فصل ۴

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سریها

[۱] چنانچه جواب یک معادله دیفرانسیل به صورت صریح، ضمنی و یا پارامتری برحسب توابع مقدماتی ممکن نباشد، نظیر معادله آیرس $y'' + xy = 0$ روشهای در پیش گفته شده به کار نمی‌آیند. دو روش کلی برای این وضعیت وجود دارد: روش عددی و روش سریها. در روش عددی، جواب مساله به طور تقریبی با تقریب مناسب به دست می‌آید. موضوع این فصل، روش دوم یعنی روش سریها است. برای پرداختن به این بحث نیاز به آشنایی با سریهای تبلور می‌باشد.

بخش ۱.۴ سری توان

۱.۱.۴. تعریف سری توان عبارتی است به شکل:

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots,$$

که $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ اعداد ثابتند و ضرایب سری نامیده می‌شوند. معنی دقیق سری بالا چنین است:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n\right\}.$$

سری توان بالا را به صورت خلاصه با نماد $\sum_{t=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i$ نیز نشان می‌دهند.

که صورتی می‌گوییم سری توان همگرا در $x = x_1$ است که اگر در آن به جای x از x_1 استفاده شود، حد دنباله حاصل موجود باشد.

۲.۱.۴. قضیه *فرض $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ یک سری توان است. عدد $R \in [0, +\infty]$ با تعریف:*

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad \text{یا} \quad R = \lim_{n\to\infty} 1 \equiv \sqrt[n]{|s_{n+1}|},} \tag{۱.۴}$$

را شعاع همگرایی سری می‌نامیم. در این صورت

---

[۱] —— آخرین بروز رسانی: ۱۴ فروردین ۱۳۹۱ —— تالیف: مهدی نجفی‌خواه، دانشیار ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران. هرگونه انتقاد و یا پیشنهادی را با نویسنده به آدرس m_nadjafikhah@iust.ac.ir در میان بگذارید. این کتاب در دست تهیه است و احتمالا در حال تغییر. لطفا آخرین نسخه آن را تهیه کنید: http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/Courses/ODE/Fa4.pdf

الف) اگر $|x_1 - x_0| < R$، آنگاه سری به ازای $x = x_1$ همگرای مطلق است. به این معنی که سری عددی $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x_1 - x_0| < R$ همگرا است.

ب) اگر $|x_1 - x_0| > R$، آنگاه سری به ازای $x = x_0$ واگرا است.

۳.۱.۴. تعریف مجموعه همه x هایی که سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ به ازای آن همگرا است را دامنه همگرایی سری می‌نامند و با نماد DC نشان می‌دهند. بنا به قضیه ۲-۱-۴ داریم:

$$\boxed{(-R,R) \subseteq DC \subseteq [-R,R].} \tag{۲.۴}$$

توجه شود که ممکن است $R = 0$ یا $R = \infty$ شود!

۴.۱.۴. مثال دامنه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به ۲-۱-۴ داریم:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1/n}{1/(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

بنابراین $(-1,1) \subseteq DC \subseteq [-1,1]$، باید نقاط $x = 1$ و $x = -1$ را جداگانه تحلیل کنیم:

$$x = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{واگرا} \qquad x = -1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \ln 2 \ \text{همگرا به}$$

بنابراین $DC = [-1,1)$.

۵.۱.۴. مثال دامنه همگرایی سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به ۲-۱-۴ داریم:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1/n!}{1/(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

بنابراین $DC = (-\infty,+\infty) = R$ و سری به ازای کلیه مقادیر همگرا است.

۶.۱.۴. مثال دامنه همگرایی سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-!)^n}{2^n}(x-1)^n$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به ۲-۱-۴ داریم:

$$R = \lim_{n\to\infty} 1 \equiv \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 1 \equiv \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right|} = 3.$$

بنابراین $[-1,3] \subseteq DC \subseteq [-1,3]$ نقاط $x = 3, x = -1$ را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$x = -1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad \text{واگرا}$$

$$x = 3 \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \quad \text{واگرا}$$

پس $DC = (-1,3)$.

۷.۱.۴. قضیه فرض کنیم $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ به ازای $x\in DC$. در این صورت

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

۸.۱.۴. تعریف فرض کنید $y=f(x)$ در $n=x_0$ بینهایت بار مشتق پذیر است. سری تیلور f در x_0 را به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$$

را سری تیلور f در x_0 می‌نامیم. اگر $x_0=0$، سری را مک لورن می‌نامم.

اگر این سری در یک همسایگی از x_0 با خود تابع $y=f(x)$ برابر باشد، می‌گوییم تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=x_0$ تحلیلی است.

بنابه ۵-۱-۴ حد مجموع یک سری توان در نقطه مرکزش تحلیلی است.

۹.۱.۴. مثال سریهای مک لورن زیر در ادامه به کار می‌آیند:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, && DC=\mathbb{R},\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}-\cdots, && DC=\mathbb{R},\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{6!}+\cdots, && DC=\mathbb{R},\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{4}+\cdots, && DC=(-1,1],\\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots, && DC=(-1,1).
\end{aligned} \tag{۳.۴}$$

۱۰.۱.۴. مثال این طور نیست که هر تابع بینهایت بار مشتق پذیر، تحلیلی باشد. مثلا:

$$f(x)=\begin{cases}\exp(-1/x) & \text{اگر } x>0\\ 0 & \text{اگر } x\le 0\end{cases}$$

در نقطه $x=0$ بینهایت بار مشتق پذیر بوده و تمام مشتقات آن در $x=0$ صفر است. در حالی که f در حوالی $x=0$ صفر نیست، پس f در $x=0$ تحلیلی نیست.

۱۱.۱.۴. قضیه فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ یک سری توان با شعاع همگرایی R است. در این صورت

$$1)\quad \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{d}{dx}(x-x_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$2)\quad \int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_a^b(x-x_0)^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^n\Big|_a^b.$$

شعاع همگرایی هر دو سری حاصل بزرگتر یا مساوی شعاع همگرایی سری R است. به علاوه لازم است که $[a,b]\subseteq DC$.

۱۲.۱.۴. قضیه *شرط لازم و کافی برای اینکه $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ این است که به ازای هر n ای $a_n = b_n$.*

۱۳.۱.۴. مثال معادله $y' = y$ را به روشهای سریها حل کنید.

حل: فرض کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک جواب معادله است. در این صورت $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ و لذا:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0,\\
(a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots &= 0.
\end{aligned}$$

بنابراین، باید کلیه ضرایب صفر باشند:

$$\begin{aligned}
a_1 - a_0 = 0, &\implies a_1 = a_0,\\
2a_2 - a_1 = 0, &\implies a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_0,\\
3a_3 - a_2 = 0, &\implies a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{6}a_0,\\
na_n - a_{n-1} = 0, &\implies a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{n!}a_0,
\end{aligned}$$

و در مجموع داریم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!}x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x,$$

که $a_0 = y(0)$. این جواب با جوابی که از حل معادله تفکیک پذیر $y' = y$ نتیجه می‌گردد، یکی است.

۱۴.۱.۴. مثال معادله $y'' + y = 0$ را به روشهای سریها حل کنید.

حل: فرض کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب مساله است، در این صورت

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0,\\
(2a_2 + a_0) + (6a_3 + a_1)x + (12a_4 + a_2)x^2 + \cdots&\\
\cdots + (n(n-1)a_n - a_{n-2})x^{n-2} + \cdots &= 0.
\end{aligned}$$

پس باید همه ضرایب صفر باشند:

$$\begin{aligned}
2a_2 + a_0 = 0, &\implies a_2 = \frac{-1}{2}a_0,\\
6a_3 + a_1 = 0, &\implies a_3 = \frac{-1}{6}a_1,\\
&\vdots\\
n(n-1)a_n + a_{n-1} = 0, &\implies a_n = \frac{1}{n(n-1)}a_{n-1}.
\end{aligned}$$

—— آخرین بروز رسانی: ۱۴ فروردین ۱۳۹۱ ——

در نتیجه:

$$\begin{aligned} y &= (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots) + (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots) \\ &= a_0(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots) + a_1(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots). \end{aligned}$$

پس جواب این معادله عبارتست از:

$$y = a_0 \cos t + a_1 \sin t.$$

۱۵.۱.۴. مثال معادله $y'' + xy' + y = 0$ را به روش سریها حل کنید.

