توپولوژی دیفرانسیل مقدماتی

اثر: ویکتور گیلومن و آلن پولاک

ترجمهٔ: مهدی نجفی‌خواه [۱]

[۱] آخرین بروز رسانی: ۱۳ خرداد ۱۳۹۲

Copyright: Mehdi Nadjafikhah
e-mail : m_nadjafikhah@iust.ac.ir
Web : http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

دیباچه

مقصود از این کتاب ارائه مسیری مقدماتی و شهودی به وادی توپولوژی دیفرانسیل است. مباحثی که این روزها در درس توپولوژی دیفرانسیل مقدماتی مطرح می‌گردد، معمولاً به عنوان محصولات فرعی ماشین نظریه‌های بزرگی چون تابعگونهای هومولوژی و کوهومولوژی در دروس فوق لیسانس توپولوژی جبری مورد بررسی است. مثلاً، قضیهٔ بورساک–اولام از ساختار ضربی روی حلقهٔ کوهومولوژی فضای تصویری برگرفته شده است، قضیهٔ لفشیتز از دوگانیِ پوانکاره و قضیهٔ کانث منبعث گردیده است، قضیهٔ جداسازی جردان براوئر از دوگانیِ الکساندر نتیجه شده است، و نظایر اینها. ما دو ایراد عمده به روش طرح نظریات بزرگ در درس توپولوژی مقدماتی وارد می‌کنیم: مفهوم زیبا و شهودی موضوع مورد بحث را غامض می‌کند، و به دانشجو القاء می‌کند که تنها کار ریاضی‌دانان استفاده از ابزارهای بزرگ است و لاغیر. کوشش ما این است که احکام مطرح شده در بالا و احکامی شبیه به آنها (از جمله قضیهٔ گاوس–بونه، قضیهٔ درجه و قضیهٔ هوپف در مورد میدانهای برداری) را بیان کنیم؛ موضوع اصلی کتاب ما بیشتر لذت بردن از مثالهای جالب است. عملاً، همانطور که در آینده خواهید دید، کلاً به سراغ توپولوژی جبری نمی‌رویم، و نظرمان در این مورد آن است که این قضایا به حوضهٔ به مراتب هندسی‌تر از قلمرو توپولوژی، یعنی نظریهٔ مقاطع، اختصاص دارند. البته، نظریه مقاطع خیلی مجرد عمل می‌کند، و ابزار خاص خودش را می‌طلبد: قضیهٔ تراگردی. بایستی حس انتقادپذیری نسبت به تعویض ابزاری با ابزار دیگر را از هم اکنون معترف باشیم: شاید: chacun a son gout. بر ما روشن گردیده است که برهانهای تراگردی را دانشجو به راحتی می‌تواند تصور کند، و این برهانها چنان هستند که حقیقتاً نمی‌توانیم حس کنیم که آنها در مورد تابعگون هومولوژی تکین سخن می‌گویند.

این کتاب برای یک درس آرام یک ساله در سطح سال آخر کارشناسی ارشد تهیه شده است. همچنین، موفق به تدریس این کتاب به دانشجویان سالهای سوم و چهارم کارشناسی شده‌ایم. صلاح می‌دانیم که برخی مباحث مثل، بحث در مورد نظریهٔ دورام برای دورهٔ کارشناسی حذف شود، و تأکید اصلی بر نظریهٔ مقاطع به پیمانه ۲، یا بعضی موضوعات از فصل ۳ که پیمانه ۲ را بیشتر با جهتدهی توصیف می‌کند باشد. (ضمناً بایستی به خواننده گفته شود که بخش مربوط به نظریهٔ دورام تماماً از مابقی کتاب مستقل است.) از استفادهٔ از آن بحث حتی در اثبات فرمول درجه در بخش ۸ از فصل ۴ اجتناب کرده‌ایم. این فرمول را

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

بجای استفاده از نظریهٔ رده‌های کوهومولوژی با بهره‌گیری از قضیهٔ استوکس ثابت کرده‌ایم.)

کتاب به چهار فصل تقسیم گردیده است. فصل یک، شامل نظریهٔ مقدماتی خمینه‌ها و نگاشتهای هموار می‌باشد. خمینه‌ها را بعنوان زیر مجموعه‌هایی از فضای اقلیدسی تعریف می‌کنیم. نتیجهٔ این کار آن است که دانشجو خمینه‌ها را همانند اشیایی که قبلاً در حساب دیفرانسیل و انتگرال روی $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ مطالعه کرده است درمی‌یابد؛ به بیان ساده، آنها عبارتند از خمها و رویه‌هایی که به ابعاد بالاتر تعمیم یافته‌اند. همچنین از آزار دانشجو به سبب ارائه مطالب مجرد توسط چارتها و اطلسها در بدو شروع کار خودداری نموده‌ایم. خطر جدی و مشکل بارزِ کار کردن در فضای اقلیدسی در غامظ کردن فهم تفاوت میان خواص ذاتی خمینه‌ها و خواصی که از نشاندن آنها منبعث می‌گردد، می‌باشد. سعی کرده‌ایم که دانشجو را از این تفاوتها آگاه کنیم، ولی با این وجود در استفادهٔ بجا از ابزار لازم، به منظور هر چه ملموس‌تر کردن برهانهایمان تردیدی به خود راه نداده‌ایم. (من باب مثال، به استفاده‌مان از قضیهٔ همسایگی لوله‌ای در بخش ۳ از فصل ۲ نگاه کنید).

برای افزودن به وسعت و مقبولیت موضوع مقدماتی مورد بحث، سعی کرده‌ایم تا از نوع کلی و ثابت تر تعریفهایمان استفاده بکنیم؛ این کار در مطبوع‌تر کردن مفاهیم پایه موفق است، و قضاوت را به خواننده محول می‌کنیم.

دو بخش انتهایی فصل ۱ به قضیهٔ سارد و برخی کاربردهایش اختصاصی دارد. مهمترین استفادهٔ ما از قضیهٔ سارد در اثبات قضیهٔ تراگردی در فصل ۲ است، ولی پیش از آن، وجود توابع مورس و توصیف قضیهٔ نشاندن ویتینی را با استفاده از آن به ثمر می‌رسانیم. (در واقع، چون خمینه‌های ما تمامی در فضای اقلیدسی‌اند، اثبات قضیهٔ نشاندن بی‌مورد است، تصور می‌کنیم که بایستی مسئله‌ای این چنین مطرح کنیم: آیا یک خمینهٔ k–بعدی وجود دارد که نتوان یک کپی وابرسان با آن در فضای اقلیدسی با بعد از پیش مشخص شدهٔ n یافت؟ پاسخ: مشروط به اینکه $2k+1 \leq n$ پاسخ مثبت است، و در غیر این صورت، خیر).

فصل ۲ با افزودن مرز به خمینه آغاز می‌گردد. یک–خمینه‌ها را رده بندی می‌کنیم و اثبات اخیر هیرش از قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر را بیان می‌نمائیم. سپس قضیهٔ تراگردی منتج می‌شود، و از آن چنین استنباط می‌شود که مقاطع تراگردی کلی‌اند. تراگردی، امکان تعریف عدد مقطع را فراهم می‌سازد، و رده‌بندی خمینه‌های یک–بعدی نشان می‌دهد که این اعداد ناوردای هوموتوپی هستند. در ابتدا به نظریهٔ مقاطع به پیمانه ۲ مشغول می‌شویم، در آنجا دانشجو می‌تواند بدون کار کردن در مورد جهت دهی، با توپولوژی آشنا شود. بعلاوه، نظریهٔ به پیمانهٔ ۲ برای دو قضیهٔ آخر فصل، زمینه‌ای طبیعی فراهم می‌سازد: قضیهٔ جداسازی ژردان–براوئر و قضیهٔ بورساک–اولام. در هر یک از سه فصل انتهایی بخشی وجود دارد که در آن دانشجو با استفاده از راهنمایی‌های در متن، خود قادر می‌باشد قضایای بزرگ را به اثبات رساند. قضیهٔ ژوردان–براوئر اولین قضیه از این دست است. تجربه به ما نشان داده است که دانشجویانمان با بکارگیری روشهایی که در گسترهٔ معمولی درس آموخته‌اند، بسیار جالب و پر معنی قادر به انجام چنین کاری هستند.

در فصل ۳، نظریهٔ مقاطع به اتفاق جهت دهی را بازسازی می‌کنیم. مشخصهٔ اولر به عنوان عدد خود–قطعی تعریف گردیده و نشان داده می‌شود که این عدد برای ابعاد فرد صفر است. سپس اثباتی اولیه برای قضیهٔ نقطه–ثابت لیفشیتز مطرح شده و سودبخشی آن با استخراج غیر صوری مشخصهٔ اولر رویه‌های فشرده نشان داده می‌شود. با ترجمهٔ قضیهٔ نقطه–ثابت لفشیتز به زبان میدانهای برداری، به قضیهٔ شاخص پوانکاره–هوپف می‌رسیم. در یک بخش تمرینات، از دانشجو خواسته می‌شود تا با استفاده از ابزارهایی که در توضیحات قبلی فراهم شده است، قضیهٔ درجهٔ هوپوف را ثابت کرده و در ادامه وارونی برای قضیهٔ

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

شاخص بدست آورد. سرانجام، مشخصهٔ اولر دیفرانسیلی را به نمونهٔ ترکیباتی‌اش مرتبط می‌سازیم.

