دانشگاه علم و صنعت ایران
دانشکده ریاضی

هم ارزی لاگرانژین های مرتبه دوم

Equivalence of Second Order Lagrangians

تهیه کننده :

فاطمه آهنگری

زمستان ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مندرجات

مقدمه ۳

هم ارزی لاگرانژین های مرتبه دوم ۵

مسایل تغییراتی مرتبه دوم ۵

فرمولبندی مساله هم‌ارزی لاگرانژین های مرتبه دوم ۶

محاسبه فرم های مورر — کارتان ۷

معادلات ساختاری هم کنج ترفیع یافته ۸

معادلات جذب و یافتن ضرایب تاب اساسی ۱۲

نرمالسازی و کاهش گروه ساختاری ۱۴

بررسی هم‌ارزی لاگرانژین های مرتبه دو تحت تبدیلات نقطه‌ای ۱۸

بررسی هم‌ارزی لاگرانژین های مرتبه دو تحت تبدیلات برخوردی ۲۱

آزمون کارتان و بررسی پیچشی بودن ۲۲

مراجع ۲۷

مقدمه

ایده‌های اصلی مسأله هم‌ارزی، به حدود صد سال پیش و کارهای صورت گرفته توسط ریاضیدانان بزرگی چون گاستون، داربو، گورسا، لی و از همه مهمتر، الی کارتان برمی گردد. مسأله هم‌ارزی بنیادی، به تشخیص این حقیقت اختصاص دارد که چه وقت دو شئ هندسی تحت تغییر مناسبی قابل تبدیل به یکدیگرند. به عنوان حالت خاصی از بحث، مسأله خطی سازی را می‌توان برشمرد که به تشخیص این نکته می‌پردازد که آیا یک معادله دیفرانسیل معین را تحت تغییر مختصات به معادله دیفرانسیل معین دیگری نگاشت ؟ مثال دیگری از مسأله هم‌ارزی به حساب تغییرات مربوط می‌شود و تعیین اینکه چه وقت دو مسأله تغییرات نسبت به تغییر مختصات یکی هستند.

مفهوم ناوردا که از اهمیت ویژه‌ای در نظریه هم‌ارزی برخوردار است، در حقیقت کمیتی است که تحت تغییر مختصات بدون تغییر باقی می ماند. در نتیجه دو شئ هم‌ارز لزوماً دارای ناورداهای یکسان هستند. برعکس، در حالت های خاصی از بحث اگر از توابع ناوردا به تعداد کافی داشته باشیم، از آنها برای تشخیص هم‌ارزی کامل اشیای هندسی می‌توان استفاده کرد و بنابراین، مسأله هم‌ارزی را به طور کامل حل نمود. لذا، یافتن ناورداها و مشخصه‌های آنها به عنوان دستاوردی مهم، در مرکز توجه این نظریه قرار دارد. یک مشخصه از ناورداها، رابطه‌ای تابعی از توابع ناوردا است که به تشخیص آنها کمک می‌کند. از حالت های خاص مسأله هم‌ارزی، تعیین گروه تقارنی اشیای هندسی است. در واقع، تقارن به بررسی اشیای خود متقارن می‌پردازد. گروه تقارن متناظر با یک شئ هندسی از اهمیت بسیاری برخوردار است که از جمله می توان به کاربردهای گروههای تقارن در مسایل برآمده از حساب تغییرات اشاره کرد. گروه تقارن یک مسأله تغییرات به سهولت قابل محاسبه توسط مولدهای بینهایت کوچک در گروه های تقارن معادلات دیفرانسیل می باشد. برای یک گروه تقارن، مسایل تغییراتی ناوردا قابل مشخصه سازی توسط ناورداهای دیفرانسیلی بنیادی و یک کنج دوگان ناوردای برخوردی می باشند. گروه تقارن یک مسأله تغییرات دارای کاربردهای بسیار در فیزیک نظری نوین چون نظریه ریسمانها و نظریه میدانهای همدیس که بر مبنای تغییرات و وجود تقارنهای فیزیکی بنا شده‌اند، دارد.

کاربردهای گروههای لی در حساب تغییرات، پس از کشف ارتباط گروههای تقارن مسایل تغییراتی با قوانین پایستگی مربوط به معادلات اویلر — لاگرانژ اهمیت مضاعفی یافت. یکی دیگر از مهمترین کاربردهای گروههای تقارن و مسایل تغییرات در مکانیک همیلتونی می باشد.

مسایل تغییراتی از مراتب بالا در چند دهه اخیر، نقش مهمی در علوم غیرخطی پیدا کرده است. از نمونه‌های بارز این واقعیت، می توان به مطالعه معادلات پیچشی غیرخطی انتگرال پذیر از جمله معادلات Korteweg-deVries و معادلات Kadomtsev - Petviashvili (KP) اشاره کرد. این معادلات، در مدلسازی سیستم های غیرخطی با پراکندگی مغناطیسی کاربرد قابل ملاحظه‌ای دارند. در واقع، این معادلات با مشتقات جزیی غیرخطی، همان معادلات اویلر — لاگرانژ برای یک سری لاگرانژین های از مرتبه بالای به خصوص می‌باشند. نتایج مهم فیزیکی، نشان می دهند که درک و شناخت عمیق تر ساختارهای ناوردا و خواص ناوردای لاگرانژین های از مرتبه بالاتر، از جمله ناورداهای دیفرانسیلی اسکالر آنها، فرم های دیفرانسیلی ناوردا، تقارن ها و قوانین بقا، نه تنها از نقطه نظر آنالیز ریاضی، بلکه در حوزه‌های کاربردی در علوم فیزیکی دارای اهمیت ویژه‌ای می باشند.

در اینجا، مسأله هم‌ارزی لاگرانژین‌های مرتبه دوم را مورد بررسی قرار داده‌ایم. به علاوه، توابع دیفرانسیلی ناوردای متناظر با مسأله هم‌ارزی لاگرانژین‌های مرتبه دوم را تحت تبدیلات حافظ تار، نقطه‌ای و برخوردی به دست آورده‌ایم.

هم ارزی لاگرانژین های مرتبه دوم

مسایل تغییراتی مرتبه دوم :[1]

◄ **تعریف:** همانند معادلات دیفرانسیل، کار را روی یک زیرمجموعه باز فضای کلی $E = X \times U \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ با متغیر مستقل x و متغیر وابسته u آغاز می کنیم. فرض کنیم $\Omega \subseteq X$ یک زیرمجموعه باز همبند X با مرز هموار $\partial\Omega$ باشد. یک مسٔله تغییراتی از مرتبه دوم، مسٔله یافتن اکسترمالهای تابعک زیر (نقاط ماکسیمم و مینیمم)، روی فضای توابع $u = f(x)$ است.

$$\mathcal{L}[u] = \int L(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^{2}u}{dx^{2}})dx \quad , \quad x \in \Omega \qquad (1)$$

انتگرالده $L(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^{2}u}{dx^{2}})$، یک تابع دیفرانسیلی هموار روی فضای جت مرتبه دوم J^{2} است و به آن **لاگرانژین** مسٔله تغییراتی مذکور گویند.

فرض می کنیم که لاگرانژین $L(x, u, p, q)$ روی زیر دامنه $M \subset J^{2}$، در شرایط زیر موسوم به شرایط ناتبهگون بودن صدق می کند:

$$L(x, u, p, q) \neq 0 \quad , \quad L_q(x, u, p, q) \neq 0 \quad , \quad L_{qq}(x, u, p, q) \neq 0$$

در این صورت، معادله اویلر — لاگرانژ،

$$E(L) = L_u - D_x(L_p) + D_x^{2}(L_q) = 0$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه چهار خواهد بود که به طور ناوردا متناظر با مسٔله تغییراتی (۱) می باشد.

◄ **تعریف:** دو لاگرانژین مرتبه دوم را تحت تبدیل برخوردی $\psi : J^{2} \longrightarrow J^{2}$ هم‌ارز گوییم، هرگاه:

$$\psi^{*}(\bar{L}d\bar{x}) = Ldx + \mu(dp - qdx) + \nu(du - pdx)$$

---

[1] Secon order variational problems

در رابطه فوق، μ و ν توابعی روی J^2 می باشند. برای **تبدیلات نقطه‌ای**، $\mu = 0$ در حالیکه برای **تبدیلات حافظ تار**، $\mu = \nu = 0$ و فرم لاگرانژین Ldx ناوردا می باشد.

