دانشگاه علم و صنعت ایران
دانشکدهٔ ریاضی

نظریهٔ هم‌ارزی کارتان، تقارن و دستگاه دیفرانسیل خارجی

رساله برای دریافت درجه

دکتری

در رشتهٔ ریاضی محض، گرایش هندسه دیفرانسیل

علی مهدی پور شیرایه

استاد راهنما:
دکتر مهدی نجفی‌خواه

بهار ۱۳۸۸

بسم اللّه الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدر و مادر دلسوز و مهربانم

و برادران عزیزم

تشکر و قدردانی

ستایش خداوندی را که سخنوران در ثنایش فرو مانند و شمارندگان از شمارش نعمت‌هایش عاجز آیند و کوشندگان هرچه کوشند، حق نعمتش را آنسان که شایستهٔ اوست، ادا کردن نتوانند. خداوندی که اندیشه‌های دور پرواز، او را درک نکنند و زیرکان تیزهوش به عمق جلال و جبروت او نرسند. خداوندی که فراخنای صفاتش را نه حدی است و نه نهایتی و وصف جلال و جمال او را سخنی در خور نتوان یافت، که در زمان نگنجد و مدت نپذیرد (خطبهٔ ۲۹ حضرت علی (ع)).

درود فراوان بر بندگان صالح و پرهیزگار خداوند، بخصوص بر حضرت مهدی (عج) که منجی عالم بشریت و واسطهٔ فیض الهی است.

در طول دورهٔ دکتری و قبل از آن راهنمایی‌ها و مساعدت‌های استاد عزیزم آقای دکتر نجفی‌خواه راهگشای فهم بسیاری از مسائل ومشکلاتم بوده است؛ از ایشان کمال تشکر را دارم و برایشان آرزوی توفیق روزافزون می‌کنم. همچنین مراتب سپاس خویش را نسبت به اساتید گرانقدر دانشکده، آقایان دکتر مسعود هادیان دهکردی، دکتر تولایی، دکتر آقاجانی و نیز اساتید محترم دانشگاه صنعتی امیرکبیر آقایان دکتر رضوی و دکتر میرمحمدرضایی که زحمت داوری این رساله را بعهده داشته‌اند، ابراز می‌دارم. در نهایت از تمامی دوستانی که در یادگیری مطالب و طی این مسیر مرا یاری نموده‌اند، سپاسگذارم.

علی مهدی پور شیرایه

بهار ۱۳۸۸

چکیده

این رساله تلاشی در جهت معرفی و بیان آخرین نتایج و مطالب اصولی بدست آمده از مسألهٔ هم‌ارزی است که به شکل طبیعی به پنج فصل مرتبط با هم تقسیم شده است.

مسألهٔ هم‌ارزی با یافتن ناورداهای دیفرانسیلی و منیفلدهای دسته‌بندی به دسته‌بندی اشیای هندسی تحت عمل گروهی خاص می‌پردازد. به عنوان حالت‌های خاصی از آن، مطالب مهم و اساسی دستگاه دیفرانسیل خارجی و تقارن بیان می‌گردد که کاربرد فراوانی در ریاضیات، به طور خاص در هندسه و همچنین در علوم دیگر نظیر فیزیک، مکانیک، نظریهٔ کنترل، تجسم کامپیوتری و غیره دارد.

فصل نخست اهتمامی در بیان مطالب مقدماتی مورد نیاز در فصل‌های بعدی است و شامل بخشی مبتنی بر شبه—گروه‌های لی می‌باشد. بحث مسألهٔ هم‌ارزی را با معرفی گروه‌های تقارنی اشیای هندسی و نتایج مهمی که در مورد معادلات دیفرانسیل در سال‌های اخیر حاصل شده است، آغاز می‌نماییم. این مطالب در فصل دوم این اثر گنجانده شده است. فصل سوم به مبحث نظریهٔ هم‌ارزی در مطالعهٔ دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل، یعنی نظریهٔ دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی اختصاص دارد.

در فصل چهارم به بیان مسألهٔ هم‌ارزی که هدف اصلی این رساله و در بر گیرندهٔ نظریه‌های فوق است، می‌پردازیم. در آن سعی بر آن بوده است که الگوریتم مسألهٔ هم‌ارزی به صورتی کاملاً بهینه و بر اساس الگوریتم‌های موجود در مراجع معتبر در این زمینه، به صورت مختصر و مفید جهت استفاده‌های بعدی عنوان گردد. در نهایت، در فصل آخر، نتایج حاصل از تحقیقات نویسنده در ارتباط با نظریهٔ هم‌ارزی، تقارن و دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی به عنوان پیوست آورده شده است.

واژه‌های کلیدی: نظریهٔ هم‌ارزی کارتان، دستگاه دیفرانسیل خارجی، تقارن، شبه—گروه لی.

فهرست مندرجات

مقدمه و تاریخچه

مهم‌ترین موضوعی که در این رساله بدان پرداخته شده، مفهوم هم‌ارزی است. آغازگر این مبحث برنامه ارلانگن کلاین بود که ریشه در مطالعهٔ هندسهٔ زیرمنیفلدهای M و M' از یک فضای همگن G/H و بررسی یکی بودن آنها تحت اثر $g \in G$ از گروه اصلی مورد بحث داشت. ایده‌های اصلی مسألهٔ هم‌ارزی به حدود صد سال پیش و کارهای صورت گرفته توسط ریاضیدانان بزرگی چون گاستون، داربو، گورسا، لی و از همه مهم‌تر، الی کارتان برمی‌گردد. در طی سالیان گذشته این تکنیک‌ها به مرور اصلاح شده و گسترش یافته است. از مهم‌ترین این تکنیک‌ها روش لی (روش مستقیم) و روش کارتان (روش غیرمستقیم) می‌باشند. از ابزارهای اصلی مورد استفاده در مسألهٔ هم‌ارزی، به نظریهٔ کنج‌های متحرک در مطالعهٔ اشیای هندسی و نیز دستگاه دیفرانسیل خارجی در بررسی معادلات دیفرانسیل می‌توان اشاره کرد. البته ابزارهای دیگری نیز برای دنبال کردن مسألهٔ هم‌ارزی وجود دارند که به حالت‌های بخصوصی از بحث می‌پردازند و از آنها به نظریهٔ هم‌کنج‌های متحرک می‌توان اشاره نمود. برای مشاهدهٔ جزییات بحث و تفاوت‌های بین روش کنج‌های متحرک و روش هم‌کنج‌های متحرک به [۴۰، ۴۱] می‌توان رجوع نمود. روش دیگر استفاده از بحث تابلو در روش کنج‌های متحرک است که ارتباط نزدیکی با نظریهٔ دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی دارد. برای مشاهدهٔ جزییات آن مراجع [۷، ۳۰] از اهمیت خاصی برخوردارند.

مسألهٔ هم‌ارزی بنیادی، به تشخیص این حقیقت اختصاص دارد که چه وقت دو شئ هندسی تحت تغییر مختصات مناسبی قابل تبدیل به یکدیگرند. به عنوان مثالی خاص از بحث، مسألهٔ خطی سازی را می‌توان برشمرد که به تشخیص این نکته می‌پردازد که آیا یک معادله دیفرانسیل معین را تحت تغییر مختصات به معادله دیفرانسیل معین دیگری می‌توان نگاشت؟ مثال دیگری از مسألهٔ هم‌ارزی به حساب تغییرات مربوط می‌شود و تعیین اینکه چه وقت دو مسألهٔ تغییرات نسبت به تغییر مختصات یکی هستند. در جبر مسألهٔ هم‌ارز بودن چندجمله‌ای‌های (همگن) تحت تبدیلات خطی، مثال دیگری از هم‌ارزی است. مسائل هم‌ارزی هندسی در بنیان هندسهٔ ریمانی ریشه دارد و هدف از آن دانستن این نکته است که دو منیفلد ریمانی داده شده چه وقت تحت اثر یک دیفیومورفیسم (موضعی) برابرند. همچنین در هندسهٔ همتافته، مسألهٔ مشابهی برای منیفلدهای همتافته عنوان می‌گردد.

مفهوم ناوردا که از اهمیت ویژه‌ای در نظریهٔ هم‌ارزی برخورداراست، در حقیقت کمیتی است که تحت تغییر مختصات بدون تغییر باقی می‌ماند. در نتیجه دو شیء هم‌ارز لزوماً دارای ناورداهای یکسان هستند. برعکس در حالت‌های خاصی از بحث اگر از توابع ناوردا به تعداد کافی داشته باشیم، از آنها برای تشخیص کامل هم‌ارزی اشیاء می‌توان استفاده کرد و بنابراین مسألهٔ هم‌ارزی را به طور کامل حل نمود. لذا یافتن ناورداها و مشخصه‌های آنها به عنوان دستاوردی مهم، در

مرکز توجه این نظریه قرار دارد. یک مشخصه از ناورداها رابطه‌ای تابعی از توابع ناوردا است که به تشخیص آنها کمک می‌کند.

مسألهٔ هم‌ارزی را توسط دستاوردهای دیگری که از ترکیب روش‌های لی و کارتان حاصل شده‌است می‌توان دنبال کرد. هر یک از روش‌های لی یا کارتان دارای مزایا و معایب خاص خود است که در بررسی مسائل دشوار باید به طرز مناسبی از ترکیب آنها استفاده کرد. مثلاً روش کارتان دارای این مزیت است که قادر است به صورت الگوریتمی مسائل هم‌ارزی به اندازه کافی کلی را به شکل اصولی حل نماید. در این روش تنها ابزار لازم، دیفرانسیل‌گیری است. این در حالی است که دستاورد لی به انتگرال‌گیری از معادلات تعیین شده از گروه‌های تقارنی نیز نیازمند است. بعلاوه برای یافتن لیست کاملی از ناورداهای اساسی، روش کارتان بُعد و ساختار گروه‌های تقارنی مربوطه را مرتباً کاهش می‌دهد که این یک عیب محسوب می‌شود، چون در اغلب موارد با محاسبات پیچیدهٔ مواجه می‌شویم که جواب کامل تنها در حالت‌های خاص قابل دسترسی است. البته در حالت‌هایی هم که محاسبات مسألهٔ هم‌ارزی هنوز تکمیل نشده است، ممکن است کمیت‌های ناوردای مهم و جذابی یافت شوند که در شرایط خاصی دارای کاربردهای فراوانی باشند.

روش لی در یافتن تقارن‌ها آن هم در شرایط پیچیده مفیدتر است و به نتایج مؤثری در محاسبهٔ گروه‌های تقارنی در معادلات دیفرانسیل و حساب تغییرات می‌انجامد. این روش در تعیین ناورداها و مسألهٔ دسته‌بندی، بسیار ضعیف‌تر از روش کارتان عمل می‌کند. روش دسته‌بندی لی بر اساس گروه تبدیلات تنها در ابعاد ۱ و ۲ کاربرد دارد. روش مستقیم در تجزیه و تحلیل مسائل هم‌ارزی خاص اغلب این مزیت را دارد که کمتر از روش غیر مستقیم طاقت فرسا است ولی در تجزیه و تحلیل حالت‌های کلی‌تر دشوارتر می‌نماید. در هر یک از این روش‌ها، از برنامه‌های کامپیوتری موجود در محیط‌های نرم‌افزاری میپل و متمتیکا می‌توان بهره فراوان برد.

همان گونه که اشاره شد، از حالت‌های خاص مسألهٔ هم‌ارزی، تعیین گروه تقارنی اشیای هندسی است. در واقع تقارن به بررسی اشیای خود متقارن می‌پردازد. مثلاً اگر فضای جواب‌های یک معادله دیفرانسیل را درنظر بگیریم و تبدیلاتی را مد نظر داشته باشیم که جواب‌های آن معادله را به یکدیگر تبدیل می‌نمایند، با مسأله‌ای از تقارن درگیر هستیم. به عنوان مثالی دیگر از تقارن‌ها، ایزومتری‌های یک منیفلد ریمانی را می‌توان برشمرد که دقیقاً مجموعه‌ای از خود هم‌ارزی‌ها هستند که متر ریمانی را ثابت نگاه می‌دارند.

حالت خاص دیگری از مسألهٔ هم‌ارزی که در فوق نیز بدان اشاره گردید، مسألهٔ دستگاه دیفرانسیل خارجی است. یک دستگاه دیفرانسیل خارجی دستگاهی از معادلات تعریف شده بر یک منیفلد است که توسط مساوی صفر قرار دادن تعدادی فرم دیفرانسیلی خارجی تعریف می‌گردد. هرگاه تمامی فرم‌ها خطی باشند، دستگاه دیفرانسیلی، دستگاه فاف نامیده می‌شود. مسألهٔ اصلی در این شیوه مطالعهٔ منیفلدهای انتگرال دستگاه دیفرانسیل خارجی است یعنی زیرمنیفلدهایی از آن که در تمامی معادلات دستگاه صادق باشند. فاف اولین کسی بود که به مطالعهٔ دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی بر اساس فرمول‌بندی‌اش در مسائل فاف اشاره نمود (۱۸۱۴—۱۵). مشتق خارجی یک فرم فاف که کواریان دو خطی نامیده می‌شود توسط فروبنیوس در سال ۱۸۷۷ معرفی گردید و به شکل مؤثری توسط داربو در ۱۸۸۲ دنبال شد. در سال ۱۹۲۲ الی کارتان در [۸] فرم‌های دیفرانسیلی خارجی از مراتب بالاتر و دیفرانسیل‌های خارجی آنها را معرفی نمود. او در سال‌های بین ۱۹۰۴ تا ۱۹۰۸ در مطالعات خود روی تعمیم فرم‌های مورر—کارتان از گروه‌های لی به شبه—گروه‌های لی نامتناهی بعد، به نمایشی از دستگاه فاف دست یافته بود. مفاهیم هندسی معرفی شده در این مطالعات، در دستگاه‌های

دیفرانسیل کلی قابل استفاده است، همان گونه که در آثار گورسا قابل تشخیص است. یک بیان معتبر در این زمینه که در سال ۱۹۳۴ توسط کهلر ارائه شده است قضیه‌ای وجودی است که به قضیهٔ کارتان—کهلر مشهور است. در این زمینه و در مبحث معادلات با مشتقات جزیی قضیهٔ وجودی اساسی، قضیهٔ کوشی—کوالسکی است. حالت کلی‌تر از این قضیه توسط ریکوایر در سال ۱۹۱۰ بیان گردید.

دو مفهوم اصلی در نظریهٔ دستگاه دیفرانسیل خارجی امتداددهی و پیچشی بودن است که اولی به افزودن مشتق‌های جزیی به متغیرها در فضاهای جت مراتب بالاتر و رسیدن به معادلات جدید و ساده‌تر منجر می‌گردد و دومی به شرایط انتگرال‌پذیری دستگاه مربوط است ولی در حالت کلی به بیان دقیق پیچیدگی آنها نیاز خواهیم داشت. خاصیت پیچشی بودن در مطالعات مشترک کارتان و اینشین در مورد نسبیت عام توسط کارتان معرفی‌گردید (۱۹۷۹).

این نوشته از سه بخش تشکیل شده است. بخش اول که فصل اول را دربر می‌گیرد به یادآوری و تبیین مسائل مورد نیاز در فصول آتی اختصاص دارد. در این بخش به معرفی کنج، هم‌کنج و فرم‌های دیفرانسیلی ناوردا می‌پردازیم و در ادامه مفاهیمی چون شبه—گروه لی، مشخصه‌های میدان برداری، فضای جت، امتداددهی و فرم‌های برخوردی را که در مبحث تقارن، دستگاه دیفرانسیل خارجی و از همه مهم‌تر مسألهٔ هم‌ارزی بسیار حائز اهمیت هستند، بیان می‌داریم.

بخش دوم این اثر شامل فصول ۲ تا ۵ است. بحث مسألهٔ هم‌ارزی را از تقارن به عنوان حالتی خاص از آن شروع می‌نماییم. این مبحث از حیث مطالب مهم بسیار گسترده است و از بین مسائل مطرح در تقارن به مطالعهٔ دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل که از نظر تئوری و کاربرد بسیار پرطرفدار است، می‌پردازیم. مواردی چون روش بینهایت کوچک‌های لی، انواع تبدیلات مهم و مشهور در این زمینه و دسته‌بندی زیرگروه‌های یک گروه تقارنی در فصل دوم و تحت عنوان تقارن بیان می‌گردند.

فصل سوم نیز به حالت خاصی از مسألهٔ هم‌ارزی یعنی نظریهٔ دستگاه دیفرانسیل خارجی مربوط است. در این فصل مهم سعی بر آن بوده است که تعاریف اصلی قضایای بنیادی و مثال‌های مهم این نظریه به صورتی موجز بیان گردد تا خواننده بتواند از آن به عنوان یک شروع برای مطالعه در این زمینه بهره جوید. در این فصل به مباحث مهمی چون روش مشخصه‌ها، المان انتگرال، پرچم انتگرال و آزمون کارتان و نیز قضایای اساسی چون قضیه فروبنیوس، کوشی—کوالسکی، کارتان—کهلر و کارتان—کورانیشی اشاره خواهد شد. نویسنده به این مهم امید داشته است که این فصل همانند فصل قبل ذهن خواننده را برای طرح مسألهٔ هم‌ارزی اصلی در فصول بعد آماده و مهیا سازد.

در فصل چهارم و پنجم این رساله مسألهٔ هم‌ارزی در حالت کلی معرفی می‌شود. روش هم‌ارزی را با مطالعهٔ هم‌ارزی هم‌کنج‌ها، ناورداهای مشتق شده و منیفلدهای دسته‌بندی در فصل چهارم آغاز نموده و با ارائه فرمول‌بندی کاملی از روش هم‌ارزی تا رسیدن به الگوریتمی جامع و بهینه بر اساس الگوریتم‌های موجود در مراجع معتبر، در فصل پنجم آن را کامل می‌کنیم. همچنین فرآیندهای مهمی چون کاهش، امتداددهی و نرمال‌سازی که هستهٔ اصلی این الگوریتم را تشکیل می‌دهند، در فصل پنجم مورد بررسی قرار می‌گیرند.

بخش سوم این رساله، شامل فصل پیوست است. در این بخش مقالات استخراج شده توسط نویسنده، از مباحث مسألهٔ هم‌ارزی، تقارن، دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی و شبه—گروه‌های لی آورده شده است. در خلال مباحث در فصول گذشته هر کجا که لازم بوده به این مقالات ارجاع داده شده است و آوردن آنها در انتهای این رساله از آن جهت است که نیل به نتایج سریع‌تر باشد و مطالعهٔ مطالب راحت‌تر صورت پذیرد.

در این رساله تلاش شده است تا مطالب روز هر بخش با بیان جدید در لابلای تعاریف و قضایا مطرح گردد و چنانچه تجربیاتی در آن زمینه‌ها وجود داشته به نحو مناسبی منتقل گردد. از جملهٔ این مطالب، دستاوردهای جدید نگارنده است. مثلاً در فصل دوم، مثال‌های مطرح در بخش تقارن (بجز مثال‌های اول و دوم) همگی از نتایج نگارنده است. در فصل سوم در معرفی دستگاه دیفرانسیل خارجی و بیان مثال‌ها از تجربیات شخصی استفاده شده است. در بیان مفاهیم فصل چهارم و پنجم و نیز مثال‌های فصل پنجم نویسنده سعی نموده است که بر اساس تجربیاتش از مطالب مهم روز و مطالب اساسی هندسه دیفرانسیل بهره کافی را ببرد. الگوریتم روش هم‌ارزی برای اولین بار توسط نویسنده به شکل بهینهٔ مطرح شده در رساله، بیان گردیده است. مابقی نتایج جدید نیز در فصل ششم به همراه مسائل باز مطرح در این زمینه آورده شده است.

اهداف اصلی این رساله را می‌توان در معرفی و بیان روش هم‌ارزی کارتان و حالت‌های خاص تقارن و دستگاه دیفرانسیل خارجی تحت یک الگوریتم کلی عنوان کرد. همچنین بیان آخرین یافته‌های صورت گرفته در این زمینه، خاصّه توسط نویسندهٔ این رساله و ارائه مثال‌ها و دیدگاه‌های راهگشا در این زمینه از اهداف دیگر این نوشته است. امیدوارم که این رساله تا حدود زیادی بتواند اهداف مذکور را به همراه داشته و قدم مثبتی در اشاعهٔ این گرایش مهم از هندسه دیفرانسیل باشد.

در این رساله از طرح اثبات قضایایی که بیان آنها ما را از بحث اصلی دور می‌سازند، خودداری شده است. همچنین در انتهای هر یک از عبارات زیر از نمادهای اشاره شده، استفاده شده است:

در پایان	*نماد*
اثبات	$\square$
مثال	$\triangle$.

فصل ۱

یادآوری

۱.۱ کنج و هم‌کنج

۱.۱.۱ تعریف (کنج). هرگاه E کلاف تاری اصلی (برداری) با منیفلد پایهٔ M و $U \subset M$ مجموعهٔ بازی باشد، **کنج موضعی** برای E بر U، k تایی مرتب $(\sigma_1, \cdots, \sigma_k)$ از برش‌های هموار σ_i از E بر U است، به گونه‌ای که $(\sigma_1(p), \cdots, \sigma_k(p))$ در $p \in U$ پایه‌ای برای تار E_p باشد. هرگاه $U = M$ کنج را **فراگیر** می‌نامیم.

۲.۱.۱ تعریف (هم‌کنج). n تایی مرتب از هم‌میدان‌های برداری هموار به صورت $(\sigma^1, \cdots, \sigma^n)$ بر مجموعهٔ باز $U \subset M$، **هم‌کنج موضعی** نامیده می‌شود، هرگاه (σ_p^i) پایه‌ای برای $T_p^*M \ (p \in U)$ بسازد. هم‌کنج، **فراگیر**است، هرگاه $U = M$.

برای هر کنج موضعی $(E_1, \cdots, E_n)$ برای TM روی مجموعهٔ باز U، هم‌کنج موضعی هموار و منحصربفرد $(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n)$ هست که $\varepsilon^i(E_j) = \delta_j^i$. این هم‌کنج را **هم‌کنج دوگان** نیز می‌نامیم.

۲.۱ فرم دیفرانسیل

اگر (U, u) یک چارت روی M باشد، آنگاه $\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right)$ یک میدان کنجی موضعی وابسته به TM است. اما می‌دانیم که $\frac{\partial}{\partial u^i}|_x(u^j) = du^j(\frac{\partial}{\partial u^i}|_x) = \delta_i^j$. بنابراین $(du^1, \cdots, du^m)$ یک میدان کنجی موضعی برای T^*M روی U است. هر برش از T^*M یک **۱− فرم** نامیده می‌شود.

فرض کنید V و W فضاهای برداری حقیقی باشند و $\mathcal{R}$ زیرفضایی از فضای برداری آزاد $\mathbb{R}\langle V \times W \rangle$ [1] باشد که توسط عناصری به شکل زیر ایجاد شده است:

$$a(v, w) - (av, w),$$

[1] فضای برداری‌ای است که از ترکیبات $\mathbb{R}$−خطیِ متناهی از عناصر $V \times W$ تشکیل می‌شود.

$$a(v,w)-(v,aw),$$
$$(v,w)+(v',w)-(v+v',w),$$
$$(v,w)+(v,w')-(v,w+w'),$$

که $a\in\mathbb{R}$، $v,v'\in V$ و $w,w'\in W$. **ضرب تانسوری** V و W که آنرا با $V\otimes W$ نشان می‌دهیم، برابر فضای خارج‌قسمتی $\mathbb{R}\langle V\times W\rangle/\mathcal{R}$ می‌باشد. در واقع کلاس هم‌ارزی عنصر (v,w) در $V\otimes W$ به صورت $v\otimes w$ است و ضرب تانسوری v و w نامیده می‌شود.

۱.۲.۱ تعریف (تانسور). برای هر $l,k\in\mathbb{N}$، یک **تانسور از نوع** $\binom{l}{k}$ (یا به صورت خلاصه $\binom{l}{k}$–تانسور) بر فضای برداری V به صورت

$$T^l_k(V):=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{l\text{ بار}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots V^*}_{k\text{ بار}}$$

تعریف می‌شود.

۲.۲.۱ تعریف (میدان تانسوری). منظور از **میدان تانسوری از نوع** $\binom{l}{k}$ (یا میدان $\binom{l}{k}$– تانسور) بر منیفلد M، یک برش هموار از کلاف برداری

$$T^l_kM:=T^l_k(TM)=\bigotimes^l TM\otimes\bigotimes^k T^*M=\underbrace{TM\otimes\cdots\otimes TM}_{l\text{ بار}}\otimes\underbrace{T^*M\otimes\cdots T^*M}_{k\text{ بار}}$$

می‌باشد.

اگر (U,u) یک چارت روی M باشد، میدان کنجی موضعی

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial u^{i_l}}\otimes du^{j_1}\otimes\cdots\otimes du^{j_k}\right)_{i_r\in\{1,\cdots,m\},j_s\in\{1,\cdots,m\},\ 1\le r\le l,\ 1\le s\le k}$$

را به کلاف برداری $\bigotimes^p TM\otimes\bigotimes^q T^*M$ بر U می‌توان نظیر کرد، همچنین برای هر میدان $\binom{l}{k}$–تانسوری A داریم:

$$A|_U=\sum_{i,j}A^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_k}\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial u^{i_l}}\otimes du^{j_1}\otimes\cdots\otimes du^{j_k}$$

که ضرایب $A^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_k}$ توابع هموار بر U می‌باشند.

مجموعهٔ همهٔ میدانهای تانسوری از نوع $\binom{l}{k}$ بر M یک فضای برداری حقیقی و یک $C^\infty(M)$–مدول تشکیل می‌دهند که آنرا با $\Gamma(T^l_kM)$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر $p\in M$، $\Gamma(T^l_k(T_pM))$ به عنوان فضای برداری همهٔ برشهای هموار کلاف برداری $\bigotimes^l(T_pM)\otimes\bigotimes^k(T^*_pM)$ تعریف می‌شود.

غالباً میدان تانسوری با تانسور یکی گرفته می‌شود.

فرض کنیم M منیفلدی هموار و $\Lambda^k(T_p^*M)$ زیر فضایی از $T_k^0(T_pM)$ باشد که از $\binom{0}{k}-$ *تانسورهای پادمتقارن*[۲] تشکیل شده است، در این صورت $\Lambda^kT^*M := \coprod_{p\in M}\Lambda^k(T_p^*M)$، یک کلاف برداری از $\binom{0}{k}-$ تانسورهای پادمتقارن $(k=۱,\cdots,\mathrm{dim}M)$ می‌باشد.

۱.۲.۳ تعریف (فرم دیفرانسیل). منظور از **فرم دیفرانسیل** یا **فرم خارجی از درجهٔ** k یا به صورت خلاصه یک $k-$**فرم**، یک برش از کلاف برداری Λ^kT^*M می‌باشد. فضای همهٔ $k-$فرمی‌ها بوسیلهٔ $\Omega^k(M)$ نمایش داده می‌شود.

$\Omega^k(M)$ را به صورت فضای همهٔ میدان‌های $\binom{0}{k}-$تانسوری پاد متقارن، یعنی فضای همهٔ نگاشت‌های

$$\Phi:\mathcal{X}(M)\times\cdots\times\mathcal{X}(M)=\mathcal{X}(M)^k\longrightarrow C^\infty(M)$$

که روی $C^\infty(M)$، $k-$خطی و پاد متقارن باشند

$$\Phi(X_{\sigma^۱},\cdots,X_{\sigma^k})=\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\Phi(X_۱,\cdots,X_k)\qquad\forall\sigma\in\mathcal{S}_k$$

می‌توان در نظر گرفت ($\mathcal{S}_k$ گروه متقارن مرتبهٔ k و sgn تابع علامت است، که برای هر $\sigma\in\mathcal{S}_k$، اگر σ زوج باشد $\mathrm{sgn}(\sigma)$ برابر ۱+ و در غیر این صورت ۱− است).

فرض کنیم $\Omega^\circ(M):=C^\infty(M)$، در این صورت فضای $\Omega(M):=\bigoplus_{k=\circ}^{\mathrm{dim}M}\Omega^k(M)$ به همراه ضرب زیر یک جبر تشکیل می‌دهد اگر $\psi\in\Omega^l(M),X_i\in\mathcal{X}(M)$ و $\phi\in\Omega^k(M)$ آنگاه

$$(\phi\wedge\psi)(X_۱,\cdots,X_{k+l})=\frac{۱}{k!.l!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+l}}\mathrm{sgn}(\sigma).\phi(X_{\sigma^۱},\cdots,X_{\sigma^k}).\psi(X_{\sigma^{(k+۱)}},\cdots,X_{\sigma^{(k+l)}})$$

این ضرب به صورت تار به تار تعریف می‌شود. یعنی، برای هر $x\in M$ ای، $(\phi\wedge\psi)_x=\phi_x\wedge\psi_x$. همچنین، ضرب فوق شرکت‌پذیر و جابجایی مدرج است. یعنی $\phi\wedge\psi=(-۱)^{kl}\psi\wedge\phi$. به این ضرب، *ضرب گوه‌ایِ* فرم‌ها می‌گوییم.

۱.۳ فرم دیفرانسیل ناوردا و ناوردای نسبی

۱.۳.۱ تعریف (فرم دیفرانسیل ناوردا). فرم دیفرانسیل Ω بر M —که گروه تبدیلات G بر آن عمل می‌کند— را درنظر بگیرید. گوییم Ω، $G-$**ناوردا** است، هرگاه تحت عمل برگشتِ گروه بدون تغییر باقی بماند، یعنی

$$\forall g\in G,\forall x\in M\quad:\quad g^*(\Omega|_{g.x})=\Omega|_x.$$

[۲] گوییم T، $\binom{0}{k}-$ تانسور پادمتقارن بر M است، هرگاه دارای خاصیت زیر باشد که برای هر $X_۱,\cdots,X_k\in\mathcal{X}(M)$ و $۱\le i,j\le k$ داشته باشیم: $T(X_۱,\cdots,X_i,\cdots,X_j,\cdots,X_k)=-T(X_۱,\cdots,X_j,\cdots,X_i,\cdots,X_k)$.

۲.۳.۱ تعریف. فرض کنید G گروهی باشد که بر منیفلد M عمل کند، منظور از یک **نمایش ضریب** برای G، نمایش $\bar{F}=g.F$، بر فضای توابع با مقادیر حقیقی، یعنی $\mathcal{F}(M)$، است که فرم خاص زیر را داشته باشد:

$$\bar{F}(\bar{x})=\bar{F}(g.x)=\mu(g.x)F(x) \qquad\qquad g\in G,\ F\in\mathcal{F}(M). \tag{۱.۱}$$

زمانی رابطهٔ (۱.۱) دقیقاً نمایشی را برای گروه G معین می‌سازد که ضریب μ در اتحاد جبری معینی صدق کند. با توجه به قاعدهٔ ضرب گروه، یعنی $g.(h.F)=(g.h).F$ با انجام تجزیه و تحلیل مستقیم، مشخصهٔ زیر بدست می آید:

۳.۳.۱ تعریف. تابع $\mu:G\times M\to\mathbb{R}$ یک **ضریب برای گروه تبدیلات** G (که بر منیفلد M عمل می‌کند) می‌باشد، اگر و فقط اگر در معادلهٔ ضریب زیر صدق کند:

$$\begin{cases} \mu(g.h,x)=\mu(g,h\,.\,x)\,\mu(h,x), & g,h\in G\\[2ex] \mu(e,x)=۱, & x\in M.\end{cases}$$

۴.۳.۱ تعریف (ناوردای نسبی). هرگاه $\mu:G\times M\to\mathbb{R}$ یک ضریب برای عمل گروه تبدیلات باشد، تابع $R(x)$ را **ناوردای نسبی** با وزن μ می‌نامند هرگاه در شرط زیر صادق باشد:

$$R(g\,.\,x)=\mu(g\,.\,x)\,R(x)\ .$$

۵.۳.۱ گزاره. اگر G بر منیفلد M به صورت موضعاً آزاد عمل کند، G یک دستگاه کامل از ناورداهای نسبی را می‌پذیرد.

اثبات. برای اثبات گزاره و دیدن جزئیات آن به [۳۹]، صفحهٔ ۹۴ رجوع کنید. □

۴.۱ مشخصهٔ میدان برداری و مشتق کلی

فرض کنیم دستگاهی از معادلات دیفرانسیل (جزیی) را داشته باشیم که شامل p متغیر مستقل $x=(x^۱,\cdots,x^p)$ و q متغیر وابستهٔ $u=(u^۱,\cdots,u^q)$ باشند که به صورت مختصات موضعی روی فضاهای اقلیدسی به ترتیب $X\simeq\mathbb{R}^p$ و $U\simeq\mathbb{R}^q$ در نظر گرفته شده‌اند. منظور از **فضای کلی**، فضای اقلیدسی همهٔ متغیرهای مستقل و وابسته است: $E=X\times U\simeq\mathbb{R}^{p+q}$ در واقع فضای کلی کلاف برداری حاصل از متغیرهای مستقل و وابسته است، که در آن فضای حاصل از متغیرهای مستقل X، فضای پایه و فضای متغیرهای وابسته U، تار استاندارد است.

در حالتی که گروه مورد بررسی از تبدیلات همبند است، عمل گروه را می‌توان بر اساس مولدهای بینهایت کوچک متناظر به آن توضیح داد. با درنظر گرفتن میدان برداری

$$v=\sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)\,\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\varphi^\alpha(x,u)\,\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \qquad (۱.۲)$$

به عنوان برشی از کلاف برداری E (روی فضای متغیرهای مستقل و وابسته) شار $\exp(tv)$ را تولید می‌کند. $\exp(tv)$ گروه ۱–پارامتری موضعی از تبدیلات بخصوصی است که در فصل آتی به عنوان تبدیلات نقطه‌ای معرفی خواهند شد. یک جواب از دستگاه معادلات دیفرانسیل، تابعی هموار به صورت $u=f(x)$ و در واقع برشی از کلاف برداری E است. نمودار تابع یعنی $\Gamma_f=\{(x,f(x))\}$ نیز زیرمنیفلدی p–بعدی و منظم از E است [۳۹]. با این حال هر زیرمنیفلدی p–بعدی و منظم از E لزوماً نمودار تابعی هموار نیست ولی به کمک قضیهٔ تابع ضمنی گزارهٔ زیر را داریم [۳۹]:

۱.۴.۱ گزاره. *زیرمنیفلدی p–بعدی و منظم $\Gamma\subset E$ را که در نقطهٔ $z_0=(x_0,y_0)\in\Gamma$ تراگذر[۳] است، در همسایگی‌ای از x_0، نمودار تابع هموار و تک مقداری $u=f(x)$ است.*

حال تابع $u=f(x)$ را تحت عمل گروه تبدیلات G **ناوردا** می‌نامیم هرگاه نمودار آن Γ_f زیرمجموعه‌ای (موضعاً) G–ناوردا باشد، به این مفهوم که تحت عمل گروه بدون تغییر باقی بماند: وقتی $(x,u)\in\Gamma_f$ و $g\in G$ آنگاه $g\cdot(x,u)\in\Gamma_f$. اگر مجموعه‌ای از توابع را درنظر بگیریم، این مجموعه را مستقل تابعی می‌نامیم هرگاه نتوان هیچ یک از اعضای آن را به شکل تابعی از مابقی توابع بیان نمود.

۲.۴.۱ تعریف (منظم و نیم‌منظم). گروه تبدیلات G را **منظم** نامیم هرگاه بعد تمامی مدارهای آن برابر باشند. بعلاوه **نیم‌منظم** نامیده می‌شود وقتی که منظم باشد و حول هر نقطه همسایگی کوچکی چنان یافت شود که تقاطع آن با هر یک از مدارهای G همبند باشد.

۳.۴.۱ قضیه. *فرض کنیم G گروه تبدیلاتی باشد که به صورت تراگذر و نیم‌منظم بر $E\simeq X\times U$ عمل کند و مدارهای آن s–بعدی باشند. همچنین $I_1(x,u),\cdots,I_{p-s}(x,u),J_1(x,u),\cdots,J_q(x,u)$ مجموعهٔ کاملی از ناورداهای مستقل تابعی از G باشند. در این صورت هر تابع G–ناوردا $u=f(x)$ به صورت موضعی به شکل ضمنی زیر قابل بیان است*

$$w=h(y)\qquad \text{وقتی که}\qquad w=J(x,u)\ \text{و}\ y=I(x,u).$$

اثبات. برای اثبات گزاره مرجع [۳۹] را مشاهده کنید. □

۴.۴.۱ مثال. جواب متشابه از یک دستگاه معادلات جزیی تابع ناوردایی از گروه تبدیلات مقیاسی است. یک مثال خاص از این نوع گروه، گروه ۱–پارامتری $(x,y,u)\mapsto(\lambda x,\lambda^\alpha y,\lambda^\beta u)$ می‌باشد. یک دسته از ناورداهای مستقل آن

[۳] به این مفهوم که فضای مماس در آن افقی بوده و بخش عمودی نداشته باشد.

عبارتند از نسبت‌های $y = \frac{y}{x^\alpha}$ و $w = \frac{u}{x^\beta}$ و بنابراین توابع ناوردا تحت تغییر مقیاس به صورت $w = h(y)$ یا به شکل ضمنی $u = x^\beta\, h\Big(\frac{y}{x^\alpha}\Big)$ قابل بیان است. $\triangle$

۵.۴.۱ تعریف. **مشخصهٔ** میدان برداری v به فرم (۲.۱)، یک q تایی از توابع $Q(x, u^{(1)})$ است که به فرم زیر تعریف گردند

$$Q^\alpha(x, u^{(1)}) = \varphi^\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u)\, \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \qquad \alpha = 1, \cdots, q.$$

۶.۴.۱ قضیه. *تابع $u = f(x)$ تحت گروه همبند از تبدیلات نقطه‌ای ناورداست اگر و تنها اگر جوابی از دستگاه مرتبهٔ اول از معادلات دیفرانسیل جزیی زیر از مشخصه‌های $Q(x, u^{(1)})$ متناظر به مولدهای بینهایت کوچک $v \in \mathfrak{g}$ باشد*

$$Q^\alpha(x, u^{(1)}) = 0, \qquad \alpha = 1, \cdots, q.$$

عموماً در منابع مختلف، **مشتق کلی** *نسبت به iامین مستقل خطی x^i عملگر دیفرانسیلی مرتبهٔ اول*

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} u^\alpha_{J,i}\, \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J},$$

است که در آن $u^\alpha_{J,i} = D_i(u^\alpha_J) = u^\alpha_{j_1 \cdots j_k i}$ و $J = (j_1 \cdots j_k)$ یک اندیس چندگانه با طول $\#J = k$ می‌باشد.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۳۹] را رجوع کنید. $\square$

۵.۱ جت و امتدداهی

از آنجایی که همواره علاقهٔ فراوانی برای مطالعهٔ تقارنهای معادلات دیفرانسیل وجود دارد، نه تنها به دانستن چگونگی عمل گروه تبدیلات بر متغیرهای مستقل و وابسته نیازمندیم، بلکه به چگونگی عمل آنها بر مشتق‌های متغیرهای وابسته نیز احتیاج داریم. این کار توسط تعریف عمومی‌ای که از فضای جتِ (یا کلاف جتِ) مرتبط با فضای کلی که از متغیرهای مستقل و وابسته تشکیل می‌شود، انجام خواهد شد. مختصات فضای جت به عنوان مشتق‌هایِ متغیرهای وابسته ظاهر می‌گردد. در ادامه، فرمول‌بندی ساده و مستقیمی از این فضاها ارائه می‌شود.

تابع هموار و با مقادیر حقیقی $f(x^1, \cdots, x^p)$ که به p متغیر مستقل، وابسته است، $p_k = \binom{p+k-1}{k}$ تا مشتق جزئی مرتبهٔ k متفاوت به فرم $\partial_J f(x) = \partial^k f / \partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \cdots \partial x^{j_k}$ را دارد، که توسط همهٔ اندیس‌های چندگانه $J = (j_1, \cdots, j_k),\ 1 \le j_k \le p$ از مرتبهٔ $k = \#J$ اندیس‌گذاری می‌شود (# یعنی تعداد عناصر یا مؤلفه‌ها). بنابراین، اگر q متغیر وابسته $(u^1, \cdots, u^q)$ را داشته باشیم، به $q_k = qp_k$ مختصات متفاوت u^α_J که $1 \le \alpha \le q,\ \#J = k$, نیاز داریم که همهٔ مشتق های مرتبهٔ k ام از تابعی مانند $u = f(x)$ $u^\alpha_J = \partial_J f^\alpha(x)$ را نمایش دهیم.

۱.۵.۱ تعریف (فضای جت). برای فضای کلی $E \simeq X \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$، **فضای جت** مرتبهٔ n ام، $J^n = J^n E =$ $X \times U^{(n)}$، فضای اقلیدسی از بعد $p+q^{(n)} \equiv p+q\binom{p+n}{n}$ می‌باشد که مختصات آن از p متغیر مستقل x^i، q متغیر وابستهٔ u^α و مختصات مشتقیِ u_J^α از مرتبهٔ $1 \leq \#J \leq n$ که $\alpha = 1, \cdots, q$ تشکیل می‌شود.

نقاط فضای عمودی (یعنی نقاط تار) $U^{(n)}$ با $u^{(n)}$، نشان داده می‌شوند و شامل همهٔ متغیرهای وابسته و مشتق‌های از مرتبهٔ n ام آنها می‌باشد؛ بنابراین مختصات یک نقطهٔ $z \in J^n$ توسط $(x, u^{(n)})$ نشان داده می‌شود. از آنجا که مختصات مشتق‌های $u^{(n)}$، زیر مجموعه‌ای از مختصات مشتق‌های $u^{(n+k)}$ است، تابع تصویر طبیعی $\pi_n^{n+k} : J^{n+k} \to J^n$ بر فضای جت‌ها وجود دارد، که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\pi_n^{n+k}(x, u^{(n+k)}) = (x, u^{(n)})\,.$$

در حالت خاص $\pi_0^n(x, u^{(n)}) = (x, u)$، که تصویر J^n به $E = J^0$ می‌باشد، اگر $M \subset E$ زیرمجموعه‌ای باز باشد، در این صورت $J^n M = (\pi_0^n)^{-1}(M) \subset J^n E$، زیرمجموعهٔ بازی از فضای جت مرتبهٔ n ام است که M را به $J^n E$ تصویر می‌کند.

۲.۵.۱ تعریف (امتداددهی). یک تابع هموار $u = f(x)$ از X به U دارای **امتداددهی** از مرتبهٔ n، $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$، از X به $U^{(n)}$ است، (همچنین به عنوان n—جت، با نماد $j_n f$، نیز استفاده می‌شود) و توسط محاسبهٔ همهٔ مشتقات جزیی مرتبهٔ n ام f، تعریف می‌گردد. لذا توابع مختصات $f^{(n)}$ به صورت $u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$ هستند. در حالت خاص، $f^{(0)} = f$. نمودار تابع[۴] امتداددهی $f^{(n)}$ یعنی $\Gamma_f^{(n)} = \{(x, f^{(n)}(x))\}$، زیرمنیفلد p—بعدی از J^n است[۵].

دو تابع در نقطهٔ $x \in X$ امتداددهی یکسانی دارند و بنابراین نقطهٔ یکسانی از J^n را مشخص می‌کنند، اگر و فقط اگر در آن نقطه، دارای ***برخورد مرتبهٔ n ام***[۶] *باشند.*

بنابراین، روش مجردتر برای تعریف فضای جت J^n به این صورت است که آنرا به عنوان مجموعهٔ کلاس‌های هم‌ارزی از توابع هموار، با رابطهٔ هم‌ارزیِ داشتن برخورد مرتبهٔ n ام، در نظر بگیریم. لازم به ذکر است که عمل امتداددهی با تصاویر فضای جت سازگار می‌باشد. بنابراین: $\pi^{(n+k)} \circ f^{(n+k)} = f^{(n)}$.

اگر g یک تبدیل نقطه‌ای(موضعی) به صورت $(\bar{x}, \bar{u}) = g.(x, u) = (\chi(x, u), \psi(x, u))$ باشد (χ تغییر مختصات روی X و ψ تغییر مختصات روی U از فضای کلی $E \simeq X \times U$ باشند)، آنگاه g بر توابع با انتقال دادن نمودارِ آنها عمل می‌نماید و لذا به صورت طبیعی بر مشتقات توابع عمل می‌کند.

این مسأله، این امکان را فراهم می‌آورد که، **تبدیل امتدادی** تولید شدهٔ $(\bar{x}, \bar{u}^{(n)}) = g^{(n)}.(x, u^{(n)})$ بر فضای جت J^n را تعریف نماییم.

کمی خاص‌تر، اگر نمایش تابع هموار $u = f(x)$ در نقطهٔ دلخواه $z_\circ = (x_\circ, u_\circ^{(n)})$، که امتداددهی مرتبهٔ n ام آن

---

[۴] نمودار تابع f بر منیفلد M را با Γ_f نمایش می دهیم که به صورت $\Gamma_g = \{(x, f(x)) \,:\, x \in M\}$ تعریف می‌شود.

[۵] زیرا f تابعی از p متغیر است. یعنی p—بعد برای p متغیر مستقل مربوط به نقطهٔ x، و بقیهٔ مؤلفه‌ها که به $f^{(n)}(x)$ مربوط می‌شوند به x وابسته‌اند و بعد را زیاد نمی‌کنند.

[۶] به این مفهوم که n مشتق نخست آنها در آن نقطه برابرند، که با داشتن چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ n ام برابر در نقطهٔ x یکی است.

در نقطهٔ $x_\circ$، معین است را در نظر بگیریم، در این صورت، داریم $z_\circ = (x_\circ, f^{(n)}(x_\circ)) \in J^n$. نقطهٔ انتقالی $\bar{z}_\circ = g^{(n)}.z_\circ$ توسط مشتقات تابع انتقالی $\bar{f} = g.f$ در نقطهٔ تصویری $x_\circ$ محاسبه می‌شود، همراه با این شرط که $(\bar{x}_\circ, \bar{u}_\circ) = g.(x_\circ, f(x_\circ))$ $.(\bar{x}_\circ, \bar{f}(\bar{x}_\circ)) =$ بنابراین، $\bar{z}_\circ = (\bar{x}_\circ, \bar{u}_\circ^{(n)}) = (x_\circ, \bar{f}^{(n)}(x_\circ))$. این تعریف، هموار بودن $\bar{f}$ در نقطهٔ $\bar{x}_\circ$ را درنظر گرفته است، در غیر این صورت تبدیل امتدادی، در نقطهٔ $(x_\circ, u_\circ^{(n)})$ تعریف نمی‌شود. بنابراین، تبدیل امتدادی $g^{(n)}$، نمودار $\Gamma_f^{(n)}$ از امتداددهی مرتبهٔ n ام تابعی مانند $u = f(x)$ را به نمودار امتدادی مرتبهٔ n ام از تصویر آن یعنی $\bar{f} = g.f$، می‌نگارد:

$$g^{(n)}.\Gamma_f^{(n)} = \Gamma_{g.f}^{(n)} .$$

استفادهٔ مستقیم از قاعدهٔ زنجیره‌ای نشان می‌دهد که این ساختار به تابع خاص f به عنوان نمایشی از یک نقطهٔ J^n وابسته نیست. در حالت خاص، از این نقطه نظر که نقاط J^n با چندجمله‌ای‌های تیلور مرتبهٔ n ام یکی گرفته شوند، کافی است که چگونگی عملکرد تبدیل نقطه‌ای روی چندجمله‌ای‌های از درجهٔ حداکثر n را معین سازیم. لازم به ذکر است که امتداددهی، عمل ترکیب را حفظ می‌کند یعنی، $(g \circ h)^{(n)} = g^{(n)} \circ h^{(n)}$، و با تصویر فضای جت سازگار است به این معنی که $\pi^{(n+k)} \circ g^{(n+k)} = g^{(n)}$.

برای گروه (موضعی) از تبدیلات که روی E عمل می‌کند، **عمل گروه امتدادی** را تعریف می‌نماییم، که با $G^{(n)}$ نشان داده می‌شود و بر فضای جت J^nE، با امتداددهی تبدیلات معینی بر G، تعریف می‌گردد. در حالت عمومی، امتداددهی تنها این امکان را فراهم می‌کند که عمل موضعی گروه G را تعریف کنیم، گرچه کلاس‌های معینی مانند عمل‌های حافظ تار، که به صورت فراگیر عمل می‌کنند، امتدادهای فراگیر دارند. (برای مشاهدهٔ مثال‌هایی در این مورد به صفحات ۱۱۳ و ۱۱۴ از [۳۹] مراجعه نمایید.)

۶.۱ فرم برخوردی

فرض کنید که تابع $u = f(x)$، تابع امتدادی $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$ را معین سازد، که از X (فضای متغیرهای مستقل) به فضای J^n (جت مرتبهٔ n ام)، تعریف می‌شود. عکس این مسأله بدین صورت است که برش‌های مورد نظر فضای جت، یعنی توابع $F : X \to J^n$ با شرط $u^{(n)} = F(x)$ را مشخص سازیم و این از امتداددهی توابع معمولی بدست می‌آید. ضرورتاً این عمل با مسألهٔ تعیین که در آن زیرمنیفلدهای p—بعدی از J^n، نمودار توابع امتدادی هستند، یکی است. اگرچه در مختصات موضعی جواب هر دو مسأله کاملاً بدیهی است (این موضوع را که مختصات مشتق‌ها به طرز مناسبی با هم جفت و جور می‌شوند را می‌توان بررسی کرد.)، جواب مفید و جالبی برای این مسأله وجود دارد که به صورت طبیعی بر دستگاه تعریف شده از فرم‌های دیفرانسیل، پایه گذاری شده است.

۱.۶.۱ تعریف (فرم برخوردی). ۱— فرمی دیفرانسیل θ بر فضای جت J^n را **فرم برخوردی** می‌نامیم، هرگاه همهٔ توابع امتدادی، پوچ‌ساز آن باشند. به عبارت دیگر، اگر $u = f(x)$ تابعی هموار با امتداددهی $f^{(n)} : X \to J^n$ باشد، پول—بک θ توسط $f^{(n)}$ به X صفر گردد: $(f^{(n)})^*\theta = \circ$.

مثال زیر که به دو قضیهٔ پایانی این بخش منجر می‌شود، تعیین فرم‌های اساسی به کمک فرم‌های برخوردی اصلی را شرح می‌دهد.

۱.۶.۲ مثال. حالتی را در نظر بگیرید که یک متغیر مستقل و نیز یک متغیر وابسته داریم، که بر فضای جت مرتبهٔ اول J^1، با مختصات x، u و $p=u_x$ مشخص شوند. هر ۱—فرم عمومی به صورت $\theta=a\,dx+b\,du+c\,dp$ است، که در آن a,b,c توابعی از x,u,p هستند. تابع $u=f(x)$، امتداددهی مرتبهٔ اول $p=f'(x)$ را داراست. بنابراین چون در این حالت $(x,f^{(1)}(x))=(x,f(x),f'(x))=(x,u,p)=((f^{(1)})^1(x),(f^{(1)})^2(x),(f^{(1)})^3(x))$، بنابراین $(f^{(1)})^*\theta$ برابر است با:

$$\begin{aligned}&[a(x,f(x),f'(x))\,\frac{d(f^{(1)})^1}{dx}+b(x,f(x),f'(x))\,\frac{d(f^{(1)})^2}{dx}+c(x,f(x),f'(x))\,\frac{d(f^{(1)})^3}{dx}]\,dx\\&=[a(x,f(x),f'(x))+b(x,f(x),f'(x))f'(x)+c(x,f(x),f'(x))f''(x)]dx.\end{aligned}$$

این رابطه برای همهٔ توابع f صفر است، اگر و تنها اگر $c=0$ و $a=-b\,p$؛ بنابراین $\theta=b(x,u,p)\theta_0$ باید مضربی از ***فرم برخوردی اصلی*** $\theta_0=du-p\,dx=du-u_x\,dx$ باشد.

با عمل مشابه، برای فضای جت مرتبهٔ دوم J^2 با مختص اضافی $q=u_{xx}$، محاسبات مشابه نشان می‌دهد که ۱—فرمی عمومی $\theta=a\,dx+b\,du+c\,dp+e\,dq$ ۱—فرم برخوردی است، اگر و تنها اگر $\theta=b\,\theta_0+c\,\theta_1$، که $\theta_1=dp-q\,dx=du_x-u_{xx}\,dx$، فرم برخوردی اصلیِ بعدی است. (در اینجا نیز همانگونه که در مورد توابع دیفرانسیل‌پذیر اخیر انجام دادیم، قصد بر این است که فرم θ را با پول—بک $(\pi_1^2)^*\theta_0$ به J^2، تعیین کنیم.)

در حالت کلی، زمانی که $x,u\in\mathbb{R}$، فرم برخوردی عمومی را به صورت ترکیب خطیِ فرم‌های برخوردی اصلی $\theta_k=du_k-u_{k+1}\,dx$ $(k=0,\cdots,n-1)$ می‌توان نوشت که $u_k=D_x^k u$ مشتق مرتبهٔ k ام u است.

به طریق مشابه، محاسبات مقدماتی نشان می‌دهند که اگر دو متغیر وابستهٔ u و v را داشته باشیم، هر فرم برخوردی ترکیبی خطی از ۱—فرم‌های برخوردی اصلی‌ای است که برای u و همچنین برای v ایجاد می‌شوند، یعنی آنهایی که قبلاً برای u مشخص کردیم به همراه $dv-v_x\,dx$، $dv_x-v_{xx}\,dx$ و غیره. به عبارت دیگر، برای هر دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته، فرم برخوردی اصلی $\theta_0=du-u_x\,dx-u_y\,dy$ بر فضای جت J^1 و دو فرم برخوردی اصلی $\theta_x=du_x-u_{xx}\,dx-u_{xy}\,dy$ و $\theta_y=du_y-u_{xy}\,dx-u_{yy}\,dy$ بر فضای جت J^2 و غیره وجود دارند که فرم‌های برخوردی را می‌سازند. $\triangle$

با ادامه کار برای یافتن متغیرهای مستقل و وابستهٔ بیشتر، قضیه‌های مشخصهٔ زیر از فرم‌های برخوردی بدست می آیند: (برای اطلاعات بیشتر به [۳۹]، صفحهٔ ۱۲۳ مراجعه نمایید.)

۱.۶.۳ قضیه. *هر فرم برخوردی بر J^n به صورت ترکیب خطی $\theta=\sum_{J,\alpha}P_J^\alpha\theta_J^\alpha$ است. که در آن، $P_J^\alpha(x,u^{(n)})$، توابع هموار‌ی هستند که ضرایب فرم‌های برخوردی اصلی*

$$\theta_J^\alpha=du_J^\alpha-\sum_{i=1}^p u_{J,i}^\alpha dx^i,\qquad \alpha=1,\cdots,q,\quad 0\leq\#J<n$$

می‌باشند.(در رابطهٔ اخیر، $\#J$ مرتبهٔ فرم برخوردی θ^α_J می‌باشد.)

اثبات. برای اثبات مرجع [۳۹] را مشاهده کنید. □

و نیز خواهیم داشت:

۴.۶.۱ قضیه. *برش $u^{(n)} = F(x)$ از فضای جت J^n، امتداددهیِ تابعی مانند $u = f(x)$ است یعنی $F = f^{(n)}$، اگر و تنها اگر F پوچ‌ساز همهٔ فرم‌های برخوردی بر J^n باشد:*

$$F^*\theta^\alpha_J = 0, \qquad \alpha = 1, \cdots, q, \quad 0 \leq \#J < n.$$

اثبات. برای دیدن اثبات به مرجع [۳۹] رجوع نمایید. □

۷.۱ شبه—گروه‌های لی

مطالب این بخش برگرفته از مرجع [۳] است. در مباحث مطرح شده در فصل‌های بعد به دانستن مفهوم شبه—گروه و شبه—گروه لی نیاز خواهیم داشت. تعریف جدید شبه—گروه به صورت زیر است:

۱.۷.۱ تعریف. فرض کنیم M منیفلدی (حقیقی) باشد و G مجموعه‌ای از دیفیومورفیسم‌های زیرمجموعهٔ بازی از M بتوی M باشد. در این صورت G **شبه—گروه** است اگر

(i) G تحت تحدید بسته باشد: اگر $\tau : U \to M$ عضو G باشد، آنگاه $\tau|_V$ نیز عضوی از G باشد که $V \subset U$.

(ii) اگر $U \subset M$ مجموعه‌ای باز باشد و $U = \bigcup_s U_s$ و نیز $\tau : U \to M$ دیفیومورفیسمی با شرط $\tau|_{U_s} \in G$ باشد آنگاه داشته باشیم: $\tau \in G$.

(iii) G تحت ترکیب بسته باشد: اگر $\tau : U \to M$ و $\sigma : V \to M$ دو عضو از G باشند، آنگاه $\sigma \circ \tau \in G$. البته وقتی که ترکیب با معنی باشد.

(iv) G شامل دیفیومورفیسم همانی باشد.

(v) G تحت معکوس‌گیری بسته باشد: اگر $\tau : U \to M$ در G باشد، آنگاه τ^{-1} (که دامنه‌اش $\tau(U)$ است) نیز در G باشد.

به طور خلاصه، شبه—گروه G مجموعه‌ای از دیفیومورفیسم‌های موضعی بر منیفلد M است که تحت ترکیب (در صورت تعریف شدن) بسته است.

چون دیفیومورفیسم‌ها موضعی هستند ترکیب $\tau_2 \circ \tau_1$ تنها وقتی که دامنهٔ τ_2 شامل برد τ_1 باشد، با معنی است. بنابراین عبارت **شبه** کاهش دهندهٔ گروهی است که ترکیب همواره در آن تعریف می‌گردد. شبه—گروه شیئی بسیار عمومی است،آن را به شبه—گروه لی محدود می‌کنیم.

۱.۷.۲ تعریف (شبه—گروه لی). شبه—گروهی است با دیفیومورفیسم‌هایی که به عنوان جواب‌های تحلیلی موضعیِ یک دستگاه تحلیلی $\mathcal{R}$ از معادلات دیفرانسیل جزئی، تعریف می‌شوند.

بنابراین واریتهٔ تحلیلی $\mathcal{R}$ زیرمجموعهٔ $\mathcal{R} \subseteq J^k(M,M)$ از فضای جت مرتبهٔ k ام است. اگر x مختصات روی M و X نسخه‌ای از این دستگاه مختصات باشد؛ دستگاه تعریف شدهٔ $\mathcal{R}$ دستگاهی از PDE هاست که متغیرهای مستقل x و متغیرهای وابستهٔ X را مشخص می‌کند و به صورت موضعی توسط معادلات به فرم زیر شرح داده می‌شود

$$F(x, X, X^{(1)}, \cdots, X^{(k)}) = 0.$$

نظریهٔ ساختاری کارتان در صورتی که دستگاه تعریف شده مرتبهٔ اول باشد بسیار ساده می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم که این چنین باشد. کاهش به مرتبهٔ اول از طریق روشی که در [۲۹] شرح داده شده است، میسر است. در بخش‌هایی از نظریه، تحلیلی بودن به C^∞ می‌تواند تقلیل یابد. اما، نظریهٔ پایه‌گذاری شده بر معادلات با مشتق‌های جزیی تعریف شده به نتیجه‌ای منحصربفرد و وجودی نیاز دارد تا اندازهٔ فضای جواب قابل پیش‌بینی باشد. برای دستگاه‌های تحلیلی، قضیهٔ کوشی—کووالسکی و قضیه‌های مرتبط و پایه‌گذاری شده بر سری‌های تیلور (کارتان—کهلر، جانت—ریکوایر) برای این منظور ایفای نقش می‌کنند. این نتایج جز در موارد خاص به حالت C^∞ گسترش نمی‌یابند.

فصل ۲

تقارن

در این فصل در مورد اصول و برخی کاربردهای جدید نظریهٔ لی برای گروه‌های تقارنی معادلات دیفرانسیل مطالبی به صورت مختصر ارائه می‌گردد. روش اصلی مورد استفاده، روشی موسوم به بینهایت کوچک‌های لی است. امروزه این روش از مباحث پرطرفدار علمی است که چه از نظر تئوری و چه از نظر کاربرد در حال پیشرفت سریعی است. محاسبهٔ گروه تقارنی یک معادله دیفرانسیل دارای اهمیت فراوانی در انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل معمولی، دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل ناوردا، فرم کلی جواب عمومی، خطی‌سازی معادلات دیفرانسیل جزیی، حساب تغییرات و بسیاری از کاربردهای دیگر در ریاضیات و فیزیک است. برای مشاهدهٔ بسیاری از این مفاهیم و کاربردهای مربوط به آنها می‌توان به [۴، ۵، ۱۸، ۱۹، ۳۸، ۳۹، ۴۲] مراجعه نمود. در این فصل به مسألهٔ مهم تقارن‌های معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم و حالت‌های مهمی از تبدیلات را که به اطلاعات مهمی از معادلات دیفرانسیل مربوط می‌شوند، مورد بررسی قرار می‌دهیم. گروه تقارنی دستگاهی از معادلات دیفرانسیل بزرگ‌ترین گروه موضعی از تبدیلات است که بر متغیرهای مستقل و وابستهٔ

شکل ۲.۱: سوفس لی (۱۸۴۲—۱۸۹۹) ریاضیدان مشهور نروژی.

دستگاه عمل می‌کند همراه با این خاصیت که جواب‌ها را به جواب‌های دیگر منتقل می‌سازد. هدف اصلی این فصل بیان مطالب جدید، اصولی و قابل محاسبه از دستگاه‌های دیفرانسیل است. بحث را به گروه‌های لی تقارنی موضعی و همبند محدود می‌سازیم و بررسی تقارن‌های گسسته مانند انعکاس‌ها موضوع بحث این فصل نمی‌باشد. یکی از مباحث مهم و

کلیدی این فصل بحث امتداددهی است که در حالتی خاص مورد استفاده قرار می‌گیرد و حالت کلی‌تر آن در فصل‌های بعد بیان می‌شود. انواع مختلف گروه تبدیلات و شیوهٔ محاسبهٔ گروه تقارنی مربوط به این تبدیلات را بررسی خواهیم کرد. بخشی از دستاوردهای جدید تقارن را بیان می‌کنیم که به مبحث تبدیلات هم‌ارز مربوط می‌شود و نتایج مهمی در یافتن تقارن‌های جدید از تقارن‌های پیشین به همراه دارد. از اهداف دیگر مورد نظر، عنوان نمودن مسألهٔ دسته‌بندی زیرگروه‌های تقارنی یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل بر اساس جبر لی تقارنی متناظر است که به دستگاه بهینه شهرت یافته است.

۱.۲ گروه تقارنی معادلات دیفرانسیل

فرض کنیم دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ n–ام زیر را داشته باشیم

$$\Delta_\nu(x,u^{(n)})=0,\qquad \nu=1,\cdots,m, \tag{۱.۲}$$

که دارای p متغیر مستقل $x=(x^1,\cdots,x^p)$ و q متغیر وابستهٔ $u=(u^1,\cdots,u^q)$ است و $u^{(n)}$ نمایشگر مشتق‌های u نسبت به متغیرهای x حداکثر تا مرتبهٔ n می‌باشد و فرض بر این است که $u^{(0)}=u$. در دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) برای هر ν، Δ_ν تابعی دیفرانسیلی است که بر فضای جت مرتبهٔ n–ام تعریف شده است: $\Delta_\nu : J^n \longrightarrow \mathbb{R}$. برای سادگی بحث را به دستگاه‌های با توابع هموار محدود می‌کنیم و البته می‌توان این روش را به حالت‌های کلی‌تر گسترش داد. از دستگاه (۱.۲) می‌توان برای تعریف واریتهٔ زیر استفاده کرد

$$\mathcal{S}_\Delta=\Big\{(x,u^{(n)})\in J^n \mid \ \Delta_\nu(x,u^{(n)})=0,\ \ \nu=1,\cdots,m\Big\}.$$

توابع تعریف شدهٔ Δ_ν **منظم** نامیده می‌شوند هرگاه در هر نقطه از $\mathcal{S}_\Delta$ ماتریس ژاکوبی توابع Δ_ν نسبت به متغیرهای فضای جت $(x,u^{(n)})$ دارای بعد ماکزیمم برابر با m باشند. در واقع $\mathcal{S}_\Delta$ زیرمنیفلدی از J^n است که با توجه به بعد فضای جت از بعد $p+q\begin{pmatrix}p+n\\ n\end{pmatrix}-r$ است؛ وقتی که r رتبهٔ دستگاه مذکور است. تابع (هموار) $u=f(x)$ جوابی از دستگاه معادلات (۱.۲) است اگر و تنها اگر امتداد مرتبهٔ n–ام آن یعنی $f^{(n)}(x)$ در دستگاه صدق کند: $\Delta_\nu(x,f^{(n)})=0,\ \ \nu=1,\cdots,m$، که معادل با آن است که نمودار $\Gamma_f^{(n)}=\{(x,f^{(n)})\}$ از امتداد مرتبهٔ n–ام f کاملاً داخل $\mathcal{S}_\Delta$ قرار گیرد: $\Gamma_f^{(n)}\subset\mathcal{S}_\Delta$.

۱.۱.۲ تعریف. یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل در نقطهٔ $(x_0,u_0^{(n)})\in\mathcal{S}_\Delta$ **موضعاً حل‌پذیر** نامیده می‌شود هرگاه جواب (هموار) $u=f(x)$ بر همسایگی‌ای از x_0 موجود باشد که $u_0^{(n)}=f^{(n)}(x_0)$. دستگاهی از معادلات دیفرانسیل که در هر نقطه از دامنهٔ تعریف در هر دو شرط منظم بودن و موضعاً حل‌پذیری صادق باشد **کاملاً منظم** نامیده می‌شود.