حل: فرض کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ یک جواب معادله است. دراین صورت

$$y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + xy = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} + y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0.$$

پس باید ضریب همه توانهای x صفر باشد.

$$\begin{aligned} 2a_2 + a_0 = 0, &\implies a_2 = \frac{1}{2}a_0, \\ 6a_3 + a_1 + a_1 = 0, &\implies a_3 = -\frac{1}{3}a_1, \\ 12a_4 + 2a_2 + a_2 = 0, &\implies a_3 = -\frac{1}{3}a_1, \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0, &\implies a_{n+1} = \frac{1}{n+2}a_n. \end{aligned}$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots \\ &= a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \cdots + (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{4})\cdots(\frac{-1}{2n})2x^{2n} + \cdots\right) \\ &\quad + a_0\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{15}x^4 - \cdots + (-\frac{1}{3})(-\frac{1}{5})\cdots(-\frac{1}{2k+1}x^{2k} + \cdots\right) \\ &= a_0\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{15}x^4 - \cdots + (\frac{-1}{3})(\frac{-1}{5})\cdots(\frac{-1}{2k+1})x^{2k} + \cdots\right) \\ &= a_0 \sum^{\infty} k = 0 \frac{(-1)^k}{2\times 4\times\cdots\times(2k)}x^{2k} + a_1 \sum^{\infty} k = 0 \frac{(-1)^k}{3\times 5\times\cdots\times(2k+1)}x^{2k+1}. \end{aligned}$$

۱۶.۱.۴. مثال معادله $(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$ را بر بازه $(-1, 1)$ حل کنید.

حل: فرض کنیم $y = \sum^{\infty} n = 0 a_nx^n$ یک جواب مساله است. دراین صورت

$$\begin{aligned} (1-x^2)\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-1} - 6x\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^n - 6\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n &= 0. \end{aligned}$$

پس باید ضریب همه توانهای x صفر باشد:

$$\begin{aligned}
2a_2-4a_0=0, &\implies a_2=2a_0,\\
6a_3-6a_1-4a_1=0, &\implies a_3=\frac{5}{3}a_1,\\
12a_4-2a_2-4a_2=0, &\implies a_4=\frac{3}{2}a_2,\\
20a_5-2a_3-18a_3=0, &\implies a_5=\frac{7}{5}a_3,\\
\vdots \quad &\quad\ \vdots\\
(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-6na_n-4a_n=0, &\implies a_{n+2}=\frac{n+4}{n+2}a_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{2k+2}{2k}a_{2(k-1)}=\frac{2k+2}{2k}.\frac{2k}{2k-2}.\cdots.\frac{6}{4}.\frac{4}{2}a_0=(k+1)a_0,\\
a_{2k+1} &= \frac{2k+3}{2k+1}a_{2k-1}=\frac{2k+3}{2k+1}.\frac{2k+1}{2k-1}.\cdots.\frac{7}{5}.\frac{5}{3}a_1=\frac{2k+3}{3}a_1.
\end{aligned}$$

پس در مجموع:

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}\\
&= a_0\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{2k}+a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+3}{3}x^{2k+1}\\
&= a_0\sum_{k=0}^{\infty}k(x^2)^k+a_0\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}+\frac{2}{3}xa_1\sum_{k=0}^{\infty}k(x^2)^k+a_1x\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}\\
&= a_0\left(\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k\right)'|_{\theta=x^2}+a_0\frac{1}{1-x^2}+\frac{2}{3}xa_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k\right)'|_{\theta=x^2}+a_1x\frac{1}{1-x^2}\\
&= a_0\frac{2x}{1-x^2}+\frac{a_0}{1-x}+\frac{2}{3}xa_1\frac{2x}{1-x^2}+a_1\frac{x}{1-x^2}\\
&= \frac{1}{1-x^2}\left\{\frac{4}{3}a_1x^2+(3a_0+a_1)x+a_0\right\}.
\end{aligned}$$

۱۷.۱.۴. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y''-(x+1)y'+x^2y=x,\qquad y(0)=y'(0)=1.$$

حل: فرض کنیم $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}y_nx^n$ جواب مساله است که $y_n=f^{(n)}(0)$. بنا به فرض مساله $y_0=y_1=1$. بعلاوه

$$y_1=y''(0)=(0+1)y(0)-(0)^2y(0)+(0)=1.$$

اگر از طرفین معادله داده شده نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$y'''-(x+1)y''+(x^2-1)y'+2xy=1.$$

در نتیجه:

$$y_3 = y'''(0) = ((0)+1)y_2 - ((0)^2-1)y_1 - 2(0)y_0 + 1 = 3.$$

به طور مشابه:

$$y_4 = y^{(4)}(0) = \{(x+1)y''' + (2-x^2)y'' - 4xy' - 2y\}_{x=0} = 3$$

و $\cdots$.

پس در مجموع داریم:

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \cdots.$$

۱۸.۱.۴. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$(1-x^2)y'' + xy' - y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

حل: فرض کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب مساله است. در این صورت

$$\begin{aligned}(1-x^2)(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots) + x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots)&\\ -(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) &= 0,\\ (2a_2 - a_0) + 6a_3x + (12a_4 - a_2)x^2 + (20a_5 - 4a_3)x^3 + \cdots&\\ \cdots + ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + na_n - a_n)x^n + \cdots &= 0.\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}2a_2 - a_0, &\implies a_2 = \frac{1}{2}a_0,\\ 6a_3 = 0, &\implies a_3 = 0,\\ 12a_4 - a_2 = 0, \implies a_4 = \frac{1}{12}a_2 &\implies a_2 = \frac{1}{24}a_0,\\ &\vdots\\ (n+2)(n+1)a_{n+1} - (n-1)^2a_n = 0, &\implies a_{n+2} = \frac{n^2-2n+1}{n^2+3n+2}a_n.\end{aligned}$$

نتیجه اینکه همه ضرایب فرد صفرند و بعلاوه

$$a_{2k} = \frac{a_0}{(2k-1)(2k)(2k-2)\cdots(4)(2)} = \frac{a_0}{(2k-1)2^k k!}.$$

اما مطابق فرض $y(0) = 1$، پس $a_0 = 1$. از طرفی $y'(0) = 1$ پس $a_1 = 1$. بنابراین:

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k-1)2^k k!}.$$

۱۹.۱.۴. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$xy''' + y' = y, \qquad y(1) = 1, \qquad y'(1) = 0, \qquad y''(1) = 1.$$

حل: چون دامنه این معادله $(y''' = (y-y')/x)$ است $R-\{0\}$ پس تنها در یک همسایگی به شعاع حداکثر یک از نقطه $x=1$ می‌توان دنبال جواب گشت. فرض کنیم $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ جوابی برای مساله است و $0<x<2$، در این صورت

$$\begin{aligned} & x(6a_3+24a_4(x-1)+60a_5(x-1)^2+\cdots+n(n-1)(n-2)a_n(x-1)^{n-3}+\cdots) \\ & \quad +(a_1+2a_2(x-1)+3a_3(x-1)^2+\cdots+na_n(x-1)^{n-1}+\cdots) \\ = \; & a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_n(x-1)^n+\cdots \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} & (6a_3+a_1-a_0)+(24a_4+12a_3+2a_2)(x-1)+(60a_5+48a_4+9a_3)+a_2)(x-1)^2+\cdots \\ & \quad +((n+3)(n+2)(n+1)a_{n+3}+(n+2)(n+1)a_{n+2} \end{aligned}$$

پس با صفر قرار دادن همه ضرایب داریم:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{6}(a_0-a_1) \\ a_4 &= \frac{1}{24}(-12a_3-2a_2) \\ a_5 &= \frac{1}{60}(-48a_4-9a_3-a_2)\cdots \\ a_{n+3} &= -\frac{(n+2)(n+1)na_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+a_n}{(n+3)(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

اما مطابق فرض $a_0=y(1)=1$، $a_1=y'(1)=0$ و $a_2=\frac{1}{2}y''(1)=\frac{1}{2}$. با قرار دادن اینها در فرمولهای بالا داریم:

$$a_3=\frac{1}{6}, a_4=-\frac{1}{8}, a_5=\frac{1}{15},\cdots$$

در نتیجه جواب مساله چنین است:

$$y=1+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3-\frac{1}{8}(x-1)^4+\frac{1}{15}(x-1)^4+\cdots$$

مثال ۲۰.۱.۴. معادله $y''+\sin xy'+e^x y=0$ را حل کنید.

