافتن جواب خصوصی آن به کار نمی‌آید. روش لاپلاس ابزاری مناسب برای پرداختن به این گونه مسائل است.

بخش ۱.۳ معرفی تبدیلات لاپلاس

فرض کنید $\mathscr{E}$ یک معادله یا مساله معادله دیفرانسیل است و روشی یافته‌ایم که می‌تواند آن را به معادله‌ای جبری $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ تبدیل کند. سپس آن معادله جبری حاصل را حل کرده $\mathscr{S}$، و آنگاه از عکس روشمان برای بدست آوردن جواب مساله $\mathscr{E}$ استفاده می‌کنیم $\mathscr{L}^{-1}(\mathscr{S})$.



۱.۱.۳. تعریف تابع هدف تابعی با مقدار حقیقی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ از متغیر حقیقی t است که در شرایط به شرح ذیل صدق می‌کند:

۱) f بر هر بازه متناهی از محور t ها انتگرال پذیر است.

۲) f به ازای کلیه مقادیر منفی t صفر است.

۳) $|f(t)|$ در $t\to\infty$ کندتر از تابع نمایی رشد کند، به این معنی که اعدادی مثبت چون $M>0$ و $s>0$ به گونه‌ای یافت شوند که به ازای هر t ای $|f(t)|\leq Me^{st}$. بزرگترین s ای که در این شرط صدق کند را درجه رشد f می‌نامند.

[۱] ــــ آخرین بروز رسانی: ۱۴ فروردین ۱۳۹۱ ــــ تالیف: مهدی نجفی‌خواه، دانشیار ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران. هرگونه انتقاد و یا پیشنهادی را با نویسنده به آدرس m_nadjafikhah@iust.ac.ir در میان بگذارید. این کتاب در دست تهیه است و احتمالا در حال تغییر. لطفا آخرین نسخه آن را تهیه کنید: http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/Courses/ODE/Fa3.pdf

۲.۱.۳. مثال نشان دهید تابع زیر یک تابع هدف است:

$$f(t) = \begin{cases} e^{st}\sin 3t & t \geq 0 \text{ اگر} \\ 0 & t < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

حل: چون f پیوسته است، پس بر هر بازه متناهی انتگرال پذیر است. بعلاوه چون $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ به ازای هر α. پس:

$$|f(t)| = \begin{cases} e^{2t}|\sin 3x| & t \geq 0 \text{ اگر} \\ 0 & t < 0 \text{ اگر} \end{cases} \quad \leq \quad e^{2t}|\sin 3t| \quad \leq \quad e^{2t}.$$

یعنی $M = 1$ و $s = 2$. پس f تابع هدف است.

۳.۱.۳. مثال تابع پله‌ای واحد یک تابع هدف است:

$$u_0(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \text{ اگر} \\ 0 & t \leq 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

۴.۱.۳. قرارداد *چون در ادامه عملا از ویژگیهای تابع در قسمت منفی محور t ها استفاده نمی‌شود، لذا قرار این است که در این فصل همه توابع بر قسمت منفی محور t ها صفر است، حتی اگر ظاهرا چنین نباشد. مثلا وقتی می‌نویسیم $f(t) = t^2$ منظور تابع زیر است:*

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & t > 0 \text{ اگر} \\ 0 & t \leq 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

۵.۱.۳. قضیه *فرض کنید $f(t)$ یک تابع هدف است، در این صورت انتگرال تابع $f(t)e^{-st}$ به ازای هر $s > s_0$ بر بازه $[0; +\infty)$ موجود و متناهی است. در این صورت، تعریف می‌کنیم:*

$$F(s) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt, \qquad s > s_0.$$

تابع حاصل $F()$ را با نماد $\mathscr{L}\{f\}$ نیز نشان می‌دهیم. در واقع:

$$\mathscr{L}\{f\} = F \Leftrightarrow \mathscr{L}^{-1}\{F\} = f.$$

۶.۱.۳. قرارداد *از این پس متغیر توابع هدف را t و متغیر توابع حاصل را s می‌گیریم. توابع هدف را با حروف کوچک و توابع حاصل را با حروف بزرگ نشان می‌دهیم. $\mathscr{L}$ حرف اول ریاضیدان معروف فرانسوی (پیرسیمون دولاپلاس ۱۸۲۷-۱۷۴۹) است.*

۷.۱.۳. قضیه *عملگر لاپلاس خطی است به این معنی که به ازای هر دو تاب g و f و هر دو عدد ثابت a,b داریم:*

$$\mathscr{L}\{af + bg\} = a\mathscr{L}\{f\} + b\mathscr{L}\{g\}.$$

۸.۱.۳. مثال تبدیل لاپلاس $f(t)=1$ را بیابید.

حل: با توجه به تعریف ۴-۱-۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{1\} &= \int_0^\infty 1e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt\\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^b = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\lim_{b\to\infty} e^{-bs} = \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

حد آخر در صورتی صفر است که $s>0$. بنابراین، نشان دادیم که:

$$\boxed{\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \qquad s>0.} \tag{۱.۳}$$

۹.۱.۳. مثال تبدیل لاپلاس $f(t)=t^n$ که $n\in\mathbb{N}$ را بیابید.

حل: به استقرا روی n عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{t\} &= \int_0^\infty te^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt\\ &= \frac{-1}{s}\lim_{b\to\infty}\int_0^b tde^{-st} = \frac{-1}{s}\lim_{b\to\infty}\left\{te^{-st}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-st}dt\right\}\\ &= \frac{-1}{s}\lim_{b\to\infty}\left\{be^{-bs} + \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^b\right\} = \frac{1}{s^2} - \lim_{b\to\infty}\frac{bs+1}{s^2}e^{-bs}\\ &= \frac{1}{s^2} - \lim_{b\to\infty}\frac{bs+1}{s^2e^{bs}} = \frac{1}{s^2} - \lim_{b\to\infty}\frac{b}{s^3e^{bs}} = \frac{1}{s^2}.\end{aligned}$$

قاعده هوپیتال وقتی به کار می‌آید که $s>0$ و حد به حالت $\frac{\infty}{\infty}$ بیانجامد. پس ثابت شد که:

$$\boxed{\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \qquad s>0.} \tag{۲.۳}$$

حال فرض کنیم $\mathscr{L}\{t^n\}$ را یافته‌ایم و $\mathscr{L}\{t^{n+1}\}$ را می‌خواهیم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{t^{n+1}\} &= \int_0^\infty t^{n+1}e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^{n+1}e^{-st}dt\\ &= \frac{-1}{s}\lim_{b\to\infty}\int_0^b t^{n+1}de^{-st}\\ &= -\frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\left\{t^{n+1}e^{-st}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-st}dt^{n+1}\right\}\\ &= \frac{-1}{s}\lim_{b\to\infty}\left\{\frac{b^{n+1}}{e^{+sb}} - (n+1)\int^b 0e^{-st}t^n dt\right\}\\ &= -\frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\frac{b^{n+1}}{e^{+sb}} + \frac{n+1}{s}\int_0^\infty t^ne^{-st}dt.\end{aligned}$$

اما حد آخر صفر است (کافی است $n+1$ بار هوپیتال استفاده کنیم و از شرط $s>0$ استفاده کنیم). بنابراین، ثابت شد که:

$$\mathscr{L}\{t^{n+1}\} = \frac{n+1}{s}\mathscr{L}\{t^n\}, \qquad s>0.$$

اکنون توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{t^n\} &= \frac{n}{s}\mathscr{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\mathscr{L}\{n^{n-2}\} = \cdots \\ &= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}\mathscr{L}\{1\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.\end{aligned}$$

پس ثابت شد که

$$\boxed{\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0.} \tag{۳.۳}$$

۱۰.۱.۳. مثال تبدیل لاپلاس $\cos at, \sin dt$ را بیابید.

حل: با توجه به اینکه $e^{ait} = \cos at + i \sin at$، کافی است تبدیل لاپلاس e^{ait} را بیابیم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{e^{ait}\} &= \int_0^\infty a^{ait}e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(ai-s)t}dt \\ &= \frac{1}{ai-s}\lim_{b\to\infty} e^{(ai-s)t}\Big|_0^b = \frac{1}{ai-s}\lim_{b\to\infty} e^{(ai-s)b} - \frac{1}{ai-s} \\ &= -\frac{s+ai}{s^2+a^2}\lim_{b\to\infty} e^{-sb}(\cos ab + i\sin ab) + \frac{s+ai}{s^2+a^2} \\ &= -\frac{s+ai}{s^2+a^2}\lim_{b\to\infty}\frac{\cos ab}{e^{+sb}} - i\frac{s+ai}{s^2+a^2}\lim_{b\to\infty}\frac{\sin ba}{e^{+sb}} + \frac{s+ai}{s^2+a^2}.\end{aligned}$$

در دو حد اول صورت بین ۱ و ۱- است و مخرج به بینهایت میل می‌کند، پس اگر $s > 0$ هر دوی آنها صفرند و ثابت شده است:

$$\mathscr{L}\{e^{ait}\} = \frac{s+ai}{s^2+a^2}.$$

در نتیجه

$$\boxed{\mathscr{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad \mathscr{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0.} \tag{۴.۳}$$

۱۱.۱.۳. مثال تبدیل لاپلاس $f(t) = e^{at}$ را بیابید.

حل: با توجه به تعریف داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(a-s)t}dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{e^{(a-s)b}}{a-s} + \frac{1}{s-a}.\end{aligned}$$

حد آخر در صورتی صفر است که $a - s < 0$ یعنی $s > a$، پس ثابت شد:

$$\boxed{\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \qquad s > a.} \tag{۵.۳}$$

۱۲.۱.۳. مثال لاپلاس تابع $f(t) = t - t^2 + 2\cos t - \sin 2t$ را بیابید.

حل: با توجه به مثالهای بالا و ۵-۱-۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f\} &= \mathscr{L}\{t\} - \mathscr{L}\{t^2\} + 2\mathscr{L}\{\cos t\} - \mathscr{L}\{\sin 2t\} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^3} + 2\frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+4}.\end{aligned}$$

۳.۱.۱۳. مثال لاپلاس تابع $\cosh at, \sinh at$ را بیابید.

حل: با توجه به مثال ۴ و ۳-۱-۵ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\sinh at\right\} &= \mathscr{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{-at}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{a}{s^2-a^2}.\end{aligned}$$

به صورت مشابه چون $\cosh at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$، داریم:

$$\boxed{\mathscr{L}\left\{\sinh at\right\} = \frac{a}{s^2-a^2}, \quad \mathscr{L}\left\{\cosh at\right\} = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > |a|} \tag{۳.۶}$$

۳.۱.۱۴. تمرینات لاپلاس هر یک از توابع داده شده را بیابید:

1) $f(t) = 3\sin 2t - 5e^t + 1$, 2) $f(t) = \sin^2 t$,
3) $f(t) = (1+e^t)(1-2e^{-t})$, 4) $f(t) = \cos^2 t$,
5) $f(t) = \sin t \sin 2t$, 6) $f(t) = (1+t)^3$,
7) $f(t) = e^t \sin t$, 8) $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$,
9) $f(t) = e^{-t}\cos 2t$, 10) $f(t) = t^2 e^t$,
11) $f(t) = \sin at \cos bt$, 12) $f(t) = \sin^2 t$.