اکثر دستگاه‌های مورد بررسی، کاملاً منظم هستند. مثلاً موضعاً حل‌پذیری دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی با شرط وجود جواب مسألهٔ با مقادیر آغازی یکی است. قضایای فروبنیوس و کارتان–کهلر موضعاً حل‌پذیری دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جزیی پیچشی را تضمین می‌کنند (در فصل بعد به تفصیل به این مفاهیم خواهیم پرداخت).

۲.۱.۲ تعریف (تقارن). فرض کنیم G گروهی از تبدیلات باشد که بر منیفلد M عمل می‌کند. عنصر g از G را یک **تقارن** از زیرمنیفلد $N \subset M$ می‌نامیم هرگاه $g \cdot N \subset N$. مجموعهٔ چنین تقارن‌هایی از N یک گروه لی است که آن را **گروه تقارنی** N می‌نامیم.

۳.۱.۲ قضیه. *تبدیل g یک تقارن از دستگاه موضعاً حل‌پذیر از معادلات دیفرانسیل (۱.۲)* است وقتی و فقط وقتی که واریتهٔ $\mathcal{S}_\Delta$ متناظر به آن تحت تبدیلات امتدادی ناوردا باشد: $g^{(n)}(\mathcal{S}_\Delta) \subset \mathcal{S}_\Delta$.

اثبات: فرض کنیم $z_\circ = (x_\circ, u_\circ^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$ داده شده و $\bar{z}_\circ = g^{(n)} \cdot z_\circ$ تعریف شده باشد، با استفاده از موضعاً حل‌پذیری $\mathcal{S}_\Delta$ و انتخاب جواب $u = f(x)$ در نزدیکی $x_\circ$ داریم $u_\circ^{(n)} = f^{(n)}(x_\circ)$. بنابراین $\bar{f} = g \cdot f$ نیز حداقل در نزدیکی نقطهٔ $(\bar{x}_\circ, \bar{u}_\circ) = g \cdot (x_\circ, u_\circ)$ یک جواب از دستگاه است و در نتیجه داریم $\bar{z}_\circ = (\bar{x}_\circ, \bar{f}^{(n)}(\bar{x}_\circ)) \in \mathcal{S}_\Delta$. □

یکی از نتایج مهم در مورد تقارن‌ها آن است که تقارن‌های یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل تحت تغییر مختصات بدون تغییر باقی می‌ماند و لذا می‌توان با تغییر مختصات آن به حالتی ساده‌تر، گروه تقارنی را پیدا کرد. این در حالی است که برای داشتن مولدهای بینهایت کوچک در یک مختصات بخصوص و در حالتی که به راحتی تغییر مختصات قابل اعمال نیست، باید مستقیماً تقارن دستگاه را در آن مختصات پیدا کرد.

۲.۲ روش بینهایت کوچک‌ها

در این بخش با گروه‌های تبدیلات نقطه‌ای (یا برخوردی) G که همبند هستند سر و کار داریم. در حالتی که تبدیلات نقطه‌ای هستند، مولدهای بینهایت کوچک یک جبر لی $\mathfrak{g}$ تشکیل می‌دهند که شامل میدان‌های برداری به فرم زیر است

$$v = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi^\alpha(x,u)\,\frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

که بر فضای متغیرهای مستقل و وابسته تعریف می‌شوند. فرض کنیم $v^{(n)}$ نمایشگر امتداد مرتبهٔ n–ام میدان برداری مذکور به فضای جت J^n باشد. در این صورت

$$v^{(n)} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{\#J=j=0}^{p} \varphi_J^\alpha(x,u^{(j)})\,\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}$$

که در آن $\varphi_J^\alpha = D_J(Q^\alpha) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i\, u_{J,i}^\alpha$ (برای مشاهدهٔ جزییات به [۳۸، ۳۹] رجوع نمایید). قضیهٔ زیر کلید اصلی یافتن گروه تقارنی است:

۱.۲.۲ قضیه (محک تقارن بینهایت کوچک). *([۳۸]) گروه همبند از تبدیلات G یک گروه تقارنی از دستگاه کاملاً منظم از معادلات دیفرانسیل (۱.۲) است اگر و تنها اگر شرایط تقارنی بینهایت کوچک زیر برای هر مولد بینهایت کوچک*

برقرار باشند G *از* $v \in \mathfrak{g}$

$$v^{(n)}(\Delta_\nu) = 0, \qquad \nu = 1, \cdots, r, \tag{۲.۲}$$

وقتی که دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) برقرار باشد.

معادلات (۲.۲) را **معادلات تعیین کننده** از گروه تقارنی دستگاه مورد نظر می‌نامند. در این محک هر جا که لازم باشد از برقراری معادلات دیفرانسیل (۱.۲) استفاده می‌کنیم؛ به این ترتیب در معادلات تعیین کننده مشتق‌های بالاتر از مرتبهٔ دستگاه به مشتق‌های با مرتبهٔ پایین‌تر تبدیل می‌گردند. در حالت عادی از دستگاه، استفاده از معادلات دستگاه جهت ساده نمودن معادلات تعیین کننده اختیاری است. بعد از اثر دادن میدان‌های برداری امتدادی بر دستگاه معادلات، معادلات تعیین کننده دستگاهی خطی و فوق معین از معادلات دیفرانسیل جزیی را پیشنهاد می‌کند که بر حسب ضرایب ξ^i و ϕ^α از v هستند. بعد از آن با توجه به متغیرهایی که ضرایب ξ^i و ϕ^α به آنها وابسته‌اند و نیز متغیرهایی که نسبت به آنها آزاد محسوب می‌شوند، معادلات تعیین کننده به معادلات جزیی‌تر که از صفر گذاشتن ضرایب متغیرهای آزاد حاصل می‌شوند، می‌رسیم. اغلب معادلات جدید را معادلات تعیین کننده می‌نامند. در اغلب مسائل مورد توجه معادلات تعیین کننده به اندازهٔ کافی ساده‌اند و محاسبهٔ این ضرایب به سادگی امکان‌پذیر است. این در حالی است که برخی از مسائل به معادلات با مشتقات جزیی دشواری می‌انجامد که حتی با داشتن نرم‌افزارهای در دسترس محاسبه دشوار است. نرم‌افزارهای مناسب برای این کار میپل و متمتیکا هستند که هیچ یک از آنها دارای برنامهٔ جامعی نیست که حتی مراحل عادی محاسبه گروه تقارنی معادله با مشتقات جزیی دلخواهی را به طور کامل انجام دهد. به عنوان مثال در [۳۶] (که در پیوست نیز آورده خواهد شد) به یک معادلهٔ غیرخطی پرداخته شده است که حل معادلات تعیین کننده و یافتن گروه تقارن‌های نقطه‌ای برای آن کاری مشکل است.

۳.۲ تبدیلات نقطه‌ای

فرض کنیم $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^{p+q}$ فضای اقلیدسی همهٔ متغیرهای مستقل و وابسته باشد. یکی از مهم‌ترین نوع از تقارن‌ها، تقارنی است که توسط دیفیومورفیسم‌های موضعی روی E به صورت

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g \cdot (x, u) = (\phi_1(x, u), \phi_2(x, u)),$$

نظیر می‌گردد. این نوع از تبدیلات را **تبدیلات نقطه‌ای** می‌نامند زیرا بر فضای کلی E به صورت نقطه به نقطه عمل می‌کنند. این نوع از تبدیلات و تقارن‌های متناظر به آنها از رایج‌ترین و پرکاربردترین نوع مورد مطالعه هستند. نوع ساده‌ای از این تبدیلات را **تبدیلات پایه‌ای** می‌نامند که تنها بر متغیرهای مستقل اثر می‌کنند: $\bar{x} = \phi(x), \quad \bar{u} = u$. نوع خاص دیگری از تبدیلات نقطه‌ای که به صورت

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g \cdot (x, u) = (\phi_1(x), \phi_2(x, u)),$$

تعریف می‌شوند را **تبدیلات حافظ تار (تصویری)** گویند؛ از آن جهت که تغییرات روی متغیرهای مستقل متأثر از تغییر متغیرهای وابسته نیست و به این ترتیب فضای متغیرهای مستقل جدید، تنها برحسب متغیرهای اولیه نوشته می‌شوند و تصویر تاری (x,u) و $(\bar{x},\bar{u})$ به متغیرهای منیفلد زمینه منجر می‌گردد.

نوع دیگر از تبدیلات مهم، **تبدیلات هودوگراف** هستند که توسط تغییر درونی متغیرهای مستقل و وابسته به یکدیگر تعریف می‌گردند (مثلاً $\bar{x}=u,\ \bar{u}=x$). اغلب تقارن‌های نقطه‌ای و حافظ تار یکی هستند. در حالتی که تقارن‌های نقطه‌ای، حافظ تار نیستند، نوعی از تبدیلات هودوگراف یافت می‌شود که معادلهٔ اصلی تحت آن به طور چشم‌گیری قابل ساده سازی است.

مولد بینهایت کوچک تبدیلات نقطه‌ای را بر اساس فرم کلی

$$v=\xi^i(x,u)\,\frac{\partial}{\partial x^i}+\phi^\alpha(x,u)\,\frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha},$$

و به کمک محک تقارن می‌توان یافت. کار را با یک مثال ساده آغاز می‌کنیم:

۱.۳.۲ مثال. معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر را درنظر بگیرید

$$u_{xx}=0. \tag{۳.۲}$$

یک تقارن نقطه‌ای بینهایت کوچک از معادلهٔ (۳.۲) میدانی برداری به فرم کلی زیر بر $\mathbb{R}^2$ است

$$v=\xi(x,u)\,\frac{\partial}{\partial x}+\phi(x,u)\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

برای مشخص شدن این تقارن نقطه‌ای بینهایت کوچک باید ضرایب ξ و ϕ معین گردند. با استفاده از قضیهٔ اخیر (محک تقارن بینهایت کوچک) چون این معادله در فضای جت مرتبهٔ دوم بیان شده است، باید امتداد مرتبهٔ دوم v را بیابیم. بر اساس مطالب ذکر شده در بخش قبل، این امتداد بر J^2 به شکل زیر است

$$v^{(2)}=\xi(x,u)\,\frac{\partial}{\partial x}+\phi(x,u)\,\frac{\partial}{\partial u}+\phi^x(x,u^{(1)})\,\frac{\partial}{\partial u_x}+\phi^{xx}(x,u^{(2)})\,\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

که ضرایب ϕ^x و ϕ^{xx} به شکل زیر هستند

$$\begin{aligned}\phi^x&=\mathcal{D}_x(Q)+\xi\,u_{xx}=\phi_x+[\phi_u-\xi_x]\,u_x-\xi_u\,u_x^2,\\ \phi^{xx}&=\mathcal{D}_x^2(Q)+\xi\,u_{xxx}=\phi_{xx}+[2\,\phi_{xu}-\xi_{xx}]\,u_x+[\phi_{uu}-2\,\xi_{xu}]\,u_x^2\\ &\qquad -\xi_{uu}\,u_x^3+[\phi_u-2\,\xi_x]\,u_{xx}-3\,\xi_u\,u_x\,u_{xx},\end{aligned} \tag{۴.۲}$$

و Q یعنی مشخصهٔ میدان برداری v به صورت $Q=\phi-\xi\,u_x$ است. محک تقارن بینهایت کوچک از معادلهٔ (۳.۲) به شکل زیر است

$$\phi^{xx}=0,\qquad u_{xx}=0 \text{ وقتی که } \tag{۵.۲}$$

با قراردادن ϕ^{xx} از (۴.۲) در (۵.۲) و برابر با صفر قرار دادن u_{xx} به رابطهٔ ضمنی تقارن می‌رسیم:

$$\phi_{xx}+[2\,\phi_{xu}-\xi_{xx}]\,u_x+[\phi_{uu}-2\,\xi_{xu}]\,u_x^2-\xi_{uu}\,u_x^3=0.$$

در معادلهٔ اخیر متغیرها عبارتند از x, u, u_x در حالی که ξ و ϕ تنها به x, u وابسته‌اند و بنابراین u_x و مشتق‌های آن نسبت به x، مستقل محسوب می‌شوند. بنابراین معادلهٔ اخیر برقرار است اگر و تنها اگر ضرایب u_x و توان‌های آن همگی برابر صفر باشد. با این عمل دستگاه فوق معین زیر از معادلات دیفرانسیل جزیی که دستگاه معادلات تعیین کننده نامیده می‌شود، بدست می آید

$$\phi_{xx} = 0, \qquad 2\,\phi_{xu} = \xi_{xx}, \qquad \phi_{uu} = 2\,\xi_{xu}, \qquad \xi_{uu} = 0.$$

جواب عمومی معادلات تعیین کننده به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \xi &= c_1\,x^2 + c_2\,xu + c_3\,x + c_4\,u + c_5, \\ \phi &= c_1\,xu + c_2\,u^2 + c_6\,x + c_7\,u + c_8, \end{aligned}$$

که در آن ضرایب c_i ثابت هستند. بنابراین معادلهٔ (۳.۲) دارای جبر لی ۸–بعدی از تقارن‌های بینهایت کوچک، تولید شده توسط میدان‌های برداری زیر است (که با یک قرار دادن یک ثابت و صفر گرفتن بقیهٔ ثابت‌ها حاصل می‌شوند)

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = x\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = x\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = u\,\frac{\partial}{\partial x}, \\ &X_6 = u\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_7 = x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + xu\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_8 = xu\,\frac{\partial}{\partial x} + u^2\,\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

چون مولدهای بینهایت کوچک فوق تشکیل یک جبر لی می‌دهند، باید کروشهٔ لی هر دو تا از آنها برحسب ترکیب خطی با ضرایب ثابت از میدان‌های برداری فوق قابل بیان باشد. جابجاگر (کروشهٔ لی) آنها در جدول زیر خلاصه شده است:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	0	X_1	X_2	0	0	$2X_3+X_6$	X_4
X_2	0	0	0	0	X_1	X_2	X_4	X_3+2X_6
X_3	$-X_1$	0	0	X_4	$-X_5$	0	X_7	0
X_4	$-X_2$	0	$-X_4$	0	X_3-X_6	X_4	0	X_7
X_5	0	$-X_1$	X_5	X_6-X_3	0	$-X_5$	X_8	0
X_6	0	$-X_2$	0	$-X_4$	X_5	0	0	X_8
X_7	$-2X_3-X_6$	$-X_4$	$-X_7$	0	$-X_8$	0	0	0
X_8	$-X_4$	$-X_3-2X_6$	0	$-X_7$	0	$-X_8$	0	0

گروه لی متناظر به این جبر لی گروه تصویری $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ است که توسط تبدیلات کسری–خطی معرفی می‌گردد

$$(x,u) \mapsto \left(\frac{ax+bu+c}{hx+ju+k}, \frac{dx+eu+f}{hx+ju+k}\right), \qquad \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & j & k \end{pmatrix} \neq 0,$$

که حالت کلی تقارن‌های نقطه‌ای معادلهٔ (۳.۲) را مشخص می‌سازد. $\triangle$

۲.۳.۲ مثال. گروه تقارنی معادلهٔ غیر خطی انتشار را جستجو می‌کنیم:

$$u_t = u_{xx} + ux^۲$$

که به عنوان فرم پتانسیل معادلهٔ برگر مشهور است. تقارن‌های بینهایت کوچک آن را

$$v = \xi^۱(t,x,u)\,\frac{\partial}{\partial t} + \xi^۲(t,x,u)\,\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x,u)\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

می‌گیریم. محک تقارن برای امتداد مرتبهٔ دوم آن به فضای جت $J^۲$ به صورت زیر است

$$\varphi^t = \phi^{xx} + ۲\,u_x\,\varphi^x, \qquad u_t = u_{xx} + ux^۲ \text{ وقتی که}$$

با جایگذاری ضرایب $\varphi^t, \varphi^x, \varphi^{xx}$ و $u_{xx}+ux^۲$ به جای u_t در معادلهٔ اخیر و سپس یافتن معادلات تعیین کننده به جواب‌های کلی زیر از این معادلات می‌رسیم

$$\xi^۱ = c_۱ + c_۴\,x + ۲\,c_۵\,t + ۴\,c_۶\,xt, \qquad \xi^۲ = c_۲ + ۲\,c_۴\,t + ۴\,c_۶\,t^۲,$$
$$\varphi = c_۳ - c_۵\,x - ۲\,c_۶\,t - c_۶\,x^۲ + \alpha(t,x)\,e^{-u},$$

که در آن c_i ها دلخواه و ثابت هستند و $\alpha_t = \alpha_{xx}$ جوابی دلخواه از معادلهٔ گرما می‌باشد. بنابراین جبر تقارنی معادلهٔ برگر توسط میدان‌های برداری زیر تولید می‌گردد

$$v_۱ = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad v_۲ = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad v_۳ = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad v_۴ = x\,\frac{\partial}{\partial x} + ۲\,t\,\frac{\partial}{\partial t},$$
$$v_۵ = ۲\,t\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,\frac{\partial}{\partial u}, \qquad v_۶ = ۴\,xt\,\frac{\partial}{\partial x} + ۴\,t^۲\,\frac{\partial}{\partial t} - (x^۲ + ۲\,t)\,\frac{\partial}{\partial u},$$
$$v_\alpha = \alpha(t,x)\,e^{-u}\,\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \alpha_t = \alpha_{xx} + ux^۲ \text{ وقتی که}$$

جبر تقارنی بالا با جبر تقارنی‌ای که از معادلهٔ گرما بدست می‌آید ایزومورف است [۳۹]. بنابراین تبدیل $u \mapsto e^u$ مولدهای تقارنی برگر را به نظایرشان از معادلهٔ گرما انتقال می‌دهد و به این ترتیب معادلهٔ پتانسیل برگر به معادلهٔ گرما خطی‌سازی می‌شود. △

۳.۳.۲ گزاره. *دو معادله دیفرانسیل هم‌ارز، گروه‌های تقارنی ایزومورف دارند.*

اثبات. برای اثبات این گزاره مرجع [۳۹] را مشاهده نمایید. □

بنابراین اگر ϕ نگاشت انتقال دهندهٔ یک معادله دیفرانسیل به دیگری باشد و g تقارنی از اولی باشد، آنگاه $\bar{g} = \Phi \circ g \circ \Phi^{-۱}$ تقارنی از دومی است.

۴.۳.۲ قضیه. *فرض کنیم G یک گروه لی باشد که بر E عمل می‌کند. همچنین امتداد مرتبهٔ n–ام G به صورت منظم عمل می‌کند و در یک همسایگی باز $V^n \subset J^n$ دارای مجموعهٔ کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی مستقل تابعی مرتبهٔ n–ام $I_1, \cdots, I_k$ باشد. G گروه تقارنی دستگاهی از معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ n–ام است، اگر و تنها اگر بر V^n بر حسب ناورداهای دیفرانسیلی قابل بیان باشد:*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = F_\nu\left(I_1(x, u^{(n)}), \cdots, I_k(x, u^{(n)})\right), \qquad \nu = 1, \cdots, l.$$

اثبات: این قضیهٔ نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ ۳۸.۲ از مرجع [۳۹] است. □

یکی از کاربردهای مهم تقارن‌های نقطه‌ای در یافتن مجموعهٔ کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی و نیز پیدا کردن یک فرم عمومی برای جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیلی است. ایدهٔ اصلی این موضوعات به کارهای اوزیانیکف [۴۲] و بعد از او به کارهای صورت گرفته در [۱۷، ۳۹] بر می‌گردد. کاربردهای عملی و اساسی گروه‌های لی (همبند) به خاطر توانایی کار با بینهایت کوچک‌هاست. در حقیقت محک بینهایت کوچک‌ها ابزار مناسبی برای ناوردایی یک تابع حقیقی مقدار است.

۵.۳.۲ قضیه. *فرض کنیم G گروه همبندی از تبدیلات باشد که بر منیفلد M عمل می‌کند. تابع $I : M \longrightarrow \mathbb{R}$ تحت G ناورداست اگر و تنها اگر برای هر $x \in M$ و هر مولد بینهایت کوچک $v \in \mathfrak{g}$ در G داشته باشیم*

$$v[I] = 0.$$

اثبات. برای دیدن برهان به صفحهٔ ۶۲ از [۳۹] رجوع نمایید. □

با توجه به این قضیه اگر $u = I(x, u)$ ناوردایی از گروه ۱–پارامتریِ مولد بینهایت کوچک $v = \sum_i \xi^i(x, u)\partial_{x^i} + \sum_\alpha \eta^\alpha(x, u)\partial_{u^\alpha}$ برای متغیرهای مستقل و وابستهٔ به ترتیب x و u باشد، آنگاه در معادله دیفرانسیل جزیی همگن، خطی و مرتبهٔ اول زیر صادق خواهد بود (جهت مشاهدهٔ جزییات مطالب فصل چهارم [۱۷] را مطالعه نمایید)

$$\sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{n} \eta^\alpha(x, u)\,\frac{\partial u}{\partial u^\alpha} = 0.$$

جواب معادلهٔ اخیر را می‌توان با **روش مشخصه‌ها** پیدا کرد. یعنی معادلهٔ فوق را با دستگاه مشخصه زیر از معادلات دیفرانسیل معمولی جایگزین می‌کنیم

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \cdots = \frac{dx^m}{\xi^m(x)} = \frac{du^1}{\eta^1(x)} = \cdots = \frac{du^n}{\eta^n(x)}.$$

جواب عمومی این معادله را (به شکل موضعی) می‌توان به صورت

$$I_1(x) = c_1, \quad I_2(x) = c_2, \quad \cdots, \quad I_{m-1}(x) = c_{m-1}$$

نوشت که در آن c_i ها ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. در این صورت توابع منتج شدهٔ $I_1, I_2, \cdots, I_{m-1}$ مجموعهٔ کاملی از ناورداهای مستقل تابعی را از گروه ۱−پارامتری v معرفی می‌کنند.

همچنین بر اساس قضیهٔ بخش ۳.۳.۴ از [۱۷]، ناورداهای بدست آمده که در واقع همان انتگرال‌های اول مستقل از دستگاه مشخصهٔ مربوط به مولد بینهایت کوچک v هستند، جواب عمومی زیر از دستگاه معادلات مربوط به گروه تقارنی را فراهم می‌نماید

$$S(x,u) = \mu(I_1(x,u),\, I_2(x,u),\, \cdots,\, I_n(x,u)),$$

که در آن μ تابعی دلخواه و صادق در معادلهٔ $v[\mu] = 0$ است. با قرار دادن S در معادلهٔ اصلی می‌توان جواب متشابه معادلهٔ اصلی را پیدا کرد. برای دیدن مثالی از این بحث به [۱۷]، [۳۲]، [۳۶] و یا [۳۹] مراجعه کنید.

به عنوان آخرین مطلب از این بخش به کاربرد مهم دیگری از گروه‌های تقارنی یک دستگاه اشاره می‌کنیم. هرگاه دستگاهی خطی از معادلات دیفرانسیل جزیی را داشته باشیم که به صورت $D[u] = 0$ تعریف شده است و در آن D یک عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ n−ام است،آنگاه با فرض آنکه دستگاه فوق معین نباشد (یعنی تعداد معادلات بیش از تعداد متغیرها نباشد)، گروه تقارنی دستگاه نامتناهی بعد است؛ زیرا به هر جوابی از آن می‌توان جواب دیگری را نسبت داد [۳۹]. در کل می‌توان قضیهٔ مهم زیر را بیان کرد (اثباتی از این قضیه در فصل ششم [۳۹] قابل مشاهده است).

۶.۳.۲ قضیه. *فرض کنیم $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ دستگاه مرتبهٔ n−ام از q معادلهٔ دیفرانسیل جزیی مستقل از $p \geq 2$ متغیر مستقل و q متغیر وابسته باشد. اگر دستگاه دارای یک گروه لی آبلی نامتناهی بعد باشد، مدارهای آن q−بعدی باشند و مولدهای بینهایت کوچک آن به صورت خطی به جواب عمومی دستگاه معادلات مرتبهٔ n−ام $D[u] = 0$ از q معادله دیفرانسیل جزیی خطی وابسته باشد، آنگاه تحت تغییر مختصات، دستگاه اصلی را به فرم دستگاه خطی ناهمگن $D[u] = f$ می‌توان تبدیل نمود.*

۴.۲ دسته‌بندی زیرگروه‌ها و زیرجبرهای لی

۱.۴.۲ تعریف. فرض کنیم G یک گروه لی با جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد. یک **دستگاه بهینه** از زیر گروه‌های s−پارامتری در واقع لیستی از زیرگروه‌های s−پارامتری غیر هم‌ارز تحت رابطهٔ تزویج است با این خاصیت که هر زیرگروه از این دست دقیقاً مزدوج یکی از زیرگروه‌های لیست مذکور باشد. با استفاده از گزارهٔ زیر به نتیجهٔ مهمی در این زمینه می‌توان دست یافت (برای دیدن اثبات و جزییات مسأله به [۳۸] می‌توان رجوع کرد):

۲.۴.۲ گزاره. *فرض کنیم H و $\tilde{H}$ زیرگروه‌های لی s−بعدی همبند از گروه لی G و با جبرهای لی به ترتیب $\mathfrak{h}$ و $\tilde{\mathfrak{h}}$ باشند. جبر لی G را نیز $\mathfrak{g}$ درنظر می‌گیریم. در این صورت $\tilde{H} = gHg^{-1}$ زیرگروه‌های مزدوج هستند اگر و تنها اگر $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{h})$ زیرجبرهای مزدوج باشند.*

بنابراین به بیان مشابه، لیستی از زیرجبرهای s−پارامتری تشکیل یک دستگاه بهینه می‌دهند هرگاه هر زیرجبر s−پارامتری از $\mathfrak{g}$ با یک عضو منحصربفرد از این لیست و توسط مقداری از نمایش الحاقی هم‌ارز باشد: $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{h});\ (g \in G)$. در نتیجه مسألهٔ یافتن دستگاه بهینه از زیرگروه‌ها معادل یافتن آن برای زیرجبرهاست. برای این منظور روش بینهایت کوچک‌ها مؤثر به نظر نمی‌رسد. در حالتی که طبقه‌بندی را برای زیرجبرهای ۱−بعدی اجرا نماییم، این طبقه‌بندی لزوماً با طبقه‌بندی مدارهای نمایش الحاقی یکی خواهد بود؛ چرا که هر زیرجبر ۱−بعدی با تعیین یک بردار غیر صفر از $\mathfrak{g}$ مشخص می‌گردد.

عمل الحاقی به صورت **سری لی** زیر تعریف می‌گردد

$$\mathrm{Ad}(\exp(\gamma\, Y_i))Y_j = Y_j - \gamma\,[Y_i, Y_j] + \frac{\gamma^۲}{۲}\,[Y_i, [Y_i, Y_j]] - \cdots,$$

که در آن γ پارامتری دلخواه است، $i, j = ۱, \cdots, s$ و فرض کرده‌ایم که $\mathfrak{g} = \langle\, Y_i : i = ۱, \cdots, s\,\rangle$. روش کار دسته‌بندی زیرگروه‌های ۱−بعدی که در واقع براساس دسته‌بندی زیرجبرها انجام می‌شود به این صورت است که یک فرم کلی برای برداری دلخواه از $\mathfrak{g}$ درنظر می‌گیریم و هر بار با استفاده از عمل الحاقی تا حد امکان ضرایب پایهٔ $\{Y_i\}$ از این بردار را صفر می‌نماییم تا اینکه به ساده‌ترین فرم ممکن برسیم. با انتخاب عمل‌های الحاقی مختلف بردارهای نهایی ممکن است فرم‌های متفاوتی داشته باشند. مجموعهٔ همهٔ چنین بردارهای نهایی، یک دستگاه بهینه را تشکیل می‌دهند.

برای یافتن دستگاه بهینه از زیرجبرهای با بعد $s \geq ۲$ هر بار بردارهای دستگاه بهینهٔ با بعد $s - ۱$، مثلاً A را در نظر می‌گیریم. مثلاً برای حالت $s = ۲$، با انتخاب عضوی مانند $X \in A$ و نیز یک بردار Y دلخواه از $\mathfrak{g}$ بر حسب ترکیبی خطی از عناصر پایه، از این نکته استفاده می‌کنیم که برای ایجاد زیرجبر ۲−بعدی از X و Y باید داشته باشیم $[X, Y] = \alpha\, X + \beta\, Y$ که $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. بنابراین با یافتن کروشه‌های لی مناسب می‌توان فرم Y را تا حد امکان ساده نمود. با انتخاب X های متفاوت از A و ساده‌ترین فرم Y یک دستگاه بهینه از زیرجبرهای ۲−بعدی حاصل خواهد شد. برای حالت $s > ۲$ نیز به تعداد $s - ۱$ تا از عناصر A را به همراه بردار دلخواه $Y \in \mathfrak{g}$ درنظر گرفته و روش فوق را تکرار می‌کنیم. برای مشاهدهٔ جزییات مراجع [۱۸، ۳۸، ۴۲] را مشاهده نمایید.

۳.۴.۲ مثال. جبر لی تبدیلات هم‌ارز (که در بخش ۶.۲ به آن می‌پردازیم) از معادلهٔ غیر خطی فین یعنی

$$u_t = [E(u)u_x]_x + h(x)u,$$

برای توابع دلخواه E و h به صورت زیر است

$$\mathfrak{g} = \langle\; Y_۱ = \partial_t,\; Y_۲ = \partial_x,\; Y_۲۳ = u\,\partial_u,\; Y_۴ = x\,\partial_x + ۲\,E\,\partial_E,\; Y_۵ = \partial_u - \frac{h}{u}\,\partial_h\;\rangle.$$

جدول‌های کروشهٔ لی و الحاقی $\mathfrak{g}$ به صورت زیر می‌باشند:

جدول ۲. کروشه لی برای جبر لی معادله $\mathfrak{g}$

$[\,,\,]$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Y_1	0	0	0	0	0
Y_2	0	0	0	Y_2	0
Y_3	0	0	0	0	$-Y_5$
Y_4	0	$-Y_4$	0	0	0
Y_5	0	0	Y_5	0	0

جدول ۳. عمل الحاقی برای جبر لی $\mathfrak{g}$

Ad	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Y_1	Y_1	Y_2	Y_3	$Y_4 - s\,Y_2$	Y_5
Y_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Y_3	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	$e^s\,Y_5$
Y_4	Y_1	$e^s\,Y_2$	Y_3	Y_4	Y_5
Y_5	Y_1	Y_2	$Y_3 - s\,Y_5$	Y_4	Y_5

برای یافتن یک دستگاه بهینه از زیرجبرهای ۱–بعدی با استفاده از جدول‌های ۲ و ۳ برای گروه لی $\mathfrak{g}$ استفاده می‌کنیم. بردار دلخواه و غیر صفر Y را به صورت زیر درنظر می‌گیریم

$$Y = a_1\,Y_1 + a_2\,Y_2 + a_3\,Y_3 + a_4\,Y_4 + a_5\,Y_5.$$

ضرایب a_i را تا حد امکان تا رسیدن به ساده‌ترین فرم برای Y صفر می‌کنیم.

حالت اول. فرض کنیم $a_1 \neq 0$. می‌توانیم a_1 را با ضرب یک اسکالر مناسب در Y به یک تبدیل کرده و بردار جدید را نیز Y بنامیم. با استفاده از جدول ۳، عمل $\mathrm{Ad}(\exp(\frac{a_2}{a_3}\,Y_2))$ بر Y ضریب Y_2 را صفر می‌کند و Y به

$$Y' = Y_1 + a_3\,Y_3 + a_4\,Y_4 + a_5\,Y_5.$$

تبدیل می‌گردد. عمل $\mathrm{Ad}(\exp(\frac{a_5}{a_3}\,Y_5))$ نیز بر Y' وقتی $a_5 \neq 0$ باعث صفر شدن ضریب Y_5 در Y' شده و آنرا به فرم زیر تبدیل می‌کند

$$Y'' = Y_1 + a_3\,b_3 + a_4\,Y_4.$$

حال چون ساده سازی بیشتری میسر نیست، حالت مختلف a_3, a_4 را وقتی که صفر یا مخالف صفر باشند در نظر می‌گیریم. در این صورت Y به فرم Y_1 برای $a_3 = a_4 = 0$، به فرم $Y_1 + \alpha\,Y_3$ برای $a_3 \neq 0, a_4 = 0$، به فرم $Y_1 + \alpha\,Y_4$ برای $a_3 = 0, a_4 \neq 0$، به فرم $Y_1 + \beta\,Y_3 + \gamma\,Y_4$ برای $a_3 = a_4 = 0$ خواهد بود.

حالت دوم. اگر $a_1 = 0$ و $a_3 \neq 0$ آنگاه می‌توانیم فرض کنیم

$$Y = a_2\,Y_2 + Y_3 + a_4\,Y_4 + a_5\,Y_5.$$

حال با فرض $a_2 \neq 0$ و با اثر دادن $\mathrm{Ad}(\exp(\frac{a_2}{a_4}, Y_2))$ برای $a_4 \neq 0$ و یا با فرض $a_2 = 0$، ضریب Y_2 حذف و فرم زیر حاصل می‌شود

$$\tilde{Y} = Y_3 + a_4\, Y_4 + a_5\, Y_5,$$

که آن نیز با اثر دادن $\mathrm{Ad}(\exp(\frac{a_5}{a_3}\, Y_5))$ برای $a_5 \neq 0$ و یا وقتی که $a_5 = 0$ و ضریب Y_5 حذف می‌شود. ساده سازی بیشتری ممکن نیست و برای حالت‌های مختلف a_4 به فرم‌های سادهٔ Y_3 و $Y_3 + \delta\, Y_4$ می‌رسیم.

حالت سوم. اگر $a_3 = 0$ آنگاه می‌توانیم فرم Y را برای $a_2 \neq 0$ به صورت زیر درنظر بگیریم

$$\hat{Y} = Y_2 + a_4\, Y_4 + a_5\, Y_5,$$

اگر $a_4 \neq 0$ با تأثیر $\mathrm{Ad}(\exp(\frac{1}{a_4}\, Y_4))$ فرم آن به $a_4\, Y_4 + a_5\, Y_5$ نظیر می‌گردد و اگر $a_5 \neq 0$ با تأثیر $\mathrm{Ad}(\exp(\frac{1}{a_4}\, Y_4))$ به فرم سادهٔ $\mu\, Y_4 + Y_5$ خواهیم رسید. و اگر $a_5 = 0$ به Y_4 خواهیم رسید.

اگر برای $a_3 = 0$ و $a_2 \neq 0$، $a_4 \neq 0$، فرم $Y_2 + a_5\, Y_5$ با اثر $\mathrm{Ad}(\exp(\frac{1}{a_5}\, Y_3))$ برای $a_5 \neq 0$ و $a_5 = 0$ به ترتیب به فرم‌های ساده شدهٔ $Y_2 + Y_5$ و Y_2 می‌رسیم.

در شرایطی نیز که $a_2, a_3 = 0$ برای $a_4 \neq 0$ با تأثیر $\mathrm{Ad}(\exp(\frac{1}{a_5}\, Y_3))$ وقتی $a_5 \neq 0$ به $Y_4 + Y_5$ و برای $a_5 = 0$ به Y_4 می‌رسیم.

در وضعیتی نیز که $a_3 = 0$، $a_2 \neq 0$ و $a_4 = 0$ تنها حالت Y_5 حاصل می‌شود. بنابراین یک دستگاه بهینه از زیرجبرهای ۱ــبعدی از بردارهای زیر تشکیل می‌شود که در آن α، β، γ، δ، μ و λ اسکالرهای دلخواه هستند

۱)	$Y_1,$	۷)	$Y_4 + Y_5,$
۲)	$Y_2,$	۸)	$Y_1 + \alpha\, Y_3,$
۳)	$Y_3,$	۹)	$Y_1 + \beta\, Y_4,$
۴)	$Y_4,$	۱۰)	$Y_3 + \gamma\, Y_4$
۵)	$Y_5,$	۱۱)	$\delta\, Y_4 + Y_5,$
۶)	$Y_2 + Y_5,$	۱۲)	$Y_1 + \mu\, Y_3 + \lambda\, Y_4.$

$\triangle$

۵.۲ تبدیلات برخوردی

تعمیم طبیعی امتداددهی تبدیلات نقطه‌ای به حداکثر فضای ممکن (یعنی فضای جت متناظر به دستگاه مورد بحث) به تبدیلات برخوردی منجر می‌گردد. امتداد مرتبهٔ nــام $g^{(n)} : J^n \longrightarrow J^n$ از تبدیل نقطه‌ای g دارای این خاصیت است که نمودار امتداد یافتهٔ هر تابعی را به نمودار امتداد یافتهٔ تابع تبدیلی می‌نگارد.

۱.۵.۲ تعریف. دیفیومورفیسم موضعی $\Psi : J^n \longrightarrow J^n$ یک **تبدیل برخوردی** از مرتبهٔ n می‌نامند هرگاه فضای فرم‌های برخوردی را حفظ نماید به این مفهوم که اگر θ فرم برخوردی باشد آنگاه $\Psi^*\theta$ نیز فرم برخوردی باشد.

تبدیلات برخوردی دارای کاربردهای فراوانی در اُپتیک، مکانیک تحلیلی و هندسه هستند [۱۹، ۲۲، ۲۸]. بخصوص در معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبهٔ اول تبدیلات برخوردی دارای کاربردهای مهمی هستند. بر اساس یافته‌های لی، تحت اثر تبدیلات برخوردی (مرتبهٔ اول یا مماس) هر معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول به یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول منتقل می‌گردد و جواب‌های معادلات اولیه نیز به جواب‌های معادلات دوم برده می‌شوند. بعلاوه هر دو تا از چنین معادلاتی را با یک تبدیل برخوردی مناسب می‌توان به یک معادله دیگر از این معادلات تبدیل نمود. گروه تبدیلات برخوردی (مرتبهٔ اول) به صورت متعدی بر مجموعهٔ معادلات مرتبهٔ اول عمل می‌کند. ممکن است این سؤال طبیعی در ذهن پیش آید که آیا نظریهٔ مشابهی از تبدیلات را می‌توان بوجود آورد که بر معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر به طریق مشابه عمل کند؟

با کارهای اساسی صورت گرفته توسط لی، این سؤال به نظریهٔ ناورداهای تبدیلات برخوردی گسترش یافت و به صورت سؤالات زیر نمود پیدا کرد:

۱ – آیا تبدیلاتی غیر از تبدیلات برخوردی وجود دارند که خاصیت مماسی مراتب بالاتر تحت این تبدیلات ناوردا باقی بماند؟

۲ – آیا معادلات دیفرانسیل جزیی با مرتبهٔ بیشتر از یک، تبدیلاتی غیر از تبدیلات برخوردی می‌پذیرند؟

لی به سؤال دوم پاسخ داد و آن را به طور کامل حل و تبدیلات متناظر را معرفی نمود. لی حدس زد که پاسخ سؤال اول منفی است و بکلند حدس عدم وجود تبدیلات مشتقی مراتب بالاتر را ثابت نمود. در واقع او نشان داد که هر تبدیل (تک مقداری) که شرط مماس بودن برای مراتب بالاتر را حفظ نماید، تبدیلی برخوردی است. در ادامه اصل این قضیه بیان خواهد شد.

همان‌گونه که تبدیلات نقطه‌ای را به تبدیلات برخوردی می‌توان امتداد داد، تبدیلات برخوردی روی J^n را نیز برای $k > \circ$ به J^{n+k} می‌توان امتداد داد.

۲.۵.۲ گزاره. *فرض کنیم* $\Psi^{(n)} : J^n \longrightarrow J^n$ *یک تبدیل برخوردی مرتبهٔ* n*–ام باشد. امتداد مرتبهٔ* $(n+k)$*–ام* $\Psi^{(n+k)} : J^{n+k} \longrightarrow J^{n+k}$*، تبدیل برخوردی منحصربفردی بر* J^{n+k} *است که در شرط* $\pi_n^{n+k} \circ \Psi^{(n+k)} = \Psi^{(n)} \circ \pi_n^{n+k}$ *صادق است. در اینجا* $\pi_n^{n+k} : J^{n+k} \longrightarrow J^n$ *نگاشت تصویر است.*

اثبات: برای دیدن اثبات به [۳۸] رجوع کنید. □

اگر بخواهیم مولدهای بینهایت کوچک را این بار برای تبدیلات برخوردی بیان کنیم، باز هم از محک تقارن استفاده می‌کنیم. در واقع چون منیفلد اصلی مورد بحث برای یک دستگاه مرتبهٔ n،

$$\Delta_\nu = \circ, \quad \nu = 1, \cdots m$$

از معادلات دیفرانسیل، فضای جت J^n است، یک مولد برخوردی بینهایت کوچک دارای فرم کلی زیر است

$$w = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{\#J=j=\circ}^{n} \varphi_J^\alpha(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha},$$

وقتی که ضرایب ξ^i و φ_J^α کاملاً دلخواه هستند و $J=(j_1,\cdots,j_k)$ یک اندیس چندگانه با طول $\#J=k$ است.

برای محاسبهٔ تقارن برخوردی، نیازی به امتداددهی نیست و در محک یافتن تقارن مستقیماً w را بر دستگاه اثر می‌دهیم. در واقع w یک تقارن دستگاه مذکور است وقتی و فقط وقتی که

$$w[\Delta_\nu]=0,\quad \nu=1,\cdots,m,\qquad \Delta_\nu=0 \quad \text{وقتی که}$$

یافتن ضرایب با همان روش ذکر شده در بخش قبل میسر است و متغیر آزادی نسبت به این ضرایب وجود ندارد.

تعریف تبدیل برخوردی نوید بخش توسیع جالب توجهی از انواع تبدیلات تقارنی است و از آن برای مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل می‌توان استفاده نمود، ولی آن طرف تبدیلات نقطه‌ای مواردی از تبدیلات برخوردی وجود دارند که این گونه ساخته می‌شوند. این نتیجهٔ مهم به بکلند موسوم است:

۳.۵.۲ قضیه. *اگر تعداد متغیرهای وابسته بیشتر از یکی باشد: $q>1$، آنگاه هر تبدیل برخوردی امتدادی از یک تبدیل نقطه‌ای است. اگر $q=1$ در این صورت تبدیلات برخوردی مرتبهٔ اول وجود دارند که از تبدیلات نقطه‌ای حاصل نمی‌شوند، اما هر تبدیل برخوردی مرتبهٔ nامتداد یک تبدیل برخوردی مرتبهٔ اول است.*

اثبات: اثبات این قضیه به تفصیل در مراجع [۱۹، ۳۹] آورده شده است. □

به عنوان نمونه مثال زیر را که برگرفته از مرجع [۳٦] است (و در پیوست آورده شده است)، درنظر می‌گیریم:

۴.۵.۲ مثال. معادله دیفرانسیل عادی زیر را درنظر می‌گیریم که با تغییر پارامتر از معادلهٔ مد گردابی حاصل شده است و کاربرد زیادی در فیزیک سیالات دارد

$$\mathbf{n}\cdot\left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}-\mathbf{k}\right)=0,$$

که در آن توابع $\mathbf{k}$ و $\mathbf{n}\neq 0$ به فاز موج t بستگی دارند و مقادیرشان را از $\mathbb{R}^3$ اختیار می‌کنند. بنابر آنچه که در مورد تبدیلات برخوردی گفتیم، چون فضای مورد بحث فضای جت $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^6)$ است، می‌توانیم فرم کلی یک تبدیل برخوردی را به صورت زیر فرض کنیم

$$\bar{t}=\phi(t,k_i,n_j,q_r,p_s),\qquad \bar{k}_l=\chi_l(t,k_i,n_j,q_r,p_s),\qquad \bar{n}_m=\psi_m(t,k_i,n_j,q_r,p_s),$$
$$\bar{q}_n=\eta_n(t,k_i,n_j,q_r,p_s),\qquad \bar{p}_u=\zeta_u(t,k_i,n_j,q_r,p_s),$$

وقتی که $1\leq i,j,l,m,n,u\leq 6$ و $\phi,\chi_l,\psi_m,\eta_n,\zeta_u$ توابع هموار دلخواهی هستند. یک مولد بینهایت کوچک از تقارن‌های برخوردی دارای شکل کلی زیر است

$$v=T\,\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\Big[K_i\,\frac{\partial}{\partial k_i}+N_i\,\frac{\partial}{\partial n_i}+Q_i\,\frac{\partial}{\partial q_i}+P_i\,\frac{\partial}{\partial p_i}\Big],$$

وقتی که توابع $T, K_i, N_i, M_i, Q_i, P_i$ هموار و دلخواه هستند. همان گونه که قبلاً شرح داده شد، نیازی به امتداددهی نیست. با اثر دادن v بر معادله، در می‌یابیم که

$$\sum_i \left[n_i\left(Q_i - K_i\right) + N_i\left(q_i - k_i\right)\right] = 0.$$

چون $\mathbf{n} \neq 0$ می‌توانیم فرض کنیم که $n_1 \neq 0$ و از معادلهٔ آخر بدست آوریم

$$K_1 = Q_1 + \frac{1}{n_1}\Big[\sum_{i=2,3} n_i\left(Q_i - K_i\right) + \sum_j N_j\left(q_j - k_j\right)\Big].$$

بنابراین مولدهای بینهایت کوچک برخوردی برای این معادله عبارتند از (هر بار یکی از توابع را غیر صفر و مابقی را صفر فرض می‌کنیم)

$$\begin{array}{ll}
v_1 = T\,\dfrac{\partial}{\partial t}, & v_2 = K_2\left(\dfrac{\partial}{\partial k_2} - \dfrac{n_2}{n_1}\,\dfrac{\partial}{\partial k_1}\right),\\
v_3 = K_3\left(\dfrac{\partial}{\partial k_3} - \dfrac{n_3}{n_1}\,\dfrac{\partial}{\partial k_1}\right), & v_4 = Q_1\left(\dfrac{\partial}{\partial q_1} + \dfrac{\partial}{\partial k_1}\right),\\
v_5 = Q_2\left(\dfrac{\partial}{\partial q_2} + \dfrac{n_2}{n_1}\,\dfrac{\partial}{\partial k_1}\right), & v_6 = Q_3\left(\dfrac{\partial}{\partial q_3} + \dfrac{n_3}{n_1}\,\dfrac{\partial}{\partial k_1}\right),\\
v_7 = N_1\left(\dfrac{\partial}{\partial n_1} + \dfrac{1}{n_1}\left(q_1 - k_1\right)\dfrac{\partial}{\partial k_1}\right), & v_8 = N_2\left(\dfrac{\partial}{\partial n_2} + \dfrac{1}{n_1}\left(q_2 - k_2\right)\dfrac{\partial}{\partial k_1}\right),\\
v_9 = N_3\left(\dfrac{\partial}{\partial n_3} + \dfrac{1}{n_1}\left(q_3 - k_3\right)\dfrac{\partial}{\partial k_1}\right), & v_{10} = P_1\,\dfrac{\partial}{\partial p_1},\\
v_{11} = P_2\,\dfrac{\partial}{\partial p_2}, & v_{12} = P_3\,\dfrac{\partial}{\partial p_3}.
\end{array}$$

کروشهٔ لی هر دو تا از v_i ها بر حسب ترکیب خطی این میدان‌های برداری قابل بیان است و $\mathfrak{g} = \langle v_i : i = 1, \cdots, 12\rangle$ جبر لی عملگرهای بینهایت کوچک از گروه لی تقارن‌های معادلهٔ مورد نظر است . لیست کامل همهٔ جابجاگرها در جدول زیر خلاصه شده است.

جدول ۴. کروشه لی مولدهای بینهایت کوچک برخوردی $\mathfrak{g}$

$[\,,\,]$	v_i	v_j
v_i	0	$v_i + v_j$
v_j	$-v_i - v_j$	0

در این جدول وقتی که حاصل کروشه دارای عبارتی به فرم میدان‌های برداری بالا است، در آن از همان فرم کلی میدان‌های برداری فوق استفاده شده است. $\triangle$

حالت کلی‌تر از تبدیلات برخوردی، **تبدیلات لی** هستند. این نوع از تبدیلات دیفیومورفیسم‌هایی هستند که بر برش‌های فضای جت مرتبهٔ k–ام تعریف می‌شوند. فرض کنیم S برشی از کلاف $\pi : E \longrightarrow M$ و $j_kS : M \longrightarrow J^k\pi$ برشی از $J^k = J^k\pi$ باشد. L_S^k را گراف برش j_kS درنظر می‌گیریم. اگر $\theta_k \in J^k$، گراف‌های L_S^k که از θ_k می‌گذرند را

درنظر می‌گیریم. زیر فضایی از $T_{\theta_k}J^k$ را که توسط همهٔ زیرفضاهای $T_{\theta_k}L_S^k$ از این گراف‌ها حاصل می‌شود، با $\mathfrak{C}_{\theta_k}$ نشان می‌دهند و **توزیع کارتان** می‌نامند. $\mathfrak{C}_{\theta_k}$ توسط میدان‌های برداری زیر تولید می‌شوند

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + u^i_j \frac{\partial}{\partial u^i} + \cdots + u^i_{j_1\cdots j_{k-1}j}\frac{\partial}{\partial u^i_{j_1\cdots j_{k-1}}} \quad (j = 1, \cdots, m), \qquad Y = \frac{\partial}{\partial u^i_{j_1\cdots j_k}}.$$

تبدیلات لی توزیع کارتان را حفظ می‌کنند [۴۷]. عملگر بینهایت کوچک از تبدیلات لی یا لی—بکلند [۱۷] به فرم زیر است

$$\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \eta^i_j \frac{\partial}{\partial u^i_j} + \cdots + \eta^i_{j_1\cdots j_k}\frac{\partial}{\partial u^i_{j_1\cdots j_k}} + \cdots,$$

که ضرایب ξ^j, η^i توابع هموار دلخواه از متغیرهای مستقل و وابسته‌اند و $\eta^i_j, \cdots, \eta^i_{j_1\cdots j_k}, \cdots$ توابع هموار دلخواه در کلاف‌های جت $J^k\pi$ ها هستند. قضیهٔ کلی زیر را برای تبدیلات لی داریم:

۵.۵.۲ قضیه. *اگر بعد منیفلد اصلی برابر $m = 1$ باشد، هر تبدیل لی امتداد یک تبدیل برخوردی است. اگر $m > 1$ آنگاه هر تبدیل لی امتداد یک تبدیل نقطه‌ای است.*

اثبات. برای اثبات این قضیه مرجع [۴۷] را مشاهده کنید. □

حالت خاصی از تبدیلات برخوردی، تبدیلات برخوردی مرتبهٔ اول است که درآن فرم عمومی مولد بینهایت کوچک بر حسب متغیرهای فضای جت مرتبهٔ اول بیان می‌گردد

$$v = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \varphi^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \chi^\alpha_i(x,u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha_i},$$

که u^α_i ها مشتق u^α نسبت به x_i است. این نوع از تقارن‌ها نقش مهمی در قضیه خطی‌سازی بلومن—کومئی و نیز انتگرال‌پذیری معادلات با مشتقات جزیی هذلولوی بازی می‌کند (برای مثال فصل ششم [۳۹] را ببینید).

۶.۲ تبدیلات هم‌ارز

در این بخش به یکی از تبدیلات مهم اشاره می‌کنیم که از دستاوردهای جدید نظریهٔ تقارن است و توسط اوزیانیکف در مرجع [۴۲] برای معادلات دیفرانسیل جزیی معرفی شده است. دستاورد او بر اساس مفهوم گروه هم‌ارز پایه‌گذاری شده است که گروهی از تبدیلات لی است که بر فضای گسترش‌یافته از متغیرهای مستقل، توابع، مشتق‌های آنها و دستگاه اصلی مورد بحث تعریف می‌گردد. برای محاسبهٔ این گروه از الگوریتم لی استفاده می‌کنیم. دستگاه معادلات زیر را درنظر می‌گیریم

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}, f(z)) = 0, \qquad \nu = 1, \cdots, m, \qquad (6.2)$$

که در آن $x=(x^1,\cdots,x^n)$ و $u=u^{(0)}=(u^1,\cdots,u^n)$ نشان دهندهٔ متغیرهای به ترتیب مستقل و وابسته هستند و $u^{(n)}$ نمایشگر مشتق‌های توابع وابسته نسبت به متغیرهای مستقل حداکثر تا مرتبهٔ n است. بعلاوه $f(z)=(f^1(z),\cdots,f^n(z))$ توابعی نامعین از $z=(z^1,\cdots,z^s)$ مجموعهٔ مشخصی از متغیرهای $x,u,u^{(1)},\cdots,u^{(n)}$ است. توابع $f^i(z)$ را **عناصر دلخواه** می‌نامند.

۱.۶.۲ تعریف. منظور از **تبدیل هم‌ارز** برای معادلات (۶.۲) تغییر متغیری ناتباهیده (معکوس‌پذیر) به فرم $\bar{x}=\bar{x}(x,u),\ \bar{u}=\bar{u}(x,u)$ است که دستگاه (۶.۲) را به دستگاهی یکسان با آن تبدیل نماید:

$$\Delta_\nu(\bar{x},\bar{u}^{(n)},\bar{f}(\bar{z}))=0,\qquad \nu=1,\cdots,m,$$

که در آن ممکن است توابع $\bar{f}$ از $\bar{z}=(\bar{z}^1,\cdots,\bar{z}^s)$ متفاوت از توابع f از $z=(z^1,\cdots,z^s)$ باشند.

مجموعهٔ همهٔ تبدیلات هم‌ارز یک گروه تشکیل می‌دهند. گروه پیوسته از تبدیلات هم‌ارز یا **مولدهای هم‌ارز** به صورت زیر معرفی می‌شوند

$$Y=\xi^i(x,u)\,\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha(x,u)\,\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\cdots+\mu^k(x,u^{(n)},f)\,\frac{\partial}{\partial f^k}. \tag{۷.۲}$$

جملات نقطه‌چین در این عبارت نشانگر آن است که اگر z شامل برخی از مشتق‌های $u^{(1)},\cdots,u^{(n)}$ باشد آنگاه اثر عملگر دیفرانسیلی Y (با توجه به فرمول‌های امتدادهی) به این مشتق‌ها گسترش می‌یابد.

تصویر عملگر (۷.۲) به (x,u)–صفحه و (z,f)–صفحه را به ترتیب با X و Z نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} X&=\mathrm{pr}_{(x,u)}(Y)=\xi^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha\,\frac{\partial}{\partial u^\alpha},\\ Z&=\mathrm{pr}_{(z,f)}(Y)=\lambda^\sigma\,\frac{\partial}{\partial z^\sigma}+\mu^k\,\frac{\partial}{\partial f^k}.\end{aligned} \tag{۸.۲}$$

گاهی اوقات با محاسبهٔ گروه تقارن نقطه‌ای دستگاه معادلات (۶.۲) متوجه می‌شویم که گروه مذکور بینهایت بعدی است و این به خاطر توابع دلخواهی است که‌با استفاده از محک تقارن در ضرایب مولدهای بینهایت کوچک ظاهر می‌گردد. در این گونه موارد تنها در حالت‌های خاصی که توابع دلخواه معین گردند برخی از عناصر جبر لی تقارن نقطه‌ای مشخص می‌شوند و بسیاری از تقارن‌ها در هاله‌ای از ابهام باقی می‌مانند؛ در واقع زیرجبری متناهی بعد از جبر لی تقارنی یافت شده را بررسی می‌کنیم.

از طرف دیگر، ممکن است جبر لی تقارن نقطه‌ای شکل ساده‌ای داشته باشد و تقارن‌های کمی را نتیجه دهد. یکی از روش‌های جدیدی که برای تعیین تقارن‌های نقطه‌ای بیشتر و نیز دسته‌بندی دستگاه‌های معادلات (۶.۲) بسیار مؤثر عمل می‌کند، استفاده از تبدیلات هم‌ارز می‌باشد. برای استفاده از این روش نخست اگر شرایط خاصی برای توابع f داشته باشیم آنرا هم به دستگاه می‌افزاییم تا به دستگاه جدیدی برسیم؛ این شرایط خاص به شکل تعریف توابع f بستگی دارد، مثلاً این که نسبت به متغیری ناورداست. سپس فرم کلی (۷.۲) را در نظر گرفته و امتداد آن را (تا مرتبهٔ بخصوصی که دستگاه اصلی در آن تعریف شده است) بر دستگاه جدید اثر می‌دهیم و مشابه روش تقارن‌های نقطه‌ای یا برخوردی،

(یعنی با استفاده از الگوریتم لی) مسأله را تا یافتن همهٔ تقارن‌های هم‌ارز ادامه می‌دهیم. پس از آن از روش دسته‌بندی گروه‌های لی برای طبقه‌بندی زیرگروه‌های لی و در نتیجه دسته‌بندی معادلات دستگاه مورد نظر استفاده می‌نماییم.

در بسیاری از کاربردهای آنالیز گروه تبدیلات، بسیاری از گسترش‌های جبر لی اصلی $\mathfrak{g}$ توسط روابطی از جبر هم‌ارز $\mathfrak{g}_{\mathcal{E}}$ یافت می‌شوند. این گسترش‌ها به $\mathcal{E}$–**گسترش** جبر لی اصلی مشهورند. دسته‌بندی معادلات غیر هم‌ارز نسبت به گروه تبدیلات هم‌ارز $G_{\mathcal{E}}$ با استفاده از $\mathcal{E}$–گسترش جبر لی اصلی به **دسته‌بندی مقدماتی گروه** معروف است. اگر گروه هم‌ارز متناهی بعد باشد کار را با آن ادامه می‌دهیم. در غیر این صورت زیرجبر لی متناهی بعدی را (که تا حد امکان بزرگ باشد) از جبر لی نامتناهی بعد درنظر می‌گیریم و بر اساس آن دسته بندی مقدماتی گروه را انجام می‌دهیم. پس از دسته‌بندی مذکور تصویرهای X و Z را از عناصر دسته‌بندی تشکیل می‌دهیم. گزاره‌های زیر را از بخش هفتم [۱۸] درنظر می‌گیریم:

۲.۶.۲ گزاره. *فرض کنیم $\mathfrak{g}_m = \langle Y_i : i = 1,\cdots,m \rangle$ یک جبرلی m–بعدی باشد. اگر A^i برای $i = 1,\cdots,s,\ 0 < s \leq m,\ s \in \mathbb{N}$ دستگاه بهینه‌ای از زیرجبرهای لی ۱–بعدی از $\mathfrak{g}_m$ باشد و Z^i برای $i = 1,\cdots,t,\ 0 < t \leq s,\ t \in \mathbb{N}$ تصویر A^i باشد یعنی $Z^i = \mathrm{pr}(A^i)$، در این صورت اگر معادلات $f = f(z)$ نسبت به دستگاه بهینهٔ Z^i ناوردا باشد، آنگاه معادلات*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}, f(z)) = 0, \qquad \nu = 1,\cdots,m,$$

دارای گروه تقارنی X^i یعنی تصویر A^i بر (x,u) خواهند بود.

۳.۶.۲ گزاره. *فرض کنیم دستگاه معادلات*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}, f(z)) = 0, \qquad \nu = 1,\cdots,m,$$

و

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}, \bar{f}(z)) = 0, \qquad \nu = 1,\cdots,m,$$

بر اساس اطلاعات گزاره قبل و نسبت به دستگاه‌های بهینهٔ به ترتیب Z^i و $\bar{Z}^i$ تعریف شده باشند. اگر زیرجبرهای لی تولید شده توسط Z^i و $\bar{Z}^i$ نسبت به $\mathfrak{g}_m$ یکسان باشند، آنگاه دو دستگاه فوق نسبت به گروه تبدیلات هم‌ارز G_m معادلند.

با استفاده از این دو گزاره، همهٔ معادلات غیر هم‌ارز دستگاه (۶.۲) را برای دستگاه بهینه Z^i می‌توان یافت که جبر لی تقارنی آن عبارت است از $\mathcal{E}$–گسترش $\mathfrak{g}_{\mathcal{E}}$ از جبر لی اصلی $\mathfrak{g}$. با در نظر گرفتن جبر لی تقارن‌های نقطه‌ای $\mathfrak{g}_n$ و افزودن یک عملگر $X^{(n+1)}$ به مولدهای آن که با تصویر یکی از Z^i ها به (x,u)–صفحه بدست می‌آید تقارن‌های بیشتری از دستگاه (۶.۲) بدست می‌آید که به فرم توابع f و طبقه‌بندی بر اساس این توابع منجر می‌گردد.

۴.۶.۲ مثال. با مطالعهٔ معادلهٔ غیر خطی فین

$$u_t = [E(u)u_x]_x + h(x)u$$

عملگر بینهایت کوچک آن به فرم زیر است

$$Y = \xi^{1}(t,x)\,\frac{\partial}{\partial t} + \xi^{2}(t,x)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u,E,h)\,\frac{\partial}{\partial u} + \varphi(t,x,u,E,h)\,\frac{\partial}{\partial E} + \chi(t,x,u,E,h)\,\frac{\partial}{\partial h}$$

در حالی که دستگاه جدید عبارت است از

$$u_t = [E(u)u_x]_x + h(x)u, \qquad E_t = E_x = 0, \qquad h_t = h_u = 0.$$

امتداد Y نیز به شکل زیر خواهد بود

$$\begin{aligned}\tilde{Y} \;&=\; Y + \eta^t\,\frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^x\,\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{tt}\,\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \eta^{tx}\,\frac{\partial}{\partial u_{tx}} + \eta^{xx}\,\frac{\partial}{\partial u_{xx}}\\ &\quad +\varphi^t\,\frac{\partial}{\partial E_t} + \varphi^x\,\frac{\partial}{\partial E_x} + \varphi^u\,\frac{\partial}{\partial E_u} + \chi^t\,\frac{\partial}{\partial h_t} + \chi^u\,\frac{\partial}{\partial h_u},\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\varphi^j &= \tilde{\mathcal{D}}_j(\varphi) - E_t\,\tilde{\mathcal{D}}_j(\xi^{1}) - E_x\,\tilde{\mathcal{D}}_j(\xi^{2}) - E_u\,\tilde{\mathcal{D}}_j(\eta),\\ \chi^k &= \tilde{\mathcal{D}}_k(\chi) - h_t\,\tilde{\mathcal{D}}_k(\xi^{1}) - h_x\,\tilde{\mathcal{D}}_k(\xi^{2}) - h_u\,\tilde{\mathcal{D}}_k(\eta),\end{aligned}$$

وقتی که $j = t,x$ و $k = t,u$ و همچنین برای $l = t,x,u$ داریم

$$\tilde{\mathcal{D}}_l = \frac{\partial}{\partial l} + E_l\,\frac{\partial}{\partial E} + h_l\,\frac{\partial}{\partial h}.$$

پس از اجرای الگوریتم لی به گروه تبدیلات هم‌ارزی نامتناهی $\mathfrak{g}$ با مولدهای زیر (همراه با تبدیلات گسسته) می‌رسیم

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = u\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_4 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + 2E\,\frac{\partial}{\partial E}, \quad Y_5 = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{h}{u}\,\frac{\partial}{\partial h}$$

که برای $F = F(E)$ دلخواه، $\mathfrak{g}$ نامتناهی بعد است و مطابق روش شرح داده شده در فوق، زیرجبرلی $\mathfrak{g}_4$ را با مولدهای زیر درنظر می‌گیریم

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = 2t\,\frac{\partial}{\partial t} + x\,\frac{\partial}{\partial x} - 2h\,\frac{\partial}{\partial h}, \quad Y_4 = e^u\,E\,\frac{\partial}{\partial E}.$$

یک دستگاه بهینه از زیرجبرهای ۱−بعدی معادله فین به صورت زیر است

$$\begin{aligned}&Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3, \quad Y_4, \quad Y_5, \quad Y_2 + Y_5, \quad Y_4 + Y_5,\\ &Y_1 + \alpha Y_3, \quad Y_1 + \beta Y_4, \quad Y_3 + \gamma Y_4, \quad \delta\,Y_4 + Y_5, \quad Y_1 + \mu Y_3 + \lambda Y_4,\end{aligned}$$

و تصاویر غیر صفر آنها نسبت به x−محور و u−محور عبارتند از

$$\begin{aligned}&Z^{1} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z^{2} = u\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad Z^{3} = x\,\frac{\partial}{\partial x} + 2E\,\frac{\partial}{\partial E},\\ &Z^{4} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{h}{u}\,\frac{\partial}{\partial h}, \quad Z^{5} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} - \frac{h}{u}\,\frac{\partial}{\partial h},\\ &Z^{6} = x\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} + 2E\,\frac{\partial}{\partial E} - \frac{h}{u}\,\frac{\partial}{\partial h}, \quad Z^{7} = \gamma\,x\,\frac{\partial}{\partial x} + u\,\frac{\partial}{\partial u} + 2\,\gamma\,E\,\frac{\partial}{\partial E},\\ &Z^{8} = \delta\,x\,\frac{\partial}{\partial x} + u\,\frac{\partial}{\partial u} + 2\,\delta\,E\,\frac{\partial}{\partial E} - \frac{h}{u}\,\frac{\partial}{\partial h}.\end{aligned}$$

با علم به این مطلب که گروه تقارن نقطه‌ای معادله فین برابر $\mathfrak{g}_1 = \langle \frac{\partial}{\partial t} \rangle$ است، با افزودن هر یک از $X^{(2)}$ ها مطابق روش گفته شده در فوق به $\mathfrak{g}_1$ و بر اساس گزاره‌های اخیر تقارن‌های هم‌ارز و نیز طبقه‌بندی‌ای از معادلهٔ فین بدست می‌آید. مثلاً برای Z^2 داریم $X^{(2)} = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha\, u\, \frac{\partial}{\partial u}$. $\triangle$

فصل ۳

دستگاه دیفرانسیل خارجی

نظریهٔ جدید دستگاه دیفرانسیلی خارجی توسط الی کارتان بیان شد، کسی که در مقالهٔ [۱۰] تحت عنوان

دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی از نظر کاربردهای هندسی

که در سال ۱۹۴۵ چاپ شده است به این مهم پرداخته است. همچنین کهلر در رساله [۲۱] به نام

سیری در نظریهٔ دستگاه‌های دیفرانسیل‌پذیر

که در سال ۱۹۳۷ منشر ساخت نقش بسزایی در پیشبرد موضوع داشته است. اخیراً نیز این موضوع با آثار برجسته‌ای دوباره احیا گردیده است. یکی از مهمترین این آثار کتاب مشترک برایانت، چرن، گاردنر، گلدشمیت و گریفیس [۷] تحت عنوان دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی است. نظریهٔ دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی دستاوردی هندسی و رها از مختصات است که برای فرمول‌بندی و حل معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود. در حقیقت نظریهٔ دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی حالت خاصی از مسألهٔ هم‌ارزی کارتان است که برای بررسی معادلات دیفرانسیل مورد استفاده قرار می‌گیرد. از منظر دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی، معادلات دیفرانسیل با ایده‌آل‌های دیفرانسیلی جبرهای خارجی متشکل از فرم‌های دیفرانسیلی روی یک منیفلد جایگزین می‌شوند و جواب‌های معادلات دیفرانسیل با منیفلدهای انتگرال این ایده‌آل‌ها در تناظرند. بنابراین دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی جهت مطالعهٔ دستگاه‌های دیفرانسیلی که در هندسه دیفرانسیل و مکانیک و بخصوص در نظریهٔ کنترل هندسی بوجود می‌آیند بسیار مناسب است. از مهم‌ترین موضوعاتی که به کمک دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی مطالعه شده است، مسائل نشاندن ایزومتریک موضعی در هندسهٔ ریمانی، تغییر شکل کلاسیک و دسته‌بندی زیرمنیفلدها، مسألهٔ هم‌ارزی $G-$ساختارها و مطالعهٔ ساختارهای زیرریمانی و ناورداهای آنهاست. این نظریه محتوای جبری غنی‌ای دارد که در حقیقت شاخه‌ای است که از جبر خارجی و نظریه نمایش در فرمول‌بندی هندسی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل به عنوان ایده‌آل‌های دیفرانسیلی بهره‌برداری می‌کند. اساس موضوع در قضیهٔ فروبنیوس و قضیهٔ کارتان—کهلر است که خود از نتایج قضیهٔ وجود و یکتایی دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و قضیه کوشی—کوالسکی است. قضیهٔ کارتان—کهلر تنها برای دستگاه‌های از کلاس C^ω و مسائلی بخصوصی در کاتگوری هموار، مانند مسألهٔ نشاندن ایزومتریک، دستگاه‌هایی از نوع هذلولوی برقرار است. جنبهٔ تحلیلی نظریه دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی برای دستگاه‌های از کلاس

C^∞ همچنان به عنوان مسائل باز باقی مانده‌اند. البته هانس لوی در مقالهٔ خود [۲۶]، نشان داده است که قضیهٔ کوشی– کوالسکی ممکن است برای سیستم هموار برقرار نباشد، در حالی که این حکم برای قضیهٔ کارتان-کهلر هنوز اثبات نگردیده است.