سخنی سرگشاده با دانشجو این کتاب برای آن دسته از دانشجویان ریاضی که یک سال آنالیز و یک ترم جبر خطی مطالعه کرده‌اند نوشته شده است. اضافه بر پیشنیاز آنالیز می‌بایستی آشنایی با مفاهیم پایه‌ای توپولوژی در فضای اقلیدسی گنجانده شود: باز بودن، همبندی، فشردگی و نظایر اینها. ما دو قضیه از آنالیز را که ممکن است خواننده آنها را مطالعه نکرده باشد، بیان نموده‌ایم: قضیه تابع وارون، که در کل کتاب مورد استفاده است؛ وفرمول تغییر متغیر برای انتگرال گیری مکرر، که تنها در فصل ۴ از آن بهره برداری می‌شود. مرجعی مطمئن و زیبا برای این احکام کتاب اسپواک [۲] (بترتیب، صفحات ۳۴ و ۶۷) می‌باشد. تمرینات نه تنها از حیث آموزشی لازم‌اند؛ بلکه آزادانه از آنها در متن یاد می‌شود. آنهایی که از جهت اساسی بودن مهم شمرده می‌شوند–که شامل تمرینات ارجاع داده شده نیز هستند، با علامت $(*)$ مشخص گرده‌اند. (توجه شود که ستاره‌ها پیامی برای ترساندن دانشجو از مسایل مشکل نیستند.) مجموعه متنوعی از اصطلاحات بدون اینکه در متن تعریف شود، بکار گرفته خواهد شد.

در مورد نگاشتهای $f : X \longrightarrow Y$ بین دو مجموعه: یکسویی یعنی، یکبیک بودن؛ پوشایی یعنی، برو بودن؛ و دوسویی یعنی، پوشا و یکبیک بودن. گردایه مجموعه‌های $\{U_\alpha\}$ در صورتی مجموعهٔ X را می‌پوشاند که X زیر مجموعه‌ای از اجتماع آنها باشد: $X \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$. پوشش باز (یا پوش باز) برای X عبارت است از گردایه‌ای از مجموعه‌های باز $\{U_\alpha\}$ که X را می‌پوشانند. پوشش $\{V_\beta\}$ در صورتی یک تظریف از پوشش $\{U_\alpha\}$ است که هر مجموعهٔ V_β ای مشمول در لااقل یک U_α باشد. بنابه قرارداد، دومین اصل شمارایی به این معنی است که هر پوشش باز $\{U_\alpha\}$ در $\mathbb{R}^n$ دارای یک تظریف شمارا است. (اثبات: گردایهٔ همهٔ گویهای باز با شعاع گویا و مرکز در نقاط با مختصات گویا را که مشمول در یک U_α هستند، در نظر بگیرید.)

در صورتی که X زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد، زیر مجموعهٔ V از X در صورتی (نسبت به X) باز است که آن را به صورت مقطع X با زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ بتوان نوشت: $V = \tilde{V} \cap X$ که $\tilde{V}$ در $\mathbb{R}^n$ باز است. اگر Z زیر مجموعه‌ای از Z باشد، از پوششی برای Z در X نیز می‌توان سخن گفت: پوششی برای Z توسط زیر مجموعه‌های باز نسبت به X. هر چنین پوششی از Z را به صورت اشتراک X با پوششی از زیر مجموعه‌های باز $\mathbb{R}^n$ برای Z می‌توان نوشت. چون دومین اصل شمارایی در مورد $\mathbb{R}^n$ برقرار است، هر پوشش باز برای Z نسبت به X دارای تظریفی شمارا است. (برای پوشش مفروض $\{U_\alpha\}$، که نسبت به X باز است، می‌نویسیم: $U_\alpha = \tilde{U}_\alpha \cap X$.) در این صورت $\{\tilde{V}_\alpha\}$ را تظریف شمارای $\{\tilde{U}_\alpha\}$ در $\mathbb{R}^n$ گرفته و تعریف می‌کنیم $V_\alpha := \tilde{V}_\alpha \cap X$.)

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

فهرست مطالب

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

فصل ۴ انتگرالگیری بر منیفلدها

فصل آ اندازهٔ صفر و قضیهٔ سارد

فصل ب طبقه بندی ۱-خمینه‌های فشرده

کتاب نامه

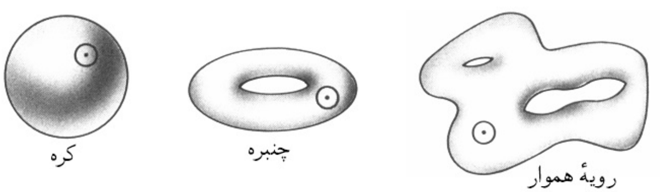
Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

فصل ۱

منیفلد و نگاشت هموار

بخش ۱.۱ چند تعریف

اطلاعات زیبا و ژرفی از ساختار و خواص بسیاری از فضاهای هندسی را می‌توان با بهره‌گیری از تعداد ناچیز از ابزارهای ساخته شده در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به صورت شهودی بدست آورد. از آنجا که حساب دیفرانسیل بر پایهٔ هندسهٔ موضعی فضای اقلیدسی استوار است، با فضاهایی که موضعاً شبیه و همانند با یک فضای اقلیدسی بخصوص بنظر می‌رسند، سازگاری دارد. چنین اشیایی را **منیفلد** می‌نامیم، فضاهایی که در آنها اطراف هر نقطه دقیقاً شبیه تکهٔ کوچکی از فضای اقلیدسی است.

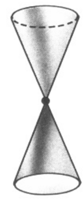


شکل ۱.۱: نمونه‌هایی از منیفلد

رویه‌های هموار نظیر کره و چنبره (شکل تویی چرخ اتوموبیل) مثالهایی آشنا از منیفلد هستند، که هر نقطه از آنها در قرص خمیدهٔ کوچکی قرار دارد که آنرا می‌توان به نرمی درون قرصی در صفحه خواباند (به شکل ۱.۱ توجه شود). دوست قدیمی‌ای که منیفلد به حساب نمی‌آید، مخروط است. تمام نقاطش بجز یکی دارای اطراف کاملاً اقلیدسی است، ولی هیچ همسایگی از نقطهٔ رأس آن، شبیه به تکهٔ ساده‌ای از صفحه نیست (به شکل ۲.۱ نگاه کنید).

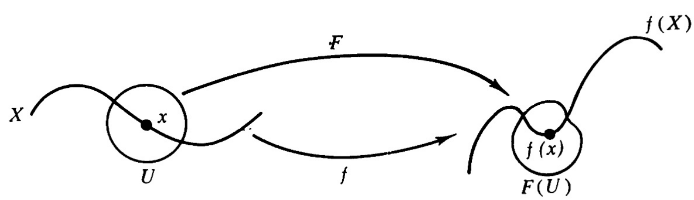
برای ترجمهٔ ایده‌مان به صورت تعریفی ریاضی، نیازمندیم که ابتدا محک «همانندی» یا «شباهت» را دقیقاً بیان کنیم. این کار را به کمک نگاشتها انجام می‌دهیم. یک نگاشت f از مجموعه باز $U \in \mathbb{R}^n$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۲.۰۱: مخروط

بتوی $\mathbb{R}^m$، در صورتی **هموار** نامیده می‌شود که دارای مشتقهای جزیی پیوسته از همهٔ مراتب باشد. البته، هنگامی که دامنهٔ f باز نیست، معمولاً نمی‌توان از مشتقات جزئی سخن به میان آورد. (چرا؟). بنابراین حالت باز را به فضاهای کلیتر می‌بریم. یک نگاشت $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تعریف شده بر زیرمجموعه‌ای دلخواه X از $\mathbb{R}^n$ را در صورتی **هموار** نامیم که آنرا موضعاً به نگاشتی هموار بر مجموعه‌های باز بتوان توسیع داد؛ یعنی، اگر به گرد هر نقطه $x \in X$، مجموعهٔ باز $U \subset \mathbb{R}^n$ و نگاشت هموراری به شکل $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ چنان بتوان یافت که F بر $U \cap X$ با f مساوی باشد (به شکل ۳.۰۱ توجه شود). لفظ موضعاً، که به رفتار تنها در یک همسایگی از یک نقطه اشاره دارد، بسیار معمول است. یادآور می‌شویم که زیر مجموعه‌های باز (نسبی) از X دقیقاً عبارتند از آن منحنی‌هایی که به صورت $U \cap X$ قابل نوشتن هستند. پس همواری یک خاصیت موضعی است؛ $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ در صورتی هموار است که در همسایگی‌ای از هر نقطهٔ X هموار باشد. (متضاد لغت «موضعی» اصطلاح سراسری است، که به کل فضای X بعنوان یک جسم واحد اشاره می‌کند.)

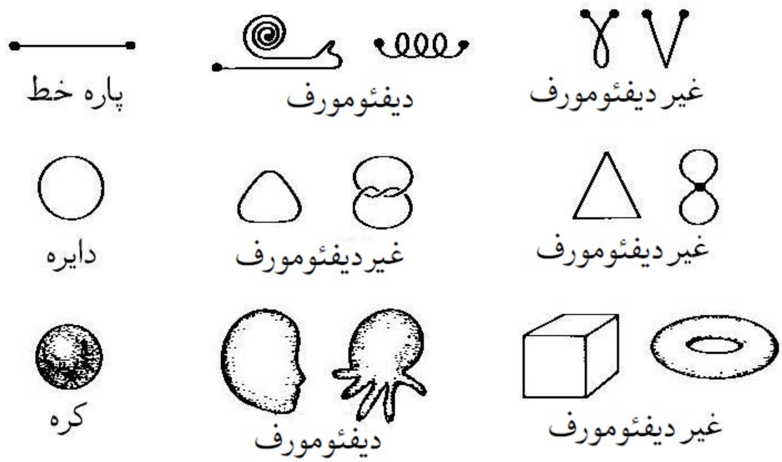


شکل ۳.۰۱: نگاشت هموار

نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ بین زیر مجموعه‌های بازی از دو فضای اقلیدسی در صورتی یک **دیفئومورفیسم** است که یکبیک و برو بوده، و نگاشت وارون آن $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ نیز هموار باشد. X و Y در صورتی **دیفئومورف** نامیده می‌شوند که چنین نگاشتی بین آنها وجود داشته باشد. از دید ما، دو مجموعهٔ دیفئومورف، ذاتاً معادلند. آنها را بعنوان دو کپی از یک فضای مجرد واحد می‌توان دانست، که حتی ممکن است در نقاط متفاوتی از فضاهای اقلیدسی متناظر به آنها واقع شده باشند. شما بایستی بتوانید شهود کافی برای تصور سادهٔ بسیاری از فضاهای دیفئومورف را بدست بیاورید. شاید بتوانید با تفکر پیرامون چند نمونهٔ در شکل ۴.۰۱ به این توانایی نایل شوید.