بخش ۳.۲ مشتق و تبدیل لاپلاس

۳.۲.۱. قضیه (مشتق از تابع هدف) *اگر $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n)}(t)$ توابع هدف باشند و $F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$. در این صورت*

$$\boxed{\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{f'(t)\right\} &= sF(s) - f(0), \\ \mathscr{L}\left\{f''(t)\right\} &= s^2F(s) - f(0) - f'(0), \\ \mathscr{L}\left\{f'''(t)\right\} &= s^3F(s) - s^2F(0) - sf'(0) - f''(0), \\ &\vdots \\ \mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).\end{aligned}} \tag{۳.۷}$$

۳.۲.۲. مثال لاپلاس $f(t) = \sin^2 t$ را بیابید.

حل: با توجه به اینکه $f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$، داریم:

$$\mathscr{L}\left\{f'(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{\sin 2t\right\} = \frac{2}{s^2+4}.$$

از طرفی $f(0)$ برابر صفر است، پس بنا به ۳-۲-۱ داریم:

$$\frac{2}{s^2+4} = sF(s) - 0,$$

یا

$$\mathscr{L}\left\{\sin^2 t\right\} = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

۳.۲.۳. مثال لاپلاس $f(t)=te^t$ را بیابید.

حل: با توجه به اینکه $f'(t)=e^t+te^t$ و $f(0)=0$، از ۱-۲-۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \mathscr{L}\{e^t\}+\mathscr{L}\{te^t\}\\ sF(s)-f(0) &= \frac{1}{s-1}+F(s),\\ sF(s) &= F(s)+\frac{1}{s-1}.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mathscr{L}\{te^t\}=F(s)=\frac{1}{(s-1)^2}$$

۴.۲.۳. مثال مساله $y'-y=t-1$ و $y(0)=0$ را حل کنید.

حل: ابتدا از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y'-y\} &= \mathscr{L}\{t-1\},\\ s\mathscr{L}\{y\}-y(0)-\mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{t\}-\mathscr{L}\{1\},\\ (s-1)\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2}-\frac{1}{s},\\ \mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s-1}.\frac{1}{s^2}.\frac{1}{s-1}.\frac{1}{s}.\end{aligned}$$

از تکنیک تفکیک کسر استفاده کرده و نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{1}{s-1}.\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s-1}+\frac{-1}{s}+\frac{-1}{s^2},\quad \frac{1}{s-1}.\frac{1}{s}=\frac{1}{s-1}+\frac{-1}{s}$$

بنابراین:

$$\mathscr{L}\{y\}=\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}=\mathscr{L}\{e^t\}-2\mathscr{L}\{1\}-\mathscr{L}\{t\}$$

و نتیجه اینکه، جواب مساله چنین است:

$$y(t)=e^t-t-2$$

۵.۲.۳. قضیه (مشتق از تابع نتیجه) *اگر به ازای $s>s_0$ داشته باشیم $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$، آنگاه*

$$\boxed{\frac{d}{ds}F(s)=-\mathscr{L}\{tf(t)\},\qquad \mathscr{L}\{tf(t)\}=-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}.} \tag{۸.۳}$$

به صورت مشابه

$$\boxed{\frac{d^n}{ds^n}F(s)=(-1)^n\mathscr{L}\{t^nf(t)\},\qquad \mathscr{L}\{t^nf(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}\{f(t)\}.} \tag{۹.۳}$$

۶.۲.۳. مثال لاپلاس $t^n e^{at}$ را بیابید.

حل: با توجه به ۳-۲-۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{t^n e^{at}\} &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}\{e^{at}\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(\frac{1}{s-a}) \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(s-a)^{-1} = (-1)^n(-1)(-2)\cdots(-n)(s-a)^{-n-1} \\ &= (-1)^n(-1)^n n!(s-a)^{-(n+1)} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\end{aligned}$$

پس ثابت شد که

$$\boxed{\mathscr{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.} \tag{۱۰.۳}$$

۷.۲.۳. مثال لاپلاس $t^n \sin at$ و $t^n \cos at$ را بیابید.

حل: از مثال ۱ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{t^n \sin at\} &= Im\mathscr{L}\{t^n e^{ait}\} \\ &= Im\left(\frac{n!}{(s-ai)^{n+1}}\right) = n!Im\left(\left(\frac{s+ai}{s^2+a^2}\right)^{n+1}\right) \\ &= \frac{n!}{(s^2+a^2)^{n+1}}Im(s+ai)^{n+1} = \frac{n!}{(s^2+a^2)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(ai)^k s^{n-k}\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathscr{L}\{t^n \sin at\} &= \frac{n!}{(s^2+a^2)^{n+1}}\sum_{k=1,3,5,\cdots}(-1)^{\frac{k-1}{2}}a^k s^{n-k}, \\ \mathscr{L}\{t^n \cos at\} &= \frac{n!}{(s^2+a^2)^{n+1}}\sum_{k=0,2,4,\cdots}(-1)^{\frac{k}{2}}a^k s^{n-k}.\end{aligned}} \tag{۱۱.۳}$$

۸.۲.۳. مثال لاپلاس $te^{at}\sin bt$ را بیابید.

حل: با استفاده از ۳-۲-۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{te^{at}\sin bt\} &= -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{at}\sin bt\} = -Im\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{at}e^{bit}\} \\ &= -Im\frac{d}{ds}\frac{a+bi}{s-(a+bi)} = -Im\frac{-(a+b)}{\{s-(a+bi)\}^2} \\ &= \frac{1}{((s-a)^2+b^2)}Im(a+bi)(s-a+bi)^2 \\ &= \frac{((s-a)^2-b^2)b+(b(s-a))a}{((s-a)^2+b^2)^2} \\ &= \frac{b(s-a)^2+ab(s-a)-b^3}{((s-a)^2+b^2)^2}\end{aligned}$$

— آخرین بروز رسانی: ۱۴ فروردین ۱۳۹۱ —

۹.۲.۳. مثال لاپلاس $te^{bt}\cosh at$ را به دست آورید.

حل: با توجه به ۳-۲-۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{te^{bt}\cosh at\} &= -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{bt}\cosh at\} = \frac{-1}{2}\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{bt}(e^{at}+e^{-at})\}\\
&= \frac{-1}{2}\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{(a+b)t}+e^{(b-a)t}\}\\
&= \frac{-1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-a-b}+\frac{1}{\{s+a-b}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-a-b)^2}+\frac{1}{(s+a-b)^2}\right)\\
&= \frac{-1}{2}\frac{2s^2+2a^2-4bs+2b^2}{((s-b)^2-a^2)^2} = -\frac{(s-b)^2+a^2}{((s-b)^2-a^2)^2}
\end{aligned}$$

۱۰.۲.۳. تمرینات لاپلاس هر یک از توابع داده شده را بیابید:

1)	te^{2t}	2)	$t^2\cos t$	3)	$\sin^3 t$
4)	$te^{-t}\sin t$	5)	$(t+1)\sin t$	6)	$\cos^2 t$
7)	$t\sinh(2t)$	8)	$t(e^t+e^{2t})$	9)	$t\sin t\sin 2t$
10)	$te^{-t}\cos t$	11)	$t\sin^3 t$	12)	$t^2\cos t\sin 2t$

بخش ۳.۳ انتگرال و تبدیل لاپلاس

۱.۳.۳. قضیه (انتگرال از تابع هدف) اگر $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$، آنگاه

$$\boxed{\mathscr{L}\Big\{\int_0^t f(\tau)d\tau\Big\} = \frac{1}{s}F(s).} \tag{۱۲.۳}$$

۲.۳.۳. مثال لاپلاس $\mathscr{L}\{\int_0^t \tau\sin\tau d\tau\}$ را به دست آورید.

حل: با توجه به ۱-۳-۳ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\Big\{\int_0^t \tau\sin\tau d\tau\Big\}\\
&= \frac{1}{s}\mathscr{L}\{t\sin t\} = \frac{1}{s}(-1)\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{\sin t\}\\
&= \frac{-1}{s}\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+a^2} = \frac{2}{(s^2+a^2)^2}
\end{aligned}$$

۳.۳.۳. مثال لاپلاس $f(t)=\int_0^t \tau^2e^{-\tau}d\tau$ را بیابید.

حل: با توجه به ۱-۳-۳ داریم:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\Big\{\int_0^t \tau^2e^{-\tau}d\tau\Big\} = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{t^2e^{-t}\} = \frac{1}{s}\frac{2!}{(s-(-1))^{2+1}} = \frac{2}{s(s+1)^3}$$

۴.۳.۳ قضیه (انتگرال از تابع نتیجه) اگر $\int_s^\infty F(s)ds$ همگرا باشد، آنگاه:

$$\boxed{\mathscr{L}\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^\infty F(s)ds.} \qquad (۱۳.۳)$$

۵.۳.۳ مثال لاپلاس $\frac{\sin t}{t}$ را بدست آورید.

حل: با توجه به ۳-۳-۳ با فرض $f(t) = \sin t$، داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\frac{\sin t}{t}\} &= \int_s^\infty F(s)ds = \int_s^\infty \mathscr{L}\{\sin t\}ds = \int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}ds\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_s^b \frac{ds}{s^2+1} = \lim_{b\to\infty} \arctan s\Big|_s^b = \lim_{b\to\infty} \arctan b - \arctan s\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\mathscr{L}\{\frac{\sin t}{t}\} = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan\frac{1}{s}$$

۶.۳.۳ مثال لاپلاس $\frac{e^t-1}{t}$ را بدست آورید.

حل: با توجه به ۳-۳-۳ با فرض $f(t) = e^t - 1$ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\frac{e^t-1}{t}\} &= \int_s^\infty F(s)ds = \int_s^\infty \mathscr{L}\{e^t-1\}ds = \int_s^\infty \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right)\\ &= \lim_{b\to\infty}\Big[\ln(s-1) - \ln s\Big]_s^b = \lim_{b\to\infty} \ln\frac{b-1}{b} - \ln\frac{s-1}{s} = \ln\frac{s}{s-1}\end{aligned}$$

۷.۳.۳ قضیه اگر $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$ همگرا باشد، آنگاه:

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(s)ds.} \qquad (۱۴.۳)$$

۸.۳.۳ مثال با فرض $f(t) = \sin t$ در ۵-۳-۳ داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt &= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty f(s)ds = \int_0^\infty \mathscr{L}\{\sin t\}dt\\ &= \int_0^\infty \frac{ds}{s^2+1} = \lim_{b\to\infty}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2+1} = \lim_{b\to\infty} \arctan s\Big|_0^b\\ &= \lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

۹.۳.۳ مثال مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ را به دست آورید $(0 < a, b)$.