◄ **فرمولبندی مسٔله هم‌ارزی لاگرانژین های مرتبه دوم:**

به منظور فرمولبندی مسٔله هم‌ارزی لاگرانژین های از مرتبه دوم، هم کنج زیر را در نظر می گیریم:

$$\omega^1 = du - pdx \;\; , \;\; \omega^2 = \frac{dp - qdx}{L} \;\; , \;\; \omega^3 = Ldx \;\; , \;\; \omega^4 = \frac{dq}{L^2} \tag{2}$$

گروههای ساختاری متناظر با مسٔله هم‌ارزی لاگرانژین های از مرتبه دوم، به صورت زیرگروههای زیر از $GL(4,\mathbb{R})$ می باشند:

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_1 \end{pmatrix} : \; a_i \in R \; , \; a_1 \neq 0 \right\}$$

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & 0 \\ b_5 & b_6 & b_7 & a_1 \end{pmatrix} : \; b_i \in R \; , \; b_1 \neq 0 \right\}$$

$$G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 & 0 \\ c_3 & c_4 & 1 & 0 \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_1 \end{pmatrix} : \; c_i \in R \; , \; c_1 \neq 0 \right\}$$

◄ **قضیه:** فرض کنید $L(x,u,p,q)$ و $\bar{L}(\bar{x},\bar{u},\bar{p},\bar{q})$ دو لاگرانژین ناتبهگن از مرتبه دوم باشند. فرض کنید $\omega = [\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4]^T$ و $\bar{\omega} = [\bar{\omega}^1,\bar{\omega}^2,\bar{\omega}^3,\bar{\omega}^4]^T$ بردارهای ستونی باشند که درایه های آنها یک فرمی هایی هستند که نمایشگر هم کنج های پایه که با معادله (۲) بیان شده‌اند، می باشند. در این صورت، L و $\bar{L}$ را تحت یک تبدیل حافظ تار ($k = 1$)، یک تبدیل نقطه‌ای ($k = 2$) یا یک تبدیل برخوردی ($k = 3$) هم‌ارز گوییم، اگر و تنها اگر یک دیفئومورفیسم (موضعی) $\psi : J^2 \longrightarrow J^2$ موجود باشد، بطوریکه:

$$\psi^*(\bar{\omega}) = g.\omega$$

در رابطه فوق، g یک تابع G_k − مقدار ($k = 1,2,3$) روی J^2 می‌باشد. ■

جهت سهولت، ابتدا بررسی مشله هم‌ارزی لاگرانژین های مرتبه دوم را تحت تبدیلات حافظ تار آغاز می‌کنیم. با بکارگیری گروه ساختاری G_1 و هم کنج پایه (۲)، هم کنج ترفیع یافته $\theta = \{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\theta^1 = a_1\omega^1 \quad , \quad \theta^2 = a_2\omega^1 + a_1\omega^2 \ ,$$

$$\theta^2 = \omega^3 \quad , \quad \theta^4 = a_5\omega^1 + a_6\omega^2 + a_7\omega^3 + a_1\omega^4.$$

◄ **محاسبه فرم های مورر – کارتان:**

$$dG = \begin{pmatrix} da_1 & 0 & 0 & 0 \\ da_2 & da_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ da_5 & da_6 & da_7 & da_1 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-a_2}{a_1^2} & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{-a_2a_6+a_5a_1}{a_1^3} & \frac{-a_6}{a_1^2} & \frac{-a_7}{a_1} & \frac{1}{a_1} \end{pmatrix}$$

$$MucCartan = dG.G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{da_1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-a_2da_1}{a_1^2} + \frac{da_2}{a_1} & \frac{da_1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(-a_2a_6+a_5a_1)da_1}{a_1^3} + \frac{da_5}{a_1} - \frac{a_2da_6}{a_1^2} & -\frac{a_6da_1}{a_1^2} + \frac{da_6}{a_1} & -\frac{a_7da_1}{a_1} + da_7 & \frac{da_1}{a_1} \end{pmatrix}$$

Murer Cartan Forms:

$$\alpha^1 = \frac{da_1}{a_1}$$

$$\alpha^2 = \frac{-a_2da_1}{a_1^2} + \frac{da_2}{a_1}$$

$$\alpha^3 = -\frac{(-a_2a_6 + a_5a_1)da_1}{a_1^3} + \frac{da_5}{a_1} - \frac{a_2da_6}{a_1^2}$$

$$\alpha^4 = -\frac{a_6da_1}{a_1^2} + \frac{da_6}{a_1}$$

$$\alpha^5 = -\frac{a_7da_1}{a_1} + da_7.$$

◄ **معادلات ساختاری هم کنج ترفیع یافته** θ :

$$d\theta^i = \sum_{\kappa=1}^{5}\sum_{j=1}^{4} A^i_{j\,\kappa}\alpha^\kappa \wedge \theta^j + \sum_{j,k=1}^{4} T^i_{j\,k}(x,g)\,\theta^j \wedge \theta^k \quad , \quad j<k \quad , \quad i=1,\ldots,4.$$

....

Murer Cartan Forms Coefficients:

$$A^1_{1\,1}=1 \;,\; A^1_{1\,2}=0 \;,\; A^1_{1\,3}=0 \;,\; A^1_{1\,4}=0 \;,\; A^1_{1\,5}=0$$

$$A^1_{2\,1}=0 \;,\; A^1_{2\,2}=0 \;,\; A^1_{2\,3}=0 \;,\; A^1_{2\,4}=0 \;,\; A^1_{2\,5}=0$$

$$A^1_{3\,1}=0 \;,\; A^1_{3\,2}=0 \;,\; A^1_{3\,3}=0 \;,\; A^1_{3\,4}=0 \;,\; A^1_{3\,5}=0$$

$$A^1_{4\,1}=0 \;,\; A^1_{4\,2}=0 \;,\; A^1_{4\,3}=0 \;,\; A^1_{4\,4}=0 \;,\; A^1_{4\,5}=0$$

....

Torsion Coefficients:

$$T^1_{1\,2}=0 \quad , \quad T^1_{1\,3}=\frac{a_2}{a_1} \quad , \quad T^1_{1\,4}=0$$

$$T^1_{2\,3}=-1 \quad , \quad T^1_{2\,4}=0 \quad , \quad T^1_{3\,4}=0$$

....

Structure Equations:

$$\star \qquad d\theta^1=\alpha^1\wedge\theta^1+\frac{a_2}{a_1}\theta^1\wedge\theta^3-\theta^2\wedge\theta^3$$

....

Murer Cartan Forms Coefficients:

$$A^2_{1\,1}=0 \;,\; A^2_{1\,2}=1 \;,\; A^2_{1\,3}=0 \;,\; A^2_{1\,4}=0 \;,\; A^2_{1\,5}=0$$

$$A^2_{2\,1}=1 \;,\; A^2_{2\,2}=0 \;,\; A^2_{2\,3}=0 \;,\; A^2_{2\,4}=0 \;,\; A^2_{2\,5}=0$$

$$A^2_{3\,1}=0 \;,\; A^2_{3\,2}=0 \;,\; A^2_{3\,3}=0 \;,\; A^2_{3\,4}=0 \;,\; A^2_{3\,5}=0$$

$$A^2_{4\,1}=0 \;,\; A^2_{4\,2}=0 \;,\; A^2_{4\,3}=0 \;,\; A^2_{4\,4}=0 \;,\; A^2_{4\,5}=0$$

....

Torsion Coefficients:

$$T^{2}_{\ 12} = -\frac{a_1 L_u - L_q L^2 a_5}{L a_1^2}$$

$$T^{2}_{\ 13} = -\frac{1}{L^2 a_1^2}(-L^3 L_q a_2 a_7 + a_2 a_1 L_x - a_2^2 L^2 + a_2 a_1 L_p q + a_2 a_1 p L_u + L^2 a_2 a_6 - L^2 a_5 a_1)$$

$$T^{2}_{\ 14} = -\frac{a_2 L L_q}{a_1^2}$$

$$T^{2}_{\ 23} = \frac{a_1 L_x - a_2 L^2 + a_1 q L_p + p a_1 L_u - a_7 L_q L^3 + a_6 L^2}{a_1 L^2}$$

$$T^{2}_{\ 24} = \frac{L L_q}{a_1}$$

$$T^{2}_{\ 34} = 1$$

....