اکنون با در دست داشتن مفهوم مناسب معادل بودن، قادر به معرفی مفهوم منیفلد هستیم. فرض کنید که X زیر مجموعه‌ای از یک فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ بزرگ باشد که آنرا احاطه کرده است. در این

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۴.۱: شکلهای دیفئومورف و غیر دیفئومورف

صورت X وقتی یک **منیفلد** k**–بعدی** است که موضعاً با $\mathbb{R}^k$ دیفئومورف باشد، به این معنی که هر نقطه از آن مثل x، واجد یک همسایگی V در X باشد که با زیر مجموعهٔ باز U از $\mathbb{R}^k$ دیفئومورف می‌باشد. دیفئومورفیسم $\phi : U \longrightarrow V$ را یک **پیمایش** برای همسایگی V می‌گوئیم. (یادآور می‌شویم که بایستی V بصورت $\tilde{V} \cap X$ قابل بیان باشد، که $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}^n$ است.) به دیفئومورفیسم وارون $\phi^{-1} : V \longrightarrow U$ یک دستگاه مختصات بر V می‌گوئیم. هنگامی که نگاشت ϕ^{-1} را بصورت مختصاتی $\phi^{-1} = (x_1, \cdots, x_k)$ می‌نویسیم، k تابع هموار x_1، ... و x_k بر V را توابع مختصاتی می‌نامیم. (برخی اوقات، مایلیم که $(x_1, \cdots, x_k)$ را «مختصات موضعی» روی V گفته و هر نقطهٔ نوعی از V را به صورت $(x_1, \cdots, x_k)$ بنویسیم. که این وقتی میسر است که k–تایی توابع مختصاتی $(x_1, \cdots, x_k)$ را برای یکی گرفتن V با U بکار ببریم، و یک نقطه $v \in V$ را با مختصاتش $(x_1(v), \cdots, x_k(v)) \in U$ یکی بگیریم. اما، در آخر، وقتی که از مختصات در فضای اقلیدسی صحبت می‌کنیم، جداً برایمان ابهام پیش می‌آید.) k بعد منیفلد X را با نماد $\dim X$ نمایش می‌دهیم.

بعنوان مثال، می‌خواهیم نشان دهیم که دایره

$$\mathbb{S}^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

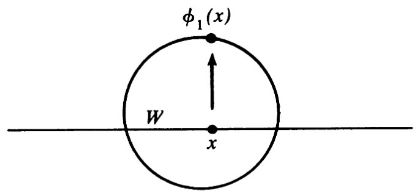
منیفلدای یک–بعدی است. ابتدا فرض می‌کنیم که (x, y) در نیم دایرهٔ بالایی که در آن $0 < y$ قرار داشته باشد. در این صورت $\phi_1(x) = (x, \sqrt{1 - x^2})$ بازهٔ باز $W = (-1, 1)$ را بصورت دو سویی بروی نیم دایرهٔ بالایی می‌نگارد و به وضوح هموار است؛ چرا که، به نگاشتی از کل $\mathbb{R}^2$ بتوی $\mathbb{R}^1$ قابل توسیع است. از این جهت ϕ_1 یک پیمایش است. پیمایش دیگر از نیم دایرهٔ پائینی که در آن $0 > y$ است، به صورت مشابه بشکل $\phi_2(x) = (x, -\sqrt{1 - x^2})$ تعریف می‌گردد. این دو نگاشت پیمایشهایی موضعی برای کل

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

$\mathbb{S}^1$ بجز دو نقطهٔ محوری $(1,0)$ و $(-1,0)$ تشکیل می‌دهند. برای پوشاندن این دو نقطه، از دو نگاشت

$$\phi_4(y) = (-\sqrt{1-y^2}, y) \quad \text{و} \quad \phi_3(y) = (\sqrt{1-y^2}, y)$$

که W را بروی نیمدایرهٔ سمت راست و سمت چپ می‌نگارند استفاده می‌کنیم. پس به این صورت نشان دادیم که دایره یک منیفلد یک–بعدی است که توسط چهار پیمایش پوشیده می‌شود. انجام این کار با دو پیمایش نیز کار دشواری نیست. (آیا می‌توانید نشان دهید که کل دایره را توسط تنها یک نگاشت نمی‌تواند پوشانید؟) با استفاده از همین استدلال خیلی کلیتر، می‌توان نشان داد که n–کرهٔ در $\mathbb{R}^{n+1}$، یعنی $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$، یک منیفلد n–بعدی است. (در اینجا $|x|$ بیانگر نرم معمولی $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2}$ است.) استفاده از ضرب دکارتی، یکی از روشهای مفید برای ساختن منیفلدهای



شکل ۱.۵: پیمایش دایره

جدید از روی قبلی‌ها است. فرض کنید که X و Y دو منیفلد به ترتیب در $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ باشند، در این صورت $X\times Y$ زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ می‌باشد. اگر $\dim X = k$ و $x \in X$، آنگاه یک مجموعه‌ی باز $W \subset \mathbb{R}^k$ و یک پیمایش موضعی $\phi : W \longrightarrow X$ حول x می‌توانیم بیابیم. به صورت مشابه، اگر $\dim Y = \ell$ و $y \in Y$، آنگاه یک مجموعه‌ی باز $U \subset \mathbb{R}^\ell$ و یک پیمایش موضعی $\psi : U \longrightarrow Y$ حول $y \in Y$، موجود است. به این ترتیب، نگاشت $\phi\times\psi : W\times U \longrightarrow X\times Y$ را با فرمول $(\phi\times\psi)(w,u) := (\phi(w), \psi(u))$ تعریف می‌کنیم.

البته، $W\times U$ در $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell = \mathbb{R}^{k+\ell}$ باز می‌باشد، و به راحتی می‌شود تحقیق کرد که $\phi\times\psi$ یک پیمایش موضعی حول (x,y) از $X\times Y$ می‌باشد. تحقیق مطمئن این مطلب، در اصل نشان دادن این موضوع است که $(\phi\times\psi)^{-1}$ نگاشتی هموار بر مجموعهٔ نه لزوماً باز $X\times Y \in \mathbb{R}^{m+n}$ می‌باشد). چون این نگاشت یک پیمایش موضعی حول نقطه‌ای دلخواه $(x,y) \in X\times Y$ است، ثابت کرده‌ایم که:

قضیه. اگر X و Y منیفلد باشند، آنگاه $X\times Y$ نیز منیفلد می‌باشد، و داریم

$$\dim X\times Y = \dim X + \dim Y. \qquad (۱.۱)$$

اصطلاح مفید دیگری را نیز در اینجا بیان می‌کنیم. اگر X و Z هر دو در $\mathbb{R}^n$ منیفلد باشند و $Z \subset X$، آنگاه گفته می‌شود که Z یک **زیرمنیفلد** از X است. بخصوص، خود X یک زیرمنیفلد $\mathbb{R}^n$ است. هر زیر مجموعهٔ بازی از X یک زیرمنیفلد X می‌باشد.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

بایستی خواننده از این نکته آگاه باشد که برخلاف نویسندگان راحت طلب که اغلب صفت هموار را در مورد نگاشتها حذف می‌کنند، ما صفت همواری را هیچگاه بدون اشاره در نظر نمی‌گیریم.

تمرینات

۱. اگر $k < \ell$، آنگاه $\mathbb{R}^k$ را به صورت زیر مجموعه $(a_1, \cdots, a_k, 0, \cdots, 0)$ در $\mathbb{R}^\ell$ می‌توان بیان نمود. نشان دهید که توابع هموار بر $\mathbb{R}^k$، وقتی که بعنوان زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^\ell$ در نظر گرفته شوند، با همواری به معنی معمولی‌اش یکی است.

۲*. فرض کنید X زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ و Z زیر مجموعه‌ای از X باشد. نشان دهید که تحدید هر نگاشت هموار بر X، به روی زیر مجموعهٔ Z، نگاشتی هموار بر Z می‌باشد.

۳*. گیریم $X \subset \mathbb{R}^n$، $Y \subset \mathbb{R}^m$ و $Z \subset \mathbb{R}^L$ زیر مجموعه‌هایی دلخواه بوده و نیز $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$ نگاشتهایی هموار باشند. در این صورت، ترکیب $g \circ f : X \longrightarrow Z$ هموار است. اگر f و g دیفئومورفیسم باشند، آنگاه $g \circ f$ نیز خواهد بود.

۴. (الف) گیریم B_k گوی باز $\{x : |x| < a\}$ در $\mathbb{R}^k$ باشد. ($|x|^2 := \sum x_i^2$) نشان دهید که نگاشت $x \mapsto \frac{ax}{\sqrt{a^2 - |x|^2}}$ یک دیفئومورفیسم از B_k بروی $\mathbb{R}^k$ است. [راهنمایی: وارونش را مستقیماً محاسبه کنید.]