حل: با توجه به ۵-۳-۳ داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt &= \int_0^\infty \mathscr{L}\{e^{-at}-e^{-bt}\}dt = \int_0^\infty \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right)ds\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^B \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+a}\right)ds\\ &= \lim_{b\to\infty}[\ln(s+a) - \ln(s+a)]_0^B\\ &= \lim_{B\to\infty} \ln(\frac{B+a}{B+b}) - \ln\frac{a}{b} = \ln\frac{b}{a}\end{aligned}$$

۱۰.۳.۳. تمرینات

لاپلاس هر یک از توابع داده شده را بیابید:

$$
\begin{array}{llll}
1)\ \int_0^t t\sinh 2t dt, & 5)\ \int_0^t t^2\sin^2 t dt, & 9)\ \frac{\sin^2 t}{t}, & 13)\ \frac{e^t-1-t}{t}, \\
2)\ \int_0^t \cos^2 at dt, & 6)\ \int_0^t t^3 e^{-2t} dt, & 10)\ \frac{\cos^2 t-1}{t}, & 14)\ \frac{e^t-e^{-t}}{2}, \\
3)\ \int_0^t (t+1)\cos at dt, & 7)\ \frac{e^{2t}-1}{t}, & 11)\ \frac{1-\cos t}{t}, & 15)\ \frac{1-\cosh 2t}{t}, \\
4)\ \int_0^t \cosh at dt, & 8)\ \frac{1-e^{-t}}{t}, & 12)\ \frac{\cos t-\cos 2t}{t}, & 16)\ \frac{\sinh t}{t}.
\end{array}
$$

مقدار هر یک از انتگرالهای داده شده را بیابید:

$$
\begin{array}{ll}
17)\ \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sin at}{t}dt, & 21)\ \int_0^\infty \frac{\arctan at-\arctan bt}{t}dt, \\
18)\ \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}-e^{\beta t}}{t}\sin at dt, & 22)\ \int_0^\infty \frac{\cosh at-\cosh bt}{t}dt, \\
19)\ \int_0^\infty \frac{\sin at\sin bt}{t}dt, & 23)\ \int_0^\infty \frac{\sinh at\sinh bt}{t}dt, \\
20)\ \int_0^\infty \frac{\cos at-\cos bt}{t}dt, & 24)\ \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sinh at}{t}dt.
\end{array}
$$

بخش ۴.۳　تغییر مقیاس و انتقال در لاپلاس

۱.۴.۳. قضیه (تغییر مقیاس) *اگر α عددی مثبت و بازاء هر $s > s_0$ ای $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$، آنگاه*

$$\boxed{\mathscr{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha}F(\frac{s}{\alpha}).} \tag{۱۵.۳}$$

۲.۴.۳. قضیه (انتقال در تابع هدف) *اگر بازاء هر $s > s_0$ ای $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ و a عددی مثبت باشد، در این صورت*

$$\boxed{\mathscr{L}\{u_0(t-a)f(t-a)\} = e^{-at}F(s),} \tag{۱۶.۳}$$

که $u_0(t)$ تابع پله‌ای واحد است:

$$u_0(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

۳.۴.۳. مثال لاپلاس $u_a(t) := u_0(t-a)$ را بیابید.

حل: با توجه به ۲-۴-۳ و فرض $f(t) = 1$ داریم:

$$\mathscr{L}\{u_0(t)\}e^{-as}\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}e^{-as}.$$

پس ثابت شد که

$$\boxed{\mathscr{L}\{u_0(t)\} = \frac{1}{s}, \qquad \mathscr{L}\{u_a(t)\} = \frac{1}{s}e^{-as}.} \tag{۱۷.۳}$$

۴.۴.۳. مثال لاپلاس $f(t) = (t^2+1)u_0(t-2)$ را بیابید.

حل: با توجه به ۲-۴-۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{((t-2+2)^2+1)u_0(t-2)\}\\ &= \mathscr{L}\{((t-2)^2+4(t-2)+5)u_0(t-2)\}\\ &= e^{-2s}\mathscr{L}\{t^2+4t+5\}\\ &= e^{-2s}\{\frac{2}{s^2}+\frac{4}{s^2}+\frac{5}{s}\}.\end{aligned}$$

۵.۴.۳. قضیه (انتقال در تابع نتیجه) *اگر بازاء هر $s > s_0$ ای $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ و a عددی دلخواه باشد، در این صورت*

$$\boxed{\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a).} \tag{۱۸.۳}$$

۶.۴.۳. مثال لاپلاس $f(t) = e^{-t}\cos 2t$ را بیابید.

حل: با توجه به ۴-۴-۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{e^{-t}\cos 2t\} = \mathscr{L}\{\cos 2t\}\Big|_{s=s-(-1)}\\ &= \frac{s}{s^2+4}\Big|_{s=s+1} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}.\end{aligned}$$

۷.۴.۳. مثال لاپلاس $f(t) = e^{2t}(t^2-t+1)$ را به دست آورید.

حل: با توجه به ۴-۳-۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{e^{2t}(t^2-t+1)\} = \mathscr{L}\{t^2-t+1\}\Big|_{s=s-2}\\ &= \left(\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)\Big|_{=s-2} = \frac{(s-2)^2-(s-2)+2}{(s-2)^3}.\end{aligned}$$

۸.۴.۳. تمرینات لاپلاس هر یک از توابع داده شده را بدست آورید.

1) $u(t-2)\sin(t-2)$,
2) $u(t-a)\cos(t-b)$,
3) $u(t-a)e^{t-b}$,
4) $u(t-a)\cos^2(t-a)$,
5) $t^3(t-1)$,
6) $e^t\sin tu(t)$,
7) $(t^2-t)e^tu(t)$,
8) $5+tu(t-1)-5u(t-2)$,
9) $\cos(at+b)$,
10) $\sinh(at+b)$,
11) $e^{at}\sin bt\cos ct$,
12) $e^{at}\sin bt\sin ct$,
13) $e^{at}\cos bt\cos ct$,
14) $e^{-t}t^5$,
15) $e^t\sinh t$,
16) $te^t\cos t$,
17) $e^{-at}\cos^2 bt$,
18) $te^{-t}\cosh t$,
19) $te^tu(t-1)$,
20) $u(t-a)e^{bt}\sin ct$.

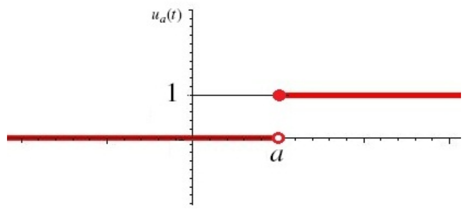
بخش ۵.۳ تابع پله‌ای واحد و توابع پیوسته تکه‌ای

۱.۵.۳. تعریف تابعی که بر کل R تعریف شود و ناپیوستگی‌های آن تعدادی متناهی نقطه باشند، تابع پیوسته تکه‌ای نامیده می‌شود. ساده‌ترین تابع پیوسته تکه‌ای، تابع پله‌ای واحد است:

$$u_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } t \geq 0 \\ 0 & \text{اگر } t < 0 \end{cases}$$

۲.۵.۳. مثال تابع $u_a(t) := u_0(t-a)$ را بررسی کنید.

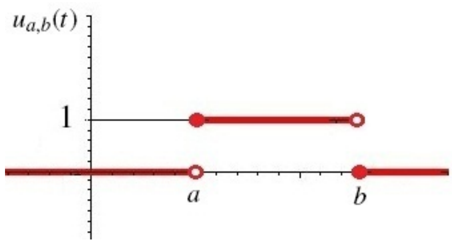
حل: ملاحظه می‌گردد که این تابع دو ضابطه‌ای است:



$$u_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } t \geq 0 \\ 0 & \text{اگر } t < 0 \end{cases}$$

۳.۵.۳. مثال تابع $u_{a,b}(t) = u_0(t-a) - u_0(t-b)$ را بررسی کنید.

حل: ملاحظه می‌گردد که این تابع سه ضابطه‌ای است:



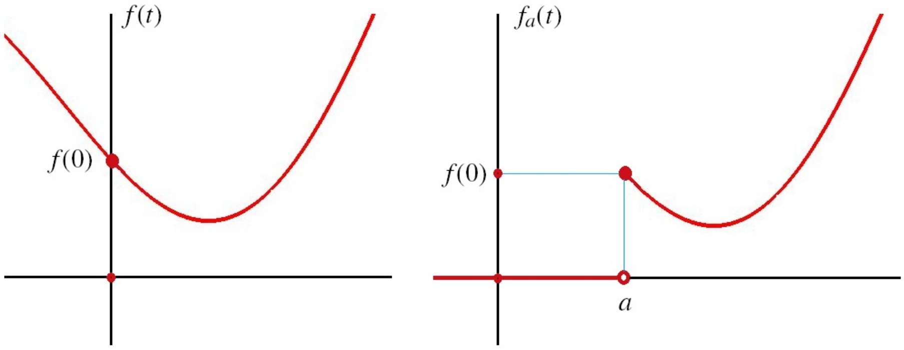
$$u_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } t < a \\ 1 & \text{اگر } a \leq t < b \\ 0 & \text{اگر } b \leq t \end{cases}$$

۴.۵.۳. مثال تابع $f_a(t) := f(t-a)u_0(t-a)$ را بررسی کنید.

حل: ملاحظه می‌گردد که:

$$u_0(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } t \geq 0 \\ 0 & \text{اگر } t < 0 \end{cases} \Rightarrow f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } t < a \\ f(t-a) & \text{اگر } a \leq t \end{cases}$$

یعنی $f_a(t)$ انتقال تابع f در راستای محور t ها به اندازه a واحد است. البته قبل $t = a$ تابع f را به صفر تبدیل می‌کند. به شکل زیر توجه کنید:



۵.۵.۳. مثال تابع داده شده را بر حسب تابع پله‌ای واحد بیان کنید، سپس لاپلاس آن را محاسبه کنید:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{اگر } 0 \leq t < 2 \\ -1 & \text{اگر } 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حل: با توجه به مثالهای بالا، داریم:

$$\begin{aligned}
f(t) &= 2u_{0,2}(t) - u_{2,3}(t)\\
&= 2(u_0(t)-u_2(t)) - (u_2(t)-u_3(t))\\
&= 2u_0(t) - 3u_2(t) + u_3(t)\\
&= 2u_0(t) - 3u_0(t-2) + u_0(t-3),\\
\mathscr{L}\{f(t)\} &= 2\mathscr{L}\{u_0(t)\} - 3\mathscr{L}\{u_0(t-2)\} + \mathscr{L}\{u_0(t-3)\}\\
&= 2\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s}e^{-3s}\\
&= \frac{1}{s}(2-3e^{-2s}+e^{-2s}).
\end{aligned}$$

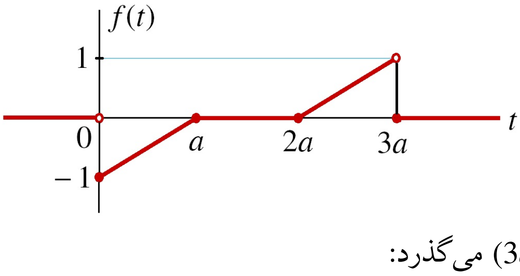
۶.۵.۳. مثال تابع داده شده را بر حسب تابع پله‌ای واحد بیان نموده، لاپلاس آن را بدست آورید.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ اگر} \\ t & 0\le t<\pi \text{ اگر} \\ 0 & \pi\le t<2\pi \text{ اگر} \\ \sin t & 2\pi\le t \text{ اگر} \end{cases}$$

حل: با توجه به مثالهای بالا داریم:

$$\begin{aligned}
f(t) &= tu_{0,\pi}(t) + 0u_{\pi,2\pi}(t) + \sin t u_{2\pi}(t)\\
&= t(u_0(t)-u_\pi(t)) + \sin t u_{2\pi}(t)\\
&= tu_0(t) - tu_0(t-\pi) + \sin t u_0(t-2\pi)\\
&= tu_0(t) - (t-\pi)u_0(t-\pi) - \pi u_0(t-\pi) + \sin(t-2\pi)u_0(t-2\pi),\\
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{tu_0(t)\} - \mathscr{L}\{(t-\pi)u_0(t-\pi)\} - \pi\mathscr{L}\{u_0(t-\pi)\} +\\
&\quad +\mathscr{L}\{\sin(t-2\pi)u_0(t-2\pi)\}\\
&= e^{-0s}\mathscr{L}\{t\} - e^{-\pi s}\mathscr{L}\{t\} - \pi e^{-\pi s}\frac{1}{s} + e^{-2\pi s}\mathscr{L}\{\sin t\}\\
&= \frac{1}{s^2}e^{-\pi s}\frac{1}{s^2}e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

۷.۵.۳. مثال لاپلاس تابع نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید:



حل: قبل از $t=a$ ضابطه تابع با خط گذرنده از نقاط $(0,1)$ و $(a,0)$ یکی است:

$$\frac{f(t)-0}{-1-0} = \frac{t-a}{0-a}, \implies f(t) = \frac{t-a}{a}.$$

تابع f بین a و $2a$ برابر صفر است.