Structure Equations:

$$\star \qquad d\theta^2 = \alpha^1 \wedge \theta^2 + \alpha^2 \wedge \theta^1 - \frac{a_1 L_u - L_q L^2 a_5}{L a_1^2}\, \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$-\frac{1}{L^2 a_1^2}(-L^3 L_q a_2 a_7 + a_2 a_1 L_x - a_2^2 L^2 + a_2 a_1 L_p q + a_2 a_1 p L_u + L^2 a_2 a_6 - L^2 a_5 a_1)\, \theta^1 \wedge \theta^3$$

$$-(\frac{a_2 L L_q}{a_1^2})\, \theta^1 \wedge \theta^4 + \frac{a_1 L_x - a_2 L^2 + a_1 q L_p + p a_1 L_u - a_7 L_q L^3 + a_6 L^2}{a_1 L^2})\, \theta^2 \wedge \theta^3$$

$$+\frac{L L_q}{a_1}\, \theta^2 \wedge \theta^4 + \theta^3 \wedge \theta^4$$

....

Murer Cartan Forms Coefficients:

$$A^{3}_{11} = 0 \ , \ A^{3}_{12} = 0 \ , \ A^{3}_{13} = 0 \ , \ A^{3}_{14} = 0 \ , \ A^{3}_{15} = 0$$

$$A^{3}_{21} = 0 \ , \ A^{3}_{22} = 0 \ , \ A^{3}_{23} = 0 \ , \ A^{3}_{24} = 0 \ , \ A^{3}_{25} = 0$$

$$A^{3}_{31} = 0 \ , \ A^{3}_{32} = 0 \ , \ A^{3}_{33} = 0 \ , \ A^{3}_{34} = 0 \ , \ A^{3}_{35} = 0$$

$$A^{3}_{41} = 0 \ , \ A^{3}_{42} = 0 \ , \ A^{3}_{43} = 0 \ , \ A^{3}_{44} = 0 \ , \ A^{3}_{45} = 0$$

....

Torsion Coefficients:

$$T^{3}_{1\,2} = 0$$

$$T^{3}_{1\,3} = \frac{a_1^2 L_u - a_2 a_1 L L_p + a_2 a_6 L^2 L_q - a_1 a_5 L^2 L_q}{a_1^3 L}$$

$$T^{3}_{1\,4} = 0$$

$$T^{3}_{2\,3} = \frac{a_1 L_p - a_6 L L_q}{a_1^2}$$

$$T^{3}_{2\,4} = 0$$

$$T^{3}_{3\,4} = -\frac{L L_q}{a_1}$$

....

Structure Equations:

$$\star \quad d\theta^3 = \left(\frac{a_1^2 L_u - a_2 a_1 L L_p + a_2 a_6 L^2 L_q - a_1 a_5 L^2 L_q}{a_1^3 L}\right)\, \theta^1 \wedge \theta^3$$

$$+\frac{a_1 L_p - a_6 L L_q}{a_1^2}\, \theta^2 \wedge \theta^3 - \frac{L L_q}{a_1}\, \theta^3 \wedge \theta^4$$

....

Murer Cartan Forms Coefficients:

$$A^{4}_{1\,1} = 0 \;,\; A^{4}_{1\,2} = 0 \;,\; A^{4}_{1\,3} = 1 \;,\; A^{4}_{1\,4} = 0 \;,\; A^{4}_{1\,5} = 0$$

$$A^{4}_{2\,1} = 0 \;,\; A^{4}_{2\,2} = 0 \;,\; A^{4}_{2\,3} = 0 \;,\; A^{4}_{2\,4} = 1 \;,\; A^{4}_{2\,5} = 0$$

$$A^{4}_{3\,1} = 0 \;,\; A^{4}_{3\,2} = 0 \;,\; A^{4}_{3\,3} = 0 \;,\; A^{4}_{3\,4} = 0 \;,\; A^{4}_{3\,5} = 1$$

$$A^{4}_{4\,1} = 1 \;,\; A^{4}_{4\,2} = 0 \;,\; A^{4}_{4\,3} = 0 \;,\; A^{4}_{4\,4} = 0 \;,\; A^{4}_{4\,5} = 0$$

....

Torsion Coefficients:

$$T^{4}_{1\,2} = -\frac{-a_1 a_6 L_u - a_5 a_6 L^2 L_q + 2 a_1 a_5 L L_p}{a_1^3 L}$$

$$T^4_{1\,3} = -\frac{1}{a_1^3 L^2}\Big[-3a_1^2 a_7 L L_u + 3a_7 a_2 a_1 L^2 L_p - 2a_7 a_2 a_6 L^3 L_q + a_2 a_6^2 L^2 - a_2 a_1 a_6 p L_u - a_2 a_1 a_6 L_x$$

$$-a_2 a_5 a_1 L^2 - a_2 a_1 a_6 q L_p + 2a_5 a_1^2 q L_p + 2a_5 a_1^2 p L_u + 2a_5 a_1^2 L_x + a_1 a_5 a_7 L^3 L_q - a_1 a_5 a_6 L^2\Big]$$

$$T^4_{1\,4} = -\frac{-2a_2 a_1 L L_p + a_2 a_6 L^2 L_q + 2a_1^2 L_u}{a_1^3 L}$$

$$T^4_{2\,3} = -\frac{1}{L^2 a_1^2}\Big[a_1 a_6 p L_u + a_1 a_6 L_x - 3a_1 a_7 L^2 L_p + a_5 a_1 L^2$$

$$+a_1 a_6 L_p q + 2a_7 a_6 L^3 L_q - a_6^2 L^2\Big]$$

$$T^4_{2\,4} = -\frac{2a_1 L_p - a_6 L L_q}{a_1^2}$$

$$T^4_{3\,4} = -\frac{2a_1 q L_p + 2p a_1 L_u + 2a_1 L_x + a_7 L_q L^3 - a_6 L^2}{a_1 L^2}$$

....

Structure Equations:

$$\bigstar\quad d\theta^4 = \alpha^1\wedge\theta^4 + \alpha^3\wedge\theta^1 + \alpha^4\wedge\theta^2 + \alpha^5\wedge\theta^3 - \frac{-a_1 a_6 L_u - a_5 a_6 L^2 L_q + 2a_1 a_5 L L_p}{a_1^3 L}\,\theta^1\wedge\theta^2$$

$$-\frac{1}{a_1^3 L^2}\Big[-3a_1^2 a_7 L L_u + 3a_7 a_2 a_1 L^2 L_p - 2a_7 a_2 a_6 L^3 L_q + a_2 a_6^2 L^2 - a_2 a_1 a_6 p L_u - a_2 a_1 a_6 L_x$$

$$-a_2 a_5 a_1 L^2 - a_2 a_1 a_6 q L_p + 2a_5 a_1^2 q L_p + 2a_5 a_1^2 p L_u + 2a_5 a_1^2 L_x + a_1 a_5 a_7 L^3 L_q - a_1 a_5 a_6 L^2\Big]\,\theta^1\wedge\theta^3$$

$$-\frac{-2a_2 a_1 L L_p + a_2 a_6 L^2 L_q + 2a_1^2 L_u}{a_1^3 L}\,\theta^1\wedge\theta^4 - \frac{1}{L^2 a_1^2}\Big[a_1 a_6 p L_u + a_1 a_6 L_x - 3a_1 a_7 L^2 L_p + a_5 a_1 L^2$$

$$+a_1 a_6 q L_p + 2a_7 a_6 L^3 L_q - a_6^2 L^2\Big]\,\theta^2\wedge\theta^3 - \frac{2a_1 L_p - a_6 L L_q}{a_1^2}\,\theta^2\wedge\theta^4$$

$$-\frac{2a_1 q L_p + 2p a_1 L_u + 2a_1 L_x + a_7 L_q L^3 - a_6 L^2}{a_1 L^2}\,\theta^3\wedge\theta^4\,. \qquad \blacksquare$$

◄ معادلات جذب و یافتن ضرایب تاب اساسی :

جذب فرم های مورر – کارتان:

معادلات ساختاری هم کنج ترفیع یافته $\theta = \{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$ را به فرم زیر در نظر می گیریم :

$$d\theta^i = \sum_{\kappa=1}^{5} \sum_{j=1}^{4} A^i_{j\kappa} \alpha^\kappa \wedge \theta^j + \sum_{j,k=1}^{4} T^i_{j\,k}(x,g)\, \theta^j \wedge \theta^k \;\; , \;\; j < k \;\; , \;\; i = 1, ..., 4.$$