حل: ضرایب این معادله چند جمله‌ای نیستند، پس آنها را بر حسب سری لورن بسط می‌دهیم:

$$y''+\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{125}-\cdots\right)y'+\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots\right)y=0$$

حال فرض کنیم $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب مساله است در این صورت

$$\begin{aligned} & (2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\cdots)+ \\ & \quad +(x-x^3/6+x^5/125-\cdots)\times(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots)+ \\ & \quad +(1+x+x^2/2+x^3/6+\cdots)\times(a_0+a_1x+a^2x^2+\cdots)=0 \end{aligned}$$

به بیان دیگر داریم:

$$(2a_2+a_0)+(6a_3+2a_1+a_0)x+(12a_4+3a_2+a_1+a_0/2)x^2+(20a_5+4a_3+a_2+a_1/3+a_0/6)x^3+\cdots=0$$

با صفر قرار دادن ضریب توانهای مختلف داریم:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2}, a_3 = -\frac{1}{6}(2a_1 + a_0) \\ a_4 &= -\frac{1}{12}(2a_0 - a_1), a_5 = \frac{1}{20}a_0 + a_1, \cdots \end{aligned}$$

پس در مجموع داریم:

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots\right)$$

که a_0 و a_1 ضرایب دلخواه هستند.

۲۱.۱.۴. تمرینات هر یک از معادلات زیر را به روش سریها حل کنید:

1) $y'' + 2y' = 0,$
2) $(1+x)y'' - y = 0,$
3) $y'' + 2y' + y = 0,$
4) $(1-x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0,$
5) $y'' + 4y = 0,$
6) $(x^2-1)y'' + 2xy - 2y = 0,$
7) $y'' - 3y' + 2y = 0,$
8) $x(x+1)y'' + (x+1)y' - y = 0,$
9) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,$
10) $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0,$
11) $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0,$
12) $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0,$
13) $x^2y'' - 2xy' + (2-x^2)y = 0,$
14) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$

هر یک از مسائل زیر را به روش سریها حل کنید:

15) $y'' + xy' - x^2y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = -1,$
16) $x(3-2x)y'' - 6(1-x)y' - 6y = 0,\quad y(1) = 1,\quad y'(1) = 0,$
17) $(x^2+1)y'' + 6xy' + 6y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1,$
18) $y' - xy + x^2 = 0,\quad y(0) = 2,$
19) $x^2y'' = x + 1,\quad y(1) = 1,\quad y'(1) = 0,$
20) $xy'' + x^2y' - 2y = 0,\quad y(1) = 0,\quad y'(1) = -1,$
21) $y'' + 3xy' + e^xy = 2x,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = -1,$
22) $x^2y'' - 2xy' + (\ln x)y = 0,\quad y(1) = 0,\quad y'(1) = 1/2,$
23) $(1-x)y''' - 2xy' + 3y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = -1,$
24) $y''\ln x = (\sin x).y,\quad y(e) = 1/e,\quad y'(e) = 0,$
25) $y''' + x\sin y = 0,\quad y(0) = \pi/2,\quad y'(0) = 0,$
26) $y'' - (1+x^2)y = 0,\quad y(0) = -2,\quad y'(0) = 2.$

بخش ۲.۴ سری فروبینیوس

روش سریها به گونه‌ای در بخش قبل گفته شد، در مواردی به موفقیت نمی‌انجامد. به مثال زیر توجه شود:

۱.۲.۴. مثال معادله اولر $x^2y''-xy'-3y=0$ را به روش سریها حل کنید.

حل: فرض کنیم $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ جواب مساله است، در این صورت

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

بنابراین ضریب $x^n,x^3,x^2,x,1$ به ترتیب برابرند با:

$$\begin{aligned}
-3a_0=0 &\implies a_0=0\\
-a_0-3a_1=0 &\implies a_1=0\\
2a_2-2a_2-3a_2=0 &\implies a_2=0\\
6a_3-3a_3-3a_3=0 &\implies 0a_3=0 \implies \text{دلخواه است } a_3\\
n(-1)a_n-na_n+3a_n=0 &\implies a_n=0
\end{aligned}$$

بنابراین $y=a_3x^3$ که a_3 دلخواه است. اما اینها تمام جوابهای معادله نیستند. می‌دانیم که جواب عمومی این معادله اولر عبارتست از

$$\mathscr{S}\ :\ y=Ax^3+B\frac{1}{x}.$$

این مشکل از آنجا ناشی می‌شود که ممکن است جواب مساله مورد نظر در حوالی نقطه‌ای که انتظار داریم حل شود، تحلیلی نباشد! برای حل این مشکل از نوع دیگری از سریهای تابعی به نام سری فروبینیوس استفاده می‌کنیم.

۲.۲.۴. تعریف نقطه $x=x_0$ را در صورتی یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل:

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x),$$

است که توابع $f(x),a_0(x),a_1(x),\cdots,a_{n-2}(x),a_{n-1}(x)$ در نقطه $x=x_0$ تحلیلی باشند. در غیر این صورت نقطه $x=x_0$ را یک نقطه تکین می‌نامیم.

۳.۲.۴. مثال فرض کنید $x(x-1)y''+y'-2xy=0$، در این صورت

$$y''+\frac{1}{x(x-1)}y'-\frac{2}{x-1}y=0.$$

که توابع ضریب $a_0=2/(x-1),a_1=1/x(x-1)$ هستند. تابع a_1 در همه جا به جز $x=0$ و $x=1$ تحلیلی است و a_0 در همه جا به جز $x=1$ تحلیلی است. پس کلیه نقاط، عادی این معادله هستند، به جز $x=0$ و $x=1$.

۴.۲.۴. مثال معادله $\cos x.y''+\sin x.y'+y=x$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$a_1=\tan x,\quad a_0=\sec x,\quad f=x\sec x.$$

این توابع در همه جا تحلیلی هستند به جز در نقاطی که $\tan x=0$ یعنی $x=k\pi$ که $k\in\mathbb{Z}$.

۵.۲.۴. تعریف معادله $\mathscr{E}\ :\ y''+a_0(x)y'+a_0(x)y=0$ را در نظر بگیرید. نقطه تکین $x=x_0$ را در صورتی یک نقطه تکین عادی $\mathscr{E}$ گوییم که توابع $(x-x_0)a_1(x)$ و $(x-x_0)^2a_0(x)$ در نقطه $x=x_0$ تحلیلی باشد. در غیر این صورت $x=x_0$ را نقطه تکین نامنظم می‌نامند.

۶.۲.۴. مثال مثال (۱) از ۳-۲-۴ را در نظر بگیرید. در این صورت نقطه $x=0$ منظم عادی است. زیرا

$$(x-0)a_1(x) = x.\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}, \qquad (x-0)^2a_0(x) = x^2.\frac{2}{x-1}.$$

که هر دو در $x=0$ تحلیلی هستند. نقطه $x=1$ نیز تکین عادی است. زیرا

$$(x-1).a_1(x) = (x-1).\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x}, \qquad (x-1)^2.a_2(x) = 2(x-1).$$

که هر دو در $x=1$ تحلیلی هستند.

۷.۲.۴. مثال معادله $\mathscr{E}\,:\, x^2(x-1)y''+y'+2x^2y=0$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$a_1 = 1/x^2(x-1)^2, \qquad a_0 = 2/(x-1)^2.$$

در نتیجه $x=0$ و $x=1$ نقاط تکین $\mathscr{E}$ هستند. به علاوه

$$(x-0).a_1(x) = 1/x(x-1)^2, \qquad (x-0)^2.a_0(x) = 2x^2/(x-1),$$

که تابع اول در $x=0$ تحلیلی نیست. پس $x=0$ تکین نامنظم است. به علاوه

$$(x-1).a_1(x) = 1/x^2(x-1), \qquad (x-1)^2.a_0(x) = 2,$$

که تابع اول در $x=1$ تحلیلی نیست. پس $x=1$ نیز تکین نامنظم است.