(ب) فرض کنید که X منیفلدای $k-$بعدی باشد. نشان دهید که هر نقطهٔ در X دارای همسایگی‌ای دیفئومورف با کل $\mathbb{R}^k$ است. پس، پیمایش موضعی را معمولاً می‌توان چنان اختیار نمود که دامنه‌اش کل $\mathbb{R}^k$ باشد.

۵*. نشان دهید که هر زیر فضای برداری $k-$بعدیِ V از $\mathbb{R}^n$ یک منیفلد دیفئومورف با $\mathbb{R}^k$ می‌باشد، و همهٔ نگاشتهای خطی روی V هموارند. اگر $\phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow V$ یکریختیِ خطی باشد، در این صورت توابع مختصاتی متناظر تابعی‌های خطی روی V هستند. این توابع را مختصات خطی می‌نامند.

۶. لزومی ندارد که هر نگاشت دوسویی بین منیفلدها، دیفئومورفیسم باشد. در واقع، به عنوان مثال $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = x^3$ مثالی از آن است.

۷. ثابت کنید که اجتماع دو محور مختصاتی در $\mathbb{R}^2$ منیفلد نیست. [راهنمایی: هنگامی که از یک همسایگی از $(0,0)$ خود این نقطه برداشته می‌شود، چه رخ می‌دهد؟]

۸. ثابت کنید که **هذلولی‌گون یک پارچه** با تعریف $x^2 + y^2 - z^2 = a$ در $\mathbb{R}^3$ که $0 < a$، منیفلد است. چرا $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ منیفلد نیست؟

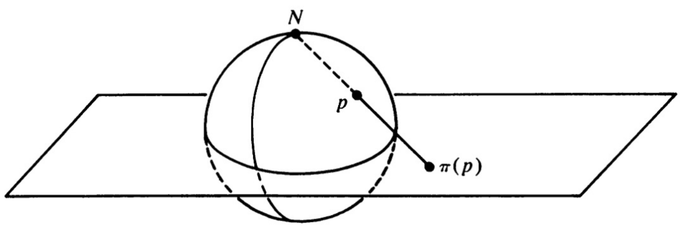
۹. با معرفی پیمایشهای کافی و کامل برای پوشاندن کل $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$، نشان دهید که $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ منیفلد است.

۱۰. **چنبره**، زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ است که به فاصلهٔ b از دایرهٔ به شعاع a و مرکز در مبداء در صفحهٔ xOy قرار دارند و $0 < b < a$. نشان دهید چنبره منیفلدای دو بعدی است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۱۱. نشان دهید که k-کره را با تنها یک پیمایش نمی‌توان پیمایش نمود. [راهنمایی: $\mathbb{S}^k$ فشرده است.]

۱۲*. **تصویر گنجنگاری،** π نگاشتی از کرهٔ سفته شدهٔ $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ بروی $\mathbb{R}^2$ است، که N قطب شمال آن با مختصات $(0,0,1)$ است. برای هر $p \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ ، تعریف می‌کنیم: $\pi(p)$ نقطه‌ای از صفحهٔ xOy است که محل برخورد خط گذرنده از N و p با صفحهٔ xOy می‌باشد. (به شکل ۶.۱ توجه شود.) ثابت کنید که $\pi : \mathbb{S}^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ دیفئومورفیسم است. [راهنمایی: برای این منظور π را صراحتاً بر حسب مختصات بنویسید و آن را برای π^{-1} حل کنید.] توجه کنید که اگر p در نزدیکی N باشد، آنگاه $|\pi(p)|$ بزرگ است. پس، استفاده از π این امکان را به ما می‌دهد که $\mathbb{S}^2$ را به عنوان یک کپی از $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیریم که با افزودن نقطه‌ای در بینهایت فشرده شده است. چنانچه در تصویر گنجنگاری بجای قطب شمال از قطب جنوب استفاده کنیم، $\mathbb{S}^2$ را توسط دو پیمایش موضعی می‌توان پوشاند.



شکل ۶.۱: تصویر گنجنگاری

۱۳*. با تعمیم نگاشت گنجنگاری، یک دیفئومورفیسم از $\mathbb{S}^k - \{N\}$ بروی $\mathbb{R}^k$ تعریف کنید.

۱۴*. اگر $f : X \longrightarrow X'$ و $g : Y \longrightarrow Y'$ نگاشتهایی هموار باشند، در این صورت، نگاشت حاصلضرب $f \times g : X \times Y \longrightarrow X' \times Y'$ را به صورت $(f \times g)(x,y) := (f(x), g(y))$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که $f \times g$ هموار است.

۱۵. نشان دهید که نگاشت تصویر از $X \times Y$ به X، که (x,y) را به x می‌نگارد، هموار است.

۱۶*. قطر $\triangle$ در $X \times X$ را مجموعهٔ همهٔ نقاط به شکل (x,x) از $X \times X$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که $\triangle$ با X دیفئومورف است. پس، اگر X منیفلد باشد، آنگاه $\triangle$ نیز منیفلد است.

۱۷*. نمودار تابع $f : X \longrightarrow Y$ زیر مجموعهٔ $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \ : \ x \in X\}$ از $X \times Y$ است. $F : X \longrightarrow \Gamma_f$ را به صورت $F(x) := (x, f(x))$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که اگر f هموار باشد، آنگاه F دیفئومورفیسم است. پس، اگر X منیفلد باشد، آنگاه Γ_f نیز منیفلد است. (توجه شود که در مورد تابع همانی: $\triangle = \Gamma$.)

۱۸*. (الف) تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ یکی از توابع بسیار مفید است. ثابت کنید f هموار است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

(ب) نشان دهید که $g(x) := f(x-a)f(b-x)$تابعی هموار بوده و بر بازهٔ (a,b) مثبت و در سایر جاها صفر می‌باشد. (در اینجا فرض شده است که $a<b$.) در این صورت

$$h(x) := (\mathrm{Int}_{-\infty}^{x} g(x)\,dx) \div (\mathrm{Int}_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx)$$

تابعی هموار است که برای $x \leq a$، $h(x) = 0$، برای $x \geq b$، $h(x) = 1$ و بعلاوه به ازای هر $x \in (a,b)$ دلخواه، $0 < h(x) < 1$.

(ج) حال تابعی هموار بر $\mathbb{R}^k$ بسازید که روی گوی باز به شعاع a برابر یک است و در خارج گوی باز به شعاع b صفر است و در نقاط بینابین اکیداً بین صفر و یک می‌باشد. (در اینجا $0<a<b$.)

بخش ۲.۱ مشتق و مماس

با یادآوری برخی احکام لازم از حساب دیفرانسیل شروع می‌کنیم. فرض کنید f نگاشتی هموار از مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}^n$ بتوی $\mathbb{R}^m$ است و x نقطه‌ای دلخواه در دامنهٔ آن می‌باشد. در این صورت، برای هر بردار $h \in \mathbb{R}^n$، مشتق f در نقطهٔ x و در امتداد h، به صورت حد

$$df_x(h) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

تعریف می‌گردد. چنانچه x را ثابت بگیریم، با متناظر قرار دادن مشتق امتدادی $df_x(h) \in \mathbb{R}^m$ به هر بردار مفروض $h \in \mathbb{R}^n$، تابعی به صورت $df_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تعریف می‌گردد. توجه کنید که این نگاشت، که ما آنرا مشتق f در x می‌نامیم، بر کل $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌گردد، حتی اگر f بر کل $\mathbb{R}^n$ تعریف نشده نباشد.

در درس حساب دیفرانسیل اثبات می‌گردد که نگاشت مشتق $df_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ خطی است (به عنوان مثال، به کتاب اسپیواک [۲] نگاه کنید). بنابراین، df_x را به عنوان نگاشتی خطی بر اساس پایه‌های استاندارد (در $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$) به صورت یک ماتریس می‌توان نشان داد. در واقع، اگر f را به صورت $f(y) = (f_1(y), \cdots, f_m(y))$ بنویسیم، آنگاه این ماتریس دقیقاً عبارت از ماتریس ژاکوبی f در x خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

با اینکه مشتق f را بر اساس $m \times n$ مشتق جزئی‌اش می‌توان بیان نمود، تصور df_x به عنوان نگاشتی خطی $df_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ طبیعی‌تر و زیباتر می‌باشد. یکی از دلایل این موضوع، کارایی آن در بیان ساده‌تر قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق است.