تابع f بین $2a$ و $3a$ با خطی منطبق است که از نقاط $(2a,0)$ و $(3a,1)$ می‌گذرد:

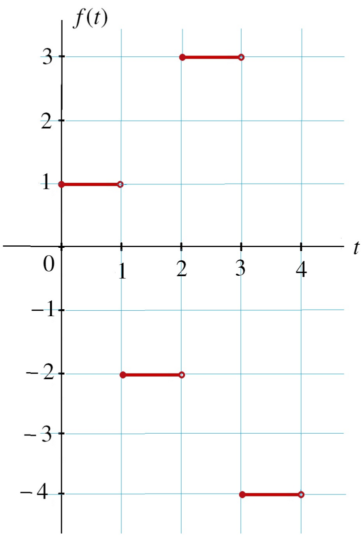
$$\frac{f(t)-0}{1-0} = \frac{t-2a}{3a-2a}, \implies f(t) = \frac{t-2a}{a}.$$

—— آخرین بروز رسانی: ۱۴ فروردین ۱۳۹۱ ——

پس در مجموع داریم:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{t-a}{a}u_{0,a}(t)+\frac{t-2a}{a}u_{2a,3a}(t)\\
&= \frac{t-a}{a}(u_0(t)-u_a(t))+\frac{t-2a}{a}(u_{2a}(t)-u_{3a}(t))\\
&= \frac{t-a}{a}u_0(t)-\frac{1}{a}(t-a)u_0(t-a)+\frac{1}{a}u_0(t-2a)(t-2a)\\
&\quad -\frac{1}{a}(t-3a)u_0(t-3a)-u_0(t-3a),\\
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{a}\mathscr{L}\{u_0(t)(t-a)\}-\frac{1}{a}\mathscr{L}\{(t-a)u_0(t-a)\}+\frac{1}{a}\mathscr{L}\{(t-2)(t-2a)\}\\
&\quad -\frac{1}{a}\mathscr{L}\{(t-3a)u_0(t-3a)\}-\mathscr{L}\{u_0(t-3a)\}\\
&= \frac{1}{a}e^{-0s}\mathscr{L}\{t-a\}-\frac{1}{a}e^{-as}\mathscr{L}\{t\}+\frac{1}{a}e^{-2as}\mathscr{L}\{t\}-\frac{1}{a}e^{-2as}\mathscr{L}\{t\}+\frac{1}{s}e^{-3s}\\
&= \frac{1}{a}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{a}{s}\right\}-\frac{1}{a}e^{-s}.\frac{1}{s^2}+\frac{1}{a}e^{-2as}.\frac{1}{s^2}\\
&\quad -\frac{1}{a}e^{-3as}.\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}e^{-3as}\\
&= \frac{1}{as^2}(1-as)-\frac{1}{as^2}e^{-as}+\frac{1}{as^2}e^{-2as}-\frac{1}{s^2}(1+as)e^{-3as}.
\end{aligned}$$

۸.۵.۳. مثال لاپلاس تابع نشان داده شده در شکل را بیابید:



حل: ملاحظه می‌گردد که

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } 0\le t<1\\ -2 & \text{اگر } 1\le t<2\\ 3 & \text{اگر } 2\le t<3\\ -4 & \text{اگر } 3\le t<4\\ 5 & \text{اگر } 4\le t<5\\ -6 & \text{اگر } 5\le t<6\\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= u_{0,1}(t)-2u_{1,2}(t)+3u_{2,3}(t)-\cdots\\
&= (u_0(t)-u_1(t))-2(u_1(t)-u_2(t))+3(u_2(t)-u_3(t))-\cdots\\
&\quad \cdots+(-1)^{n+1}n(u_{n-1}(t)-u_n(t))+\cdots\\
&= u_0(t)-3u_1(t)+5u_2(t)-7u_3(t)+\cdots+(-1)^n(2n+1)u_n(t)+\cdots
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{u_0(t)\} - 3\mathscr{L}\{u_0(t-1)\} + 5\mathscr{L}\{u_0(t-2)\} - \cdots \\
&\quad \cdots + (-1)^n(2n+1)\mathscr{L}\{u_0(t-n)\} + \cdots \\
&= \frac{1}{s} - 3\frac{1}{s}e^{-s} + 5\frac{1}{s}e^{-2s} - \cdots + (-1)^n(2n+1)\frac{1}{s}e^{-ns} + \cdots \\
&= \frac{2}{s}\{-e^{-s} + 2e^{-2s} - 3e^{-3s} + \cdots + (-1)^n ne^{-ns}\} \\
&\quad + \frac{1}{s}\{1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \cdots + (-1)^n e^{-ns} + \cdots\} + \frac{1}{s}\frac{1}{1+e^{-s}} \\
&= \frac{-2}{s}\{1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{3s} + \cdots + (-1)^n e^{-ns} + \cdots\}' + \frac{1}{s}\frac{1}{1+e^{-s}} \\
&= -\frac{2}{s}\left(\frac{1}{1+e^{-s}}\right)' + \frac{1}{s}\frac{1}{1+e^{-s}} \\
&= -\frac{2}{s}\frac{-e^{-s}}{(1+e^{-s})^2} + \frac{1}{s}\frac{1}{1+e^{-s}} = \frac{1+3e^{-s}}{s(1+e^{-s})^2}.
\end{aligned}$$

۹.۵.۳. تمرینات هر یک از توابع معرفی شده را به کمک تابع پله‌ای واحد بیان نموده، لاپلاس آن را به دست آورید. فرض بر این است که تابع در جاهایی که تعریف شده است، صفر است.

1) $f(t) = |t-1|, t \geq 0$

2) $f(t) = t^2, t \geq 1$

3) $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 2 \text{ اگر} \\ 1 & 2 \geq t \text{ اگر} \end{cases}$

4) $f(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t < 1 \text{ اگر} \\ 2 & 1 \leq t \text{ اگر} \end{cases}$

5) $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1/2 \text{ اگر} \\ t & \frac{1}{2} \leq t \text{ اگر} \end{cases}$

6) $f(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t < 1 \text{ اگر} \\ 1-t & 1 \leq t \text{ اگر} \end{cases}$

7) $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t < \pi/2 \text{ اگر} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq t \text{ اگر} \end{cases}$

8) $f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \text{ اگر} \\ 2t^2 & 1 \leq t \text{ اگر} \end{cases}$

9) $f(t) = \begin{cases} 3e^{-t} & 0 \leq t < 1 \text{ اگر} \\ -1 & 1 \leq t \text{ اگر} \end{cases}$

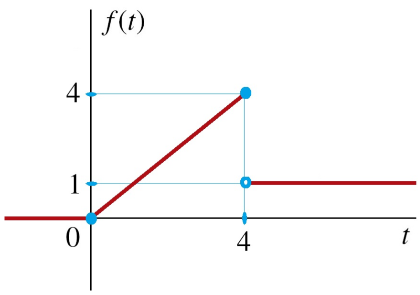
10) $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 2 \text{ اگر} \\ e^{-1-t} & 2 \leq t \text{ اگر} \end{cases}$

11) $f(t) = \begin{cases} \cos t & 0 \leq t < \pi \text{ اگر} \\ 0 & \pi \leq t < 2\pi \text{ اگر} \\ 1 & 2\pi \leq t \text{ اگر} \end{cases}$

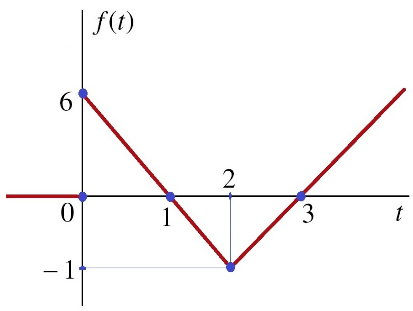
12) $f(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t < 1 \text{ اگر} \\ t & 1 \leq t < 2 \text{ اگر} \\ t^2 & 2 \leq t \text{ اگر} \end{cases}$

13) $f(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \leq t < 2 \text{ اگر} \\ t & 2 \leq t < 3 \text{ اگر} \\ 0 & 3 \leq t \text{ اگر} \end{cases}$

14) $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t < 2\pi \text{ اگر} \\ \cos t & 2\pi \leq t < 6\pi \text{ اگر} \\ \sin t & 6\pi \leq t \text{ اگر} \end{cases}$

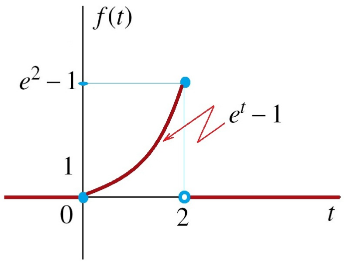


15)

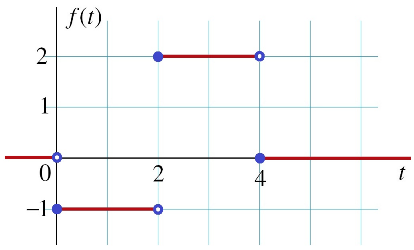


16)

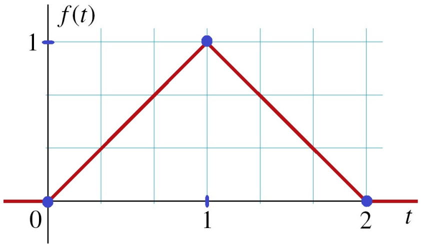
17)



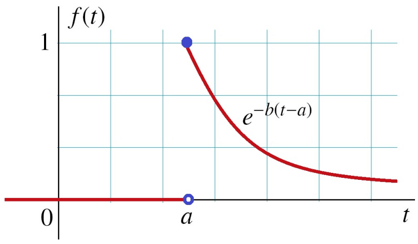
18)



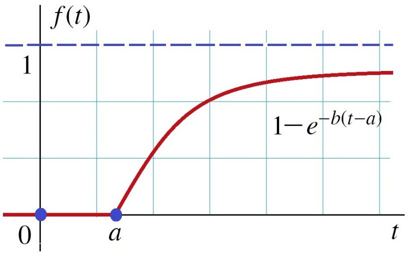
19)



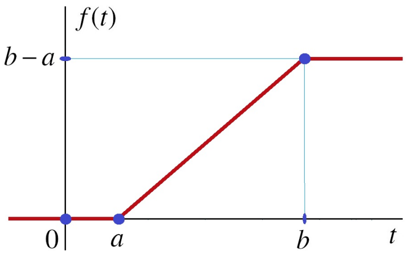
20)



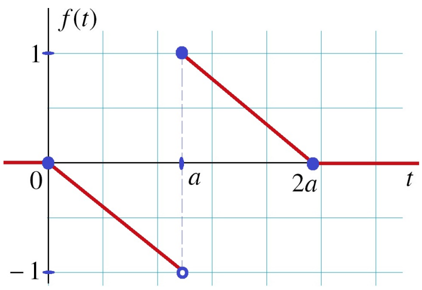
21)



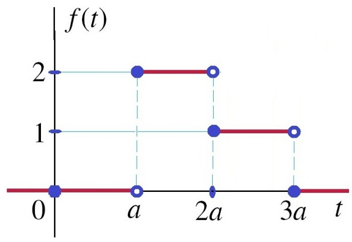
22)



23)



24)



بخش ۶.۳ لاپلاس توابع متناوب

۱.۶.۳. تعریف در صورتی می‌گوییم تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متناوب است که عددی مثبت مانند T به گونه‌ای یافت گردد که به ازای هر x ای $f(x+T)=f(x)$. در صورتی می‌گوییم دوره تناوب f برابر T_0 است که T_0 کوچکترین عدد مثبت صادق در رابطه $f(x+T_0)=f(x)$ باشد.