۸.۲.۴. مثال معادله $\mathscr{E}\,:\,(x^2-9)y''+(x-3)y'+2y=0$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$a_1(x) = \frac{1}{(x+3)^2(x-3)}, \qquad a_0(x) = \frac{2}{(x+3)^2(x-3)^2}.$$

پس نقاط $x=3$ و $x=-3$ نقاط تکین معادله $\mathscr{E}$ هستند. ملاحظه می‌شود که

$$(x+3).a_1(x) = \frac{1}{(x+3)(x-3)}, \qquad (x+3)^2.a_0(x) = \frac{2}{(x-3)^2},$$

که اولی در $x=-3$ تحلیلی نیست. پس $x=-3$ یک نقطه تکین نامنظم $\mathscr{E}$ است. بعلاوه

$$(x-3).a_1 = \frac{1}{(x+3)^2}, \qquad (x-3)^2.a_0(x) = \frac{2}{(x+3)^2},$$

که هر دو در $x=3$ تحلیلی هستند. پس $x=3$ یک نقطه تکین منظم $\mathscr{E}$ است.

۹.۲.۴. قضیه (قضیه فروبینیوس) *فرض کنید $x=x_0$ یک نقطه تکین منظم معادله دیفرانسیل:*

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0,$$

است. در این صورت حداقل یک جواب به شکل:

$$\boxed{y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r}.} \qquad (۴.۴)$$

برای این معادله وجود دارد، که r عددی حقیقی و ثابت است. این جواب در همسایگی‌ای سفته به شکل $0<|x-x_0|<R$ همگرا است.

۱۰.۲.۴. مثال (ادامه مثال ۱.۲.۴) در معادله اولر آمده در ۱-۲-۴ فرض می‌کنیم $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$. در این صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0.$$

ضریب اولین جمله (یعنی x^r) عبارتست از:

$$r(r-1)a_0-ra_0-3a_0=0.$$

با فرض $a_0\neq 0$ (زیرا اگر $a_0=0$، آنگاه r تغییر می‌کند)، نتیجه می‌گیریم $(r-3)(r+1)=0$. بنابراین $r=-1$ یا $r=3$ از طرفی ضریب x^{n+r} عبارتست از

$$(n+r-3)(n+r+1)a_n=0.$$

چنانچه $r=-1$ ضریب مذکور $(n-4)na_n=0$ می‌شود و لذا اگر $n\neq 0$ و $n\neq 4$. آنگاه الزاما $a_n=0$. پس تنها a_0 و a_4 می‌توانند مخالف صفر باشند. در نتیجه:

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n-1}=a_0x^{-1}+a_4x^3.$$

اما اگر $r=3$، آنگاه ضریب x^{n+r} به صورت $n(n+4)a_n=0$ می‌شود. پس اگر $n\neq 0$ آنگاه $c_n=0$. در نتیجه تنها c_0 ممکن است مخالف صفر باشد. در نتیجه:

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=\sum_{n=0}^{\infty}a_0x^{n+3}=a_0x^3.$$

پس در هر حال جواب عمومی معادله مذکور عبارتست از:

$$\mathscr{S}\,:\,y=Ax^{-1}+Bx^3.$$

۱۱.۲.۴. قضیه *فرض کنید $\mathscr{E}\,:\,y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ معادله‌ای دیفرانسیل است و $x=x_0$ یک نقطه تکین عادی آن است. فرض کنید:*

$$u:=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)a_1(x),\qquad v:=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2a_0(x).$$

فرض کنیم معادله مشخصه

$$\boxed{C_{\mathscr{E}}\,:\,r(r-1)+ur+v=0,}\tag{۵.۴}$$

دارای دو ریشه حقیقی r_1 و r_2 است که $r_2\leq r_1$. در این صورت

الف) اگر تفاضل r_1-r_2 با عددی صحیح مثبت و یا صفر برابر نباشد $(r_1-r_2\neq 0,1,2,3,\cdots,n,\cdots)$. در این معادله $\mathscr{E}$ دو جواب به شکل

$$y_1=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\qquad y_2=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n,$$

است که $a_0\neq 0\neq b_n$.

ب) اگر $r_1 - r_2$ عددی صحیح و مثبت باشد $(r_1 - r_2 = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots)$. در این صورت ϵ دارای یک جواب به شکل

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

است که $a_0 \neq 0$. جواب دیگر این معادله ممکن استبه شکل $x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ یا

$$y_2 = C y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n,$$

که C و b_0 اعداد مخالف صفرند، باشد.

ج) اگر $r_1 = r_2$، در این صورت $\mathscr{E}$ تنها یک جواب به شکل:

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

که $a_0 \neq 0$. جواب دیگر این معادله به شکل

$$y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n,$$

است که $b_0 \neq 0$ می‌باشد.

۱۲.۲.۴. مثال معادله $2x^2 y'' + 3xy' - (1 + x)y = 0$ را حل کنید.

حل: نقطه $x = 0$ تنها نقطه تکین معادله است و این نقطه، یک نقطه تکین منظم است. در این مساله:

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x \to 0} x a_1(x) = \lim_{x \to 0} x . \frac{3}{2x} = \frac{3}{2}, \\ v &= \lim_{x \to 0} x^2 a_0(x) = \lim_{x \to 0} x^2 . \frac{-1 - x}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(-1 - x)}{2} = -1/2, \end{aligned}$$

و معادله مشخصه آن چنین است:

$$C_{\mathscr{E}} : r(r - 1) + \frac{3}{2} r - \frac{1}{2} = 0, \Rightarrow 2r^2 + r + 1 = 0.$$

پس $(2r - 1)(r + 1) = 0$ و بنابراین $r_1 = 1/2$ و $r_2 = -1$. چون $r_1 - r_2 = \frac{3}{2}$ صحیح مثبت و یا صفر نیست، حالت الف از ۸-۲-۴ است.

در معادله داده شده فرض می‌کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$، در این صورت

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) a_n x^{n+r-1} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n x^{n+r-1} - (1 + x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

—— آخرین بروز رسانی: ۱۴ فروردین ۱۳۹۱ ——

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\Big\{2(r+1)r+3(r+1)-1\Big\}a_1-a_0=0 &\implies a_1=\frac{a_0}{(2r+1)(r+2)},\\ \Big\{2(r+2)(r+1)+3(r+2)-1\Big\}a_2-a_1=0 &\implies a_2=\frac{a_1}{(2r+3)(r+3)},\\ &\vdots\\ \Big\{2(r+n)(r+n-1)+3(r+n)-1\Big\}a_n-a_{n-1}=0 &\implies a_n=\frac{a_{n-1}}{(2r+2n-1)(r+n+1)}.\end{aligned}$$

پس اگر فرض کنیم $r=r_1=\frac{1}{2}$، آنگاه $a_n=\frac{a_{n-1}}{n(2n+3)}$ و در نتیجه

$$a_n=\frac{1}{n(2n+3)}.\frac{1}{(n-1)(2n+1)}.\cdots.\frac{1}{(1)(5)}a_0=\frac{a_0}{n!.(5).(7)\cdots(3n+3)},$$

و جواب اول عبارتست از

$$y_1=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{x}x^n}{n!.5.7\cdots(2n+3)}.$$

به صورت مشابه با فرض $r=r_1=-1$ داریم $b_n=\dfrac{b_{n-1}}{n(2n-3)}$ و در نتیجه

$$b_n=\frac{1}{n(2n-3)}.\frac{1}{(n-1)(2n-5)}.\cdots.\frac{1}{(1)(-1)}b_0=\frac{-b_0}{n!.(3).(5)\cdots(2n-3)},$$

و لذا جواب دیگر معادله داده شده چنین است:

$$y_2=b_0\left\{\frac{1}{x}-1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!.(3).(5)\cdots(2n-3)}\right\}.$$

۱۳.۲.۴. مثال معادله $x^2y''+x\Big(x+\frac{1}{2}\Big)y'=\Big(x^2+\frac{1}{2}\Big)$ را حول $x=0$ حل کنید.