۱.۳ مفاهیم اولیه

۱.۱.۳ تعریف. یک **دستگاه دیفرانسیل خارجی** جفت مرتبی مانند $(M,\mathcal{I})$ است که در آن M منیفلدی هموار و $\mathcal{I}\subset\Omega^*(M)$ یک ایده‌آل مدرج از حلقهٔ $\Omega^*(M)$ از فرم‌های دیفرانسیلی روی M است که نسبت به دیفرانسیل خارجی بسته باشد، یعنی اگر $\phi\in\mathcal{I}$ آنگاه $d\phi\in\mathcal{I}$.

مهم‌ترین جذابیتی که در یک دستگاه دیفرانسیل خارجی به فرم $(M,\mathcal{I})$ وجود دارد به مسألهٔ تشریح زیرمنیفلدهای $f:N\longrightarrow M$ برمی‌گردد؛ زمانی که پول–بک تمامی عناصر $\mathcal{I}$ به N صفر باشد، به این مفهوم که برای هر $\phi\in\mathcal{I}$ داشته باشیم $f^*\phi=\circ$. این گونه زیرمنیفلدها را **منیفلدهای انتگرال** $\mathcal{I}$ می‌نامیم.

در عمل بیشتر دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی طوری ساخته می‌شوند که منیفلد انتگرال آنها جواب مسألهٔ هندسی‌ای باشد که می‌خواهیم مطالعه کنیم. روش معمول در تعیین دستگاه دیفرانسیل خارجی $(M,\mathcal{I})$ بیان مولدهای $\mathcal{I}$ است. اگر $\phi_1,\cdots,\phi_s\in\mathcal{I}$، منظور از **ایده‌آل جبری** مجموعه‌ای متشکل از عناصر به فرم زیر است

$$\phi=\alpha^1\wedge\phi_1+\cdots+\alpha^s\wedge\phi_s$$

که با $\langle\phi_1,\cdots,\phi_s\rangle_{\mathrm{alg}}$ نشان داده می‌شود. **ایده‌آل دیفرانسیلی** نیز به شکل زیر تعریف می‌گردد

$$\langle\phi_1,\cdots,\phi_s\rangle=\{\alpha^1\wedge\phi_1+\cdots+\alpha^s\wedge\phi_s+\beta^1\wedge d\phi_1+\cdots+\beta^s\wedge d\phi_s\}.$$

p امین بخش مدرج $\mathcal{I}$، یعنی $\mathcal{I}\cap\Omega^p(M)$ با $\mathcal{I}^p$ نشان داده می‌شود. برای هر $x\in M$ مقدار $\phi\in\Omega^p(M)$ در x را با ϕ_x نشان می‌دهیم که عضوی از $\Omega^p_x(M)=\Lambda^p(T^*_xM)$ است. نمادهای $\mathcal{I}_x$ و $\mathcal{I}^p_x$ برای مفاهیم متناظر استفاده می‌شوند.

۲.۱.۳ مثال. دستگاه زیر از معادلات دیفرانسیل معمولی را درنظر می‌گیریم

$$\begin{cases} y'=F(x,y,z)\\ z'=G(x,y,z)\end{cases}$$

که F,G توابعی هموار بر دامنهٔ $M\subset\mathbb{R}^3$ هستند. این دستگاه را می‌توانیم به فرم دستگاه دیفرانسیل خارجی $(M,\mathcal{I})$ بیان کنیم که

$$\mathcal{I}=\langle dy-F(x,y,z)\,dx\ ,\ dz-G(x,y,z)\,dx\rangle.$$

به وضوح منیفلدهای انتگرال ۱–بعدی $\mathcal{I}$ در واقع خم‌های انتگرال میدان برداری زیر هستند

$$X=\frac{\partial}{\partial x}+F(x,y,z)\,\frac{\partial}{\partial y}+G(x,y,z)\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

△

۳.۱.۳ مثال. با درنظر گرفتن دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی که F و G زیر برای توابع هموازی بر دامنهٔ $M \subset \mathbb{R}^3$ هستند

$$\begin{cases} z_x = F(x,y,z) \\ z_y = G(x,y,z) \end{cases}$$

می‌توانیم آن را با دستگاه دیفرانسیل خارجی $(M,\mathcal{I})$ زیر مدل نماییم

$$\mathcal{I} = \langle dz - F(x,y,z)\,dx - G(x,y,z)\,dy\rangle.$$

بر هر منیفلد انتگرال ۲−بعدی $N \subset M$ از $\mathcal{I}$، دیفرانسیل‌های dx و dy باید مستقل خطی باشند (زیرا در غیر این صورت دستگاه فوق از تنها یک معادله تشکیل خواهد شد). بنابراین N می‌تواند به صورت موضعی به عنوان نمودار $(x, y, u(x,y))$ نمایش داده شود. پول−بک $dz - F(x,y,z)\,dx - G(x,y,z)\,dy$ به چنین نموداری نیز صفر است اگر و تنها اگر تابع u در معادلات زیر صادق باشد

$$u_x(x,y) = F(x,y,u(x,y)), \qquad u_y(x,y) = G(x,y,u(x,y)), \qquad \forall\,(x,y).$$

در ضمن رویهٔ N منیفلد انتگرالی از $\mathcal{I}$ است اگر و تنها اگر میدان‌های برداری زیر در هر نقطه از N به آن مماس باشند

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + F(x,y,z)\,\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y} + G(x,y,z)\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

و بنابراین N اجتماعی از خم‌های انتگرال X و خم‌های انتگرال Y است. △

۴.۱.۳ مثال **(رویه‌های وینگارتن خطی).** فرض کنیم $M = \mathbb{R}^3 \times S^2$ و $\mathbf{x} : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ و $\mathbf{u} : M \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ تصویر به عامل‌های M باشند. گروه G از ایزومتری‌های فضای اقلیدسی ۳−بعدی به طور طبیعی بر M عمل می‌کند؛ به این صورت که به شکل انتقال‌هایی که تنها بر عامل اول اثر می‌کنند و دوران‌هایی که به صورت قطری بر هر دو عامل اثر می‌کنند.

۱−فرمی G−ناوردای $\theta = \mathbf{u}\cdot d\mathbf{x}$ را درنظر می‌گیریم. اگر $\iota : N \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ رویه‌ای جهت‌دار باشد، در این صورت ترفیع $f : N \longrightarrow M$ با ضابطهٔ $f(p) = (\iota(p), \nu(p))$ وقتی که $\nu(p) \in S^2$ نرمال واحد جهت‌دار در نقطهٔ p نسبت به ایمرشن ι است، منیفلد انتگرالی از θ می‌باشد. برعکس هر منیفلد انتگرال ۲−بعدی $f : N \longrightarrow M$ از θ که تصویر $\mathbf{x}\circ f : N \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک ایمرشن باشد، ترفیعی از رویهٔ جهت‌دار کانونی $\iota : N \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ است. △

۲.۳ قضایای فروبنیوس، فاف و یورگن

همیشه ارائهٔ فرمول‌بندی جدید یک دستگاه از معادلات با مشتقات جزیی به عنوان یک دستگاه دیفرانسیل خارجی لزوماً مفید نیست. زمانی این عمل مفید خواهد بود که تکنیکی برای مطالعهٔ منفلدهای انتگرال آن دستگاه دیفرانسیل خارجی

در دسترس باشد و این که بتواند مسیری را در مجموعهٔ منیفلدهای انتگرال باز کند و به راحتی از دستگاه معدلات جزیی اصلی قابل استفاده نباشد. برخی از تکنیک‌های اصلی (از این نوع) را در ادامه بررسی می‌کنیم. نخستین تکنیک وقتی مورد استفاده است که ایده‌آل $\mathcal{I}$ از نظر جبری در ساده‌ترین شکل ممکن باشد.

۱.۲.۳ قضیهٔ (فروبنیوس). *فرض کنیم که $(M,\mathcal{I})$ یک دستگاه دیفرانسیل خارجی باشد که $\mathcal{I}=\langle\mathcal{I}^1\rangle_{\rm alg}$ و برای آن $\dim\mathcal{I}^1_p$ برابر عدد ثابت r مستقل از نقطهٔ $p\in M$ است. آنگاه برای هر $p\in M$ دستگاه مختصات $\mathbf{x}=(x^1,\cdots,x^{n+r})$ بر یک p–همسایگی $U\subset M$ وجود دارد که داشته باشیم*

$$\mathcal{I}_U=\langle dx^{n+1},\cdots,dx^{n+r}\rangle.$$

به دیگر سخن، اگر $\mathcal{I}$ به صورت جبری توسط ۱–فرمی‌ها تولید شده باشد و رتبهٔ آن ثابت باشد، آنگاه $\mathcal{I}$ موضعاً با **ساختار تخت** هم‌ارز است. در چنین حالتی منیفلدهای انتگرال n–بعدی $\mathcal{I}$ به صورت موضعی در دستگاه مختصات $\mathbf{x}$ به عنوان برش‌های به فرم زیر قابل نمایش‌اند

$$x^{n+1}=c^1,\quad x^{n+2}=c^2,\quad\cdots,\quad x^{n+r}=c^r.$$

در حالت خاص، هر منیفلد انتگرال همبند از $\mathcal{I}$ درون یک منیفلد انتگرال ماکسیمال قرار دارد که از بعد n است. بعلاوه این منیفلدهای انتگرال ماکسیمال، منیفلد فراگیر M را برگ‌بندی می‌کنند. توجه داریم که ممکن است واقعاً یافتن مختصات تخت $\mathbf{x}$ برای $\mathcal{I}$ داده شده که در شرط قضیهٔ فروبنیوس صادق باشد، آسان نباشد.

تکنیک دیگر به حالتی مربوط می‌شود که فرم نرمال موضعی ساده موجود باشد [۶].

۲.۲.۳ قضیهٔ (فاف). *فرض کنیم که $(M,\mathcal{I})$ یک دستگاه دیفرانسیل خارجی باشد که $\mathcal{I}=\langle\omega\rangle$ و ω ۱–فرمی هیچ کجا صفر باشد. همچنین فرض کنید $r\geq 0$ کوچک‌ترین عدد صحیحی باشد که برای آن $\omega\wedge(d\omega)^{r+1}\equiv 0$. در این صورت برای هر $p\in M$ که در آن $\omega\wedge(d\omega)^r$ غیر صفر باشد، مختصات $\mathbf{x}=(x^1,\cdots,x^{n+2r+1})$ بر یک p–همسایگی $U\subset M$ وجود دارد که اگر $r=0$ داشته باشیم $\mathcal{I}_U=\langle dx^{n+1}\rangle$ و اگر $r>0$ آنگاه*

$$\mathcal{I}_U=\langle dx^{n+1}-x^{n+2}\,dx^{n+3}-x^{n+4}\,dx^{n+5}-\cdots x^{n+2r}\,dx^{n+2r+1}\rangle.$$

توجه داریم که در حالتی که $r=0$ حالت خاصی از قضیهٔ فروبنیوس را خواهیم داشت. نقاط $p\in M$ که در آنها $\omega\wedge(d\omega)^r$ غیر صفر است را نقاط **منظم** ایده‌آل $\mathcal{I}$ نام می‌نهیم. مجموعهٔ نقاط منظم مجموعه‌ای باز در M تشکیل می‌دهد [۶].

در حقیقت قضیهٔ فاف اندکی قوی‌تر است. این بدان خاطر است که بعد ماکزیمم منیفلد انتگرالی از $\mathcal{I}$ که در مجموعهٔ منظم قرار بگیرد $n+r$ است. علاوه بر این اگر $N^{n+r}\subset M$ یک چنین منیفلد انتگرال با بعد ماکسیمال باشد و N در M نشانده شده باشد، آنگاه برای هر $p\in N$، مختصات $\mathbf{x}$ وجود دارد که $N\cap U$ توسط معادلات زیر تشریح شود

$$x^{n+1}=x^{n+2}=x^{n+4}=\cdots=x^{n+2r}=0.$$

در واقع هر منیفلد انتگرال در U و در نزدیکی آن نقطه که $n+r$ تابع $x^{1},\cdots,x^{n},x^{n+3},x^{n+5},\cdots,x^{n+2r+1}$ دستگاه مختصاتی را پارامتره می‌کنند، توسط روابط زیر

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= f(x^{n+3},,x^{n+5},\cdots,x^{n+2r+1}),\\ x^{n+2k} &= \frac{\partial f}{\partial y^{k}}\,(x^{n+3},,x^{n+5},\cdots,x^{n+2r+1}), \qquad 1\le k\le r \end{aligned}$$

برای برخی تابع مناسب $f(y^{1},\cdots,y^{r})$ حاصل می‌شود. بنابراین منیفلدهای انتگرال با بعد ماکسیمال به یک تابع دلخواه از r متغیر وابسته است.

در ادامه به کمک یک مثال و از منظر دستگاه دیفرانسیل خارجی به مسأله‌ای کلاسیک می‌پردازیم که حاوی تکنیکی مفید است. معادلهٔ مونژ–آمپر را درنظر می‌گیریم:

$$z_{xx}\,z_{yy}-z_{xy}^{2}=1.$$

می‌توان به آسانی بررسی کرد که دارای جواب‌هایی به فرم زیر است

$$z=u(x,y)=a\,x^{2}+2b\,xy+c\,y^{2}+d\,x+e\,y+f$$

که در آن $a,\cdots,f$ ثابت‌هایی هستند که در شرط $4(ac-b^{2})=1$ صادقند. بر اساس قضیه‌ای از **یورگن** اینها تنها جواب‌های با دامنهٔ صفحهٔ xy هستند. حال اثباتی را از آن ارائه می‌کنیم.

هر جواب (موضعی) $z=u(x,y)$ از این معادله را می‌توان به یک منیفلد انتگرال از ایده‌آلی چون $\mathcal{I}$ بر صفحهٔ $xyupq$ گسترش داد که در آن

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \langle du-p\,dx-q\,dy, dp\wedge dq-dx\wedge dy\rangle\\ &= \langle du-p\,dx-q\,dy, dp\wedge dq-dx\wedge dy, dp\wedge dx+dq\wedge dy\rangle_{\mathrm{alg}}. \end{aligned}$$

حال نگاشت $\Phi:\mathbb{R}^{5}\longrightarrow\mathbb{R}^{5}$ را با ضابطهٔ $\Phi(x,y,u,p,q)=(x,q,u-q\,y,p,-y)$ درنظر می‌گیریم. پس Φ دیفیومورفیسمی هموار بر $\mathbb{R}^{5}$ است و داریم

$$\Phi^{*}(\mathcal{I})=\langle du-p\,dx-q\,dy, dp\wedge dy+dx\wedge dq\rangle.$$

در عین حال ایده‌آل اخیر مرتبط با معادلهٔ $u_{xx}+u_{yy}=0$ است. به عبارت دیگر جواب‌های معادلهٔ مونژ–آمپر توسط این نگاشت به جواب‌های معادلهٔ لاپلاس تبدیل می‌شود. در ایجا منظور از جواب، رویه‌های انتگرال متناظر تحت Φ ای هستند که در آنها dx و dy مستقل خطی هستند. این اتفاق لزوماً برای هر رویه‌ای نمی‌افتد.

رویهٔ انتگرال $N\subset\mathbb{R}^{5}$ متناظر به جوابی از معادلهٔ مونژ–آمپر در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$0=dp\wedge dx+dq\wedge dy+i(dp\wedge dq-dx\wedge dy)=(dp+i\,dy)\wedge(dx+i\,dq).$$

بنابراین با فرض این که $p+i\,y$ و $x+i\,q$ مختصات مختلط روی $\mathbb{R}^{4}$ باشند، تصویر N بتوی $xypq$–فضا خمی مختلط است. در حالت خاص N را به عنوان خم مختلطی می‌توان درنظر گرفت که $p+i\,y$ و $x+i\,q$ توابعی هولومورفند.

چون dx و dy بر N مستقل خطی هستند پس هیچ یک از فرم‌های $dp+i\,dy$ و $dq-i\,dx$ بر N صفر نیستند و در نتیجه تابع هولومورف λ بر N وجود دارد که $dp+i\,dy=\lambda\,(dq-i\,dx)$. از آنجا که $dx\wedge dy$ بر N غیر صفر است، بخش حقیقی λ نمی‌تواند صفر باشد. فرض کنیم بخش حقیقی λ مثبت باشد (روش مشابهی برای حالت منفی قابل تکرار است)، پس $|\lambda-۱|^۲>|\lambda+۱|^۲$ و داریم

$$|\lambda+۱|^۲(dx^۲+dq^۲)>|\lambda-۱|^۲(dx^۲+dq^۲)>۰$$

یا

$$|(dp+i\,dy)+(dx+i\,dq)|^۲>|(dp+i\,dy)-(dx+i\,dq)|^۲$$

و در نتیجه

$$d(p+x)^۲+d(q+y)^۲>d(p-x)^۲+d(q-y)^۲.$$

در حالت خاص فرم مربعی طرف چپ بزرگ‌تر از میانگین فرم‌های مربعی دو طرف است، یعنی

$$d(p+x)^۲+d(q+y)^۲>dp^۲+dx^۲+dq^۲+dy^۲>dx^۲+dy^۲.$$

اگر جواب بر تمامی صفحه تعریف شده باشد، آنگاه فرم مربعی طرف راست روی N کامل است و بنابراین فرم مربعی طرف چپ نیز باید بر N کامل باشد. حال از این که نگاشت هولومورف $(p+x)+i\,(y+q):N\longrightarrow\mathbb{C}$ یک نگاشت پوششی است پس یک هولومورف دوسویی بوده و N با $\mathbb{C}$ به عنوان رویهٔ ریمانی هم‌ارز است. به کمک قضیهٔ لیوویل λ (با مقادیر در نیم‌صفحهٔ راست) باید ثابت باشد. در نتیجه dp و dq ترکیبات خطی با ضرایب ثابت از dx و dy هستند و بنابراین u تابعی مربعی از x و y است. □

۳.۳ روش مشخصه‌ها

معادله دیفرانسیل جزیی مرتبهٔ اول و اسکالر زیر را درنظر می‌گیریم

$$F(x^۱,\cdots,x^n,u,\frac{\partial u}{\partial x^۱},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x^n})=۰. \qquad (۱.۳)$$

آن را به فرم یک دستگاه دیفرانسیل خارجی در می‌آوریم: با استفاده از پایهٔ استاندارد $\mathbf{x}=(x^۱,\cdots,x^n)$ بر $\mathbb{R}^n$ و $\mathbf{u}=(u)$ بر $\mathbb{R}$ مختصات گسترش یافتهٔ کانونی بر $J^۱(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ به صورت $(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p})$ خواهد بود که $\mathbf{p}=(p_۱,\cdots,p_n)$. در این صورت معادلهٔ

$$F(x^۱,\cdots,x^n,u,p_۱,\cdots,p_n)=۰$$

زیرمجموعهٔ $M\subset J^۱(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ را تعریف می‌نماید. فرض کنیم F هموار باشد و همهٔ مشتق‌های $\dfrac{\partial F}{\partial p_i}$ در یک نقطهٔ بخصوص با هم صفر نباشند. با استفاده از قضیهٔ تابع ضمنی M منیفلدی هموار و $۲n-$بعدی است و تصویر : $(\mathbf{x},\mathbf{u})$

$M \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ سابمرشنی هموار است. فرض کنیم $\mathcal{I}$ دستگاه دیفرانسیل خارجی روی M و تولید شده توسط ۱–فرمی برخوردی زیر باشد

$$\theta = du - p_i\, dx^i.$$

توجه داریم که بر M ۱–فرم‌های dx^i, du, dp_i مستقل خطی نیستند (تنها دو تا از آنها مستقل خطی‌اند)، اما در رابطهٔ خطی زیر صدق می‌کنند

$$\circ = dF = \frac{\partial F}{\partial x^i}\, dx^i + \frac{\partial F}{\partial u}\, du + \frac{\partial F}{\partial p_i}\, dp_i.$$

همچنین $\theta \wedge (d\theta)^n = \circ$ در حالی که $\theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ هیچگاه صفر نیست. به کمک قضیهٔ فاف هر نقطه‌ای از M همسایگی‌ای چون U در M دارد که بر آن مختصاتی مانند $(z, y^1, \cdots, y^{n-1}, v, q_1, \cdots, q_{n-1})$ موجود باشد به طوری که

$$\langle\theta\rangle = \langle dv - q_1\, dy^1 - \cdots - q_{n-1}\, dy^{n-1}\rangle,$$

یعنی تابع ناصفر μ بر U هست که $\theta = \mu(dv - q_1\, dy^1 - \cdots - q_{n-1}\, dy^{n-1})$. اگر $Z = \dfrac{\partial}{\partial z}$ آنگاه $\theta(Z) = \circ$ و در رابطهٔ ضرب درونی مقابل صدق می‌کند: $i_Z(d\theta) = \mu^{-1}\, d\mu(Z)\, \theta$. تحت ضرب یک اسکالر، Z تنها میدان برداری است که در شرایط $\theta(Z) = \circ$ و $i_Z(d\theta) = \circ, \mod \theta$ صدق می‌کند. حال میدان برداری زیر را درنظر می‌گیریم

$$Z = \frac{\partial F}{\partial p_i}\,\frac{\partial}{\partial x^i} + p_i\,\frac{\partial F}{\partial p_i}\,\frac{\partial}{\partial u} - \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} + p_i\,\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial p_i}$$

که بر $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ تعریف شده است و به مجموعه‌های تراز F (و بخصوص $(M = F^{-1}(\circ)$) مماس می‌باشد. در ضمن $\theta(Z) = \circ$ و $i_Z(d\theta) = \circ \mod \{\theta, dF\}$. در مختصات فاف بر M، Z تحت ضرب اسکالر با Z قبلی برابر است. Z اخیر را **میدان برداری مشخصهٔ کوشی** تابع F می‌نامند. یک جواب از معادلهٔ (۱.۳) با تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ قابل نمایش است به گونه‌ای که $N = j^1 f(\mathbb{R}^n)$ داخل M بیفتد. به عبارت دیگر، $j^1 f : \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ یک منیفلد انتگرال $\mathcal{I}$ باشد. حال یک منیفلد انتگرال n–بعدی از $\mathcal{I}$ موضعاً در دستگاه‌های نرمال فاف که در بالا به آنها اشاره شد به فرم زیر قابل نمایش است

$$v = g(y^1, \cdots, y^{n-1}), \qquad q_i = \frac{\partial g}{\partial y^i}\,(y^1, \cdots, y^{n-1})$$

که g تابعی مناسب تعریف شده بر دامنه‌ای از $\mathbb{R}^{n-1}$ است. در حالت خاص چنین منیفلد انتگرالی همواره به میدان برداری مشخصهٔ کوشی مماس است. حال با استفاده از شرایط آغازی معادلهٔ (۱.۳) را حل می‌کنیم. برای یافتن یک منیفلد انتگرال $(n-1)$–بعدی $P \subset M$ از $\mathcal{I}$ که نسبت به میدان برداری مشخصهٔ کوشی Z تراگذر باشد استفاده می‌کنیم. سپس منیفلد انتگرال n–بعدی از $\mathcal{I}$ را به صورت اجتماع خم‌های انتگرال Z که از P می‌گذرند، تشکیل می‌دهیم. روش حل یک معادله دیفرانسیل جزیی اسکالر از طریق معادلات دیفرانسیل معمولی (یعنی انتگرال گیری از شار میدان‌های برداری) را **روش مشخصه** می‌نامند.

۴.۳ معادلات مورر–کارتان، گاوس و کودازی

موارد بیشماری در هندسه دیفرانسیل وجود دارند که به مسألهٔ زیر تقلیل می‌یابند. نتیجهٔ اصلی که این مسأله را دربر دارد به کارتان منسوب است و از مفاهیم اساسی روش کنج متحرک است:

۱.۴.۳ قضیه (مورر–کارتان). *اگر N منیفلدی همبند و همبند ساده و γ ۱–فرم $\mathfrak{g}$–مقداری بر N باشد که در شرط $d\gamma = -\frac{1}{2}[\gamma, \gamma]$ صادق است، آنگاه نگاشت هموار $s : N \longrightarrow G$ وجود دارد که $\gamma = s^*(\eta)$ (وقتی که $\eta = dg\, g^{-1}$ صادق در شرط $d\eta = -\frac{1}{2}[\eta, \eta]$ است و $g : G \longrightarrow \mathrm{Mat(n, \mathbb{R})}$ نگاشت شمول است).*

اثباتی از این قضیه را در فصل پنجم بیان می‌کنیم.

یکی دیگر از کاربردهای مهم، قضیهٔ فروبنیوس به قضایای اساسی نظریه رویه‌ها در هندسهٔ اقلیدسی منجر می‌گردد.

فرض کنیم $x : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ایمرشنی از رویهٔ جهت‌دار Σ و $u : \Sigma \longrightarrow S^2$ نگاشت گاوس باشد. داریم $u \cdot dx = 0$. فرم‌های مربعی

$$\mathrm{I} = dx \cdot dx, \qquad \mathrm{II} = -du \cdot dx$$

به ترتیب به عنوان **اولین** و **دومین فرم‌های اساسی** از ایمرشن جهت‌دار x نامیده می‌شوند. اگر $y = A\,x + b$ که $A \in \mathrm{O(3, \mathbb{R})}$ و $b \in \mathbb{R}^3$، در این صورت y ایمرشنی با فرم‌های اساسی اول و دومِ برابر با x است زیرا نگاشت گاوس y به صورت $v = (\det A)\, Au = \pm Au$ است. یکی از نتایج اساسی در نظریهٔ رویه‌ها بیان عکس این مطلب است، یعنی این که اگر $x, y : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ اولین و دومین فرم اساسی برابر داشته باشند، آنگاه تحت یک ایزومتری فراگیر متفاوت خواهند بود (اولین و دومین فرم اساسی به تنهایی برای تعیین ایمرشن نسبت به حرکت صلب کافی نیستند). این به **قضیهٔ بونه** شهرت یافته است. بیان استاندارد قضیهٔ بونه به صورت زیر است:

فرض کنیم $\pi : F \longrightarrow \Sigma$ کلاف کنجی متعامد جهت‌دار از Σ با متریک I باشد. عناصر F از سه‌تایی‌های (p, v_1, v_2) تشکیل شده است که (v_1, v_2) پایهٔ I–متعامد و جهت‌دار از $T_p\Sigma$ است و $\pi(p, v_1, v_2) = p$. ۱–فرمی‌های منحصربفرد $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ بر F وجود دارند که

$$d\pi(w) = v_1\, \omega_1(w) + v_2\, \omega_2(w)$$

برای هر $w \in T_{(p,v_1,v_2)}F$ و نیز

$$d\omega_1 = -\omega_{12} \wedge \omega_2, \qquad d\omega_2 = \omega_{12} \wedge \omega_1.$$

در این صورت داریم

$$\pi^*\mathrm{I} = {\omega_1}^2 + {\omega_2}^2, \qquad \pi^*\mathrm{II} = h_{11}\, {\omega_1}^2 + 2h_{12}\, \omega^1 \omega^2 + h_{22}\, {\omega_2}^2,$$

برای برخی تابع h_{11}, h_{12}, h_{22}. با تعریف $\omega_{31} = h_{11}\,\omega_1 + h_{12}\omega_2$ و $\omega_{32} = h_{12}\,\omega_1 + h_{22}\omega_2$ به آسانی می‌توان دید که توابع $\mathbb{R}^3$–مقداری $x, e_1 = dx(v_1), e_2 = dx(v_2)$ و $e_3 = e_1 \times e_2$ در معادلهٔ ماتریسی زیر صادق‌اند

$$d\begin{pmatrix} ۱ & x \\ ۰ & e_۱ \\ ۰ & e_۲ \\ ۰ & e_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & \omega_۱ & \omega_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -\omega_{۱۲} & \omega_{۳۱} \\ ۰ & \omega_{۱۲} & ۰ & \omega_{۳۲} \\ ۰ & -\omega_{۳۱} & -\omega_{۳۲} & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & x \\ ۰ & e_۱ \\ ۰ & e_۲ \\ ۰ & e_۳ \end{pmatrix}.$$

حال ماتریس

$$\gamma = \begin{pmatrix} ۰ & \omega_۱ & \omega_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -\omega_{۱۲} & \omega_{۳۱} \\ ۰ & \omega_{۱۲} & ۰ & \omega_{۳۲} \\ ۰ & -\omega_{۳۱} & -\omega_{۳۲} & ۰ \end{pmatrix}.$$

مقادیرش در جبر لی گروه $G \subset \mathrm{SL}(۴,\mathbb{R})$ از ماتریس‌های به فرم $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ b & A \end{pmatrix}$ است که $b \in \mathbb{R}^۳$ و $A \in \mathrm{SO}(۳,\mathbb{R})$ و نیز نگاشت $g : F \longrightarrow G$ به صورت

$$g = \begin{pmatrix} ۱ & x \\ ۰ & e_۱ \\ ۰ & e_۲ \\ ۰ & e_۳ \end{pmatrix}$$

تعریف شده است. g به وضوح در رابطهٔ $dg\, g^{-۱} = \gamma$ صدق می‌کند. بنابراین با توجه به قضیهٔ کارتان، نگاشت g به صورت منحصربفرد تحت ضرب از راست توسط یک عضو ثابت از G مشخص می‌گردد.

شاید کاربرد بخش وجودی قضیهٔ کارتان جذاب‌تر باشد. برای یک زوج از فرم‌های مربعی (I,II) بر رویهٔ Σ و I مثبت معین داده شده، ساختار F و فرم‌های $\omega_۱,\omega_۲,\omega_{۱۲},\omega_{۳۱},\omega_{۳۲}$ و در نتیجه γ پیدا خواهند شد. با این حال لزوماً شرط $d\gamma = -\gamma\wedge\gamma$ برقرار نیست. در حقیقت، داریم

$$d\gamma + \gamma\wedge\gamma = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \omega_۱ & ۰ & \omega_{۱۲} & -\omega_{۳۱} \\ \omega_۲ & -\omega_{۱۲} & ۰ & -\omega_{۳۲} \\ ۰ & \omega_{۳۱} & \omega_{۳۲} & ۰ \end{pmatrix}.$$

به عنوان مثال برای $\Omega_{۱۲} = (K - h_{۱۱}\, h_{۲۲} + h_{۱۲}^۲)\,\omega_۱\wedge\omega_۲$ وقتی که K انحنای گاوسی حاصل از متر I است. بنابراین شرط لازم برای اینکه زوج (I,II) از یک ایمرشن حاصل شده باشد آن است که **معادلهٔ گاوس** برقرار باشد یعنی داشته باشیم

$$\det{}_{\mathrm{I}}\, \mathrm{II} = K.$$

بقیهٔ عبارت‌ها یعنی $\Omega_{۳۱} = h_۱\,\omega_۱\wedge\omega_۲$ و $\Omega_{۳۲} = h_۲\,\omega_۱\wedge\omega_۲$ به گونه‌ای هستند که ۱–فرم η بر Σ خوش تعریف باشد، به این مفهوم که $\pi^*\eta = h_۱\,\omega_۱ + h_۲\,\omega_۲$. نگاشت δ_{I} از فرم‌های مربعی به ۱–فرم‌ها با ضابطهٔ $\mathrm{I} \mapsto \eta$ یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول تعریف می‌کند. بنابراین شرط لازم دیگر برای اینکه زوج (I,II) از یک ایمرشن بوجود آمده باشد **معادلهٔ کودازی** است:

$$\delta_{\mathrm{I}}(\mathrm{II}) = ۰.$$

به کمک قضیهٔ کارتان اگر زوج $(\mathrm{I}, \mathrm{II})$ بر رویه‌ای چون Σ در معادلات گاوس و کودازی صادق باشد، آنگاه حداقل به صورت موضعی، ایمرشن $x : \Sigma \longrightarrow \mathrm{R}^3$ با اولین ودومین فرم‌های اساسی $(\mathrm{I}, \mathrm{II})$ وجود خواهد داشت.

۵.۳ المان انتگرال

فرض کنیم $(M, \mathcal{I})$ یک دستگاه دیفرانسیل خارجی باشد. یک زیر فضای n–بعدی $E \subset T_xM$ را **المان انتگرال** $\mathcal{I}$ می‌نامند اگر برای هر $v_1, \cdots, v_n \in E$ و هر $\phi \in \mathcal{I}^n$ داشته باشیم

$$\phi(v_1, \cdots, v_n) = 0.$$

مجموعهٔ همهٔ المان‌های انتگرال $\mathcal{I}$ را با $V_n(\mathcal{I}) \subset G_n(TM)$ نشان می‌دهیم که در آن $G_n(TM)$ گراسمان مرتبهٔ n ام یعنی مجموعهٔ زیر فضاهای مرتبهٔ n ام TM است. مسألهٔ بسیار جذاب در مبحث المان‌های انتگرال این است که فضاهای مماس به هر منیفلد انتگرال n–بعدی $N \subset M$، المان انتگرال هستند. هدف از این بحث پاسخ دادن به سؤال زیر است:

المان انتگرال در چه حالتی به یک منیفلد انتگرال مماس است؟ اگر این اتفاق بیفتد، چه راه‌هایی برای این منظور وجود دارد؟

البته این مطلب که هر المان انتگرالی به یک منیفلد انتگرال مماس است، همواره صحیح نیست:

۱.۵.۳ مثال. فرض کنیم $(M, \mathcal{I}) = (\mathbb{R}, \langle x\,dx \rangle)$. فضای کلی $T_0\mathbb{R}$ یک المان انتگرال ۱–بعدی از $\mathcal{I}$ است، در حالی که هیچ منیفلد انتگرال ۱–بعدی از $\mathcal{I}$ نمی‌تواند وجود داشته باشد. △

مثال زیر زیر کمی کلی‌تر از مثال بدیهی قبل است.

۲.۵.۳ مثال. ایده آل $\mathcal{I}_1 = \langle\, dx \wedge dz, dy \wedge (dz - y\,dx) \,\rangle$ در هر نقطه دقیقاً یک المان انتگرال ۲–بعدی دارد، ولی هیچ منیفلد انتگرال ۲–بعدی ندارد. △

$V_n(\mathcal{I})$ زیر مجموعهٔ بسته‌ای از $G_n(TM)$ است. برای فهمیدن علت به این نکته توجه می‌کنیم که المان‌های انتگرال $\mathcal{I}$ را به عنوان معادلات مشخصهٔ $V_n(\mathcal{I})$ در مختصات موضعی می‌توان درنظر گرفت. فرض کنید $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+s}$ یک چارت مختصات موضعی و $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) : G_n(TX, x) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+s+ns}$ توسیع کانونی آن باشد. هر $E \in G_n(TM, x)$ دارای پایهٔ خوش تعریف $(X_1(E), \cdots, X_n(E))$ است که در آن

$$X_i(E) = \frac{\partial}{\partial x^i} + p_i^\alpha(E)\,\frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

که در واقع پایهٔ E و دوگان $(dx^1, \cdots, dx^n)$ از E^* است. با استفاده از این پایه، تابع ϕ_x بر $G_n(TX, x)$ متناظر به n–فرمی ϕ را می‌توانیم به صورت زیر تعریف نماییم

$$\phi_x(E) = \phi(X_1(E), \cdots, X_n(E)).$$

اگر ϕ هموار باشد ϕ_x نیز هموار خواهد بود. در ضمن $V_n(\mathcal{I}) \cap G_n(TX, \mathrm{x})$ را می‌توان به عنوان مکان هندسی صفرهای مشترک مجموعهٔ توابع $\{\phi_x \mid \phi \in \mathcal{I}\}$ درنظر گرفت. بنابراین $V_n(\mathcal{I}) \cap G_n(TX, \mathrm{x})$ بسته است. در نتیجه $V_n\mathcal{I}$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $G_n(TX)$ خواهد بود.

۳.۵.۳ مثال. با درنظر گرفتن $V_1(\mathcal{I})$ و $V_1(\mathcal{I})$ برای $(M, \mathcal{I}) = (\mathbb{R}, \langle dx^1 \wedge dx^2, dx^3 \wedge dx^4 \rangle$، بر حسب $V_k(\mathcal{I})$ های مختلف روابطی را می‌توان بیان کرد. ساده‌ترین آنها اینکه اگر E به $V_n(\mathcal{I})$ تعلق داشته باشد، آنگاه هر زیر فضای p−بعدی از E نیز یک المان انتگرال است یعنی داریم $G_p(E) \subset V_p(\mathcal{I})$. علت این است که $\mathcal{I}$ یک ایده‌آل است. نکته در این است که اگر $E' \subset E$ یک زیرفضای p−بعدی باشد و $\phi \in \mathcal{I}^p$ وقتی که به E' پول−بک می‌شود، صفر نباشد؛ در این صورت $(n-p)$−فرمی β هست که $\beta \wedge \phi$ (که به $\mathcal{I}$ متعلق است) و وقتی به E پول−بک می‌شود، صفر نباشد. $\triangle$

از طرف دیگر، هر توسیعی از المان انتگرال لزوماً المان انتگرال نیست، زیرا با توجه به مثال قبل توپولوژی فضای المان‌های انتگرال از یک درجهٔ بخصوص ممکن است بسیار پیچیده باشد. با وجود این توسیع‌های انتگرال با بعد یک نسبتاً ساده هستند.

تا به اینجا می‌دانیم که $V_k(\mathcal{I})$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $G_n(TX)$ است و زیرمجموعه‌های بسته در نظر یک هندسه‌دان اشیائی نسبتاً نامطبوع هستند. حال می‌خواهیم ساختاری زیباتر بر $V_k(\mathcal{I})$ قرار دهیم. اگر $E \in V_k(\mathcal{I})$ یک المان انتگرال و $(e_1, \cdots, e_k)$ پایه‌ای از $E \subset T_xM$ باشد، تعریف می‌کنیم

$$H(E) = \{v \in T_xM \mid \kappa(v, e_1, \cdots, e_k) = 0, \ \ \forall \kappa \in \mathcal{I}^{k+1}\} \subseteq T_xM.$$

$H(E)$ را **فضای قطبی** E می‌نامیم در حالی که اغلب به عنوان **فضای توسیع یافتهٔ** E شناخته می‌شود زیرا $v \in T_xM$ عضو $H(E)$ است اگر و تنها اگر یا عضوی از E باشد (حالت بدیهی) یا اینکه $E^+ = E + \mathbb{R}\, v$ عضوی از $V_{k+1}(\mathcal{I})$ باشد. به دیگر سخن یک $(k+1)$−صفحهٔ E^+ شامل E، المان انتگرالی از $\mathcal{I}$ است اگر و تنها اگر عضوی از $H(E)$ باشد.

در حقیقت می‌توان گفت که $H(E)$ فضای برداری شامل E است. تابع $r : V_k(\mathcal{I}) \longrightarrow \{-1, 0, 1, 2, \cdots\}$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$r(E) = \dim H(E) - k - 1.$$

علت اینکه عدد ۱ را از آن کم می‌کنیم آن است که در این صورت $r(E)$ بعد مجموعهٔ المان‌های انتگرال $(k+1)$−بعدی از $\mathcal{I}$ که شامل E هستند، خواهد بود و $r(E) = -1$ به این معنی است که چنین توسیعی وجود ندارد. وقتی که $r(E) \geq 0$ داریم

$$\{E^+ \in V_{k+1}(\mathcal{I}) \mid E \subset E^+\} \simeq \mathbb{P}(H(E)/E) \simeq \mathbb{HP}^{r(E)}.$$

اگر $S \subset C^\infty(M)$ مجموعه‌ای از توابع هموار بر M باشد، می‌توان مجموعهٔ صفرهای مشترک S را به شکل زیر تعریف کرد:

$$Z_S = \{x \in M \mid f(x) = \circ, \quad \forall f \in S\}.$$

این مجموعه بسته است ولی به دنبال شرایطی هستیم که آنرا به یک منیفلد هموار تبدیل کنیم و این مهم توسط قضیهٔ تابع ضمنی بدست می آید. $z \in Z_S$ یک **صفر عادی** از S نامیده می‌شود اگر همسایگی باز U از z در M و نیز مجموعه‌ای از توابع $f_1, \cdots, f_c \in S$ وجود داشته باشند که

(۱) بر U، $df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_c \neq \circ$،

(۲) $Z_S \cap U = \{y \in U \mid f_1(y) = \cdots = f_c(y) = \circ\}$.

به کمک قضیهٔ تابع ضمنی، $Z_S \cap U$ یک زیرمنیفلد نشانده شده از U و نقصان بعد c است. اگر $Z_S^\circ \subset Z_S$ مجموعهٔ صفرهای عادی S باشد، Z_S و Z_S° تنها به ایده‌آل تولید شده توسط S در $C^\infty(M)$ بستگی دارند. همچنین برای هر $z \in Z_S^\circ$، عدد صحیح c (که آنرا در بالا معرفی نمودیم) خوش تعریف است به گونه‌ای که بدون ابهام می‌توان در مورد نقصان بعد Z_S° در نقطهٔ z صحبت کرد.

$E \in V_n(\mathcal{I})$ را المان انتگرال **عادی** می‌نامیم هرگاه صفر عادی مجموعهٔ $S_{\mathbf{x}} = \{\phi_{\mathbf{x}} \mid \phi \in \mathcal{I}^n\}$ در مختصات موضعی $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+s}$ باشد و $E \in G_n(TX, \mathbf{x})$. روی اشتراک $G_n(TM, \mathbf{x}) \cap G_n(TM, \mathbf{y})$ دو مجموعهٔ $S_{\mathbf{x}}$ و $S_{\mathbf{y}}$ از توابع، ایده‌آل یکسانی را تولید می‌کنند و در نتیجه نماد معرفی شده برای المان انتگرال عادی مستقل از انتخاب چارت است.

المان انتگرال عادی $E \in V_n^\circ(\mathcal{I})$ را **منظم** گوییم اگر در یک همسایگی از E در $V_n^\circ(\mathcal{I})$ تابع r موضعاً ثابت باشد. مجموعهٔ المان‌های انتگرال منظم را با $V_n^r(\mathcal{I}) \subset V_n^\circ(\mathcal{I})$ نشان می‌دهیم.

یک منیفلد انتگرال k-بعدی $N \subset M$ از $\mathcal{I}$ را **عادی** می‌نامیم هرگاه همهٔ صفحات مماس آن المان انتگرال عادی باشند. همچنین **منظم** نامیده می‌شوند هرگاه تمامی صفحات مماس آن المان انتگرال منظم باشند.

٦.۳ قضیه کارتان—کهلر

در این قسمت یکی از قضیه‌های اصلی نظریهٔ دستگاه دیفرانسیل خارجی را مطرح می‌نماییم. در اینجا صورت قضیه و لزوم وجود مفروضات آنرا عنوان می‌کنیم [٦].

۱.٦.۳ قضیه (کارتان—کهلر). *فرض کنیم $(M, \mathcal{I})$ یک دستگاه دیفرانسیل خارجی تحلیلی حقیقی باشد و داشته باشیم*

(i) $P \subset M$ *منیفلد انتگرال منظم، تحلیلی حقیقی k-بعدی و همبند از $\mathcal{I}$ با شرط $r(P) \geq \circ$ باشد،*

(ii) $R \subset M$ *زیرمنیفلد تحلیلی حقیقی با نقصان بعد $r(P)$ باشد که شامل P است و این خاصیت را داشته باشد که $T_pR \cap H(T_pP)$ در هر نقطهٔ $p \in P$ دارای بعد $k + ۱$ است،*

در این صورت منیفلد انتگرال تحلیلی حقیقی، $(k+۱)$–بعدی همبند و منحصربفرد X یافت می‌شود که $P \subset X \subset R$.

شرایط قید شده در صورت قضیه حداقل هستند و برای اثبات قضیه مورد نیازند ولی در حالت کلی ممکن است نتایج قضیه برقرار باشند در حالی که مفروضات آن صحیح نیستند.

۳.۶.۲ مثال (اهمیت منظم بودن برای وجود X). برای هر یک از ایده‌آل‌های

$$\mathcal{I}_۱ = \langle\, dx\wedge dz, dy\wedge(dz - y\,dx)\,\rangle$$

$$\mathcal{I}_۲ = \langle\, dx\wedge dz, dy\wedge dz\,\rangle$$

خط L تعریف شده با شرایط $x = z = ۰$ خم انتگرال این ایده‌آل‌ها و حاوی این خاصیت است که برای هر $p \in L$، $r(T_pL) = ۰$. با این حال $\mathcal{I}_۱$ هیچ انتگرال سطحی نیست ولی $\mathcal{I}_۲$ دارای انتگرال سطح $z = ۰$ است که شامل L است. در هر دوی این حالت‌ها L منیفلد انتگرال عادی است اما منظم نیست و بنابراین قضیهٔ کارتان–کهلر به کار نمی‌آید. $\triangle$

۳.۶.۳ مثال (اهمیت منظم بودن برای وجود X). با درنظر گرفتن $(M,\mathcal{I}) = (\mathbb{R}^۴, \langle dx^۱\wedge dx^۲, dx^۳\wedge dx^۴\rangle)$ خط L را به صورت $x^۲ = x^۳ = x^۴ = ۰$ تعریف می‌کنیم. L خم انتگرال نامنظمی از این ایده‌آل است و برای هر $p \in L$ داریم $r(T_pL) = ۱$ و فضای قطبی $H(T_pL)$ برای هر $p \in L$ توسط بردارهای زیر تولید می‌گردد

$$\frac{\partial}{\partial x^۱}, \frac{\partial}{\partial x^۳}, \frac{\partial}{\partial x^۴}.$$

حال اگر R را ۳–صفحهٔ تعریف شده توسط $x^۳ = ۰$ درنظر بگیریم، آنگاه $T_pR \cap H(T_pL)$ برای هر $p \in L$ ای از بعد ۲ است، اما هیچ رویهٔ انتگرال X صادق در $L \subset X \subset R$ وجود ندارد؛ گرچه رویهٔ انتگرالی از $\mathcal{I}$ هست که شامل L باشد. $\triangle$

۳.۶.۴ مثال (مفهوم R). منیفلد R که در قضیهٔ کارتان–کهلر ظاهر می‌شود اغلب به عنوان **منیفلد مانع** شناخته می‌شود. وقتی به آن نیاز داریم که $r(P) > ۰$ زیرا مسألهٔ توسیع دقیقاً پایین معین خواهد بود. با درنظر گرفتن $(M,\mathcal{I}) = (\mathbb{R}^۴, \langle dx^۱\wedge dx^۲ + dx^۳\wedge dx^۴\rangle)$ تمامی المان‌های انتگرال $E = V_۱(\mathcal{I}) = G_۱(T\mathbb{R}^۴)$ منظم هستند و $r(E) = ۱$. این بدان معنی است که هر المان انتگرال خانواده‌ای ۱–بعدی از توسیع‌های ممکن به یک المان انتگرال ۲–بعدی متعلق است. برای مثال فرض کنیم که خم $P \subset \mathbb{R}^۴$ با معادلات $x^۲ = x^۳ = x^۴ = ۰$ تعریف شده باشد. در این صورت $H(T_pP)$ برای $p \in P$ توسط بردارهای زیر تولید می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial x^۱}, \frac{\partial}{\partial x^۳}, \frac{\partial}{\partial x^۴}.$$

در حالت خاص، هر ابر فضای (تحلیلی حقیقی) R ارائه شده توسط رابطهٔ $x^۴ = F(x^۱, x^۲, x^۳)$ که $F(x^۱, ۰, ۰) = ۰$ در شرایط قضیه صادق است. اگر پول–بک ایده‌آل $\mathcal{I}$ به این ابرفضا را بیابیم و از مختصات $x^۱, x^۲, x^۳$ بر R استفاده

نماییم، آنگاه ایده‌آل روی R توسط ۲—فرمی زیر تولید می‌شود

$$dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge (F_1\, dx^1 + F_2\, dx^2) = (dx^1 + F_2\, dx^3) \wedge (dx^2 - F_1\, dx^3).$$

البته این ۲—فرمی بر R بسته است و رویه‌های انتگرال آن با خم‌های انتگرال میدان‌های برداری زیر جاروب می‌گردد

$$X = -F_2 \frac{\partial}{\partial x^1} + F_1 \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

بنابراین برای بدست آوردن X، اجتماع این خم‌های انتگرال را که از خم آغازی P می‌گذرند، درنظر می‌گیریم. به وضوح x^1 و x^3 مختصات مستقل در همسایگی‌ای از P در X هستند و بنابراین X را می‌توان به شکل موضعی به صورت نمودار

$$x^2 = f(x^1 x^3), \qquad x^4 = g(x^1 x^3),$$

مشخص ساخت، وقتی که توابع f, g در شرایط $f(x^1, 0) = g(x^1, 0) = 0$ صادقند. اگر این دو رابطه یک رویهٔ انتگرال را تعریف کنند آنگاه باید تابع دیگری مانند h باشد که

$$x^2 = \frac{\partial h}{\partial x^1}(x^1 x^3), \qquad x^4 = \frac{\partial h}{\partial x^3}(x^1 x^3).$$

به عبارت دیگر مختصات جزیی مرتبهٔ اول هر چنین تابعی باید در طول خط $x^3 = 0$ صفر باشد. این نشان می‌دهد که چرا نمی‌توان شرط منحصربفردی را بدون یک منیفلد مانع درنظر گرفت. $\triangle$

۵.۶.۳ مثال (اهمیت تحلیلی حقیقی بودن). فرض کنیم $(M, \mathcal{I}) = (\mathbb{R}^4, \langle dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4, dx^1 \wedge dx^4 - dx^3 \wedge dx^2 \rangle)$. ایده‌آل $\mathcal{I}$ توسط بخش‌های حقیقی و موهومی ۲—فرم مختلط زیر تولید می‌شود

$$(dx^1 - i\, dx^3) \wedge (dx^2 + i\, dx^4).$$

در نتیجه منیفلدهای انتگرال ۲—بعدی خم‌های مختلط در $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$ قرار می‌گیرند. همچنین المان‌های ۱—بعدی $E \in V_1(\mathcal{I}) = G_1(TM)$ منظم هستند و شرط $r(E) = 0$ برای آنها برقرار است، پس هر یک می‌توانند توسیع یکتایی به یک المان انتگرال ۲—بعدی داشته باشند. بنا به قضیهٔ کارتان—کهلر هر خم تحلیلی حقیقی در یک رویهٔ انتگرال تحلیلی حقیقی همبند و منحصربفرد (یک خم مختلط) از $\mathcal{I}$ قرار دارد. می‌دانیم که یک خم مختلط زمانی که به عنوان یک رویه در $\mathbb{R}^4$ درنظر گرفته شود، لزوماً تحلیلی حقیقی است. حال با فرض خم به فرم زیر

$$x^2 = f(x^1), \qquad x^3 = 0, \qquad x^4 = g(x^1),$$

که f, g هموار هستند ولی تحلیلی حقیقی نیستند، هیچ خم مختلطی وجود ندارد که این خم را دربر بگیرد، زیرا در غیر این صورت می‌توان آنرا به صورت موضعی به فرم $dx^2 + i\, dx^4 = F(x^1 - i\, x^3)$ بیان کرد که F تابعی هولومورفیک از یک متغیر است. با این حال با قرار دادن $x^3 = 0$ در معادلهٔ اخیر، خم اصلی با $dx^2 + i\, dx^4 = F(x^1)$ مشخص می‌شود که چون بخش‌های حقیقی و موهومی تابع هولومورفیک تحلیلی حقیقی هستند، بی‌معنی خواهد بود. $\triangle$

۷.۳ قضیهٔ کوشی—کوالسکی

اولین نتیجهٔ مورد نیاز برای معادلات دیفرانسیل جزیی، قضیهٔ وجود و یکتایی برای مسائل با مقدار آغازی آن هم در شرایط خاص است. البته حالت ساده‌تر آن برای معادلات دیفرانسیل معمولی کاملاً شناخته شده است:
اگر $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز و $F: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار باشد، آنگاه برای هر $(t_\circ, \mathbf{u}_\circ) \in D$ مسألهٔ با مقدار آغازی

$$u'(t) = F(t, u(t)), \qquad u(t_\circ) = u_\circ,$$

دارای جواب منحصربفرد $\mathbf{u}: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ بر همسایگی بازی مانند $t_\circ \in I \subset \mathbb{R}$ است و این جواب هموار و منحصربفرد است به این معنی که اگر $\bar{\mathbf{u}}: \bar{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ جواب دیگری بر همسایگی باز $t_\circ \in \bar{I} \subset \mathbb{R}$ باشد، آنگاه روی اشتراک $\bar{I}\cap I$ داریم $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$. البته شرط هموار بودن F شرط بزرگی است. می‌توان آنرا با شرط موضعاً لیپ‌شیتز عوض کرد ولی ایدهٔ شرط هموار بودن در این قضیه به خاطر کاربرد فراوان آن واضح است. اگر بخواهیم قضیه را برای یک معادله دیفرانسیل جزیی با مقدار آغازی تکرار کنیم به نتیجهٔ قدیمی زیر نیاز داریم [٦]:

۱.۷.۳ قضیه (کوشی—کوالسکی). *فرض کنیم که $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^{ns}$ مجموعه‌ای باز و $F: D \longrightarrow \mathbb{R}^s$ تحلیلی حقیقی باشد. همچنین فرض کنیم $U \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز و $\phi: U \longrightarrow \mathbb{R}^s$ نگاشتی تحلیلی حقیقی با این خاصیت باشد که نمودار مرتبهٔ اول*

$$\Big\{ \Big(t_\circ, \mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}), \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x})\Big) \mid \mathbf{x}\in U \Big\}$$

برای $t_\circ$ای عضو D باشد. در این صورت دامنهٔ $V \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ که $\{t_\circ\}\times U \subset V$ و نگاشت تحلیلی حقیقی $\mathbf{u}: V \longrightarrow \mathbb{R}^s$ صادق در شرایط زیر خواهند داشت

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = F(t_\circ, \mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}), \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x})), \qquad \forall\,(t,\mathbf{x})\in V$$
$$\mathbf{u}(t_\circ,\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}), \qquad \forall\,\mathbf{x}\in U.$$

بعلاوه $\mathbf{u}$ به عنوان جوابی تحلیلی حقیقی منحصربفرد است یعنی برای هر جواب دیگر $(\tilde{V}, \tilde{\mathbf{u}})$ که $\tilde{\mathbf{u}}$ تحلیلی حقیقی است، در شرط $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$ بر هر مولفه‌ای از $\tilde{V}\cap V$ که از $\{t_\circ\}\times U$ می‌گذرد صادق است.

در واقع مفهوم این قضیه این است که اگر معادلات و شرایط آغازی تحلیلی حقیقی باشند و دامنه‌های تعریفشان به گونه‌ای باشند که شرایط آغازی برقرار باشند، آنگاه می‌توان جواب $\mathbf{u}$ را توسط بسط زیر از سری‌های توانی پیدا کرد

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \phi_1(\mathbf{x})(t-t_\circ) + \frac{1}{2}\,\phi_2(\mathbf{x})(t-t_\circ)^2 + \cdots.$$

معادلهٔ مورد بررسی کمک می‌کند که بتوانیم به صورت بازگشتی نسبت به دنبالهٔ توابع تحلیلی ϕ_k آنرا حل نماییم و تنها مشکل موجود، همگرایی سری است. بدون داشتن فرض تحلیلی حقیقی، این قضیه درست نیست. در واقع ممکن است

مسأله جوابی نداشته باشد و یا دارای چندین جواب باشد. مثال‌هایی وجود دارند که حتی وقتی F هموار هم هست، شرایط آغازی هرچه که باشند، هیچ جوابی برای معادله وجود نداشته باشد (برای دیدن جزییات به [۶] رجوع کنید). در هر حالت مرسوم است که دستگاهی از معادلات دیفرانسیل جزیی را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}})$$

که آنرا دستگاهی به **فرم کوشی** می‌نامند که پایین معین است هرگاه توابع $\mathbf{v}$ در آن بدون قید باشند. در این حالت همواره می‌توانیم با تعیین توابع $\mathbf{v}$ به صوت دلخواه مسأله را به حالت معین کاهش دهیم.

از قضیهٔ اخیر برای اثبات قضیه کارتان—کهلر به عنوان ابزاری اصلی استفاده می‌شود. در مرجع [۶] این اثبات به تفصیل بیان گردیده است.

۸.۳ پرچم انتگرال و آزمون کارتان

قضیهٔ کارتان—کهلر یک شرط کافی سادهٔ برای وجود منیفلد انتگرال مماس به $E \in V_n(\mathcal{I})$ است:

۱.۸.۳ قضیه. *فرض کنیم $(M, \mathcal{I})$ یک دستگاه دیفرانسیل خارجی تحلیلی حقیقی باشد. اگر $E \in V_n(\mathcal{I})$* ***پرچمی*** *از زیرفضاهای*

$$(\circ) = E_\circ \subset E_\backslash \subset \cdots \subset E_{n-\backslash} \subset E_n = E \subset T_pM$$

باشد که $E_i \in V_n^r(\mathcal{I})$ $(\circ \leq i < n)$، آنگاه ***منیفلد انتگرال*** *n–***بعدی تحلیلی حقیقی*** *$P \subset M$ و گذرا از p وجود دارد که در شرط $T_pP = E$ صادق است.*

اثبات: تنها با استفاده از قضیهٔ کارتان—کهلر و توجه به این نکته که چون $V_n^r(\mathcal{I})$ زیرمجموعهٔ باز $V_n(\mathcal{I})$ است بنابراین هر منیفلد انتگرال k–بعدی از $\mathcal{I}$ به $E_k \in V_k^r(\mathcal{I})$ مماس است، نتیجه می‌شود که در یک همسایگی از p این منیفلد انتگرال منظم نیز خواهد بود. □

این نتیجه در نوع خود بسیار جالب است ولی اولاً این شرط تنها شرطی کافی است و لازم نیست. تعداد حالت‌های بسیار کمی از منیفلدهای مورد علاقهٔ ما وجود دارند که با عملکرد فوق ساخته نمی‌شوند، زیرا المان‌های انتگرالی که باید به آنها مماس باشند، انتهای پرچمی از المان‌های انتگرال منظم نیستند. ثانیاً بررسی این که المان انتگرالی انتهای یک پرچم از المان‌های انتگرال منظم است، نیازمند محاسبات بسیاری است.

توجه داریم که محاسبهٔ پرچمی از زیرفضاها کمی کار می‌برد. در ادامه سعی می‌شود آنرا به شکل ساده‌تری عنوان کنیم:

پرچمی از المان‌های انتگرال

$$(\circ) = E_\circ \subset E_\backslash \subset \cdots \subset E_{n-\backslash} \subset E_n = E \subset T_pM$$

را برای $(\circ \leq i < n)$ $E_i \in V_i^r(\mathcal{I})$ و $E_n \in V_n(\mathcal{I})$ **پرچم منظم** می‌نامیم [۱]. اگر فرض کنیم که $E_\circ = \circ_p \subset T_pM$ منظم باشد، در این صورت عادی نیز خواهد بود (به این معنی که $E_\circ$ صفر عادی مجموعهٔ توابع $\mathcal{I}^\circ \subset \Omega^\circ(M)$ خواهد بود). حال مجموعهٔ $V_\circ^\circ(\mathcal{I})$ زیرمنیفلد هموار $G_\circ(TM) = M$ است.

به وضوح هر منیفلد انتگرال $\mathcal{I}$ که توسط فرآیند پرچم منظم ساخته می‌شود به هر حال عضوی از $V_\circ^\circ(\mathcal{I})$ است. بنابراین حداقل از نظر تئوری می‌توان بدون از دست دادن کلیت بحث M را با $V_\circ^\circ(\mathcal{I})$ جایگزین ساخت. با فرض $\mathcal{I}^\circ = (\circ)$ یعنی اینکه $\mathcal{I}$ با درجهٔ مثبت تولید شده باشد. حال متناظر به هر پرچم انتگرال (منظم یا غیر منظم)

$$(\circ) = E_\circ \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n = E \subset T_pM$$

پرچم **نزولی** از فضاهای قطبی، موجود است:

$$T_pM \supseteq H(E_\circ) \supseteq H(E_1) \supseteq \cdots \supseteq H(E_{n-1}) \supseteq H(E_n).$$

حال مناسب است که بعد این فضاها را برحسب نقصان بعدشان در T_pM درنظر بگیریم. برای $k < n$ قرار می‌دهیم

$$c(E_k) = \dim T_pM - \dim H(E_k) = n + s - k - 1 - r(E_k)$$

وقتی که $\dim M = n + s$. قرارداد می‌کنیم که $c(E_n) = s$ (معمولاً حالت $H(E_n) = E_n$ برقرار است که در این صورت فرمول فوق از $c(E_k)$ برای $k = n$ نیز برقرار خواهد بود). چون $\dim H(E_k) \geq \dim E_n = n$، داریم $c(E_k) \leq s$. به علت نحوهٔ ساخت این فضاها داریم

$$\circ \leq c(E_\circ) \leq c(E_1) \leq \cdots \leq c(E_n) \leq s,$$

که فرض ما بر این است که $c(E_{-1}) = \circ$. **مشخصه‌های کارتان** از پرچم $F = (E_\circ, E_1, \cdots, E_n)$ را به صورت اعداد زیر تعریف می‌کنیم

$$s_k(F) = c(E_k) - c(E_{k-1}) \geq \circ.$$

این اعداد نقش مهمی در مطالب زیر ایفا می‌کند.

حال آزمون کارتان را مطرح می‌کنیم که شرط لازم و کافی برای منظم بودن پرچم داده شده است. زیرمجموعهٔ $X \subset M$ از حداقل نقصان بعد q در x نامیده می‌شود اگر یک x–همسایگی باز $U \subset M$ و یک زیرمنیفلد $Q \subset U$ با نقصان بعد q با شرط $X \cap U \subset Q$ وجود داشته باشند. از طرف دیگر، گوییم X در x حداکثر نقصان بعد q دارد اگر x–همسایگی باز $U \subset M$ و یک زیرمنیفلد $Q \subset U$ شامل x با نقصان بعد q با شرط $Q \subset X \cap U$ وجود داشته باشند.

۲.۸.۳ قضیه (آزمون کارتان). ([٦]) *فرض کنیم $(M, \mathcal{I})$ یک دستگاه دیفرانسیل خارجی باشد و $F = (E_\circ, E_1, \cdots, E_n)$ یک پرچم انتگرال از $\mathcal{I}$ باشد. در این صورت $V_n(\mathcal{I})$ دارای حداقل نقصان بعد*

$$c(F) = c(E_\circ) + c(E_1) + \cdots + c(E_{n-1})$$

[۱] لزومی ندارد که انتهای پرچم یعنی E_n از یک پرچم منظم، منظم باشد؛ در حقیقت منظم نیست ولی عادی است.

در $G_n(TM)$ از E_n است. بعلاوه، $V_n(\mathcal{I})$ زیرمنیفلد هموار $G_n(TM)$ با نقصان بعد $c(F)$ در همسایگی‌ای از E_n است، اگر و تنها اگر پرچم F منظم باشد.

این نتیجه بسیار قدرتمند است زیرا به ما اجازه می‌دهد که توسط جبرخطی ساده یعنی یافتن فضاهای قطبی $H(E_k)$ و بعد کنترل هموار بودن $V_n(\mathcal{I})$ در همسایگی E_n و کوچکترین نقصان بعد ممکن یعنی $c(F)$، منظم بودن پرچم را بررسی کنیم. در بسیاری از حالات این دو مرحله تنها با یک نگاه قابل انجام هستند.