۲.۶.۳. مثال توابع $\tan 2x, 2\sin x-\cos x, \cos x\sin x$ توابعی متناوب با تناوب برابر $T=2\pi$ هستند.

۳.۶.۳. مثال تابع $f(x)=x-|x|$ متناوب با تناوب $T=1$ است.

۴.۶.۳. مثال تابع $f(x)=0$ متناوب ولی بدون تناوب است!

۵.۶.۳. مثال توابع $|\sin x|$، $2|\cos x|$، $\tan x$ و $\cot x$ متناوب با تناوب $T=\pi$ هستند.

۶.۶.۳. قضیه *اگر تابع $f(x)$ متناوب با تناوب T و یک تابع هدف باشد، در این صورت*

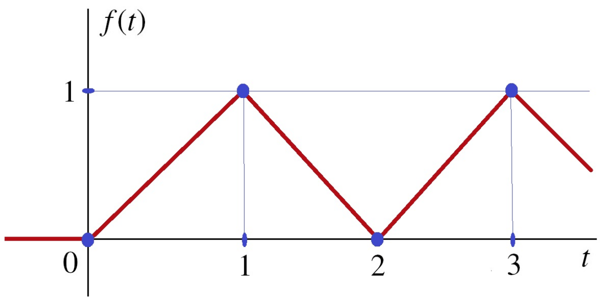
$$\boxed{\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-sT}f(t)\,dt.} \qquad (۱۹.۳)$$

۷.۶.۳. مثال فرض کنید $f(t)$ تابعی با تناوب $T = 2\pi$ است که در بازه $[0,\pi]$ برابر صفر و در بازه $[-\pi,\pi]$ برابر $-\sin t$ است. لاپلاس آن را بدست آورید.

حل: مطابق (۱۹.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st}f(t)dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi} 0dt + \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_{\pi}^{2\pi} -\sin te^{-st}dt \\
&= \frac{1}{e^{-2\pi s}-1}.\frac{e^{-st}}{1+s^2}(-s\sin t-\cos t)\Big|_{t=\pi}^{t=2\pi} \\
&= \frac{1}{e^{-2\pi s}-1}.\frac{-e^{-\pi s}}{1+s^2}(e^{-\pi}+1) \\
&= \frac{e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}.\frac{1}{1+s^2}.
\end{aligned}$$

۸.۶.۳. مثال لاپلاس تابع نشان داده شده در شکل زیر را بدست آورید:



حل: توجه می‌کنیم که $f(t)$ تابعی با تناوب $T = 2$ است و در این بازه:

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \text{ اگر} \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \text{ اگر} \end{cases}$$

پس، بنا به (۱۹.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^{2} f(t)e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left\{\int_0^{1} te^{-st}dt + \int_1^{2}(2-t)e^{-st}dt\right\} \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left\{\left[\frac{-1}{s^2}(st+1)e^{-st}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{s^2}(1-2s+st)e^{-st}\right]_1^2\right\} \\
&= \frac{1}{s^2}.\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}.
\end{aligned}$$

۹.۶.۳. مثال لاپلاس تابع $f(t) = [t]$ را بیابید.

حل: این تابع متناوب نیست، اما، تابع $g(t) = t - f(t) = t - [t]$ متناوب با تناوب $T = 1$ است. بنابراین:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{g(t)\} &= \mathscr{L}\{t\} - \mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} - \mathscr{L}\{f(t)\} \\
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{s^2} - \mathscr{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1-e^{-s}} \int_0^1 f(t)e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1-e^{-s}} \int_0^1 te^{-st}dt = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1-e^{-s}} \left[\frac{-1}{s^2}(st+1)e^{-st}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2(1-e^{-s})}\left((s+1)e^{-s} - 1\right) = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}.
\end{aligned}$$

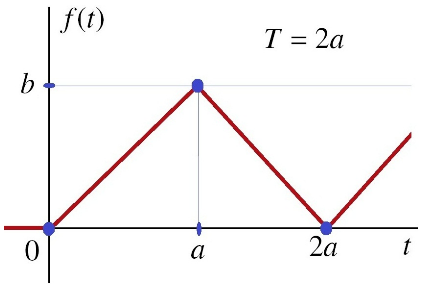
۱۰.۶.۳. تمرینات در هر مورد، لاپلاس تابع متناوب داده شده را بیابید:

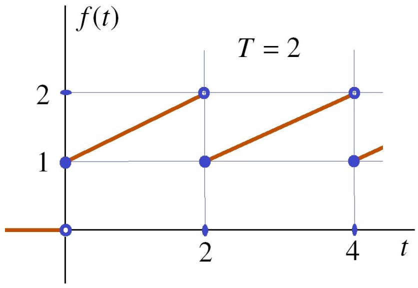
1) $f(t) = |\sin t|,$

2) $f(t) = |\cos t|,$

3) $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \text{ اگر} \\ -1 & 1 \le t \le 2 \text{ اگر} \end{cases} \quad T = 3,$

4) $f(x) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \text{ اگر} \\ 0 & 1 \le t \le 2 \text{ اگر} \end{cases} \quad T = 3.$

5) 

6) 

7) $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t \le \pi \\ 0 & \pi \le t \le 2\pi \end{cases} \quad T = 2\pi,$

8) $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t \le 2\pi \\ 0 & 2\pi \le t \le 4\pi \end{cases} \quad T = 4\pi,$

9) $f(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 2 \\ t-3 & 2 \le t \le 4 \end{cases} \quad T = 4,$

10) $f(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & 2 \le t \le 4 \end{cases} \quad T = 4.$

بخش ۷.۳ تابع ضربه و کانولوشن

۱.۷.۳. تعریف فرض کنید به ازای هر $n \in N$ ای:

$$\delta_n(t) := \begin{cases} 2n & -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n} \text{ اگر} \\ 0 & |t| \ge \frac{1}{n} \text{ اگر} \end{cases}$$

این تابع همه جا صفر است، به جز در حوالی صفر که $2n$ است. چنانچه n به بینهایت میل کند، تابع $\delta_n(t)$ به تابعی غیرعادی به نام **تابع ضربه** میل می‌کند:

$$\delta(t) := \lim_{n\to\infty} \delta_n(t)$$

ملاحظه می‌گردد که

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(t)dt=\lim_{t\to\infty}2n\Big(\frac{1}{n}-\frac{-1}{n}\Big)=1.$$

۲.۷.۳. قضیه *به ازای هر عدد مثبت a، داریم*

$$\boxed{\mathscr{L}\{\delta(t-a)\}=e^{-as},\qquad s>0.} \tag{۲۰.۳}$$

در حالت خاص:

$$\boxed{\mathscr{L}\{\delta(t)\}=1.} \tag{۲۱.۳}$$

اگر به ازای هر $t\geq 0$ تابع f در t پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر $a>0$ داریم:

$$\boxed{\int_0^{\infty}f(t)\delta(t-a)dt=f(a).} \tag{۲۲.۳}$$

۳.۷.۳. تعریف فرض کنید $f(t)$ و $g(t)$ توابع هدف هستند. در این صورت **کانولوشن** این توابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{(f*g)(t):=\int_0^t f(z)g(t-z)dz} \tag{۲۳.۳}$$

۴.۷.۳. قضیه *اگر f,g,h توابع هدف باشند و a,b اعداد ثابت، در این صورت*

$$\begin{array}{ll}1) & f*(g)+bh)=a(f*g)+b(f*h),\\ 2) & f*(g*h)=(f*g)*h,\\ 3) & f*g=g*h.\end{array}$$

۵.۷.۳. قضیه *اگر f,g توابع هدف باشند، در این صورت*

$$\boxed{\mathscr{L}\{f*g\}=\mathscr{L}\{f\}.\mathscr{L}\{g\}} \tag{۲۴.۳}$$

۶.۷.۳. مثال لاپلاس $\displaystyle\int_0^t ze^z\sin 2zdz$ را بیابید.

حل: کافی است این انتگرال را به (۲۴.۳) مربوط کنیم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\Big\{\int_0^t ze^z\sin 2zdz\Big\} &= \mathscr{L}\{1*te^t\sin 2t\}=\mathscr{L}\{1\}.\mathscr{L}\{te^t\sin 2t\}\\ &= \frac{1}{s}\mathscr{L}\{t\sin 2t\}\Big|_{s=s-1}=\frac{-1}{s}\mathscr{L}\{\sin 2t\}'\Big|_{s=s-1}\\ &= \frac{-1}{s}\Big\{\frac{2}{s^2+4}\Big\}'\Big|_{s=s-1}=\frac{-1}{s}\frac{-4s}{s^2+4}\Big|_{s=s-1}=\frac{4(s-1)}{s((s-1)^2+4)}.\end{aligned}$$

۷.۷.۳. مثال معادله انتگرال $y(t)+\int_0^t y(z)(t-z)dz=t$ را حل کنید.

حل: ابتدا از طرفین معادله داده شده لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y\}+\mathscr{L}\{\int_0^t y(z)(t-z)dz\} &= \mathscr{L}(t),\\
\mathscr{L}\{y\}+\mathscr{L}\{y*t\} &= \frac{1}{s^2},\\
\mathscr{L}\{y\}+\mathscr{L}\{y\}.\mathscr{L}\{t\} &= \frac{1}{s^2},\\
\mathscr{L}\{y\}+\frac{1}{s^2}\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2},\\
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2+1},
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$y=\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}=\sin t.$$

۸.۷.۳. مثال معادله انتگرالی $f(t)=e^{-t}-2\int_0^t \cos(t-z)f(z)dz$ که به نام معادله ولترا معروف است را حل کنید.

حل: از طرفین رابطه داده شده لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{e^{-t}\}-2\mathscr{L}\{\int_0^t \cos(t-z)f(z)dz\}\\
&= \frac{1}{1+s}-2\mathscr{L}\{\cos t*f(t)\}\\
&= \frac{1}{1+s}-2\mathscr{L}\{\cos t\}.\mathscr{L}\{f(t)\}\\
&= \frac{1}{1+s}-2\frac{s}{s^2+1}\mathscr{L}\{f\}.
\end{aligned}$$

کافی است این تساوی را برای $\mathscr{L}\{f(t)\}$ حل کنیم. بنابراین

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{s^2+1}{(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)^3}\\
&= \mathscr{L}\{e^{-t}\}-2\mathscr{L}\{te^{-t}\}+\mathscr{L}\{t^2e^{-t}\}.
\end{aligned}$$

بنابراین، داریم:

$$f(t)=e^{-t}-2te^{-t}+t^2e^{-t}=(1-t)^2e^{-t}.$$

۹.۷.۳. تمرینات هر یک از عبارات داده شده را به دست آورید:

1) $(\sin t)*(\cos t)$,	3) $\sinh t*\exp(at)$,	5) $1*1*e^t$,
2) $t*\exp(at)$,	4) $t*\sin t$,	6) $\sin at*\cos bt$.

۷) با محاسبه کانولوشن $f(t)=t^n$ و $g(t)=t^n$، لاپلاس آنها را محاسبه کرده، نشان دهید:

$$\int_0^1 u^n(1-u)^n du = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

لاپلاس هر یک از توابع داده شده را به دست آورید:

$$\begin{array}{llll}
8) & \int_0^t e^{t-z}\sin z dz, & 9) & \int_0^t \cos(t-z)e^{2z}dz,\\
10) & \int_0^t (t-z)^2\cosh z dz, & 11) & \int_0^t (t-z)^n f(z)dz,\\
12) & \int_0^t e^{z(t-z)}z^2 dz, & 13) & \int_0^t e^z\delta(z-2)dz,\\
14) & t\int_0^t \cos z dz, & 15) & \int_0^t e^{-z}\delta(z-1)dz,
\end{array}$$

۱۶) نشان دهید که به ازای هر عدد مثبت a، داریم $u_a(t)=\int_0^t \delta(z-a)dz$.