فرض کنید که $U \subseteq \mathbb{R}^n$ و $V \subseteq \mathbb{R}^m$ مجموعه‌هایی باز بوده، و $f : U \longrightarrow V$ و $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ توابعی هموار باشند. در این صورت، قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق چنین می‌گوید که بازاء هر $x \in U$ دلخواه،

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

پس اگر دنباله‌ای به صورت

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f\circ g"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{R}^\ell \\ & V \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

داشته باشیم، نمودار مشتقهای

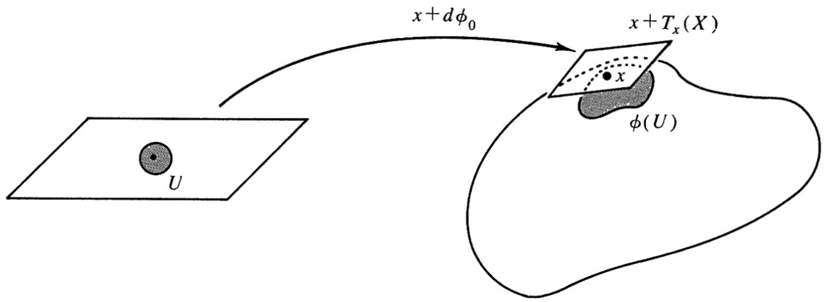
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[rr, "d(f\circ g)_x"] \arrow[dr, "df_x"'] & & \mathbb{R}^\ell \\ & \mathbb{R}^m \arrow[ur, "dg_{f(x)}"'] & \end{tikzcd}$$

تعویض پذیر است. (یک نمودار از نگاشتها را در صورتی تعویضپذیر گوئیم که هر دو دنباله از توابعی که شروع و انتهایشان مجموعه‌هایی همانند است، یک نگاشت را ترتیب دهند.)
توجه داشته باشید که اگر خود نگاشت $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ خطی باشد $f = L$، در این صورت، به ازاء جمیع $x \in U$ ها $df_x = L$. بخصوص، مشتق نگاشت شمول از U بتوی $\mathbb{R}^n$، در هر نقطه $x \in U$ ای برابر تبدیل خطی همانی $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.
مشتق یک نگاشت، بهترین تقریب خطیِ آن است . نتیجه اینکه با بهره‌گیری از مشتق، فضایی خطی را می‌توانیم مشخص کنیم که بهترین تقریب منیفلد X در نقطهٔ x می‌باشد. فرض کنید X در $\mathbb{R}^n$ جا داشته و $\phi : U \longrightarrow X$ یک پیمایش موضعی به گرد x باشد، که U مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}^k$ است، و برای راحتی در کار فرض کنیم $x = \phi(0)$. در این صورت، بهترین تقریب خطی $\phi : U \longrightarrow X$ در نقطهٔ 0 عبارت است از نگاشت

$$u \mapsto \phi(0) + d\phi_0(u) = x + d\phi_0(u).$$

فضای مماس به X در x را نگارهٔ نگاشت $d\phi_0 : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم. پس فضای مماس، که ما آنرا با $T_x(X)$ نمایش می‌دهیم، زیر فضایی (خطی) برداری از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد که انتقال یافتهٔ موازی آن به اندازهٔ x، یعنی $x + T_x(X)$. $x + T_x(X)$ نزدیکترین تقریب تخت X در حوالی x می‌باشد (به شکل ۱.۷ توجه شود). بر اساس این تعریف، بردار مماس به $X \subseteq \mathbb{R}^n$ در نقطهٔ $x \in X$ نقطه‌ای است مانند v از $\mathbb{R}^n$ که در زیر فضای برداری $T_x(X)$ از $\mathbb{R}^n$ قرار دارد. با این حال، طبیعی است که جهت هندسی v را به صورت پیکانی که از x به $x + v$ رفته نمایش دهیم. پیش از ادامهٔ بحث، بایستی به ابهامی که در تعریف $T_x(X)$ وجود دارد پاسخ دهیم: آیا با انتخاب پیمایش موضعی دیگر به همین فضای مماس می‌رسیم؟ فرض کنید $\psi : V \longrightarrow X$ انتخابی دیگر با فرض $x = \psi(0)$ باشد. با کوچک کردن هر دوی U و V (در صورت لزوم)، می‌توانیم فرض کنیم که $\phi(U) = \psi(V)$. در این صورت، نگاشت $h = \psi^{-1} \circ \phi : U \longrightarrow V$ یک دیفئومورفیسم است. می‌توان نوشت $\phi = \psi \circ h$ و از آن مشتق گرفت: $d\phi_0 = d\psi_0 \circ dh_0$. این رابطه ایجاب می‌کند که نگارهٔ $d\phi_0$ مشمول در نگارهٔ $d\psi_0$ باشد. بالعکس، با تعویض نقش ϕ و ψ، نتیجهٔ عکس

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۷.۱: تقریب خطی یک نگاشت

حاصل می‌شود. بنابراین، $d\phi_0(\mathbb{R}^k) = d\psi_0(\mathbb{R}^k)$ و $T_x(X)$ خوشتعریف است. (برای مشاهدهٔ تعبیری دیگر از فضاهای مماس به تمرین ۱۲ از مجموعه تمرینات پایان این بخش رجوع کنید.)

همان طور که حدس می‌زنید، بعد فضای برداری $T_x(X)$، برابر با k، بعد منیفلد X است. برای اثبات این مطلب، از همواری وارون ϕ^{-1} استفاده می‌کنیم. با انتخاب یک مجموعهٔ باز W در $\mathbb{R}^n$ و یک نگاشت هموار $\Phi' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ که توسیع ϕ^{-1} است شروع می‌کنیم. در این صورت، $\Phi' \circ \phi$ نگاشت همانی U است. اکنون، قاعدهٔ زنجیری مشتق ایجاب می‌نماید که ترکیب دنبالهٔ تبدیلات خطی

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{d\phi_0} T_x(X) \xrightarrow{d\Phi'_0} \mathbb{R}^k$$

نگاشت همانی $\mathbb{R}^k$ باشد. نتیجه اینکه $d\phi_0 : \mathbb{R}^k \longrightarrow T_x(X)$ یکریختی است، و بنابراین، بایستی $\dim T_x(X) = k$.

اکنون قادر به تعیین بهترین تقریب خطی برای یک نگاشت هموار بین دو منیفلد دلخواه مثل $f : X \longrightarrow Y$ در یک نقطه مثل $x \in X$ هستیم. اگر $f(x) = y$، آنگاه مشتق مورد نظر df_x بایستی تبدیلی خطی میان فضاهای مماس باشد، به بیان دیگر $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y)$. در تعمیم تعریف مشتق دو نیاز احساس می‌شود. اولاً، انتظار داریم مشتق جدید در حالت نگاشتهای بین فضاهای اقلیدسی با مشتق معمولی که می‌شناسیم مطابقت داشته باشد. ثانیاً، توقع داریم که قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق برقرار باشد. خواهید دید که تنها یک تعریف با این نیازها سازگار است.

فرض کنیم $\phi : U \longrightarrow X$ منیفلد X را حول x و $\psi : V \longrightarrow Y$ منیفلد Y را حول y پیمایش کنند، $U \subset \mathbb{R}^k$، $V \subset \mathbb{R}^\ell$، $\phi(0) = x$ و $\psi(x) = y$ اگر U باندازهٔ کافی کوچک باشد، در این صورت می‌توانیم مربع تعویضپذیر به شرح زیر را بسازیم:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "h=\psi^{-1}\circ f\circ\phi"'] & V \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

می‌دانیم که $d\phi_0$، $d\psi_0$، و dh_0 باید وجود داشته باشند، و قاعده زنجیره‌ای مشتق تضمین می‌کند که پس از مشتقگیری از توابع در نمودار قبلی، نمودار تعویضپذیر به شرح زیر از نگاشتهای خطی حاصل شود:

$$\begin{array}{ccc} T_x(X) & \xrightarrow{df_x} & T_y(Y) \\ \uparrow{\scriptstyle \phi} & & \uparrow{\scriptstyle d\psi_0} \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow[dh_0]{} & \mathbb{R}^\ell \end{array}$$

چون $d\phi_0$ یکریختی است، تنها یک تعریف مجاز برای df_x موجود است، یعنی

$$df_x := d\psi_0 \circ dh_0 \circ d\phi_0^{-1}$$

البته، روشن است که برای بهره‌گیری از این تعریف df_x، بایستی تحقیق کنیم که آن از انتخاب پیمایشهای بخصوص ϕ و ψ مورد استفاده، مستقل می‌باشد. این بررسی درست شبیه آنچه که در مورد تعریف $T_x(X)$ برای نشان دادن عدم وابستگی‌اش به پیمایش بکار رفت، می‌باشد. با نوشتن محاسبات مربوط برای خود، از اطلاعاتتان مطمئن بشوید.

آیا تعمیم ما از مشتق به حالت نگاشتهای بین منیفلدهای دلخواه حقیقتاً همانطوری که ادعا کردیم قاعده زنجیری را حفظ کرده است؟ (بهتر است، برای رفع ابهامات موجود، این امر را نشان دهیم.) گیریم $g : Y \longrightarrow Z$ نگاشت هموار دیگری باشد، و $\eta : W \longrightarrow Z$ منیفلد Z را حول $z = g(y)$ پیمایش کند. در اینجا هم $W \subset \mathbb{R}^m$ و $z = \eta(0)$. در این صورت، از نمودار تعویضپذیر

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \uparrow{\scriptstyle \phi} & & \uparrow{\scriptstyle \psi} & & \uparrow{\scriptstyle \eta} \\ U & \xrightarrow[h=\psi^{-1}\circ f\circ\phi]{} & V & \xrightarrow[j=\eta^{-1}\circ f\circ\psi]{} & W \end{array}$$

نمودار مربع شکل

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g\circ f} & Z \\ \uparrow{\scriptstyle \phi} & & \uparrow{\scriptstyle \eta} \\ U & \xrightarrow[j\circ h]{} & W \end{array}$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

را نتیجه می‌گیریم. پس، بنابه تعریف، داریم

$$d(g\circ f)_x = d\eta_0\circ d(j\circ h)_0\circ d\phi_0^{-1}.$$

بنابه قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق برای نگاشتهای بین زیر مجموعه‌های باز فضاهای اقلیدسی، داریم $d(j\circ h)_0 = (dj)_0\circ(dh)_0$. از این روی

$$\begin{aligned} d(g\circ f)_x &= \left(d\eta_0\circ dj_0\circ d\phi_0^{-1}\right)\circ\left(d\psi_0\circ dh_0\circ d\phi_0^{-1}\right)\\ &= dg_y\circ df_x \end{aligned}$$

و ثابت کردیم که

قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق. اگر $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ نگاشتهایی بین منیفلدها باشند، آنگاه

$$d(g\circ f)_x = dg_{f(x)}\circ df_x.$$

تمرینات

۱*. اگر X زیرمنیفلدای از Y بوده و $i:X\longrightarrow Y$ نگاشت شمول X باشد، تحقیق کنید که di_x نگاشت شمول $T_x(X)$ در $T_x(Y)$ است.