حل: نقطه $x=0$ یک نقطه تکین عادی معادله مذکور است. به علاوه

$$\begin{aligned}u &= \lim_{x\to 0}x.a_1(x)=\lim_{x\to 0}x.\frac{-1}{x}\Big(x+\frac{1}{2}\Big)=\lim_{x\to 0}-\Big(x+\frac{1}{2}\Big)=\frac{-1}{2}\\ v &= \lim_{x\to 0}x^2.a_0(x)=\lim_{x\to 0}x^2.\frac{1}{x^2}\Big(x^2+\frac{1}{2}\Big)=\lim_{x\to 0}\Big(x^2+\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$C_{\mathscr{E}}:r(r-1)+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0,\implies 2r^2-r-1=0,\implies r_1=1,\ r_2=\frac{-1}{2}.$$

در این مساله نیز $r_1-r_2=\frac{3}{2}$ صحیح مثبت و یا صفر نیست. پس از نوع الف در ۸-۲-۴ است. در معادله داده شده تابع $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ را قرار می‌دهیم. در این صورت

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1}+x\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}-\Big(x^2+\frac{1}{2}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0,$$

که ضریب جمله x^{n+r} چنین است:

$$(n+r)(n+r-1)a_n+(n+r-1)a_{n-1}+\frac{1}{2}(n+r)a_n(n\geq 0)-a_{n-2}-\frac{1}{2}a_{n-1}=0.$$

بنابراین داریم:

$$a_n=\frac{-(2n+2r-3)a_{n-1}+2a_{n-2}}{(2n+2r-1)(n+r)}.$$

به ازای n هایی که $n\geq 2$. در حالت $n=1$ داریم:

$$(r^2+\frac{3}{2}r)a_1+ra_0=0 \implies a_1=\frac{-2}{2r+3}a_0.$$

حال فرض کنیم $r=r_1=1$. در این صورت

$$a_1=-\frac{2}{5}a_0, \qquad \forall n\geq 2:\quad a_n=\frac{-(2n_1)a_{n-1}+2a_{n-2}}{(2n+1)(n+1)}.$$

برخی از جملات آن عبارتند از

$$y_1=a_0x\left(1-\frac{2}{5}x+\frac{9}{35}x^2-\frac{82}{945}x^3+\frac{571}{20790}x^4-\cdots\right).$$

به صورت مشابه، با فرض $r=r_2=\frac{-1}{2}$ داریم:

$$a_1=-a_0, \qquad \forall n\geq 2:\ a_n=\frac{-(2n-4)a_{n-1}+2a_{n-2}}{(2n-2)(n-1/2)}.$$

برخی جملات آن عبارتند از

$$y_2=\frac{a_0}{\sqrt{x}}\left(1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{18}x^3+\frac{119}{360}x^4-\cdots\right).$$

۱۴.۲.۴. مثال معادله $\mathscr{E}:\ x^2y''+x(2+3x)y'-2y=0$ را در حوالی نقطه $x=0$ حل کنید.

حل: تنها نقطه تکین معادله $\mathscr{E}$ نقطه $x=0$ است که آن هم منظم است. به علاوه

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x\to 0} x.a_1(x)=\lim_{x\to 0} x.\frac{2+3x}{x}=\lim_{x\to 0}(2+3x)=0,\\ v &= \lim_{x\to 0} x^2.a_2(x)=\lim_{x\to 0} x^2.\frac{-2}{x^2}=-2, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$C_{\mathscr{E}}:\ r(r-1)+2r-2=0, \implies r^2+2r-2=0, \implies r_1=1,\ \ r_2=-2.$$

پس $r_1-r_2=3$ و حالت ب از قضیه ۸-۲-۴ است. فرض کنیم $y=x^1\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ جواب مساله است. در این صورت

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^{n-1}+x(2+3x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0.$$

با صفر قرار دادن ضرایب توانهای مختلف x داریم:

$$a_1=-3a_0,\qquad a_2=\frac{-3}{2}a_1,\qquad \text{دلخواه}\ a_3,\qquad a_4=-\frac{3}{4}a_3,\qquad \cdots$$

و در حالت کلی

$$n(n-3)a_n+3(n-3)a_{n-1}=0 \implies a_n=-\frac{3}{n}a_{n-1}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-3}{n}a_{n-1}=\frac{-3}{n}\frac{-3}{n-1}a_{n-2}=\cdots=\frac{-3}{n}.\frac{-3}{n-1}\cdots\frac{-3}{4}a_3=-2\frac{(-3)^{n-2}}{n!}a_3\\ y &= \sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}=a_0(x^{-2}-3x^{-1}+\frac{9}{2})+a_3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-2}3^{n-2}}{n!}x^{n-2}. \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{-2}-3x^{-1}+\frac{9}{2}=\frac{1}{2x^2}(9x^2-6x+2),\\ y_2 &= \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-3}3^{n-2}}{n!}x^{n-2}=-\frac{2}{9x^2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-3x)^n}{n!}\\ &= -\frac{2}{9x^2}(e^{-3x}-1+3x-\frac{9}{6}x^2)=\frac{-1}{9x^2}(2e^{-3x}-2+6x-3x^2), \end{aligned}$$

جوابهای مستقل خطی $\mathscr{E}$ هستند.

۱۵.۲.۴. مثال معادله $\mathscr{E}:\ x^2y''-x(2-x)y'+(2+x^2)y=0$ را حول $x=0$ حل کنید.

حل: در این معادله:

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x\to 0}x.a_1(x)=\lim_{x\to 0}x.\frac{x-2}{x}=\lim_{x\to 0}(x-2)=-2,\\ v &= \lim_{x\to 0}x^2.a_0(x)=\lim_{x\to x^2}.\frac{2+x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}(2+x^2)=2. \end{aligned}$$

پس $r_1-r_2=1$ و حالت ب از قضیه ۸-۲-۴ پیش آمده است. فرض کنیم $y=x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ جواب مساله است. در این صورت

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_nx^n-x(2-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+(2+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0.$$

با صفر قرار دادن ضریب توانهای مختلف، داریم:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0, a_2=\frac{a_0}{3},\\ a_3 &= \frac{-a_0}{36},\cdots,a_n=\frac{-1}{n-2}a_{n-1}-\frac{1}{(n-1)(n-2)}a_{n-2}. \end{aligned}$$

در نتیجه، یک جواب از $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y_1 = x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36}x^5 + \cdots + a_n x^{n+2} + \cdots.$$

جواب مستقل خطی دیگر معادله به شکل:

$$y_2 = c y_1 \ln x + x^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

است. به منظور به دست آوردن ضرایب y_2 آنرا در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}2cxy_1' + c(x-2-x^2)y_1 + 10b_0x^{-2} + 2(2b_1-b_0)x^{-1} - b_1 \\ +\sum_{n=1}^{\infty}(n-2)(n-3)b_nx^{n-2} - 2\sum_{n=2}^{\infty}(n-2)n_nx^{n-2} \\ +\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)b_nx^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n = 0.\end{aligned}$$

نتیجه اینکه:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{1}{3}b_0 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{3}b_0 = 0, \quad b_3 = -c, \quad b_4 = \frac{c}{3}, \quad \cdots \quad b_n = c(2n-7)a_{n-2} + n_{n-2}.$$

و یا به اختصار، دومین جواب مستقل خطی $\mathscr{E}$ عبارتست از:

$$y_2 = \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{36}x^5 + \cdots + a_nx^{n+2} + \cdots\right)\ln x - x + \frac{1}{3}x^2 + \cdots + b_nx^{n-2}.$$

۱۶.۲.۴. مثال معادله $\mathscr{E}\ :\ x^2y'' + x(x-1)y' + (1-x)y = 0$ را به روش سریها در حوالی نقطه $x = 0$ حل کنید.