با جایگزینی فرم مورر – کارتان α^κ با یک ترکیب خطی دلخواه از عناصر هم کنج به صورت $\sum_{k=1}^{5} z^\kappa_j\, \theta^j$ داریم ($\alpha^\kappa \longmapsto \sum_{\kappa=1}^{5} z^\kappa_j\, \theta^j$) :

$$\alpha^1 \longmapsto z^1_1\, \theta^1 + z^1_2\, \theta^2 + z^1_3\, \theta^3 + z^1_4\, \theta^4$$

$$\alpha^2 \longmapsto z^2_1\, \theta^1 + z^2_2\, \theta^2 + z^2_3\, \theta^3 + z^2_4\, \theta^4$$

$$\alpha^3 \longmapsto z^3_1\, \theta^1 + z^3_2\, \theta^2 + z^3_3\, \theta^3 + z^3_4\, \theta^4$$

$$\alpha^4 \longmapsto z^4_1\, \theta^1 + z^4_2\, \theta^2 + z^4_3\, \theta^3 + z^4_4\, \theta^4$$

$$\alpha^5 \longmapsto z^5_1\, \theta^1 + z^5_2\, \theta^2 + z^5_3\, \theta^3 + z^5_4\, \theta^4$$

با توجه به روابط فوق، معادله خطی جذب به ترتیب زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{\kappa=1}^{5} (A^i_{j\kappa}\, z^\kappa_k - A^i_{k\kappa}\, z^\kappa_j) = -T^i_{j\,k} \quad , \;\; i,j,k = 1, ..., 4.$$

معادلات خطی جذب:

Absorbtion Linear Equations:

$$z^1_2 = -T^1_{1\,2} \quad , \quad z^1_3 = -T^1_{1\,3} \quad , \quad z^1_4 = -T^1_{1\,4} \quad , \quad 0 = -T^1_{2\,3} \quad , \quad 0 = -T^1_{2\,4}$$

$$0 = -T^1_{3\,4} \quad , \quad -z^1_1 + z^2_2 = -T^2_{1\,2} \quad , \quad z^2_3 = -T^2_{1\,3} \quad , \quad z^2_4 = -T^2_{1\,4} \quad , \quad z^1_3 = -T^2_{2\,3}$$

$$z^1_4 = -T^2_{2\,4} \quad , \quad 0 = -T^2_{3\,4} \quad , \quad 0 = -T^3_{1\,2} \quad , \quad 0 = -T^3_{1\,3} \quad , \quad 0 = -T^3_{1\,4} \quad , \quad 0 = -T^3_{2\,3}$$

$$0 = -T^3_{2\,4} \quad , \quad 0 = -T^3_{3\,4} \quad , \quad z^3_2 - z^4_1 = -T^4_{1\,2} \quad , \quad z^3_3 - z^5_1 = -T^4_{1\,3} \quad , \quad -z^1_1 + z^3_4 = -T^4_{1\,4}$$

$$z^4_3 - z^5_2 = -T^4_{2\,3} \quad , \quad -z^1_2 + z^4_4 = -T^4_{2\,4} \quad , \quad -z^1_3 + z^5_4 = -T^4_{3\,4} \;.$$

ضرایب تاب قابل جذب:

Absorbable Torsions:

$$\Big\{T^{۱}_{۱۲}\ ,\ T^{۱}_{۱۳}\ ,\ T^{۱}_{۲۴}\ ,\ T^{۱}_{۲۳}\ ,\ T^{۱}_{۱۴}\ ,\ T^{۱}_{۳۴}\ ,\ T^{۲}_{۱۲}\ ,\ T^{۲}_{۱۳}\ ,\ T^{۲}_{۱۴}\ ,\ T^{۲}_{۲۳}\ ,\ T^{۲}_{۲۴}\ ,\ T^{۲}_{۳۴}\ ,$$
$$T^{۳}_{۱۲}\ ,\ T^{۳}_{۱۳}\ ,\ T^{۳}_{۱۴}\ ,\ T^{۳}_{۲۳}\ ,\ T^{۳}_{۲۴}\ ,\ T^{۳}_{۳۴}\ ,\ T^{۴}_{۱۲}\ ,\ T^{۴}_{۱۳}\ ,\ T^{۴}_{۱۴}\ ,\ T^{۴}_{۲۳}\ ,\ T^{۴}_{۲۴}\ ,\ T^{۴}_{۳۴}\Big\}$$

ضرایب اساسی:

Essential Torsions:

$$\Big\{T^{۱}_{۲۳}\ ,\ T^{۱}_{۲۴}\ ,\ T^{۱}_{۳۴}\ ,\ T^{۲}_{۳۴}\ ,\ T^{۳}_{۱۲}\ ,\ T^{۳}_{۱۳}\ ,\ T^{۳}_{۱۴}\ ,\ T^{۳}_{۲۳}\ ,\ T^{۳}_{۲۴}\ ,\ T^{۳}_{۳۴}\Big\}$$

◄ ماتریس متناظر با معادلات خطی جذب:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{1,1,2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{1,1,3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{1,1,4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{1,2,3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{1,2,4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{1,3,4} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{2,1,2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{2,1,3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -T_{2,1,4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{2,2,3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{2,2,4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{2,3,4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{3,1,2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{3,1,3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{3,1,4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{3,2,3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{3,2,4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{3,3,4} \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{4,1,2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{4,1,3} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -T_{4,1,4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{4,2,3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -T_{4,2,4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -T_{4,3,4}
\end{bmatrix}
$$

◄ **نرمال سازی و کاهش گروه ساختاری:**

در این مرحله با توجه به فرض ناتبهگن بودن، به منظور کاهش پارامترهای گروه ساختاری G_1 قرار می‌دهیم:

$$a_1 = LL_q \quad , \quad a_5 = \frac{L_u}{L} \quad , \quad a_6 = L_p \quad , \quad a_7 = \frac{L_p - 2a_2}{LL_q} + \frac{\widetilde{D}_x L}{L^2}.$$

با توجه به روابط فوق، هم کنج ترفیع یافته $\theta = \{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$ به صورت زیر نوشته می شود:

New Lifted Coframe:

$$\theta^1 = LL_q(du - pdx)$$

$$\theta^2 = a_2(du - pdx) + L_q(dp - qdx)$$

$$\theta^3 = Ldx$$

$$\theta^4 = \frac{L_u(du - pdx)}{L} + L_p(\frac{dp - qdx}{L}) + \left[\frac{LL_p - 2a_2 L + L_x L_q + pL_u L_q + qL_p L_q}{LL_q}\right] dx + \frac{L_q}{L} dq$$

اکنون به محاسبه معادلات ساختاری هم کنج ترفیع یافته جدید، می‌پردازیم:

Torsion Coefficients:

$$T^1_{12} = -\frac{L_q L_{pq} - L_p L_{qq}}{{L_q}^3}$$

$$T^1_{13} = -\frac{1}{LL_q^3}\Big[qL_q{}^2 L_{pq} + L_q{}^2 L_{xq} + pL_q{}^2 L_{uq} - qL_p L_q L_{qq} - L_p L_q{}^2 - LL_p L_{qq}$$
$$+ a_2 L_q{}^2 + 2a_2 LL_{qq} - L_x L_q L_{qq} - pL_u L_q L_{qq}\Big]$$

$$T^1_{14} = -\frac{{L_q}^2 + LL_{qq}}{{L_q}^2}$$

$$T^1_{23} = -1$$

$$T^1_{24} = 0$$

$$T^1_{34} = 0$$

. . . .

Structure Equation:

$$\star\quad d\theta^1 = -\frac{L_q L_{pq} - L_p L_{qq}}{{L_q}^3}\,\theta^1\wedge\theta^2 - \frac{1}{L L_q^3}\Big[q{L_q}^2 L_{pq} + {L_q}^2 L_{xq} + p{L_q}^2 L_{uq} - qL_pL_qL_{qq} - L_p{L_q}^2 - LL_pL_{qq}$$

$$+a_2{L_q}^2 + 2a_2LL_{qq} - L_xL_qL_{qq} - pL_uL_qL_{qq}\Big]\,\theta^1\wedge\theta^3 - \frac{{L_q}^2 + LL_{qq}}{{L_q}^2}\,\theta^1\wedge\theta^4 - \theta^2\wedge\theta^3.$$

. . . .