۲*. در صورتی که U زیر مجموعه‌ای باز از منیفلد X باشد، تحقیق کنید که به ازای هر نقطهٔ $x\in U$ ای $T_x(U)=T_x(X)$.

۳. گیریم V زیرفضایی برداری از $\mathbb{R}^n$ باشد. نشان دهید که به ازای هر نقطهٔ $x\in V$ ای $T_x(V)$ با V برابر است.

۴*. فرض کنید $f:X\longrightarrow Y$ دیفئومورفیسم باشد. ثابت کنید که در هر نقطهٔ $x\in X$ ای df_x یکریختی بین فضاهای برداری است.

۵. ثابت کنید که اگر $k\neq\ell$، آنگاه $\mathbb{R}^k$ و $\mathbb{R}^\ell$ دیفئومورف نیستند.

۶. فضای مماس به نقطهٔ $(a,b)\in\mathbb{S}^1$ زیر فضایی یک بعدی از $\mathbb{R}^2$ است. زیر فضا را بر حسب a و b به صورت صریح محاسبه کنید. [به وضوح، فضای تولید شده توسط $(-b,a)$ جواب است. این را ثابت کنید.]

۷. شبیه مسألهٔ ۶، پایه‌ای برای $T_p(\mathbb{S}^2)$ در نقطهٔ دلخواه $p=(a,b,c)$ بدست آورید.

۸. فضای مماس به هذلولی‌گون یکپارچهٔ $x^2+y^2-z^2=a$ در نقطهٔ $(\sqrt{a},0,0)$ چیست؟ (فرض شود $a>0$).

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۹*. (الف) نشان دهید که اگر X و Y منیفلدهای دلخواهی باشند، آنگاه
$$T_{(x,y)}(X\times Y)=T_x(X)\times T_y(Y)$$

(ب) گیریم $f:X\times Y\longrightarrow X$ نگاشت تصویر $(x,y)\mapsto x$ باشد. نشان دهید
$$df_{(x,y)}:T_x(X)\times T_y(Y)\longrightarrow T_x(X)$$
نیز نگاشت تصویر $(v,w)\mapsto v$ است.

(ج) ضمن ثابت نگاه داشتن $y\in Y$، نگاشتی یکبیک چون $f:X\longrightarrow X\times Y$ با ضابطهٔ $f(x)=(x,y)$ را تعریف می‌کنیم. نشان دهید $df_x(v)=(v,0)$.

(د) گیریم $f:X\longrightarrow X'$ و $g:Y\longrightarrow Y'$ دو نگاشت هموار دلخواهند. ثابت کنید که در این صورت $d(f\times g)_{(x,y)}=df_x\times dg_y$.

۱۰*. (الف) گیریم $f:X\longrightarrow X\times X$ نگاشت $f(x)=(x,x)$ باشد. تحقیق کنید که در این صورت $df_x(v)=(v,v)$.

(ب) در صورتی که $\triangle$ قطر $X\times X$ باشد، نشان دهید که فضای مماس آن $T_{(x,x)}(\triangle)$ نیز قطر $T_x(X)\times T_x(X)$ است.

۱۱*. (الف) فرض کنید $f:X\longrightarrow Y$ نگاشتی هموار بوده و $F:X\longrightarrow X\times Y$ نگاشت با ضابطهٔ $F(x)=(x,f(x))$ باشد. نشان دهید $dF_x(v)=(v,df_x)$.

(ب) ثابت کنید فضای مماس به $\mathrm{graph}(f)$ در نقطهٔ $(x,f(x))$ عبارت است از نمودار نگاشت $df_x:T_x(X)\longrightarrow T_{f(x)}(Y)$.

۱۲*. منظور از یک خم در منیفلد X، نگاشتی هموار چون $t\mapsto c(t)$ از یک بازه از $\mathbb{R}^1$ به توی X می‌باشد. بردار سرعت خم c در زمان t_0 (که آن را با نماد $\dfrac{dc}{dt}(t_0)$ نشان می‌دهیم) به صورت بردار $dc_{t_0}(1)\in T_{t_0}(X)$ تعریف می‌شود که $x_0=c(t_0)$ و $dc_{t_0}:\mathbb{R}\longrightarrow T_{x_0}(X)$ نگاشت مشتق است. نشان دهید که اگر $X=\mathbb{R}^k$ و $c(t)=(c_1(t),\cdots,c_k(t))$، در این صورت $\dfrac{dc}{dt}(t_0)=(c_1'(t),\cdots,c_k'(t))$. ثابت کنید که هر بردار در $T_x(X)$ بردار سرعت یک خم در X است و بالعکس. [راهنمایی: اگر $X=\mathbb{R}^k$، کار راحت است. اکنون X را پیمایش کنید.]

بخش ۳.۱ قضیهٔ تابع وارون و ایمرشن

پیش از آنکه به بیان توپولوژی منیفلدها بطور جدی بپردازیم، بایستی رفتار موضعی نگاشتهای هموار بین آن اشیاء را مطالعه کنیم. شاید بهترین دلیل برای اینکه چرا در توپولوژی دیفرانسیل اغلب با نگاشتهای هموار کار می‌شود (نه مثل در سایر بخشهای توپولوژی، که با نگاشتهای پیوسته عمل می‌شود) این باشد که رفتار موضعی این گونه نگاشتها به توسط مشتقشان در حد دیفئومورفیسم کاملاً مشخص می‌گردد. توصیف این موضوع اولین هدف اصلی در فصل اول است.

فرض کنید X و Y دو منیفلد هموار و همبعد باشند. شاید ساده‌ترین رفتار نگاشت هموار $f:X\longrightarrow Y$ حول نقطهٔ بخصوص $x\in X$، این باشد که f همسایگی‌ای از x را به شکل دیفئومورف به همسایگی‌ای

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

از $y = f(x)$، بنگارد. شرط لازم برای اینکه f در x دیفئومورفیسم موضعی باشد، آن است که نگاشت مشتق آن $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y)$ یکریختی باشد. (به تمرین ۴ از بخش ۲ توجه شود.) این موضوع که شرط مذکور در حیطهٔ جبر خطی می‌باشد، کلید فهم نکتهٔ فوق الذکر است.

قضیهٔ تابع وارون. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی هموار بوده و مشتق آن df_x در نقطهٔ x یکریختی باشد. در این صورت، f در x دیفئومورفیسم موضعی است.

قضیهٔ تابع وارون، یکی از احکام واقعاً جذاب و با اهمیت در آنالیز است. مشتق df_x تنها یک نگاشت خطی است، که آن را به کمک ماتریسی با درآیه‌های حقیقی می‌توان نمایش داد. این نگاشت خطی نیز درست در صورتی ناتکین است که دترمینان ماتریس نمایش آن صفر نباشد. بنابراین، قضیهٔ تابع وارون چنین اذعان می‌دارد که سئوال به ظاهر بسیار ظریف و حساس مبنی بر اینکه چه موقع f یک همسایگی از x را بطور دیفئومورف بروی یک همسایگی از y می‌نگارد، به روشی ساده به بررسی اینکه تنها عددی (دترمینان df_x) صفر است یا خیر، تبدیل می‌گردد.

احتمالاً اثباتی از قضیهٔ تابع وارون برای حالت ساده‌ای که X و Y زیر مجموعه‌های بازی از فضای اقلیدسی‌اند، را دیده‌اید. این را در هر کتاب درسی که راجع به حساب دیفرانسیل چند متغیره است (مثلاً، اسپیوک [۲]) می‌توان یافت. حکم در خصوص فضاهای اقلیدسی را با استفاده از پیمایش موضعی براحتی می‌توان به حالت منیفلدها ترجمه نمود.

خاطرنشان می‌کنیم که قضیهٔ تابع وارون اساساً یک حکم موضعی است. یعنی، اطلاعی دربارهٔ رفتار f در نزدیکی نقطهٔ x به ما می‌دهد. حتی وقتی که به ازای هر $x \in X$ ای df_x ناتکین است، نمی‌توان نتیجه گرفت که f به شکل فراگیر یک دیفئومورفیسم‌ای از X به Y است. البته، چنین نگاشتی در هر نقطهٔ $x \in X$ ای موضعاً دیفئومورفیسم است، و از این جهت به آن دیفئومورفیسم موضعی می‌گوئیم. نگاشت $f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ $f(t) = (\cos t, \sin t)$ مثالی استاندارد از یک دیفئومورفیسم موضعی است که دیفئومورفیسم فراگیر نمی‌باشد.

قضیهٔ تابع وارون را با استفاده از مختصات موضعی بشکل موفقی به صورت دیگری نیز، می‌توان فرمولبندی نمود: اگر df_x یکریختی باشد، در این صورت پیمایشهای موضعی به ترتیب به گرد x و y چنان می‌توان یافت که f نسبت به آنها به صورت تابع همانی نمود می‌کند. یعنی، f در مختصات موضعی به شکل $f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)$ است. به بیان دیگر، پیمایشهای موضعی $\phi : U \longrightarrow X$ و $\psi : U \longrightarrow Y$ با دامنهٔ باز $U \subseteq \mathbb{R}^k$ چنان وجود دارند که دیاگرام زیر تعویضپذیر است:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\text{همانی}"'] & U \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

بصورت کلی، دو نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ و $f' : X' \longrightarrow Y'$ را در صورتی **هم‌ارز** گوئیم که دیفئومورفیسمهای

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

α و β چنان وجود داشته باشند که دیاگرام زیر تعویضپذیر باشد:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X' \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

تعبیری دیگر برای بیان این موضوع وجود دارد که همین معنی را دارد: f و f' در حد دیفئومورفیسم یکی هستند. بر طبق این اصطلاح، قضیهٔ تابع وارون چنین اذعان می‌دارد که اگر df_x یکریختی باشد، آنگاه f در یک همسایگی از x با نگاشت همانی هم‌ارز است. روشن است که شرط لازم و کافی برای اینکه یک نگاشت خطی با نگاشت همانی هم‌ارز باشد، این است که یکریختی باشد. پس، باز هم می‌توان تعبیر دیگری برای قضیهٔ تابع وارون بدست آورد: f در صورتی در x، موضعاً با نگاشت همانی هم‌ارز است که df_x با نگاشت همانی هم‌ارز باشد.