۱۷) ثابت کنید $\delta * f = f$.

بخش ۸.۳ عملگر معکوس لاپلاس

۱.۸.۳. تعریف در صورتی که $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$ می‌نویسیم:

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

$\mathscr{L}^{-1}$ را **عملگر معکوس لاپلاس** می‌نامیم.

۲.۸.۳. قضیه *اگر $\mathscr{L}\{f(t)\}=\mathscr{L}\{g(t)\}$، آنگاه $f(t)=g(t)+n(t)$ که $n(t)$ تابعی با خاصیت زیر است:*

$$\forall t>0 \ : \ \int_0^t n(t)dt = 0.$$

تابع $n(t)$ را تابع پوچ می‌نامند.

۳.۸.۳. نتیجه *اگر $f(t), g(t)$ توابع پیوسته بر $[0,\infty)$ باشند و $\mathscr{L}\{f(t)\}=\mathscr{L}\{g(t)\}$ آنگاه به ازای هر $t\geq 0$ ای $f(t)=g(t)$. به بیان دیگر، $\mathscr{L}^{-1}$ بر مجموعه توابع پیوسته، یک به یک است.*

اطلاعات در خصوص $\mathscr{L}^{-1}$ از اطلاعات نظیر در ارتباط با $\mathscr{L}$ نتیجه می‌گردد. در واقع، باید به عقب برگشت و اطلاعات را به $\mathscr{L}^{-1}$ ترجمه نمود.

۴.۸.۳. قضیه با توجه به مطالب از پیش گفته شده، داریم:

$$\begin{array}{ll}
1)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s}\Big\}=1, & 2)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^2}\Big\}=t,\\
3)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^n}\Big\}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & 4)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^2+a^2}\Big\}=\frac{1}{a}\sin at,\\
5)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{s}{s^2+a^2}\Big\}=\cos at, & 6)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s-a}\Big\}=e^{at},\\
7)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s-a)^n}\Big\}=\frac{t^{n-1}e^{a}}{(n-1)!}, & 8)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s}F(s)\Big\}=\int_0^t f(z)dz,\\
9)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{\int_0^t F(u)du\Big\}=\frac{1}{t}f(t), & 10)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s)\Big\}=\frac{1}{a}\mathscr{L}^{-1}\Big\{f(\frac{t}{a})\Big\},\\
11)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s}e^{-at}\Big\}=u_a(t), & 12)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{1\Big\}=\delta(t),\\
13)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{e^{-as}\Big\}=\delta(t-a), & 14)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s)G(s)\Big\}=f(t)*g(t),\\
15)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{e^{-as}F(s)\Big\}=u_a(t)f(t-a), & 16)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s-a)\Big\}=e^{at}f(t),\\
17)\ \mathscr{L}^{-1}\Big\{\delta(t-a)f(t)\Big\}=e^{-as}f(a). &
\end{array} \qquad (۲۵.۳)$$

که در اینجا $F(s)=\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\}$ و $G(s)=\Big\{g(t)\Big\}$ عددی مثبت است.

۵.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{s-2}{s^2-s-6}$ را بیابید.

حل: از روش تفکیک کسر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s)\Big\} &= \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{s-2}{(s+2)(s-3)}\Big\}=\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{4/5}{s+2}+\frac{1/5}{s-3}\Big\}\\
&= \frac{4}{5}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s+2}\Big\}+\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s-3}\Big\}=\frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{1}{5}e^{3t}.
\end{aligned}$$

۶.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{1}{s^3+s}$ را بیابید.

حل: از روش تفکیک کسر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s)\Big\} &= \Big\{\frac{1}{s(s^2+1)}\Big\}=\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{-s}{s^2+1}+\frac{1}{s}\Big\}\\
&= -\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{s}{s^2+1}\Big\}+\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s}\Big\}=-\cos t+1.
\end{aligned}$$

۷.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{2s+1}{s^2+2s+4}$ را بیابید.

حل: از قسمت (۱۶) از (۲۵.۳) و قضیه انتقال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+2s+4}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s+1)^2+3}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+1)-1}{(s+1)^2+3}\right\}\\
&= 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}\right\}\\
&\overset{(16)}{=} 2e^{-t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s+(\sqrt{3})^2}\right\}-e^{-t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right\}\\
&= 2e^{-t}\cos\sqrt{3}t-e^{-t}\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t.
\end{aligned}$$

۸.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+1)}$ را بیابید.

حل: با استفاده از قسمت (۸) از (۲۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} &= \int_0^t \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}dt = \int_0^t \sin t dt\\
&= -\cos t\Big|_0^t = 1-\cos t.
\end{aligned}$$

۹.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\ln\left(\dfrac{s-a}{s-b}\right)$ را بیابید.

حل: از قسمت (۹) از قضیه (۲۵.۳) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
F'(s) &= \frac{d}{ds}\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)=\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b},\\
\int_s^\infty\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right\} &= \lim_{B\to\infty}\int_s^B\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right\}\\
&= \lim_{B\to\infty}\Big[\ln(s-a)-\ln(s-b)\Big]_s^B\\
&= \lim_{B\to\infty}\ln\left(\frac{B-a}{B-b}\right)-\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)\\
&= 0-\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)=-\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)=-F(s).
\end{aligned}$$

در نتیجه، داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)\right\} &= -\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right)ds\right\}\\
&= \frac{-1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right\}\\
&= \frac{-1}{t}(e^{at}-e^{bt})=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}.
\end{aligned}$$

۱۰.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s-1)}$ را بیابید.

حل: از قسمت (۱۴) از (۲۵.۳) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}.\frac{1}{s-1}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}*\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = t*e^t\\
&= \int_0^t (t-z)e^z dz = \Big[(t-z+1)e^z\Big]_0^t\\
&= e^t - t - 1
\end{aligned}$$

۱۱.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{s}{(s^2+4)^2}$ را بیابید.

حل: با استفاده از قسمت (۱۴) از (۲۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}.\frac{1}{s^2+4}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}*\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}\\
&= \cos 2t * \frac{1}{2}\sin 2t = \frac{1}{2}(\cos 2t * \sin 2t)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \cos 2z \sin(2t-2z)dz\\
&= \frac{1}{4}\int_0^t [\sin 2t - \sin(4z-2t)]dz\\
&= \frac{1}{4}\left[t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos(4z-2t)\right]_0^t = \frac{t}{4}\sin 2t.
\end{aligned}$$

۱۲.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=e^{-s}/s(s(s-1))$ را بیابید.

حل: از قسمت (۱۰) از (۲۵.۳) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s(s-1)}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}.\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s-1}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s}\right\}\\
&= u_0(t-1).\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}\Big|_{t=t-1} - u_0(t-1)\\
&= u_0(t-1).e^t\Big|_{t=t-1} - u_0(t-1)\\
&= u_0(t-1).(e^{t-1}-1).
\end{aligned}$$

۱۳.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y'-y=\begin{cases} 1 & 0\le t<1 \text{ اگر} \\ -1 & 1\le t \text{ اگر}\end{cases} \qquad y(0)=0.$$

—— آخرین بروز رسانی: ۱۴ فروردین ۱۳۹۱ ——

حل: ابتدا از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم. برای این کار لازم است سمت راست معادله را بر حسب تابع پله‌ای واحد بنویسیم:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'\} - \mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{1 - 2u_0(t-1)\},\\
s\mathscr{L}\{y\} - y(0) - \mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{1\} - 2\mathscr{L}\{u_0(t-1)\},\\
(s-1)\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s} - 2e^{-s}.\frac{1}{s},\\
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s(s-1)} - 2e^{-s}\frac{1}{s(s-1)}.
\end{aligned}
$$

حال از لاپلاس معکوس استفاده می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\} - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s(s-1)}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right\} - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right)\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s-1}\right\} + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\}\\
&= e^t - 1 - 2u_0(t-1)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}\Big|_{t=t-1} + 2u_0(t-1)\\
&= e^t - 1 - 2u_0(t-1)e^t\Big|_{t=t-1} + 2u_0(t-1)\\
&= e^t - 1 + 2(1 - e^{t-1})u_0(t-1)\\
&= \begin{cases} e^t - 1 & \text{اگر } 0 \le t < 1\\ e^t(1- = e^{-1}) & \text{اگر } 1 \le t \end{cases}
\end{aligned}
$$

۱۴.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$
y'' - y' - 6y = \begin{cases} t & \text{اگر } 0 \le t < 1\\ 1 & \text{اگر } 1 \le t \end{cases} \qquad y(0) = y'(0) = 0.
$$

حل: همانند مثال قبل عمل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y''\} - \mathscr{L}\{y\} - 6\mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{t - (t-1)u_0(t-1)\},\\
s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - s\mathscr{L}\{y\} + y(0) - 6\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2} - e^{-s}\mathscr{L}\{t\},\\
(s^2 - s - 6)\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2} - e^{-s}.\frac{1}{s^2},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2(s-3)(s+2)}(1-e^{-s})\\
&= \left(\frac{1}{36}.\frac{1}{s}-\frac{1}{6}.\frac{1}{s^2}+\frac{1}{45}.\frac{1}{s-3}-\frac{1}{20}.\frac{1}{s+2}\right)(1-e^{-s}),\\
y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{36}.\frac{1}{s}-\frac{1}{6}.\frac{1}{s^2}+\frac{1}{45}.\frac{1}{s-3}-\frac{1}{20}.\frac{1}{s+2}\right\}\\
&\quad -u_0(t-1)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{36}.\frac{1}{s}-\frac{1}{6}.\frac{1}{s^2}+\frac{1}{45}.\frac{1}{s-3}-\frac{1}{20}.\frac{1}{s+2}\right\}_{t=t-1}\\
&= \left(\frac{1}{36}-\frac{t}{6}+\frac{1}{45}e^{3t}-\frac{1}{20}e^{-2t}\right)-u_0(t-1)\left(\frac{1}{36}-\frac{t}{6}+\frac{1}{45}e^{3t}-\frac{1}{20}e^{-2t}\right)\Big|_{t=t-1}\\
&= \frac{1}{36}-\frac{t}{6}+\frac{e^{3t}}{45}-\frac{e^{-2t}}{20}-u_0(t-1)\left(\frac{1}{36}-\frac{t-1}{6}+\frac{e^{3(t-1)}}{45}-\frac{e^{-2(t-1)}}{20}\right).
\end{aligned}$$

۱۵.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس تابع $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}$ را بیابید.

حل: از تصاعد هندسی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}.\frac{1}{(1-e^{-s})}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}.(1+e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots)\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s+1}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+1}\right\}+\cdots\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+u_0(t-1)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}_{t=t-1}+\\
&\quad +u_0(t-2)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}_{t=t-2}+\cdots\\
&= e^{-t}+u_0(t-1)e^{-t}\Big|_{t=t-1}+u_0(t-2)e^{-t}\Big|_{t=t-1}+\cdots\\
&= e^{-t}+u_0(t-1)e^{-(t-1)}+u_0(t-2)e^{-(t-2)}+\cdots\\
&= e^{-t}(1+u_0(t-1)e+u_0(t-2)e^2+u_0(t-3)e^3+\cdots).
\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $n\le t<n+1$. در این صورت، تساوی بالا برابر است با

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} &= e^{-t}(1+1e+1e^2+1e^3+\cdots+1e^n+0e^{n+1}+\cdots)\\
&= e^{-t}\frac{e^{n+1}}{e-1}=\frac{-e^{-t}}{e-1}+\frac{e^{1-t}}{e-1}e^{[t]}.
\end{aligned}$$

توجه شود که تابع

$$h(t)=\frac{e^{1-t}}{e-1}e^{[t]}=\frac{e}{e-1}e^{[t]-t},$$

متناوب با تناوب $T=1$ است.