برای مشاهدهٔ اثبات این قضیه خواننده را به مرجع [۲۰] ارجاع می‌دهیم. حالت مشابه آزمون کارتان در مسألهٔ هم‌ارزی و خارج از بحث دستگاه دیفرانسیل خارجی (در حالت کلی) را در فصل‌های بعد بازگو خواهیم کرد. در ادامه دو مثال برای استفاده از این آزمون آورده شده است.

۳.۸.۳ مثال (۲–فرم‌های خود–دوگان) فرض کنیم u^i مختصاتی آزاد و $M = \mathbb{R}^۴ \times \mathbb{R}^۳$ دارای مختصات

$$(x^۱, x^۲, x^۳, x^۴, u^۱, u^۲, u^۳)$$

باشد. ۳–فرمی زیر را تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\Phi &= du^۱\wedge[dx^۲\wedge dx^۳+dx^۱\wedge dx^۴]+du^۲\wedge[dx^۳\wedge dx^۱+dx^۲\wedge dx^۴]\\ &\quad +du^۳\wedge[dx^۱\wedge dx^۲+dx^۳\wedge dx^۴].\end{aligned}$$

با فرض $\mathcal{I} = \langle\Phi\rangle$، منیفلدهای انتگرال ۴–بعدی از $\mathcal{I}$ در M با برقراری شرط $dx^۱\wedge dx^۲\wedge dx^۳\wedge dx^۴ \neq ۰$ (به صورت موضعی) توسط ۲–فرمی‌های خود–دوگان بسته قابل ارائه‌اند. هر المان انتگرال $E \in V_۴(\mathcal{I}) \cap G_۴(T\mathbb{R}^۷, d\mathrm{x})$ توسط معادلات خطی به فرم زیر تعریف می‌شود

$$\pi_a = du^a - p^a_i(E)\, dx^i = ۰.$$

برای اینکه Φ بر چنین ۴–صفحه‌ای صفر شود، کافی است که $p^a_i(E)$ ها در چهار معادلهٔ زیر صدق کنند

$$p^۱_۱+p^۲_۲+p^۳_۳ = p^۱_۴-p^۲_۳+p^۳_۲ = p^۲_۴-p^۳_۱+p^۱_۳ = p^۳_۴-p^۱_۲+p^۲_۱ = ۰.$$

از اینجا معلوم می‌شود که $V_۴(\mathcal{I}) \cap G_۴(T\mathbb{R}^۷, d\mathrm{x})$ یک منیفلد هموار با نقصان بعد ۴ در $G_۴(T\mathbb{R}^۷)$ است. از طرف دیگر اگر فرض کنیم $E_k \subset E$ با معادلات $dx^{k+۱} = dx^{k+۲} = \cdots = dx^۴ = ۰,\ (۰ \le k < ۴)$ تعریف شده باشد، داریم

$$\begin{aligned}H(E_۰) = H(E_۱) &= T_pM,\\ H(E_۲) &= \{v \in T_pM \mid \pi_۳(v) = ۰\},\\ H(E_۳) &= \{v \in T_pM \mid \pi_۱(v) = \pi_۲(v) = \pi_۳(v) = ۰\},\\ H(E_۴) &= \{v \in T_pM \mid \pi_۱(v) = \pi_۲(v) = \pi_۳(v) = ۰\},\end{aligned}$$

و بنابراین $c(E_\circ)=c(E_\text{۱})=\circ$، $c(E_\text{۲})=\text{۱}$ و $c(E_\text{۳})=c(E_\text{۴})=\circ$. از آنجا که $c(F)=\circ+\circ+\text{۱}+\text{۳}=\text{۴}$ یعنی همان نقصان بعد $V_\text{۴}(\mathcal{I})$ در $G_\text{۴}(T\mathbb{R}^\text{۷})$ است، آزمون کارتان برقرار است و پرچم منظم است. $\triangle$

۴.۸.۳ مثال (منیفلدهای لاگرانژی خاص در $\mathbb{C}^n$) فرض کنیم $M=\mathbb{C}^n$ با مختصات مختلط استاندارد $z^\text{۱},\cdots,z^n$ را داشته باشیم. با نوشتن $z^k=x^k+i\,y^k$ فرض کنیم که $\mathcal{I}$ ایده‌آل تولید شده توسط ۲−فرم کهلر زیر باشد

$$\omega=dx^\text{۱}\wedge dy^\text{۱}+\cdots+dx^n\wedge dy^n$$

و n−فرم زیر را داشته باشیم

$$\begin{aligned}\Phi &= \mathrm{Im}(dz^\text{۱}\wedge\cdots\wedge dz^n)\\ &= dy^\text{۱}\wedge dx^\text{۲}\cdots\wedge dx^n+dx^\text{۱}\wedge dy^\text{۲}\cdots\wedge dx^n+\cdots+dx^\text{۱}\wedge dx^\text{۲}\cdots\wedge dy^n\\ &\quad+\ (\text{جملات مراتب بالاتر از }\{dy^k\}).\end{aligned}$$

هر منیفلد انتگرال n−بعدی از $\mathcal{I}$ **لاگرانژی خاص** نامیده می‌شود. این منیفلدها و برخی توسیع‌های خاص آنها امروزه از موضوعات بسیار جذاب در مباحث ریاضی−فیزیک هستند. المان انتگرال $E\in V_n(\mathcal{I})$ در نقطهٔ پایهٔ $\circ\in\mathbb{C}^n$ را به کمک روابط زیر تعریف می‌کنیم

$$dy^\text{۱}=dy^\text{۲}=\cdots=dy^n=\circ.$$

همچنین فرض کنیم $E_k\subset E$ با روابط اضافی $dx^j=\circ$ برای $j>k$ تعریف شده باشد. در این صورت برای $k<n-\text{۱}$ فضای قطبی E_k توسط روابط $dy^j=\circ$ برای $j\le k$ تعریف خواهد شد. در حالت خاص برای $k<n-\text{۱}$ داریم $c(E_k)=k$. در حالی که برای $k=n-\text{۱}$، با وارد شدن فرم Φ در محاسبات مربوط به معادلات قطبی، $H(E_{n-\text{۱}})=E_n$. در نتیجه $c(E_{n-\text{۱}})=n$. بنابراین حداقل نقصان بعد $V_n(\mathcal{I})$ عبارتست از

$$\circ+\text{۱}+\cdots+(n-\text{۲})+n=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,(n^\text{۲}-n+\text{۲}).$$

از طرف دیگر بر هر المان انتگرال نزدیک به E مانند E^*، ۱−فرمی‌های dx^i مستقل خطی هستند، پس می‌توان آن را توسط روابط به شکل زیر شرح داد

$$dy^a-p^a_i\,dx^i=\circ.$$

این شرط که ω بر E^* صفر شود به این معنی است که $p^a_i=p^i_a$، در حالی که صفر شدن Φ بر E^* معادلهٔ چندجمله‌ای زیر برحسب p^a_i ها را نتیجه می‌دهد

$$\circ=p^\text{۱}_\text{۱}+p^\text{۲}_\text{۲}+\cdots+p^n_n+(\text{جملات مراتب بالاتر از }\{p^a_i\}).$$

این معادله دارای مشتق مستقل از معادلات $p^a_i=p^i_a$ در المان انتگرال E (با تعریف $p^a_i=\circ$) است. در نتیجه $V_n(\mathcal{I})$ در همسایگی E هموار است و از نقصان بعد $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,(n^\text{۲}-n+\text{۲})$ در $G_n(T\mathbb{C}^n)$ است. بنابراین طبق آزمون کارتان، پرچم منظم

است. $\triangle$

۹.۳ امتداددهی

در برخی از حالات قضیهٔ کارتان—کهلر برقرار نیست، در چنین وضعیتی منیفلدهای انتگرال یافت نمی‌شوند. مثلاً حالتی را درنظر می‌گیریم که $M = \mathbb{R}^3$ و $\mathcal{I} = \langle dx \wedge dz, dy \wedge dz \rangle$. اگرچه منیفلدهای انتگرال ۲—بعدی وجود دارند (مثلاً صفحات تعریف شده با z ثابت)، هیچ المان انتگرال ۲—بعدی که انتهای پرچم منظمی باشد وجود ندارد.

۱.۹.۳ مثال (رویه‌ها در $\mathbb{R}^3$ و انحناهای اصلی ثابت). فرض کنیم $\mathbf{x} : N \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ایمرشنی از یک رویهٔ جهت‌دار باشد و $\mathbf{u} : N \longrightarrow S^2$ نرمال جهت‌دار متناظر (نگاشت گاوس) باشد. فرم‌های اساسی $\mathrm{I} = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{u}$ و $\mathrm{II} = -d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$ را قبلاً معرفی نموده‌ایم. مقادیر ویژهٔ II نسبت به I را **انحناهای اصلی** از این ایمرشن می‌نامند. روی مجموعهٔ باز $N^* \subset N$ وقتی که دو مقدار ویژه متمایز هستند، بر N توابعی هموار خواهند بود. متمم $N \setminus N^*$ در این صورت مکان هندسی نقاط **نافی** خواهد بود. برای سادگی فرض می‌کنیم که $N^* = N$ و لذا ساختار مورد بررسی فاقد نقاط نافی باشد. با تعریف نگاشت‌های با مقادیر برداری $e_1, e_2 : N \longrightarrow S^2$ که $e_1 \times e_2 = u$ و نیز با قرار دادن $\eta_i = e_i \cdot dx$ خواهیم داشت

$$d\mathbf{x} = e_1\,\eta_1 + e_2\,\eta_2,$$
$$-d\mathbf{u} = e_1\,\kappa_1\,\eta_1 + e_2\,\kappa_2\,\eta_2,$$

که در آن $\kappa_1 > \kappa_2$ انحناهای اصلی هستند. ایمرشن x نیز یک **رویهٔ وینگارتن** تعریف می‌کند هرگاه انحناهای اصلی در یک رابطهٔ (نابدیهی) به فرم $F(\kappa_1, \kappa_2) = 0$ صدق کنند (برای هر ایمرشن در حالت عادی، توابع κ_i حداقل در یک مجموعهٔ باز چگال در رابطهٔ $\kappa_1 \wedge \kappa_2 \neq 0$ صدق می‌کنند). برای مثال، معادلات $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$ و $\kappa_1\kappa_2 = 1$ روابط وینگارتن هستند که به ترتیب با معادلات $H = 0$ (رویه‌های مینیمال) و $K = 1$ نیز بیان می‌گردند.

اگر بخواهیم رویه‌هایی در $\mathbb{R}^3$ را بیابیم که دارای انحناهای اصلی ثابت (متمایز) κ_1, κ_2 هستند، باید منیفلدهای انتگرال ایده‌آل $\mathcal{I}$ بر G را بیابیم که

$$\mathcal{I} = \langle\, \theta_0 = \omega_3,\, \theta_1 = \omega_{31} - \kappa_1\,\omega_1,\, \theta_2 = \omega_{32} - \kappa_2\,\omega_2 \,\rangle.$$

حال اگر دیفرانسیل خارجی این فرم‌ها را بیابیم داریم

$$\left.\begin{array}{l} d\theta_0 \equiv 0 \\ d\theta_1 \equiv -(\kappa_1 - \kappa_2)\,\omega_{12} \wedge \omega_2 \\ d\theta_2 \equiv -(\kappa_1 - \kappa_2)\,\omega_{21} \wedge \omega_1 \end{array}\right\} \quad \mathrm{mod}\,\{\theta_0, \theta_1, \theta_2\}.$$

بنابراین

$$\mathcal{I} = \langle\, \theta_0,\, \theta_1,\, \theta_2,\, -(\kappa_1 - \kappa_2)\,\omega_{12} \wedge \omega_2,\, -(\kappa_1 - \kappa_2)\,\omega_{21} \wedge \omega_1 \,\rangle_{\mathrm{alg}}.$$

دو حالت ممکن است پیش آید: نخست اینکه $\kappa_۲ = \kappa_۱$ که در این حالت $\mathcal{I}$ فروبنیوس است و اگر $\kappa_۱ = \kappa_۲ = ۰$ منیفلدهای انتگرال با صفحه‌های $\mathbb{R}^۳$ متناظرند و با کره‌های درون $\mathbb{R}^۳$ متناظرند هرگاه $\kappa_۱ = \kappa_۲ \neq ۰$. حالت دوم آن است که $\kappa_۱ \neq \kappa_۲$، در این صورت المان‌های انتگرال ۲−بعدی که برای آنها $\omega_۱ \wedge \omega_۲$ ناصفر است (که وجود دارند) هیچگاه شامل المان‌های انتگرال ۱−بعدی منظم نیستند. $\triangle$

یک روش اصولی برای الحاق نمودن مشتق‌ها به عنوان متغیرهای جدید در دستگاه دیفرانسیل خارجی $(M,\mathcal{I})$ روش زیر است:
فرض کنیم که می‌خواهیم منیفلدهای انتگرالی از $(M,\mathcal{I})$ را مطالعه کنیم که صفحات مماس آنها در زیرمنیفلد هموار زیر (که معمولاً یک مؤلفهٔ همبندی است) می‌افتند

$$Z \subset V_n(\mathcal{I}) \subset G_n(TM).$$

هر منیفلد انتگرال $f : N \hookrightarrow M$ ترفیعی کانونی به یک زیرمنیفلد به شکل $f^{(۱)} : N \hookrightarrow Z$ و با ضابطهٔ

$$f^{(۱)}(p) = f'(T_pN) \subset T_{f(p)}M$$

را داراست. حال $f^{(۱)} : N \hookrightarrow Z \subset G_n(TM)$ منیفلد انتگرالی از دستگاه برخوردی $\mathcal{C}$ است و نسبت به تصویر $\pi : Z \longrightarrow M$ تراگذر است. برعکس اگر $F : N \longrightarrow Z \subset G_n(TM)$ منیفلد انتگرالی از دستگاه برخوردی $\mathcal{C}$ باشد که به نگاشت تصویر π تراگذر است، آنگاه $F = f^{(۱)}$ که $f = \pi \circ F$ و بنابراین فضاهای مماس ایمرشن $f : N \longrightarrow M$ همگی در $Z \subset V_n(\mathcal{I})$ می‌افتند (در حالت خاص، $f : N \longrightarrow M$ منیفلد انتگرال $\mathcal{I}$ است).

فرض کنیم $\mathcal{I}^{(۱)} \subset \Omega^*(Z)$ نمایانگر ایده‌آل خارجی از Z باشد که توسط پول−بک $\mathcal{C}$ از $G_n(TM)$ از طریق نگاشت شمول $Z \subset G_n(TM)$ تولید شده است. زوج $(Z,\mathcal{I}^{(۱)})$ را $Z-$ **امتداد** $\mathcal{I}$ می‌نامند. بحثی که در بالا بیان شد در واقع به این مفهوم قابل بازگویی است که
منیفلدهای انتگرالی از $\mathcal{I}$ که صفحات مماس آنها در Z قرار دارند در تناظر یک به یک با منیفلدهای انتگرال $(Z,\mathcal{I}^{(۱)})$ است که نسبت به تصویر $\pi : Z \longrightarrow M$ تراگذر هستند.

عموماً تنها یک مؤلفه از $V_n^\circ(\mathcal{I})$ هست که برای بررسی لازم است. آنرا با $M^{(۱)} \subset V_n^\circ(\mathcal{I})$ نشان می‌دهیم و برای سادگی می‌گوییم که $(M^{(۱)},\mathcal{I}^{(۱)})$ امتدادی از $\mathcal{I}$ است.

۲.۹.۳ مثال (انحناهای اصلی ثابت). بر اساس آنچه که در مثال ۱.۹.۳ شرح داده شد، اگر $\kappa_۱ \neq \kappa_۲$ وقتی که ایده‌آل

$$\mathcal{I} = \langle \omega_۳,\, \omega_{۳۱} - \kappa_۱\, \omega_۱,\, \omega_{۳۲} - \kappa_۲\, \omega_۲,\, (\kappa_۱ - \kappa_۲)\, \omega_{۱۲} \wedge \omega_۲,\, (\kappa_۱ - \kappa_۲)\, \omega_{۲۱} \wedge \omega_۱ \,\rangle_{\rm alg}$$

را درنظر بگیریم، المان انتگرال ۲−بعدی منحصربفردی در هر نقطه از G وجود دارد که توسط معادلات زیر تعریف می‌شود

$$\omega_۳ = \omega_{۳۱} - \kappa_۱\, \omega_۱ = \omega_{۳۲} - \kappa_۲\, \omega_۲ = \omega_{۱۲} = ۰.$$

بنابراین $V_۲(\mathcal{I})$ دیفیومورف با G است. مطابق روش شرح داده شده در فوق داریم

$$\mathcal{I}^{(۱)} = \langle \omega_۳,\, \omega_{۳۱} - \kappa_۱\, \omega_۱,\, \omega_{۳۲} - \kappa_۲\, \omega_۲,\, \omega_{۱۲},\, \kappa_۱\, \kappa_۲\, \omega_۱ \wedge \omega_۲ \,\rangle.$$

حال اگر $\kappa_۱ \kappa_۲ \neq ۰$ آنگاه این ایده‌آل هیچ المان انتگرال ۲−بعدی ندارد و بنابراین رویهٔ انتگرالی نخواهد داشت. از طرف دیگر اگر $\kappa_۱ \kappa_۲ = ۰$ آنگاه $\mathcal{I}^{(۱)}$ یک دستگاه فروبنیوس است و توسط منیفلدهای انتگرال ۲−بعدی برگ‌بندی می‌شود. $\triangle$

۱۰.۳ قضیهٔ کارتان−کورانیشی

در این بخش فرض ما بر این است که ایده‌آل مورد بررسی با درجهٔ مثبت تولید شده باشد، یعنی شامل تابع غیر صفری نباشد. فرض کنیم $(M, \mathcal{I})$ یک دستگاه دیفرانسیل خارجی و Z زیرمجموعه‌ای باز و همبند از $V_n^\circ(\mathcal{I})$ باشد. می‌گوییم Z **پیچشی** است هرگاه هر $E \in Z$ انتهای یک پرچم منظم باشد. مشابه این تعریف را برای حالت کلی مسألهٔ هم‌ارزی، در فصل‌های بعد شرح خواهیم داد.

یکی از نتایج مهم در فرآیند امتداددهی آن است که پیچشی بودن را دچار مشکل نمی‌کند [۶]:

۱.۱۰.۳ قضیه (بقای پیچشی بودن). *فرض کنیم $(M, \mathcal{I})$ یک دستگاه دیفرانسیل خارجی با $\mathcal{I}^\circ = (۰)$ باشد و $M^{(۱)}$ به عنوان زیرمجموعهٔ باز و همبندی از $V_n^\circ(\mathcal{I})$ پیچشی باشد. آنگاه دنبالهٔ مشخصه‌های $(s_\circ(F), \cdots, s_n(F))$ برای هر پرچم منظم $F = (E_\circ, \cdots, E_n)$ که $E_n \in M^{(۱)}$ یکسان است. بعلاوه دستگاه دیفرانسیل خارجی $(M^{(۱)}, \mathcal{I}^{(۱)})$ بر مجموعهٔ $M^{(۲)} \subset V_n(\mathcal{I}^{(۱)})$ از عناصری که به تصویر $\pi : M^{(۱)} \longrightarrow M$ تراگذر هستند و دنبالهٔ مشخصه‌های آن $(s_\circ^{(۱)}, \cdots, s_n^{(۱)})$ به صورت زیر معرفی می‌شود، پیچشی خواهد بود*

$$s_k^{(۱)} = s_k + s_{k+۱} + \cdots s_n.$$

$(M^{(k)}, \mathcal{I}^{(k)})$ را به کمک استقراء با شروع از $(M^{(\circ)}, \mathcal{I}^{(\circ)}) = (M, \mathcal{I})$ می‌توان تعریف نمود. داریم

$$\dim M^{(k)} = n + s_\circ + \binom{k+۱}{۱} s_۱ + \binom{k+۲}{۲} s_۲ + \cdots + \binom{k+n}{n} s_n.$$

در ضمن $M^{(k)}$ را به صورت فضای جت مرتبهٔ k ام از منیفلدهای انتگرال $\mathcal{I}$ که مماس آنها در $M^{(۱)}$ می‌افتد می‌توان تفسیر نمود.

۲.۱۰.۳ قضیه (کارتان−کورانیشی). *([۶]) فرض کنیم که دنباله‌ای از منیفلدهای $M_k,\ k \geq ۰$ و نشانندههای $\iota_k : M_k \hookrightarrow G_n(TM_{k-۱}),\ k > ۰$ را داشته باشیم که در خواص زیر صادقند*

(۱) ترکیب $\pi_{k-۱} \circ \iota_k : M_k \longrightarrow M_{k-۱}$ سابمرشن است،

(۲) برای هر $k \geq ۲$، $\iota_k(M_k)$ زیرمنیفلدی از $V_n(\mathcal{C}_{k-۲}, \pi_{k-۲})$ است، یعنی المان‌های انتگرال دستگاه برخوردی $\mathcal{C}_{k-۲}$ بر $G_n(TM_{k-۲})$ هستند که به تارهای $\pi_{k-۲} : G_n(TM_{k-۲}) \longrightarrow M_{k-۲}$ تراگذرند.

در این صورت $k_{\circ} \geq \circ$ وجود دارد که برای هر $k \geq k_{\circ}$، زیرمنیفلد $\iota_{k+1}(M_{k+1})$ زیرمجموعه‌ای باز و پیچشی از $V_n(\iota_k^* \mathcal{C}_{k-1})$ است که در آن $\iota_k^* \mathcal{C}_{k-1}$ یک دستگاه دیفرانسیل خارجی تعریف شده بر M_k و پول—بک شده از $G_n(TM_{k-1})$ می‌باشد.

یک دنباله از منیفلدها و ایمرشن‌ها به شکلی که در این قضیه بیان گردید اغلب به عنوان **دنبالهٔ امتدادی** معروفند.

وقتی که کار را با دستگاه دیفرانسیل خارجی $(M, \mathcal{I})$ و زیرمنیفلد $\iota : Z \hookrightarrow V_n(\mathcal{I})$ که پیچشی نیست، آغاز کنیم، می‌توانیم دنبالهٔ امتدادی را با قرار دادن $M_1 = Z$ بسازیم و زیرمنیفلد $M_2 \subset V_n(\iota^* \mathcal{C}_{\circ})$ را جستجو کنیم که مؤلفه‌ای از $V_n(\iota^* \mathcal{C}_{\circ})$ است. با تکرار این فرآیند تا رسیدن به M_k که $V_n(\iota^* \mathcal{C}_{\circ})$ تهی باشد، آنگاه یا منیفلد انتگرالی از این نوع وجود ندارد و یا اینکه به شکل اتفاقی یک دستگاه پیچشی است که در این حالت می‌توان از قضیهٔ کارتان—کهلر استفاده کرد (وقتی که سیستم مورد بحث تحلیلی حقیقی باشد).

مشکل اصلی این روش آن است که ممکن است فضاهای $V_n(\mathcal{I})$ برای کار مشکل باشند. مشکل دیگر آن است که مؤلفه‌های $M_1 \subset V_n(\mathcal{I})$ ممکن است بروی $M_{\circ} = M$ ایمرس نشوند در حالی که بر زیرمنیفلدهای سره ایمرس شوند که در این وضعیت باید مسأله را به زیرمنیفلد مذکور تحدید نماییم و از ابتدا شروع کنیم.

در شرایطی که دستگاه دیفرانسیل خارجی اصلی $(M, \mathcal{I})$ تحلیلی حقیقی باشد، مجموعهٔ $V_n(\mathcal{I}) \subset G_n(TM)$ نیز تحلیلی حقیقی خواهد بود و بنابراین به صورت طبیعی مسأله را از زیرمنیفلدهای جدید می‌توان آغاز نمود:

$$V_n(\mathcal{I}) = \bigcup_{\beta \in B} Z_\beta.$$

حال می‌توان خانوادهٔ امتدادهای $(Z_\beta, \mathcal{I}_\beta^{(1)})$ را درنظر گرفت و هر یک را جداگانه بررسی کرد. فرض‌های دقیق و تا حدی تکنیکی وجود دارند که این فرآیند امتدادی تکرار و تمامی بخش‌های مختلف آن دنبال گردد، در نهایت بعد از تعداد متناهی مرحله خاتمه می‌یابد و نتیجه مجموعه‌ای متناهی (شاید هم تهی) از دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی پیچشی است: $\{(M_\gamma, \mathcal{I}_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$. این نتیجه (به همراه فرضیات تکنیکی ضمنی) به کورانیشی منسوب است و به عنوان **قضیهٔ امتدادی کارتان—کورانیشی** مشهور است (کارتان در آثارش این مسأله را حدس زده بود و یا شاید شروع کرده بود ولی هرگز ادعاهایش را ثابت نکرد). در عمل نتیجهٔ کورانیشی بیش از یک توجیه برای پیشبرد فرآیند امتداددهی است و در واقع (در صورت لزوم) قسمتی از مراحل تجزیه و تحلیل یک دستگاه دیفرانسیل خارجی را تشکیل می‌دهد.

فصل ۴

مسألهٔ هم‌ارزی کارتان

روش هم‌ارزی کارتان نتیجهٔ طبیعی برنامه‌ای موسوم به برنامهٔ ارلانگن (یا ارلانگر) است که در سال ۱۸۷۲ توسط فلیکس کلاین طی یک سخنرانی مطرح گردیده است. برنامهٔ ارلانگن کلاین در واقع مبتنی برمسأله زیر بود:

فرض کنیم G گروهی باشد که بر G/H عمل می‌کند، هندسهٔ زیرمنیفلدهای $M \subset G/H$ را بررسی کنیم؛ به این مفهوم که چه وقت زیرمنیفلدهای $M, M' \subset G/H$ هم‌ارز هستند یعنی عضو $g \in G$ هست که $g(M) = M'$.

عنوان این سخنرانی چنین بوده است:

بازبینی جامعی از تحقیقات اخیر در هندسه.[۱]

در آن کلاین هندسه را به عنوان مطالعهٔ ناورداهای گروه تبدیلات روی اشیای هندسی معرفی نمود. این مقاله به همراه مقاله‌ای دیگر که توسط برنارد ریمان با عنوان زیر به صورت سخنرانی ارائه گردید؛ فوق‌العاده در حیطهٔ ریاضیات تأثیر گذار بوده‌اند:

فرضیاتی که بر اساس آنها هندسه فهمیده می‌شود.[۲]

سوفس لی یکی از دوستان نزدیک کلاین بود که جهت یافتن روش عمومی بدست آوردن ناورداها تلاش فراوانی کرد ولی متأسفانه دستاورد وی حاوی نواقصی جدی بود.

نقص اول از این بابت بود که تعیین ناورداها همواره شامل حل یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبهٔ اول است و علیرغم حل بسیاری از مسائل با بعد پایین توسط روش لی، حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبهٔ اول با پیچیدگی‌های بیشتر با روش لی امکان پذیر نمی‌باشد.

نقص دوم این بود که تعیین مؤثر مولدهای بینهایت کوچک که به تعریف دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی منجر

[۱] A coparative review of recent research in geometry

[۲] On the hypothesis upon which geometry is founded

می‌شوند، به طور طبیعی نیازمند پارامتری سازی ضمنی گروه مورد بحث است و مثلاً پارامتری سازی ضمنی گروه متعامد با حتی پنج متغیر کار آسانی نیست.

البته لی کارهای مؤثر فراوانی را به انجام رسانده است که امروزه نیز به سرعت در حال رشد و پیشروی است. یکی از این کارهای مؤثر بوجود آوردن مفهوم گروه‌های لی و جبر لی است. البته تعریف گروه لی با کارهای شخصی شوالی به صورت فراگیر بیان گردیده است. گروه لی G، منیفلد تحلیلی G همراه با عمل گروهی است که دارای معکوس تحلیلی می‌باشد. در سال ۱۸۷۰ وقتی که لی کار خود را روی گروه پیوسته از تبدیلات آغاز نمود، تصور برای گروه‌های مجرد خیلی رشد نکرده بود. لی نظریهٔ گروه خود را در زمینهٔ خواص تبدیلات معادلات دیفرانسیل، که همان یافتن نظریهٔ گالوا برای معادلات دیفرانسیل بود، گسترش داد [۳]. الی کارتان کسی بود که با توجه به برنامهٔ ارلانگن، با شبه—گروه‌های نامتناهی بعد کار کرد و روش او با استقبال زیادی همراه گردید. کارتان در مقاله‌ای تحت عنوان

شبه—گروه‌های گروه‌های پیوسته از تبدیلات، [۳]

که در سال ۱۹۰۸ انتشار یافت و از مقالات مهم ریاضیات است، فرآیندی را جهت یافتن ناورداهای اشیای هندسی تحت اثر شبه‌گروه‌های تعریف شده از معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبهٔ اول فرمول‌بندی و توصیف نموده است. کارتان مسألهٔ هم‌ارزی را تحت سه کلاس از تبدیلات تحلیل می‌نمود: *نقطه‌ای، حافظ تار و برخوردی*.

کارهای کارتان بعدها توسط چرن، برایانت، شادویک، الور، کامران، ویلکنسن، د. تامپسون، جی. تامپسون و گاردنر گسترش داده شد.

۱.۴ مسألهٔ هم‌ارزی

هدف از این روش یافتن شرایط لازم و کافی برای معادل بودن اشیای هندسی است. مفهوم معادل بودن بدان معنی است که اشیای هندسی توسط کلاسی از دیفیومورفیسم‌ها (تبدیلات ناوردا) به یکدیگر تبدیل گردند. شرایط لازم وکافی به شکل ناورداهای دیفرانسیلی اشیای هندسی موردنظر تحت کلاس دیفیومورفیسم‌ها یافت می‌شوند. مسألهٔ هم‌ارزی حل شده درنظر گرفته می‌شود هرگاه تمامی کلاس‌های هم‌ارزی استخراج شده باشند. به عنوان مثال کلاس دیفیومورفیسم‌هایی را که توسط جواب‌های یک دستگاه مرتبهٔ اول از معادلات دیفرانسیل و یا به بیان معادل توسط شرایط روی ژاکوبین آنها معین می‌گردند می‌توان نام برد.

بخصوص دو نوع دستاورد مهم و به اثبات رسیده در مسألهٔ هم‌ارزی معادلات دیفرانسیل وجود دارد: روش بینهایت کوچک‌های لی و روش هم‌ارزی کارتان که در فصل‌های قبل در مورد آنها بحث شد. هر یک از این دو روش دوگان دیگری است که روش لی مبتنی بر استفاده از میدان‌های برداری و روش کارتان مبتنی بر کار با فرم‌های دیفرانسیلی است. با این حال تفاوت مهم این دو روش در این است که روش لی نیازمند انتگرال‌گیری است در حالی که روش کارتان تنها نیازمند مشتق‌گیری است. البته تفاوت‌های و شباهت‌های ماهرانهٔ دیگری نیز بین این دو روش وجود دارد (برای دیدن جزییات این تفاوت‌ها و شباهت‌ها به [۱۲، ۳۸، ۳۹] رجوع کنید). با استفاده از روش هم‌ارزی، مجموعهٔ کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی را برای طبقه‌بندی اشیای هندسی مورد بحث، پیدا می‌کنیم ولی یکی از مشکلاتی که ممکن

[۳] Les sous-groupes des grouped continus de transformation

شکل ۱.۴: الی جوزف کارتان (۱۹۵۱—۱۸۶۹) هندسه‌دان مشهور فرانسوی.

است بوجود آید آن است که تعبیر هندسی ناورداهای دیفرانسیلی بدست آمده چیست؟ در حالت کلی این موضوع به نحوهٔ انتخاب پایه‌ها و نیز تشابه ناورداها به اشیای هندسی موجود مربوط است، مثلاً ۱—فرمی با پایین‌ترین مرتبه (حتی با ضرب یک ثابت ناصفر) به طول قوس تعبیر می‌شود و ناوردای دیفرانسیلی (یا تابعی از آن) با کمترین مرتبه نیز به انحنا تفسیر می‌گردد.

مسألهٔ دیگر آن است که ناورداهای حاصل موضعی هستند و به شکل سرتاسری قابل استفاده نیستند. البته در اکثر مثال‌های استاندارد، حداقل در یک زیرمجموعهٔ باز و چگال از فضای جت، ناورداها سرتاسری هستند [۳۹]. به هر حال روش هم‌ارزی تنها یافتن ناورداهای موضعی را تضمین می‌کند ولی به کمک کاتگوری برگ‌بندی‌ها و روش‌های هندسی—جبری در برخی حالت‌های خاص می‌توان به این مهم دست یافت.

در حالت کلی، برای یک گروه لی r—بعدی داده شدهٔ G که بر منیفلد m—بعدی M عمل می‌کند، مطالعهٔ عمل آن بر زیرمنیفلدهای $S \subset M$ با بعد $p < m$ بسیار جذاب است. برای نیل به این هدف، باید عمل گروه را به کلاف جت زیرمنیفلدها، $J^n(M,p)$ برای $n \geq ۰$، امتداد دهیم. یک **ناوردای دیفرانسیلی** (احتمالاً به شکل موضعی) تابعی حقیقی مقدار و به فرم $I : J^n \longrightarrow \mathbb{R}$ است که تحت عمل گروه امتداد یافته ناوردا باقی بماند. هر عمل گروه لی متناهی بعد به تعداد نامتناهی ناوردای دیفرانسیلی مستقل تابعی می‌پذیرد که به مراتب بالاتر نیز قابل گسترش است. بعلاوه همواره به تعداد $p = \dim S$ عملگر دیفرانسیلی مستقل خطی $\mathcal{D}_۱, \cdots, \mathcal{D}_p$ وجود دارد. بنابر قضیه‌ای اساسی که توسط لی طرح ریزی شده است، تمامی ناورداهای دیفرانسیلی توسط تعداد متناهی ناوردا از مراتب پایین‌تر و با تکرار عمل مشتق‌گیری ناوردا تولید می‌گردند [۳۷]. اثبات جدیدی از این قضیه در [۳۹] قابل مشاهده است.

در مورد خم‌ها، مشتق‌گیری ناوردا نسبت به پارامتر طول قوسی صورت می‌گیرد که نسبت به عمل گروه ناورداست. برای رویه‌های اقلیدسی نیز این مشتق‌گیری نسبت به کنج فرنه صورت می‌پذیرد. بنابراین یک از مباحث مهم، یافتن مجموعهٔ حداقلی از ناورداهای دیفرانسیلی مولد است. در مورد خم‌ها زمانی که $p = ۱$، جواب این مسأله مشخص است. تحت شرایط بخصوصی روی عمل گروه (به طور خاص وقتی که متعدی است و تحت امتداد شبه—پایدار نیست [۳۷])، دقیقاً $m - ۱$ ناوردای دیفرانسیلی مولد وجود دارد و هر ناوردای دیفرانسیلی دیگری تابعی از آنها و مشتق‌هایشان نسبت به طول قوس می‌باشد.

در مورد زیرمنیفلدهای با ابعاد بیشتر، کمترین تعداد برای ناورداهای دیفرانسیلی در نگاه اول قابل پیش‌بینی نیست؛

ولی به خواص عمل گروه (مثلاً اینکه به اندازه کافی بزرگ باشد) بستگی دارد، حتی وقتی که رویه‌های فضای ۳− بعدی را مطالعه می‌کنیم. در حات خاص، چنانچه کاملاً شناخته شده است ناورداهای دیفرانسیلی اقلیدسی رویه‌ای مانند $S \subset \mathbb{R}^3$ همگی با مشتق‌گیری از انحنای گاوس و انحنای میانگین نسبت به کنج فرنه حاصل می‌گردند. ولی در عین حال، این دو ناوردای دیفرانسیلی مجموعه حداقلی از ناورداهای دیفرانسیلی را تشکیل نمی‌دهند. در [۳۷] الور نشان داده است که انحنای گاوسی به شکل ضمنی بر حسب تابعی گویا از مشتق‌های ناوردای انحنای میانگین قابل بیان است.

چنانچه قبلاً نیز اشاره شد، یک هم‌کنج بر یک منیفلد m−بعدی M مجموعه‌ای مرتب از ۱−فرمی‌های $\theta = \{\theta^1, \theta^2, \cdots, \theta^m\}$ است که در هر نقطه از منیفلد، پایه‌ای برای کلاف کتانژانت تشکیل می‌دهند. مجموعهٔ $\theta = \{\theta^1, \theta^2, \cdots, \theta^m\}$ از ۱− فرمی‌ها یک هم‌کنج بر M تشکیل می‌دهند اگر و تنها اگر ضرب گوه‌ای آنها صفر باشد: $\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \cdots \wedge \theta^m = 0$. بنابراین یک هم‌کنج (در صورت وجود) یک جهت بر منیفلد M تعریف می‌کند، یعنی کلاف کتانژانت بدیهی است: $T^*M \simeq M \times \mathbb{R}^m$. یافتن هم‌کنج‌ها (و کنج‌ها) روی یک منیفلد ممکن است ساده نباشد، ولی از آنجایی که محاسبات ما عموماً موضعی است نگران این مسأله نیستیم.

اگر فرض کنیم $x = (x_1, \cdots, x_m)$ مختصات موضعی منیفلد M باشد، هر ۱−فرمی θ^i دارای نمایشی به صورت $\theta^i = \sum_j a_{ij}\, dx_j$ است که $A(x) = (a_{ij}(x))$ ماتریسی $m \times m$ و نامنفرد متشکل از توابع است. دوگان این فرم، میدان برداری است که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} := \sum_j b_{ij}\, \frac{\partial}{\partial x_j}$$

که در آن $A = (A(x)^{-1})^t = (b_{ij}(x)) = B(x)$. میدان‌های برداری کنجی تعریف شده نقش مهمی را در تعریف مشتق‌های جهتی در جهت‌هایی که هم‌کنج معین می‌سازد، بازی می‌کنند. بنابراین مشتق یک تابع بر حسب هم‌کنجی که به آن الحاق شده است، به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$dF = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \theta^j}\, \theta^j,$$

که $\dfrac{\partial F}{\partial \theta^h} = \sum_j b_{ij}\, \dfrac{\partial F}{\partial x_j}$ مشتق هم‌کنجی تابع F است. توجه به این نکته حائز اهمیت است که مشتق‌های هم‌کنجی $\dfrac{\partial}{\partial \theta^j}$ کاملاً عام بوده و لزوماً با هم جابجا نمی‌شوند. برای هم‌کنج $\theta = \{\theta^1, \theta^2, \cdots, \theta^m\}$ هر k−فرم دیفرانسیلی Ω ترکیب خطی زیر از حاصلضرب‌های خارجی k−تایی با ضرایب $h_I(x)$ است که $h_I(x)$ ها توابعی هموار با اندیس چندگانهٔ صعودی $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$ برای $1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le m$ می‌باشند که در نمایش زیر منحصربفرد هستند:

$$\Omega = \sum_I h_I(x)\, \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k}.$$

مثال مهمی از هم‌کنج‌ها، هم‌کنج مورر−کارتان بر گروه لی G است که در بخش ۴.۵ به معرفی آن خواهیم پرداخت.

۲.۴ روش هم‌ارزی

روش هم‌ارزی کارتان به مسألهٔ زیر بر می‌گردد:

۱.۲.۴ مسألهٔ هم‌ارزی. فرض کنیم هم‌کنج‌های موضعی $\Omega=\{\Omega^i\}$ و $\omega=\{\omega^i\}$ تعریف شده بر مجموعه‌های باز V و U از منیفلدهای (به ترتیب) M و N هستند و $G\subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ زیرگروهی از پیش تعیین شده باشد. شرط لازم و کافی برای وجود دیفیومورفیسم موضعی $\phi:U\to V$ که برای هر $u\in U$ داشته باشیم

$$\phi^*\Omega_V|_{\phi(u)}=\gamma_{VU}(u)\ \omega_U|_u,\qquad \gamma_{VU}(u)\in G \tag{۱.۴}$$

چیست؟

مسألهٔ هم‌ارزی (برای هم‌کنج‌ها) مهم‌ترین مبحثی است که در این رساله مورد بررسی قرار می گیرد. علت آن است که سایر صورت‌های مسألهٔ هم‌ارزی را دربر می‌گیرد. دو موضوع وجود دارند که این مسأله را تا اندازه‌ای خاص می‌کنند و باعث می‌شوند که این مسأله برای مطالعه بی‌اندازه جذاب باشد:

۱. امکان توصیف تعداد زیادی از ساختارهای هندسی و دیفرانسیل‌پذیر را به صورت عباراتی شامل مجموعه‌ای خاص از ۱—فرمی‌ها که تحت گروه تبدیلاتِ معینی ثابت هستند، پدید می آورد.

۲. مسألهٔ هم‌ارزی این اجازه را می‌دهد که خانوادهٔ همهٔ هم‌کنج‌ها را توسط رابطهٔ هم‌ارزی (۱.۴) به کلاس‌های هم‌ارزی $[\omega]$ افراز نماییم. هر کلاس توسط مجموعه‌ای از توابع ناوردایی که از بالا بردن سطح مطالعات حاصل شده‌اند، و چیزی که آنرا *ناوردای هم‌کنج* می‌نامیم، معین می‌شود. استفاده از این ناوردای هم‌کنج، محاسبات دیگری مانند آنالیز متقارن را تا حد زیادی ساده می‌نماید.

مسألهٔ هم‌ارزی برای جفت هم‌کنجهای داده شده، ***مسألهٔ ویژه*** نامیده می‌شود، در حالی که جستجوی عمومی‌تر که برای یافتن کلاسهای هم‌ارزی در خانوادهٔ همهٔ هم‌کنج‌ها صورت می‌پذیرد، ***مسألهٔ رده‌بندی*** نامیده می‌شود. مسألهٔ هم‌ارزی برای حل بسیاری از مسائل هندسه و آنالیز پدیدار شد. بعضی از آنها مانند ساختارهای ریمانی و همتافته ، مشخصهٔ هندسی آشکاری دارند. ولی برخی دیگر مانند هم‌ارزی عملگرهای دیفرانسیل، تحت تغییر متغیر، شهود هندسی کمتری دارند. اولین قدم برای استفاده از روش هم‌ارزی کارتان، تبدیل مسألهٔ داده شده به فرم مورد نیاز است و این عملی نسبتاً پیچیده است که نیازمند دید کافی هندسی در ساختارهای مورد مطالعه است. روش کارتان تا زمانی که این مرحله طی نشود، آغاز نمی‌گردد. بجز در حالتی که مسأله دارای گروه تقارنی نامتناهی بعد باشد که خود دارای روشی جداگانه ولی مشابه است، مسألهٔ هم‌ارزی کلی قابل کاهش به مسألهٔ هم‌ارزی هم‌کنج‌هاست. دو جنبه از این فرمول‌بندی وجود دارند که باید مورد توجه قرار بگیرند:

۱. باید یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر مناسب را همراه با مجموعه‌ای از ۱—فرمی‌ها که توسط اشیای هندسی مطلوب حاصل می‌شوند، یافت شود. اگر ۱—فرمی‌های مذکور تشکیل یک هم‌کنج بر M دهند، مسألهٔ هم‌ارزی، **معین** نامیده می‌شود. در غیر این صورت یا **پایین—معین** و یا **فوق——معین** می‌باشند، نسبت به اینکه تعداد ۱—فرمی‌ها، به ترتیب کم یا زیاد باشند. برای حالت اول، ۱—فرمی‌های افزوده‌شده می‌توانند آزادانه تا تکمیل هم‌کنج موضعی تغییر یابند. در حالت دوم، یک روش اصولی برای کاهش مسأله به یک مسألهٔ مشخص وجود دارد.

۲. جنبهٔ دیگر انتخاب گروه هم‌ارزی G است. این انتخاب ممکن است خاستگاهش در شرح اصلی مسألهٔ هم‌ارزی باشد، ولی نوعاً تحت تأثیر نوع نمایش ۱—فرمی‌هایی است که آنرا معرفی می‌نمایند [۱۰].

به عنوان مثالی از روش فرمول‌بندی مسألهٔ زیر را مطرح می‌سازیم:

۲.۲.۴ مثال.(هندسهٔ ریمانی) دو منیفلد n—بعدی ریمانی $(M, ds^۲)$ و $(\bar{M}, d\bar{s}^۲)$ ایزومتر هستند، هرگاه دیفیومورفیسم $\phi : M \to \bar{M}$ موجود باشد که $\phi^* d\bar{s}^۲ = ds^۲$. برای اینکه ایزومتری را به شکل چهارچوب کارتان درآوریم، لازم است تانسور متر $ds^۲$ را، توسط یک مجموعه از ۱—فرمی‌ها نمایش دهیم. این کار به طور طبیعی با ثابت نگاه داشتن یک هم‌کنج متعامد یکهٔ ω بر مجموعهٔ باز $U \subset M$ بدست می‌آید. به گونه‌ای که بر U داریم

$$ds^۲ = \sum_{i=۱}^{n} \omega^i \otimes \omega^i$$

البته، این نمایش منحصربفرد نیست، زیرا دوران هم‌کنج، به طور مستقل در هر نقطه از U هم‌کنج جدیدی را برای همان متر، ایجاد می‌کند. این درجهٔ آزادی در مسألهٔ هم‌ارزی، در مسألهٔ ایزومتری اصلی ظاهر نمی‌شود. با تحدیدکردن شرط ایزومتری به زیرمجموعه‌های موضعی، مسألهٔ هم‌ارزی(۱.۴) به شکل زیر است

$$\phi^* \bar{\omega'} = \gamma\ \omega'$$

که ω' یک هم‌کنج متعامد یکه برای $ds^۲$ بر $U \subset M$ است، و $\bar{\omega}'$ هم‌کنج متعامد یکه برای $d\bar{s}^۲$ بر $\bar{U} \subset \bar{M}$ است و γ مقادیرش را (به صورت موضعی) در $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ اختیار می‌کند. این روش یک مسألهٔ هم‌ارزی معین بر M را حاصل می‌کند که گروه هم‌ارزی آن $G = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ است. استفاده از روش کارتان به طبقه‌بندی مترهای ریمانی منجر می‌گردد. △

۳.۲.۴ تعریف. فرض کنیم $\omega = \{\omega^۱, \cdots, \omega^m\}$ کنجی باشد که بر منیفلد M تعریف شده است. **گروه تقارنی** ω گروهی خود هم‌ارز است، به این مفهوم که دیفیومورفیسم موضعی $\phi : M \longrightarrow M$ صادق در رابطهٔ $\phi^* \omega^i = \omega^i, \quad i = ۱, \cdots, m$ موجود باشد.

در فصل دوم به اندازهٔ کافی در مورد این نوع از مسألهٔ هم‌ارزی صحبت نمودیم و ادامهٔ این بحث را با بیان قضیهٔ زیر خاتمه می‌دهیم:

۴.۲.۴ قضیه. *اگر ω هم‌کنجی از مرتبهٔ r بر منیفلد m—بعدی M باشد، آنگاه گروه تقارنی آن یک گروه لی $m - r$ بعدی است.*

اثبات. برای اثبات مرجع [۳۹] را مشاهده کنید. □

۳.۴ هم‌ارزی هم‌کنج‌ها

برای بررسی مسألهٔ هم‌ارزی موضعی (۲.۵)، کارتان این شهود اصلی را بوجود آورد که ناوردای یک عملگر دیفرانسیل خارجی d را تحت نگاشت‌های هموار محاسبه نماییم؛ یعنی با توجه به این نکته که پول—بک و d جابجا می‌شوند که کلید حل مسألهٔ هم‌ارزی هم‌کنج‌هاست. مسألهٔ هم‌ارزی هم‌کنج‌ها به معادلات ساده‌ای از مسألهٔ هم‌ارزی اشاره دارد که گروه ساختاری مورد بررسی همانی است: $G = \{e\}$. در این حالت داریم

$$\phi^*\Omega^i = \omega^i, \qquad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{۲.۴}$$

از برقراری رابطهٔ (۲.۴) داریم

$$\phi^* d\Omega^i = d\omega^i, \qquad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{۳.۴}$$

جواب مسألهٔ هم‌ارزی برای هم‌کنج‌ها از طریق محاسبات و انجام جزییات آنالیزی شرایط (۳.۴) بدست می آید. حال چون θ^j ها یک هم‌کنج می‌سازند، می‌توان هر ۲— فرمی $d\theta^i$ را بر حسب ضرب‌های گوه‌ای θ^j ها بیان نمود. با این کار **معادلات ساختاری** اساسی (متناظر به هم‌کنج داده شده) تولید می‌گردند:

$$d\omega^i = \sum_{1\le j<k\le m} T^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k, \qquad i = 1, 2, \cdots, m, \tag{۴.۴}$$

$\frac{1}{2}m^2(m-1)$ **تابع ساختاری** $T^i_{jk} = T^i_{jk}(x)$، توابع همواری هستند که به صورت منحصربفرد تعریف می‌گردند و احتمالاً بسیاری از آنها ثابت و یا صفر هستند. توابع ساختاری میزان جابجایی مشتق هم‌کنجی متناظر را اندازه گیری می‌کنند. در واقع با استفاده از فرمول براکت لی دوگان داریم

$$\left[\frac{\partial}{\partial\omega^j}, \frac{\partial}{\partial\omega^k}\right] = -\sum_{i=1}^m T^i_{jk} \frac{\partial}{\partial\omega^i}.$$

فرمول اخیر با (۴.۴) معادل است و این از رابطهٔ براکت لی و دیفرانسیل خارجی در معادلهٔ زیر بدست می آید:

$$\langle d\omega; u, v\rangle = u\,\langle\omega; v\rangle - v\,\langle\omega; u\rangle - \langle\omega; [u, v]\rangle$$

وقتی ω ۱—فرمی و u و v دو میدان برداری هستند.

حال اگر فرض کنیم Ω یک هم‌کنج هم‌ارز با ω باشد، برای آن معادلات ساختاری زیر را که بر منیفلد $\bar{M}$ تعریف می‌گردد خواهیم داشت

$$d\Omega^i = \sum_{1\le j<k\le m} \bar{T}^i_{jk}\, \Omega^j \wedge \Omega^k, \qquad i = 1, 2, \cdots, m.$$

در این صورت داریم

$$\sum_{1\le j<k\le m} T^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k = d\omega^i = \phi^* d\Omega^i = \sum_{1\le j<k\le m} \bar{T}^i_{jk}(\phi(x))\, \omega^j \wedge \omega^k.$$

در رابطهٔ فوق چون ω^i ها ۱− فرمی‌های مستقل خطی هستند، پس باید ضرایب $\omega^j \wedge \omega^k$ برابر باشند یعنی باید

$$\bar{T}^i_{jk}(\bar{x}) = T^i_{jk}(x), \qquad \bar{x} = \phi(x), \qquad j < k, \qquad 1 \leq i, j, k \leq m.$$

بنابراین برای یک هم‌کنج داده شده، به ناورداهای اسکالر ایجاد شده از توابع ساختاری می‌رسیم. اگر تابع ساختاری T^i_{jk} برای هم‌کنج ω ثابت باشد، برای هم‌کنج هم‌ارز Ω باید توابع ساختاری متناظر $\bar{T}^i_{jk}$ نیز لزوماً برابر همان مقدار ثابت باشند و ثابت نبودن یکی از آنها به ناوردا نبودن موضعی دیگری منجر می‌گردد.

۴.۴ ناورداهای مشتق شده، توابع و منیفلدهای دسته‌بندی

معادلات ساختاری متناظر به هم‌کنج‌ها به تعدادی $\frac{1}{2} m^2(m-1)$ تابع ساختاری بدست می‌دهد و این تمامی آن چیزی نیست که به دنبال آن هستیم. فرض کنیم $I(x)$ یک ناوردای اسکالر باشد که با $\bar{I}(\bar{x})$ تحت تغییر متغیر در تناظر است: $\bar{I}(\bar{x}) = \bar{I}(\phi(x)) = I(x)$. بنابراین دیفرانسیل‌های خارجی dI و $d\bar{I}$ باید یکی باشند، یعنی $\phi^* d\bar{I} = dI$. از طرف دیگر می‌توانیم dI و $d\bar{I}$ را برحسب هم‌کنج‌های نظیرشان بیان کنیم. با انجام این کار روابط زیر بدست می‌آیند

$$\sum_j \frac{\partial I}{\partial \omega^j}(x)\, \omega^j = dI(x) = \phi^* d\bar{I}(\bar{x}) = \sum_j \frac{\partial \bar{I}}{\partial \Omega^j}(\phi(x))\, \phi^*\, \Omega^j.$$

حال چون ω^i ها به صورت نقطه به نقطه مستقل خطی هستند، بنابراین مشتق‌های هم‌کنجی هر تابع ناوردا باز هم ناوردا خواهد بود:

$$\frac{\partial I}{\partial \omega^j}(x) = \frac{\partial \bar{I}}{\partial \Omega^j}(\phi(x)), \qquad i = 1, \cdots, m, \qquad \bar{x} = \phi(x) \ \text{وقتی که}$$

با ادامهٔ این کار ناورداهای تابعی بیشتری بوجود می‌آیند: $I, \frac{\partial I}{\partial \omega^j}, \frac{\partial^2 I}{\partial \omega^j\, \partial \omega^k}, \cdots$. به این ناورداها **ناورداهای مشتق شده** از ناوردای اصلی I گفته می‌شود. باید توجه داشت که چون مشتق‌های هم‌کنجی در حالت کلی جابجا نمی‌شوند، نماد زیر را قرارداد می‌کنیم

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \omega^j\, \partial \omega^k} = \frac{\partial}{\partial \omega^j}\left(\frac{\partial I}{\partial \omega^k}\right).$$

ناوردای I_n را وابستهٔ تابعی $I_1, I_2, \cdots, I_{n-1}$ می‌نامیم هرگاه تابع H ای باشد که $I_n = H(I_1, I_2, \cdots, I_{n-1})$. بر اساس ناوردایی، اگر $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \cdots, \bar{I}_n$ ناورداهای متناظر از یک هم‌کنج هم‌ارز باشند، این ناورداها باید در رابطهٔ تابعی مشابهی صدق کنند $\bar{I}_n = H(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \cdots, \bar{I}_{n-1})$ که H همان تابع تعریف شده در فوق است. تابع H خود ناوردا بوده و کاملاً مستقل از مختصات است. مجموعهٔ همهٔ چنین توابعی را (همراه با توابع ثابت) **توابع دسته‌بندی** متناظر با هم‌کنج داده شده می‌نامیم.

۱.۴.۴ نتیجه. *اگر دو هم‌کنج هم‌ارز باشند، در این صورت توابع دسته‌بندی آنها برابرند.*

قرارداد می‌کنیم که T_σ برای $\sigma=(i,j,k,l_1,l_2,\cdots,l_s)$ به صورت $T_\sigma=\dfrac{\partial^s T^i_{jk}}{\partial\omega^{l_s}\,\partial\omega^{l_{s-1}}\,\partial\omega^{l_1}}$ تعریف گردد که T_σ ها را **ناوردای ساختاری** متناظر به هم‌کنج می‌نامیم. عدد صحیح $\operatorname{order}\sigma$ مرتبهٔ ناوردای مشتق‌شده T_σ نامیده می‌شود.

اگر دو هم‌کنج هم‌ارز باشند آنگاه توابع ساختاری و همهٔ مشتق‌های هم‌کنجی آنها یکی هستند، به این معنی که $\bar T_\sigma(\bar x)=T_\sigma(x)$ وقتی که $\bar x=\phi(x)$ و ϕ دیفیومورفیسم است و نیز $\operatorname{order}\sigma\geq 0$.

۲.۴.۴ تعریف. **فضای دسته‌بندی** مرتبهٔ s ام $\mathbb{K}^{(s)}=\mathbb{K}^{(s)}(m)$، متناظر به منیفلد m–بعدی M، در واقع فضای اقلیدسی $q_s(m)=\frac{1}{2}m^2(m-1)\left(\begin{array}{c}m+s\\ m\end{array}\right)$ بعدی است که به صورت $z^{(s)}=(\cdots,z_\sigma=T_\sigma,\cdots)$ مختصات‌دهی شده است. عناصر $z^{(s)}$ توسط اندیس چندگانه $\sigma=(i,j,k,l_1,l_2,\cdots,l_s)$ که $j<k$، $1\leq l_1\leq\cdots\leq l_r\leq m$ و $0\leq r\leq s$ مشخص شده‌اند. **نگاشت ساختاری** مرتبهٔ s ام متناظر به هم‌کنج ω بر M نگاشت $T^{(s)}:M\longrightarrow\mathbb{K}^{(s)}$ است که مؤلفه‌های آن ناورداهای ساختاری z_σ برای $\operatorname{order}\sigma\leq s$ هستند.

فضای دسته‌بندی $\mathbb{K}^{(s)}$ تاری از فضای جت مرتبهٔ s ام $J^s(TM\otimes\Lambda^2T^*M)$ است. هم‌کنج موردنظر نیز یک الصاق طبیعی بر کلاف تانسوری پادمتقارن $TM\otimes\Lambda^2T^*M$ از نوع $(1,2)$ است که مختصات تاری آن توسط ناورداهای ساختاری بیان می‌گردد.

اگر ω و Ω هم‌کنج‌های هم‌ارز باشند، معادلات ناوردایی $\bar T_\sigma(\bar x)=T_\sigma(x)$ موجب می‌شوند که برای $s=0,1,2,\cdots$ نگاشت‌های ساختاری نظیر به آنها دارای تصویر یکسان باشند: $\bar T^{(s)}_\sigma(\bar x)=T^{(s)}_\sigma(x)$ وقتی که $\bar x=\phi(x)$.

۳.۴.۴ تعریف. **مجموعهٔ دسته‌بندی** مرتبهٔ s ام $\mathcal{C}^{(s)}=\mathcal{C}^{(s)}(\omega,U)$ متناظر با هم‌کنج ω بر زیرمجموعهٔ $U\subset M$ به عنوان تصویر نگاشت ساختاری $T^{(s)}$ تعریف می‌گردد:

$$\mathcal{C}^{(s)}(\omega,U)=\{T^{(s)}(x)\mid x\in U\}\subset\mathbb{K}^{(s)}.$$

۴.۴.۴ گزاره. *فرض کنیم ω و Ω هم‌کنج‌های هم‌ارز توسط $\phi:M\longrightarrow\bar M$ باشند. در این صورت برای هر $s\geq 0$ مجموعه‌های دسته‌بندی مرتبهٔ s ام یکی هستند. بنابراین $\mathcal{C}^{(s)}(\omega,U)=\mathcal{C}^{(s)}(\bar\omega,\bar U)$ که در آن $U\subset M$ و $\bar U=\phi(U)\subset\bar M$.*

اثبات. برای اثبات گزاره مرجع [۳۹] را مشاهده کنید. □

در ادامه توجه خود را به یافتن شرایط لازم و کافی برای هم‌ارزی معطوف می‌نماییم.

۵.۴.۴ تعریف. هم‌کنج ω **کاملاً منظم** است اگر برای هر $s\geq 0$ نگاشت ساختاری مرتبهٔ s ام $T^{(s)}:M\longrightarrow\mathbb{K}^{(s)}$ منظم باشد.

در حالت منظم قرار می‌دهیم $\rho_s = \operatorname{rank} T^{(s)}$، یعنی رتبهٔ (ثابت) نگاشت ساختاری که همان رتبهٔ ماتریس ژاکوبین آن است. حال چون $\mathcal{C}^{(s)}$ زیرمجموعهٔ باز $\mathbb{K}^{(s)}$ است. بنابراین $\mathcal{C}^{(s)}$ زیرمنیفلد ρ_s–بعدی از فضای دسته‌بندی $\mathbb{K}^{(s)}$ است. اغلب $\mathcal{C}^{(s)}$ را **منیفلد دسته‌بندی** می‌نامند.

۶.۴.۴ قضیه. *اگر $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع منظم از مرتبهٔ r باشد، آنگاه در یک همسایگی از نقطهٔ بخصوصی، r تابع مستقل تابعی $f_1, f_2, \cdots, f_r \in \mathcal{F}$ وجود دارند که هر تابع $f \in \mathcal{F}$ به صورت تابعی از آنها قابل بیان است: $f = H(f_1, f_2, \cdots, f_r)$.*

اثبات. برای مشاهدهٔ اثبات به [۳۹] مراجعه کنید. □

با توجه به قضیهٔ فوق ρ_s در واقع برابر تعداد ناورداهای مستقل تابعی حداکثر تا مرتبهٔ s و متناظر به هم‌کنج موردنظر است. فرض کنیم

$$\mathcal{F}^{(s)} = \mathcal{F}^{(s)}(\omega) = \{T_\sigma \mid \operatorname{order}\sigma \leq s\}, \qquad s = 0, 1, 2, \cdots,$$

نمایشگر خانوادهٔ همهٔ توابعی باشد که ناوردای ساختاری حداکثر تا مرتبهٔ s هستند. داریم

$$\mathcal{F}^{(0)} \subset \mathcal{F}^{(1)} \subset \mathcal{F}^{(2)} \subset \cdots.$$

بنابراین به طور موضعی ρ_s ناوردای ساختاری مستقل تابعی $I_\nu = T_{\sigma_\nu}, \quad \nu = 1, \cdots, \rho_s$ را به گونه‌ای می‌توان انتخاب کرد که مجموعهٔ کاملی از ناورداهای ساختاری مرتبهٔ s ام $\mathcal{F}^{(s)}$ را تولید کنند و دارای این ویژگی باشند که هر ناوردای دیگری از مرتبهٔ کمتر یا مساوی با s تابعی از ناورداهای اصلی باشد:

$$T_\sigma = H_\sigma(I_1, \cdots, I_{\rho_s}), \qquad \operatorname{order}\sigma \leq s.$$

با این روش ناورداهای $I_1, \cdots, I_{\rho_s}$ مختصات موضعی روی منیفلد دسته‌بندی ρ_s بعدی را به گونه‌ای تجهیز می‌کنند که می‌تواند به صورت موضعی توسط زیرمجموعه‌ای باز از نمودار تابع $H^{(s)} = (\cdots, H_\sigma, \cdots)$ معین گردد. مؤلفه‌های H_σ که رابطهٔ تابعی بین ناورداهای ساختاری را بیان می‌کنند، توابع دسته‌بندی متناظر به هم‌کنج موردنظر هستند و نقش مهمی در مسألهٔ هم‌ارزی بازی می‌کنند.

۷.۴.۴ قضیه. *فرض کنیم ω و Ω هم‌کنج‌های هموار و کاملاً منظم باشند که به ترتیب بر منیفلدهای m–بعدی M و $\bar{M}$ تعریف شده‌اند. دیفیومورفیسم موضعی $\phi : M \longrightarrow \bar{M}$ که هم‌کنج‌های مذکور را به یکدیگر می‌نگارد، یعنی $\phi^*\Omega = \omega$، اگر و تنها اگر برای هر $s \geq 0$ منیفلدهای دسته‌بندی مرتبهٔ s ام آنها $\mathcal{C}^{(s)}(\omega)$ و $\mathcal{C}^{(s)}(\Omega)$ همپوشان باشند.*

اثبات. برای دیدن اثبات مرجع [۳۹] را مشاهده کنید. □

می‌گوییم **هم‌کنج از مرتبهٔ صفر** است هرگاه برای هر $s \geq ۰$ داشته باشیم $\rho_s = ۰$. هر دو هم‌کنج از مرتبهٔ صفر که توابع ساختاری ثابت و یکسان داشته باشند موضعاً هم‌ارزند.

۸.۴.۴ قضیه. *فرض کنیم ω هم‌کنج از مرتبهٔ صفر بر منیفلد m–بعدی M باشد که توابع ساختاری آن ثابت باشند: $T^i_{jk} = -C^i_{jk}$ $(۱ \leq i, j, k \leq m)$. فرض کنیم G نیز یک گروه لی m–بعدی با جبر لی $\mathfrak{g}$ با پایهٔ $\{\epsilon_۱, \cdots, \epsilon_m\}$ و دارای ثابت‌های ساختاری C^i_{jk} باشد و همچنین $\{\pi^۱, \cdots, \pi^m\}$ پایهٔ دوگان شامل فرم‌های موررـکارتان باشد. در این صورت دیفیومورفیسم $\phi : M \longrightarrow G$ وجود دارد که هم‌کنج داده شده را به هم‌کنج موررـکارتان روی G می‌نگارد، یعنی داریم*

$$\phi^* \pi^i = \omega^i, \qquad i = ۱, \cdots, m.$$

اثبات. برای اثبات قضیه [۳۹] را مشاهده کنید. □

حالت مشابهی از این قضیه در فصل قبل و تحت عنوان قضیهٔ موررـکارتان بیان گردید. در فصل آتی صورت دیگری از این قضیه را بیان و اثبات می‌کنیم.

از آنجایی که ناورداهای ساختاری از مرتبهٔ s، مؤلفه‌های $T^{(s+۱)}$ هستند. بنابراین رتبه‌ها نانزولی هستند: $\rho_s \leq \rho_{s+۱}$. با توجه به رابطهٔ $\rho_s \leq m$ پس رتبه‌ها کراندار هستند و در نتیجه رتبه‌ها از جایی به بعد ثابت خواهند بود.

۹.۴.۴ تعریف. فرض کنیم ω هم‌کنج کاملاً منظم باشد و ρ_s نمایانگر رتبهٔ نگاشت ساختاری مرتبهٔ s ام $T^{(s)}$ باشد. کوچکترین s ای که $\rho_s = \rho_{s+۱} = \cdots$ **مرتبهٔ هم‌کنج** نامیده می‌شود. داریم

$$۰ \leq \rho_۰ < \rho_۱ < \cdots < \rho_s = \rho_{s+۱} = \cdots = r \leq m,$$

r را **مرتبهٔ پایدارسازی** هم‌کنج می‌نامیم.