Torsion Coefficients:

$$T^2_{1\,2} = \frac{L_{uq}L_q - L_{qq}L_u}{L{L_q}^3}$$

$$T^2_{1\,3} = -\frac{1}{L^2{L_q}^4}\Big[-2{a_2}^2LL_{qq} - a_2{L_q}^2L_{xq} - a_2p{L_q}^2L_{uq} + a_2L_p{L_q}^2 - {a_2}^2{L_q}^2$$

$$-{L_q}^3L_u + a_2LL_pL_{qq} + a_2L_xL_qL_{qq} + a_2pL_uL_qL_{qq} + a_2qL_qL_pL_{qq} - a_2qL_{pq}{L_q}^2\Big]$$

$$T^2_{1\,4} = \frac{a_2L_{qq}}{{L_q}^3}$$

$$T^2_{2\,3} = -\frac{1}{L{L_q}^3}\Big[qL_{pq}{L_q}^2 + {L_q}^2L_{xq} + p{L_q}^2L_{uq} - qL_pL_qL_{qq} - L_p{L_q}^2$$

$$-LL_pL_{qq} + a_2{L_q}^2 + 2a_2LL_{qq} - L_xL_qL_{qq} - pL_uL_qL_{qq}\Big]$$

$$T^2_{2\,4} = -\frac{LL_{qq}}{{L_q}^2}$$

$$T^2_{3\,4} = 1$$

. . . .

Structure Equation:

$$\star\quad d\theta^2 = \frac{L_{uq}L_q - L_{qq}L_u}{L{L_q}^3}\,\theta^1\wedge\theta^2 + -\frac{1}{L^2{L_q}^4}\Big[-2{a_2}^2LL_{qq} - a_2{L_q}^2L_{xq} - a_2p{L_q}^2L_{uq} + a_2L_p{L_q}^2 - {a_2}^2{L_q}^2$$

$$-{L_q}^3L_u + a_2LL_pL_{qq} + a_2L_xL_qL_{qq} + a_2pL_uL_qL_{qq} + a_2qL_qL_pL_{qq} - a_2qL_{pq}{L_q}^2\Big]\,\theta^1\wedge\theta^3$$

$$+\frac{a_2L_{qq}}{{L_q}^3}\,\theta^1\wedge\theta^4 - \frac{1}{L{L_q}^3}\Big[qL_{pq}{L_q}^2 + {L_q}^2L_{xq} + p{L_q}^2L_{uq} - qL_pL_qL_{qq} - L_p{L_q}^2$$

$$-LL_pL_{qq} + a_2{L_q}^2 + 2a_2LL_{qq} - L_xL_qL_{qq} - pL_uL_qL_{qq}\Big]\,\theta^2\wedge\theta^3 - \frac{LL_{qq}}{{L_q}^2}\,\theta^2\wedge\theta^4 + \theta^3\wedge\theta^4\,.$$

Torsion Coefficients:

$$T^{3}_{12}=0 \quad , \quad T^{3}_{13}=0 \quad , \quad T^{3}_{14}=0$$

$$T^{3}_{23}=0 \quad , \quad T^{3}_{24}=0 \quad , \quad T^{3}_{34}=-1$$

. . . .

Structure Equation:

$$\bigstar \quad d\theta^{3} = -\,\theta^{3}\wedge\theta^{4}\ .$$

. . . .

Torsion Coefficients:

$$T^{4}_{12}=0$$

$$T^{4}_{13}=\frac{1}{L^{2}L_q{}^{5}}\Big[L_q{}^{3}L_{up}-L_q{}^{2}L_pL_{uq}+2a_2L_q{}^{2}L_{uq}-a_2L_q{}^{2}L_{pp}+2a_2L_qL_pL_{pq}-2a_2{}^{2}L_qL_{pq}$$

$$-a_2L_p{}^{2}L_{qq}+2a_2{}^{2}L_pL_{qq}-L_q{}^{2}L_uL_{pq}+L_pL_qL_uL_{qq}-2a_2L_qL_uL_{qq}\Big]$$

$$T^{4}_{14}=0$$

$$T^{4}_{23}=\frac{1}{LL_q{}^{4}}\Big[L_{pp}L_q{}^{2}-2L_pL_qL_{pq}+2a_2L_qL_{pq}+L_p{}^{2}L_{qq}-2a_2L_pL_{qq}\Big]$$

$$T^{4}_{24}=0$$

$$T^{4}_{34}=-\frac{L_qL_{pq}-L_pL_{qq}+2a_2L_{qq}}{L_q{}^{3}}$$

. . . .

Structure Equation:

$$\bigstar \quad d\theta^{4}=\frac{1}{L^{2}L_q{}^{5}}\Big[L_q{}^{3}L_{up}-L_q{}^{2}L_pL_{uq}+2a_2L_q{}^{2}L_{uq}-a_2L_q{}^{2}L_{pp}+2a_2L_qL_pL_{pq}-2a_2{}^{2}L_qL_{pq}$$

$$-a_2L_p{}^{2}L_{qq}+2a_2{}^{2}L_pL_{qq}-L_q{}^{2}L_uL_{pq}+L_pL_qL_uL_{qq}-2a_2L_qL_uL_{qq}\Big]\theta^{1}\wedge\theta^{3}$$

$$\frac{1}{LL_q{}^{4}}\Big[L_{pp}L_q{}^{2}-2L_pL_qL_{pq}+2a_2L_qL_{pq}+L_p{}^{2}L_{qq}-2a_2L_pL_{qq}\Big]\ \theta^{2}\wedge\theta^{3}$$

$$-\frac{L_qL_{pq}-L_pL_{qq}+2a_2L_{qq}}{L_q{}^{3}}\ \theta^{3}\wedge\theta^{4}\ . \quad \blacksquare$$

در دومین حلقه از الگوریتم هم‌ارزی کارتان، به دست آوردیم: $T^{1}_{1\,3} = T^{2}_{2\,3} = -U$، که در آن:

$$U = \frac{a_2\{2LL_{qq} + L_q^2\} + L_q^2\widetilde{D}_x L_q - L_q L_{qq}\widetilde{D}_x L - L_p L_q^2 - LL_p L_{qq}}{LL_q^3} \,. \qquad (3)$$

در رابطه فوق:

$$\widetilde{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial u} + q\frac{\partial}{\partial p} \,.$$

اگر شرط اضافی ناتبهگن بودن، یعنی:

$$2LL_{qq} + L_q^2 \neq 0$$

برقرار باشد، آنگاه می توانیم ضرایب تاب (۳) را با حل کردن برحسب a_2 به صفر رسانیده و نرمالسازی کنیم. بدین ترتیب، تمامی پارامترهای گروه ساختاری حذف شده و هم کنج ناوردای نهایی (برای تبدیلات حافظ تار)، به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}
\theta^1 &= LL_q(du - pdx) \;, \\
\theta^2 &= P(du - pdx) + L_q(dp - qdx) \;, \\
\theta^3 &= Ldx \;, \\
\theta^4 &= \frac{L_u(du - pdx) + L_p(dp - qdx) + L_q(dq - Rdx)}{L} \,.
\end{aligned} \qquad (4)$$

در روابط فوق، داریم:

$$P(x,u,p,q) = L_p - \widetilde{D}_x L_q - RL_{qq} \;,$$

و

$$R(x,u,p,q) = \frac{LL_pL_q - \widetilde{D}_x(LL_q^2)}{(LL_q^2)_q} \,.$$

معادلات ساختاری هم کنج ناوردای نهایی (۴)، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
d\theta^1 &= I_1\,\theta^1\wedge\theta^2 - (I_4 + 1)\,\theta^1\wedge\theta^4 - \theta^2\wedge\theta^3 \,, \\
d\theta^2 &= I_3\,\theta^1\wedge\theta^2 + I_5\,\theta^1\wedge\theta^3 + I_2\,\theta^1\wedge\theta^4 - I_4\,\theta^2\wedge\theta^4 + \theta^3\wedge\theta^4 \,, \\
d\theta^3 &= -\theta^3\wedge\theta^4 \,, \\
d\theta^4 &= I_6\,\theta^1\wedge\theta^3 + I_7\,\theta^2\wedge\theta^3 + I_8\,\theta^3\wedge\theta^4 .
\end{aligned}$$