اما، برای استفاده از قضیهٔ تابع وارون باید بعد X و Y یکی باشد. هنگامی که $\dim X < \dim Y$، بهترین رفتار موضعی یک نگاشت چه می‌تواند باشد؟ از نقطه نظر دیفرانسیلی، می‌توان انتظار داشت که $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y)$ یکبیک باشد. اگر چنین باشد، گفته می‌شود f در x **ایمرشن** است. اگر $k \leq \ell$، **ایمرشن قانونی از** $\mathbb{R}^k$ **به** $\mathbb{R}^\ell$ نگاشتی از $\mathbb{R}^k$ به $\mathbb{R}^\ell$ است که $(a_1 \cdots, a_k)$ را به $(a_1 \cdots, a_\ell, 0, \cdots, 0)$ می‌نگارد. در واقع، این نگاشت در حد دیفئومورفیسم تنها ایمرشن موضعی ممکن است.

قضیهٔ ایمرشن موضعی. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ در x ایمرشن است و همچنین $y = f(x)$. در این صورت، مختصات موضعی بترتیب به گرد x و y چنان وجود دارند که نسبت به آنها می‌توان نوشت $f(x_1, \cdots, x_k) = (x_1, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)$. به بیان دیگر، f در نزدیکی x با ایمرشن قانونی موضعاً هم‌ارز است.

اثبات: با انتخاب پیمایشهای موضعی ϕ و ψ که دیاگرام

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "g"'] & V \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} \phi(0) &= x \\ \psi(0) &= y \end{aligned}$$

را تعویضپذیر می‌سازند و $\phi(0) = x$ و $\psi(0) = y$ آغاز می‌کنیم. برای این منظور g را طوری انتخاب می‌کنیم که قضیهٔ تابع وارون را بتوان بکار برد. وقتی $dg_0 : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ یکبیک است، با تعویض پایه در $\mathbb{R}^\ell$ می‌توانیم فرض کنیم که ماتریس $\ell \times k$ نمایش آن به شکل $\left(\frac{I_k}{0}\right)$ است، که در آن I_k ماتریس همانی $k \times k$ می‌باشد. حال نگاشت $G : U \times \mathbb{R}^{\ell-k} \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ را با ضابطهٔ $G(x, z) = g(x) + (0, z)$ تعریف

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

می‌کنیم. G مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^\ell$ را بتوی $\mathbb{R}^\ell$ می‌نگارد، و ماتریس نمایش dG_0 نگاشت همانی I_ℓ است. بنابراین، قضیهً تابع وارون ایجاب می‌کند که G در 0 یک دیفئومورفیسم موضعی از $\mathbb{R}^\ell$ به $\mathbb{R}^\ell$ باشد. توجه شود که G را چنان تعریف نموده‌ایم که $g = G \circ \{$ ایمرشن قانونی $\}$. چون ψ و G در 0 موضعاً دیفئومورفیسم هستند، $\psi \circ G$ نیز چنین است. لذا $\psi \circ G$ را به عنوان یک پیمایش موضعی حول نقطهٔ $y \in Y$ می‌توان به شمار آورد. بعلاوه، اگر U و V را باندازهٔ کافی منقبض کنیم، به نمودار تعویضپذیر زیر می‌رسیم:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & Y \\ U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\text{ایمرشن قانونی}"'] & V \arrow[u, "\psi\circ G"'] \end{tikzcd}$$

که این همان موضوع مورد نظر ما است. □

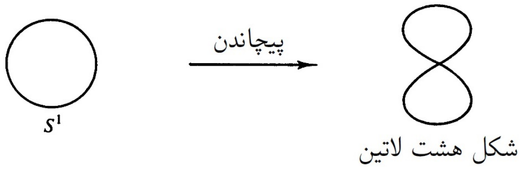
یک نتیجهٔ مفید و روشن از این قضیه چنین است: اگر f در x ایمرشن باشد، آنگاه در یک همسایگی دلخواه از x ایمرشن است.

لازم به ذکر است که شرط موضعی بودن طبیعتی اکیداً موضعی دارد. مثلاً، وقتی بعد X و Y یکی است، ایمرشن دقیقاً همان دیفئومورفیسم می‌باشد. در حالی که، دیفئومورفیسمهای واقعی بایستی هم در یک شرط دیفرانسیلی موضعی و هم در یک شرط توپولوژیکی سراسری صدق داشته باشند: می‌بایستی موضعاً دیفئومورفیسم، و نیز یک به یک و برو باشند. پس به منظور قوت بخشیدن به یک ایمرشن، برای بهره برداری از آن در توصیف خواص سراسری مورد نظرمان، می‌بایستی اطلاعات دیفرانسیلی موضعی شرایط توپولوژیک نیز اضافه کنیم.

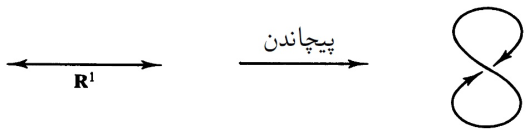
نگارهٔ ایمرشنها، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. نگارهٔ ایمرشن قانونی $\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ شیکترین مثال متصور از یک زیرمنیفلد است. هرگز، لزومی ندارد که نگارهٔ یک ایمرشن دلخواه مثل $f : X \longrightarrow Y$ زیرمنیفلدای از Y باشد. بیایید ببینیم که چرا. از قضیه ایمرشن موضعی محرز است که f هر همسایگی به اندازه کافی کوچک W از نقطه x دلخواه را به صورت دیفئومورف بروی نگاره‌اش $f(W)$ در Y تصویر می‌کند. بنابراین، هر نقطه در نگارهٔ f در زیر مجموعه‌ای پیمایش شده از $f(X)$ واقع است. آیا این تعریف منیفلد نیست؟ نه دقیقاً آن! برای منیفلد بودن $f(X)$، می‌بایستی نقاط دارای همسایگی‌های پیمایش شده باشند، در حالی که زیر مجموعه‌های $f(W)$ لزومی ندارد که در Y باز باشند.

به عنوان مثال، نگاشتی را در نظر بگیرید که دایره را ضمن پیچاندن به یک شکل هشت لاتین (شکل ۸.۱) بدل می‌کند. این یک ایمرشن از $\mathbb{S}^1$ بتوی $\mathbb{R}^2$ می‌باشد، اما نگاره‌اش یک منیفلد نیست. البته، در اینجا مشکل از آنجا ناشی شده است که ایمرشن یک به یک نیست، اما حتی نگارهٔ یک ایمرشن یک به یک هم لزومی ندارد که یک منیفلد باشد. مثلاً همین شکل هشت لاتین را به عنوان نگارهٔ ایمرشن یک به یک از $\mathbb{R}^1$ بتوی $\mathbb{R}^2$ نشان داده شده در شکل ۹.۱ تصور کرد. نمونه‌های غیر عادی‌تری را می‌توان ذکر کرد. گیریم $g : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ دیفئومورفیسم موضعی $g(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ باشد. نگاشت

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

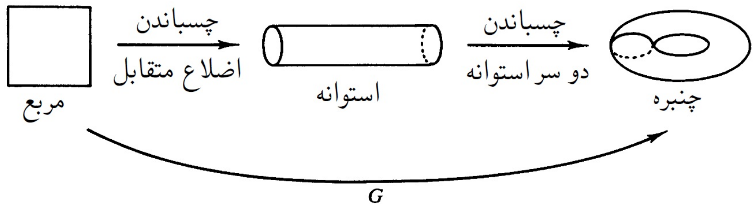


شکل ۸.۱: یک ایمرشن از $\mathbb{S}^1$ به توی $\mathbb{R}^2$



شکل ۹.۱: یک ایمرشن یکبیک از $\mathbb{R}^1$ به توی $\mathbb{R}^2$

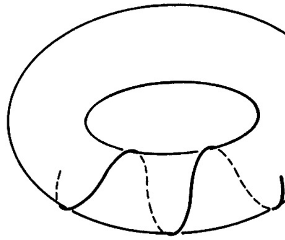
$G:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ را با ضابطهٔ $G(x,y)=(g(x),g(y))$ تعریف می‌کنیم. G یک دیفئومورفیسم موضعی از صفحه بروی چنبره می‌باشد. در واقع، با نظر کردن به G بر مربع واحد استاندارد، آنرا به منزلهٔ روش ساختن چنبره با چسباندن اضلاع متقابل مربع به هم می‌توان تصور کرد (شکل ؟؟). حال نگاشتی از $\mathbb{R}^1$ بتوی چنبره با تحدید کردن G به خط راستی که از مبدأ در $\mathbb{R}^1$ و با شیب گنگ می‌گذرد تعریف می‌کنیم. چون G یک دیفئومورفیسم موضعی است، این یک ایمرشن است که $\mathbb{R}^1$ را به گرد چنبره می‌چرخاند (شکل ؟؟). به علاوه، گنگ بودن شیب موجب می‌شود که ایمرشن یک به یک باشد و نگاره‌اش زیر مجموعه‌ای چگال از چنبره باشد!