حل: در این مساله:

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x\to 0} x.a_1(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{x-1}{x} = \lim_{x\to 0}(x-1) = -1, \\ v &= \lim_{x\to 0} x^2.a_0(x) = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}(1-x) = 1. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$C_{\mathscr{E}}\ :\ r(r-1) - r + 1 = 0, \implies r^2 - 2r + 1 = 0, \implies r_1 = r_2 = 1.$$

پس حالت ج از قضیه ۸-۲-۴ رخ داده است. فرض کنیم $y = x\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ جوابی از مساله است. بنابراین، بایستی

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n)(n+1)a_nx^{n-1} + x(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1} = 0.$$

یا پس از ساده کردن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2a_nx^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n+2} = 0.$$

پس a_0 دلخواه است، و به ازای هر $n \geq 1$ ای:

$$a_n = -\frac{n-1}{n^2} a_{n-1},$$

و لذا همه a_n های با $n \geq 1$ صفرند. در نتیجه جواب $y = a_0 x$ است. پس $y_1 = x$ یک جواب $\mathscr{E}$ است.
برای به دست آوردن جواب دوم از تغییر تابع $y_2 - uy_1$ یا $y_2 = ux$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$y_2' = u'x + u, \qquad y_2'' = u''x + 2u'.$$

اگر نتیجه را در $\mathscr{E}$ قرار دهیم، داریم:

$$xu'' + (x+1)u' = 0.$$

که یک معادله تفکیک پذیر بر حسب u', x است:

$$\frac{du'}{u'} = -\frac{x+1}{x} dx, \implies \ln u' = -x - \ln x + \ln A.$$

پس $u' = \frac{A}{x} e^{-x}$ و در نتیجه:

$$\begin{aligned}
u &= \int u' dx = A \int \frac{1}{x} e^{-x} dx = A \int \frac{1}{x} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + \cdots\right) dx \\
&= A \left(\ln x - x + \frac{x^2}{4} - \cdots + (-1)^n \frac{x^2}{n.n!} + \cdots\right) + B, \\
y_2 &= xu = A \left(x \ln x - x^2 + \frac{x^3}{4} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n.n!} + \cdots\right) + Bx.
\end{aligned}$$

با فرض $A = 1$ و $B = 0$ داریم:

$$y_2 = x \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n.n!} x^{n+1} = y_1 . \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n.n!} x^{n+1}.$$

۱۷.۲.۴. مثال معادله $\mathscr{E}\ :\ xy'' + y' + xy = 0$ را به روش سریها در حوالی نقطه $x = 0$ حل کنید.

حل: در این مساله:

$$\begin{aligned}
u &= \lim_{x\to 0} x.a_1(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{1}{x} = 1, \\
v &= \lim_{x\to 0} x^2.a_0(x) = \lim_{x\to 0} x^2.1 = 0.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$C_{\mathscr{E}} : r(r-1) + r + 0 = 0.$$

بنابراین $r_1 = r_2 = 0$. فرض کنیم $y = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب مساله است. در این صورت باید داشته باشیم:

$$x. \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x. \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

پس بایستی ضریب توانهای مختلف x صفر باشد:

$$a_1 = 0, \qquad \forall n \geq 2 : a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}.$$

در نتیجه:

$$a_1 = a_3 = a_0 = \cdots = a_{2k+1} = 0,$$
$$a_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2} a_{2(k-1)} = \frac{1}{(2k)^2} . \frac{1}{(2k-2)^2} . \cdots . \frac{-1}{2^2} a_0 = \frac{(-1)^k}{2^{2k}.k!^2} .a_0.$$

پس یک جواب معادله $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}.(k!^2)} x^{2k}.$$

برای به دست آوردن دومین جواب مستقل خطی معادله $\mathscr{E}$، فرض می‌کنیم:

$$y = y_1 . \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

و آن را در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$2y_1' + x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0.$$

پس بایستی:

$$\text{دلخواه} b_0, \quad b_1 = 0, \quad \text{دلخواه} b_2, \quad b_3 = 0, \quad \cdots, \quad b_n = -\frac{2}{n} a_n - \frac{1}{n^2} b_{n-2}.$$

بنابراین همه b_n های با اندیس فرد صفرند و بعلاوه

$$b_2 = (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{2^{2n}.n!} b_0.$$

پس دومین جواب مستقل خطی معاده $\mathscr{E}$ عبارتست از:

$$y_2 = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{128} x^4 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{2^{2n}.n!} x^{2n} + \cdots.$$

۱۸.۲.۴. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را به روش فروبینیوس در حوالی نقطه صفر حل کنید:

1) $x^2y'' - xy' + y = 0,$	2) $x^2y'' + xy' = 0,$
3) $x^2y'' + 3xy' + y = 0,$	4) $4x^2y'' + y = 0,$
5) $4xy'' + 2y' + y = 0,$	6) $2x^2y'' + x(2x+1)y' + 2xy = 0,$
7) $xy'' + (3+2x)y' + 4y = 0,$	8) $(2x^2 - x^2)y'' + (6x^2 - 4x)y' = 2y,$
9) $(x+3x^2)y'' + 2y' = 6xy,$	10) $xy'' + 2y' = xy,$
11) $2x^2y'' + 3xy' = (1+x)y,$	12) $x(1-x)y'' + 3y' = 2y,$
13) $x^2y'' + x^2y' = xy,$	14) $(2x^3 + 6x^2)y'' + (x^2 + 9x)y' = 3y,$
15) $x^2y'' - 2x(x+2)y' + (x+3)y = 0,$	16) $4x(x-1)y'' + 2(1-2x)y' + y = 0,$
17) $xy'' + 2y' + xy = 0,$	18) $x^2y'' - 2xy' + (2+x^2)y = 0,$
19) $4x^2y'' - 4x^2y' + (1+2x)y = 0,$	20) $x^2y'' - 3xy' + 4(x+1)y = 0.$

بخش ۳.۴ توابع بسل

فردریک ویلیام بسل (۱۷۸۴ تا ۱۸۴۶) ریاضیدان آلمانی، در مطالعات خود در خصوص حرکت سماوات به معادلاتی برخورد که امروزه به نام وی شناخته می‌شوند. بعدا این معادلات کاربرهایی در نظریه الکترومغناطیس، انتقال حرکت و آکوستیک پیدا کردند.

۱.۳.۴. تعریف معادله به شکل

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

که n عددی صحیح و نامنفی است، معادله بسل با مشخصه n نامیده می‌شود. موضوع حل این معادله در حوالی نقطه $x = 0$ است.

۲.۳.۴. روش حل معادله بسل در این معادله:

$$\begin{aligned}
u &= \lim_{x\to 0} x.a_1(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{1}{x} = 1,\\
v &= \lim_{x\to 0} x^2.a_0(x) = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{x^2-n^2}{x^2} = -n^2,\\
C_{\mathscr{E}} &: r(r-1) + r - n^2 = 0, \implies r^2 - n^2 = 0, \implies r = \pm n.
\end{aligned}$$

پس $r_1 = n$ و $r_2 = -n$. حال فرض کنیم $y = x\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ جواب مساله است، در این صورت با قرار دادن در معادله بسل داریم:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\{(m+r)(m+r-1) + (m+r) - n^2\}a_m x^{m+r} + \sum^{\infty} m = 0 a_m x^{m+r+2} = 0.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
(2n+1)a_1 = 0, &\quad\implies\quad a_1 = 0,\\
((m+r)^2 - n^2)a_m + a_{m-2} = 0, &\quad\implies\quad a_m = \frac{-1}{(m+r)^2 - n^2}a_{m-2}.
\end{aligned}$$

و به استقرا نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned}
a_{2k+1} &= a_{2k-1} = \cdots = a_3 = a_1 = 0,\\
a_{2k} &= \frac{-1}{(2k+r)^2 - n^2}.\frac{-1}{(2k-2+r)^2 - n^2}.\cdots.\frac{-1}{(r+2)^2 - n^2}a_0.
\end{aligned}$$

اکنون دو حالت در نظر می‌گیریم: الف) $n = 0$ ب) $n > 0$

الف) اگر $n = 0$، در این صورت $r_1 = r_2 = 0$ و لذا:

$$a_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2}.\frac{-1}{(2k-2)^2}\cdots\frac{-1}{(2)^2}a_0 = \frac{(-1)^n}{(2^k.k!)^2}a_0.$$

و بنابراین

$$J_0(x) := \sum^{\infty} k = 0\frac{(-1)^n}{2^{2k}.(n!)^2}x^{2k}.$$

یک جواب معادله به ازای $n = 0$ است.