۱۰.۴.۴ قضیه. *فرض کنیم ω و Ω هم‌کنج‌های هموار و کاملاً منظم باشند که به ترتیب بر منیفلدهای m–بعدی M و $\bar{M}$ تعریف شده‌اند. دیفیومورفیسم موضعی $\phi : M \longrightarrow \bar{M}$ که هم‌کنج‌های مذکور را به یکدیگر می‌نگارد، یعنی $\phi^*\Omega = \omega$، اگر و فقط اگر مرتبهٔ یکسان داشته باشند $(\bar{s} = s)$ و منیفلدهای دسته‌بندی مرتبهٔ $(s + ۱)$ ام $\mathcal{C}^{(s+۱)}(\omega)$ و $\mathcal{C}^{(s+۱)}(\Omega)$ همپوشان باشند. بعلاوه، اگر $x_۰ \in M$ و $\bar{x}_۰ \in \bar{M}$ نقاطی باشند که به نقطهٔ مشترک*

$$z_۰ = \mathrm{T}^{(s+۱)}(x_۰) = \overline{\mathrm{T}}^{(s+۱)}(\bar{x}_۰) \in \mathcal{C}^{(s+۱)}(\theta) \cap \mathcal{C}^{(s+۱)}(\bar{\theta}) \tag{۵.۴}$$

بر اشتراک منیفلدهای دسته‌بندی، نگاشته شوند، آنگاه نگاشت هم‌ارزی موضعی Φ چنان یافت می‌شود که $x_۰$ را به $\bar{x}_۰ = \Phi(x_۰)$ بنگارد.

اثبات. ابتدا دستگاه دیفرانسیلی $\mathcal{I}$ را بر منیفلد $M \times \overline{M}$ از حاصلضرب کارتزین منیفلدهای M و $\overline{M}$ درنظر می‌گیریم که توسط ۱ــفرمی‌های $\Theta^i = \bar{\theta}^i - \theta^i, \ (۱ \leq i \leq m)$ تولید می‌گردد. $\mathcal{I}$ لزوماً پیچشی نیست، چراکه ناورداهای ساختاری

را هنوز برای آن نیافته‌ایم. با این حال هر نگاشت هم‌ارزی $\bar{x} = \Phi(x)$ لزوماً باید در دستگاه زیر از معادلات ناوردا صادق باشد

$$F_\sigma(x,\bar{x}) \equiv \overline{T}_\sigma(\bar{x}) - T_\sigma(x) = ۰, \qquad \operatorname{order}\sigma \leq s+۱, \tag{۶.۴}$$

که با نیاز به نگاشته شدن x و $\bar{x}$ به نقطهٔ یکسانی (مطابق (۵.۴)) از منیفلد دسته‌بندی مرتبهٔ $(s+۱)$ ام، یکی است. بنابراین نمودار Φ زیرمجموعه‌ای از واریتهٔ زیر خواهد بود

$$\mathcal{S} = \left\{(x,\bar{x}) \;\middle|\; \overline{\mathrm{T}}^{(s+۱)}(\bar{x}) = \mathrm{T}^{(s+۱)}(x)\right\} \subset M \times \overline{M},$$

که $\mathcal{S}$ از صفرهای مشترک توابع $F_\sigma(x,\bar{x})$ برای $\operatorname{order}\sigma \leq s+۱$ تشکیل شده است. بنابراین اول $\mathcal{I}$ را به $\mathcal{S}$ تحدید می‌کنیم و سپس پیچشی بودن را ثابت می‌کنیم.

حال نخست نشان می‌دهیم که $\mathcal{S}$ زیرمنیفلدی از $M\times\overline{M}$ است. این کار به اندکی مهارت نیاز دارد زیرا توابع $F_\sigma(x,\bar{x})$ تقریباً هیچگاه خانواده‌ای منظم را تشکیل نمی‌دهند و لذا قضیه نگاشت ضمنی قابل استفاده نیست. برای آنکه علت را بفهمیم، فرض می‌کنیم که x و $\bar{x}$ متغیرهایی اسکالر باشند. در این صورت توابع $x-\bar{x}$ و $x^۲-\bar{x}^۲$ حاصل از توابع مستقل تابعی $x,x^۲$ و $\bar{x},\bar{x}^۲$، یک سیستم منظم تشکیل نمی‌دهند زیرا ماتریس ژاکوبین آنها بر واریتهٔ متناظر $\mathcal{S}=\{\bar{x}=x\}$ دارای رتبهٔ ۱ است، در حالی که در باقی نقاط از رتبهٔ ۲ است. با این وجود، تابع اول $x-\bar{x}$ خود منظم است و در نتیجه واریتهٔ آن، که باز همان $\mathcal{S}$ است، یک زیرمنیفلد خواهد بود. در حالت کلی، روش مشابهی را با ملاحظاتی پیش می‌گیریم.

فرض کنیم $M \ni x_۰$ و $\overline{M} \ni \bar{x}_۰$ نقاطی باشند که به نقطهٔ مشترک $z_۰$ (مطابق (۵.۴)) در بخش همپوشانی منیفلدهای دسته‌بندی نگاشته شده باشند. از آنجایی که $\mathcal{C}^{(s)}$ زیرمنیفلدی $r-$بعدی از فضای اقلیدسی $\mathbb{K}^{(s)}$ است، می‌توانیم r تا از توابع مختصاتی موضعی $z_{\sigma_۱},\cdots,z_{\sigma_r},\ \operatorname{order}_j\sigma \leq s$ را انتخاب کنیم که در همسایگی‌ای از $z_۰$، $dz_{\sigma_۱}\wedge\cdots\wedge dz_{\sigma_r}|_{\mathcal{C}^{(s)}} \neq ۰$. این باعث می‌شود که z_{σ_k} ها یک مختصات موضعی بر $\mathcal{C}^{(s)}$ ایجاد کنند که این معادل با مستقل تابعی بودن ناورداهای $T_{\sigma_۱}(x),\cdots,T_{\sigma_r}(x)$ در همسایگی‌ای از $x_۰ \in M$ است.

علاوه بر این چون $\mathcal{C}^{(s+۱)}$ نیز $r-$بعدی است و به $\mathcal{C}^{(s)}$ قابل تصویر شدن است، پس توابع مختصاتی یکسان، همچنان با تحدید شدن به $\mathcal{C}^{(s+۱)}$ مستقل باقی می‌مانند. همچنین ناورداهای متناظر $\bar{T}_{\sigma_۱}(x),\cdots,\bar{T}_{\sigma_r}(x)$ نیز در همسایگی‌ای از $\bar{x}_۰ \in \overline{M}$ مستقل تابعی هستند زیرا منیفلد دسته‌بندی یکسانی را پارامتره می‌کنند. این باعث می‌گردد که تفاضل‌های $F_{\sigma_k}(x,\bar{x}),\ k=۱,\cdots r$ در همسایگی‌ای از $(x_۰,\bar{x}_۰)$ مستقل تابعی باشند و در نتیجه خانوادهٔ منظمی را در آن همسایگی تشکیل دهند. بنابراین با استفاده از قضیهٔ نگاشت ضمنی، واریتهٔ $\tilde{\mathcal{S}}=\{(x,\bar{x}) \mid F_{\sigma_k}(x,\bar{x})=۰,\ k=۱,\cdots r\}$ زیرمنیفلد $(۲m-r)-$بعدی از $M\times\overline{M}$ در نزدیکی $(x_۰,\bar{x}_۰)$ تشکیل می‌دهد. $\tilde{\mathcal{S}}$ در این همسایگی با $\mathcal{S}$ مطابقت دارد و بنابراین نشان داده‌ایم که $\mathcal{S}$ نیز زیرمنیفلد $(۲m-r)-$بعدی از $M\times\overline{M}$ است.

حال باید نشان دهیم که تحدید $\mathcal{I}|_{\mathcal{S}}$ از دستگاه دیفرانسیل $\mathcal{I}$ در مفروضات قضیهٔ فروبنیوس (قضیهٔ ۱.۲.۳) صدق می‌کند. اول باید رتبهٔ این دستگاه تحدید شده را بیابیم و ثابت کنیم که ثابت است. مطابق محاسبهٔ فوق، رتبهٔ دیفرانسیل‌های dF_{σ_k} از توابع مختصاتی موضعی بر $\mathcal{S}$ برابر صفر خواهند بود. برای هر $\sigma=\sigma_k$ تعریف می‌کنیم

$$dF_{\sigma_k} = d\overline{T}_\sigma - dT_\sigma \quad = \quad \sum_{j=۱}^{m}\left[\left\{\frac{\partial\overline{T}_\sigma}{\partial\bar{\theta}^j}\,\bar{\theta}^j\right\} - \frac{\partial T_\sigma}{\partial\theta^j}\,\theta^j\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} [\{\overline{T}_{\sigma,j} - T_{\sigma,j}\}\,\bar{\theta}^j + T_{\sigma,j}\,\{\bar{\theta}^j - \theta^j\}].$$

چون $\operatorname{order}\sigma \leq s$، تفاضل $\overline{T}_{\sigma,j} - T_{\sigma,j} = F_{\sigma,j}$ با توجه به (۶.۴) برابر صفر است. بنابراین هر یک از دیفرانسیل‌های $dF_\sigma = \sum_j T_{\sigma,j}\,\Theta^j$ ترکیب خطی ۱–فرمی‌های تعریف شده در دستگاه دیفرانسیلی $\mathcal{I}$ می‌باشد. استقلال خطی dF_{σ_k} ها موجب می‌شود که در هر نقطه از $\mathcal{S}$، دقیقاً $m-r$، ۱–فرم تحدید شدهٔ $\Theta^j|_{\mathcal{S}}$ مستقل خطی باقی بماند و لذا رتبهٔ $\mathcal{I}|_{\mathcal{S}}$ در هر نقطه از $\mathcal{S}$ برابر $m-r$ است.

دوم نشان می‌دهیم که $\mathcal{I}|_{\mathcal{S}}$ پیچشی است و این نیازمند محاسبهٔ دیفرانسیل‌های ۱–فرمی‌های مولد است:

$$\begin{aligned} d\Theta^i = d\overline{\theta}^i - d\theta^i &= \sum_{j<k} [\overline{T}^i_{jk}\,\bar{\theta}^j \wedge \bar{\theta}^k - T^i_{jk}\,\theta^j \wedge \theta^k] \\ &= \sum_{j<k} [\{\overline{T}^i_{jk} - T^i_{jk}\}\,\bar{\theta}^j \wedge \bar{\theta}^k + T^i_{jk}\,\{\Theta^j \wedge \bar{\theta}^k + \theta^j \wedge \Theta^k\}]. \end{aligned}$$

بر زیرمنیفلد $\mathcal{S}$، مجموعهٔ اول از جمعوندها صفر است زیرا $T^i_{j,k}$ ها در بین مجموعهٔ کامل از ناورداهای ساختاری T_σ قرار دارند. پس $d\Theta^i|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{I}|_{\mathcal{S}}$ که پیچشی بودن را ثابت می‌نماید. حال قضیهٔ فروبنیوس وجود زیرمنیفلد انتگرال m–بعدی منحصربفرد $N \subset \mathcal{S} \subset M \times \overline{M}$ گذرا از $(x,\bar{x}) \in \mathcal{S}$ را تضمین می‌کند. تراگذر بودن N نیز با استفاده از اثبات قضیهٔ ۱۸.۱۴ از [۳۹] بدست می‌آید. □

۱۱.۴.۴ نتیجه. *از آنجایی که در حالت منظم، مرتبهٔ هم‌کنج به صورت اکید کمتر از بعد M است، استفادهٔ مکرر از قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که هم‌کنج‌های کاملاً منظم ω و Ω هم‌ارز هستند اگر و تنها اگر منیفلدهای دسته‌بندی مرتبهٔ mام $\mathcal{C}^{(m)}(\omega)$ و $\mathcal{C}^{(m)}(\Omega)$ همپوشان باشند.*

فصل ۵

فرمول‌بندی مساله هم‌ارزی

۱.۵ فرمول‌بندی

بر اساس دستاوردهای کارتان، برای بررسی شرایط هم‌ارزی باید دو شئ (مثلاً از معادلات دیفرانسیل، چندجمله‌ای‌ها، مسائل تغییراتی، عملگرهای دیفرانسیلی و غیره) بر حسب فرم‌های دیفرانسیلی و یا در حالت کلی‌تر برحسب ۱− فرمی‌ها بیان گردند. می‌دانیم هم‌ارزی (موضعی) دو ۱−فرمی ω و Ω تعریف شده بر منیفلدهای m−بعدی به ترتیب M و $\bar{M}$ بدین معنی است که دیفیومورفیسم $\phi : M \longrightarrow \bar{M}$ باشد که $\phi^*\Omega = \omega$. تعریف برای ۲−فرمی‌های هم‌ارز به طریق مشابه صورت می‌پذیرد. برای برگرداندن حالت ۲−فرمی به مسألهٔ هم‌ارزی کارتان باید آن را بر حسب ۱−فرمی‌ها بیان کنیم. چون رتبهٔ فرم تحت دیفیوموفیسم ثابت می‌ماند، بنابراین ۲−فرمی‌های هم‌ارز دارای رتبهٔ یکسان هستند. فرض کنیم هر ۲−فرمی (در هر نقطه) دارای رتبهٔ ثابت r باشد، پس هر ۲−فرمی (در هر نقطه) به صورت زیر است (بنابر قضیهٔ داربو [۲۰])

$$\omega = \sum_{j=1}^{r} \theta^j \wedge \theta^{j+r}, \qquad \Omega = \sum_{j=1}^{r} \Theta^j \wedge \Theta^{j+r},$$

وقتی که $\{\theta^1 \cdots, \theta^{2r}\}$ ۱−فرمی‌های مستقل موضعی بر M و $\{\Theta^1 \cdots, \Theta^{2r}\}$ ۱−فرمی‌های نظیر بر $\bar{M}$ هستند. یک تبدیل خطی صورت‌های کانونی فوق را حفظ می‌کند وقتی و فقط وقتی که به گروه همتافته $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{R})$ متعلق باشد. بنابراین ۲−فرمی‌های موردنظر (تحت نگاشت ϕ) هم‌ارز هستند وقتی و فقط وقتی که مجموعه‌های متناظر از ۱−فرمی‌ها در رابطهٔ تبدیلی زیر صادق باشند

$$\phi^*\Theta^i = \sum_{j=1}^{2r} g^i_j(x)\, \theta^j, \qquad i = 1, \cdots, 2r,$$

که در آن $g(x) = (g^i_j(x))$ ماتریسی از توابع بر M است که مقادیرش در $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{R})$ است. مثلاً در مورد هم‌ارزی مترهای ریمانی دیدیم که ماتریس مذکور مقادیرش عضوی از گروه متعامد $\mathrm{O}(m, \mathbb{R})$ بود.

فرض کنیم هم‌کنج‌های $\{\omega^1, \cdots, \omega^m\}$ و $\{\bar{\omega}^1, \cdots, \bar{\omega}^m\}$ را به ترتیب بر منیفلدهای M و $\bar{M}$ داشته باشیم. این

هم‌کنج‌ها را به صورت بردارهای ستونی $\omega = (\omega^1, \cdots, \omega^m)^t$ و $\bar\omega = (\bar\omega^1, \cdots, \bar\omega^m)^t$ درنظر می‌گیریم. $\phi^*\bar\omega^i$ لزوماً برابر ω^i نیست. در واقع چون ϕ^* خطی است، ضرایب مذکور موجب ایجاد ماتریسی به فرم $G \subset \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ می‌گردند.

۱.۱.۵ تعریف. فرض کنیم $G \subset \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ گروه لی باشد و ω و $\bar\omega$ هم‌کنج‌های تعریف شده به ترتیب بر منیفلدهای m−بعدی M و $\bar M$ باشند. مسألهٔ هم‌ارزی G−مقداری برای این هم‌کنج‌ها به وجود یا عدم وجود دیفیومورفیسم (موضعی) $\phi : M \longrightarrow \bar M$ و تابع G−مقداری $g : M \longrightarrow G$ با خاصیت زیر می‌پردازد:

$$\phi^*\bar\omega = g(x)\,\omega.$$

در حالت خاص که $G = \{e\}$ مسأله به حالت $\phi^*\bar\omega^i = \omega^i$ برمی‌گردد که درفصل قبل به آن پرداختیم.

۲.۵ نرمال‌سازی

زمانی که مسألهٔ هم‌ارزیِ بر حسب هم‌کنج ω و گروه ساختاری G فرمول‌بندی گردید، می‌توان از الگوریتم هم‌ارزی کارتان استفاده کرد. نخستین گام این است که شرایط هم‌ارزی اصلی را به گونه‌ای اصلاح نماییم که دو مجموعه از متغیرها به صورتی متقارن بیان گردند. از دیدگاه خواص گروه، $\phi^*\bar\omega = g(x)\,\omega$ برقرار است اگر و تنها اگر بتوان توابع G−مقداری $g(x)$ و $\bar g(x)$ را چنان یافت که (با حذف نماد پول−بک) داشته باشیم $\bar g(\bar x)\,\bar\omega = g(x)\,\omega$. در واقع $g(x)$ در رابطهٔ اول با $\bar g(\bar x)^{-1}\,g(x)$ جایگزین شده است. هدف در اینجا کاهش مسألهٔ G−هم‌ارزی به یک مسألهٔ هم‌ارزی استاندارد بر حسب هم‌کنج‌هاست و روش حل به این صورت است که عناصر ماتریس $g = g(x)$ و $\bar g = \bar g(\bar x)$ را به عنوان تابعی از مختصات نظیر به آنها بیان کنیم. البته این کار بایستی تحت عملی ناوردا صورت پذیرد و به گونه‌ای باشد که با شرط هم‌ارزی $\bar g(\bar x) = g(x)$ سازگار باشد. بنابراین هم‌کنج‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\bar\theta = \bar g(\bar x)\,\bar\omega, \qquad \theta = g(x)\,\omega.$$

این هم‌کنج‌ها به وضوح ناوردا هستند: $\phi^*\bar\theta = \theta$. بنابراین مسألهٔ هم‌ارزی به هم‌ارزی هم‌کنج‌ها تقلیل می‌یابد.

حال مشکل اصلی یافتن $g(x)$ و $\bar g(\bar x)$ است. کلید حل این مشکل یافتن ترکیب‌هایی از پارامترهای گروه، g^i_j ها، و احتمالاً x^kها است که تحت تبدیل مختصات بدون تغییر باقی می‌مانند؛ به این مفهوم که نسبت به مختصات تبدیل یافتهٔ $\bar g^i_j$ و $\bar x^k$ در یک رابطه صادق باشند. هر یک از این ترکیب‌ها ما را قادر می‌سازند که یکی از پارامترها را نرمال نموده و به این ترتیب بعد گروه ساختاری یک واحد کاهش یابد. اگر بتوانیم به تعداد کافی ترکیبات ناوردا پیدا کنیم، می‌توانیم همهٔ پارمترهای گروه را خذف نموده و G را به $\tilde G = \{e\}$ کاهش داده و مسألهٔ هم‌ارزی را به مسألهٔ هم‌کنج‌ها کاهش دهیم.

فرض کنیم مسألهٔ هم‌ارزی G−مقداری را برای هم‌کنج‌های ω بر M و $\bar\omega$ بر $\bar M$ درنظر بگیریم. همچنین فرض کنیم $H(g, \omega)$ ترکیبی ناوردا باشد که در شرط $H(\bar g(\bar x), \bar\omega|_{\bar x}) = H(g(x), \omega|_x)$ که $\bar x = \phi(x)$ صدق نماید. اگر N برد H باشد، برای نگاشت هم‌ارز ثابت ϕ، شرایط هم‌ارزی $\bar g(\bar x)\,\bar\omega = g(x)\,\omega$ تحت عمل گروه منحصربفرد هستند. به عبارت دیگر اگر داشته باشیم $g_1(x) = \bar g_1(\phi(x)) = \bar g_1(\bar x)$ که تابعی G−مقداری است، آنگاه داریم

$$\bar g_1(\bar x)\,\bar g(\bar x)\,\bar\omega = g_1(x)\,g(x)\,\bar\omega. \qquad (۱.۵)$$

ناوردای H ایجاب می‌کند که $H(\bar{g}_1, \bar{g}, \bar{\omega}) = H(g_1, g, \omega)$. از آنجایی که رابطهٔ اخیر برای هر تابع $\bar{g}_1(\bar{x}) = g_1(x)$ برقرار است، نتیجه می‌گیریم عمل راست G بر خودش سطوح تراز H را حفظ می‌کند، یعنی برای هر $g_1 \in G$ داریم $H(\bar{g}\, g_1, \bar{\omega}) = H(g\, g_1, \omega)$. بنابراین عملی کلی از G بر بُرد H با ضابطهٔ $z \mapsto z\dot{h}$ (برای هر $z \in N$ و $h \in G$) بدست می‌آید که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$H(g, \omega) \cdot g_1 = H(g\, g_1, \omega), \qquad g_1 \in G,$$

و در حالت خاص $H(g, \omega) = H(e, \omega) \cdot g$. بنابراین رابطهٔ (۱۶.۵) ایجاب می‌کند که اگر ω و $\bar{\omega}$ تحت $\bar{x} = \phi(x)$ هم‌کنج‌هایی هم‌ارز باشند، آنگاه نقاط $H(e, \omega|_x)$ و $H(e, \bar{\omega}|_{\bar{x}})$ در یک مدار G از N قرار بگیرند.

۱.۲.۵ تعریف. تابع ناوردای $H(g, \omega)$ یک **نرمال‌سازی از نوع ثابت** از هم‌کنج ω نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in M$ مقادیر $H(e, \omega|_x)$ در یک مدار $\mathcal{O}_\omega \subset N$ قرار گیرند که $\mathcal{O}_\omega$ مدار ایجاد شده توسط عمل G بر بُرد H است.

۲.۲.۵ گزاره. ([۳۹]) *فرض کنیم ω و $\bar{\omega}$ دو هم‌کنج از نوع ثابت برای تابع ناوردای $H(g, \omega)$ باشند. اگر ω و $\bar{\omega}$ هم‌ارز باشند آنگاه مدارهای متناظر آنها در N لزوماً برابرند: $\mathcal{O}_{\bar{\omega}} = \mathcal{O}_\omega$. بعلاوه با ثابت نگاه داشتن z در این مدار یکسان، فرض کنیم که $\tilde{G} = G_z \subset G$ زیرگروه ایزوتروپی متناظر باشد. توابع G–مقداری هموار $g_0(x)$ و $\bar{g}_0(\bar{x})$ را به گونه‌ای می‌سازیم که داشته باشیم $H(\bar{g}_0, \bar{\omega}) = z = H(g_0, \omega)$ و از آن برای تعریف هم‌کنج اصلاحی $\varpi = g_0 \omega$ و $\bar{\varpi} = \bar{g}_0 \bar{\omega}$ استفاده می‌کنیم. پارامترهای گروه g و $\bar{g}$ معین هستند اگر و تنها اگر هم‌کنج‌های اصلاحی هم‌ارز باشند: $\bar{h}(\bar{x})\, \bar{\varpi} = h(x)\, \varpi$ که $\bar{x} = \phi(x)$ و پارامترهای گروه کاهش یافتهٔ $\tilde{G}$ برای $h, \bar{h} \in \tilde{G}$ معین شده‌اند.*

از مفاهیم این بخش در فرآیند جذب و کاهش گروه ساختاری استفاده خواهیم کرد به گونه‌ای که به طرز مناسب با شرایط مسأله صورت پذیرند و منتج به یافتن تمامی ناورداهای عمل گروه گردند. در ضمن یکی از اهداف مهم نرمال‌سازی، یافتن هم‌کنج ناوردا در مسائلی است که فوق معین باشند.

۳.۵ ترفیع مسألهٔ هم‌ارزی به G–فضاها

فرض کنید هم‌کنج‌های $\omega_U = \{\omega_U^1, \cdots, \omega_U^n\}$ و $\Omega_V = \{\Omega_V^1, \cdots, \Omega_V^n\}$ را به ترتیب روی مجموعه‌های باز U و V داشته باشیم و $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ یک گروه خطی همبند باشد. می‌خواهیم وجود دیفیومورفیسم‌های $\Phi : U \longrightarrow V$ را که در شرط $\Phi^* \Omega_V = \gamma_{VU}\, \omega_U$ صدق می‌کنند را بررسی کنیم. همان گونه که قبلاً ذکر گردید ایدهٔ نخست عبارت است از ساختن عمل گروه مناسب برای این سؤال (یعنی یافتن دیفیومورفیسم‌ها) که این با **ترفیع** مسأله به فضاهای مرتبط با آن یعنی $U \times G$ و $V \times G$ صورت می‌گیرد که با عمل چپ طبیعی به صورت زیر این ارتباط برقرار می‌گردد:

$$C \cdot (\rho, S) = (\rho, C \cdot S),$$

که در آن $C, S \in G$ و $\rho \in U$ یا $\rho \in V$. در حالت کلی، یک فضا که G بر آن از چپ عمل می‌کند را G–**فضا** می‌نامیم. فرض کنیم نگاشت‌های طبیعی تصویر زیر را داشته باشیم

$$\pi_U : U \times G \longrightarrow U, \qquad \Pi_V : V \times G \longrightarrow V,$$

و بردارهای ستونی جدیدی از ۱–فرمی‌های روی $V \times G$ و $U \times G$ را درنظر بگیریم که به صورت زیر تعریف شده باشند

$$\omega|_{(U,S)} = S(\pi_U^* \, \omega_U), \qquad \Omega|_{(V,T)} = T(\Pi_V^* \, \Omega_V).$$

گزارهٔ زیر اهمیت ترفیع را نمایان می‌سازد:

۱.۳.۵ گزاره. *دیفیومورفیسم* $\phi : U \longrightarrow V$ *صادق در رابطهٔ* $\Phi^* \, \Omega_V = \gamma_{VU} \, \omega_U$ *برای* $\gamma_{UV} : U \longrightarrow G$ *وجود دارد اگر و تنها اگر دیفیومورفیسم* $\Phi^۱ : U \times G \longrightarrow V \times G$ *موجود باشد که*

$$\Phi^{۱^*} \Omega = \omega. \tag{۲.۵}$$

اثبات. فرض کنیم $\Phi^۱ : U \times G \longrightarrow V \times G$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$\Phi^۱(u, S) = (\phi(u, S), T(u, S))$$

که در آن $\Phi(u, S) \in V$ و $T(u, S) \in G$. شرط $\Phi^{۱^*} \Omega = \omega$ به این معنی است که

$$\Phi^{۱^*} \, T \, \phi_V^* \, \Omega_V = S \, \pi_U^* \, \omega_U$$

و یا اینکه

$$(\pi_V \circ \Phi^۱)^* \, \Omega_V = (T \circ \Phi^۱)^{-۱} \, S \, \pi_U^* \, \omega_U$$

یا

$$\Phi^* \, \Omega_V = T(u, S)^{-۱} \, S \, \pi_U^* \, \omega_U.$$

حال چون Ω_V پایه‌ای برای فرم‌های روی V و ω_U پایه‌ای برای فرم‌های روی U تشکیل می‌دهند، بنابراین مشتق‌های جزیی Φ نسبت به متغیرهای گروه صفر است و با فرض همبند بودن گروه باشد داریم $\Phi(u, S) = \Phi(u)$. در حالت خاص از آن نتیجه می‌شود

$$T(u, S)^{-۱} \, S = \gamma_{VU}(u),$$

که هم‌ارزی را کامل می‌کند. از رابطهٔ اخیر داریم

$$T(u, S) = S \, \gamma_{VU}^{-۱}(u),$$

و لذا نگاشت $\Phi^{۱}$ به صورت زیر خواهد بود

$$\Phi^{۱}(u,S)=(\Phi(u),S\,\gamma_{VU}^{-۱}(u)).$$

در نتیجه برای رابطهٔ هم‌ارزی داده شدهٔ $\Phi:U\longrightarrow V$، با تعریف $\Phi^{۱}$ به شکل بدست آمده، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\Phi^{۱*}\Omega|_{(\Phi(u),S\,\gamma_{VU}^{-۱})} &= S\,\gamma_{VU}^{-۱}\,\Phi^{*}\,\Omega_V\\ &= S\,\gamma_{VU}^{-۱}\gamma_{VU}\,\omega_U=S\,\omega_U=\omega.\end{aligned}$$

حال با توجه به نمایش ضمنی دیفیومورفیسم $\Phi^{۱}$ داریم

$$\pi_V\circ\Phi^{۱}=\Phi\circ\pi_U,\qquad\qquad \Phi^{۱}(u,C\,S)=C\,\Phi^{۱}(u,S),$$

و لذا نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌گردد. □

۲.۳.۵ مثال. در مثال هندسهٔ ریمانی ذکر شده در فوق، این روش، ترفیع به فضای $U\times \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ را پیشنهاد می‌کند. ساختار ترفیع‌ها و γ_{UV} ها اجزای تشکیل دهندهٔ کلاف کنج‌های متعامد هستند (که محیط طبیعی رفتار این نوع از هندسه است). در عمل اغلب مسائل به صورت فوق معین هستند ولی در برخی موارد در نقطهٔ مقابل آن، شرایط مسأله روی دیفیومورفیسم‌ها، همهٔ هم‌کنج‌ها را شامل نمی‌شود و مسأله پایین معین است. البته می‌توان این گونه مسائل را به حالت معین تبدیل نمود.

△

۳.۳.۵ مثال. (ناورداهای معادلات فاف) در این حالت کلاس همهٔ دیفیومورفیسم‌ها مجموعهٔ کامل تقارن‌های درونی است. بنابراین برای دو معادلهٔ فاف داده شده به صورت

$$\Omega_V^{۱}=\circ \qquad \text{روی یک همسایگی } V$$

$$\omega_U^{۱}=\circ \qquad \text{روی یک همسایگی } U$$

کار می‌کنیم. به دلخواه $\Omega^{۱}$ و $\omega^{۱}$ را به دو هم‌کنج گسترش می‌دهیم. فرض کنیم هم‌کنج‌های مذکور به صورت $\{\Omega_V^i\}$ و $\{\omega_U^i\}$ باشند و نیز ϕ دیفیومورفیسم حافظ معادلات فوق باشد. در واقع $\phi^*\Omega_V^{۱}=w\,\omega_U^{۱}$ را (برای w ثابت) به شرط زیر گسترش می‌دهیم:

$$\phi^*\begin{pmatrix}\Omega_V^{۱}\\ \Omega_V^{۲}\\ \vdots\\ \Omega_V^{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w & \circ & \cdots & \circ\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_U^{۱}\\ \omega_U^{۲}\\ \vdots\\ \omega_U^{n}\end{pmatrix}.$$

بنابراین در این حالت گروه به صورت $G=\begin{pmatrix} w & \circ\\ * & **\end{pmatrix}$ می‌باشد. △

۴.۵ فرم و معادلات مورر—کارتان

۱.۴.۵ تعریف. ۱—فرم μ بر G را در صورتی فرم مورر— کارتان ناوردای راست گوئیم که

$$(R_g)^*\mu = \mu \qquad \text{به ازای هر } g \in G \text{ ای} \tag{۳.۵}$$

که در آن R_g انتقال راست به اندازهٔ g است.

از طرف دیگر، فرض کنیم $\{v_۱, v_۲, \cdots, v_r\}$ پایه‌ای برای جبر لی $\mathfrak{g}$ از G باشد. در این صورت هر v_i یک میدان برداری ناوردای راست بر گروه لی G می‌باشد، یعنی $dg(v_i|_x) = v_i|_{g.x}$ برای هر $x, g \in G$ که عمل راست $g \cdot x$ تعریف شده باشد (به طریق مشابه ناوردای چپ است بر حسب عمل چپ گروه قابل تعریف است) [۳۹]. در هر نقطهٔ $g \in G$ بردارهای مماس $v_۱|_g, v_۲|_g, \cdots, v_r|_g$ مستقل خطی هستند و بنابراین $\{v_۱, v_۲, \cdots, v_r\}$ یک کنج ناوردای راست بر G تشکیل می‌دهند. دوگان این پایه، پایه‌ای به صورت $\{\alpha^۱, \alpha^۲, \cdots, \alpha^r\}$ از عناصر فضای $\mathfrak{g}^*$ است که این عناصر که پایه‌ای از $\mathfrak{g}^*$ را تشکیل می‌دهند، همان فرم‌های مورر—کارتان ناوردای راست بر G هستند. $\{\alpha^۱, \alpha^۲, \cdots, \alpha^r\}$ را نیز **هم‌کنج مورر—کارتان** بر G می‌نامند. هم‌کنج مورر—کارتان به انتخاب پایهٔ $v_i = \dfrac{\partial}{\partial \alpha^i}$ برای $\mathfrak{g}$ وابسته است. وجود کنجی برای جبر لی و هم‌کنج مورر—کارتان موجب می‌شوند که کلاف مماس و کتانژانت یک گروه لی به صورت توپولوژیک بدیهی باشند، یعنی $TG \simeq G \times \mathfrak{g}$ و $T^*G \simeq G \times \mathfrak{g}^*$. از آن جایی که هم‌کنج مورر—کارتان نقش اساسی در محاسبهٔ ناورداها دارند، شناختن این هم‌کنج‌ها حائز اهمیت خاصی است.

روش مرسوم در تعیین فرم‌های مورر—کارتان بر یک گروه لی مفروض، بیان G به صورت یک گروه لی ماتریسی است، یعنی به شکل $G \subseteq \mathrm{GL}(n)$. در این صورت درایه‌های مستقل ماتریس $n \times n$

$$\mu = dA \cdot A^{-۱} \tag{۴.۵}$$

(که درایه‌های آن ۱—فرم می باشند)، که پایه‌ای برای فضای فرم‌های مورر—کارتان ناوردای راست بر G تشکیل می‌دهند. در اینجا $A = A(g^۱, \cdots, g^r) \in G$ بیانگر یک عنصر ماتریسی دلخواه در G بوده، که به کمک مختصات موضعی $(g^۱, \cdots, g^r)$ در همسایگی عنصر همانی گروه، پارامتره شده است و $dA = \sum (\partial A / \partial g^i)\, dg^i$ که ماتریسی از ۱—فرم‌هاست، دیفرانسیل آن می‌باشد.

۲.۴.۵ مثال. اگر $G = \mathrm{E}(۲, \mathbb{R}) = \mathrm{O}(۲, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^۲$ گروه اقلیدسی در صفحه باشد، آنگاه چنانچه هر عضو دلخواه مانند $(R, \boldsymbol{a}) \in \mathrm{E}(۲, \mathbb{R})$ را با ماتریس ۳×۳

$$\begin{pmatrix} R & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{o} & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & a \\ \sin\varphi & \cos\varphi & b \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

یکی بگیریم، $\mathrm{E}(۲, \mathbb{R})$ را به صورت زیر گروهی از $\mathrm{GL}(۳, \mathbb{R})$ می‌توان تصور نمود. با قرار دادن در (۴.۵) نتیجه می‌گیریم

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} dR & d\boldsymbol{a} \\ \mathbf{o} & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{-۱} & -R^{-۱}\boldsymbol{a} \\ \mathbf{o} & ۱ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \circ & -d\varphi & \cos\varphi\, da + \sin\varphi\, db \\ d\varphi & \circ & -\sin\varphi\, da + \cos\varphi\, db \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

بنابراین، سه فرم مورر—کارتان اقلیدسی مستقل عبارتند از

$$\begin{aligned} \mu_۱ &= d\varphi \\ \mu_۲ &= \cos\varphi\, da + \sin\varphi\, db \\ \mu_۳ &= -\sin\varphi\, da + \cos\varphi\, db \end{aligned} \tag{۵.۵}$$

$\triangle$

در حالتی که گروه به صورت یک گروه موضعی از تبدیلات بر منیفلد مفروض M بیان می‌گردد، و لزوماً به شکل یک گروه لی ماتریسی نباشد، داشتن روشی مستقیم برای تعیین فرمهای مورر—کارتان می تواند مفید باشد. اگر $g \in G$ و $z \in M$، تبدیل گروهی $\bar{z} = g \cdot z$ را به شکل صریح بر حسب مختصات به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\bar{z}^i = H^i(z, g) \qquad\qquad i = ۱, \cdots, m$$

سپس با دیفرانسیل‌گیری خواهیم داشت:

$$d\bar{z} = \sum_{k=۱}^{m} \frac{\partial H^i}{\partial z^k}\, dz^k + \sum_{j=۱}^{r} \frac{\partial H^i}{\partial g^j}\, dg^j \qquad\qquad i = ۱, \cdots, m$$

که به شکل خلاصه شدهٔ آن، داریم

$$d\bar{z} = dz\, H_z + dg\, H_g \tag{۶.۵}$$

سپس، با فرض $d\bar{z} = \circ$ در (۶.۵)، دستگاه معادلات خطی حاصل را بر حسب دیفرانسیل‌های dz^k حل می‌نماییم. این کار فرمول

$$-dz = F\, dg = dg\, (H_g \cdot H_z^{-۱})$$

را نتیجه می‌دهد و یا داریم

$$-dz^k = \sum_{j=۱}^{r} F_j^k(z, g)\, dg^j \qquad\qquad k = ۱, \cdots, m. \tag{۷.۵}$$

در این صورت، به ازای هر $z_\circ \in M$ ثابت و هر $k = ۱, \cdots, m$ ای، ۱—فرم

$$\mu_\circ = \sum_{j=۱}^{r} F_j^k(z_\circ, g)\, dg^j \tag{۸.۵}$$

یک فرم مورر—کارتان ناوردای راست بر G خواهد بود. درنتیجه، چنانچه سمت راست (۷.۵) را به شکل سری توانی از z (و یا سری فوریهٔ از آن و یا ...) مانند زیر بسط دهیم،

$$\sum_{j=۱}^{r} F_j^k(z, g)\, dg^j = \sum_{i=\circ}^{\infty} z^i \mu_i \tag{۹.۵}$$

آنگاه هر یک از ضرایب μ_i این بسط یک ۱–فرم مورر–کارتان ناوردای راست بر G می باشد. به ویژه، وقتی G به طور موضعاً مؤثر عمل کند، گردایهٔ ۱–فرم‌های مورر–کارتان را تولید می‌کنند [۴۰، ۴۱].

۳.۴.۵ مثال. عمل $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ بر $\mathbb{R}^2$ به صورت

$$\bar{x} = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad , \qquad \bar{u} = \frac{u}{\gamma x + \delta} \tag{۱۰.۵}$$

را در نظر بگیرید. با دیفرانسیل‌گیری از (۱۰.۵) عبارت

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= \frac{(\gamma x + \delta)(\alpha\, dx + x\, d\alpha + d\beta) - (\alpha x + \beta)(\gamma\, dx + x\, d\gamma + d\delta)}{(\gamma x + \delta)^2} \\ &= \frac{(\gamma\delta - \beta\gamma)\, dx + (\gamma x + \delta)(x\, d\alpha + d\beta) - (\alpha x + \beta)(x\, d\gamma + d\delta)}{(\gamma x + \delta)^2} \\ d\bar{u} &= \frac{(\gamma x + \delta)\, du - u(\gamma\, dx + x\, d\gamma + d\delta)}{(\gamma x + \delta)^2} \end{aligned}$$

را نظیر (۶.۵) بدست می‌آوریم. با فرض $d\bar{x} = 0 = d\bar{u}$ و حل این معادلات بر حسب dx و du، داریم

$$\begin{aligned} -dx &= \frac{\gamma\, d\beta - \beta\, d\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} + \left(\frac{\delta\, d\alpha + \gamma\, d\beta - \alpha\, d\delta - \beta\, d\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}\right) x \\ &\qquad + \left(\frac{\gamma\, d\alpha - \alpha\, d\gamma}{\alpha\delta - \beta\,\gamma}\right) x^2 \\ -du &= \left(\frac{\alpha\, d\delta - \gamma\, d\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}\right) u + \left(\frac{\alpha\, d\gamma - \gamma\, d\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}\right) xu \end{aligned} \tag{۱۱.۵}$$

توجه شود که ضریب ۱، x و x^2 در معادلهٔ اول که عبارتند از

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_1 &= \frac{\gamma\, d\beta - \beta\, d\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \\ \tilde{\mu}_2 &= \frac{\delta\, d\alpha + \gamma\, d\beta - \alpha\, d\delta - \beta\, d\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} \\ \tilde{\mu}_3 &= \frac{\gamma\, d\alpha - \alpha\, d\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \end{aligned} \tag{۱۲.۵}$$

سه فرم مورر–کارتان در (۱۳.۵) ساخته می‌شوند، و ضریب u یا xu در معادلهٔ دوم، فرم دیگری را فراهم می‌سازد، $\tilde{\mu}_4 = \dfrac{\alpha\, d\gamma - \gamma\, d\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}$. $\triangle$

یک مجموعه از فرم‌های مورر–کارتان ناوردای راست $\{\omega^i\}$، توابع T^i_{jk} را از طریق معادلات زیر تعریف می‌نماید ($T^i_{jk} = -T^i_{kj}$)

$$d\omega^i = \frac{1}{2} \sum T^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k. \tag{۱۳.۵}$$

ناوردایی نسبت به انتقال راست نشان می‌دهد که برای هر $g, x \in G$، $T^i_{jk}(g \cdot x) = T^i_{jk}(x)$ و بنابراین با انتخاب $g = x^{-1}$ نتیجه می‌گیریم که توابع T^i_{jk} ثابت هستند.

۴.۴.۵ تعریف. معادلات (۱۳.۵) با شرط ثابت بودن T^i_{jk} ها به **اولین قضیهٔ اساسی لی** شهرت دارد و این مقادیر ثابت نیز **ثابت‌های ساختاری** G نسبت به انتخاب فرم‌های مورر—کارتان نامیده می‌شوند.

می‌توان به اطلاعاتی که مستقل از انتخاب پایه باشند نیز دست یافت که در آن علت آن که چرا فرم‌های مورر—کارتان به صورت طبیعی در یک ماتریس از گروه‌های خطی جای می‌گیرند، مشخص می‌گردد و این مبنای تعریف فرم مورر—کارتان به عنوان نگاشتی T_e- مقداری است. فرض کنیم I تصویر هومورفیسم همانی فضای مماس در عنصر همانی $e \in G$ تحت ایزومورفیسم $\mathrm{Hom}(T_e, T_e) \simeq T_e \otimes T_e^*$ باشد. با تعریف $\bar{\omega}(S) = ۱ \otimes R^*_{S^{-۱}}(I) \in T_e \otimes T^*_S(G)$ یک فرم مورر—کارتان T_e- مقداری ناوردای راست بدست می‌آید [۱۲]. برای آن داریم $\bar{\omega}(S) = (dS)S^{-۱}$. در این شیوه از تعریف، هرگاه زیرگروه لی $j : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ را داشته باشیم، مجموعه‌ای از فرم‌های مورر—کارتان را با یافتن مجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمال از عناصر $۱ \otimes j^*\bar{\omega}(S)$ پیدا می‌کنیم.

با مشتق خارجی گرفتن از $\bar{\omega}(S)$ داریم:

$$d\bar{\omega}(S) = d(dS\, S^{-۱}) = -dS \wedge dS^{-۱} = dS\, S^{-۱} \wedge dS\, S^{-۱} = \bar{\omega}(S) \wedge \bar{\omega}(S).$$

۵.۴.۵ توجه. معادلات $d\bar{\omega}(S) = \bar{\omega}(S) \wedge \bar{\omega}(S)$ همان معادلات مورر—کارتان هستند.

در واقع فرم‌های مورر—کارتان اطلاعات جبر لی یک گروه معین را به اطلاعات جدید مبدل می‌سازد و بنابراین با این کار در واقع ساختار موضعی گروه را به اطلاعاتی که می‌شناسیم، تبدیل می‌کند. همچنین این فرم‌ها ابزارهای کلیدی مورد نیاز برای توصیف خواص کلی گروه هستند.

به عنوان مثال، فرض کنیم $j : H \to G$ زیرگروه لی همبند G باشد و $\dim H = m$ و $\dim G = r$، بنابراین ممکن است پایهٔ $\{\omega^۱, \cdots, \omega^m, \omega^{m+۱}, \cdots, \omega^r\}$ را برای T^*_eG انتخاب کنیم. با این شرط که $\mathrm{Span}\{\omega^{m+۱}, \cdots, \omega^r\} \subset \ker j^*$. با استفاده از این پایه می‌توانیم مجموعه‌ای از فرم‌های مورر—کارتان را به زیرگروه H الحاق نماییم. ولی از آنجا که داریم

$$\circ = j^*\, d\omega^a|_e = \sum C^a_{\alpha\beta}\,(j^*\omega^\alpha|_e) \wedge \left(j^*\omega^\beta|_e\right); \qquad ۱ \leq \alpha, \beta \leq m, \quad m + ۱ \leq a \leq r,$$

مشاهده می‌شود که $C^a_{\alpha\beta}$ ها صفر هستند و بنابراین $\{\omega^{m+۱}, \cdots, \omega^r\}$ یک دستگاه کاملاً انتگرال‌پذیر می‌باشد. اگر $A \in H$ در این صورت $j \circ R_{A^{-۱}} = R_{A^{-۱}} \circ j$ و در نتیجه H یک منیفلد انتگرال با بعد حداکثر، تولید شده توسط $\{\omega^{m+۱}, \cdots, \omega^r\}$ و گذرا از e است.

از آنجا که این دستگاه دیفرانسیل ناوردای راست است، هر هم‌مجموعهٔ راست H نیز منیفلد انتگرال می‌باشد. در نهایت چون مؤلفهٔ همبندی یک هم‌مجموعهٔ راست هست که از $g \in G$ دلخواهی بگذرد، که در حقیقت منیفلد انتگرال ماکزیمال است که ناوردای راست نیز می‌باشد؛ از منحصربفرد بودن منیفلد حاصل از قضیهٔ فروبنیوس، این منیفلدهای انتگرال همبند ماکزیمال هستند.

حال قضیهٔ زیر را که مشابه قضیهٔ ۸.۴.۴ از فصل گذشته است ثابت می‌کنیم.

۶.۴.۵ قضیه (کارتان). *فرض کنیم G گروه لی ماتریسی با جبر لی $\mathfrak{g}$ و فرم مورر–کارتان ω باشد. همچنین فرض کنیم M منیفلدی باشد که به ۱–فرم $\mathfrak{g}$–مقداری ϕ صادق در $d\phi = \phi \wedge \phi$ مجهز شده است. در این صورت به ازای هر نقطهٔ $x \in M$ همسایگی U حاوی x و نگاشت $f : U \to G$ چنان یافت می‌شوند که $f^*\omega = \phi$. بعلاوه برای هر دو نگاشت $f_۱$ و $f_۲$ بدست آمده، داریم $f_۱ = R_S \circ f_۲$ برای عمل راست متناظر به ثابت $S \in G$.*

اثبات. بر منیفلد $\Sigma = M \times G$ فرض می‌کنیم که π و ρ به ترتیب تصویرهای نسبت به مؤلفهٔ اول و دوم باشند و داشته باشیم $\theta = \pi^* \phi - \rho^* \omega$. در واقع می‌توان نوشت $\theta = (\theta^i_j)$. فرض کنیم $I \subset T^*\Sigma$ زیرکلاف تولید شده توسط فرم‌های θ^i_j باشد. زیرمنیفلدهای n–بعدی که پول–بک چنین فرم‌هایی بر آنها صفر باشد، نمودارهایی از نگاشت‌های $f : M \longrightarrow G$ هستند که $\phi = f^*\omega$. حال آماده‌ایم تا از قضیهٔ فروبنیوس استفاده نماییم. با محاسبهٔ مشتق‌ها و نیز حذف نمودن پول–بک در بیان عبارت‌ها داریم

$$
\begin{aligned}
d\theta &= -\phi \wedge \phi + \omega \wedge \omega \\
&= -\phi \wedge \phi + (\theta - \phi) \wedge (\theta - \phi) \\
&\equiv ۰ \quad \mathrm{mod}\, I.
\end{aligned}
$$

بنابراین دستگاه فروبنیوس است (در شرایط قضیه فروبنیوس یعنی قضیهٔ ۱.۲.۳ صدق می‌کند) و یک منیفلد منحصربفرد n–بعدی هست که از هر $(x, g) \in \Sigma$ عبور نماید.

حال فرض کنیم $f_۱$ و $f_۲$ دو جواب متمایز باشند. همچنین درنظر می‌گیریم $g = f_۱(x)$ و $S = f_۲(x)^{-۱} g$. در این صورت نمودار $f = R_S \circ f_۲$ از (x, g) می‌گذرد و $f^*\omega = \phi$. با توجه به منحصربفردی قید شده در فوق، باید $f_۱ = R_S \circ f_۲$. □

نتایج زیر را برای قضیهٔ کارتان درنظر می‌گیریم [۱۲] :

۷.۴.۵ نتیجه. *فرض کنیم $f_i : M \to G$ برای $i = ۱, ۲$ دو ایمرشن از منیفلد همبند M بتوی گروه لی G باشند، شرط لازم و کافی برای این‌که عنصر $S \in G$ باشد که $f_۱ = R_S \circ f_۲$ این است که مجموعه‌از فرم‌های مورر–کارتان $\{\omega^i\}$ موجود باشد که $f_۱^* = f_۲^*$.*

۸.۴.۵ نتیجه. *اگر G یک گروه لی همبند باشد، دیفیومورفیسم $f : G \to G$ یک انتقال راست توسط $S \in G$ است اگر و فقط اگر مجموعه‌ای از فرم‌های مورر–کارتان صادق در $f^*\omega^i = \omega^i$ موجود باشد.*

به عنوان نمونه‌ای از فواید این قضیهٔ مهم، نگارنده از این قضیه در مقالات [۳۳، ۳۴] برای یافتن دستهٔ کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی و طبقه‌بندی خم‌ها در فضاهای ۳ و n–بعدی برای n متناهی و دلخواه، بر اساس ناورداهای یافت شده تحت عمل گروه تبدیلات آفین بهره برده است. این مقالات در فصل پیوست نیز برای مطالعهٔ خواننده ضمیمه گردیده

است.

قضیهٔ زیر که معکوس موضعی **قضیهٔ سوم لی** است، یکی‌از نتایج مهم نظریهٔ لی به حساب می‌آید [۱۲].

۹.۴.۵ قضیه. *فرض کنیم* $(1 \leq i,j,k \leq n)$ C^i_{jk} *ثابت‌های صادق در روابط زیر باشند:*

$$C^i_{jk} = -C^i_{kj}$$
$$\sum [C^i_{jr}\, C^j_{sk} + C^i_{js}\, C^j_{kr} - C^i_{jk}\, C^j_{rs}] = 0.$$

در این صورت ۱—فرم‌های مستقل خطی $\omega^1, \cdots, \omega^n$ *در یک همسایگی مبدأ* $\mathbb{R}^n$ *وجود دارند که در رابطهٔ زیر صادق باشند:*

$$d\omega^i = \frac{1}{2} \sum C^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k.$$

۵.۵ معادلات ساختاری کارتان

با رجوع به مسألهٔ هم‌ارزی ترفیع یافته، هدف در این بخش این است که فرم‌های دیفرانسیل ترفیع یافتهٔ $\omega = S\,\omega_U$ بر $U \times G$ را تجزیه و تحلیل نماییم. ساختاری مشابه برای فرم‌های روی $V \times G$ قابل تکرار است. در واقع معمولاً خواستهٔ ما این است که ناورداهای ساختارهای هندسی را تحت هم‌ارزی‌های داده شده بیابیم . اینها همگی می‌توانند بدون معرفی فرم‌های مشابه بر $V \times G$ معین گردند. علت این که مسأله هم‌ارزی را به این صورت بیان می‌کنیم آن است که ایده‌ها آسان‌تر نمایان گردند.

بر $U \times G$ می‌توانیم از فرم‌های ترفیع یافته دیفرانسیل خارجی بگیریم:

$$\begin{aligned} d\omega &= dS \wedge \omega_U + S\, d\omega_U \\ &= dS\, S^{-1} \wedge S\,\omega_U + S\, d\omega_U \end{aligned}$$

که در آن $dS\, S^{-1}$ ماتریس مورر—کارتان فرم‌های ناوردای راست بر G است. بنابراین می‌توان نوشت

$$(dS\, S^{-1})^i_j = \sum a^i_{j\,\rho}\, \pi^\rho,$$

وقتی که π^ρ پایه‌ای برای فرم‌های مورر—کارتان است و $a^i_{j\,\rho}$ ها ثابت هستند. همچنین فرم‌های ω_U اصلی هستند به این مفهوم که می‌توان دیفرانسیل آنها را تنها بر حسب مختصات روی U بیان نمود. بنابراین می‌توانیم دیفرانسیل خارجی را به صورت نمایش تار—گروه زیر بنویسیم

$$d\omega^i = \sum a^i_{j\,\rho}\, \pi^\rho \wedge \omega^j + \frac{1}{2} \sum \gamma^i_{j\,k}(u,S)\, \omega^j \wedge \omega^k. \qquad (۱۴.۵)$$

توجه به این نکته ضروری است که ضرایب عبارت‌هایی که نسبت به $\{\omega^i\}$ از مرتبه ۲ (مربعی) هستند، به G وابسته‌اند زیرا در آنها سه بار از عمل عضو $S \in G$ استفاده شده است. با نوشتن دیفرانسیل خارجی به صورت

$$d\omega^i = \sum \Delta^i_j \wedge \omega^j, \tag{۱۵.۵}$$

برای ضرایب دلخواه Δ^i_j، اگر نمایش تار—گروه (۱۴.۵) را با رابطهٔ فوق ترکیب کنیم، داریم

$$\sum \left[\Delta^i_k - a^i_{k\,\rho}\,\pi^\rho\right] \wedge \omega^k - \frac{۱}{۲} \sum \gamma^i_{j\,k}(u,S)\,\omega^j \wedge \omega^k = ۰.$$

۱.۵.۵ لم (کارتان). *فرض کنیم $\{\omega^i\}$ مجموعه‌ای مستقل از ۱—فرمی‌ها و $\{\pi^i\}$ مجموعه‌ای دلخواه از ۱—فرمی‌ها با تعداد اعضای متناهی و برابر با تعداد عناصر $\{\omega^i\}$ باشد. در این صورت داریم $\sum \pi^i \wedge \omega^i = ۰$ اگر و تنها اگر*

$$\pi^i = \sum C_{ij}\,\omega^j,$$

که (C_{ij}) ماتریسی متقارن است.

اثبات. چون فرم‌های ω^i ها مستقل هستند و در نتیجه هر فرم خطی در فضای این فرم‌ها به صورت ترکیب خطی از این فرم‌ها قابل نمایش است. فرض کنیم بتوانیم هر یک از π^i ها را به صورت منحصربفرد به شکل $\pi^i = \sum C_{ij}\,\omega^j$ نمایش دهیم. در این صورت

$$\sum \omega^i \wedge \pi^i = \sum_i \sum_j C_{ij}\,\omega^i \wedge \omega^j,$$

و لذا $C_{ij} = C_{ji}$ اگر و تنها اگر $\sum \pi^i \wedge \omega^i = ۰$. □

با استفاده از لم کارتان، معادلهٔ (۱۵.۵) به صورت زیر قابل نتیجه‌گیری است:

$$\Delta^i_k - a^i_{k\,\rho}\,\pi^\rho \equiv ۰ \qquad \mathrm{mod}(\omega^۱, \cdots, \omega^n).$$

اغلب برای ساده نویسی به جای $\mathrm{mod}\,(\omega^۱,\cdots,\omega^n)$ از $\mathrm{mod\,base}$ استفاده می‌شود. حال اگر رابطه‌ای با ضرایب ثابت از فرم‌های مورر—کارتان مثلاً به صورت زیر برقرار باشد

$$\sum b^j_i\,a^i_{j\rho}\,\pi^\rho = ۰,$$

مشاهده می‌شود که

$$\sum b^j_i\,\Delta^i_j \equiv ۰ \qquad \mathrm{mod\,base}.$$

۱—فرمی‌های $\sum b^j_i\,\Delta^i_j$ که b^j_i روی مجموعه‌ای از روابط تعریف شده تغییر می‌کند، **ضرایب اساسی مرتبهٔ اول** نامیده می‌شوند.

اکنون هدف ما مشخص نمودن ضرایب اساسی و در صورت امکان استفاده از این مشاهده برای اصلاح ماتریس Δ^i_j به گونه‌ای است که در روابط حاکم بر ماتریس فرم‌های مورر—کارتان صادق باشد. چون روابط تعریف شده بر ماتریس مورر—کارتان در حقیقت روابط تعریف شده بر جبر لی G است، یک ساختار الگوریتمی از نمایش دیفرانسیل خارجیِ ω به شکل زیر حاصل می‌گردد

$$d\omega^i = \sum \pi^i_k \wedge \omega^k + \frac{۱}{۲} \sum \gamma^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k,$$

که در آن $\pi^i_j \equiv \sum a^i_{j\rho}\, \pi^\rho \mod \mathrm{base}$ فرم‌دیفرانسیلی محاسبه شده از جبر لی است. جملات شامل ضرایب γ^i_{jk} **جملات تاب** و ضرایب آنها نیز **ضرایب تاب** نامیده می‌شوند. این معادلات ضرایب تاب و ۱—فرمی‌های π^ρ را به صورت منحصربفرد تعریف نمی‌کنند. بنابراین ایدهٔ بعدی استفاده از این ابهام برای ساده کردن و در صورت امکان حذف نمودن ضرایب تاب است. این عمل با اصلاح کردن π^ρ ها با افزودن ضرایبی از ω^k به گونه‌ای که باز هم عضو جبر لی باقی بماند حاصل می‌گردد. به این عمل **جذب سازگار** جبر لی محاسبه شده گفته می‌شود.

برای فهمیدن این ابهام دو نمایش برای دیفرانسیل‌های خارجی درنظر می‌گیریم. نمایش اصلی که همان نمایش تار—گروه است:

$$d\omega^i = \sum a^i_{k\rho}\, \pi^\rho \wedge \omega^k + \frac{۱}{۲} \sum \gamma^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k,$$

و نمایش دوم را به صورت زیر درنظر می‌گیریم

$$d\omega^i = \sum a^i_{k\rho}\, \bar{\omega}^\rho \wedge \omega^k + \frac{۱}{۲} \sum \Gamma^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k,$$

که هیچ فرض اولیه‌ای برای $\bar{\omega}^\rho$ و Γ^i_{jk} متصور نیستیم. با کم کردن این دو رابطه از هم داریم

$$\sum a^i_{k\rho} \left[\pi^\rho - \bar{\omega}^\rho\right] \wedge \omega^k + \frac{۱}{۲} \sum \left[\gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}\right] \omega^j \wedge \omega^k = ۰. \qquad (۱۶.۵)$$

باز هم به کمک لم کارتان نتیجه می‌گیریم که

$$\sum a^i_{k\rho} \left[\pi^\rho - \bar{\omega}^\rho\right] + \frac{۱}{۲} \sum \left[\gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}\right] \omega^j = \sum b^i_{kj}\, \omega^j \qquad (b^i_{kj} = b^i_{jk}).$$

حال اگر $\dim G = r$، تعداد عناصر مستقل خطی $\{\sum a^i_{j\rho}\, \pi^\rho\}$ برابر با r است و بنابراین ۱—فرم‌های

$$\sum a^{i_۱}_{j_۱\rho}\, \pi^\rho, \cdots, \sum a^{i_r}_{j_r\rho}\, \pi^\rho$$

وجود دارند که مستقل خطی باشند. بنابراین ماتریس $\left(a^{i_\sigma}_{j_\sigma\rho}\right)$ وارون‌پذیر است و وارون آن می‌تواند در دو طرف معادلهٔ زیر ضرب گردد

$$\sum a^{i_\sigma}_{j_\sigma\rho} \left[\pi^\rho - \bar{\omega}^\rho\right] = \sum \left[\Gamma^{i_\sigma}_{j_\sigma k} - \gamma^{i_\sigma}_{j_\sigma k} + b^{i_\sigma}_{j_\sigma k}\right] \wedge \omega^k.$$

در این صورت داریم $\quad \mathrm{mod\ base} \quad \pi^\rho \equiv \bar{\omega}^\rho$ یا

$$\pi^\rho - \bar{\omega}^\rho = \sum \nu^\rho_k\, \omega^k, \qquad (۱۷.۵)$$

که به صورت خلاصه آنرا به صورت $\begin{pmatrix} \pi \\ \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & \nu \\ \circ & \mathrm{Id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\omega} \\ \omega \end{pmatrix}$ می‌توان نمایش داد که چنین تغییری با جبر لی سازگار است. با استفاده از (۱۷.۵) در (۱۶.۵) داریم

$$\sum a^i_{j\rho}\,\nu^\rho_k\,\omega^j\wedge\omega^k + \frac{۱}{۲}\sum \left[\gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}\right]\omega^j\wedge\omega^k = \circ,$$

بنابراین $\Gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk} + \sum \left[a^i_{j\rho}\,\nu^\rho_k - a^i_{k\rho}\,\nu^\rho_j\right]$. می‌توان جملات $-\sum \left[a^i_{j\rho}\,\nu^\rho_k - a^i_{k\rho}\,\nu^\rho_j\right]$ را به صورت تصویر متغیرهای ν^ρ_k تحت عملگر خطی L با مؤلفه‌های ثابت $a^i_{j\rho}$ درنظر گرفت. بنابراین تاب در یک فضای تانسوری به پیمانهٔ تصویر عملگر L خوش تعریف است.

۲.۵.۵ مثال. مسألهٔ هم‌ارزی مدل شدهٔ زیر را درنظر می‌گیریم

$$\Phi^*\begin{pmatrix} \Omega^۱_V \\ \Omega^۲_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & \circ \\ \circ & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^۱_U \\ \omega^۲_U \end{pmatrix}$$

که به تعبیر G–فضاها (G گروه ماتریس‌های اسکالر ۲ × ۲ است) به صورت $\Phi^*\begin{pmatrix} \Omega^۱ \\ \Omega^۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^۱ \\ \omega^۲ \end{pmatrix}$ بیان می‌گردد. با توجه به مطالب گفته شده در فوق، محاسبات را تنها بر $U\times G$ انجام می‌دهیم و کار را با نمایش دلخواهی از دیفرانسیل خارجی آغاز می‌کنیم:

$$d\begin{pmatrix} \omega^۱ \\ \omega^۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} \omega^۱ \\ \omega^۲ \end{pmatrix}. \qquad (۱۸.۵)$$

که ماتریس (Δ^i_j) را بر حسب ۱–فرمی‌های $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ بیان نموده‌ایم. چون ماتریس مورر–کارتان گروه اسکالر ۲–بعدی به فرم $dS\,S^{-۱} = \begin{pmatrix} \bar{\omega} & \circ \\ \circ & \bar{\omega} \end{pmatrix}$ است، پس نمایش جبر لی معین می‌گردد و در رابطهٔ (۱۸.۵) باید $\alpha-\delta,\beta,\gamma$ در mod base صفر باشند و لذا اینها همان ضرایب اساسی هستند. جملات تاب که توسط ضرایب اساسی ساخته شدند باید فرم‌های نیم اصلی با بالاترین درجه بوده و ضرایب $\omega^۱\wedge\omega^۲$ باشند. در واقع توابع a و b بر $U\times G$ هستند که داشته باشیم

$$d\begin{pmatrix} \omega^۱ \\ \omega^۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \circ \\ \circ & \alpha \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} \omega^۱ \\ \omega^۲ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\omega^۱\wedge\omega^۲.$$

حال باید α را توسط جمع کردن آن با ضرایب $\omega^۱$ و $\omega^۲$ به گونه‌ای تغییر دهیم که تا حد امکان ضرایب تاب را کاهش دهیم. ولی چون داریم

$$d\begin{pmatrix} \omega^۱ \\ \omega^۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - a\,\omega^۱ + b\,\omega^۲ & \circ \\ \circ & \alpha - a\,\omega^۱ + b\,\omega^۲ \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} \omega^۱ \\ \omega^۲ \end{pmatrix},$$

و لذا تمامی ضرایب تاب قابل جذب است؛ مرسوم است که فرم‌های اصلاح شده با همان نمایش قبلی بیان شوند. اگر فرض کنیم $\varphi = \alpha - a\,\omega^۱ + b\,\omega^۲$، معادلات دیفرانسیل خارجی به صورت زیر در می آید

$$d\begin{pmatrix} \omega^۱ \\ \omega^۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi & \circ \\ \circ & \varphi \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} \omega^۱ \\ \omega^۲ \end{pmatrix},$$

و این معادلات به صورت منحصربفرد ۱–فرمی φ را معین می‌سازند. ۱–فرمی‌های ω^1، ω^2 و φ یک هم‌کنج ناوردا بر $U\times G$ تشکیل می‌دهند. اگر از رابطهٔ اخیر دیفرانسیل خارجی بگیریم تا این که دیفرانسیل φ را بدست آوریم داریم

$$\begin{aligned}0=d^2\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}d\varphi & 0\\ 0 & d\varphi\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\varphi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}d\omega^1\\ d\omega^2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}d\varphi & 0\\ 0 & d\varphi\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\varphi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\varphi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}d\varphi\wedge\omega^1\\ d\varphi\wedge\omega^2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$d\varphi$ یک ۲–فرمی است و بنابر رابطهٔ فوق تابع c بر $U\times G$ وجود دارد که در رابطهٔ $d\varphi=c\,\omega^1\wedge\omega^2$ صدق کند. به طریق مشابه تابع C تعریف شده بر $V\times G$ نیز وجود دارد. این توابع دارای این خاصیت هستند که توسط ترفیع Φ^1 از هم‌ارزی داریم $C\circ\Phi^1=c$. این توابع را **ناوردا** می‌نامیم. $\triangle$

۳.۵.۵ تعریف (ناوردا). منظور از **ناوردای** یک عمل گروه، کمیتی اسکالر است که تحت آن عمل گروه، بدون تغییر باقی می‌ماند.

محاسبات فوق بدون هیچ فرمول ضمنی برای فرم‌ها انجام پذیرفت. در ادامه به دو صورت می‌توان عمل نمود. نخست این که قضیه‌های استوار بر معادلات ساختاری زیر را اثبات کنیم

$$\text{معادلات ساختاری}\qquad\begin{cases}d\omega^1=\varphi\wedge\omega^1\\ d\omega^2=\varphi\wedge\omega^2\\ d\varphi=c\,\omega^1\wedge\omega^2\end{cases}$$

دوم این که معمولاً داشتن فرمول ضمنی برای ناورداها بر اساس اطلاعات مسأله مطلوب است و بنابراین اگر بسیار دشوار نباشد آنها را جستجو می‌کنیم.