۱۶.۸.۳. مثال در صورتی که $f(t)$ تابع با تناوب $T=1$ است که در بازه $0\le t<1$ برابر t است، (در واقع $f(t)=t-[t]$) مساله زیر را حل کنید:

$$y'+5y=f(t), \qquad y(0)=0.$$

حل: ابتدا لاپلاس تابع متناوب را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'\}+5\mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{f(t)\},\\
s\mathscr{L}\{y\}-y(0)+5\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 f(t)e^{-st}dt,\\
(s+5)\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^t te^{-st}dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{(s+5)(1-e^{-s})}\left[-\frac{st+1}{s^2}e^{-st}\right]_0^1\\
&= \frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(s+5)(1-e^{-s})}=\frac{1}{s^2(s+5)}.\frac{1}{1-e^{-s}}-\frac{s+1}{s^2(s+5)}.\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}}\\
&= \frac{1}{s^2(s+5)}(1+e^{-s}+e^{-2s}+\cdots)-\frac{s+1}{s^2(s+5)}(e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots)\\
&\quad +\frac{1}{25}\left(\frac{4}{s+5}-\frac{4}{s}-\frac{5}{s^2}\right)(e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots)\\
&= \frac{1}{25}\left(\frac{1}{s+5}-\frac{1}{s}+\frac{5}{s^2}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+5}-\frac{1}{s}\right)(e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots)\\
&= \frac{1}{25}\left(\frac{1}{s+5}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)+\frac{e^{-s}}{5(s+5)}+\frac{e^{-2s}}{5(s+5)}+\cdots-\frac{e^{-s}}{5s}-\frac{e^{-2s}}{5s}-\cdots
\end{aligned}$$

اکنون لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{25}\left(\frac{1}{s+5}-\frac{1}{s}+\frac{5}{s^2}\right)\right\}+\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s+5}\right\}+\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+5}\right\}+\\
&\quad \cdots-\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\}-\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s}\right\}-\cdots\\
&= \frac{1}{25}e^{-5t}-\frac{1}{25}+\frac{1}{5}t+\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}\Big|_{t=t-1}.u_1(t)+\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}\Big|_{t=t-2}.u_2(t)+\\
&\quad \cdots-\frac{1}{5}u_0(t-1)-\frac{1}{5}u_0(t-2)-\cdots\\
&= \frac{1}{25}(e^{-5t}-1+5t)+\frac{1}{5}e^{-5(t-1)}.u_1(t)+\frac{1}{5}e^{-5(t-2)}.u_2(t)+\\
&\quad \cdots+\frac{1}{5}u_0(t-1)-\frac{1}{5}u_0(t-2)-\cdots\\
&= \frac{1}{25}(e^{-5t}-1+5t)+\frac{1}{5}u_0(t-1)(e^{5(1-t)}-1)+\frac{1}{5}u_0(t-2)(e^{5(t-2)}-1)+\cdots
\end{aligned}$$

پس اگر $n \leq t < n+1$ آنگاه

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{25}(e^{-5t}-1+5t)+\frac{1}{5}(e^{5(1-t)}-1)+\frac{1}{5}(e^{5(1-t)}-1)+\cdots+\frac{1}{5}(e^{5(n-t)}-1)\\
&= \frac{1}{25}(e^{-5t}-1+5t)+\frac{e^{-5t}}{5}(e^{5}+e^{10}+e^{15}+\cdots+e^{5n})-\frac{n}{5}\\
&= \frac{1}{25}(e^{-5t}-1+5t)+\frac{e^{-5t}}{5},e^{5}\frac{e^{5n}-1}{e^{5}-1}-\frac{n}{5}\\
&= \frac{1}{25}(e^{-5t}-1+5t)+\frac{e^{5(1-t)}}{5}.\frac{e^{[t]}-1}{e^{5}-1}-\frac{[t]}{5}
\end{aligned}$$

۱۷.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y''-2y'+y=3\delta(t-2), \quad y(0)=y'(0)=0.$$

حل: با توجه به مثالهای بالا، داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y''\}-2\mathscr{L}\{y'\}+\mathscr{L}\{y\} &= 3\mathscr{L}\{\delta(t-2)\},\\
s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)-2s\mathscr{L}\{y\}+2y(0)+\mathscr{L}\{y\} &= 3e^{-2s},\\
(s^2-2s+1)\mathscr{L}\{y\} &= 3e^{-2s},\\
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{3e^{-2s}}{(s-1)^2}.
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3e^{-2s}}{(s-1)^2}\right\}=3u_0(t-2)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}\Big|_{t=t-2}\\
&= 3u_0(t-2)\left[e^t\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\right]_{t=t-2}=3u_0(t-2)\left[e^t t\right]_{t=t-2}\\
&= 3u_0(t-2).(t-2).e^{t-2}.
\end{aligned}$$

۱۸.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y''+\omega^2 y=C\delta(t-T), \quad y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_0.$$

حل: همانند مثال قبل عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)+\omega^2\mathscr{L}\{y\} &= C\mathscr{L}\{\delta(t-T)\}\\
(s^2+\omega^2)\mathscr{L}\{y\} &= -Ce^{-sT}+v_0+y_0 s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{ce^{-sT}+v_0+y_0 s}{s^2+\omega^2}\right\}\\
&= C\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-sT}}{s^2+\omega^2}\right\}+v_0\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\}+y_0\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2\omega^2}\right\}\\
&= Cu_0(t-T)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\}\Big|_{t=t-T}+v_0\frac{1}{\omega}\sin\omega t+y_0\cos\omega t\\
&= Cu_0(t-T).\frac{1}{\omega}\sin(\omega(t-T))+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+y_0\cos\omega t
\end{aligned}$$

۱۹.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y''+y=\delta(t-\pi)\cos t,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$$

حل: با توجه به روش کلی، داریم:

$$\begin{aligned}s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)+\mathscr{L}\{y\}&=\mathscr{L}\{\delta(t-\pi)\cos t\},\\ (s^2+1)\mathscr{L}\{y\}-s&=e^{-\pi s}\cos\pi,\\ \mathscr{L}\{y\}&=\frac{1}{s^2+1}\left(s-e^{-\pi s}\right),\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}y&=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}=\sin t-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\Big|_{t=t-\pi}.u_0(t-\pi)\\ &=\sin t-\sin t\Big|_{t=t-\pi}.u_0(t-\pi)=\sin t+\sin t.u_0(t-\pi)=\begin{cases}\sin t & 0\le t<\pi \text{ اگر}\\ 2\sin t & \pi\le t \text{ اگر}\end{cases}.\end{aligned}$$

۲۰.۸.۳. مثال معادله انتگرالی $y(t)=te^t+\int_0^t ty(t-z)dz$ را حل کنید.

حل: در این مساله:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\}&=\mathscr{L}\{te^t\}+\mathscr{L}\left\{\int_0^t ty(t-z)dz\right\}=(-1)\mathscr{L}\{e^t\}'+\mathscr{L}\{t*y(t)\}\\ &=-\left\{\frac{1}{s-1}\right\}'+\mathscr{L}\{t\}\mathscr{L}\{y\}=\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{1}{s^2}\mathscr{L}\{y\},\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mathscr{L}\{y\}=\frac{s^2}{(s+1)(s-1)^3},$$

بنابراین

$$\begin{aligned}y&=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1/8}{s+1}+\frac{1/8}{s-1}+\frac{3/4}{(s-1)^2}+\frac{1/2}{(s-1)^3}\right\}\\ &=-\frac{e^{-t}}{8}+\frac{e^t}{8}(1+6t+2t^2).\end{aligned}$$

۲۱.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y''+4y=\sin t+u_\pi(t)\sin(t-\pi),\qquad y(0)=y'(0)=0.$$

حل:

$$\begin{aligned}\left(s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)\right)+4\mathscr{L}\{y\}&=\mathscr{L}\{\sin t\}+\mathscr{L}\{u_\pi(t)\sin(t-\pi)\},\\ (s^2+4)\mathscr{L}\{y\}&=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}\mathscr{L}\{\sin t\},\\ \mathscr{L}\{y\}=\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}(1+e^{-\pi s})&=\left\{\frac{1/3}{s^2+1}-\frac{1/3}{s^2+4}\right\}(1+e^{-\pi s}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s^2+1}-\frac{1/3}{s^2+4}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\left(\frac{1/3}{s^2+1}-\frac{1/3}{s^2+4}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s^2+1}-\frac{1/3}{s^2+4}\right\}\Big|_{t=t-\pi}.u_0(t-\pi) \\ &= \frac{1}{6}(1-u_\pi(t))(2\sin t-\sin 2t). \end{aligned}$$

۲۲.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y''+y=a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\delta(t-n\pi), \qquad y(0)=y'(0)=0.$$

حل: دراین مساله:

$$s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)+\mathscr{L}\{y\}=a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathscr{L}\{\delta(t-n\pi)\},$$

$$(s^2+1)\mathscr{L}\{y\}=a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n\pi s},$$

$$\begin{aligned} y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n\pi s}\right\}=a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-n\pi s}}{s^2+1}\right\} \\ &= a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\Big|_{t=t-n\pi}.u_{n\pi}(t)=a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin t\Big|_{t=t-n\pi}.u_{n\pi}(t) \\ &= a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(t-n\pi).u_{n\pi}(t)=a\sum^{\infty}n=1\sin t u_{n\pi}(t) \\ &= a\sin t\sum_{n=1}^{\infty}u_{n\pi}(t)=a\sin t[\frac{t}{2\pi}]. \end{aligned}$$

۲۳.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$ty''+2y+(2-t)y=2e^t, \qquad y(1)=\sinh 1.$$

حل: در این مساله:

$$\mathscr{L}\{ty''\}+\mathscr{L}\{y'\}+\mathscr{L}\{2y\}-\mathscr{L}\{ty\}=2\mathscr{L}\{e^t\}$$

$$-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y''\}+2s\mathscr{L}\{y\}-2y(0)+2\mathscr{L}\{y\}+\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y\}=2\frac{1}{s-1}$$

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)\right)+2s\mathscr{L}\{y\}+2\mathscr{L}\{y\}+\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y\}=\frac{2}{s-1}$$

$$(1-s^2)\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y\}+2\mathscr{L}\{y\}=\frac{2}{s-1}$$

که یک معادله خطی مرتبه اول است:

$$\begin{aligned}
h &= \exp\left(\int \frac{2}{1-s^2}ds\right) = \exp\left(\ln\frac{1+s}{1-s}\right) = \frac{1+s}{1-s} \\
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1-s}{1+s}\left(\int \frac{1+s}{1-s}.\frac{2}{(s-1)(1-s^2)}ds + c\right) \\
&= \frac{1-s}{1+s}\left(2\int \frac{ds}{(s-1)^3} + c\right) = \frac{1-s}{1+s}\left(c - \frac{1}{(s-1)^2}\right) \\
&= c\frac{1-s}{1+s} + \frac{1}{s^2-1} = \frac{2c}{s+1} - c + \frac{1}{s^2-1} \\
y &= 2c\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - c\mathscr{L}^{-1}\{1\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} \\
&= 2ce^{-t} - c\delta(t) + \sinh t
\end{aligned}$$

اما مطابق فرض $y(1) = \sinh 1$، در نتیجه $\sinh 1 = 2ce^{-1} - 0 + \sinh 1$ و لذا $c = 0$. پس $y(t) = \sinh t$.