ب) فرض کنیم $n>0$. در این صورت با فرض $r=r_1=n$ داریم:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{-1}{(2k)(2k+2n)}\cdot\frac{-1}{(2k-2)(2k+2n-2)}\cdots\frac{-1}{(2+2n)(2)}a_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{2.4\cdots(2k)}\cdot\frac{1}{(2k-2)(4+2n)\cdots(2k+2n)}a_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}.k!n!(1+n)(2+n)\cdots(k+n)} = \frac{(-1)^k-2^n.n!}{2^{n+2k}.k!.(n+k)!}. \end{aligned}$$

و بنابراین

$$J_n(x) := \sum^{\infty} m=0\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}.m!(n+m)!}x^{n+2m}.$$

یک جواب معادله بسل با شاخص n است. تابع $J_n(x)$ را n امین تابع بسل می‌نامیم:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{64}-\cdots, \\ J_1(x) &= \frac{x}{2}-\frac{x^3}{16}+\frac{x^5}{384}-\cdots, \\ &\vdots \\ J_n(x) &= \frac{1}{2^n.n!}x^n-\frac{1}{2^{n+1}.(n+1)!}x^{n+2}+\cdots. \\ &\vdots \end{aligned}$$

۳.۳.۴. قضیه (خواص تابع بسل)

۱) *صفرهای تابع بسل $J_n(x)$ بین صفرهای تابع بسل $J_{n+1}(x)$ ظاهر می‌شود و صفرهای $J_{n+1}(x)$ بین صفرهای $J_n(x)$. به علاوه اگر m امین ریشه $J_n(x)$ را $\lambda_{m,n}$ بنامیم، آنگاه به ازای m های به اندازه کافی بزرگ داریم:*

$$\lambda_{m,n}\sim\Big(m+\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\Big).$$

۲) مشتق:

$$a)\ J_0(x)'=-J_1(x),\qquad b)\ J_1(x)'=J_0(x)-\frac{1}{x}J_1(x),$$
$$c)\ (x^nJ_n)'=x^2J_{n-1}(x)\quad\forall n\ge1,\quad d)\ (x^{-n}J_n(x))'=-x^{-n}J_{n+1}(x)\quad\forall n\ge0,$$

۳) *رابطه‌های بازگشتی: اگر $n\ge1$، آنگاه:*

$$a)\ J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x),\quad b)\ J_{n+1}(x)=-2J_n'(x)+J_{n-1}(x),$$

۴) *تعامد توابع بسل: اگر $r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots$ صفرهای مثبت و متوالی تابع بسل $J_n(x)$ باشند، در این صورت*

$$\int_0^1 xJ_n(r_ix)J_n(r_jx)dx=\begin{cases}0 & \text{اگر } i\neq j\\ \frac{1}{2}\{J_n'(r_i)\}^2 & \text{اگر } i=j\end{cases}$$

۴.۳.۴. تعریف توابع بسل با شاخص منفی را نیز می‌توان تعریف نمود:

$$J_{-n}(x) := (-1)^n J_n(x).$$

n امین تابع بسل از نوع دوم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Y_n(x) \quad := \quad & -\frac{1}{2}\sum^{n-1} k = 0\frac{(n-k-1)!}{k!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k-n} + J_n(x)\ln x \\ & -\frac{1}{2}\sum^{\infty} k = 0\frac{(-01)^k}{k!(n+k)!}\left(H_n + \sum^{n+k} t = 1\frac{1}{t}\right)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+n} \end{aligned}$$

که در آن:

$$H_n := \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} & \text{اگر } n \geq 1 \\ 0 & \text{اگر } n = 0 \end{cases}$$

۵.۳.۴. قضیه *به ازای هر $n \geq 0$ ای، جواب عمومی معادله بسل با شاخص n عبارت از:*

$$\mathscr{S} \,:\, y = A_n + BY_n,$$

است که A و B اعداد ثابت دلخواهند.

۶.۳.۴. قضیه *معادله دیفرانسیل:*

$$x^2u'' + (1-2a)xu' + (b^2c^2x^{2c} + a^2 - k^2c^2)u = 0,$$

با تغییر تابع $u = x^a y$ به معادله:

$$x^2u'' + xy' + (b^2x^{2c} - k^2)c^2y = 0,$$

و در ادامه با تغییر متغیر $w = bx^c$ به معادله بسل:

$$w^2\frac{d^2y}{d^2} + \frac{dy}{dw} + (w^2 - k^2)y = 0,$$

تبدیل می‌شود. در نتیجه $u = x^a J_k(bx^c)$ یک جواب آن است.

۷.۳.۴. مثال در معادله $x^2u'' + xu' + (x - \frac{k^2}{4})u = 0$ با فرض، $a = 0$ و $b = 2$ و $c = 1/2$ و با استفاده از ۶-۳-۴ نتیجه می‌گیریم که $u = J_k(2\sqrt{x})$ یک جواب مساله است. به علاوه جواب عمومی آن چنین است:

$$\mathscr{S} \,:\, y = AJ_k(2\sqrt{x}) + BY_k(2\sqrt{x}).$$

۸.۳.۴. مثال در معادله $u'' + b_0x^m u = 0$ با فرض $a = \frac{1}{2}, b = \frac{2}{m}, c = \frac{m}{2}, k = 0$ و با استفاده از ۶-۳-۴ نتیجه می‌گیریم که

$$u = \sqrt{x}J_{1/(m+2)}\left(\frac{2\sqrt{b_0}}{m+2}\sqrt{x^{m+2}}\right),$$

یک جواب معادله است.

۹.۳.۴. مثال با توجه به ۶-۳-۴ تابع $u = \sqrt{x}J_k(x)$ یک جواب معادله زیر است:

$$u'' + \left(1 + \frac{1-4k^2}{4x^2}\right)u = 0.$$

۱۰.۳.۴. قضیه *معادله دیفرانسیل:*

$$x^2y'' + x(1-2x\tan x)u' = (x\tan x + k^2)u.$$

با تغییر تابع $u = y/\cos x$ به معادله بسل

$$x^2u'' + xy' + (x^2-k^2)y = 0,$$

تبدیل می‌گردد. بنابراین، جواب عمومی آن عبارتست از

$$\mathscr{S} : u = \frac{1}{\cos x}\big(AJ_k(x) + BY_k(x)\big).$$

۱۱.۳.۴. تعریف اگر در معادله بسل n عدد صحیح نباشد، می‌توان به جواب رسید. این بار، جواب حاصل عبارتست از:

$$J_n(x) := \sum^{\infty} k = 0 \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

که قبلا در ۴-۹-۳ معرفی شد. در مثال ۲ از ۷-۳-۴ نیز از J_n که n صحیح نیست. استفاده می‌شود.

۱۲.۳.۴. مثال معادله آیری $y'' + xy = 0$ حالت $b_0 = 1$ و $m = 1$ در مثال ۲ از ۷-۳-۴ است. بنابراین:

$$y = \sqrt{x}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right) = \sum^{\infty} k = 0 \frac{(-1)^k(x/2)^{2k+\frac{1}{3}}}{k!\Gamma(k+4/3)}.$$

یک جواب آن است.

۱۳.۳.۴. قضیه *اگر شاخص معادله بسل صحیح باشد، J_n و Y_n جوابهای مستل خطی آن هستند و اگر شاخص آن صحیح نباشد، توابع J_n و J_{-n} جوابهای مستقل خطی آن خواهند بود.*

۱۴.۳.۴. تمرینات در هر مورد نشان دهید y_1 جواب خصوصی $\mathscr{E}$ است:

1) $\mathscr{E} : xy'' - y + xy = 0, \quad y_1 = xJ_1(x),$

2) $\mathscr{E} : xy'' + y' + 2y = 0, \quad y_1 = J_0(2\sqrt{2x}),$

3) $\mathscr{E} : xy'' + 3y' + xy = 0, \quad y_1 = x^{-1}J_1(x),$

4) $\mathscr{E} : xy'' + y' + x^3y = 0, \quad y_1 = J_0\left(\frac{x^2}{2}\right),$

۵) جوابی از $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$ بیابید که $y(1) = 1$.

۶) نشان دهید $y = uJ_0(u)$ که $u = \sqrt{x}$ در معادله $4x^2y'' + (x+1)y = 0$ صدق می‌کند.

۷) نشان دهید تابع $y = \frac{1}{x}J_1(x)$ درمعادله $xy'' + 3y' + xy = 0$ صدق می‌کند.