مشتقات هم کنج برحسب دترمینان های ژاکوبی نوشته می شود :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta^{1}} = \frac{1}{{L_q}^{3}}\Big(-L_q\frac{\partial(L,F)}{\partial(u,q)} + P\frac{\partial(L,F)}{\partial(p,q)}\Big) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial \theta^{3}} = \frac{D_x^{*}F}{L} \ ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta^{2}} = -\frac{1}{L_q^{2}}\frac{\partial(L,F)}{\partial(p,q)} \qquad , \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta^{4}} = \frac{L}{L_q}F_q.$$

در روابط بالا، داریم:

$$D_x^{*} = \widetilde{D}_x + R\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial u} + q\frac{\partial}{\partial p} + R\frac{\partial}{\partial q}$$

و

$$\frac{\partial(L,F)}{\partial(p,q)} = L_pF_p - L_pF_q \ .$$

هشت ناوردای اساسی متناظر با هم کنج ترفیع یافته $\theta = \{\theta^{1},\theta^{2},\theta^{3},\theta^{4}\}$ با معادلات زیر بیان می‌شوند :

$$I_1 = -\frac{\partial(log \mid LL_q \mid)}{\partial\theta^{2}} = \frac{L_pL_{qq} - L_qL_{pq}}{L_q^{3}} \quad , \quad I_2 = -\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial\theta^{4}}\Big(\frac{P}{L_q}\Big)$$

$$I_3 = -\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial\theta^{4}}\Big(\frac{P}{L_q}\Big) + \frac{\partial(logL_q)}{\partial\theta^{1}} \quad , \quad I_4 = -\frac{\partial(log \mid LL_q \mid)}{\partial\theta^{4}} - 1 = \frac{LL_{qq}}{L_q^{2}}$$

$$I_5 = -\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial\theta^{3}}\Big(\frac{P}{L_q}\Big) + \frac{P^{2} - PL_q + L_pL_q}{L^{2}L_q^{2}} = \frac{E^{*}(L)}{L^{2}L_q} \quad ,$$

$$I_6 = -\frac{1}{L}\frac{\partial^{2}L}{\partial\theta^{1}\partial\theta^{3}} \quad , \quad I_7 = -\frac{1}{L}\frac{\partial^{2}L}{\partial\theta^{2}\partial\theta^{3}} \quad , \quad I_8 = -\frac{1}{L}\frac{\partial^{2}L}{\partial\theta^{4}\partial\theta^{3}} \ .$$

◄ **بررسی هم‌ارزی لاگرانژین های مرتبه دو تحت تبدیلات نقطه‌ای:**

در ادامه، از یک روش استقرایی، جهت ساختن یک هم کنج ناوردا متناظر با لاگرانژین L تحت تبدیلات نقطه‌ای و برخوردی استفاده می‌کنیم. در حالت تبدیلات نقطه‌ای، از آن جاییکه گروه ساختاری G_1 از مسئله حافظ تار، زیرگروهی از گروه ساختاری G_2 از مسئله تبدیل نقطه‌ای است، به جای کار کردن با هم کنج ترفیع یافته‌ای که از هم کنج پایه (۲) ساخته شده است، هم کنج ناوردای

نهایی (تحت تبدیلات حافظ تار) (۴) را ترفیع می دهیم. بدین ترتیب، هم کنج ترفیع یافته زیر حاصل می گردد:

$$\eta^{۱} = b_{۱}\theta^{۱} \quad , \quad \eta^{۲} = b_{۲}\theta^{۱} + b_{۱}\theta^{۲} \ ,$$

$$\eta^{۳} = b_{۳}\theta^{۱} + \theta^{۳} \quad , \quad \eta^{۴} = b_{۵}\theta^{۱} + b_{۶}\theta^{۲} + b_{۷}\theta^{۳} + b_{۱}\theta^{۴} \ .$$

معادلات ساختاری هم کنج ترفیع یافته $\eta = \{\eta^{۱}, \eta^{۲}, \eta^{۳}, \eta^{۴}\}$ به صورت زیر می باشد:

Structure Equations:

$$\star \qquad d\eta^{۱} = \beta^{۱} \wedge \eta^{۱} + \sum_{j,k=۱}^{۴} T_{j\ k}^{۱}\ \theta^{j} \wedge \theta^{k} \quad , \ j < k \ .$$

$$\star \qquad d\eta^{۲} = \beta^{۲} \wedge \eta^{۱} + \beta^{۱} \wedge \eta^{۲} + \sum_{j,k=۱}^{۴} T_{j\ k}^{۲}\ \theta^{j} \wedge \theta^{k} \ .$$

$$\star \qquad d\eta^{۳} = \beta^{۳} \wedge \eta^{۱} + \sum_{j,k=۱}^{۴} T_{j\ k}^{۳}\ \theta^{j} \wedge \theta^{k} \ .$$

$$\star \qquad d\eta^{۱} = \beta^{۴} \wedge \eta^{۱} + \beta^{۵} \wedge \eta^{۲} + \beta^{۶} \wedge \eta^{۳} + \beta^{۱} \wedge \eta^{۴} + \sum_{j,k=۱}^{۴} T_{j\ k}^{۴}\ \theta^{j} \wedge \theta^{k} \ .$$

در روابط فوق، $\{\beta^{۱}, \beta^{۲}, \beta^{۳}, \beta^{۴}, \beta^{۵}, \beta^{۶}\}$ مجموعه فرم های مورر – کارتان متناظر با گروه ساختاری $G_{۲}$ می باشند.

در ادامه، جهت اختصار تنها به نوشتن ضرایب تاب غیرقابل جذب، نرمال سازیهای انتخاب شده و کاهش های صورت گرفته در پارامترهای گروه ساختاری که از نرمالسازی ها در هر حلقه از الگوریتم هم‌ارزی ناشی شده است، می‌پردازیم.

◄ **حلقه اول :**

$$T_{۲\ ۴}^{۳} = T_{۱\ ۴}^{۱} - T_{۲\ ۴}^{۲} = ۱ \quad , \quad T_{۲\ ۳}^{۳} = ۰ \quad , \quad T_{۱\ ۳}^{۱} = T_{۲\ ۳}^{۲}$$

$$b_{۱} = ۱ \quad , \quad b_{۳} = -b_{۶} \quad , \quad b_{۷} = b_{۶} - b_{۲} \ .$$

◄ **حلقه دوم :**

در این مرحله، با فرض شرط ناتبهگن بودن زیر

$$(۱ + ۲I_{۲})(۲ + I_{۲}) \neq ۰ \quad i.e \quad (LL_{qq} + ۲L_{q}^{۲})(۲LL_{qq} + L_{q}^{۲}) \neq ۰ \ . \qquad (۵)$$

ضرایب غیرقابل جذب زیر را می‌توان نرمالسازی کرد:

$$T^1_{12} = 0 \quad , \quad T^1_{13} = 0$$

$$b_6 = -I_9 \quad , \quad b_2 = -(1+I_2)I_{10}$$

در روابط فوق، دو ناوردای I_9 و I_{10} با معادلات زیر بیان می‌شوند:

$$I_9 = \frac{I_1}{2+I_2} \quad , \quad I_{10} = \frac{I_9}{1+2I_2} = \frac{I_1}{(2+I_2)(1+2I_2)} .$$

◄ **حلقه سوم :**

در آخرین مرحله نرمالسازی داریم:

$$T^3_{13} = 0 \quad , \quad b_5 = I_{11} = I_{10} I_{9\ ,\ \theta^4} - I_{9\ ,\ \theta^3} + (1+I_2) I_9 I_{10} .$$

بدین ترتیب، الگوریتم هم‌ارزی لاگرانژین های مرتبه دوم تحت تبدیلات نقطه‌ای به پایان می‌رسد، در نتیجه داریم:

◄ **قضیه:** فرض کنید L یک لاگرانژین ناتبهگن باشد که در شرط (۵) صدق می کند. آنگاه، هم کنج:

$$\begin{aligned}
\eta^1 &= \theta^1 \\
\eta^2 &= -(1+I_2)I_{10}\theta^1 + \theta^2 \\
\eta^3 &= I_9\theta^1 + \theta^3 \\
\eta^4 &= I_{11}\theta^1 - I_9\theta^2 + I_{10}\theta^3 + \theta^4 .
\end{aligned}$$