۲۴.۸.۳. تمرینات لاپلاس معکوس هر یک از توابع داده شده را بیابید:

1) $\dfrac{2}{s+4}$,   2) $\dfrac{3}{s^2}$,   3) $\dfrac{3s}{s^2+2}$,

4) $\dfrac{5}{s^2+5}$,   5) $\dfrac{1}{s^2+4} - \dfrac{1}{3s^2}$,   6) $\dfrac{s}{s^2-2} - \dfrac{2}{s-4}$,

7) $\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{3}{s+2} - \dfrac{4}{s^3}$,   8) $\dfrac{2}{s^2-2} - \dfrac{3s}{s^2+1}$,   9) $\dfrac{2}{s^4+2s^2}$,

10) $\dfrac{2}{s^4-1}$,   11) $\dfrac{s-2}{(s+2)(s+1)(s-1)}$,   12) $\dfrac{s-1}{(s+2)(s-2)}$,

13) $\dfrac{4s-2}{4s^2+4s+9}$,   14) $\dfrac{1}{(s^2+4)(s^2+9)}$,   15) $\dfrac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2}$,

16) $\dfrac{2s^3-2s^2-2s+1}{s^2(s-1)}$,   17) $\dfrac{1+s+3s^3-3s^4}{(s+1)(2s^4+s^2)}$,   18) $\dfrac{6s^5-2s^4-2s^2-s+1}{(s-1)(2s^5-s^3)}$,

19) $\dfrac{1}{(s+a)(1-e^{-ks})}$,   20) $\dfrac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$.

هر یک از مسائل داده شده را حل کنید:

21) $y' + 2y = \begin{cases} 2 & 0 \le t < 3 \\ & 3 \le t \end{cases}$, $y(0) = 0,$

22) $y' + y = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ t & 2 < t < 4 \\ 0 & 4 < t \end{cases}$ $y(0) = 0,$

23) $y' - 5y = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ t^3 - 1 & 1 \le t \end{cases}$ $y(0) = 1,$

24) $y'' - 3y' + 2y = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ -1 & 2 \le t \end{cases}$, $y(0) = 0,$

25) $y'' - 5y' + 4y = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 2 \\ 2 & 3 \le t \end{cases}$, $y(0) = 0, y'(0) = 0,$

26) $y'' - 2y' - 3y = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & 2 \le t < 3 \\ 1 & 3 \le t \end{cases}$, $y(0) = 1,$ $y'(0) = -1,$

27) $y'' + 2y' + y = \begin{cases} 1 - t & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t \end{cases}$, $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0,$

28) $y'' - y = tu_0(t-1) - t,$ $y(0) = y'(0) = 0,$

29) $y'' - y' = e^{-t} + e^t u_0(t-3),$ $y(0) = -1,$ $y'(0) = 1,$

30) $y'' + y = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ t & 1 \le t \end{cases}$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0,$

31) $y'' + 2y' = 4 - 3u_0(t-1),$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 2,$

32) $y'' + 2y' + y = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t \end{cases}$, $T = 2,$ $y(0) = y'(0) = 0.$

۳۳) نشان دهید که اگر $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ -1 & 1 \le t < 2 \end{cases}$ تابعی با تناوب $T = 2$ باشد، آنگاه $\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\tanh\left(\frac{s}{2}\right)$.

۳۴) نشان دهید: $\mathscr{L}\{|\sin t|\} = \frac{1}{s^2+1}\coth\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ هر یک از مسائل داده شده را حل کنید

35) $y' - 2y = \delta(t-3),$ $y(0) = 0,$

36) $y' + 3y = \delta(t-1),$ $y(0) = 0,$

37) $y' - 3y = \delta(t-2),$ $y(0) = -1,$

38) $y'' - 5y' + 4y = \delta(t-1),$ $y(0) = y'(0) = 0,$

39) $y'' + 3y' - 4y = \delta(t-2),$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 0,$

40) $y'' + y' - 2y = 4\delta(t-1),$ $y(0) = y'(0) = 1,$

41) $y'' - 4y = t\delta(t-2),$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 1,$

42) $y'' + y = \delta(t-2\pi)\sin t,$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 1,$

43) $y(t)+2\int_0^t y(t-z)\cos z dz = 1,$

44) $y(t)+\int_0^t y(z)dz = t,$

45) $\int_0^t y(z)\sin(t-z)dz = t^3,$

46) $\int_0^t e^{t-z}y(z)dz = t,$

47) $y(t) = \sin t + \int_0^t e^{t-z}y(z)dz,$

48) $y(t) = t^2 - 2\int_0^t y(t-z)\sinh 2z dz,$

49) $y'' - 3y' + 2y = \cos e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0,$

50) $f(t) = t + 2\int_0^t \{(t-z) - \sin(t-z)\} f(t) dz,$

51) $y(t) = \sinh t - \int_0^t \cosh(t-z) y(z) dz,$

52) $y(t) = 1 - 2t - 4t^2 + \int_0^t \{3 + 6(t-z) - 4(t-z)^2\} y(z) dz,$

53) $y'' + y = \dfrac{1}{4+\tan^2 t}, \quad y(0) = y'(0) = 0,$

54) $y''' + y' = \dfrac{1}{(2+\sin t)}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,$

55) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{1+t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

لاپلاس توابع داده شده را بیابید:

56) $\dfrac{1}{s}\arctan\left(\dfrac{1}{s}\right),$ 57) $\ln\left(1+\dfrac{a^2}{s^2}\right),$ 58) $\dfrac{1}{a}\exp\left(-\dfrac{b}{a}t\right) f\left(\dfrac{t}{a}\right).$

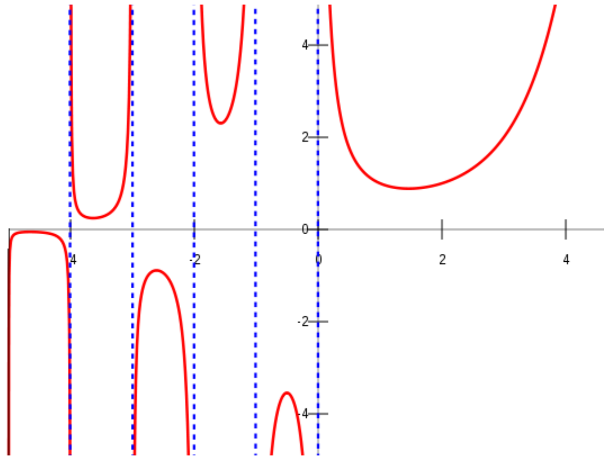
بخش ۹.۳ تابع گاما، بسل و لژاندر

شاید از دید کسی که با ریاضیات عالی آشنا نیست، سخن گفتن از $\frac{1}{2}!$ عجیب باشد! اما این موضوع و بسیاری دیگر ممکن است.

۱.۹.۳. تعریف تابع گامای k، با نماد $\Gamma(k)$ را به صورت انتگرال ناسره:

$$\boxed{\Gamma(k) := \int_0^\infty x^{k-1}e^{-x}dx,} \tag{۲۶.۳}$$

تعریف می‌کنیم. این انتگرال همواره موجود است مگر وقتی که k صفر و یا صحیح منفی باشد.



نمودار تابع گاما $\Gamma(x)$

۲.۹.۳. قضیه اگر $k\in\mathbb{R}-\{0,-1,-2,\cdots,-n,\cdots\}$، آنگاه

$$1)\ \Gamma(1)=1, \qquad 2)\ \Gamma(k)=\frac{1}{k}\Gamma(k+1),$$

$$3)\ \forall k\in\mathbb{Z}\ :\ \Gamma(k+1)=k!, \qquad 4)\ \Gamma\Big(\frac{-1}{2}\Big)=-2\sqrt{\pi}.$$

۳.۹.۳. مثال نشان دهید $\mathscr{L}\{t^{-1/2}\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$.

حل: به کمک تعریف، داریم:

$$\mathscr{L}\{t^{-1/2}\}=\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-st}dt=\int_0^\infty t^{1/2-1}e^{-st}dt.$$

اکنون از تغییر متغیر $u=st$ استفاده می‌کنیم:

$$\mathscr{L}\{t^{-1/2}\}=\int_0^\infty \Big(\frac{u}{s}\Big)^{1/2-1}e^{-u}\frac{du}{s}=\frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty u^{1/2-1}e^{-u}du=\frac{1}{\sqrt{s}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big).$$

۴.۹.۳. مثال لاپلاس $t^{n-1/2}$ که $n\in N$ را به دست آورید.

حل: فرض کنیم $F_n(s):=\mathscr{L}\{t^{n-1/2}\}$، در این صورت

$$\begin{aligned}
F_n(s) &= \mathscr{L}\{t.t^{n-1-1/2}\}=-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{t^{n-1-1/2}\}=-\frac{d}{ds}F_{n-1}(s)\\
&= (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F_{n-2}(s)=\cdots=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F_0(s)=(-1)^n\sqrt{\pi}\frac{d^n}{ds^n}s^{-1/2}\\
&= (-1)^n\sqrt{\pi}\Big(\frac{-1}{2}\Big)\Big(\frac{-3}{2}\Big)\cdots\Big(-\frac{1}{2}-n+1\Big)s^{-1/2-n}\\
&= \frac{1\times3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}s^{-(n+1/2)}=\frac{(2n)!}{2^{2n}.n!}\sqrt{\pi}s^{-(n+1/2)}.
\end{aligned}$$

۵.۹.۳. مثال لاپلاس $t^{n-1/2}e^{at}$ را به دست آورید.

حل:

$$\mathscr{L}\{t^{n-1/2}e^{at}\}=\mathscr{L}\{t^{n-1/2}\}\Big|_{s-a}=\frac{(2n)!}{2^{2n}.n!}\sqrt{\pi}(s-a)^{-(n+1/2)}.$$

۶.۹.۳. تعریف اگر p عددی صحیح دلخواه باشد، تابع بسل از مرتبه p ام را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{J_p(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+p}.} \qquad (۲۷.۳)$$

۷.۹.۳. قضیه با نمادهای بالا داریم:

1) $\mathscr{L}\left\{J_0(t)\right\} = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$, 2) $J_{n+1}(t) = \dfrac{2n}{t}J_n(t) - J_{n-1}(t)$,

3) $\mathscr{L}\left\{J_n(t)\right\} = \dfrac{(\sqrt{1+s^2}-s)^n}{\sqrt{1+s^2}}$, 4) $J_n(t) = \dfrac{1}{2}(J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t))$,

5) $\mathscr{L}\left\{t^{n/2}J_n(2\sqrt{t})\right\} = \dfrac{e^{-1/s}}{s^{n+1}}$.

۸.۹.۳. تعریف اگر n عددی صحیح و نامنفی باشد، n امین چند جمله‌ای لژاندر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left\{(t^2-1)^n\right\}.} \qquad (۲۸.۳)$$

۹.۹.۳. نتیجه با توجه به تعریف بالا داریم:

1) $P_0(t) = 1$, 2) $P_1(t) = t$,

3) $P_2(t) = \dfrac{1}{2}(3t^2-1)$, 4) $P_2(t) = \dfrac{1}{2}(5t^2-3t)$,

5) $P_n(t) = \dfrac{e^t}{n!}\dfrac{d}{dt^n}(t^n e^{-t})$, 6) $\mathscr{L}\left\{P_n(t)\right\} = \dfrac{1}{s}\left(1-\dfrac{1}{s}\right)^n$.

فهرست مطالب