۸) با تغییر متغیر $u = \sqrt{x}$ معادله $2x^2y'' + 4y' + (x-1)y = 0$ را به معادله‌ای بسل تبدیل کنید. سپس جوابی را بیابید که $y(4) = 1$.

۹) نشان دهید که معادله $xy'' + (1-2p)y' + xy = 0$ دارای جواب خصوصی $x^p J_p(x)$ است.

۱۰) نشان دهید که $\int_0^x t.J_0(t)dt = xJ_1(x)$.

۱۱) نشان دهید که $\int_0^x t^{-1}J_2(t)dt = -x^{-1}J_1(x) + \frac{1}{2}$.

هر یک از روابط زیر را نشان دهید:

$$12)\ (x^kJ_k(x))' = x^kJ_{k-1}(x),\quad 13)\ (x^{-k}J_k(x))' = -x^{-k}J_{k+1}(x),$$
$$14)\ J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x) = \frac{2k}{x},\quad 15)\ J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x) = 2J_k'(x).$$

بخش ۴.۴ چند جمله‌ایهای لژاندر

۱.۴.۴. تعریف فرض کنید k عددی حقیقی است. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + k(k+1)y = 0.$$

را معادله دیفرانسیل لژاندر با شاخص k می‌نامیم. این معادله به م.لژاندر (۱۷۵۲ تا ۱۸۳۳) ریاضیدان فرانسوی منتسب است.

۲.۴.۴. روش حل نقطه $x = 0$ یک نقطه عادی معادله لژاندر است. به علاوه توابع ضریب:

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \frac{-2x}{1-x^2} = -2x(1+x^2+x^4+\cdots), \\ a_0(x) &= \frac{k(k-1)}{1-x^2} = k(k-1)(1+x^2+x^4+\cdots). \end{aligned}$$

در بازه $-1 < x < 1$ تحلیلی هستند. بنابراین، می‌توان فرض کرد که معادله دارای یک جواب به شکل سری مک لوران در این بازه است: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. بنابراین:

$$(1-x^2)\sum^{\infty} n = 2n(n-1)a_nx^{n-2} - 2x\sum^{\infty} n = 1na_nx^{n-1} + k(k-1)\sum^{\infty} n = 0a_nx^n = 0.$$

و درنتیجه:

$$\begin{aligned} 2a_2 + k(k+1)a_0 = 0, &\implies a_2 = \frac{-1}{2}k(k+1)a_0, \\ 6a_3 - 2a_1 + k(k+1)a_1 = 0, &\implies a_3 = \frac{-1}{6}(6-1)(k+2)a_1, \\ 12a_4 - 6a_2 + k(k+1)a_2 = 0, &\implies a_4 = \frac{-1}{12}(k-2)(k+3)a_2, \\ &\vdots \\ (n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n+1)a_n + k(k+1)a_n = 0, &\implies a_{n+2} = \frac{n(n+1)-k(k+1)}{(n+1)(n+2)}. \\ \vdots\ &\vdots \end{aligned}$$

در نتیجه، با تکرار این فرمولها، داریم:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(-1)^n}{(2n)!}k(k+1)(k-2)(k+3)(k-4)(k+5)\cdots(k+2n-1)a_0, \\ a_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(k-1)(k+2)(k-3)(k+4)(k-5)(k+6)\cdots(k+2n)a_1. \end{aligned}$$

بنابراین، جواب عمومی لژاندر عبارتست از:

$$\mathscr{S} : y = AS_k(x) + BT_k(x).$$

که در آن:

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \sum^{\infty} n = 0 a_{2n}x^{2n} \\ &= 1 - \frac{1}{2}k(k+1)x^2 + \frac{1}{24}k(k+1)(k-2)(k+3)x^2 + \cdots \\ T_k(x) &= \sum^{\infty} n = 0 a_{2n+1}x^{2n+1} \\ &= x - \frac{1}{6}(k-1)(k+2)x^3 + \frac{1}{120}(k-1)(k+2)(k-3)(k+4)x^5 + \cdots \end{aligned}$$

- چنانچه k عدد صحیح مثبت فرد $(1, 3, 5, \cdots)$ و یا عدد صحیح منفی زوج $(-2, -4, \cdots)$ باشد، سری توان $T_k(x)$ مختوم خواهد بود و عملا چند جمله‌ای می‌باشد.
- چنانچه k عدد صحیح مثبت زوج $(2, 4, 6, \cdots)$ و یا عدد صحیح منفی فرد $(-1, -3, -5, \cdots)$ باشد، سری توان $S_k(x)$ مختوم خواهد بود و عملا یک چند جمله‌ای می‌گردد.
- چنانچه k صحیح نباشد، هر دو سری S_k و T_k نامتناهی‌اند. آنها توابعی پیوسته از x بر بازه $(-1, 1)$ می‌باشند. در این حالت S_k و T_k را توابع لژاندر با شاخص k می‌نامند.

۳.۴.۴. تعریف در صورتی که k عددی صحیح باشد، معادله لژاندر با شاخص k دارای لااقل یک جواب به شکل چند جمله‌ای است. آن جواب را چند جمله‌ای لژاندر با شاخص k می‌نامیم و با نماد $P_k(x)$ نشان می‌دهیم.

۴.۴.۴. مثال چند جمله‌ای لژاندر با شاخص $0, 1, 2, 3, 4$ به ترتیب عبارتند از:

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \qquad P_4(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^2.$$

البته در آنها به ترتیب فرض شده است:

$$a_0 = \frac{3}{8}, \quad a_1 = \frac{-3}{2}, \quad a_0 = \frac{-1}{2}, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = 1.$$

۵.۴.۴. فرمول کلی n امین چند جمله‌ای لژاندر عبارتست از:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum^{[\frac{n}{2}]} k = 0 \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-2k)!(n-k)!}x^{n-2k}.$$

اقتصاددان فرانسوی، الین رودریگز (۱۷۹۴ تا ۱۸۵۱) نیز فرمولی مختصر به شرح ذیل برای محاسبه چند جمله‌ایهای لژاندر دارد:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

۶.۴.۴. مثال با استفاده از دو فرمول بالا داریم:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{1}{8}\sum^{\infty} k=0\frac{(-1)^k(6-2k)!}{k!(3-2k)!(3-k)!}x^{3-2k} = \frac{1}{8}\left(\frac{6!}{0!3!3!}x^3-\frac{4!}{1!1!2!}x\right) \\ &= \frac{1}{8}(20x^3-12x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{2^3.3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3 = \frac{1}{48}\frac{d^3}{dx^3}(x^6-3x^4+3x^2-1) \\ &= \frac{1}{48}\frac{d^2}{dx^2}(6x^5-12x^3+6x) = \frac{1}{48}(30x^4-36x^2+6)' = \frac{1}{2}(5x^3-3x). \end{aligned}$$

۷.۴.۴. قضیه *چند جمله‌ایهای لژاندر، خواص به شرح زیر را دارند:*

1) $(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x),$

2) $P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x),$

3) $P'_{n+1}(x)-xP'_n(x) = (n+1)P_n(x),$

4) $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0; m \neq n,$

5) $\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2dx = \frac{2}{2n+1}.$

۸.۴.۴. تمرینات

۱) چند جمله‌ایهای $P_7(x), P_6(x), P_5(x)$ را به دست آورید.

۲) به کمک ۴-۴-۷ نشان دهید:

$$(n+1)\int_{-1}^{1} P^2_{n+1}(x)dx = (2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n+1}(x)dx$$

۳) ثابت کنید که اگر $|x| \leq 1$ و $|t| < 1$، آنگاه:

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = P_0(x)+P_1(x)t+P_2(x)t^2+\cdots+P_n(x)t^n+\cdots$$

۴) به کمک (۳) ثابت کنید $P_n(1) = 1$.

۵) نشان دهید که اگر $Q(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه کمتر از n باشد، آنگاه:

$$\int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)dx = 0.$$

۶) ثابت کنید $P_n^{(n)}(x) = (2n)!/(2^n.n!)$.

۷) نشان دهید که اگر $n \geq 1$ آنگاه $\int_0^1 P_{2n}(x)dx = 0$.

۸) ثابت کنید که اگر $0 \leq m \leq n$، آنگاه $\int_{-1}^{1} P'_n(x)P_m(x)dx = 1-(-1)^{n+m}$.

فهرست مطالب