یک هم کنج ناوردای متناظر با لاگرانژین L تحت شبه گروه تبدیلات نقطه‌ای می‌باشد، این یعنی اینکه دیفئومورفیسم $\psi : J^2 \longrightarrow J^2$ مسئله هم ارزی تبدیلات نقطه‌ای را حل می کند، اگر و تنها اگر در شرط زیر صدق کند:

$$\psi^*(\bar{\eta}^i) = \eta^i \quad , \quad i = 1, ..., 4.$$

◄ **بررسی همارزی لاگرانژین های مرتبه دو تحت تبدیلات برخوردی:**

مشابه حالت تبدیلات نقطه‌ای، به جای کار کردن با هم کنج ترفیع یافته‌ای که از هم کنج پایه (۲) ساخته شده است، هم کنج ناوردای نهایی (تحت تبدیلات حافظ تار) (۴) را ترفیع می دهیم. بدین ترتیب، توابع ناوردای زیر حاصل می گردند:

$$I_{12} \equiv (I_{2\,,\,\theta^4} + 2I_2^2 + 2I_2)^2 + 2I_2^3 = \frac{L^2(LL_{qqq} + 3L_qL_{qq})^2 + 2L^3L_{qq}^3}{L_q^6}\,.$$

$$I_{13} = \frac{(I_{2\,,\,\theta^2} - I_{2\,,\,\theta^3} - 2I_1I_2)I_{2\,,\,\theta^4} - 2I_2I_{2\,,\,\theta^3} + (2I_2 - I_2^2)I_{2\,,\,\theta^2} - 4(I_2^3 + I_2^2)I_1}{2I_{12}}$$

$$I_{14} = \frac{(3I_2 + 2I_2^2 + I_{2,\,\theta^4})I_{2,\,\theta^3} - I_2I_{2,\,\theta^2} + 2I_1I_2^2}{I_{12}}$$

$$I_{15} = I_{14,\,\theta^3} - I_{13}I_{14,\,\theta^4} + I_{14}^2 + I_5I_{13} - I_4.$$

◄ **قضیه:** فرض کنید L یک لاگرانژین ناتبهگن باشد که در شرط $I_{12} \neq 0$ صدق می کند. آنگاه، هم کنج:

$$\begin{aligned}
\mu^1 &= k\sqrt{|\,I_2\,|}\theta^1\\
\mu^2 &= k\sqrt{|\,I_2\,|}(I_{13}\theta^1 + \theta^2)\\
\mu^3 &= I_2I_{14}\theta^1 + \theta^2 + \theta^3\\
\mu^4 &= k\sqrt{|\,I_2\,|}\,(I_{15}\theta^1 + (2I_{13} + I_{14})\theta^2 + I_{14}\theta^3 + \theta^4)
\end{aligned}$$

یک هم کنج ناوردا تحت تبدیلات برخوردی روی J^2 می باشد. در روابط فوق $k = \pm 1$ یک علامت غیرمشخص می باشد. در نتیجه، دیفئومورفیسم $\psi : J^2 \longrightarrow J^2$ مسئله هم ارزی تحت تبدیلات برخوردی را حل می کند، اگر و تنها اگر در شرط زیر صدق کند:

$$\psi^*(\bar{\mu}^i) = \mu^i \quad , \quad i = 1, ..., 4. \qquad \blacksquare$$

آزمون کارتان (شرط پیچشی بودن) :

معادلات ساختاری هم کنج ترفیع یافته $\theta = \{\theta^۱, \theta^۲, \theta^۳, \theta^۴\}$ را به فرم زیر در نظر می گیریم :

$$d\theta^i = \sum_{\kappa=۱}^{۵} \sum_{j=۱}^{۴} A^i_{j\,\kappa} \alpha^\kappa \wedge \theta^j + \sum_{j,k=۱}^{۴} T^i_{j\,k}(x,g)\, \theta^j \wedge \theta^k \ \ , \ \ j<k \ \ , \ \ i = ۱, ..., ۴.$$

با جایگزینی فرم مورر $-$ کارتان α^κ با یک ترکیب خطی دلخواه از عناصر هم کنج به صورت $\sum_{k=۱}^{۵} z^\kappa_j\, \theta^j$ داریم ($\alpha^\kappa \longmapsto \ \sum_{\kappa=۱}^{۵} z^\kappa_j\, \theta^j$) :

$$\alpha^۱ \longmapsto z^۱_۱\, \theta^۱ + z^۱_۲\, \theta^۲ + z^۱_۳\, \theta^۳ + z^۱_۴\, \theta^۴$$

$$\alpha^۲ \longmapsto z^۲_۱\, \theta^۱ + z^۲_۲\, \theta^۲ + z^۲_۳\, \theta^۳ + z^۲_۴\, \theta^۴$$

$$\alpha^۳ \longmapsto z^۳_۱\, \theta^۱ + z^۳_۲\, \theta^۲ + z^۳_۳\, \theta^۳ + z^۳_۴\, \theta^۴$$

$$\alpha^۴ \longmapsto z^۴_۱\, \theta^۱ + z^۴_۲\, \theta^۲ + z^۴_۳\, \theta^۳ + z^۴_۴\, \theta^۴$$

$$\alpha^۵ \longmapsto z^۵_۱\, \theta^۱ + z^۵_۲\, \theta^۲ + z^۵_۳\, \theta^۳ + z^۵_۴\, \theta^۴$$

$$\sum_{\kappa=۱}^{۵} (A^i_{j\,\kappa}\, z^\kappa_k - A^i_{k\,\kappa}\, z^\kappa_j) = -T^i_{j\,k} \quad , \quad i,j,k = ۱, ..., ۴.$$

برای حل دستگاه خطی فوق، برخی از متغیرهای ${z_j}^\kappa$ باید تعیین شوند و مابقی به عنوان مقادیر دلخواه در نظر گرفته شوند. به تعداد متغیرهای آزاد در حل دستگاه جذبی خطی متناظر با هم کنج ترفیع یافته $\theta = \{\theta^۱, \theta^۲, \theta^۳, \theta^۴\}$ **درجه ابهام** گفته می شود و با نماد $r^{(۱)}$ نمایش داده می شود. به عبارت دیگر، $r^{(۱)}$ بعد فضای جواب دستگاه همگن متناظر با معادلات خطی زیر می باشد :

$$\sum_{\kappa=۱}^{۵} (A^i_{j\,\kappa}\, z^\kappa_k - A^i_{k\,\kappa}\, z^\kappa_j) = ۰ \quad , \quad i,j,k = ۱, ..., ۴, \ \ j<k \quad \clubsuit$$

ضرایب ساختاری $A^i_{j\,\kappa}$، در مراحل قبل به شرح زیر بدست آورده شد :

$$A^۱_{۱\,۱} = ۱ \ \ , \ \ A^۱_{۱\,۲} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۱\,۳} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۱\,۴} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۱\,۵} = ۰$$

$$A^۱_{۲\,۱} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۲\,۲} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۲\,۳} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۲\,۴} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۲\,۵} = ۰$$

$$A^۱_{۳\,۱} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۳\,۲} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۳\,۳} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۳\,۴} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۳\,۵} = ۰$$

$$A^۱_{۴\,۱} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۴\,۲} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۴\,۳} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۴\,۴} = ۰ \ \ , \ \ A^۱_{۴\,۵} = ۰$$

. . . .

$$A^{2}_{11}=0\ ,\ A^{2}_{12}=1\ ,\ A^{2}_{13}=0\ ,\ A^{2}_{14}=0\ ,\ A^{2}_{15}=0$$

$$A^{2}_{21}=1\ ,\ A^{2}_{22}=0\ ,\ A^{2}_{23}=0\ ,\ A^{2}_{24}=0\ ,\ A^{2}_{25}=0$$

$$A^{2}_{31}=0\ ,\ A^{2}_{32}=0\ ,\ A^{2}_{33}=0\ ,\ A^{2}_{34}=0\ ,\ A^{2}_{35}=0$$

$$A^{2}_{41}=0\ ,\ A^{2}_{42}=0\ ,\ A^{2}_{43}=0\ ,\ A^{2}_{44}=0\ ,\ A^{2}_{45}=0$$

. . . .

$$A^{3}_{11}=0\ ,\ A^{3}_{12}=0\ ,\ A^{3}_{13}=0\ ,\ A^{3}_{14}=0\ ,\ A^{3}_{15}=0$$

$$A^{3}_{21}=0\ ,\ A^{3}_{22}=0\ ,\ A^{3}_{23}=0\ ,\ A^{3}_{24}=0\ ,\ A^{3}_{25}=0$$

$$A^{3}_{31}=0\ ,\ A^{3}_{32}=0\ ,\ A^{3}_{33}=0\ ,\ A^{3}_{34}=0\ ,\ A^{3}_{35}=0$$

$$A^{3}_{41}=0\ ,\ A^{3}_{42}=0\ ,\ A^{3}_{43}=0\ ,\ A^{3}_{44}=0\ ,\ A^{3}_{45}=0$$

. . . .

$$A^{4}_{11}=0\ ,\ A^{4}_{12}=0\ ,\ A^{4}_{13}=1\ ,\ A^{4}_{14}=0\ ,\ A^{4}_{15}=0$$

$$A^{4}_{21}=0\ ,\ A^{4}_{22}=0\ ,\ A^{4}_{23}=0\ ,\ A^{4}_{24}=1\ ,\ A^{4}_{25}=0$$

$$A^{4}_{31}=0\ ,\ A^{4}_{32}=0\ ,\ A^{4}_{33}=0\ ,\ A^{4}_{34}=0\ ,\ A^{4}_{35}=1$$

$$A^{4}_{41}=1\ ,\ A^{4}_{42}=0\ ,\ A^{4}_{43}=0\ ,\ A^{4}_{44}=0\ ,\ A^{4}_{45}=0$$

. . . .