در مرحلهٔ جذب سازگار با جبر لی، هدف حل کردن کامل (تا حد امکان از) معادلات به فرم

$$\sum\pi^i_j\wedge\omega^j=\frac{1}{2}\sum\gamma^i_{jk}\,\omega^j\wedge\omega^k,$$

به کمک معادلات تعریف شدهٔ زیر از جبر لی است:

$$\sum b^i_{j\mu}\,\pi^j_i=0,\qquad r+1\le\mu\le n^2.$$

۴.۵.۵ مثال. در بسیاری از مسائل هم‌ارزی یکی از گروه‌های متعامد تعمیم یافته $\mathrm{SO}(p,q)$ ظاهر می‌گردند. هر $\mathrm{SO}(p,q)$ از همهٔ ماتریس‌های $(p+q)$–بعدی S تشکیل شده است:

$$\mathrm{SO}(p,q)=\Big\{S\;\Big|\;\det S=1,\quad S^t\,Q\,S=Q,\quad Q=\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_p & 0\\ 0 & -\mathrm{Id}_q\end{pmatrix}\Big\}.$$

در ابتدا روابط تعریف شده بر فرم‌های مورر—کارتان را پیدا می‌کنیم که با توجه به روابط تعریف شده از گروه G و دیفرانسیل آنها بیان می‌شوند، یعنی داریم

$$\begin{aligned} \circ &= dQ = d(S^t\,Q\,S) = (dS)^t\,Q\,S + S^t\,Q\,dS,\\ &\Longrightarrow (S^t)^{-۱}(dS)^t\,Q + Q\,(dS)\,S^{-۱} = \circ\\ &\Longrightarrow (dS\,S^{-۱})^t\,Q + Q\,(dS\,S^{-۱}) = \circ. \end{aligned}$$

اگر $(\pi^k_j) = \Pi$ در این صورت روابط تعریف شده برای جبر لی $\mathrm{SO}(p,q)$ به صورت $\Pi^t\,Q + Q\,\Pi = \circ$ است. نتیجهٔ جبری‌ای به نام قضیهٔ اساسی هندسهٔ شبه ریمانی وجود دارد که در اینجا همان قضیهٔ جذب $\mathrm{SO}(p,q)$ می‌باشد و به جذب سازگار جبر لی برای این گروه منجر می‌شود: $\triangle$

۵.۵.۵ قضیه (لم $S_۳$ کارتان). *فرض کنیم ω یک n—بردار از ۱—فرم‌های مستقل خطی باشد، آنگاه دستگاه خارجی*

$$\xi\wedge\omega = \circ,\qquad \xi^t + \xi = \circ,$$

برای ξ که ماتریسی $n\times n$ از ۱—فرمی‌هاست، دارای جواب یکتای $\xi = \circ$ می‌باشد.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱۲] رجوع کنید. $\square$

۶.۵.۵ قضیه (جذب $\mathrm{SO}(p,q)$). *فرض کنیم $\omega = (\omega^۱,\cdots,\omega^n)^t$ از ۱—فرمی‌های مستقل خطی تشکیل شده باشد و Q ماتریسی متقارن و نامنفرد باشد، آنگاه برای Ψ داده شده به شکل*

$$\Psi = \frac{۱}{۲}\sum \gamma^i_{jk}\,\omega^k,\qquad (\gamma^i_{jk} = -\gamma^i_{kj}).$$

جواب منحصربفرد Π برای دستگاه دیفرانسیل خارجی زیر وجود دارد

$$\Pi\wedge\omega = \Psi\wedge\omega,\qquad \Pi^t\,Q + Q\,\Pi = \circ.$$

اثبات. برای اثبات قضیه مرجع [۱۲] را مشاهده کنید. $\square$

۷.۵.۵ مثال (ادامه هندسهٔ ریمانی). بر $U\times G$ که $G = \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ تعریف شده است، می‌نویسیم $d\omega = \Delta\wedge\omega$. چون $\mathrm{SO}(n,\circ) = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ بنابراین $Q = \mathrm{Id}$ و روابط بین فرم مورر—کارتان به صورت $(dS\,S^{-۱})^t + (dS\,S^{-۱}) = \circ$ است و همچنین برای ضرایب اساسی داریم $\Delta + \Delta^t = \circ$. با تعریف $\delta = \frac{۱}{۲}(\Delta - \Delta^t)$ و $\Psi = \frac{۱}{۲}(\Delta + \Delta^t)$ داریم $\Delta = \delta + \Psi$ و در نتیجه

$$d\omega = \delta\wedge\omega + \Psi\wedge\omega.$$

حال می‌خواهیم جملات تاب $\Psi\wedge\omega$ را درون $\delta\wedge\omega$ جذب کنیم، با این شرط که ساختار جبر لی δ حفظ گردد. این بدان معنی است که می‌خواهیم معادلات خارجی $\Pi\wedge\omega=\Psi\wedge\omega$ را تا حد امکان (نسبت به شرایط جبر لی $\Pi^t+\Pi=0$) حل کنیم. طبق قضیهٔ فوق جواب منحصربفرد Π برای معادلات خارجی مذکور وجود دارد. با تعریف $\varphi=\delta+\Pi$ می‌توانیم معادلات ساختاری مقابل را بدست آوریم: $d\omega=\varphi\wedge\omega,\ \varphi^t=-\varphi$. چون ساختار φ منحصربفرد است، ۱—فرمی‌های ω و φ یک هم‌کنج ناوردا بر $U\times G$ تشکیل می‌دهند. ماتریس محاسبه شدهٔ جبر لی از ۱—فرمی‌های φ بر $U\times G$، فرم‌های الصاق *لوی*—چیویتا هستند و دیفرانسیل $d\omega=\varphi\wedge\omega\ (\varphi^t=-\varphi)$ ماتریس *انحنای ریمان*—*کریستوفل* را حاصل می‌کند. $\triangle$

۶.۵ کاهش گروه ساختاری

فرض کنیم V فضای برداری n—بعدی با پایهٔ $\{e_i\}$ باشد و فضای دوگان آن V^* دارای پایهٔ $\{f^j\}$ باشد (e_i ها ماتریس‌های ستونی و f^j ها سطری هستند). پایهٔ $\{\epsilon_\alpha\}$ از T_eG را نیز درنظر می‌گیریم که دوگان پایهٔ $\{\pi^\rho\}$ از T_e^*G می‌باشد. چون به عمل G بر این فضاها نیاز داریم T_eG را جبر لی G درنظر می‌گیریم: $T_eG\simeq\mathfrak{g}\subset\mathrm{Hom}(V,V)$. تحت این یکی‌گیری، $\epsilon_\rho=\sum a^j_{i\rho}\,e_j\otimes f^i$. در بخش گذشته در مورد عملگر L صحبت نمودیم. تعریف می‌کنیم $\mathfrak{g}\otimes V^*\ \xrightarrow{L}\ V\otimes\Lambda^2V^*$ که به صورت زیر بیان می‌گردد

$$L(\sum\nu^\rho_k\,\epsilon_\rho\otimes f^k)=-\frac{1}{2}\sum(a^i_{j\rho}\,\nu^\rho_k-a^i_{k\rho}\,\nu^\rho_j)\,e_i\otimes f^j\wedge f^k.$$

به هر نگاشت خطی دنبالهٔ دقیقی از هسته و هم‌هسته متناظر است:

$$0\longrightarrow\mathfrak{g}^{(1)}\longrightarrow\mathfrak{g}\otimes V^*\ \xrightarrow{L}\ V\otimes\Lambda^2V^*\longrightarrow\Pi_{\mathfrak{g}}\longrightarrow 0,$$

که در آن فضای $\mathfrak{g}^{(1)}=\ker(L)$ **امتداد** اول جبر لی نامیده می‌شود و $\Pi_{\mathfrak{g}}=V\otimes\Lambda^2V^*/\,\mathrm{Image}(L)$ دارای اندیس $\mathfrak{g}$ است زیرا به ساختار جبر لی G و همچنین نمایش $G\longrightarrow\mathrm{Aut}(V)$ بستگی دارد. فضای $\Pi_{\mathfrak{g}}$ اغلب به صورت $h^{\circ}(\mathfrak{g})$ یا $h^{\circ,2}(\mathfrak{g})$ نوشته می‌شود زیرا می‌تواند به عنوان ساختار کوهمولوژی *اسپنسر* مشاهده گردد. حال اگر نگاشت $g:U\times G\longrightarrow V\otimes\Lambda^2V^*$ را به کمک رابطهٔ زیر تعریف کنیم

$$g(u,S)=\sum\gamma^i_{jk}(u,S)\,e_i\otimes f^k\wedge f^k,$$

با ترکیب این نگاشت با تصویر طبیعی $V\otimes\Lambda^2V^*\longrightarrow\Pi_{\mathfrak{g}}\longrightarrow 0$، نگاشت زیر بدست می آید

$$\tau_U:U\times G\longrightarrow\Pi_{\mathfrak{g}},$$

که این نگاشت **تاب ذاتی** نامیده می‌شود. با فرض

$$\begin{array}{lcl} d\Omega^i=\sum a^i_{j\rho}\,\Pi_\rho\wedge\Omega^j+\frac{1}{2}\sum\Gamma^i_{jk}\,\Omega^j\wedge\Omega^k & : & V\times G \text{ بر} \\ d\omega^i=\sum a^i_{j\rho}\,\pi_\rho\wedge\omega^j+\frac{1}{2}\sum\gamma^i_{jk}\,\omega^j\wedge\omega^k & : & U\times G \text{ بر} \end{array}$$

و هم‌ارزی $\Phi^1 : U\times G \longrightarrow V\times G$ و نیز با پول–بک گرفتن از معادلهٔ اول نسبت به Φ^1 خواهیم داشت

$$d\omega^i=(\Phi^1)^*(d\Omega^i)=\sum a^i_{j\rho}\,(\Phi^1)^*\Pi_\rho\wedge(\Phi^1)^*\Omega^j+\frac{1}{2}\sum\Gamma^i_{jk}\circ\Phi^1\,(\Phi^1)^*\Omega^j\wedge\Omega^k$$

و بنابراین داریم

$$\begin{array}{l}(\Phi^1)^*\Pi_\rho=\pi^\rho+\sum\nu^\rho\,\omega^k\\ \frac{1}{2}\sum\Gamma^i_{jk}\circ\Phi^1\,\omega^j\wedge\omega^k=\frac{1}{2}\sum\gamma^i_{jk}\,\omega^j\wedge\omega^k\quad \mathrm{mod\ Image}(L)\end{array}$$

در نتیجه نمودار زیر جابجایی است

$$\begin{array}{ccc} U\times G & \xrightarrow{\Phi^1} & V\times G\\ {\scriptstyle\tau_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau_V}\\ \Pi_{\mathfrak g} & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \Pi_{\mathfrak g}\end{array}$$

و نگاشت ساختاری تحت هم‌ارزی ثابت می‌ماند. برای ساده‌تر کردن بحث، ضرایب را بوسیلهٔ تعریف فرم‌های با مقدار برداری $\bar\omega=\{\bar\omega^\rho\}$، $\pi=\{\pi^\rho\}$، $\nu=\{\nu^\rho_k\}$، $\gamma=\{\gamma^i_{jk}\}$ و $\Gamma=\{\Gamma^i_{jk}\}$ ادامه می‌دهیم. بنابراین با این نماد گذاری جذب سازگار جبر لی در حالت عمومی توسط $\bar\omega=\pi+\nu\,\omega$ تعریف می‌گردد و بنابراین داریم $\Gamma=\gamma-L(\nu)$. حال سعی بر این است که معادلات $L(\nu)=\gamma$ را تا حد امکان حل نماییم. می‌توان نگاشت خطی L را با ماتریس آن یکی گرفت. اگر رتبهٔ نگاشت خطی L برابر s باشد، در این صورت s سطر مستقل خطی از معادلات خطی متناظر خواهیم داشت و این دستگاه را با فرض این که طرف دوم آن به دلخواه تعیین شده باشد حل می‌کنیم:

$$\left\{\begin{array}{c}\sum[a^{i_1}_{j_1\rho}\,\nu^\rho_{k_1}-a^{i_1}_{k_1\rho}\,\nu^\rho_{j_1}]=\gamma^{i_1}_{j_1k_1}\\ \sum[a^{i_2}_{j_2\rho}\,\nu^\rho_{k_2}-a^{i_2}_{k_1\rho}\,\nu^\rho_{j_2}]=\gamma^{i_2}_{j_2k_2}\\ \vdots\\ \sum[a^{i_s}_{j_s\rho}{}^1\,\nu^\rho_{k_s}-a^{i_s}_{k_s\rho}\,\nu^\rho_{j_s}]=\gamma^{i_s}_{j_sk_s}\end{array}\right. .$$

اگر مجموعهٔ ضرایب را ثابت درنظر بگیریم، بقیهٔ متغیرهای باقیمانده از هم‌کنج را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با استفاده از انتخاب‌های صورت گرفته، نگاشت تصویر فضای برداری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P: V\otimes\Lambda^2V^*\longrightarrow\mathrm{Image}(L)$$
$$P\Big(\sum h^i_{jk}\,e_i\otimes f^j\wedge f^k\Big)=\sum h^{i_\sigma}_{j_\sigma k_\sigma}\,e_{i_\sigma}\otimes f^{j_\sigma}\wedge f^{k_\sigma}$$

اگر برای $H\in V\otimes\Lambda^2V^*$ داده شده، نگاشت مورد نظر را با $P(H)=H_0$ نشان دهیم و از این تصویر برای تجزیهٔ $H=H_0+H_1$ و تجزیهٔ متناظر $\gamma=\gamma_0+\gamma_1$ استفاده نماییم؛ ν' ای هست که $L(\nu')=\gamma_0$. هرگاه مسأله را به جذب سازگار جبر لی محدود نماییم: $\bar\omega=\pi+\kappa\,\omega$ و شرط عمود بودن را لحاظ کنیم، یعنی شرط $L(\kappa)=\gamma_0$، آنگاه داریم $\kappa\in\nu'+\ker L$ یا $\kappa=\nu'+\nu$ (که $\nu\in\ker L$). همچنین داریم

$$\bar\omega=\pi+(\nu'+\nu)\,\omega=(\pi+\nu'\,\omega)+\nu\,\omega$$

با جذب سازگار جبر لی به صورت $\pi'=\pi+\nu'\,\omega$،عبارت جذب سازگار جبر لی نرمال شدهٔ $\bar\omega=\pi'+\nu\,\omega$ (برای $\nu\in\ker L$) حاصل می‌گردد. در نتیجه تغییر به شکل $\Gamma=\gamma-L(\nu)=\gamma$ روی ضرایب تاب صورت می‌پذیرد. این بدان معنی است

که ضرایب تاب خوش تعریف است. در ضمن این روش منحصربفرد نیست و روش‌های متعددی برای حل s در معادلات $L(\nu)=\gamma$ و در نتیجه تعریف تصویر P وجود دارد. در واقع می‌توانیم P را تا حد نگاشتی G–اکویی واریان آزادانه انتخاب نماییم.

نخستین معادلات ساختاری عبارتند از

$$d\omega^i = \sum a^i_{j\rho}\,\pi^\rho \wedge \omega^j + \frac{۱}{۲}\sum \gamma^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k,$$

که در آن ضرایب γ^i_{jk} به صورت منحصربفرد توسط جذب سازگار لی ایجاد می‌گردند. به عنوان نتیجه‌ای دیگر، ابهام موجود در π توسط رابطهٔ زیر برطرف می‌گردد

$$\begin{pmatrix} \bar\varpi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & \nu \\ ۰ & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \omega \end{pmatrix}, \qquad \nu \in \ker L.$$

توجه به این نکته ضروری است که نخستین معادلات ساختاری به انتخاب نگاشت تصویر P بستگی دارند.

۷.۵ مرحلهٔ استقراء

مفاهیمی را که در بخش‌های پیشین عنوان کردیم را می‌توان در الگوریتم زیر (که هنوز کامل نشده است) خلاصه کرد:

۱. انتخاب گروه G و هم‌کنج ω_U بر مجموعهٔ U از منیفلد M،

۲. یافتن هم‌کنج $dS\,S^{-۱}$ و روابط تعریف شده،

۳. تجزیه ضرایب اساسی،

۴. جذب سازگار جبر لی،

۵. محاسبهٔ عمل بینهایت کوچک بر تانسور ساختاری،

۶. آیا این عمل بدیهی است؟ در صورت مثبت بودن جواب به مرحلهٔ ۱۰ و در صورت منفی بودن آن به مرحلهٔ بعد می‌رویم،

۷. نرمال‌سازی و کاهش گروه ساختاری

۸. آیا از نوع ثابت است؟ اگر جواب مثبت است به مرحلهٔ بعد می‌رویم،

۹. با تغییر مناسب هم‌کنج و گروه ساختاری به مرحلهٔ نخست برمی‌گردیم،

۱۰. آیا ساختار بدیهی است؟ اگر جواب مثبت باشد بحث را با مطالب بخش بعدی این فصل موکول می‌کنیم.

مرحلهٔ استقراء به طی کردن حلقهٔ الگوریتم فوق و انتخاب گروه و هم‌کنج جدید وابسته است. الگوریتم را در مثال زیر اجرا می‌کنیم:

۱.۷.۵ مثال (هندسهٔ انتگرال برای لاگرانژین). در این مثال می‌خواهیم ناورداهای لاگرانژین را تحت کلاسی از دیفیومورفیسم‌ها که **تقارن‌های طبیعی** نامیده می‌شوند بیابیم. این فرآیند را **هندسهٔ انتگرال** می‌نامند که در مرجع [۹] توسط کارتان به عنوان هندسهٔ $\delta\int L\,dA$ معرفی شده است.

لاگرانژین مرتبهٔ اول تابعی بر فضای جت مرتبهٔ اول به فرم زیر است

$$L : J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

با درنظر گرفتن مجموعه‌های باز ومختصات‌های استاندارد فضای جت به صورت

$$(U, x, z, p) = (U, x^1, \cdots, x^m, z^1, \cdots, z^n, p_1^1, \cdots, p_m^n),$$
$$(V, X, Z, P) = (V, X^1, \cdots, X^m, Z^1, \cdots, Z^n, P_1^1, \cdots, P_m^n),$$

بر فضای جت مرتبهٔ اول از نگاشت‌های از فضاهای m−بعدی به فضاهای n−بعدی؛ و همچنین درنظر گرفتن لاگرانژین‌های $l(x, z, p)$ و $L(X, Z, P)$ نخست می‌خواهیم دیفیومورفیسم‌های $\phi : U \longrightarrow V$ را بیابیم که در رابطهٔ زیر برای نمودار (گراف) هر نگاشت دلخواه $\alpha : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ صادق باشند

$$\int_{j^i(\alpha)} \phi^*(L\,dX^1 \wedge \cdots \wedge dX^m) = \int_{j^i(\alpha)} l\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m, \qquad \forall\alpha.$$

اما چون نگاشت‌های α دلخواه هستند نتیجه می‌شود که

$$j^1(\alpha)^*[\phi^*\Psi - \psi] = 0, \qquad \forall\alpha,$$

که در آن فرض کرده‌ایم

$$\Psi = L\,dX^1 \wedge \cdots \wedge dX^m, \qquad \psi = l\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

حال با درنظر گرفتن ایده‌آل برخوردی I از فرم‌های برخوردی روی U:

$$I = \{\theta_U^r := dz^r - \sum_s p_s^r\,dx^s \;:\; 1 \le s \le m, 1 \le r \le n\},$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\phi^*\,\Psi \equiv \psi \qquad \mod I.$$

ولی این شرط یک رابطهٔ هم‌ارزی تعریف نمی‌کند زیرا دیفیومورفیسم‌های ϕ مطابق با این رابطه لزوماً نمودارها را به نمودارها منتقل نمی‌کنند؛ در حالی که قابل انتقال به هم‌ارزی تحت تبدیلات برخوردی است که با درنظر گرفتن ایده‌آل I و همچنین ایده‌آل $\mathcal{I}$ بر V:

$$\mathcal{I} = \{\Theta_V^r := dZ^r - \sum_s P_s^r\,dX^s \;:\; 1 \le s \le m, 1 \le r \le n\},$$

در رابطهٔ $\phi^*\Theta_V^r \in I$ صدق می‌کنند. در فصل بعد به بررسی بیشتر این گونه تبدیلات خواهیم پرداخت.

برای بیان شرایط هم‌ارزی لاگرانژین‌ها که به صورت عمل ژاکوبین بر هم‌کنج‌ها بیان گردد، m−فرم‌های لاگرانژین ψ و Ψ را با فاکتورگیری دلخواهی از آنها به صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$\psi = \omega_U^1 \wedge \cdots \wedge \omega_U^m, \qquad \Psi = \Omega_V^1 \wedge \cdots \wedge \Omega_V^m,$$

در حالی که $\{\omega_U^i\}$ و $\{\Omega_V^i\}$ تحت عمل گروه خطی خاص $\mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$ تعریف شده‌اند و البته این شرط هم مد نظر ماست که لاگرانژین‌ها هیچ جا صفر نیستند.

حال مسأله‌هم‌ارزی لاگرانژین‌ها تنها شامل هم‌کنج‌های

$$\Omega_V = (\Omega_V^1, \cdots, \Omega_V^m)^T, \qquad \Theta_V = (\Theta_V^1, \cdots, \Theta_V^m)^T,$$

و هم‌کنج‌های مشابه آنها برای ω_U و θ_U می‌باشد. بنابراین مسألهٔ هم‌ارزی پایین معین است و باید این فرم‌ها را به هم‌کنج دلخواهی گسترش دهیم. بنابراین می‌توانیم فرم‌های زیر را درنظر بگیریم

$$H_V = (dP_1^1, \cdots, dP_n^m)^T, \qquad \eta_U = (dp_1^1, \cdots, dp_n^m)^T,$$

و **هم‌ارزی طبیعی** را که در روابط زیر صادق است، نتیجه بگیریم

$$\phi^* \begin{pmatrix} \Theta_V \\ \Omega_V \\ H_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ b_1 & D & 0 \\ B & b_2 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_U \\ \omega_U \\ \eta_U \end{pmatrix}$$

که در آن $D \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}), A_1 \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), A_2 \in \mathrm{GL}(mn,\mathbb{R})$ و b_1, b_2, B ماتریس‌های دلخواه از اندازه‌های متناسب هستند. بنابراین گروه ساختاری G عبارت است از گروه همهٔ ماتریس‌های به فرم $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ b_1 & D & 0 \\ B & b_2 & A_2 \end{pmatrix}$.

ماتریس مورر−کارتان برای $S \in G$ به شکل زیر است

$$dS\, S^{-1} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & \lambda & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

وقتی که $\mathrm{tr}\,\lambda = 0$. حال (در حالت ترفیع یافته) با قرار دادن

$$d \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \delta & \alpha_3 \\ \beta & \beta_2 & \pi_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ \eta \end{pmatrix},$$

مشاهده می‌گردد که ضرایب اساسی مرتبهٔ اول عبارتند از $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mathrm{tr}\,\delta$. فرم‌های $d\theta$ و $d\omega$ هیچ جملهٔ مربعی (درجه دوم) بر حسب η ندارند، پس $\alpha_2, \alpha_3 \equiv 0 \mod (\theta, \omega)$. بنابراین می‌توان نوشت

$$d \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \bar{\delta} & 0 \\ \beta & \beta_2 & \pi_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \wedge \omega + \alpha_2 \wedge \eta \\ \frac{1}{m}(\mathrm{tr}\,\delta)\,\mathrm{Id} \wedge \omega + \alpha_3 \wedge \eta \\ 0 \end{pmatrix}$$

که در آن $\bar\delta = \delta - \frac{۱}{m}(\mathrm{tr}\,\delta)\,\mathrm{Id}$ و بنابراین $\mathrm{tr}\,\bar\delta = ۰$. برای انجام فرآیند جذب اگر بنویسیم

$$\begin{aligned} \alpha_۱ &= r\,\theta + \omega^T J + l\,n, & \alpha_۲ &= n\,\theta + \omega^T N,\\ \alpha_۳ &= \rho\,\theta + \omega^T L, & \tfrac{۱}{m}(\mathrm{tr}\,\delta) &= q\,\theta + \omega^T P + \eta^T V \end{aligned}$$

و همین طور $\bar\pi_۱ = \pi_۱ - r\,\omega - n\,\eta$ و $\bar\beta - q\,\omega - \rho\,\eta$ می‌بینیم که جملات بر حسب p, q, n, r قابل جذب هستند. از آنجا که P تنها به شکل $\omega^T P\omega$ ظاهر می‌شود، می‌توان فرض کرد که $P^T = -P$ و بنابراین $\mathrm{tr}\,P = ۰$. بنابراین با قراردادن

$$\delta = \bar\delta + \omega^T P, \quad \eta^T W\,\omega = \eta^T V\,\omega + \omega^T L\,\eta, \quad \omega^T M\,\eta = l\,\eta\wedge\omega + \omega^T N\,\eta,$$

جذب مورد نظر به صورت زیر خواهد بود

$$d\begin{pmatrix}\theta\\ \omega\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_۱ & ۰ & ۰\\ \beta_۱ & \Delta & ۰\\ \beta & \beta_۲ & \pi_۲\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\theta\\ \omega\\ \eta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\omega^T J\,\omega + \omega^T M\,\eta\\ \eta^T W\,\omega\\ ۰\end{pmatrix}. \qquad (۱۹.۵)$$

با محاسبهٔ $d^۲$ داریم

$$\left.\begin{aligned} dJ - \Delta^T J - J\,\Delta + \pi_۱ J - \tfrac{۱}{۲}(M\,\beta_۲ - \beta_۲^T M^T) \equiv ۰\\ dM - \pi_۱ M - \Delta^T M \equiv ۰\\ dW + \beta_۱ + \pi_۲^T W \equiv ۰\end{aligned}\right\}\ \mathrm{mod\ \ base}.$$

محاسبهٔ سرراست پارامتری نشان می‌دهد که $M = -\frac{۱}{L^{۱/m}}A_۱(D^{-۱})^T A_۲^{-۱} \neq ۰$. بنابراین می‌توانیم نرمال سازی به شکل مقابل را انجام دهیم $J = W = ۰, M = \mathrm{Id}$.

دور بعدی در حلقهٔ الگوریتم فوق‌الذکر کاملاً پیچیده است و تنها برای حالتی که $m = ۱$ (که در ذیل این مطلب به آن می‌پردازیم) و نیز حالتی که $m = ۲$ و $n = ۱$ کامل شده است. مسأله برای حالت دلخواه از m و n به صورت مسألهٔ باز باقی مانده است.

در حالتی که $m = ۱$ رابطهٔ (۲۰.۵) به صورت زیر است

$$d\begin{pmatrix}\theta\\ \omega\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_۱ & ۰ & ۰\\ \beta_۱ & ۰ & ۰\\ \beta & \beta_۲ & \pi_۲\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\theta\\ \omega\\ \eta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}A\\ b\\ ۰\end{pmatrix}\eta\wedge\omega.$$

با محاسبه $d^۲$ خواهیم داشت

$$\left.\begin{aligned} dA &\equiv \pi_۱ A - A\,\pi_۲\\ db &\equiv \beta_۱ - b\,\pi_۲\end{aligned}\right\}\ \mathrm{mod\ \ base},$$

محاسبات پارامتری نشان می‌دهد که A مضرب نامنفردی از $(\partial^۲ l/\partial P_r\ \partial P_s)$ است و لذا $\det A \neq ۰$. اگر وضعیت مثبت مؤکد را درنظر بگیریم، می‌توانیم نرمال‌سازی $b = ۰, A = \mathrm{Id}$ را انتخاب کنیم و در نتیجه داشته باشیم

$$d\begin{pmatrix}\theta\\ \omega\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_۱ & ۰ & ۰\\ \beta_۱ & ۰ & ۰\\ \beta & \beta_۲ & \pi_۲\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\theta\\ \omega\\ \eta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\eta\wedge\omega\\ ۰\\ ۰\end{pmatrix},$$

که در آن ضرایب اساسی عبارتند از $\beta_۱$ و $\pi_۲ - \pi_۱$. این بدان معنی است که هیچ عمل گروه چپی بر ω وجود ندارد و بنابراین ω ناورداست. محاسبات نشان می‌دهد که

$$\omega = L\,dx + \sum \frac{\partial L}{\partial P_r}\,[dz^r - P_r\,dx].$$

عبارت اخیر فرم کارتان یا **انتگرال ناوردای هیلبرت** است که به عنوان ابزاری کلیدی برای اصل همیلتن در حساب تغییرات به حساب می‌آید. این کاملاً عادی است که روش هم‌ارزی فرم‌های ناوردای دقیق و قوانین بقاء را مشخص می‌کند بدون آن که عمیقاً به مسأله پرداخته باشد. $\triangle$

۸.۵ مسألهٔ هم‌ارزی فوق معین

فرض کنیم G و G' دو زیرگروه از $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ و ω_U, θ_U و نیز Ω_V, Θ_V دو زوج از هم‌کنج‌های روی (به ترتیب) U و V باشند. می‌خواهیم شرایط لازم و کافی برای اینکه دیفیومورفیسم $\phi : U \longrightarrow V$ موجود باشد را بیابیم، به گونه‌ای که شرایط زیر برقرار باشند

$$\phi^*\,\Omega_V = \gamma_{VU}\,\omega_U, \qquad \phi^*\,\Theta_V = \alpha_{VU}\,\theta_U, \qquad \gamma_{VU} \in G, \qquad \alpha_{VU} \in G'.$$

همان گونه که کارتان اشاره نموده است [۱۱]، این مسأله به طور طبیعی در ذهن بوجود می آید وقتی که می‌خواهیم هم‌ارزی دستگاه دیفرانسیلی را تحت یک شبه—گروه لی بررسی کنیم. در این حالت دستگاه دیفرانسیلی در کنجی مانند θ_U گنجانده می‌شود و شبه—گروه لی با ژاکوبین‌های نسبت به هم‌کنج ω_U معین می‌گردد.

۱.۸.۵ مثال. هم‌ارزی معادلهٔ $\partial y/\partial x = f(x,y)$ در $\mathbb{R}^۲$ تحت اثر شبه—گروه

$$X\circ\phi = x, \qquad Y\circ\phi = \varphi(x)\,y + \psi(x),$$

را درنظر می‌گیریم. در این وضعیت نیاز داریم که به سراغ فضای جت مرتبهٔ اول از گروه دیفیومورفیسم‌ها برویم. فرض می‌کنیم

$$\omega_U = \begin{pmatrix} \omega_U^۱ \\ \omega_U^۲ \\ \omega_U^۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ p\,dy \\ dp/p \end{pmatrix}, \qquad \Omega_V = \begin{pmatrix} \Omega_V^۱ \\ \Omega_V^۲ \\ \Omega_V^۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dX \\ P\,dY \\ dP/P \end{pmatrix}.$$

در این صورت گروه G به صورت زیر معرفی می‌گردد

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ a & ۱ & ۰ \\ b & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(۳,\mathbb{R}) \right\}.$$

و دیفیومورفیسم ϕ در شرط $\phi^*\Omega_V = g\,\omega_U$ برای $g \in G$ صدق می‌کند فقط و فقط وقتی که توابع φ و ψ وجود داشته باشند که $Y\circ\phi = \varphi(x)\,y + \psi(x)$. از معادله دیفرانسیل نیز ۱—فرمی‌های $\theta_U^۲ = dy - f\,dx$ و $\Theta_V^۲ = dY - F\,dX$

حاصل می‌شوند. بر حسب هم‌کنج‌های $\theta_U = (\omega_U^1, \omega_U^2, \omega_U^3)^T$ و $\Theta_V = (\Omega_V^1, \Omega_V^2, \Omega_V^3)^T$ این شرط که ϕ جواب‌های $\partial y/\partial x = f$ را به جواب‌های $\partial Y/\partial X = F$ منتقل نماید به شکل زیر ارائه می‌شود

$$\phi^* \Theta_V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ a & \gamma & 0 \\ \delta & \epsilon & \rho \end{pmatrix} \theta_U.$$

بنابراین گروه G' عبارت است از

$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ a & \gamma & 0 \\ \delta & \epsilon & \rho \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

جواب مسألهٔ هم‌ارزی فوق معین را که در ادامه بیان می‌شود بر اساس مراجع [۱۱، ۱۴] عنوان می‌کنیم. با ترفیع مسألهٔ هم‌ارزی به $U \times G \times G'$ و $V \times G \times G'$، θ, ω و Θ, Ω را (به ترتیب) به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \omega(u, g, g') &= g\, \omega_U(u), & \theta(u, g, g') &= g'\, \theta_U(u), \\ \Omega(v, g, g') &= g\, \Omega_V(v), & \Theta(v, g, g') &= g'\, \Theta_V(v). \end{aligned}$$

بررسی این نکته ساده است که $G \times G'$ بر $U \times G \times G'$ و $V \times G \times G'$ به صورت طبیعی عمل می‌کند و می‌توانیم مسألهٔ هم‌ارزی اصلی را با مسألهٔ یافتن دیفیومورفیسم‌های $\tilde{\phi} : U \times G \times G' \longrightarrow V \times G \times G'$ که نسبت به عمل مذکور جابجا می‌شود و در شرایط $\tilde{\phi}^* \Omega = \omega$ و $\tilde{\phi}^* \Theta = \theta$ نیز صادق هستند، جایگزین نمود. $\triangle$

ایدهٔ ما در اینجا استفاده از عمل طبیعی $G \times G'$ بر ماتریس‌های ارتباط دهندهٔ ω و θ، و Ω و Θ است تا در صورت امکان روابطی با ضرایب ناوردا بدست آوریم. این روابط به کمک نرمال‌سازی به زیرگروهی از $G \times G'$ کاهش داده می‌شوند که (به ترتیب) با زیرگروه‌های $G_1 \subset G$ و $G_1' \subset G'$ ایزومورف است.

از آنجایی که ω_U و θ_U هم‌کنج‌های روی U هستند، ماتریس همه‌جا نامنفرد $a(u)$ بر U هست که

$$\theta_U = a(u)\, \omega_U.$$

این موجب می‌شود که ماتریس همه جا نامنفرد m را داشته باشیم که بر $U \times G \times G'$ با شرط $\theta = m\, \omega$ تعریف می‌گردد. داریم $m(u, g, g') = g'\, a(u)\, g^{-1}$ و بنابراین m در تار $\{u\} \times G \times G'$ توسط رابطهٔ $m(u, g, g') = g'\, m(u, e_G, e_{G'})\, g^{-1}$ معرفی می‌گردد و بعلاوه عمل طبیعی $G \times G'$ را بر ماتریس m داریم. به طریق مشابه $\Theta_V = A(u)\, \Omega_V$ و $\Theta = M\, \Omega$ را داریم. به وضوح از هم‌ارزی باید $\tilde{\phi}^* M = m$ پس یک ناوردای مرتبهٔ صفر خواهیم داشت. از عمل $G \times G'$ برای نرمال‌سازی ناورداها استفاده می‌کنیم (مشابه همان کاری که برای نرمال‌سازی تاب‌های جذب نشده انجام می‌شود). بعد از انجام این فرآیند تابع ساختاری τ_U و به همین منوال تابع ساختاری τ_V را بدست می‌آوریم. حال از شرط هم‌ارزی باید $\tilde{\phi}^* \tau_V = \tau_U$ و عمل $G \times G'$ به گونه‌ای است که تصویر یک تاری به شکل $\{u\} \times G \times G'$ تحت τ_U همان مدار تحت $G \times G'$ از تصویر تحت τ_U برای نقطهٔ دلخواهی از آن تار است. ω را برداری از تصویر τ_U انتخاب می‌کنیم (فرض بر این است که مسأله از نوع ثابت است یعنی مدارها مجزا هستند). اگر گروه پایدارساز ω نسبت به عمل $G \times G'$ را با G_ω نشان دهیم، $\tau_U^{-1}(\omega)$ و $\tau_V^{-1}(\omega)$ هر دو G_ω–کلاف‌های اصلی (به ترتیب) بر U و V هستند. بنابراین $\tilde{\phi}^*$ باید این

کلاف‌ها را حفظ نماید. بعلاوه اگر نگاشت‌های تصویر π_1 و π_2 را از $G \times G'$ بروی (به ترتیب) G و G' درنظر بگیریم، آنگاه $\pi_1(G_\omega) = G'_1$ زیرگروه‌های ایزومورف از G و G' هستند. این نشان می‌دهد که π_1 همومورفیسمی بروی تصویرش می‌باشد و $m_\circ = m|_{\tau_U^{-1}(\omega)}$ نامنفرد است. همچنین اگر $(g,g'),(\tilde g,g') \in G_\omega$ آنگاه $g'\,m_\circ\,g^{-1} = g'\,m_\circ\,\tilde g^{-1}$ ایجاب می‌کند که $g = \tilde g$. بنابراین π_i ها ایزومورفیسم هستند.

حال اگر فرض کنیم $(h,h') : U \longrightarrow G\times G'$ به گونه‌ای باشد که برای هر $(g,g') \in G_\omega$ داشته باشیم $\pi_U(h'\,m(u,g,g')h^{-1}) = h'\,m\,h^{-1}$. یا در واقع ω هرگاه برای $(g,g') \in G_\omega$ θ را با $\hat\theta = g'\,h'\,\theta_U$ و ω را با $\hat\omega = g\,h\,\theta_U$ جایگزین نماییم، آنگاه داریم $\hat\theta = m_\circ\,\hat\omega$.

اگر تعاریفی یکسان برای $\hat\omega$ و $\hat\Theta$ ارائه کنیم، می‌بینیم که نگاشت $\hat\phi : U \times G'_1 \longrightarrow V \times G'$ با عمل G'_1 جابجا می‌گردد و در شرایط $\hat\theta = \hat\phi^*\,\hat\Theta$ و $\hat\phi^*\,M_\circ = m_\circ$ صدق کند. بنابراین $\hat\phi^*\,\hat\Omega$ و $\hat\phi$ جوابی از مسألهٔ هم‌ارزی اصلی با زیرگروه $G'_1(\approx G_1)$ است.

در عمل می‌توان زیرگروه G_1 را به شکل زیر محاسبه کرد. مجموعهٔ ماکسیمالی از درایه‌های m را برای نرمال‌سازی انتخاب می‌کنیم و $(g_\circ, g'_\circ)$ را جواب عمومی $g'_\circ\,m\,g_\circ^{-1} = m_\circ$ قرار می‌دهیم. فرض کنیم ω° هم‌کنجی بر U باشد که با انتخاب برخی پارامترهای گروه در خانوادهٔ هم‌کنج‌های $g_\circ\,\omega_U$ بدست آمده است. زیرگروه پایدارساز G_1 مجموعهٔ همهٔ $g \in G$ هایی است که $g\,\omega^\circ = g_\circ\,\omega_U$.

مطالب فوق را می‌توان در گزارهٔ زیر خلاصه کرد:

۲.۸.۵ گزاره. *مسألهٔ هم‌ارزی فوق معین را برای هم‌کنج‌های ω و ϖ درنظر می‌گیریم که برای آنها به ترتیب گروه ساختاری G و H را تعریف نموده‌ایم که به صورت روابط $\bar g\,\bar\omega = g\,\omega$ و $\bar h\,\bar\varpi = h\,\varpi$ بیان گردیده‌اند. فرض کنیم دو هم‌کنج با رابطهٔ $\omega = A(x)\,\varpi$ مرتبط باشند. در این صورت درایه‌های ماتریس $g\,A(x)\,h^{-1}$ برای $g \in G$ و $h \in H$ تحت تغییر مختصات $\bar x = \phi(x)$ ناوردا هستند.*

۳.۸.۵ مثال (ادامه مثال قبل). با توجه به مطالب مثال قبل داریم

$$\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \circ \\ \circ & \gamma & \circ \\ \delta & \epsilon & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ \\ -F & \frac{1}{p} & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ \\ -\frac{a}{p} & \frac{1}{p} & \circ \\ -b & \circ & 1 \end{pmatrix} \omega$$

بنابراین ماتریس m به فرم زیر است

$$\theta = \begin{pmatrix} \alpha - \beta(F + \frac{a}{p}) & \frac{\beta}{p} & \circ \\ -\gamma(F + \frac{a}{p}) & \frac{\gamma}{p} & \circ \\ \delta - \epsilon(F + \frac{a}{p}) - \rho\,b & \frac{\epsilon}{p} & \rho \end{pmatrix}$$

ممکن است نرمال سازی درایه‌های m را با انتخاب $\epsilon = \gamma = 1$، $\gamma = \beta = p$، $\alpha = b$ و $a = -p\,F$ انجام دهیم. این موجب می‌شود که خانوادهٔ هم‌کنج‌های زیر را بیابیم

$$g_\circ\,\omega_U = \begin{pmatrix} dx \\ p\,(dy - F\,dx) \\ dp/p + b\,dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \\ b & \circ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ p\,(dy - F\,dx) \\ dp/p \end{pmatrix}$$

و G_1 گروه زیر است

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

برای کامل نمودن جواب مسألهٔ هم‌ارزی معادلات ساختاری زیر را درنظر می‌گیریم

$$d\omega^1 = 0, \qquad d\omega^2 = \omega^3 \wedge \omega^2 + (F_y + b)\,\omega^2 \wedge \omega^1, \qquad d\omega^3 = \beta\,\omega^1.$$

جملهٔ تاب جذب نشدهٔ F_y+b را می‌توانیم به صفر نرمال‌سازی کرده و فرض کنیم $b = F_y$. بنابراین صورت جدید معادلات ساختاری به فرم زیر است

$$d\omega^1 = 0, \qquad d\omega^2 = \omega^3 \wedge \omega^2, \qquad d\omega^3 = d\,[dp/p + F_y\,dx] = (F_{yy}/p)\,\omega^2 \wedge \omega^1.$$

حال دو حالت $F_{yy} = 0$ و $F_{yy} \neq 0$ را می‌توانیم درنظر بگیریم. اگر $F_{yy} = 0$ آنگاه هیچ ناوردای غیر ثابتی وجود ندارد و بنابراین در این حالت به فرم نرمال $dy/dx = 0$ است. در این حالت معادلات ساختاری عبارتند از

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= 0, \\ d\omega^2 &= \omega^3 \wedge \omega^2, \\ d\omega^3 &= 0, \end{aligned}$$

که در واقع معادلات ساختاری گروه آفین بر خط است که گروه لی تقارن‌های معادلهٔ $dy/dx = 0$ مشمول در شبه—گروه حاصل از تبدیلات $\bar{X} = x,\ \ \bar{Y} = \varphi(x)\,y + \psi(x)$ می‌باشد. اگر $F_{yy} \neq 0$، با قرار دادن $p = F_{yy}$ داریم

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= 0, \\ d\omega^2 &= \omega^3 \wedge \omega^2, \\ d\omega^3 &= I\,\omega^1 \wedge \omega^2, \end{aligned}$$

وقتی که $I = \frac{1}{F_{yy}}\,(F\,F_{yyy} + F_{yyx} + F_y\,F_{yy})$. $\triangle$

۴.۸.۵ توجه. علت اصلی استفاده از روش فوق در استفاده از مسائل فوق معین ایجاد هم‌کنج مناسب جهت فرمول‌بندی مسألهٔ هم‌ارزی است. به کمک روش فوق هم‌کنجی را انتخاب می‌کنیم که بسیاری از محاسبات غیر ضروری را که ممکن است در انتخاب‌های دیگر از هم‌کنج رخ دهد رفع می‌نماید. بعلاوه دیدیم که این عمل به ساده‌سازی گروه ساختاری نیز می‌انجامد. به هم‌کنج بوجود آمده از مسألهٔ هم‌ارزی فوق معین **هم‌کنج ناوردا** گفته می‌شود.

۹.۵ e—ساختار

پس از تکرار کافی الگوریتم ذکر شده در دو بخش قبل، به موقعیتی می‌رسیم که عمل کاهش گروه روی تاب بدیهی می‌گردد و کاهش بیشتری میسر نیست. اگر G به گروه همانی کاهش یافته باشد، $\{\omega^1, \cdots, \omega^m\}$ پارامترهای گروه بیشتری

ندارد و هم‌کنج ناوردایی بر U تعریف می‌کند. حال اگر G به گروه با $\mathfrak{g}^{(1)} = 0$ کاهش یافته باشد در این صورت $\{\omega^1, \cdots, \omega^m, \pi^1, \cdots, \pi^r\}$ وقتی π^i پایه‌ای از فرم‌های مورر–کارتان است، یک هم‌کنج ناوردا برای $U \times G$ تعریف می‌کند. در هر یک از این حالت‌ها (مسألهٔ هم‌ارزی بر U و یا $U \times G$) عملاً با گروه $G = \{e\}$ سر و کار داریم، این همان مسألهٔ یافتن ناورداهای e–ساختارها می‌باشد که به بیان ساده e–ساختار، فضایی با هم‌کنج معین است.

کارتان مسألهٔ هم‌ارزی با گروه بدیهی را **مسألهٔ هم‌ارزی تحدید شده** نامید [۱۱]. فرض کنیم دو هم‌کنج (U, ω) و (V, Ω) را داشته باشیم، در بخش ۳.۲ شرایط لازم و کافی برای این که $\phi^*\Omega = \omega$ بیان گردید. دیدیم که اگر معادلات ساختاری زیر را برای آن‌ها درنظر بگیریم

$$d\omega^i = \sum T^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k, \qquad d\Omega^i = \sum \bar{T}^i_{jk}\, \Omega^j \wedge \Omega^k,$$

اگر هم‌ارزی برقرار باشد، $\mathfrak{g}^{(1)} = 0$ نتیجه می‌دهد که $T^i_{jk} = \bar{T}^i_{jk} \circ \phi$. ناورداهای ساختاری T^i_{jk} و در حالت کلی T_σ ها به ایجاد فضاها، مجموعه‌ها و منیفلدهای دسته‌بندی منجر گردید و در نهایت به قضیهٔ هم‌ارزی e–ساختارها که شرط لازم و کافی مسألهٔ هم‌ارزی $\phi^*\Omega = \omega$ بود رسیدیم که بر اساس همپوشانی منیفلدهای دسته‌بندی یک واحد بیشتر از مرتبهٔ یکسان نظیر به آن دو هم‌کنج بیان گردید. مشکل کار در این است که باید نگاشت ϕ از e–ساختارهای ω و Ω را پیدا کنیم. کارتان روشی را برای تولید این گونه نگاشت‌ها معرفی نموده است که وارنر آن را **تکنیک نمودار** می‌نامد [۴۳]. ایدهٔ حل نمودار ϕ است که آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma_\phi : U \longrightarrow U \times V : \qquad \Gamma_\phi(u) = (u, \phi(u)).$$

۱.۹.۵ قضیه. *فرض کنیم (U, ω) و (V, Ω) دو e–ساختار باشند و U همبند و π_U و π_V نگاشت‌های تصویر $U \times V$ بر U و V باشند. اگر دستگاه دیفرانسیل $\Delta_{U\times V} = \pi_U^*\, \omega - \pi_V^*\, \Omega$ کاملاً انتگرال‌پذیر باشد، در این صورت نگاشت $\phi : U \longrightarrow V$ هست که در شرط $\phi^*\, \Omega = \omega$ صادق باشد. بعلاوه اگر شرط $\phi(p) = q$ اضافه گردد، این نگاشت منحصربفرد است.*

اثبات. برای اثبات [۱۲] را مشاهده کنید. □

دیفیومورفیسم ϕ صادق در شرط $\phi^*\, \omega = \omega$ را اتومورفیسم e–ساختار می‌نامیم.

۲.۹.۵ نتیجه. *فرض کنیم U مجموعه‌ای باز و همبند باشد و e–ساختار ω را بر آن داشته باشیم. در این صورت هر اتومورفیسم با یک نقطهٔ ثابت، همانی است.*

از نتایج مهم قضیهٔ هم‌ارزی e–ساختارها نتایج زیر است [۱۲]:

۳.۹.۵ نتیجه. *فرض کنیم ω یک e–ساختار منظم در نقطهٔ p و از رتبهٔ ρ باشد، در این صورت مدارهای اتومورفیسم‌های*

ω موضعاً یک برگ‌بندی $(n-p)$–بعدی در همسایگی‌ای از p تعریف می‌نماید.

و در حالت خاص داریم:

۴.۹.۵ نتیجه. *فرض کنیم ω یک e–ساختار منظم باشد که $\rho = \circ$ یعنی تاب ثابت است، در این صورت اتومورفیسم‌ها موضعاً متعدی هستند.*

فرض کنیم که M یک منیفلد با e–ساختار ω باشد. با معرفی معادلات ساختاری زیر

$$d\omega^i = \frac{۱}{۲}\sum T^i_{jk}(x)\,\omega^j\wedge\omega^k, \qquad T^i_{jk} = -T^i_{jk},$$

e–ساختار را **انتگرال‌پذیر** می‌نامیم هرگاه برای هر i, j, k،

$$dT^i_{jk} = \circ,$$

یعنی توابع ساختاری همگی ثابت باشند. بنابراین گروه‌های لی، e–ساختارهای انتگرال‌پذیرند. بر عکس این مطلب نیز با درنظر گرفتن ملاحظاتی درست است. برای e–ساختار ω متر ریمانی به طور طبیعی وجود دارد

$$ds^۲ = \sum (\omega^i)^۲,$$

یک e–ساختار **کاملاً انتگرال‌پذیر** نامیده می‌شود هرگاه منیفلد M از نظر متری کامل باشد. حال قضیهٔ زیر را داریم:

۵.۹.۵ قضیه. *فرض کنیم M منیفلدی همبند و همبند ساده باشد که به e–ساختاری کاملاً انتگرال‌پذیر مجهز است. در این صورت M یک گروه لی است.*

اثبات. اثبات این قضیه را در بخش هفتم از [۱۲] می‌توانید مشاهده کنید. □

۶.۹.۵ مثال (ادامهٔ هندسه ریمانی). در انتهای بخش ۹.۲ دیدیم که ۱–فرمی منحصربفرد ω و نیز ۱–فرمی Φ به عنوان هم‌کنج‌های ناوردا بر $U\times G$ وجود داشتند. برای استفاده از قضیهٔ فوق جهت هم‌ارزی e–ساختارها نیاز داریم که Φ و $d\Phi$ را تجزیه و تحلیل نماییم. می‌دانیم که $\Phi = dS\,S^{-۱} + \theta_U(u,S)$ که $\theta_U(u,S)$ فرمی نیم اصلی است. چون Φ تحت انتقال چپ L_C بر G در رابطهٔ $L_C^*\,\Phi = C\,\Phi\,C^{-۱}$ صدق می‌کند (با توجه به معادلهٔ ساختاری $d\omega = \Phi\wedge\Phi$)، بنابراین داریم

$$L_C^*\,\theta_U(u, CS) = C\,\theta_U(u,S)\,C^{-۱}.$$

با فرض این که $C = S^{-۱}$ در می‌یابیم که

$$L^*_{S^{-۱}}\,\theta_U(u,e) = S^{-۱}\,\theta_U(u,S)\,S = \theta_U(u,e) \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_U(u,S) = S\,\theta_U(u)\,S^{-۱}.$$

ضرایب Γ^i_{jk} که توسط رابطهٔ $(\theta_U)^i_j = \sum \Gamma^i_{jk}\,\omega^k$ تعریف می‌شوند، نمادهای کریستوفل الصاق لوی–چیویتا نامیده می‌شوند. با تأثیر عملگر d بر معادلهٔ ساختاری فوق نتیجه می‌شود که

$$\circ = d(d\omega) = d\Phi \wedge \omega - \Phi \wedge d\omega = (d\Phi - \Phi \wedge \Phi) \wedge \omega.$$

قرار می‌دهیم $\Theta = d\Phi - \Phi \wedge \Phi$، با استفاده از اندیس‌ها داریم

$$\sum \Theta^i_j \wedge \omega^j = \circ, \qquad \Theta^i_j = -\Theta^j_i$$

و بنابراین $\Theta^i_j = \sum \psi^i_{jk} \wedge \omega^k$ که با جایگذاری در معادلهٔ آخر رابطهٔ $\sum \omega^j \wedge \psi^i_{jk} \wedge \omega^k = \circ$ حاصل می‌شود. با استفاده از ضرب گوه‌ای آن با $(n-۲)$ تا ۱–فرمی یعنی ω^k ها داریم

$$\omega^۱ \wedge \omega^۲ \wedge \cdots \wedge \omega^n \wedge (\psi^i_{jk} - \psi^j_{ik}) = \circ.$$

به طریق مشابه می‌توانیم ضرب گوه‌ای معادلهٔ حاصل از ψ^i_{jk} و $(n-۱)$ فرمی‌های متشکل از ω^k ها را درنظر گرفته و به کمک ماتریس کج متقارن Θ^i_j رابطهٔ زیر را نتیجه بگیریم

$$\omega^۱ \wedge \cdots \wedge \omega^n \wedge \psi^j_{ik} = -\omega^۱ \wedge \cdots \wedge \omega^n \wedge \psi^i_{jk}.$$

معادلهٔ اخیر بدان معنی است که

$$\begin{array}{ll} \psi^i_{jk} = -\psi^j_{ik} & \\ \psi^i_{jk} = \psi^i_{kj} & \end{array} \qquad \mathrm{mod}(\omega^۱, \cdots, \omega^n), \qquad (۲۰.۵)$$

۷.۹.۵ لم $S_۳$. *یک تانسور سه اندیسی C^i_{jk} که نسبت به دو اندیس متقارن و نسبت به دو اندیس دیگر کج متقارن است، همارز صفر است.*

اثبات. برای اثبات [۱۲] را ببینید. □

به کمک این لم از (۲۰.۵) نتیجه می‌شود که $\psi^i_{jk} \equiv \circ \quad \mathrm{mod}(\omega^۱, \cdots, \omega^n)$. در این صورت می‌بینیم که ψ^i_{jk} ها نیم اصلی هستند و می‌توانیم ضرایب زیر را تعریف کنیم

$$\psi^i_{jk} = \frac{۱}{۲} \sum S^i_{jkl}\omega^l, \qquad S^i_{jkl} = -S^i_{jlk}.$$

حال با استفاده از L^*_C داریم $\Theta_U(u,S) = S\,\Theta_U(u,e)\,S^{-۱}$. بنابراین می‌توان ضرایب زیر را تعریف نمود

$$\Theta_U(u,e) = \frac{۱}{۲} \sum R^i_{jkl}\omega^l, \qquad R^i_{jkl} = -R^i_{jlk},$$

که مؤلفه‌های **تانسور انحنای ریمان–کریستوفل** نامیده می‌شوند. △

۸.۹.۵ قضیه. *هر متر ریمانی تحت ایزومتری‌ها توسط نمادهای کریستوفل، تانسور انحنای ریمان و مشتق‌های آن تا مرتبهٔ $n+۱$ مشخص می‌گردد.*

این قضیه با تکرار قضیهٔ e−ساختارها در شرایط خاص هندسهٔ ریمانی اثبات می‌گردد [۱۲].

۱۰.۵ آزمون کارتان: شرط پیچشی بودن

ممکن در بررسی مسائل هم‌ارزی با موردی برخورد کنیم که به کاهش کامل گروه ساختاری منجر نگردد. یعنی با یک یا چند بار استفاده از حلقهٔ الگوریتم جذب و کاهش به هم‌کنجی برسیم که در نهایت یک یا چند پارامتر گروه در آن باقی مانده باشد و هیچ یک از ضرایب تاب اساسی باقی مانده به شکل صریح به پارامترهای گروه وابسته نباشد. در این صورت روش مذکور ترکیب ناوردای بیشتری را از متغیرها و پارامترهای گروه که امکان نرمال‌سازی پارامترهای گروه را فراهم کنند تولید نخواهد کرد. این مشکل از آنجا ناشی می‌شود که اگر بعد منیفلد زمینه (و در نتیجه تعداد عناصر هم‌کنج) برابر m و رتبهٔ هم‌کنج یعنی تعداد توابع ساختاری مستقل تابعی برابر r باشد، آنگاه گروه تقارنی یک گروه لی $(m-r)$−بعدی است و بنابراین بعد گروه تقارنی نباید از بعد منیفلد بیشتر باشد، در حالی که در برخی مسائل این بعد بیشتر از بعد فضایی است که مسأله در آن فرمول‌بندی شده است. مثلاً بعد گروه تقارن نقطه‌ای معادله دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم اسکالر $u_{xx}=۰$ برابر ۸ است در حالی که فضای فرمول‌بندی مسألهٔ هم‌ارزی به فرم کارتان فضای جت ۳ بعدی $(J^۱)$ است. اگر همین معادله را تحت تبدیلات برخوردی درنظر بگیریم، بعد گروه تقارنی برخوردی نامتناهی است [۳۹].

کارتان خود به خوبی با این موارد درگیر بوده است. برای تکمیل مسألهٔ هم‌ارزی در این گونه مسائل دو روش متفاوت مورد نیاز است. در مورد اول که بعد گروه تقارنی متناهی است ولی بعد آن بیشتر از بعد فضای زمینه است، چارهٔ کار استفاده از **امتداددهی** است (که موضوع بحث بخش بعد است). مسألهٔ دوم مربوط به حالتی است که گروه تقارنی دارای بعد نامتناهی است، که در آن از قضیهٔ فروبنیوس مربوط به آن نمی‌توان استفاده کرد. ولی از قضیهٔ وجودی کارتان−کهلر برای حل آن می‌توان بهره برد. این قضیهٔ قدرتمند نتیجهٔ قضیهٔ وجودی کوشی−کوالسکی از دستگاه‌های تحلیلی از معادلات با مشتق‌های جزیی است و تنها برای مسائل هم‌ارزی تحلیلی قابل استفاده است. وجود گروه تقارنی نامتناهی بعد نتیجه‌ای از **پیچشی بودن** دستگاه دیفرانسیلی معین است که توسط معادلات ساختاری هم‌کنج ترفیع یافته حاصل می‌شود.

این که مسألهٔ هم‌ارزی را امتداد دهیم (برای گروه تقارنی متناهی بعد) و یا این که (برای گروه تقارنی نامتناهی بعد) مسأله را امتداد ندهیم، بر اساس آزمون پیچش کارتان مشخص می‌گردد. در این بخش به بیان این آزمون می‌پردازیم.

فرض کنیم مسألهٔ هم‌ارزی بر یک هم‌کنج ترفیع یافتهٔ $\theta=\{\theta^۱,\dots,\theta^m\}$ داده شده باشد که عناصر آن ۱−فرمی‌های روی فضای حاصلضربی $(m+r)$−بعدی $M\times G$ هستند، یعنی ضرایب آنها به پارامتر گروه نیز وابسته است. در اینجا r نمایشگر بعد گروه ساختاری (کاهش یافته) است که برای سادگی آن را نیز با G نشان می‌دهیم. معادلات ساختاری

هم‌کنج را به فرم زیر در نظر می‌گیریم

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} A^i_{jk}\, \alpha^k \wedge \theta^j + \sum_{j,k=1}^{m} T^i_{jk}\, \theta^j \wedge \theta^k, \qquad i = 1, \cdots, m,$$

این معادلات در [۱۲] به عنوان **دستگاه دیفرانسیل خارجی شبه—خطی** معرفی شده است. وقتی که α^k ها پایه‌ای برای فرم‌های مورر—کارتان ناوردای راست بر G تشکیل می‌دهند و ضرایب ساختاری A^i_{jk} ها ثابت هستند و تنها در این حالت بحث را ادامه می‌دهیم؛ در واقع فرض می‌کنیم که هیچ یک از ضرایب تاب اساسی (جذب نشده) به طور صریح به پارامترهای گروه وابسته نباشد و بنابراین تاب دیگری برای نرمال‌سازی باقی نمی‌ماند. با جایگزینی فرم مورر—کارتان α^k با یک ترکیب خطی دلخواه از عناصر هم‌کنج به صورت $\sum z^k_j\, \theta^j$ (که ضرایب نامعین z^k_j ها هستند) داریم

$$\sum [A^i_{jk}\, z^k_k - A^i_{kk}\, z^k_j] = T^i_{jk}, \qquad i, j, k = 1, \cdots, m.$$

برای حل دستگاه خطی فوق برخی از متغیرهای z^k_j باید تعیین شوند و مابقی به عنوان مقادیر دلخواه درنظر گرفته شوند. سپس مشخصه‌های کارتان کاهش یافته را معرفی می‌نماییم که به معادلات ساختاری نظیر می‌گردند. فرض کنیم $v = (v^1 \cdots, v^m)$ برداری در $\mathbb{R}^m$ باشد. $L[v]$ را ماتریسی $m \times r$ می‌گیریم که درایه‌های آن به صورت زیر هستند

$$L^i_k[v] = \sum_{j=1}^{m} A^i_{jk}\, v^j, \qquad i = 1, \cdots, m, \qquad k = 1, \cdots, r.$$

بنابراین $L[v]$ همان ماتریس ضرایب فرم‌های مورر—کارتان α^k در معادلات ساختاری است که با جایگذاری عناصر هم‌کنج θ^i با عناصر متناظر v^i از v حاصل شده است. رتبهٔ $L[v]$ به بردار بخصوص v بستگی دارد. یک کمیت مهم عددی ماکسیمم رتبهٔ ماتریس $L[v]$ است وقتی که روی همهٔ بردارهای ممکن $v \in \mathbb{R}^m$ تغییر می‌کند. آن را اولین **مشخصهٔ کاهشی** هم‌کنج ترفیع یافته می‌نامند که با نماد زیر معرفی می‌گردد

$$s'_1 = \max\{\operatorname{rank} L[v] \ :\ v \in \mathbb{R}^m\}.$$

دومین مؤلفهٔ کاهشی s'_2 با محاسبهٔ ماکسیمم رتبهٔ ماتریس $2m \times r$ حاصل از چسباندن دو نسخه از ماتریس قبل به هم بدست می آید و به یک جفت بردار متفاوت، از این دو نسخه نظیر می‌شود. در واقع s'_2 از معادلهٔ زیر بدست می آید

$$s'_1 + s'_2 = \max\left\{\operatorname{rank} \begin{pmatrix} L[v_1] \\ L[v_2] \end{pmatrix} \ :\ v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m\right\}.$$

می‌توان به روش مشابه مشخصه‌های کاهشی مراتب بالاتر (بجز s'_m) را نیز به کمک استقراء بیان نمود.

۱.۱۰.۵ تعریف. فرض کنیم θ هم‌کنج ترفیع یافته‌ای بر منیفلد m—بعدی M و G گروه ساختاری r—بعدی آن باشد. اولین $m - 1$ مشخصهٔ کاهشی $s'_1, \cdots, s'_{m-1}$ از هم‌کنج توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌شوند

$$s'_1 + \cdots + s'_k = \max\left\{\operatorname{rank} \begin{pmatrix} L[v_1] \\ \vdots \\ L[v_k] \end{pmatrix} \ :\ v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^m\right\}.$$

وقتی که $۱ \leq k \leq m - ۱$، $L(v_i)$ ها ماتریس‌های $m \times r$ هستند و $s'_i \geq ۰$. آخرین مشخصهٔ کاهشی نیز توسط رابطهٔ $s'_۱ + \cdots + s'_{m-۱} + s'_m = r$ تعریف می‌شود.

انگیزهٔ اصلی این تعریف از مشخصه‌های کاهشی در حالت خاصی از نظریهٔ کارتان برای دستگاه‌های دیفرانسیل خارجی می‌باشد.

۲.۱۰.۵ تعریف. فرض کنیم θ هم‌کنج ترفیع یافته با مشخصه‌های کاهشی $s'_۱, \cdots, s'_m$ باشد و تعداد متغیرهای آزاد در حل دستگاه جذبی خطی متناظر به آن یعنی درجهٔ ابهام را با $r^{(۱)}$ نشان دهیم. در این صورت θ **پیچشی** است اگر و تنها اگر در **آزمون کارتان** صدق کند:

$$s'_۱ + ۲\, s'_۲ + \cdots + m\, s'_m = r^{(۱)}.$$

همان گونه که بیان خواهیم کرد، نتیجه از بحث آن است که همهٔ هم‌کنج‌های پیچشی که دارای معادلات ساختاری برابرند، هم‌ارز هستند و همگی دارای گروه تقارنی نامتناهی بعد و متعدی هستند. در مقابل اگر تاب‌های اساسی ثابت نباشند، آن حالت‌ها را نامتعدی می‌نامند.

۳.۱۰.۵ قضیه. *فرض کنیم θ و $\bar{\theta}$ دو هم‌کنج ترفیع یافته تحلیلی بر منیفلدهای m–بعدی (به ترتیب) M و $\bar{M}$ و گروه ساختاری یکسان G باشند. اگر θ و $\bar{\theta}$ هر دو پیچشی باشند (در آزمون کارتان صدق کنند) و تمامی ضرایب تاب اساسی در دو مجموعهٔ معادلات ساختاری یکسان باشند، آنگاه θ با $\bar{\theta}$ هم‌ارز است اگر و تنها اگر دارای تاب اساسی ثابت باشند. بعلاوه اگر $s'_k > ۰$ آخرین مشخصهٔ غیر صفر باشد، یعنی برای $l > k$ داشته باشیم $s'_l = ۰$، در این صورت مجموعهٔ (تحلیلی) هم‌ارزی‌ها به s'_k تابع تحلیلی دلخواه بستگی دارد که هر یک از این توابع خود به k متغیر وابسته است.*

اثبات. اثبات این قضیه را در [۳۹] می‌توانید مشاهده کنید. □

۴.۱۰.۵ نتیجه. *هر هم‌کنج تحلیلی پیچشی دارای گروه تقارنی نامتناهی بعد و وابسته به s'_k تابع تحلیلی دلخواه از k متغیر است.*

به گروه‌های تقارنی نامتناهی بعد که از هم‌کنج‌های تحلیلی پیچشی حاصل می‌شوند **شبه–گروه‌های نامتناهی** می‌گویند.

۵.۱۰.۵ قضیه. *همهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم، تحلیلی و نامنفرد، تحت تبدیلات برخوردی (موضعی) هم‌ارز هستند. بعلاوه هر معادله دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم تحلیلی دارای یک گروه تقارنی نامتناهی بعد از تبدیلات برخوردی است که به دو تابع تحلیل از دو متغیر بستگی دارد و بنابراین با نامتناهی روش آن را به دیگری می‌توان تبدیل نمود.*

اثبات. جهت مشاهدهٔ اثبات به مرجع [۳۹] رجوع نمایید. □

در حالتی که ضرایب تاب اساسی ثابت نیستند (و به هیچ پارامتر گروه باقی مانده بستگی ندارند)، این ضرایب ناورداهای مسأله را تعریف می‌کنند و مشمول در شرایط هم‌ارزی هستند. همانند هم‌ارزی هم‌کنج‌ها باید مشتق هم‌کنجی آنها را نسبت به هم‌کنج ترفیع یافته که باز هم ناوردا خواهند بود، پیدا کنیم. چون هنوز پارامترهای گروه نرمال‌سازی نشده در عناصر هم‌کنج ترفیع یافته وجود دارند، ممکن است برخی از این ناورداهای مشتقی به این پارامترهای گروه بستگی داشته باشند. اگر این اتفاق برای یک ناوردای مشتقی رخ دهد، در این صورت هر یک از ناورداهای مشتقی یک ترکیب ناوردا وابسته به گروه را بوجود می‌آورد که توسط تعیین یک یا چند پارامتر گروه باقی مانده به یک مقدار ثابت مناسب نرمال سازی می‌گردد. بنابراین به کمک این نرمال‌سازی‌ها کاهش گروه بیشتری خواهیم داشت و این عمل را تا رسیدن به فرم عادی مسائل هم‌ارزی می‌توان ادامه داد. در نتیجه در حالت نامتعدی نیاز داریم فرض کنیم که نه تنها ضرایب تاب اساسی بلکه تمامی مشتق‌های هم‌کنجی آنها نیز مستقل از پارامترهای گروه باقیمانده هستند. قبلاً در بخش دیده‌ایم که مجموعهٔ چنین ناورداهای مشتقی حداکثر تا مرتبه‌ای مانند s مؤلفه‌های نگاشت ساختاری $T^{(s)}$ را بوجود می آورند که در حالت منظم منیفلدهای دسته‌بندی $\mathcal{C}^{(s)}(\theta)$ را پارامتری می‌کنند. نتیجهٔ نهایی چنین است:

۶.۱۰.۵ قضیه. *فرض کنیم θ و $\bar\theta$ دو هم‌کنج ترفیع یافته تحلیلی و منظم بر منیفلد m–بعدی M با گروه ساختاری یکسان G باشند که $s'_1 + 2\, s'_2 + \cdots + m\, s'_m = r^{(1)}$. بعلاوه فرض کنیم همهٔ ضرایب تاب اساسی و مشتق‌های هم‌کنج آنها مستقل از پارامترهای گروه باشند و خانواده‌ای منظم تشکیل دهند و بنابراین منیفلد دسته‌بندی را برای هر هم‌کنج پارامتری کنند. در این وضعیت θ و $\bar\theta$ موضعاً هم‌ارز هستند اگر و تنها اگر دارای مرتبهٔ یکسانی باشند: $s = \bar s$ و منیفلدهای دسته‌بندی مرتبهٔ $(s+1)$ام آنها یعنی $\mathcal{C}^{(s)}(\theta)$ و $\mathcal{C}^{(\bar s)}(\bar\theta)$ همپوشان باشند. بعلاوه گروه تقارنی این هم‌کنج‌ها (و در نتیجه مجموعهٔ هم‌ارزی‌های آنها) نامتناهی بعد است و به s'_k تابع دلخواه از k متغیر بستگی دارد که s'_k حداکثر مشخصهٔ کاهشی غیر صفر از معادلات ساختاری است.*

اثبات. برای دیدن اثبات به مرجع [۳۹] رجوع نمایید. □

۷.۱۰.۵ مثال. همهٔ ۲–فرمی‌های غیر بسته، تحلیلی و نامنفرد روی یک منیفلد ۳–بعدی موضعاً هم‌ارز هستند. در حالت خاص $\Omega = e^z\, dx \wedge dy$ یک شکل کانونی برای چنین ۲–فرمی‌هاست. گروه تقارنی نیز به ۲ تابع دلخواه از ۲ متغیر وابسته است. زیرا:

اگر $\Omega \neq 0$ ۲–فرمی غیر صفری باشد که بر زیر مجموعهٔ باز $M \subset \mathbb{R}^3$ تعریف شده است، آنگاه در هر نقطهٔ از M رتبهٔ آن برابر با ۱ است. بنابراین ۱–فرمی‌های مستقل خطی ω^1 و ω^2 وجود دارند که (به صورت موضعی) $\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2$.
اگر Ω بسته باشد، یعنی $d\Omega = 0$، در این صورت تنها یک فرم کانونی داربو مرتبهٔ ۱ $\Omega = dx \wedge dy$ خواهد داشت (برای دیدن جزییات مطلب به بخش ۳۰.۱ از [۳۹] رجوع کنید). حال فرض کنیم Ω بسته نباشد. در این حالت می‌توانیم

۱—فرمی مستقل سومی مانند ω^3 هست که هم‌کنج را کامل می‌کند و

$$d\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0.$$

هر جفت از چنین ۲—فرمی‌هایی هم‌ارز هستند اگر و تنها اگر هم‌کنج‌های نظیر به آنها در رابطهٔ زیر صادق باشند

$$\begin{pmatrix} \bar\omega^1 \\ \bar\omega^2 \\ \bar\omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}, \qquad a_1\, a_4 - a_2\, a_3 = 1 \quad \text{وقتی که}$$

که به یک گروه ساختاری پنج پارامتری منجر می‌شود. هم‌کنج ترفیع یافته به صورت زیر است

$$\theta^1 = a_1\, \omega^1 + a_2\, \omega^2, \qquad \theta^2 = a_3\, \omega^1 + a_4\, \omega^2, \qquad \theta^3 = b_1\, \omega^1 + b_2\, \omega^2 + \omega^3.$$

بعد از فرآیند جذب، معادلات ساختاری به شکل زیر خواهند بود

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \alpha^1 \wedge \omega^1 + \alpha^2 \wedge \omega^2, \\ d\theta^2 &= \alpha^3 \wedge \omega^1 - \alpha^1 \wedge \omega^2 - T\,\theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 &= \beta^1 \wedge \omega^1 + \beta^2 \wedge \omega^2, \end{aligned}$$

وقتی که ضریب تاب اساسی $T = -T^1_{13} - T^2_{23}$ برابر با منفی مجموع ضرایب $\theta^1 \wedge \theta^3$ در $d\theta^1$ و $\theta^2 \wedge \theta^3$ در $d\theta^2$ است و منفی به خاطر این است که $\Omega = \theta^1 \wedge \theta^2 = \omega^1 \wedge \omega^1$. داریم

$$d\Omega = d\theta^1 \wedge \omega^2 - \theta^1 \wedge d\omega^2 = T\,\theta^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = T\,\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = T\,\Omega.$$

حال چون $d\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$، پس $T = 1$ ثابت است و امکان نرمال‌سازی وجود ندارد. معادلات ساختاری در این حالت پیچشی هستند زیرا درجهٔ ابهام برابر است با $r^{(1)} = 7$ و مشخصه‌های کاهش نیز عبارتند از $s'_1 = 3,\ s'_2 = 2,\ s'_3 = 0$. بنابراین یک ساختار پیچشی متعدی داریم و نتیجه مورد نظر حاصل می‌گردد. $\triangle$

قضیهٔ اخیر توسط گاردنر و شادویک در [۱۳] به هم‌ارزی یک ۲—فرم به همراه برداری از $\mathbb{R}^3$، تعمیم داده شده است. در این وضعیت مسأله نامتعدی است. جزییات بررسی مسألهٔ هم‌ارزی آن در انتهای فصل ۱۱ از مرجع [۳۹] بیان گردیده است.

۱۱.۵ امتداددهی مسائل هم‌ارزی

در بخش گفتیم که در شرایطی که مسألهٔ هم‌ارزی به کاهش کامل گروه ساختاری منجر نمی‌شود و معادلات ساختاری نیز پیچشی نیستند و گروه تقارنی متناهی بعد است، با فرآیند **امتداددهی** سر و کارخواهیم داشت. برای سادگی گروه کاهش یافته را نیز با G نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم بعد آن $r > 0$ باشد. بعلاوه فرض می‌کنیم که آزمون پیچشی بودن کارتان برای آن برقرار نیست و بنابراین $r^{(1)} < s'_1 + 2\,s'_2 + \cdots + m\,s'_m$. قضیهٔ کارتان—کهلر نتیجه خاصی حاصل نمی‌کند زیرا شرایط اضافی‌ای وجود دارند که باید نگاشت هم‌ارزی مطلوب در آنها صادق باشد. بنابراین مجبور

هستیم که دستگاه را توسط متغیرهای اضافی امتداددهی کنیم. کارتان توجه کرد که یک انتخاب طبیعی از این متغیرهای اضافی برگزیدن پارامترهای گروه باقیمانده است. به عبارت دیگر مسألهٔ هم‌ارزی امتداد یافته برحسب هم‌کنج روی منیفلد $(m+r)$–بعدی $M^{(1)} = M \times G$ فرمول‌بندی می‌گردد. هم‌کنج مورد نیاز شامل هم‌کنج اصلی θ^i ها و بعلاوه فرم‌های مورر—کارتان مناسب اضافه شده است. مسأله را به دو حالت زیر تقسیم می‌کنیم.

۱.۱۱.۵ حالت تعیین شده

این حالت ساده‌ترین شکل بحث است. فرض کنیم که بعد از نرمال سازی و کاهش‌های مورد نیاز، دستگاهی از معادلات ساختاری با درجهٔ ابهام $r^{(1)} = 0$ بدست آوریم. در این حالت دستگاه را **تعیین شده** می‌نامیم تا آن را از حالت کلی‌تر $r^{(1)} > 0$ تمییز دهیم. توجه داریم که در حالت تعیین شده، معادلات ساختاری پیچشی نیست زیرا مشخصه‌های کاهشی همگی با هم صفر نیستند و بنابراین آزمون کارتان برقرار نیست. در این مرحله، فرآیند جذب را با جذب نمودن همهٔ ضرایب تاب اساسی (ممکن) تکمیل می‌نماییم و در نتیجه دستگاهی به فرم زیر خواهیم داشت

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} A^i_{jk}\,\pi^k \wedge \theta^j + \sum_{j,k=1}^{m} U^i_{jk}\,\theta^j \wedge \theta^k, \qquad i = 1, \cdots, m,$$

که در آن U^i_{kj} ها نمایانگر ضرایب تاب اساسی جذب نشده‌اند که به پارامترهای گروه باقیمانده بستگی ندارند. ضرایب تاب اساسی ناوردا هستند یعنی برای دو هم‌کنج هم‌ارز θ و $\bar\theta$ داریم $\bar U^i_{jk} = U^i_{jk}$.

۱—فرمی‌های $\{\pi^1, \cdots, \pi^r\}$ به پیمانهٔ θ با فرم‌های مورر—کارتان $\{\alpha^1, \cdots, \alpha^r\}$ یکی هستند:

$$\pi^k = \alpha^k - \sum_{j=1}^{m} z^k_j\,\theta^j, \qquad k = 1, \cdots, r,$$

وقتی که ضرایب جذبی z^k_j با جوابی از معادلهٔ جذبی $\sum [A^i_{jk}\, z^k_k - A^i_{kk}\, z^k_j] = T^i_{jk}$ برای $1 \le i, (j<k) \le m$ جایگزین شده است. در حالت کلی در تعیین ضرایب جذب z^k_j ابهام وجود دارد زیرا می‌توانیم هر جوابی از دستگاه خطی همگن متناظر $\sum [A^i_{jk}\, z^k_k - A^i_{kk}\, z^k_j] = 0$ را اضافه نماییم بدون این که اثری در جواب داشته باشد. با این وجود در حالت تعیین شده، فرض می‌کنیم $r^{(1)}$ که برابر بعد فضای جواب دستگاه همگن است، برابر صفر باشد. بنابراین ضرایب $z^k_j = S^k_j(x, g)$ به صورت منحصربفرد معین می‌گردند و تنها جواب دستگاه همگن از معادلات ۲—فرمی

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} A^i_{jk}\,\pi^k \wedge \theta^j = 0, \qquad i = 1, \cdots, m. \tag{۵.۲۱}$$

بدیهی است یعنی برای هر $k = 1, \cdots, r$ داریم $\pi^k = 0$. حال فرض کنیم $\phi : M \longrightarrow \bar M$ یک هم‌ارزی باشد که $\phi^*\,\bar\theta^i = \theta^i$ و هم‌کنج‌های ترفیع یافته را برای برخی پارامترهای گروه $g = g(x)$ و $\bar g = \bar g(\bar x)$ حفظ می‌کند. بنابراین داریم $\phi^*\,d\bar\theta^i = d\theta^i$. با جایگذاری معادلات ساختاری (۵.۲۱) و روابط نظیر به آنها از هم‌کنج دوم در معادلات فوق (پس از حذف پول—بک) داریم

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} A^i_{jk}\,\bar\pi^k \wedge \bar\theta^j + \sum_{j,k=1}^{m} \bar U^i_{jk}\,\bar\theta^j \wedge \bar\theta^k = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} A^i_{jk}\,\pi^k \wedge \theta^j + \sum_{j,k=1}^{m} U^i_{jk}\,\theta^j \wedge \theta^k.$$

از آنجا که اعضای هم‌کنج ترفیع یافته و ضرایب تاب اساسی ناوردا هستند، دومین عبارت از جمع‌های دو طرف قابل حذف هستند و در نتیجه شرط ناوردایی زیر را داریم

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} A^i_{jk}\,[\bar\pi^k-\pi^k]\wedge\bar\theta^j=0,\qquad i=1,\cdots,m.$$

فرض ما مبنی بر معین بودن مسأله ایجاب می‌کند که فرم‌های مورر—کارتان ϕ^k نیز ناوردا باشند: $\bar\phi^k=\phi^k$. مسأله را با افزایش تعداد متغیرها امتداد می‌دهیم. همان گونه که ذکر شد برای این منظور پارامترهای گروه را اضافه می‌کنیم. پس باید مسألهٔ هم‌ارزی را بر فضای امتدادی $M^{(1)}=M\times G$ از نو فرمول‌نویسی نماییم. در ضمن می‌دانیم که هم‌کنج‌های ناوردا بر $M^{(1)}$ به صورت هم‌کنج‌های ترفیع یافتهٔ اصلی یعنی $\theta=g\cdot\omega$ هستند که در آن پارامترهای گروه به عنوان متغیرهای مستقل جدید فرض می‌شوند.

۱.۱.۱۱.۵ گزاره. ([۳۹]) *فرض کنیم $\theta=g\cdot\omega$ و $\bar\theta=\bar g\cdot\bar\omega$ هم‌کنج‌های ترفیع یافته با گروه ساختاری یکسان G باشند که ضرایب تاب اساسی به گروه وابسته نیست و $r^{(1)}=0$. همچنین فرض کنیم π و $\bar\pi$ فرم‌های مورر—کارتان اصلاحی حاصل از معادلات جذب باشند. در این صورت دیفیومورفیسم $\phi:M\longrightarrow\bar M$ وجود دارد که با انتخاب برخی پارامترهای گروه $g=g(x)$ و $\bar g=\bar g(\bar x)$، $\bar\theta$ را به θ می‌نگارد، اگر و تنها اگر دیفیومورفیسم ψ باشد که $\psi:M\times G\longrightarrow\bar M\times\bar G$ که $(\bar\theta,\bar\pi)$ را به (θ,π) بنگارد.*

از نتایج مهم این حالت گزاره و قضایای زیر است که جهت مشاهدهٔ اثبات می‌توانید به فصل ۱۲ از [۳۹] رجوع نمایید:

۲.۱.۱۱.۵ گزاره. *فرض کنیم S رویه‌ای با اولین فرم اساسی ds^2 و انحنای گاوسی κ باشد. در این صورت گروه ایزومتری‌ها، یک گروه لی با حداکثر بعد ۳ است. بعلاوه بعد گروه ایزومتری‌ها ۳ است اگر و فقط اگر رویه با انحنای گاوسی ثابت باشد که در این حالت مؤلفهٔ همبندی گروه تقارنی*

- *ساختار $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ را داراست هرگاه $\kappa<0$ (یعنی هندسهٔ هذلولوی)،*
- *ساختار $\mathrm{SE}(2,\mathbb{R})$ را داراست هرگاه $\kappa=0$ (یعنی هندسهٔ اقلیدسی) و*
- *ساختار $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ را داراست هرگاه $\kappa>0$ (یعنی هندسهٔ کروی).*

۳.۱.۱۱.۵ قضیه. *یک مجموعهٔ کامل از ناورداهای ساختاری برای یک منیفلد ریمانی توسط مؤلفه‌های ناوردای تانسورهای انحنای مراتب بالاتر فراهم می‌گردند که برای $k=0,1,\cdots$ آنها را با (مشتق کواریان) $\nabla^k\mathcal{R}$ نشان می‌دهیم. در حالت خاص دو منیفلد ریمانی موضعاً ایزومتر هستند وقتی و فقط وقتی که تانسورهای انحنای آنها منیفلدهای دسته‌بندی هم‌پوشان را پارامتری کنند.*

۴.۱.۱۱.۵ قضیه. *گروه ایزومتری‌های منیفلد ریمانی m–بعدی حداکثر از بعد $\frac{1}{2}m(m+1)$ است. بعلاوه گروه ایزومتری دارای حداکثر بعد است اگر و تنها اگر دارای انحنای اسکالر ثابت باشد و بنابراین موضعاً*

- *با $\mathbb{R}^m$ همراه با گروه ایزومتری $\mathrm{E}(m)$، یا*
- *با کرهٔ S^m با گروه ایزومتری $\mathrm{O}(m+1,\mathbb{R})$ و یا*
- *با فضای هذلولوی $\mathbb{H}^m$ همراه با گروه ایزومتری $\mathrm{O}(m,1)$ ایزومتر می‌باشد.*

۲.۱۱.۵ حالت تعیین نشده

زمانی که $r^{(1)} > 0$ حالت نامعین اتفاق می‌افتد. در این حالت فرآیند امتداددهی مانند قبل است ولی هر پارامتر گروه آزاد در جواب معادلات جذبی یک پارامتر گروه جدید را فراهم می‌آورد که اگر بخواهیم مسألهٔ امتدادی را حل کنیم باید نرمال‌سازی شود. فرم‌های مورر–کارتان اصلاحی نیز مانند حالت قبل هستند. در حالت تعیین شده z_j^k ها به طور کامل توسط متغیرهای پایه و گروه بیان می‌شدند. در این حالت (تعیین نشده) تعدادی از z_j^k ها (یعنی $r^{(1)}$ تا از آنها) متغیرهای آزاد هستند و به صورت ناوردا توسط معادلات جذب تشریح نمی‌شوند. اگر متغیرهای آزاد $w^\mu,\ 1 \leq \mu \leq r^{(1)}$ به گونه‌ای انتخاب شوند که جواب‌های عمومی دستگاه جذب خطی

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} A_{jk}^i\,\pi^k \wedge \theta^j + \sum_{j,k=1}^{m} T_{jk}^i\,\theta^j \wedge \theta^k, \qquad i = 1,\cdots,m,$$

به فرم $z = K[w]+S$ باشند، وقتی که K نگاشتی خطی و S برداری وابسته به x و g است. بنابراین عمومی‌ترین مجموعه از ۱–فرمی‌ها که جواب معادلات جذب است به شکل زیر خواهد بود

$$\pi = \alpha - (K[w] + S)\,\theta. \qquad (۲۲.۵)$$

هم‌ارزی هم‌کنج‌های ترفیع یافته و دیفرانسیل‌هایشان ایجاب می‌کنند که برای بعضی پارامتر گروه $g = g(x)$ و متغیرهای آزاد $w = w(x)$، فرم‌های جدید π نیز تحت نگاشت هم‌ارزی، ناوردا باشند. در نتیجه فرآیند امتداددهی به معرفی هم‌کنج ترفیع یافته بر فضای امتدادی منجر می‌گردد که آن را مانند حالت تعیین شده، $M^{(1)} = M \times G$ درنظر می‌گیریم. هم‌کنج روی $M^{(1)}$ نیز شامل m تا ۱–فرمی از هم‌کنج ترفیع یافتهٔ $\theta = g \cdot \omega$ و r تا فرم مورر–کارتان اصلاحی به صورت زیر است

$$\varpi = \alpha + S\,\theta \quad : \qquad \varpi^i = \alpha^i + \sum_{j=1}^{m} S_j^i\,\theta^j,$$

که از جواب‌های عمومی (۲۲.۵) از معادلات جذب و مساوی صفر قرار دادن متغیرهای آزاد $(w = 0)$ بدست می‌آیند. θ و ϖ باید هم‌کنج‌هایی بر $M^{(1)}$ باشند. متغیرهای آزاد w گروه ساختاری جدید $G^{(1)}$ را پارامتری می‌کنند:

$$G^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ K[w] & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \ :\ w \in \mathbb{R}^{r^{(1)}} \right\},$$

که زیرگروه آبلی $\mathrm{GL}(m+r,\mathbb{R})$ است. هم‌کنج ترفیع یافته بر فضای امتدادی $M^{(1)} \times G^{(1)} = M \times G \times G^{(1)}$ از هم‌کنج ترفیع یافتهٔ اصلی θ در کنار فرم‌های مورر–کارتان اصلاحی $\pi = \varpi + K[w]\,\theta$ تشکیل می‌گردد.

۱.۲.۱۱.۵ گزاره. ([۳۹]) *فرض کنیم (θ, π) و $(\bar\theta, \bar\pi)$ دو هم‌کنج امتدادی ترفیع یافته باشند. در این صورت دیفیومورفیسم $\phi : M \longrightarrow \bar M$ موجود است که $\bar\theta$ را به θ با انتخاب برخی پارامترگروه $g = g(x)$ و $\bar g = \bar g(\bar x)$ می‌نگارد اگر و تنها اگر دیفیومورفیسم $\phi : M \times G \longrightarrow \bar M \times \bar G$ برای برخی پارامترگروه امتدادی $w = w(x)$ و $\bar w = \bar w(\bar x)$، (θ, π) را به $(\bar\theta, \bar\pi)$ بنگارد.*

به عنوان کاربردی از بحث قضیهٔ زیر را داریم که اثبات آن را در فصل ۱۲ از [۳۹] می‌توانید ملاحظه کنید:

۲.۲.۱۱.۵ قضیه. *فرض کنیم $u_{xx} = Q(x, u, u_x)$ یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم باشد. سه شرط زیر با هم معادلند:*

- *معادلات گروه تقارنی حافظ تار ۶ —بعدی می‌پذیرند،*
- *معادلات به کمک یک تبدیل حافظ تار به معادلهٔ $u_{xx} = 0$ نگاشته می‌شوند،*
- *$Q(x, u, u_x) = \frac{1}{2} M_u u_x^2 + M_x u_x + N$ که M و N توابعی از x و u و صادق در رابطهٔ زیر می‌باشند:*

$$M_{xxu} + (N M_u)_u - M_x M_{xu} - 2 N_{uu} = 0.$$

۱۲.۵ الگوریتم مسألهٔ هم‌ارزی

بنابر آنچه که تاکنون مشاهده گردید، مسألهٔ هم‌ارزی ابزاری بسیار قدرتمند برای دسته‌بندی و بررسی عمیق اشیای هندسی است. پیدا کردن طرح کلی آن —چیزی که در ذهن کارتان برای این طبقه‌بندی وجود داشته است— کار ساده‌ای نبوده است [۳۵]. به عنوان مثال هرمن وایل [۴۶] در بازبینی کتابی از کارتان گفته است:

> باید اقرار کنم که این کتاب را نیز همانند بیشتر مقالات کارتان به سختی می‌توان خواند. اگر تنها دلیل این موضوع این باشد که نحوهٔ مرسوم در نوشتن متون هندسی فرانسوی، بیان مطالب در سطوح عالی است، یعنی همانند آنچه که کارتان آن را ترسیم نموده است؛ و شکل و محتوایی که کارتان برای حفظ زمینه‌ای مشترک با سایر هندسه‌دانان کمابیش به کار برده است؛ با این حال آیا به خاطر این که ما در سایر کشورها متولد شده و تحصیل کرده‌ایم، این مفاهیم نباید به اشتراک گذاشته شود؟

و همچنین سینگر و اشتنبرگ [۴۵] در مقاله‌ای اذعان می‌دارند که:

> ما اکنون تعدادی از فرمول‌های اساسی را با استفاده از نمایش مختصاتی بازنویسی کرده‌ایم با این هدف که اندک رهنمونی به سوی فهم نوشته‌های الی کارتان در مورد گروه‌های نامتناهی و مسألهٔ هم‌ارزی فراهم آوریم. باید اعتراف کنیم که اکثر مقالات وی از حیث دنبال کردن مفاهیم، در نهایت سختی است و نمی‌توان همهٔ مباحث را تا رسیدن به جزییات دنبال کرد.

به هر حال، بعد از سالها تلاش در این زمینه الگوریتم‌هایی برای بیان ماهیت موضوع و تشریح روش هم‌ارزی پیدا شده است که تا حدودی به بیان موضوع کمک می‌کند. الگوریتمی که در ادامه مطرح می‌شود، بر اساس یافته‌های گاردنر است [۱۲] که سعی شده با استفاده از روش‌های دیگر موجود (مانند روش الور [۳۹]) و نیز تجربیات نویسنده تکمیل و بهینه گردد.

روش هم‌ارزی شرح داده شده در بخش‌های قبل را می‌توان در الگوریتم زیر خلاصه کرد:

۱. انتخاب گروه G و مجموعه‌ای از ۱–فرمی‌های ω_U بر مجموعهٔ باز U از منیفلد M،

۲. آیا مسأله معین است؟ اگر جواب مثبت است به مرحلهٔ پنجم می‌رویم، در غیر این صورت به یکی از دو مرحلهٔ بعد می‌رویم،

۳. اگر مسأله پایین معین است با گسترش مجموعهٔ ۱–فرمی‌ها و انتخاب گروه مناسب به هم‌کنج مناسب به مرحلهٔ پنجم می‌رویم،

۴. اگر مسأله فوق معین است با پیروی از روش هم‌ارزی فوق معین و انتخاب هم‌کنج ناوردا و گروه مربوط به مرحلهٔ پنجم می‌رویم،

۵. ترفیع هم‌کنج،

۶. یافتن هم‌کنج $dS\,S^{-1}$ و روابط تعریف شده بر حسب دیفرانسیل هم‌کنج، جهت ایجاد معادلات ساختاری،

۷. تجزیه ضرایب اساسی،

۸. جذب سازگار با جبر لی،

۹. محاسبهٔ عمل بینهایت کوچک بر تانسور ساختاری،

۱۰. آیا این عمل بدیهی است؟ در صورت مثبت بودن جواب به مرحلهٔ چهاردهم می‌رویم و در صورت منفی بودن آن به مرحلهٔ بعد می‌رویم،

۱۱. نرمال‌سازی و کاهش گروه ساختاری،

۱۲. آیا مسأله از نوع ثابت است؟ اگر جواب مثبت است به مرحلهٔ بعد می‌رویم و اگر منفی است مسألهٔ هم‌ارزی نتیجه‌ای را حاصل نمی‌کند،

۱۳. با تغییر مناسب هم‌کنج و گروه ساختاری به مرحلهٔ نخست بازمی‌گردیم،

۱۴. آیا ساختار بدیهی است؟ اگر جواب مثبت باشد به مرحلهٔ بعد می‌رویم و در صورت منفی بودن به مرحلهٔ شانزدهم می‌رویم،

۱۵. به مسألهٔ هم‌ارزی e–ساختارها می‌رسیم و بحث را با مطالب ذکر شده در فصل قبل برای آن ادامه می‌دهیم تا در صورت برقراری هم‌ارزی به کمک قضیهٔ کارتان–کهلر ناورداهای مستقل تابعی را پیدا کنیم،

۱۶. آیا دستگاه پیچشی است؟ اگر جواب مثبت باشد به مرحلهٔ بعد می‌رویم و اگر منفی به مرحلهٔ نوزدهم می‌رویم،

۱۷. آیا ضرایب تاب ثابت هستند؟ اگر جواب مثبت باشد، همین ضرایب ناورداها را معرفی می‌کنند (اعم از ناورداهای ثابت که **ناورداهای فانتوم** نامیده می‌شوند و سایر ناورداهای ممکن) و مسألهٔ هم‌ارزی کامل است، در غیر این صورت به مرحلهٔ بعد می‌رویم،

۱۸. در این حالت با نرمال‌سازی ضرایب ناوردا و نیز مشتق‌های هم‌کنجی آنها به کمک ساختن منیفلدهای دسته‌بندی در صورت برقراری شرایط قضیهٔ کارتان—کهلر به نتیجهٔ مسألهٔ هم‌ارزی می‌رسیم،

۱۹. با امتداددهی مسأله برای حالت‌های تعیین شده و تعیین نشده با استفاده از فرم‌های مورر—کارتان ناوردا (در حالت تعیین شده) و فرم‌های مورر—کارتان اصلاحی (در حالت تعیین نشده) به مرحلهٔ بعد می‌رویم،

۲۰. با تغییر گروه ساختاری و افزودن فرم‌های مناسب به هم‌کنج اصلی، به مرحلهٔ نخست برمی‌گردیم.

درنهایت مثال زیر را بر اساس الگوریتم فوق درنظر می‌گیریم و به بررسی مسألهٔ هم‌ارزی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم مربوط است و تحت تبدیلات زمان—ثابت صورت گرفته است. این مثال برگرفته از مقالهٔ [۳۲] است.

۱.۱۲.۵ مثال. فرض کنید (U,x,y,y') و (V,X,Y,Y') مجموعه‌های باز به همراه مختصات جت مرتبهٔ اول $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ متشکل از توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد، معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم معمولی، $y''=f(x,y,y')$ و $Y''=F(X,Y,Y')$ را در نظر می‌گیریم. منظور از تقارن بین این دو، دیفیومورفیسمی است که منحنی‌های انتگرال را به منحنی‌های انتگرال می‌نگارد؛ یعنی،

$$\Phi^*\begin{pmatrix} dY-Y'\,dX \\ dY'-F\,dX\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v & 0 \\ \ell & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dy-y'\,dx \\ dy'-f\,dx\end{pmatrix}$$

که در آن $vw\neq 0$. همچنین، بنا به فرض $X=x$ و $Y=\varphi(y)$، پس داریم

$$\Phi^*\begin{pmatrix} dX \\ dY\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy\end{pmatrix}$$

که در آن $u=\varphi'(y)$. چون $\dim J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})=3$ و تعداد روابط داده شده ۴ می‌باشد، مسأله مورد مطالعه، یک مسألهٔ فوق—معین است. روابط مورد نظر بین چهار فرم زیر برقرارند

$$dX \quad , \quad dY \quad ; \quad dY-Y'\,dX \quad , \quad dY'-F\,dX$$

از رابطهٔ $(dY-Y'\,dX)-dY+Y'\,dX=0$ برای کاهش تعداد فرم‌ها می‌توان استفاده نمود؛ بنابراین می‌توان فرم‌ها را به صورت زیر انتخاب کرد:

$$\Omega_V^1:=dX \qquad \Omega_V^2:=\frac{dY}{Y'} \quad , \quad \Omega_V^3:=dY'-F\,dX \quad , \quad \Omega_V^4:=\frac{dY-Y'\,dX}{Y'}.$$

حال رابطه‌ای بین این فرم‌ها خواهیم داشت:

$$\Omega_V^4-\Omega_V^2+\Omega_V^1=0.$$

با توجه به شرایط ژاکوبی مسأله دیفیومورفیسم‌ها را می‌توان چنان یافت که در شرایط آن صدق کند. با فرض $X = x,\ Y = \varphi(y)$ و

$$\Phi^* \begin{pmatrix} \Omega_V^1 \\ \Omega_V^2 \\ \Omega_V^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_U^1 \\ \omega_U^2 \\ \omega_U^3 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 1$، زیرا

$$\Phi^*\Omega_V^1 = \Phi^* dX = dx = \omega_U^1$$

همچنین، $a_{21} = 0$ و $a_{22} = 1$، زیرا

$$\Phi^*\Omega_V^2 = \Omega^*\left(\frac{dY}{Y'}\right) = \frac{d\varphi(y)}{\varphi(y)_x} = \frac{\varphi'(y)\,dy}{y'\,\varphi'(y)} = \frac{dy}{y'} = \omega_U^2.$$

چون $\Phi^* dY = u\,dy$ نتیجه می‌گیریم که $u = \varphi'(y)$. با توجه به اینکه Φ^* فرم‌های برخوردی را به هم تبدیل می کند، داریم

$$\begin{aligned} \Omega^*(dY' - F\,dX) &= \ell\,(dy - y'\,dx) + w\,(dy' - f\,dx) \\ &= \ell\,y'\left(\frac{dy}{y'} - dx\right) + w\,(dy' - f\,dx) \\ &= -z\,\omega_U^1 + z\,\omega_U^2 + w\,\omega_U^3 \end{aligned}$$

که در آن $z = \ell\,y'$ فرض شده است، از طرف دیگر

$$\Phi^*(dY' - F dX) = a_{31}\,\omega_U^1 + a_{32}\,\omega_U^2 + a_{33}\,\omega_U^3$$

که با مقایسهٔ دو رابطهٔ اخیر

$$a_{32} = -a_{31} = z \quad ; a_{33} = w$$

بنابراین گروه ساختاری آن $G \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ عبارتست از مجموعهٔ همهٔ اعضای به شکل زیر:

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -z & z & w \end{pmatrix} \qquad\qquad (w, z \in \mathbb{R} \ , \ \ w \neq 0)$$

G یک گروه لی سه بعدی با عمل ضرب

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -z & z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -z' & z' & w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -z - wz' & z + wz' & ww' \end{pmatrix}$$

و عمل وارون،

$$\begin{pmatrix} ۱ & \circ & \circ \\ \circ & ۱ & \circ \\ -z & z & w \end{pmatrix}^{-۱} = \begin{pmatrix} ۱ & \circ & \circ \\ \circ & ۱ & \circ \\ -z/w & z/w & ۱/w \end{pmatrix}$$

می‌باشد. همچنین، جبر لی آن متشکل از ماتریس‌هایی است به فرم

$$\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ -v & v & b \end{pmatrix} \in Mat(۳;\, \mathbb{R})$$

حال مسأله را به فضاهای وابستهٔ $U\times G$ و $V\times G$ همراه با یک عمل راست ترفیع می‌دهیم، یعنی

$$g\cdot(p\,,\,h)=(p\,,\,h\,g)\quad;\qquad\qquad g,h\in G\ \ ,\ \ p\in U\ \ \text{یا}\ \ p\in V$$

اگر $\Omega_V=(\Omega_V^i)$ و $\omega_U=(\omega_U^i)$ که $(۱\le i\le n)$ هم‌کنج‌هایی به ترتیب بر بازهای $V,U\subset\mathbb{R}^n$ باشند، و دیفیومورفیسم $\Phi:U\to V$ در رابطهٔ

$$\Phi^*\Omega_V=\gamma_{VU}\,.\,\omega_U$$

صدق کند، آنگاه می‌توان بردارهای ستونی جدید از ۱‐فرمی‌های روی $V\times G$ و $U\times G$ تعریف کرد.

طبق قضیهٔ ترفیع سازگار با جبر لی، دیفیومورفیسمی مانند $\Phi:U\to V$ صادق در رابطهٔ

$$\Phi^*\Omega_V=\gamma_{VU}\,.\,\omega_U\quad;\quad\gamma_{VU}:U\to G$$

وجود دارد، اگر و تنها اگر دیفیومورفیسمی مانند $\Phi^۱:U\times G\to V\times G$ موجود باشد که $\Phi^{۱*}\,\Omega=\omega$.

در مورد گروه لی مفروض G داریم،

$$g^{-۱}\cdot dg=\begin{pmatrix} \circ & \circ & -dz-z\frac{dw}{w} \\ \circ & \circ & dz+z\frac{dw}{w} \\ \circ & \circ & \frac{dw}{w} \end{pmatrix}$$

مؤلفه‌های مستقل خطی آن عبارتند از: $\alpha_۲:=\frac{dw}{w}$، $\alpha_۱:=dz-z\frac{dw}{w},$ چون بنا به فرض

$$\begin{aligned}\omega_U^۱&=dx\\ \omega_U^۲&=\frac{dy}{y'}\\ \omega_U^۳&=-z\,dx+z\,\frac{dy}{y'}+w\left(dy'-f(x,y,y')\,dx\right)\end{aligned}$$

اگر از اندیس U صرفنظر کنیم و از (ω^i) ها دیفرانسیل بگیریم داریم،

$$d\omega^i=\sum A^i_{jk}\ \Pi^k\wedge\omega^j+\sum T^i_{jk}(u,g)\ \omega^i\wedge\omega^k$$

که همان معادلات ساختاری هستند و T^i_{jk} ها ضرایب تاب هستند.

چون این رابطه به تنهایی نمی‌تواند ضرایب تاب یا ضرایب ۱-فرمی Π^k را مشخص سازد، بنابراین لازم است که تا حد امکان این ضرایب را ساده نموده و یا حتی حذف نماییم. این فرآیند همان جذب سازگار با جبر لی است. در واقع هدف آنست که تا جای امکان تعداد پارامترهای در گروه ساختاری را کاهش دهیم تا این ساختار به ساختار بدیهی $\{e\}$ مبدل گردد؛ و مسأله هم‌ارزی نیز به مسألهٔ هم‌ارزی $\{e\}$-ساختارها که مسأله‌ای قابل حل است، تبدیل شود. بنابراین،

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= d(dx) = 0 \\ d\omega^2 &= T^2_{12}\,\omega^1\wedge\omega^2 + T^2_{13}\,\omega^1\wedge\omega^3 + T^2_{23}\,\omega^2\wedge\omega^3 \end{aligned}$$

که در آن

$$T^2_{12} = -\frac{z+w\,f}{w\,y'}\ \ ;\ \ T^2_{13} = 0\ \ ;\ \ T^2_{23} = \frac{1}{w\,y'}$$

با فرض

$$T^2_{12} = -\frac{z+f}{w\,y'} = 0\quad ;\quad T^2_{23} = \frac{1}{w\,y'} = 1$$

نتیجه می‌گردد که

$$z = -w\,f\quad ;\quad w = \frac{1}{y'}$$

در ادامه، مقادیر بدست آمده در بخش قبلی برای پارامترهای گروهی z و w را جایگذاری کرده و با همین روش فرآیند را تکرار می‌کنیم. در این صورت تعداد پارامترها دو تا کمتر شده و بعلاوه

$$\omega^1 = dx\ \ ,\ \ \omega^2 = \frac{dy}{y'}\ \ ,\ \ \omega^3 = -\frac{f\,dy}{y'^2} + \frac{dy'}{y'}$$

به این ترتیب داریم $d\omega^3 = T^3_{12}\omega^1\wedge\omega^2 + T^3_{23}\omega^2\wedge\omega^3$ که در آن

$$\begin{aligned} T^3_{12} &= -\frac{1}{y'}.\frac{\partial f}{\partial x}\ \ ;\quad ; \\ T^3_{23} &= -2\,\frac{f}{y'} + \frac{\partial f}{\partial y'} \end{aligned}$$

واضح است که به این ترتیب، ناورداهای مسأله مورد نظر عبارتند از:

$$I_1 = T^3_{12},\qquad I_2 = T^3_{23}.$$

با توجه به مطالب گذشته، داریم

۱.۱۲.۵ نتیجه. *شرط لازم برای آنکه معادلات $y'' = f(x,y,y')$ و $Y'' = F(X,Y,Y')$ تحت تبدیلات زمان-ثابت هم ارز باشند، آن است که مقدار I_1 و I_2 به ازای آنها برابر باشند.*

برای حصول به شرایط کافی برای هم‌ارزی معادلات دیفرانسیل مورد نظر لازم است از نظریه هم ارزی $\{e\}$-ساختارها استفاده گردد. فرض کنیم $\mathcal{F}_0 := \{I_1, I_2\}$ مجموعه همه توابع ساخته شده توسط توابع I_1 و I_2 بوده و رتبه آن (یعنی تعداد

توابع مستقل خطی در آن) برابر k_0 باشد. چون هم‌کنج $\{\omega^1,\omega^3,\omega^3\}$ ناوردا است، مشتقات نسبت به آن نیز ناوردا است. بنابراین اگر $I\in\mathcal{F}_0$ و تعریف کنیم

$$dI=\frac{\partial I}{\partial\omega^1}\,\omega^1+\frac{\partial I}{\partial\omega^2}\,\omega^2+\frac{\partial I}{\partial\omega^3}\,\omega^3$$

آنگاه توابع $\frac{\partial I}{\partial\omega^i}$ نیز ناوردا خواهند بود. به این ترتیب تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F}_1=\left\{I_1,I_2;\frac{\partial I_1}{\partial\omega^1},\frac{\partial I_1}{\partial\omega^2},\frac{\partial I_1}{\partial\omega^3},\frac{\partial I_2}{\partial\omega^1},\frac{\partial I_2}{\partial\omega^2},\frac{\partial I_2}{\partial\omega^3}\right\}$$

که عبارت است از مجموعه همه توابع ساخته شده از هشت تابع مورد نظر. فرض کنیم ρ_1 رتبه این فضا باشد. این روند را ادامه داده و مجموعه‌های $\mathcal{F}_i$ و اعداد ρ_i را برای $i=2,3,\cdots$ می‌سازیم. بنا به نظریه هم‌ارزی $\{e\}$–ساختارها اگر به ازای یک i ای $\rho_i=\rho_{i+1}$، آنگاه به ازای هر $s\geq i$ ای $\rho_s=\rho_i$. بعلاوه $\rho_i\leq 3$. پس تنها حالت‌های زیر امکان پذیر خواهند بود

	k_0	k_1	k_2	r	o
۱	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۱	۱	۱	۰	۱
۳	۱	۲	۲	۱	۲
۴	۱	۲	۳	۲	۳
۵	۲	۲	۲	۰	۲
۶	۲	۳	۳	۱	۳

$\square$

در ادامه قضایای بدست آمده از این مسأله را مطرح می‌نماییم [۳۲]:

۲.۱۲.۵ قضیه. *معادلات $y''=f(x,y,y')$ و $\tilde{y}''=\tilde{f}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{y}')$ را در نظر گرفته و مجموعه‌های $\mathcal{F}_i$ و اعداد k_i نظیر به آنها را می‌سازیم. شرط لازم و کافی برای هم ارزی این دو معادله تحت تبدیلات زمان–ثابت آن است که $r=\tilde{r}$ و $\tilde{\mathcal{F}}_{r+1}=\mathcal{F}_{r+1}$.*

۳.۱۲.۵ قضیه. *حالت $I_1\neq 0$ و I_2 که هر دو ثابت باشند امکان پذیر نیست. حالت $I_1=0$ و $I_2=\beta$ تنها در مورد معادلات به شکل $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}\,:\,y''=\alpha\,y'^2-\beta\,y'/y$ امکان پذیر است و در این صورت، وقتی و تنها وقتی $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ با $\mathcal{E}_{\alpha',\beta'}$ هم ارز است که $\beta'=\beta$.*

۵.۱۲.۵ قضیه. *شرط لازم و کافی برای اینکه معادلهٔ درجه دوم $y''=f(x,y,y')$ با معادلهٔ $y''=F(y')$ تحت تبدیلات زمان–ثابت هم ارز باشد، آن است که f به فرم $F(y')+B(y)\,y'^2$ بوده که در آن $B(y)$ تابعی دلخواه است.*

فصل ۶

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۱.۶ خلاصه مطالب، اهداف و پیشنهادها

در این رساله سعی بر آن بوده است که آخرین یافته‌ها را در مورد نظریهٔ هم‌ارزی و حالت‌های خاص آن، تقارن و دستگاه دیفرانسیل خارجی عنوان نماییم تا بستری مناسب برای ادامه تحقیقات در این زمینه فراهم آید. بسیاری از مفاهیم مهم و بنیادی از این مطالب در رساله گردآوری شده است. همچنین الگوریتمی بهینه، بر پایهٔ روش‌های پیشین برای مسألهٔ هم‌ارزی، عنوان گردیده است. از این الگوریتم و روش‌های بیان شده در مورد تقارن و دستگاه دیفرانسیل خارجی برای حل بسیاری از مسائل مهم و مطرح در ریاضیات، فیزیک، مکانیک، تجسم کامپیوتری و غیره می‌توان استفاده نمود.

در بخش تقارن، با استفاده از روش بینهایت کوچک‌ها، دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل مهم و مطرح در ریاضیات، فیزیک و غیره را می‌توان جهت یافتن جواب‌های عمومی، جواب‌های متشابه، ناورداهای دیفرانسیلی و غیره می‌توان مورد استفاده قرار داد. از مسائل مطرح و مهم دیگر برای ادامهٔ کار، مسألهٔ یافتن دستگاه‌های بهینه در مطالعهٔ جبرهای تقارنی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل است که به منیفلدهای انتگرال (فضای جواب) با ابعاد پایین‌تر منجر می‌گردد. همچنین مطالعه و بررسی عمیق‌تر نظریهٔ نمایش و جبر لی در مطالعهٔ دستگاه‌های بهینه از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل هنوز از مباحث مهم متکمیل نشده به شمار می‌آید.

در زمینهٔ دستگاه دیفرانسیل خارجی، بیان قضیهٔ کارتان—کهلر و بسیاری از نتایج آن برای توابع هموار به عنوان مسألهٔ باز باقی مانده است.استفاده از ترفندهای مطالعاتی این نظریه در مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل مختلف، همانند موارد متعدد ذکر شده در رساله مانند آنچه که در مورد معادهٔ مونژ—آمپر و معادلهٔ لاپلاس گفته شد، نتایج فراوانی را به همراه خواهد داشت.

در مبحث نظریهٔ هم‌ارزی نیز یافتن مجموعهٔ کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی برای الصاق‌ها و میدان‌های برداری تصویری که از مسائل مطرح علمی روز است، جای کار فراوان دارد. همچنین طرح الگوریتم روش هم‌ارزی در مطالعهٔ دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل و یافتن ناورداهای دیفرانسیلی آنها، مطالعهٔ اشیای هندسی مختلف مانند منیفلدهای مرزدار، فضاهای مدولی و غیره از مسائل مهم و جذاب برای ادامهٔ کار در این حیطه است.

۶.۲ مقالات مستخرج از رساله

در ادامه به عنوان حسن ختام مباحث رساله، مقالات مستخرج از رساله را به عنوان ضمیمه بیان می‌نماییم.

Affine classification of n-curves

Mehdi Nadjafikhah and Ali Mahdipour Sh.

Abstract. The classification of curves up to affine transformations in a finite dimensional space was studied by some different methods. In this paper, we obtain the exact formulas of affine invariants via the equivalence problem in view of Cartan's theorem and then, we state a necessary and sufficient condition for the classification of n–Curves.

M.S.C. 2000: 53A15, 53A04, 53A55.
Key words: affine differential geometry, curves in Euclidean space, differential invariants.

1 Introduction

This paper devoted to the study of curve invariants in an arbitrary finite dimensional space, under the action of special affine transformations. This work was done before in some different methods. Furthermore, these invariants were just pointed out by Spivak [6], in the method of Cartan's theorem, but they were not explicitly determined. Now, we will exactly determine these invariants in view of Cartan's theorem and of the equivalence problem.

An *affine transformation* in an $n-$dimensional space, is generated by the action of the general linear group $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ and then, of the translation group $\mathbf{R}^n$. If we restrict $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ to the special linear group $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ of matrices with determinant equal to 1, we have a *special* affine transformation. The group of special affine transformations has $n^2 + n - 1$ parameters. This number coincides with the dimension of the Lie algebra of the Lie group of special affine transformations. The natural condition of differentiability is $\mathcal{C}^{n+2}$.

In the next section, we state some preliminaries about the Maurer–Cartan forms, Cartan's theorem for the equivalence problem, and a theorem about the number of invariants in a space. In section three, we obtain the invariants and then, by them, we classify the $n-$curves of the space.

2 Preliminaries

Let $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ be a matrix Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$ and let $P : G \to Mat(n \times n)$ be a matrix-valued function which embeds G into $Mat(n \times n)$, the vector space of

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.13, No.2, 2008, pp. 66-73.

$n \times n$ matrices with real entries. Its differential is $dP_B : T_B G \to T_{P(B)} Mat(n \times n) \simeq Mat(n \times n)$.

Definition 2.1 The following form of G is called *Maurer-Cartan form*:

$$\omega_B = \{P(B)\}^{-1} . dP_B$$

that it is often written $\omega_B = P^{-1} . dP$. The Maurer-Cartan form is the key to classifying maps into homogeneous spaces of G, and this process needs the following result (for the proof we refer to [2]):

Theorem 2.2 (Cartan) *Let G be a matrix Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$ and Maurer-Cartan form ω. Let M be a manifold on which there exists a $\mathfrak{g}-$valued 1-form ϕ satisfying $d\phi = -\phi \wedge \phi$. Then for any point $x \in M$ there exists a neighborhood U of x and a map $f : U \to G$ such that $f^* \omega = \phi$. Moreover, any two such maps f_1, f_2 must satisfy $f_1 = L_B \circ f_2$ for some fixed $B \in G$ (L_B is the left action of B on G).*

Corollary 2.3 *Given the maps $f_1, f_2 : M \to G$, then $f_1^* \omega = f_2^* \omega$, that is, this pull-back is invariant, if and only if $f_1 = L_B \circ f_2$ for some fixed $B \in G$.*

The next section is devoted to the study of some properties of $n-$curves invariants, under the special affine transformations group. The number of essential parameters (the dimension of the Lie algebra) is $n^2 + n - 1$. The natural assumption of differentiability is $\mathcal{C}^{n+2}$.

We obtain all the invariants of an $n-$curve with respect to special affine transformations, and by theorem 2.2, two $n-$curves in $\mathbf{R}^n$ will be equivalent under special affine transformations, if they differ by a left action introduced by an element of $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ and then by a translation.

3 Classification of $n-$curves

Let $C : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ be a curve of class $\mathcal{C}^{n+2}$ in the finite dimensional space $\mathbf{R}^n$, $n-$*space*, which satisfies the condition

$$\det(C', C'', \cdots, C^{(n)}) \neq 0; \tag{3.1}$$

we call this curve as $n-$*curve*. The condition (3.1) guarantees that C', C'', $\cdots$, and $C^{(n)}$ are independent, and therefore, the curve does not turn into the lower dimensional cases. Also, we may assume that

$$\det(C', C'', \cdots, C^{(n)}) > 0, \tag{3.2}$$

for avoiding the absolute value for its computation.

For the $n-$curve C, we define a new curve $\alpha_C(t) : [a, b] \to \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ of the following form

$$\alpha_C(t) := \frac{(C', C'', \cdots, C^{(n)})}{\sqrt[n]{\det(C', C'', \cdots, C^{(n)})}} . \tag{3.3}$$

Obviously, this is well-defined on $[a,b]$. We can study this new curve with respect to special affine transformations, that is the action of affine transformations on first, second, ..., and n^{th} differentiation of C. For A, the special affine transformation, there is a unique representation $A=\tau\circ B$, where B is an element of $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ and τ is a translation in $\mathbf{R}^n$. If two $n-$curves C and $\bar{C}$ coincide mod some special affine transformation, that is, $\bar{C}=A\circ C$, then from [4], we have

$$\bar{C}'=B\circ C',\quad \bar{C}''=B\circ C'',\quad \ldots,\quad \bar{C}^{(n)}=B\circ C^{(n)}. \tag{3.4}$$

We can relate the determinants of these curves as follows

$$\begin{aligned}\det(\bar{C}',\bar{C}'',\cdots,\bar{C}^{(n)}) &= \det(B\circ C',B\circ C'',\cdots,B\circ \bar{C}^{(n)})\\ &= \det(B\circ(C',C'',\cdots,C^{(n)}))\\ &= \det(C',C'',\cdots,C^{(n)}).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Hence we conclude that $\alpha_{\bar{C}}(t)=B\circ\alpha_C(t)$ and thus $\alpha_{\bar{C}}=L_B\circ\alpha_C$ that L_B is a left translation by $B\in\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$.

This condition is also necessary because when C and $\bar{C}$ are two curves in $\mathbf{R}^n$ such that for an element $B\in\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$, we have $\alpha_{\bar{C}}=L_B\circ\alpha_C$, thus we can write

$$\begin{aligned}\alpha_{\bar{C}}(t) &= \det(\bar{C}',\bar{C}'',\cdots,\bar{C}^{(n)})^{-1/n}(\bar{C}',\bar{C}'',\cdots,\bar{C}^{(n)})\\ &= \det(B\circ(C',C'',\cdots,C^{(n)}))^{-1/n}B\circ(C',C'',\cdots,C^{(n)})\\ &= \det(C',C'',\cdots,C^{(n)})^{-1/n}B\circ(C',C'',\cdots,C^{(n)}).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Therefore, we have $\bar{C}'=B\circ C'$, and hence there exists a translation τ such that $A=\tau\circ B$, and so, we have $\bar{C}=A\circ C$ where A is an $n-$dimensional affine transformation. Therefore, we have

Theorem 3.1 *Two $n-$curves C and $\bar{C}$ in $\mathbf{R}^n$ coincide mod some special affine transformations that is, $\bar{C}=A\circ C$, with $A=\tau\circ B$ for a translation τ in $\mathbf{R}^n$ and $B\in\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$, if and only if, $\alpha_{\bar{C}}=L_B\circ\alpha_C$, where L_B is left translation by B.*

From Cartan's theorem, a necessary and sufficient condition for $\alpha_{\bar{C}}=L_B\circ\alpha_C$ by $B\in\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$, is that for any left invariant 1-form ω^i on $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ we have $\alpha^*_{\bar{C}}(\omega^i)=\alpha^*_C(\omega^i)$, that is equivalent with $\alpha^*_{\bar{C}}(\omega)=\alpha^*_C(\omega)$, for natural $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})$-valued 1-form $\omega=P^{-1}\,.\,dP$, where P is the Maurer–Cartan form.

Thereby, we must compute $\alpha^*_C(P^{-1}.dP)$, which is invariant under special affine transformations, that is, its entries are invariant functions of the $n-$curve. This $n\times n$ matrix form consists of arrays that are coefficients of dt.Since $\alpha^*_C(P^{-1}\,.\,dP)=\alpha_C^{-1}\,.\,d\alpha_C$, for finding the invariants, it is sufficient to calculate the matrix $\alpha_C(t)^{-1}.\,d\alpha_C(t)$. Thus, we compute $\alpha^*_C(P^{-1}\,.\,dP)$. We have

$$\alpha_C^{-1}=\sqrt[n]{\det(C',C'',\cdots,C^{(n)})}\,.\,(C',C'',\cdots,C^{(n)})^{-1}. \tag{3.7}$$

We assume that C is in the form $(C_1\ \ C_2\ \ \cdots\ \ C_n)^T$. By differentiating of determinant, we have

$$
\begin{aligned}
[\det(C', C'', \cdots, C^{(n)})]' &= \det(C'', C'', \cdots, C^{(n)}) \\
&\quad + \det(C', C''', \cdots, C^{(n)}) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \det(C', C'', \cdots, C^{(n-1)}, C^{(n+1)}) \\
&= \det(C', C'', \cdots, C^{(n-1)}, C^{(n+1)})\,.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Thus, we conclude that

$$
\begin{aligned}
\alpha'_C &= \{\det(C', C'', \cdots, C^{(n)})\}^{-1/n} \cdot \begin{pmatrix} C''_1 & C'''_1 & \cdots & C^{(n)}_1 \\ C''_2 & C'''_2 & \cdots & C^{(n)}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C''_3 & C'''_3 & \cdots & C^{(n)}_n) \end{pmatrix} \\
&\quad -\frac{1}{n} \det(C', C'', C''')\}^{-(n+1)/n} \cdot \begin{pmatrix} C'_1 & C''_1 & \cdots & C^{(n)}_1 \\ C'_2 & C''_2 & \cdots & C^{(n)}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C'_3 & C''_3 & \cdots & C^{(n)}_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Therefore, we have $\alpha_C^{-1} \cdot d\alpha_C$ as the following matrix multiplied with dt:

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ 1 & a & \cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & M \,.\, C^{(n+1)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \end{array}\right) \tag{3.10}
$$

where the latest column, $M\,.\,C^{(n+1)} + (0, 0, \cdots, a)^T$, is multiple of M by $C^{(n+1)}$ added by the transpose of $(0, 0, \cdots, a)$, where M is the inverse of the matrix $(C', C'', \cdots, C^{(n)})$ and also, we assumed that

$$
a = -\frac{\det(C', C'', \cdots, C^{(n-1)}, C^{(n+1)})}{n\ \det(C', C'', \cdots, C^{(n)})}. \tag{3.11}
$$

Using Crammer's law, we compute $M\,.\,C^{(n+1)}$. If $M\,.\,C^{(n+1)} = X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$, then $M^{-1}.X = C^{(n+1)}$. Therefore, for each $i = 1, 2, \cdots, n$ we conclude that

$$
X_i = \frac{\det(C', C'', \cdots, C^{(i-1)}, C^{(n+1)}, C^{(i+1)}, \cdots, C^{(n)})}{\det(C', C'', \cdots, C^{(n)})} \tag{3.12}
$$

Finally, $\alpha_C^{-1} \cdot d\alpha_C$ is the following multiple of dt:

$$\left(\begin{array}{cccccc} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n-1}\frac{\det(C'',\cdots,C^{(n+1)})}{\det(C',C'',\cdots,C^{(n)})} \\ 1 & a & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n-2}\frac{\det(C',C''',\cdots,C^{(n)})}{\det(C',C'',\cdots,C^{(n)})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ o & 0 & \cdots & 1 & a & -\frac{\det(C',\cdots,C^{(n-2)},C^{(n)},C^{(n+1)})}{\det(C',C'',\cdots,C^{(n)})} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{n-1}{n}\frac{\det(C',\cdots,C^{(n-1)},C^{(n+1)})}{\det(C',C'',\cdots,C^{(n)})} \end{array}\right), \tag{3.13}$$

where the coefficient $(-1)^{i-1}$ for the i^{th} entry of the last column is provided by the translation of $C^{(n+1)}$ to the n^{th} column of the matrix

$$(C', C'', \cdots, C^{(i-1)}, C^{(n+1)}, C^{(i+1)}, \cdots, C^{(n)}). \tag{3.14}$$

Clearly, the trace of the matrix (3.13) is zero. The entries of $\alpha_C^*(P^{-1}\,.\,dP)$, and hence the arrays of the matrix (3.13) are invariants of the group action.

Two $n-$curves $C, \bar{C} : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ coincide mod a special affine transformations, if we have

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\det(C''(t),\cdots,C^{(n+1)}(t))}{\det(C'(t),C''(t),\cdots,C^{(n)}(t))} & = & \dfrac{\det(\bar{C}''(t),\cdots,\bar{C}^{(n+1)}(t))}{\det(\bar{C}'(t),\bar{C}''(t),\cdots,\bar{C}^{(n)}(t))} \\ \dfrac{\det(C'(t),C'''(t),\cdots,C^{(n+1)}(t))}{\det(C'(t),C''(t),\cdots,C^{(n)}(t))} & = & \dfrac{\det(\bar{C}'(t),\bar{C}'''(t),\cdots,\bar{C}^{(n+1)}(t))}{\det(\bar{C}'(t),\bar{C}''(t),\cdots,\bar{C}^{(n)}(t))} \\ & \vdots & \\ \dfrac{\det(C'(t),\cdots,C^{(n-1)}(t),C^{(n+1)})}{\det(C'(t),C''(t),\cdots,C^{(n)}(t))} & = & \dfrac{\det(\bar{C}'(t),\cdots,\bar{C}^{(n-1)}(t),\bar{C}^{(n+1)})}{\det(\bar{C}'(t),\bar{C}''(t),\cdots,\bar{C}^{(n)}(t))}. \end{array} \tag{3.15}$$

We may use of a proper parametrization $\gamma : [a,b] \to [0,l]$, such that the parameterized curve, $\gamma = C \circ \sigma^{-1}$, satisfies in condition

$$\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \cdots, \gamma^{(n-1)}(s), \gamma^{(n+1)}(s)) = 0, \tag{3.16}$$

then, the arrays on the main diagonal of $\alpha_\gamma^*(dP\,.\,P^{-1})$ will be zero. But the last determinant is given by the differentiation of $\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \cdots, \gamma^{(n)}(s))$, and thus it is sufficient to assume that

$$\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \cdots, \gamma^{(n)}(s)) = 1. \tag{3.17}$$

On the other hand, we have

$$\begin{array}{rcl} C' & = & (\gamma\circ\sigma)' = \sigma'.(\gamma'\circ\sigma) \\ C'' & = & (\sigma')^2.(\gamma''\circ\sigma) + \sigma''.(\gamma'\circ\sigma) \\ & \vdots & \\ C^{(n)} & = & (\sigma')^{(n)}.(\gamma^{(n)}\circ\sigma) + n\,\sigma^{(n-1)}\sigma'.(\gamma^{(n-1)}\circ\sigma) \\ & & +\dfrac{n(n-1)}{2}\,\sigma^{(n-2)}\sigma''.(\gamma^{(n-2)}\circ\sigma) + \cdots + \sigma^{(n)}.(\gamma'\circ\sigma) \end{array} \tag{3.18}$$

Therefore, the $C^{(i)}$s for $1 \leq i \leq n$, are some expressions in terms of $\gamma^{(j)} \circ \sigma$, $1 \leq j \leq n$. We conclude that

$$
\begin{aligned}
\det(C', C'', \cdots, C^{(n)}) &= \det(\sigma'.(\gamma' \circ \sigma)\, ,\, (\sigma')^2.(\gamma'' \circ \sigma) + \sigma''.(\gamma' \circ \sigma)\, , \\
&\quad \cdots, (\sigma')^{(n)}.(\gamma^{(n)} \circ \sigma) + n\,\sigma^{(n-1)}\sigma'.(\gamma^{(n-1)} \circ \sigma) \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{2}\,\sigma^{(n-2)}\sigma''.(\gamma^{(n-2)} \circ \sigma) + \cdots + \sigma^{(n)}.(\gamma' \circ \sigma)) \\
&= \det(\sigma'.(\gamma' \circ \sigma)\, ,\, (\sigma')^2.(\gamma'' \circ \sigma)\, ,\, \cdots\, ,\, (\sigma')^n.(\gamma^{(n)} \circ \sigma)) \\
&= \sigma'^{\frac{n(n-1)}{2}}.\det(\gamma' \circ \sigma\, ,\, \gamma'' \circ \sigma\, ,\, \cdots\, ,\, \gamma^{(n)} \circ \sigma) \\
&= \sigma'^{\frac{n(n-1)}{2}}\, ,
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

The last expression signifies σ. Therefore, we define the *special affine arc length* as follows

$$
\sigma(t) := \int_a^t \left\{ \det(C'(u), C''(u), \cdots, C^{(n)}(u)) \right\}^{\frac{2}{n(n-1)}} du. \tag{3.20}
$$

So, σ is the natural parameter for $n-$curves under the action of special affine transformations, that is, when C is parameterized with σ, then for each special affine transformation A, $A \circ C$ will also be parameterized with the same σ. Furthermore, every $n-$curve parameterized with σ with respect to special affine transformations, will lead to the following invariants

$$
\begin{aligned}
\chi_1 &= (-1)^{n-1}\det(C'', \cdots, C^{(n+1)}) \\
\chi_2 &= (-1)^{n-2}\det(C', C''', \cdots, C^{(n)}) \\
&\ \ \vdots \\
\chi_{n-1} &= \det(C', \cdots, C^{(n-2)}, C^{(n)}, C^{(n+1)}).
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

We call $\chi_1, \chi_2, \cdots$, and χ_{n-1} as (respectively) the first, second, ..., and $n-1^{th}$ *special affine curvatures.* In fact, we proved the following

Theorem 3.2 *A curve of class $\mathcal{C}^{n+2}$ in $\mathbf{R}^n$ which satisfies the condition (3.1), up to special affine transformations has $n-1$ invariants χ_1, χ_2, ..., and χ_{n-1}, the first, second, ..., and $n-1^{th}$ affine curvatures that are defined in formulas (3.3).*

Theorem 3.3 *Two $n-$curves $C, \bar{C} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ of class $\mathcal{C}^{n+2}$, that satisfy in the condition (3.1), are special affine equivalent, if and only if, $\chi_1^C = \chi_1^{\bar{C}}$, $\cdots$, and $\chi_{n-1}^C = \chi_{n-1}^{\bar{C}}$.*

Proof: The proof is completely similar to the three dimensional case [5]. The first part of the theorem was proved above. For the other part, we assume that C and $\bar{C}$ are $n-$curves of class $\mathcal{C}^{n+2}$ satisfying the conditions (resp.):

$$
\det(C', C'', \cdots, C^{(n)}) > 0, \qquad \det(\bar{C}', \bar{C}'', \cdots, \bar{C^{(n)}}) > 0, \tag{3.22}
$$

this meaning that they are not $(n-1)$–curves. Also, we suppose that they have the same same $\chi_1, \cdots$, and χ_{n-1}.

By changing the parameter to the natural parameter (σ) discussed above, we obtain two new curves γ and $\bar{\gamma}$ resp. that the determinants (3.22) will be equal to 1. We prove that γ and $\bar{\gamma}$ are special affine equivalent, so there exists a special affine transformation A, such that $\bar{\gamma} = A \circ \gamma$, and then we have $\bar{C} = A \circ C$, and the proof will be complete.