با جایگزینی ضرایب فوق در معادله خطی همگن ♣ و حل آن، دستگاه همگن خطی زیر حاصل می‌گردد:

$$-z^{2}_{3}=0\quad,\quad -z^{2}_{4}=0\quad,\quad -z^{1}_{2}=0\quad,\quad -z^{4}_{3}+z^{5}_{2}=0\quad,\quad z^{1}_{2}-z^{4}_{4}=0$$

$$-z^{3}_{3}+z^{5}_{1}=0\quad,\quad -z^{1}_{4}=0\quad,\quad z^{1}_{3}-z^{5}_{4}=0\quad,\quad z^{1}_{3}=0$$

$$z^{2}_{4}=0\quad,\quad -z^{1}_{2}+z^{4}_{4}=0\quad,\quad -z^{3}_{2}+z^{4}_{1}=0\quad,\quad z^{2}_{3}=0\quad,\quad z^{3}_{2}-z^{4}_{1}=0$$

$$-z^{1}_{3}+z^{5}_{4}=0\quad,\quad z^{3}_{3}-z^{5}_{1}=0\quad,\quad z^{4}_{3}-z^{5}_{2}=0\quad,\quad z^{1}_{4}=0$$

$$-z_1^1 + z_4^3 = 0 \quad , \quad z_1^1 - z_2^2 = 0 \quad , \quad z_2^1 = 0 \quad , \quad -z_1^1 + z_2^2 = 0 \quad , \quad z_1^1 - z_4^3 = 0$$

جواب عمومی دستگاه فوق، به شرح زیر می باشد:

$$z_4^4 = 0 \quad , \quad z_4^5 = 0 \quad , \quad z_4^3 = z_1^1 \quad , \quad z_2^2 = z_1^1 \quad , \quad z_2^5 = z_3^4 \, ,$$
$$z_1^4 = z_2^3 \quad , \quad z_1^5 = z_3^3 \quad , \quad z_1^1 = z_1^1 \quad , \quad z_2^3 = z_2^3 \quad , \quad z_3^3 = z_3^3 \, ,$$
$$z_3^4 = z_3^4 \quad , \quad z_3^1 = 0 \quad , \quad z_4^2 = 0 \quad , \quad z_3^2 = 0 \quad , \quad z_4^1 = 0 \quad , \quad z_2^1 = 0.$$

بنابراین، متغیرهای آزاد حاصل از حل دستگاه جذبی خطی متناظر با هم کنج ترفیع یافته θ عبارتند از :

$$\left\{ z_1^1 \ , \ z_1^2 \ , \ z_1^3 \ , \ z_2^3 \ , \ z_3^3 \ , \ z_2^4 \ , \ z_3^4 \ , \ z_3^5 \right\}$$

در نتیجه :

$$r^{(1)} = 8$$

اکنون، به بدست آوردن **مشخصه های کارتان کاهش یافته** می پردازیم. فرض کنیم $v = (v^1, v^2, v^3, v^4)$ برداری در $\mathbb{R}^4$ باشد. $L[v]$ را ماتریسی 5×4 می‌گیریم که درایه های آن به صورت زیر هستند:

$$L_k^i[v] = \sum_{j=1}^{4} A_{j_\kappa}^i \, v^j \quad , \quad i = 1, ..., 4 \, , \quad k = 1, ..., 5.$$

بنابراین، $L[v]$ همان ماتریس ضرایب فرم های مورر– کارتان α^κ در معادلات ساختاری است که با جایگذاری عناصر θ^i با عناصر متناظر v^i از v حاصل شده است. در نتیجه :

$$L[v] := \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

رتبه $L[v]$ به بردار بخصوص v بستگی دارد. یک کمیت مهم عددی ماکسیمم رتبه ماتریس $L[v]$ است وقتی که روی همه بردارهای ممکن $v \in \mathbb{R}^4$ تغییر می کند. آن را **اولین مشخصه کاهشی هم کنج ترفیع یافته** θ می نامند که با نماد زیر معرفی می گردد:

$$s'_1 = max\{rankL[v] : \ v \in \mathbb{R}^4\} = 3$$

دومین مشخصه کاهشی هم کنج ترفیع یافته، s'_2، با محاسبه ماکسیمم رتبه ماتریس ۵ × ۸ حاصل از چسباندن دو نسخه از ماتریس قبل به دست می آید و به یک جفت بردار متفاوت، از این دو نسخه نظیر می‌شود:

$$\begin{pmatrix} L[v] \\ L[w] \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_2 & w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_4 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

در واقع s'_2، از معادله زیر به دست می آید:

$$s'_1 + s'_2 = max\{rank \begin{pmatrix} L[v] \\ L[w] \end{pmatrix} : \ v, w \in \mathbb{R}^4\} = 4$$

در نتیجه:

$$s'_2 = 4 - 3 = 1 \ .$$

می‌توان به روش مشابه **سومین مشخصه کاهشی هم کنج ترفیع یافته** (s'_3) را به شکل زیر بیان نمود :

$$\begin{pmatrix} L[v] \\ L[w] \\ L[e] \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_2 & w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_4 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_4 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$$

در نتیجه s'_3، از معادله زیر به دست می آید:

$$s'_1 + s'_2 + s'_3 = max\{rank \begin{pmatrix} L[v] \\ L[w] \\ L[e] \end{pmatrix} : \ v, w, e \in \mathbb{R}^4\} = 5$$

در نتیجه:

$$s'_3 = 5 - 3 - 1 = 1 \ .$$

نهایتاً، **آخرین مشخصه کاهشی هم کنج ترفیع یافته**، s'_4، توسط رابطه زیر به دست می‌آید:

$$s'_1 + s'_2 + s'_3 + s'_4 = 5$$

در نتیجه:

$$s'_4 = 5 - 3 - 1 - 1 = 0 \ .$$

آزمون کارتان: فرض کنید θ هم کنج ترفیع یافته با مشخصه‌های کاهشی $s'_1, ..., s'_m$ باشد و تعداد متغیرهای آزاد در حل دستگاه جذبی خطی متناظر به آن یعنی درجه ابهام را با $r^{(1)}$ نشان دهیم. در این صورت θ پیچشی است، اگر و تنها اگر :

$$s'_1 + 2s'_2 + ... + ms'_m = r^{(1)}.$$

با توجه به مطلب فوق، داریم:

$$s'_1 + 2s'_2 + 3s'_3 + 4s'_4 = 3 + 2 \times 1 + 3 \times 1 + 4 \times 0 = 8 = r^{(1)}$$

رابطه فوق، نشان می‌دهد که هم کنج ترفیع یافته $\theta = \{\theta^1, ..., \theta^4\}$ **پیچشی** می‌باشد. ■

مراجع

[1] N.Kamran, P.J.Olver, *Equivalence of higher order Lagrangians I. Formulation and reduction*, J. Math. Pures et Applique′es, **70** (1991), 369-391.

[2] N.Kamran, P.J.Olver, *Equivalence of higher order Lagrangians III. New invariant differential equations*, Nonlinearity, **5** (1992), 601-621.

[3] N.Kamran, P.J.Olver, *Equivalence problems for first order Lagrangians on the line*, J. Diff. Eq. **80** (1989), 32-78.

[4] P.J.Olver, *Equivalence, Invariants and Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.