First, we replace the curve γ with $\delta := \tau(\gamma)$ properly, in which case δ intersects $\bar{\gamma}$, and τ is a translation defined by translating one point of γ to one point of $\bar{\gamma}$. We correspond $t_0 \in [a,b]$, to the intersection point of δ and $\bar{\gamma}$; thus, $\delta(t_0) = \bar{\gamma}(t_0)$. One can find a unique element B of the general linear group $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$, such that this maps the basis $\{\delta'(t_0), \delta''(t_0), \cdots, \delta^{(n)}(t_0)\}$ of the tangent space $T_{\delta(t_0)}\mathbf{R}^3$ to its basis $\{\bar{\gamma}'(t_0), \bar{\gamma}''(t_0), \cdots, \bar{\gamma}^{(n)}(t_0)\}$. So, we have $B \circ \delta'(t_0) = \bar{\gamma}'(t_0)$, $B \circ \delta''(t_0) = \bar{\gamma}''(t_0)$, $\cdots$, and $B \circ \delta^{(n)}(t_0) = \bar{\gamma}^{(n)}(t_0)$. B also is an element of the special linear group, $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$, since we have

$$\begin{aligned} &\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \cdots, \gamma^{(n)}(t_0)) = \\ &\qquad = \det(\delta'(t_0), \delta''(t_0), \cdots, \delta^{(n)}(t_0)), \end{aligned} \tag{3.23}$$

and

$$\begin{aligned} &\det(\delta'(t_0), \delta''(t_0), \cdots, \delta^{(n)}(t_0)) = \\ &\qquad \det\Big(B \circ (\bar{\gamma}'(t_0), \bar{\gamma}''(t_0), \cdots, \bar{\gamma}^{(n)}(t_0))\Big), \end{aligned} \tag{3.24}$$

so, $\det(B) = 1$. If we denote $\eta := B \circ \delta$ as equal to $\bar{\gamma}$ on $[a,b]$, then by choosing $A = \tau \circ B$, the claim follows.

For the curves η and $\bar{\gamma}$ we have (resp.)

$$\begin{aligned} &(\eta', \eta'', \cdots, \eta^{(n)})' = \\ &\qquad = (\eta', \eta'', \cdots, \eta^{(n)}). \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \chi_1^\eta \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\chi_2^\eta \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \chi_3^\eta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & (-1)^{(n-2)}\chi_{n-1}^\eta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

and

$$\begin{aligned} &(\bar{\gamma}', \bar{\gamma}'', \cdots, \bar{\gamma}^{(n)})' = \\ &\qquad = (\bar{\gamma}', \bar{\gamma}'', \cdots, \bar{\gamma}^{(n)}). \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \chi_1^{\bar{\gamma}} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\chi_2^{\bar{\gamma}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \chi_3^{\bar{\gamma}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & (-1)^{(n-2)}\chi_{n-1}^{\bar{\gamma}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

Since, $\chi_1, \cdots$, and χ_{n-1}, are invariant under special affine transformations so, we have

$$\chi_i^\eta = \chi_i^\gamma = \chi_i^{\bar{\gamma}}, \qquad (i = 1, \cdots, n-1). \tag{3.27}$$

Therefore, we conclude that η and $\bar{\gamma}$ are solutions of the ordinary differential equation of degree $n+1$:

$$Y^{n+1} + (-1)^{n-1}\chi_{n-1}Y^{(n)} + \cdots + \chi_2 Y'' - \chi_1 Y' = 0,$$

where, Y depends on the parameter t. Due to having identical initial conditions

$$\eta^{(i)}(t_0) = B \circ \delta(t_0) = \bar{\gamma}^{(i)}(t_0), \tag{3.28}$$

for $i = 0, \cdots, n$, and to the generalization of the existence and uniqueness theorem of solutions, we have $\eta = \bar{\gamma}$ in a neighborhood of t_0, that can be extended to all $[a, b]$. $\square$

Corollary 3.4 *The number of invariants of the special affine transformations group acting on* $\mathbf{R}^n$ *is* $n-1$.

This coincides with the results provided by other methods (e.g., see [1]).

References

[1] H. Guggenheimer, *Differential Geometry*, Dover Publ., New York 1977.

[2] T.A. Ivey and J.M. Landsberg, *Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential System*, A.M.S. 2003.

[3] P.J. Olver, *Equivalence, invariants, and symmetry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1995.

[4] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, London–New York 1966.

[5] M. Nadjafikhah and A. Mahdipour Sh., *Geometry of Space Curves up to Affine Transformations*, preprint, http://aps.arxiv.org/abs/0710.2661.

[6] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. II and III, Publish or Perish, Wilmington, Delaware 1979.

Authors' address:

Mehdi Nadjafikhah, Ali Mahdipour Sh.
Department of Mathematics,
Iran University of Science and Technology,
Narmak-16, Tehran, Iran.
E-mail: m_nadjafikhah@iust.ac.ir, mahdi_psh@mathdep.iust.ac.ir

Nonlinear Analysis 71 (2009) 5164–5169

Contents lists available at ScienceDirect

Nonlinear Analysis

journal homepage: www.elsevier.com/locate/na

A symmetry classification for a class of (2+1)-nonlinear wave equation

M. Nadjafikhah *, R. Bakhshandeh-Chamazkoti, A. Mahdipour-Shirayeh

School of Mathematics, Iran University of Science and Technology, Narmak, Tehran 1684613114, Iran

ARTICLE INFO

Article history:
Received 28 December 2008
Accepted 27 March 2009

MSC:
58J70
76M60
35L05

Keywords:
Infinitesimal generator
Lie symmetry
(2+1)-nonlinear wave equation
Prolongation

ABSTRACT

In this paper, a symmetry classification of a (2+1)-nonlinear wave equation $u_{tt}-f(u)(u_{xx}+u_{yy})=0$ where $f(u)$ is a smooth function on u, using Lie group method, is given. The basic infinitesimal method for calculating symmetry groups is presented, and used to determine the general symmetry group of this (2+1)-nonlinear wave equation.

1. Introduction

It is well known that the symmetry group method plays an important role in the analysis of differential equations. The history of group classification methods goes back to Sophus Lie. The first paper on this subject is [1], where Lie proves that a linear two-dimensional second-order PDE may admit at most a three-parameter invariance group (apart from the trivial infinite parameter symmetry group, which is due to linearity). He computed the maximal invariance group of the one-dimensional heat conductivity equation and utilized this symmetry to construct its explicit solutions. In modern terms, he performed symmetry reduction of the heat equation. Nowadays symmetry reduction is one of the most powerful tools for solving nonlinear partial differential equations (PDEs). Recently, there have been several generalizations of the classical Lie group method for symmetry reductions. Ovsiannikov [2] developed the method of partially invariant solutions. His approach is based on the concept of an equivalence group, which is a Lie transformation group acting in the extended space of independent variables, functions and their derivatives, and preserving the class of partial differential equations under study.

For many nonlinear systems, there are only explicit exact solutions available. These solutions play an important role in both mathematical analysis and physical applications of the systems. There are a number of papers to study (1+1)-nonlinear wave equations from the point of view of Lie symmetries method. First, for solving some of the physical problems, the quasi-linear hyperbolic equation with the form

$$u_{tt}=[f(u)u_x]_x, \tag{1}$$

in [3] and later its the generalized cases

$$u_{tt}=[f(x,u)u_x]_x, \qquad u_{tt}=[f(u)u_x+g(x,u)]_x, \tag{2}$$

* Corresponding author. Tel.: +98 21 73913426; fax: +98 21 77240472.
E-mail addresses: m_nadjafikhah@iust.ac.ir (M. Nadjafikhah), r_bakhshandeh@iust.ac.ir (R. Bakhshandeh-Chamazkoti), mahdipour@iust.ac.ir (A. Mahdipour-Shirayeh).

0362-546X/$ – see front matter © 2009 Elsevier Ltd. All rights reserved.
doi:10.1016/j.na.2009.03.087

in [4,5], respectively, are investigated. Also the most important classes of the (1+1)-nonlinear wave equations with the forms

$$v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x), \qquad u_{tt} = f(x, u)u_{xx} + g(x, u), \tag{3}$$

can be found in two attempts [6,7] respectively. An alternative form of Eq. (1) was also investigated by Oron and Rosenau [8] and Suhubi and Bakkaloglu [9]. The equations

$$u_{tt} = F(u)u_{xx}, \qquad u_{tt} + K(u)u_t = F(u)u_{xx}, \qquad u_{tt} + K(u)u_t = F(u)u_{xx} + H(u)u_x, \tag{4}$$

are classified in [10–12], respectively. Lahno et al. [13] presented the most extensive list of symmetries of the equations

$$u_{tt} = u_{xx} + F(t, x, u, u_x), \tag{5}$$

by using the infinitesimal Lie method, the technique of equivalence transformations, and the theory of classification of abstract low-dimensional Lie algebras. There are also some papers [14–16] devoted to the group classification of the equations of the following form:

$$u_{tt} = F(u_{xx}), \qquad u_{tt} = F(u_x)u_{xx} + H(u_x), \qquad u_{tt} + u_{xx} = g(u, u_x). \tag{6}$$

Studies have also been made for (2+1)-nonlinear wave equation with constant coefficients [17–19]. In the special case the (2+1)-dimensional nonlinear wave equation

$$u_{tt} = u^n(u_{xx} + u_{yy}), \tag{7}$$

is investigated in [20]. The goal of this paper is to investigate the Lie symmetries for some class of (2+1)-nonlinear wave equation

$$u_{tt} - f(u)(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \tag{8}$$

where $f(u)$ is an arbitrary smooth function of the variable u. Clearly, in Eq. (8) case of $f_u = 0$ namely $f(u) = \text{constant}$ is not of interest because this case reduces the wave equation to a linear one. Similarly techniques were applicable for some classes of the nonlinear heat equations in [21,22].

2. Symmetry methods

Let a partial differential equation contain one dependent variable and p independent variables. The one-parameter Lie group of transformations

$$\bar{x}_i = x_i + \epsilon\xi_i(x, u) + O(\epsilon^2); \qquad \bar{u} = u + \epsilon\varphi(x, u) + O(\epsilon^2), \tag{9}$$

where $i = 1, \dots, p$, and $\xi_i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \epsilon}\Big|_{\epsilon=0}$, acting on (x, u)-space has as its infinitesimal generator

$$\mathbf{v} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varphi\frac{\partial}{\partial u}, \quad i = 1, \dots, p. \tag{10}$$

Therefore, the characteristic of the vector field $\mathbf{v}$ given by (10) is the function

$$Q(x, u^{(1)}) = \varphi(x, u) - \sum_{i=1}^{p} \xi_i(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{11}$$

The symmetry generator associated with (10) is given by

$$\mathbf{v} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \varphi\frac{\partial}{\partial u}\,. \tag{12}$$

The second prolongation of $\mathbf{v}$ is the vector field

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^y\frac{\partial}{\partial u_y} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xy}\frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{yy}\frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \varphi^{yt}\frac{\partial}{\partial u_{yt}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} \tag{13}$$

with coefficients

$$\varphi^{\iota} = D_{\iota}Q + \xi u_{x\iota} + \eta u_{y\iota} + \tau u_{t\iota}, \tag{14}$$

$$\varphi^{\iota\jmath} = D_{\iota}(D_{\jmath}Q) + \xi u_{x\iota\jmath} + \eta u_{y\iota\jmath} + \tau u_{t\iota\jmath}, \tag{15}$$

where $Q = \varphi - \xi u_x - \eta u_y - \tau u_t$ is the characteristic of the vector field $\mathbf{v}$ given by (12) and D_i represents total derivative and subscripts of u are derivative with respect to the respective coordinates. ι and $\jmath$ in the above could be x, y or t coordinates. By the Theorem 6.5. in [23], $\mathbf{v}^{(2)}[u_{tt} - f(u)(u_{xx} + u_{yy})] = 0$ whenever

$$u_{tt} - f(u)(u_{xx} + u_{yy}) = 0. \tag{16}$$

Since

$$\mathbf{v}^{(2)}[u_{tt} - f(u)(u_{xx} + u_{yy})] = \varphi^{tt} - \varphi f_u(u_{xx} + u_{yy}) - f(u)(\varphi^{xx} + \varphi^{yy}),$$

therefore

$$\varphi^{tt} - \varphi f_u(u_{xx} + u_{yy}) - f(u)(\varphi^{xx} + \varphi^{yy}) = 0. \tag{17}$$

Using the formula (15) we obtain coefficient functions $\varphi^{xx}, \varphi^{yy}, \varphi^{tt}$ as

$$\varphi^{xx} = D_x^2 Q + \xi u_{xxx} + \eta u_{yxx} + \tau u_{txx}, \tag{18}$$

$$\varphi^{yy} = D_y^2 Q + \xi u_{xyy} + \eta u_{yyy} + \tau u_{tyy}, \tag{19}$$

$$\varphi^{tt} = D_t^2 Q + \xi u_{xtt} + \eta u_{ytt} + \tau u_{ttt}, \tag{20}$$

where the operators D_x, D_y and D_t denote the total derivatives with respect to x, y and t:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t} + \cdots \\ D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + u_y \frac{\partial}{\partial u} + u_{yy} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{yx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yt} \frac{\partial}{\partial u_t} + \cdots \\ D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{ty} \frac{\partial}{\partial u_y} + \cdots \end{aligned} \tag{21}$$

and by substituting them into invariance condition (17), we are left with a polynomial equation involving the various derivatives of $u(x, y, t)$ whose coefficients are certain derivatives of ξ, η, τ and φ. Since ξ, η, τ, φ only depend on x, y, t, u we can equate the individual coefficients to zero, leading to the complete set of determining equations:

$$\xi = \xi(x, t) \tag{22}$$

$$\eta = \eta(y, t) \tag{23}$$

$$\tau = \tau(x, y, t) \tag{24}$$

$$\varphi = \alpha(x, y, t)u + \beta(x, y, t) \tag{25}$$

$$\tau_t = \varphi_u = \alpha(x, y, t), \tag{26}$$

$$\xi_{tt} = f(u)(\xi_{xx} - 2\varphi_{xu}) \tag{27}$$

$$\eta_{tt} = f(u)(\eta_{yy} - 2\varphi_{yu}) \tag{28}$$

$$\tau_{tt} = f(u)(\tau_{xx} + \tau_{yy}) + 2\varphi_{tu} \tag{29}$$

$$f_u \varphi = 2f(u)(\xi_x - \tau_t) \tag{30}$$

$$f_u \varphi = 2f(u)(\eta_y - \tau_t) \tag{31}$$

$$f(u)\tau_x = \xi_t \tag{32}$$

$$f(u)\tau_y = \eta_t \tag{33}$$

$$\varphi_{tt} = f(u)(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}). \tag{34}$$

3. Classification of symmetries of the model

In this section we start to classify the symmetries of the nonlinear wave equation (8). To find a complete solution of the above system we consider Eq. (30) and with assumption $f_u \neq 0$ we rewrite:

$$\varphi = 2\frac{f}{f_u}(\xi_x - \tau_t). \tag{35}$$

Note the case of $f(u) = constant$ explained in introduction. Two general cases are possible:

$$\text{(i)}\ \frac{f}{f_u} = c, \tag{36}$$

$$\text{(ii)}\ \frac{f}{f_u} = g(u), \tag{37}$$

where c is a constant.

Table 1
Commutation relations satisfied by infinitesimal generators in Cases (i) and (ii).

[,]	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$
$\mathbf{v}_1$	0	$-\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_3$	0	0
$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_2$	0	0	0	0
$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_3$	0	0	0	0
$\mathbf{v}_4$	0	0	0	0	$-\mathbf{v}_5$
$\mathbf{v}_5$	0	0	0	$\mathbf{v}_5$	0

3.1. *Case* (i)

In this case with integrating from Eq. (36) with respect to u to obtain

$$f(u) = K e^{\frac{u}{c}}, \tag{38}$$

where K is an integration constant. Then the Eq. (35) reduce to

$$\varphi = 2c(\xi_x - \tau_t). \tag{39}$$

Substituting (39) into (26)–(33) we have

$$\begin{aligned} &\xi(x) = c_1 x + c_2; \qquad \eta(y) = c_1 y + c_3; \\ &\tau(t) = c_4 t + c_5; \qquad \varphi = 2c(c_1 - c_4) \end{aligned} \tag{40}$$

where c_i, $i = 1, \dots, 5$, are arbitrary constants. The Lie symmetry generator for Eq. (8) in this case (i) is

$$\mathbf{v} = (c_1 x + c_2)\frac{\partial}{\partial x} + (c_1 y + c_3)\frac{\partial}{\partial y} + (c_4 t + c_5)\frac{\partial}{\partial t} + 2c(c_1 - c_4)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{41}$$

Therefore the symmetry algebra of the (2+1)-nonlinear wave equation (8) is spanned by the vector fields

$$\mathbf{v}_1 = x\partial_x + y\partial_y + 2c\partial_u; \qquad \mathbf{v}_2 = \partial_x; \qquad \mathbf{v}_3 = \partial_y; \qquad \mathbf{v}_4 = t\partial_t - 2c\partial_u; \qquad \mathbf{v}_5 = \partial_t. \tag{42}$$

The commutation relations satisfied by generators (42) in the case (i) are shown in Table 1. The invariants associated with the infinitesimal generator $\mathbf{v}_1$ are obtained by integrating the characteristic equation:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{2c} \tag{43}$$

and have the forms

$$r = \frac{y}{x}, \quad s = t, \quad \text{and} \quad \omega(r, s) = u(x, y, t) - 2c\ln x. \tag{44}$$

Substituting (44) into (16) to determine the form of the function ω to obtain

$$\omega_{ss} = K e^{\frac{\omega}{c}}\Big((1 + r^2)\omega_{rr} + 2r\omega_r - 2c\Big). \tag{45}$$

By solving this partial differential equation we obtain the reduced equation

$$\omega(r, s) = \zeta_1(r) + \zeta_2(s), \tag{46}$$

where ζ_1 and ζ_2 satisfy in following second-order differential equations

$$\ddot{\zeta}_1(r^2 + 1) + c_1 e^{-\frac{\zeta_1}{c}} + 2(r\dot{\zeta}_1 - c) = 0; \qquad \ddot{\zeta}_2 + Kc_1 e^{\frac{\zeta_2}{c}} = 0, \tag{47}$$

with c_1, c, K, arbitrary constants. The characteristic equation associated with $\mathbf{v}_4$ is

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{-2c}, \tag{48}$$

which generates the invariants $x, y, t^{-2c}e^{-u}$. Then the similarity solution is chosen to have the form

$$u(x, y, t) = 2c\ln\frac{h(x, y)}{t}. \tag{49}$$

By substituting (49) into (16) to determine the form of the function h to obtain

$$\frac{1}{K} - h(x, y)(h_{xx} + h_{yy}) + h_x^2 + h_y^2 = 0, \tag{50}$$

which has the solution

$$h(x, y) = mx + py + q; \qquad m^2 + p^2 = K^{-1}, \tag{51}$$

where m, p, q are arbitrary constants. For the remaining infinitesimal generators $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5$, the invariants associated are the arbitrary functions $\lambda(y, t, u)$, $\mu(x, t, u)$, and $\nu(x, y, u)$ respectively.

3.2. *Case* (ii)

In this case we classify solution of the wave equation (8), with assumption $g_u \neq 0$. With substituting (34) into (27)–(28), since ξ, η and τ are not dependent to u, therefore from

$$u(x, y, t, u) = 2g(u)(\xi_x - \tau_t), \tag{52}$$

and also from (8) and (25), we conclude

$$g(u) = e_1 u + e_2, \tag{53}$$

where $e_1 \neq 0$ and e_2 are arbitrary constants. Now we substitute (53) into (37) and rewrite

$$\frac{f_u}{f} = \frac{1}{e_1 u + e_2}. \tag{54}$$

Therefore by integrating from (54) with respect to u we have

$$f(u) = L(e_1 u + e_2)^{\frac{1}{e_1}}, \tag{55}$$

where L is an integration constant. Now by considering Eqs. (22)–(34), it is not hard to find that the components ξ, η, τ and φ of infinitesimal generators become

$$\begin{aligned} &\xi(x) = c_1 x + c_2; \qquad \eta(y) = c_1 y + c_3; \\ &\tau(t) = c_4 t + c_5; \qquad \varphi = 2e_1(c_1 - c_4)u + 2e_2(c_1 - c_4), \end{aligned} \tag{56}$$

where c_i, $i = 1, \ldots, 5$, are arbitrary constants. From the above, the five infinitesimal generators can be constructed:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 = x\partial_x + y\partial_y + (2e_1 u + 2e_2)\partial_u; \qquad \mathbf{v}_2 = \partial_x; \qquad \mathbf{v}_3 = \partial_y; \\ &\mathbf{v}_4 = t\partial_t - 2(e_1 u + e_2)\partial_u; \qquad \mathbf{v}_5 = \partial_t. \end{aligned} \tag{57}$$

It is easy to check that the infinitesimal generators (57) form a closed Lie algebra whose corresponding commutation relations coincide with obtained results in Table 1. For generator $\mathbf{v}_1$, the associated equations are

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}t}{0} = \frac{\mathrm{d}u}{2(e_1 u + e_2)}, \tag{58}$$

which generate the invariants $p = \frac{y}{x}$, $q = t$, and $\vartheta(p, q) = (u + \frac{e_2}{e_1})x^{-2e_1}$. Consequently, the similarity solution is chosen to have the form

$$u(x, y, t) = \vartheta\left(t, \frac{y}{x}\right)x^{2e_1} + \frac{e_2}{e_1}. \tag{59}$$

We substitute (59) into (16) to obtain following partial differential equation

$$\vartheta_{pp} = L\vartheta^{\frac{1}{e_1}}[(q^2 + 1)\vartheta_{qq} + 2q\vartheta_q(1 - 2e_1) + 2e_1(2e_1 - 1)\vartheta]. \tag{60}$$

As an example, for particular case $e_1 = 1$, the solution of (60) is

$$\vartheta(p, q) = \varsigma_1(p) \cdot \varsigma_2(q), \tag{61}$$

where $\varsigma_1(p)$ and $\varsigma_2(q)$ satisfy in second order equations

$$\ddot{\varsigma}_1 - c\varsigma_1^2 = 0; \qquad (q^2 + 1)\ddot{\varsigma}_2 - 2q\dot{\varsigma}_2 + 2\varsigma_2 - cL^{-1} = 0, \tag{62}$$

where c is an arbitrary constant. Also characteristic equation corresponding generator $\mathbf{v}_4$ is

$$\frac{\mathrm{d}x}{0} = \frac{\mathrm{d}y}{0} = \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{\mathrm{d}u}{-2(e_1 u + e_2)}, \tag{63}$$

and so

$$u(x, y, t) = l(x, y)t^{-2e_1} - \frac{e_2}{e_1}. \tag{64}$$

Substitute (64) into (16), $l(x, y)$ satisfies in the following equation:

$$L(l_{xx} + l_{yy})l^{(e_1^{-1} - 1)} - 2e_1(2e_1 + 1) = 0. \tag{65}$$

For the remaining infinitesimal generators $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5$, the invariants associated are the arbitrary functions $r(y, t, u)$, $m(x, t, u)$, and $n(x, y, u)$ respectively.

4. Conclusion and new ideas

In this paper we have obtained some particular Lie point symmetries group of the (2+1)-nonlinear wave equation $u_{tt} - f(u)(u_{xx} + u_{yy}) = 0$ where $f(u)$ is a smooth function on u, by using here the classical Lie symmetric method. In Section 2, the complete set of determining equations was obtained by substituting the Eqs. (18)–(20) in invariance condition (17) and then in Section 3, we classify the symmetries of this nonlinear wave equation by assumption of two cases in (36) and (37) to consider $\frac{f}{f_u}$ is a constant or is a smooth function with respect to u and $f_u \neq 0$. The commutation relations satisfied by infinitesimal generators in two cases are given in Table 1, and their invariants associated with the infinitesimal generators are obtained. This method is suitable for preliminary group classification of some class of nonlinear wave equations [6,7].

There are some classes of (2+1)-nonlinear wave equations that will be investigated by both classical or nonclassical symmetries method similarly to what we do for the classical case. For examples

$$u_{tt} - f(x, u)(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \tag{66}$$

$$u_{tt} - f(x, u_x)(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \tag{67}$$

or the generalized case

$$u_{tt} - f(x, y, u, u_x)(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \tag{68}$$

are of interest.

Acknowledgments

It is a pleasure to thank the anonymous referees for their constructive suggestions and helpful comments which have materially improved the presentation of the paper.

References

[1] S. Lie, Arch. Math. 6 (1881) 328.
[2] L.V. Ovsiannikov, Group Analysis of Differential Equations, Academic Press, New York, 1982.
[3] W.F. Ames, R.J. Lohner, E. Adams, Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$, J. Nonlinear Mech. 16 (1981) 439–447.
[4] A. Donato, Similarity analysis and nonlinear wave propagation, Internat. J. Nonlinear Mech. 21 (1987) 307–314.
[5] M. Torrisi, A. Valenti, Group properties and invariant solutions for infinitesimal transformations of a nonlinear wave equation, Internat. J. Nonlinear Mech. 20 (1985) 135–144.
[6] N.H. Ibragimov, M. Tottisi, A. Valenti, Preliminary group classification of equations $u_{tt} = f(x, u_x)u_{xx} + g(x, u_x)$, J. Math. Phys. 32 (11) (1991) 2988–2995.
[7] Lina song, Hongqing zhang, Preliminary group classification for the nonlinear wave equation $u_{tt} = f(x, u)u_{xx} + g(x, u)$, Nonlinear Anal., in press doi:10.1016/j.na.2008.07.008.
[8] A. Oron, P. Rosenau, Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations, Phys. Lett. A 118 (1986) 172–176.
[9] E.S. Suhubi, A. Bakkaloglu, Group properties and similarity solutions for a quasi-linear wave equation in the plane, Internat. J. Nonlinear Mech. 26 (1991) 567–584.
[10] D.J. Arrigo, Group properties of $u_{xx} - u_y^m u_{yy} = f(u)$, Internat. J. Nonlinear Mech. 26 (1991) 619–629.
[11] N.H. Ibragimov, Lie Group Analysis of Differential Equations–Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws, CRC, Boca Raton, FL, 1994.
[12] J.G. Kingston, C. Sophocleous, Symmetries and form-preserving transformations of one-dimensional wave equations with dissipation, Internat. J. Nonlinear Mech. 36 (2001) 987–997.
[13] V. Lahno, R. Zhdanov, O. Magda, Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations, Acta Appl. Math. 91 (2006) 253–313.
[14] S.C. Chikwendu, Non-linear wave propagation solutions by Fourier transform perturbation, Internat. J. Nonlinear Mech. 16 (1981) 117–128.
[15] M.L. Gandarias, M. Torrisi, A. Valenti, Symmetry classification and optimal systems of a non-linear wave equation, Internat. J. Nonlinear Mech. 39 (2004) 389–398.
[16] E. Pucci, Group analysis of the equation $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$, Riv. Mat. Univ. Parma 4 (1987) 71–87.
[17] M.S. Velan, M. Lakshamanam, Nonlinear Math. Phys. 4 (1997) 251.
[18] P.G. Estevez, C.Z. Qu, S.L. Zhanng, J. Math. Anal. Appl. 275 (2002).
[19] Na. Liu, Xiqiang Liu, Hailing Lü, New exact solutions and conservation laws of the (2+1)-dimensional dispersive long wave equations, Phys. Lett. A 373 (2009) 214–220.
[20] A. Ahmad, A.H. Bokhari, A.H. Kara, F.D. Zaman, Symmetry reduction for 2-dimensional non-linear wave equation, Il Nuovo Cimento B 121 (6) (2006).
[21] R. Cimpoiasu, R. Constantinescu, Lie symmetries and invariants for 2D nonlinear heat equation, Nonlinear Anal. 68 (2008) 2261–2268.
[22] A. Ahmad, Ashfaque H. Bokhari, A.H. Kara, F.D. Zaman, Symmetry classifications and reductions of some classes of (2+1)-nonlinear heat equation, J. Math. Anal. Appl. 339 (2008) 175–181.
[23] P.J. Olver, Equivalence, Invariants, and Symmetry, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

Symmetry analysis for a new form of the vortex mode equation

Mehdi Nadjafikhah and Ali Mahdipour–Shirayeh

Abstract. Giving a new form of the vortex mode equation by a proper change of parameter, our aim is to analyze the point and contact symmetries of the new equation. Fundamental invariants and a form of general solutions of point transformations along with some specific examples are also derived.

M.S.C. 2000: 34C14, 58D19, 35L05.

Key words: symmetry analysis, fundamental invariants, multidimensional simple waves.

1 Introduction

Investigation of nonlinear phenomena appearing in a very wide area of pure and applied sciences has met extremely extensive progresses and developments. These studies which split into numerical and analytical considerations are essentially and in most cases related to some nonlinear differential equations. Among those nonlinear systems, a few interesting open problems concern the hydrodynamic type of equations governing fluid motions. Especially the Euler and Navier-Stokes equations which reveal a mysterious behavior are being intensively studied in two main considerations: The incompressible motion mostly dealing with vortex dynamics and the compressible flow concerning the appearance of discontinuities shocks (see [7] and related references therein). In [7] after a brief derivation of relativistic ideal fluid equations, a multidimensional simple wave ansatz is substituted into these equations and various modes (for instance the vortex mode) and phase velocities relative to the laboratory (fixed) frame are found.

The vortex mode equation [1, 7, 9] is defined as a first order ODE

$$\frac{dk}{d\varphi} \cdot \Big(n - \frac{k \cdot n}{k^2 + w}\, k \Big) = 0, \tag{1.1}$$

where w is a constant, φ is still treated as the wave phase, and $k = (k_1, k_2, k_3)$ and $n = (n_1, n_2, n_3)$ are some vectors in $\mathbb{R}^3$ with the physical meaning of κ in [7] and

Differential Geometry - Dynamical Systems, Vol.11, 2009, pp. 144-154.

unit normal vector to the wave front resp. A symmetry analysis of eq. (1.1) up to both point and contact transformations has performed in [7]. But in this paper, we investigate symmetry properties of a new form of eq. (1.1) as a simple form of the vortex mode equation. As is well known, under change of coordinates the symmetry group of a system of differential equations remains unchanged. But since the jacobian of the following change of parameter is zero, so symmetry analysis of the vortex mode equation and the new form are not necessarily the same. By applying the following change of parameter

$$t := \frac{1}{2}\ln(k^2 + w),$$

we find the new form as follows

$$n \cdot \Big(\frac{dk}{dt} - k\Big) = 0. \tag{1.2}$$

Since eq. (1.1) is a homogeneous linear equation with respect to n, so we consider it to be of arbitrary length and not necessarily unit.

Eq. (1.2) is in fact an expression of the vortex mode equation that provides an in depth study of eq. (1.1). Roughly speaking, it leads to slightly simpler calculations for finding exact solutions of the vortex mode equation. But for reaching to this goal, we investigate symmetry properties of eq. (1.2) which plays a key role in finding general solutions, fundamental invariants, invariant solutions and etc. Moreover, knowledge of a symmetry group of eq. (1.2) allows us to construct new solutions from old ones [2, 3, 5, 6, 4, 8]. Therefore in this study, we concern with the latter equation to find its point and contact symmetry properties and also give its fundamental invariants and a form of general solutions.

Throughout this paper we assume that indices i, j varies between 1 and 3 and each index of a function implies the derivation of the function with respect to it, unless specially stated otherwise.

2 The point symmetry of the equation

To find the symmetry group of eq. (1.2) by Lie infinitesimal method, we follow the method presented in [5]. We find infinitesimal generators of the equation and also the Lie algebra structure of the symmetry group of (1.2). In this section, we are concerned with the action of the point transformation group.

The equation is a relation among with the variables of 1–jet space $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^6)$ with (local) coordinate $(t, k, n, q, p) = (t, k_i, n_j, q_r, p_s)$ (for $1 \le i, j, r, s \le 3$), where this coordinate involving an independent variable t and 6 dependent variables k_i, n_j and their derivatives q_r, p_s of first order with respect to t resp.

Let $\mathcal{M}$ be the total space of independent and dependent variables. The solution space of eq. (1.2), (if it exists) is a subvariety $S_\Delta \subset J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^6)$ of the first order jet bundle of one–dimensional submanifolds of $\mathcal{M}$.

We define a point transformation on $\mathcal{M}$ with relations

$$\tilde{t} = \phi(t, k_i, n_j), \qquad \tilde{k}_r = \chi_r(t, k_i, n_j), \qquad \tilde{n}_s = \psi_s(t, k_i, n_j).$$

where ϕ, χ_r and ψ_s are some smooth functions. Let

$$v := T\,\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\Big(K_i\frac{\partial}{\partial k_i} + N_i\frac{\partial}{\partial n_i}\Big)$$

be the general form of infinitesimal generators that signify the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of the symmetry group G of eq. (1.2). In this relation, T, K_i and N_j are smooth functions of variables t, k_i and n_j. The first order prolongation [5, 4, 8] of v is as follows

$$v^{(1)} \;\; := \;\; v + \sum_i K_i^t\frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_j N_j^t\frac{\partial}{\partial p_j},$$

where $K_i^t = D_t\,Q_1^i + T\,q_{i,t}$ and $N_j^t = D_t\,Q_2^j + T\,p_{j,t}$, in which D_t is total derivative and $Q_1^i = K_i - T\,q_i$ and $Q_2^j = N_j - T\,p_j$ are characteristics of vector field v [5, 4, 8]. By effecting $v^{(1)}$ on (1.2), we obtain the following expression

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad &\sum_i\Big[n_i\,(K_{it} - K_i) - N_i\,k_i + p_i\sum_j n_j\,K_{jn_i} + q_i\Big(N_i - n_i\,T_t + \sum_j n_j\,K_{jk_i}\Big)\\ &-q_i^2\,n_i\,T_{k_i}\Big] - \sum_{i\neq j} q_i\,q_j(n_i\,T_{k_j} + n_j\,T_{k_i}) - n_i\sum_{i,j} q_i\,p_j\,T_{n_j} = 0,\end{aligned}$$

in which, each index (exception for determined indices) signifies the derivation with respect it.

We can prescribe t, k_i, n_j, q_r, p_s $(1 \le i, j, r, s \le 3)$ arbitrarily, and functions K_i and N_j only depend on t, k_i, n_j $(i, j = 1, 2, 3)$. So, eq. (2.1) will be satisfied if and only if we have the following equations

$$(2.2)\qquad N_i - n_i\,T_t + n_1K_{1k_i} + n_2K_{2k_i} + n_3K_{3k_i} = 0,$$

$$(2.3)\qquad n_1K_{1n_i} + n_2K_{2n_i} + n_3K_{3n_i} = 0,$$

$$(2.4)\qquad n_i\,T_{k_i} = 0, \qquad n_i\,T_{n_j} = 0, \qquad n_i\,T_{k_j} + n_j\,T_{k_i} = 0,$$

$$(2.5)\qquad \sum_{i=1}^{3}\Big(n_i(K_{i\,t} - K_i) - N_i\,k_i\Big) = 0,$$

when $1 \le i, j \le 3$ and (1.2) is satisfied. These equations are called the determining equations. From (2.3), for each i, we have

$$(2.6)\qquad N_i = n_i\,T_t - (n_1K_1 + n_2K_2 + n_3K_3)_{k_i}.$$

Since $n \neq 0$, without less of generality, one may assume that $n_1 \neq 0$. Then by eqs. (2.4) we conclude that T just depends on t:

$$T = T(t).$$

By solving eqs. (2.3) along with eq. (2.5) in respect to K_1, K_2 and K_3, then we deduce the following relations (provided by MAPLE)

$$K_1 = k_1\,T + e^t\,F^1 \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} &K_{2t} = K_2 - k_1\,K_{2k_1} - k_2\,K_{2k_2} - k_3\,K_{2k_3} + k_2\,T_t,\\ &n_1\,K_{2n_1} = e^t\,F^1_4, \qquad n_2\,K_{2n_2} = -e^t\,F^1_4 - n_3\,K_{2n_3}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} &K_{3t} = K_3 - k_1\,K_{3k_1} - k_2\,K_{3k_2} - k_3\,K_{3k_3} + k_3\,T_t,\\ &n_1\,K_{3n_1} = e^t\,F^1_5, \qquad K_{3n_2} = K_{2n_3} \qquad n_3\,K_{3n_3} = -e^t\,F^1_5 - n_2\,K_{2n_3} \end{aligned} \tag{2.9}$$

for arbitrary function $F^1 = F^1(k_1e^{-t}, k_2e^{-t}, k_3e^{-t}, \frac{n_2}{n_1}, \frac{n_3}{n_1})$. In these relations, F^1_i implies the derivation of F^1 in respect to the i^{th} coefficient.

Eqs. (2.8) lead to the following relations

$$\begin{aligned} &K_{2t} + k_1\,K_{2k_1} + k_2\,K_{2k_2} + k_3\,K_{2k_3} - K_2 - k_2\,T_t = 0,\\ &n_1\,K_{2n_1} + n_2\,K_{2n_2} + n_3\,K_{2n_3} = 0, \end{aligned}$$

so that after solving determines the form of K_2 as

$$K_2 = k_2\,T + e^t\,F^2, \tag{2.10}$$

when $F^2 = F^2(k_1e^{-t}, k_2e^{-t}, k_3e^{-t}, \frac{n_2}{n_1}, \frac{n_3}{n_1})$ is an arbitrary smooth function. Also, from eqs. (2.9), we find that

$$\begin{aligned} &K_{3t} + k_1\,K_{3k_1} + k_2\,K_{3k_2} + k_3\,K_{3k_3} - K_3 - k_3\,T_t = 0,\\ &n_1\,K_{3n_1} + n_2\,K_{3n_2} + n_3\,K_{3n_3} = 0, \end{aligned}$$

which these expressions tend to the following solution of K_3 with respect to arbitrary smooth function $F^3 = F^3(k_1e^{-t}, k_2e^{-t}, k_3e^{-t}, \frac{n_2}{n_1}, \frac{n_3}{n_1})$:

$$K_3 = k_3\,T + e^t\,F^3. \tag{2.11}$$

But by satisfying F^2 and F^3 resp. in the two last relations of (2.8) and three last relations of (2.9), we find that

$$\begin{aligned} F^1 &= -\frac{1}{n_1}(n_2\,F^2 + n_3\,G) - n_2\int \frac{1}{n_1^2}F^2\,dn_1 - n_3\int \frac{1}{n_1^2}G\,dn_1 + \frac{n_2 n_3}{n_1}\int \frac{1}{n_1^2}F^2_5\,dn_1\\ &\quad + \frac{1}{n_1}\int\Big(F^2 - \frac{n_3}{n_1}\,F^2_5\Big)\,dn_2 + \frac{1}{n_1}\int G\,dn_3 + H,\\ F^3 &= \frac{1}{n_1}\int F^2_5\,dn_2 - n_2\int \frac{1}{n_1^2}F^2_5\,dn_1 + G, \end{aligned}$$

when F^2, $G = G(k_1e^{-t}, k_2e^{-t}, k_3e^{-t}, \frac{n_3}{n_1})$ and $H = H(k_1e^{-t}, k_2e^{-t}, k_3e^{-t})$ are arbitrary functions and F^j_i denotes the derivation of F^j with respect to its i^{th} coefficient (similar statement is valid for G_i and H_i in subsequent relations).

Substituting the new forms of K_1, K_2 and K_3 in eqs. (2.3), we obtain the following relations

$$\frac{n_2 n_3}{n_1}\int \frac{1}{n_1^2} F_5^2\, dn_1 + \frac{1}{n_1}(n_2\, F^2 + n_3\, G) = 0, \tag{2.12}$$

$$F^2 + n_1 n_3 \int \frac{1}{n_1^3}\, F_5^2\, dn_1 = 0, \tag{2.13}$$

$$n_2(n_1+n_3)F_5^2 + n_2^2\, F_4^2 + n_1^3 n_2 \int \frac{1}{n_1^3} F_5^2\, dn_1 - n_1^2\, G = n_1^2 n_2 \int \frac{1}{n_1^2} F_5^2\, dn_1. \tag{2.14}$$

By applying the last relations in F^1 and F^3, we attain the following relations (for arbitrary F^2)

$$\begin{aligned} F^1 = &-\frac{2}{n_1}(n_2\, F^2 + n_3\, G) - n_2 \int \frac{1}{n_1^2} F^2\, dn_1 + \frac{1}{n_1}\int \Big(F^2 - \frac{n_3}{n_1}\, F_5^2\Big)\, dn_2 \\ &-n_3 \int \frac{1}{n_1^2} G\, dn_1 + \frac{1}{n_1}\int G\, dn_3 + H, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$F^3 = \frac{1}{n_1}\int F_5^2\, dn_2 + \frac{n_2}{n_3} F^2 + 2\, G, \tag{2.16}$$

in which, we assumed that $n_3 \neq 0$. Otherwise, from eq. (2.13), $F^2 = 0$ and hence by eq. (2.14), $G = 0$ and therefore we have $F^1 = H$ and $F^3 = 0$.

We continue our investigation of symmetry group with the condition $n_3 \neq 0$. From eqs. (2.12)–(2.14), we infer the following relation

$$n_2(n_1+n_3)\, F_5^2 + n_2^2\, F_4^2 = 0. \tag{2.17}$$

On the other hand, by replacing $F_5^2 = F_4^3$ from relation $K_{3n_2} = K_{2n_3}$ of (2.9), in (2.17), we find that $n_2\, F^2 = -2\, n_3\, G$. This relation along with relation (2.17) leads to an equation that its solution determines the form of G as following

$$G = \frac{1}{n_3}(n_1+n_3)\, L,$$

where $L = L(k_1 e^{-t}, k_2 e^{-t}, k_3 e^{-t})$ is an arbitrary smooth function. Hence, $F^2 = -\frac{2}{n_2}(n_1+n_3)\, L$ and from eqs. (2.15) and (2.16), we have (we suppose that $n_2 \neq 0$, otherwise from eq. (2.12), $G = 0$ and hence $L = 0$)

$$F^1 = \frac{1}{n_1}\Big(2\,(n_1+n_2+n_3) + n_1 \ln(n_1\, n_3)\Big)\, L + H, \qquad F^3 = -2\, \ln(n_2)\, L.$$

Applying the last forms of K_i s in (2.3) for $i = 3$, we find $\frac{n_1}{n_3}\, L = 0$. We have assumed that $n_1 \neq 0$, therefore $L = 0$ and the forms of K_i and N_j satisfy

$$\begin{aligned} K_1 &= k_1\, T + e^t\, H, & K_2 &= k_2\, T, \\ K_3 &= k_1\, T, & N_j &= n_i(T_t - T) - n_1\, H_i. \end{aligned}$$

Finally, the general form of infinitesimal generators as elements of point symmetry algebra of eq. (1.2), which we call *point infinitesimal generators*, is described by the

$[\,,\,]$	v_T	v_H
v_T	0	0
v_H	0	0

Table 1: The commutators table of $\mathfrak{g}$ for eq. (1.2)

following relation, which holds true for arbitrary functions T and H

$$\begin{aligned} v &= T\Big(\frac{\partial}{\partial t}+k_2\,\frac{\partial}{\partial k_2}+k_3\,\frac{\partial}{\partial k_3}\Big)+(k_1\,T+e^t\,H)\frac{\partial}{\partial k_1} \\ &\quad+\sum_{i=1}^{3}\Big(n_i(T_t-T)-n_1\,H_i\Big)\frac{\partial}{\partial n_i}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

One may divide v into the following infinitesimal generators

$$\begin{aligned} v_T &= T\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}k_i\,\frac{\partial}{\partial k_i}\Big)+(T_t-T)\sum_{i=1}^{3}n_i\frac{\partial}{\partial n_i}, \\ v_H &= e^t\,H\,\frac{\partial}{\partial k_1}-n_1\sum_{i=1}^{3}H_i\frac{\partial}{\partial n_i}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

The Lie bracket (commutator) of the vector fields (2.19) results as straightforward linear combination of these fields. The table of commutators is given in Table 1. Hence, the Lie algebra $\mathfrak{g}=\langle v_T,v_H\rangle$ of point symmetry group G is an abelian Lie algebra.

Theorem 1. *The set of all point infinitesimal generators in the forms of (2.19) is the infinite dimensional abelian Lie algebra of the point symmetry group of equation (1.2).*

According to Theorem 2.74 of [5, 4, 8], the invariants $u=I(t,k_1,k_2,k_3,n_1,n_2,n_3)$ of one–parameter group with infinitesimal generators in the forms of (2.19) satisfy the linear, homogeneous partial differential equations of first order:

$$v[I]=0.$$

The solutions of the latter, are found by the method of characteristics (See [5] and [2] for details). So we can replace the last equation by the following characteristic system of ordinary differential equations ($1\le i,j\le 3$)

$$\frac{dt}{T}=\frac{dk_i}{K_i}=\frac{dn_j}{N_j}. \tag{2.20}$$

By solving eqs. (2.20) of the differential generator (2.19), we (locally) find the following general solutions

$$
\begin{aligned}
&I_1(t,k,n) = k_2^{-1}(k_1\,T + H) = d_1,\\
&I_i(t,k,n) = \ln(k_i) - t = d_i, \quad (\text{for } \; i = 2,3)\\
&I_4(t,k,n) = (T_t - T - H_1)\,\ln(k_1) - T\,\ln(n_1) = d_4,\\
&I_j(t,k,n) = (T_t - T)\,\ln(k_j) - T\,\ln\left(n_j(T_t - T) - n_1\,H\right) = d_j, \quad (\text{for } \; j = 5,6).
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

when d_i s are some constants. The functions $I_1, I_2, \cdots, I_6$ form a complete set of functionally independent invariants of one–parameter group generated by (2.19) (see [5]).

Similar to the theorem of section 4.3.3 of [2], the derived invariants (2.16) as independent first integrals of the characteristic system of the infinitesimal generator (2.14), provide the general solution

$$S(t,k,n) := \mu(I_1(t,k,n), I_2(t,k,n), \cdots, I_6(t,k,n)),$$

with an arbitrary function μ, which satisfies in the equation $v[\mu] = 0$.

This theorem can be extended for each finite set of independent first integrals (invariants) of characteristic system provided with an infinitesimal generator.

In the following, we give some examples provided with different selections of coefficients of eq. (2.18) for better studying, and we assume that each appeared coefficient of vector fields be non-zero.

Example 1. If we assume that $T = 1$ and $H = 0$, then the infinitesimal operator (2.13) reduces to the following vector field

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} k_i\,\frac{\partial}{\partial k_i} - \sum_{j=1}^{3} n_j\,\frac{\partial}{\partial n_j}.$$

and the group transformations (or flows) for the parameter s are expressible as $(t, k_i, n_j) \to (t + s, k_i\,e^s, n_j\,e^{-s})$, that form the (local) symmetry group of v_1.

The derived invariants in this case will be as follows

$$I_i = \ln(k_i) - t, \qquad I_{j+3} = \ln(n_j) + t, \qquad i,j = 1,2,3.$$

Therefore, the general solution corresponding to v_1, when μ is an arbitrary function, will be $S(t,k,n) = \mu\Big(\ln(k_i) - t, \ln(n_j) + t\Big)$.

Example 2. Let $T = t$ and $H = 0$, then the infinitesimal generator is

$$v_2 = t\,\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} k_i\,t\,\frac{\partial}{\partial k_i} + \sum_{j=1}^{3} n_j(1-t)\,\frac{\partial}{\partial n_j},$$

Then, the flows of v_2 for various values of parameter s are

$$(t, k_i, n_j) \to \left(t\,e^s, k_i\,e^{t(e^s-1)}, n_j\,e^{s - t(e^s-1)}\right).$$

Also, we have the below invariants

$$I_i = \ln(k_i) - t, \qquad I_{j+3} = \ln\left(\frac{n_j}{t}\right) + t, \qquad \text{for } i,j = 1,2,3,$$

and the general solution of eq. (1.2) as $S(t,k,n) = \mu\Big(\ln(k_i) - t, \ln\left(\frac{n_j}{t}\right) + t\Big)$ when μ is an arbitrary function.

Example 3. For the case which $T = 0$ and $H = k_1\, e^{-t}$, the infinitesimal generator (2.18) changes to

$$v_3 = k_1 \frac{\partial}{\partial k_1} - \sum_{j=1}^{3} n_1 \frac{\partial}{\partial n_j}.$$

The derived group transformations of v_3 for parameter s are

$$(t, k_i, n_j) \to \big(t, k_1\, e^{s}, k_2, k_3, n_1\, e^{-s}, n_2\, e^{-s} - n_1 + n_2, n_3\, e^{-s} - n_1 + n_3\big)\,.$$

Thus, the (modified) invariants are (we suppose that $k_2, k_3 \neq 0$, otherwise k_2, k_3 will be two invariants)

$$\begin{array}{lll} I_1 = t, & I_2 = k_2, & I_3 = k_3, \\ I_4 = \dfrac{k_1}{n_1}, & I_5 = \ln(k_1) - \dfrac{n_2}{n_1}, & I_6 = \ln(k_1) - \dfrac{n_3}{n_1}, \end{array}$$

and for arbitrary function μ, the general solution has the form

$$S(t,k,n) = \mu\Big(t, k_2, k_3, \frac{k_1}{n_1}, \ln(k_1) - \frac{n_2}{n_1}, \ln(k_1) - \frac{n_3}{n_1}\Big).$$

Example 4. If we suppose $T = t$ and $H = (k_1 + k_2 + k_3)\, e^{-t}$, then we have the following vector field

$$v_4 = t\frac{\partial}{\partial t} + t\,(2\,k_1 + k_2 + k_3)\,\frac{\partial}{\partial k_1} + t\sum_{i=2}^{3} k_i\,\frac{\partial}{\partial k_i} + \sum_{j=1}^{3}\Big(n_j(1-t) - n_1\,t\Big)\,\frac{\partial}{\partial n_j},$$

with group transformations of different parameters s, that transform (t, k_i, n_j) to

$$\begin{aligned} P(s) = \Big(&t\,e^{s}, -(k_2 + k_3)\,e^{t\,(e^{s}-1)} + (k_1 + k_2 + k_3)\,e^{2\,t\,(e^{s}-1)}, k_p\,e^{t\,(e^{s}-1)}, \\ &n_1\,e^{s-2\,t(e^{s}-1)}, n_1\,e^{s-2\,t(e^{s}-1)} + (n_q - n_1)\,e^{s-t(e^{s}-1)}\Big)\,, \end{aligned}$$

where $p, q = 2, 3$. Its independent invariants are

$$\begin{array}{ll} I_1 = (1-2\,t)\,\ln(k_3) - t\,\ln\left(n_1(1-2\,t)\right), & I_2 = 2\,t - \ln(2\,k_1 + k_2 + k_3), \\ I_3 = (1-t)\,\ln(k_2) - t\,\ln\left(n_2(1-t) - n_1\,t\right), & I_4 = t - \ln(k_2) \\ I_5 = (1-t)\,\ln(k_3) - t\,\ln\left(n_3(1-t) - n_1\,t\right), & I_6 = k_2\,k_3^{-1}, \end{array}$$

and hence the general solution of (1.2) in respect to infinitesimal operator v_4 is an arbitrary function of these invariants. Indeed, if $u = f(t, k_i, n_j)$ be a solution of eq. (1.2) then also is $u = f(P(s))$ for each s.

3 The contact symmetry of the equation

In continuation, we change the group action and find symmetry group and invariants of eq. (1.2) up to the contact transformation groups. According to Bäcklünd theorem [5], if the number of dependent variables be greater than one (like our problem), then each contact transformation is the prolongation of a point transformation. But in this section, we directly earn the structure of infinitesimal generators of contact transformations

We suppose that the general form of a contact transformation be as following

$$\begin{array}{lll} \widetilde{t} = \phi(t,k_i,n_j,q_r,p_s), & \widetilde{k}_l = \chi_l(t,k_i,n_j,q_r,p_s), & \widetilde{n}_m = \psi_m(t,k_i,n_j,q_r,p_s), \\ \widetilde{q}_n = \eta_n(t,k_i,n_j,q_r,p_s), & \widetilde{p}_u = \zeta_u(t,k_i,n_j,q_r,p_s), & \end{array}$$

where i,j,l,m,n and u varies between 1 and 6; and $\phi,\chi_l,\psi_m,\eta_n$ and ζ_u are arbitrary smooth functions. In this case of group action, an infinitesimal generator which is a vector field in $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^6)$, has the following general form

$$v := T\,\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\Big[K_i\,\frac{\partial}{\partial k_i} + N_i\,\frac{\partial}{\partial n_i} + Q_i\,\frac{\partial}{\partial q_i} + P_i\,\frac{\partial}{\partial p_i}\Big],$$

for arbitrary smooth functions T,K_l,N_m,Q_m,P_u ($l=1,2$ and $1\le m,n,u\le 3$).

Since our computations are done in 1–jet space, so we do not need to lift v to higher jet spaces and hence we act v (itself) on the eq. (1.2), then we find the following relation

$$\sum_i [n_i(Q_i-K_i)+N_i(q_i-k_i)] = 0.$$

Since $n\neq 0$, so without less of generality, we can suppose that $n_1\neq 0$, then the solution to this equation for would be

$$K_1 = Q_1 + \frac{1}{n_1}\Big[\sum_{i=2,3} n_i(Q_i-K_i) + \sum_j N_j(q_j-k_j)\Big].$$

Therefore, the infinitesimal generator which we call it as *contact infinitesimal generator* is in the following form

$$\begin{aligned} v \;=\; & T\,\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=2}^{3} K_i\Big(\frac{\partial}{\partial k_i} - \frac{n_i}{n_1}\,\frac{\partial}{\partial k_1}\Big) + \sum_{j=1}^{3}\Big[Q_j\Big(\frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{n_j}{n_1}\,\frac{\partial}{\partial k_1}\Big) \\ & + N_j\Big(\frac{\partial}{\partial n_j} + \frac{1}{n_1}(q_j-k_j)\,\frac{\partial}{\partial k_1}\Big) + P_j\,\frac{\partial}{\partial p_j}\Big]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

One may divide the latter form to following vector fields, to consist a basis for Lie

$[\,,\,]$	v_i	v_j
v_i	0	$v_i + v_j$
v_j	$-v_i - v_j$	0

Table 2: The commutators table provided by contact symmetry.

algebra $\mathfrak{g} = \langle v \rangle$ of contact symmetry group G

$$
\begin{aligned}
& v_1 = T\,\frac{\partial}{\partial t}, && v_2 = K_2\Big(\frac{\partial}{\partial k_2} - \frac{n_2}{n_1}\frac{\partial}{\partial k_1}\Big),\\
& v_3 = K_3\Big(\frac{\partial}{\partial k_3} - \frac{n_3}{n_1}\frac{\partial}{\partial k_1}\Big), && v_4 = Q_1\Big(\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial k_1}\Big),\\
& v_5 = Q_2\Big(\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{n_2}{n_1}\frac{\partial}{\partial k_1}\Big), && v_6 = Q_3\Big(\frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{n_3}{n_1}\frac{\partial}{\partial k_1}\Big),\\
& v_7 = N_1\Big(\frac{\partial}{\partial n_1} + \frac{1}{n_1}(q_1 - k_1)\,\frac{\partial}{\partial k_1}\Big), && v_8 = N_2\Big(\frac{\partial}{\partial n_2} + \frac{1}{n_1}(q_2 - k_2)\,\frac{\partial}{\partial k_1}\Big),\\
& v_9 = N_3\Big(\frac{\partial}{\partial n_3} + \frac{1}{n_1}(q_3 - k_3)\,\frac{\partial}{\partial k_1}\Big), && v_{10} = P_1\,\frac{\partial}{\partial p_1},\\
& v_{11} = P_2\,\frac{\partial}{\partial p_2}, && v_{12} = P_3\,\frac{\partial}{\partial p_3}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

The commutators $[v_i, v_j]$ for $1 \leq i, j \leq 12$ are linear combinations of v_i themself, and hence these vector fields construct a basis for Lie algebra $\mathfrak{g}$ of contact symmetry group G. The commutator table is given in Table 2. In this table, when commutator of two vector fields has a part in the form of a v_i, then we used v_i instead of it. As is indicated in this table, for each $1 \leq i, j \leq 12$, the Lie bracket of v_i and v_j has two parts, one part in the form of v_i, and another part in the form of v_j.

Theorem 2. *The contact symmetry group of (1.2) is an infinite dimensional Lie algebra and its Lie algebra is generated by contact infinitesimal operators (3.2) with the commutators table 2.*

4 Conclusions

A symmetry analysis for a new form of the vortex mode equation led to find the structure of point and contact infinitesimal generators as well as fundamental invariants of the new equation. In addition a form of general solutions implied by these invariants was obtained. Also we presented some examples for the point transformation case which tend to a precise determination of related symmetry groups. In the special case of our problem, the contact and point symmetry group of the vortex mode equation were both found to be infinite dimensional Lie groups when the normal vector to wave front is not necessarily unit.

References

[1] G. Boillat, *Simple waves in $n-$dimensional propagation*, J. Math. Phys. 11 (1970), 1482-1483.

[2] N.H. Ibragimov, *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, England, 1999.

[3] N.H. Ibragimov, *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1985.

[4] M. Nadjafikhah and A. Mahdipour Sh., *Affine classification of $n-$curves*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications 13, 2 (2009), 66-73.

[5] P.J. Olver, *Equivalence, Invariants, and Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[6] P.J. Olver, *Application of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1993.

[7] T. Sahihi, H. Eshraghi and A. Mahdipour–Shirayeh, *Multidimensional simple waves in fully relativistic fluids*, to appear (Preprint arXiv: 0811.2307).

[8] C. Udriste and N. Bila, *Symmetry Lie group of the Monge-Ampere equation*, Balkan Journal of Geometry and its Applications 3, 2 (1998), 121134.

[9] G.M. Webb, R. Ratkiewicz, M. Brio and G.P. Zank, *Multidimensional simple waves in gas dynamics*, J. Plasma Phys. 59 (1998), 417-460.

Authors' address:

Mehdi Nadjafikhah, Ali Mahdipour–Shirayeh
School of Mathematics,
Iran University of Science and Technology,
Narmak, Tehran 16846 -13114, Iran.
E-mail: m_nadjafikhah@iust.ac.ir, mahdipour@iust.ac.ir

کتاب‌نامه

[۱] احمد رضا فروغ، *روش گاردنر در مسألهٔ هم‌ارزی کارتان و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل*، رسالهٔ دورهٔ دکتری، دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۸۶.

[۲] علی مهدی‌پور شیرایه، *الصاقهای تصویری مرتبط با معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم*، پایان نامهٔ دورهٔ کارشناسی ارشد، دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۸۴.

[۳] مهدی نجفی‌خواه و علی مهدی‌پور شیرایه، *ساختار کارتان برای شبه—گروه لی نامتناهی*، چهارمین سمینار هندسه و توپولوژی کشور، دانشگاه ارومیه، شهریور ۱۳۸۵.

[4] D.V. Alekseevskij, A.M. Vinogradov and V.V. Lychagin, *Geometry I, Basic Ideas and Concepts of Differential Geometry*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 28, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[5] G.W. Bluman and S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[6] R.L Bryant, *Nine Lectures on Exterior Differential Systems*, Graduate Summer Workshop, MSRI, Berekly, 1999.

[7] R.L Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt and P.A. Griffiths, *Exterior differential systems*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] E. Cartan, *leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, Paris, 1922.

[9] E. Cartan, *Sur un problèm d'équivalence et la théorie des spaces métriques génŕalisés*, Mathematica **4**, pp. 114-136, 1930.

[10] E. Cartan, *les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, Paris, 1945.

[11] E. Cartan, *Oeuvres Completes*, Editions du CNRS, Paris, Part II, pp. 719-856, 1984.

[12] R.B. Gardner, *The Method of Equivalence and Its Applications*, SIAM, Philadelphia, 1989.

[13] R.B. Gardner and W.F. Shadwick, *An equivalence problem for a two-form and a vector field on* $\mathbb{R}^3$, Diff. Geom. Global Anal. Top., Canadian Math. Soc. Conference Proceedings, Vol. 12, A.M.S., Providence, R.I., pp. 41-50, 1991.

[14] R.B. Gardner and W. Shadwick, *Overdetermind Equivalence Problems with an Application to Feedback Equivalence*, Contemporary Mathematics, Vol. 68, 1987.

[15] D.H. Hartly, *Cartan's method of equivalence, geometric approach to differential equations*, (Caberra, 1995), Austral Math. Soc. Lect. Ser., No. 15, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[16] *Handbook of Global Analysis*, Edited by D. Krupka and D. Saunders, Elsevier, Netherlands, 2008.

[17] N.H. Ibragimov, *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, England, 1999.

[18] N.H. Ibragimov, *Selected Works*, ALGA Publication, Vol. II, 2006.

[19] N.H. Ibragimov, *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Reidel, Boston, 1985.

[20] T.A. Ivey and J.M. Landsberg, *Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*, A.M.S., Providence, R.I., 2003.

[21] E. Kähler, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*, Teubner, Leipzig, 1934.

[22] F. Klein, Ges. Math. Abhandl., Bd. 1, S. 585, Berlin, 1921.

[23] I. Kolar, P.W. Michor, and J. Slovak, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1993.

[24] J.M. Landsberg, *Exterior Differential Systems: a Geometric Approach to PDE*, Lecture notes from the 1997 Daewoo workshop, 1997.

[25] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, Netherlands, 2002.

[26] H. Lewy, *An example of a smooth linear partial differential equation without solution*, Ann. of Math. **66**, pp. 155-158, 1957.

[27] S. Lie, *Klassifikation und Integration von gewohnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten III*, in Gesammelte Abhadlungen, Vol. 5, Teubner, Leipzig, 1924.

[28] S. Lie, *Begründung einer Invariamtentheorie der Berührungstransformationen*, Math. Ann. **8**, Heft 2, pp. 215-288, 1874.

[29] I.G. Lisle and G.J. Reid, *Cartan Structure of Infinite Lie Pseudogroups, Geometric approach to differential equations*, (Canberra) Austral Math., pp. 116-143, 1995.

[30] B. McKay, *Cartan's method of equivalence*, Preprint of book, 2006.

[31] M. Nadjafikhah, R. Bakhshandeh Ch. and A. Mahdipour-Shirayeh, *A symmetry clasification for a class of (2+1)-nonlinear wave equation*, in press, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009.

[32] M. Nadjafikhah and A.F. Forough, *Time-Fixed geometry of 2nd order ODEs*, IUST International J. of Engineering Sci., Vol. 18, No. 1-2, pp. 13-18, 2007.

[33] M. Nadjafikhah and A. Mahdipour-Shirayeh, *Affine classification of n-curves*, Balkan J. Geom. Appl., Vol. 13, No.2, pp. 66-73, 2008.

[34] M. Nadjafikhah and A. Mahdipour-Shirayeh, *Geometry of Space Curves up to Affine Transformations*, submitted, 2009.

[35] M. Nadjafikhah and A. Mahdipour-Shirayeh, *On Cartan's Method of Moving Frames*, 39-th Annual Iranian Math. Conf., Kerman, pp. 491-494, 2008.

[36] M. Nadjafikhah and A. Mahdipour-Shirayeh, *Symmetry Analysis for a New Form of the Vortex Mode Equation*, accepted in Diff. Geom. Dyn. Sys., 2009.

[37] P.J. Olver, *Differential Invariants of Surfaces*, Diff. Geom. Appl. **27**, 230-239, 2009.

[38] P.J. Olver, *Application of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd Edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1993.

[39] P.J. Olver, *Equivalence, Invariants, and Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[40] P.J. Olver and M. Fels, *Moving Coframes I, A Practical Algorithm*, Preprint, University of Minnesota, 1998.

[41] P.J. Olver and M. Fels, *Moving Coframes II, Regularization and Theoretical fundations*, Preprint, University of Minnesota, 1998.

[42] L.V. Ovsiannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, New York, 1982.

[43] B. Riemann, *On the hypotheses which lie at the foundations of geometry*, translated from German by Henry S. White. In: A Source Book in Mathematics, by D. E. Smith, Dover edition, Vol. 2, Dover, New York, pp. 411-425, 1959.

[44] R.W. Sharpe, *Differential Geometry, Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[45] I. Singer and S. Stenberg, *The infinite groups of Lie and Cartan*, J. Analyse Math. **15**, pp. 1-114, 1965.

[46] H. Weyl, *Cartan on groups and differential geometry*, Bull. Amer. Math. Soc., pp. 598-601, 1938.

[47] V. Yamaguzhin, *Introduction to Differential Invariants*, Lecture notes, Opava, 2005.

فهرست الفبایی

Abstract

This thesis is an attempt to introduce and state the last results and principal achieved subjects on *equivalence problem* that naturally divides into five interconnected chapters.

Equivalence problem deals with finding differential invariants and classifying manifolds to stratify geometric objects with respect to a special group action. As particular cases of the theory, basic and important subjects of *exterior differential systems* and *symmetry* are illustrated, each having a wealth of substantial applications in mathematics, specially in geometry, and also in other sciences like physics, mechanics, control theory, computer vision and so on.

The first chapter, is a try to state required preliminary subjects for next chapters including a section on Lie pseudo-groups. We start the equivalence problem by introducing symmetry groups of geometric objects and its significant achievments for differential equations in recent years. The second chapter comprise these statements. Chapter three is devoted to the study of equivalence problem for differential systems, that is, exterior differential systems (EDS).

In chapter four, we concern with equivalence problem which is the main goal of the thesis and includs the above theories. In this chapter, I tried to state the algorithm of equivalence problem in a completely optimal form based on previously stated algorithms from significant references in this area to be compendious and profitable for next studies. Finally, in the last chapter, the resume results of author's research on equivalence problem, symmetry and EDS are given.

Keywords: equivalence problem, exterior differential systems, symmetry, Lie pseudo-groups.

Iran University of Science and Technology
School of mathematics

Cartan's Method of Equivalence, Symmetry and Exterior Differential Systems

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the Doctor of Philosophy in Pure Mathematics - Differential Geometry

By:

Ali Mahdipour-Shirayeh

Superviser:

Dr. Mehdi Nadjafikhah

Spring, 2009