شکل ۱۰.۱: یک ایمرشن از $\mathbb{R}^2$ به توی $\mathbb{R}^3$

آیا این عیوب نشان نمی‌دهد که ما از ترسیم نتایج سراسری از قضیه رده‌بندی موضعی ایمرشن‌هایمان راضی نیستیم؟ توجه کنید که دو ایمرشن یک به یک مطرح شده به این دلیل غریبانه عمل می‌کنند که چندین نقطهٔ «بی‌نهایت نزدیک» در $\mathbb{R}^1$ را به منطقه‌ای کوچک از نگاره می‌برند. شاید، جلوگیری از این رفتار، به اندازه کافی ایمرشن‌ها را رام کند! مشابه توپولوژی عمومی مفهوم نقاط «بی‌نهایت نزدیک» به معنی در برون یک زیر مجموعهٔ فشرده از فضایی مفروض بودن می‌باشد؛ مجموعهٔ فشرده خیلی مناسب به نظر می‌رسد. یک نگاشت $f:X\longrightarrow Y$ در صورتی سره نامیده می‌شود که پیش‌تصویر هر مجموعه فشرده در Y، در X فشرده باشد. از دید شهودی، نگاشت سره نگاشتی است که نقاط «بی‌نهایت نزدیک» در X را به نقاط «بی‌نهایت نزدیک» در Y گسیل می‌کند. یک ایمرشن یک به یک و سره را نشاننده می‌نامیم.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱.۱۱: یک ایمرشن یکبیک با برد چگال در چنبره

اکنون ضمن افزودن محدودیت‌های مناسب و سراسری توپولوژیک به شرط ایمرشن موضعی بودن، قادر به انجام تعمیم سراسری جالبی از قضیه ایمرشن موضعی هستیم.

قضیه. نشانندهٔ به شکل $f : X \longrightarrow Y$، X را به طور دیفئومورف بروی زیرمنیفلدای از Y می‌نگارد.

برهان: برای اینکه نشان دهیم $f(X)$ منیفلد است، همان طور که می‌دانید، کافی است نشان دهیم که نگاره هر مجموعه باز W از X، زیر مجموعه‌ای باز از $f(X)$ می‌باشد. در صورتیکه W در $f(X)$ باز نباشد؛ دنباله‌ای از نقاط $y_i \in f(X)$ غیر واقع در $f(W)$ چنان یافت می‌گردد که به نقطه y در $f(W)$ همگرایند. چون مجموعهٔ $\{y, y_i\}$ فشرده است، پیش‌تصویرش در X می‌بایستی فشرده باشد. هر نقطه y_i، پیش‌تصویر دقیقاً یک نقطهٔ x_i در X است، و y پیش تصویر نقطه‌ای x باید باشد که لزوماً به W متعلق است. چون $\{x, x_i\}$ فشرده است، با انتخاب یک زیر دنباله می‌توان فرض نمود که x_i ها، به نقطه $z \in X$ همگرایند. در این صورت $f(x_i) \longrightarrow f(z)$؛ بنابراین، چون $f(x_i) \longrightarrow f(x)$، یک به یک بودن f ایجاب می‌کند که $z = x$ باشد. اکنون W باز است؛ پس چون $x_i \longrightarrow x$، نتیجه می‌گیریم که برای i های بزرگ، $x_i \in W$. این مطلب با فرض ما مبنی بر اینکه $y_i \in f(W)$ در تضاد است. پس $f(X)$ لزوماً یک منیفلد می‌باشد. حال، چون می‌دانیم f یک دیفئومورفیسم موضعی از X به $f(X)$ است، تحقیق اینکه $f : X \longrightarrow f(X)$ دیفئومورفیسم می‌باشد، کار ساده‌ای است. چون f دوسویی است، وارون آن یعنی $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ نیز به عنوان یک نگاشت مجموعه‌ای، خوش تعریف است. □

البته، وقتی خود X منیفلدای فشرده است، هر نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ سره است. بنابراین در مورد منیفلدهای فشرده، نشاننده بودن درست به منزله ایمرشن یک به یک بودن می‌باشد.

تمرینات

۱. گیریم A یک نگاشت خطی از $\mathbb{R}^n$ باشد، و $b \in \mathbb{R}^n$. نشان بدهید که نگاشت $x \longrightarrow Ax + b$ وقتی و تنها وقتی دیفئومورفیسم از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ است که A ناتکین باشد.

۲. فرض کنید که Z یک زیرمنیفلد $\ell-$ بعدی از X بوده و $z \in Z$ باشد. نشان دهید که یک دستگاه مختصات موضعی $\{x_1, \cdots, x_k\}$ تعریف شده در یک همسایگی U از z در X چنان وجود دارد که $Z \cap U$ با معادلات $x_k = \cdots = x_{\ell+1} = 0$ تعریف می‌گردد.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۳. گیریم $f:\mathbb{R}^1\longrightarrow\mathbb{R}^1$ یک دیفئومورفیسم موضعی باشد. ثابت کنید که نگارهٔ f یک بازهٔ باز است و به علاوه اینکه، عملاً، f خط حقیقی $\mathbb{R}^1$ را به طور دیفئومورف بروی این بازه می‌نگارد.

۴. بر خلاف تمرین ۳،یک دیفئومورفیسم موضعی $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ چنان بسازید که یک دیفئومورفیسم بروی نگاره‌اش نباشد. [راهنمایی: با مثال برای $\mathbb{R}^1\longrightarrow\mathbb{S}^1$ شروع کنید.]

۵. ثابت کنید که هر دیفئومورفیسم موضعی $f:X\longrightarrow Y$ عملاً یک دیفئومورفیسم از X بروی زیر مجموعهٔ بازی از Y است، مشروط به اینکه f یک به یک باشد.

۶. **(الف)** اگر f و g ایمرشن باشند، نشان بدهید که $f\times g$ هم هست.

(ب) اگر f و g ایمرشن باشند، نشان بدهید که $g\circ f$ هم هست.

(ج) در صورتی که f یک ایمرشن باشد، نشان بدهید که تحدیدش به هر زیرمنیفلد از دامنه‌اش یک ایمرشن است.

(د) هنگامی که $\dim X=\dim Y$، نشان بدهید که ایمرشن‌های $f:X\longrightarrow Y$ هم زمان دیفئومورفیسم موضعی هستند.

۷. **(الف)** تحقیق کنید $y:\mathbb{R}^1\longrightarrow\mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ $g(t)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))$ یک دیفئومورفیسم موضعی است.

(ب) از تمرین ۶، نتیجه می‌گردد که $G:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ $G:=g\times g$ یک دیفئومورفیسم موضعی است. همچنین، اگر L خطی در $\mathbb{R}^2$ باشد، تحدید $G:L\longrightarrow\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ یک ایمرشن است. ثابت کنید که اگر L دارای شیب گنگ باشد، G بر L یک به یک است.

۸. تحقیق کنید که نگاشت $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ

$$t\longmapsto(\cosh(t),\sinh(t)):=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2},\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$$

یک نشاننده است. ثابت کنید که نگارهٔ آن یکی از قطعات هذلولی $x^2-y^2=1$ می‌باشد.

۹. **(الف)** گیریم x_1، . . . و x_n توابع مختصاتی استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ باشند، و X یک زیرمنیفلد k بعدی از $\mathbb{R}^n$. ثابت کنید که هر نقطهٔ $x\in X$ دارای یک همسایگی است که تحدید k تا از توابع مختصاتی x_{i_1}، . . . و x_{i_k} بر آن تشکیل یک دستگاه مختصاتی موضعی می‌دهند. [راهنمایی: گیرید e_1، . . . و e_n پایه معمولی $\mathbb{R}^n$ باشد. به عنوان لمی از جبر خطی ثابت کنید که تصویر $T_x(X)$ بروی زیر فضای تولید شده توسط e_{i_1}، . . . و e_{i_k} برای انتخابی مناسب از i_1، . . . و i_k ها دوسویی است. نشان دهید که این موجب می‌گردد که $(x_i,\cdots,x_{i_k})$ یک دیفئومورفیسم موضعی از X بتوی $\mathbb{R}^k$ در نقطهٔ x تعریف کند.]

(ب) برای سادگی، فرض کنیم که x_1، . . . و x_k یک دستگاه مختصات موضعی بر یک همسایگی V از x در X تشکیل بدهند. ثابت کنید که توابع هموار g_1، . . . و g_n بر مجموعه باز U در $\mathbb{R}^k$ چنان موجودند که V را به صورت مجموعهٔ

$$\Big\{(a_1,\cdots,a_k,g_{k+1}(a),\cdots,g_n(a))\in\mathbb{R}^n\ :\ a=(a_1,\cdots,a_k)\in U\Big\}$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

می‌شود معرفی نمود. یعنی، اگر $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ را با ضابطهٔ $g = (g_1, \cdots, g_n)$ تعریف کنیم، در این صورت V با نمودار g برابر خواهد شد. پس هر منیفلدای، به صورت موضعی به شکل نموداری قابل توصیف است.

۱۰. **تعمیم قضیهٔ تابع وارون.** گیریم $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی هموار باشد که بر زیرمنیفلدای فشرده z از X یک به یک است. فرض کنید که بازاء جمیع $z \in Z$ ها

$$df_x : T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$$

یک یکریختی باشد. در این صورت f منیفلد Z را به طور دیفئومورف بروی $f(Z)$ می‌نگارد. (چرا؟) ثابت کنید که، عملاً f یک همسایگی باز Z در X را به طور دیفئومورف بروی یک همسایگی باز $f(z)$ در Y می‌نگارد. توجه کنید که وقتی Z تنها یک نقطه است، این به خصوص همان قضیه تابع وارون است. [راهنمایی: به توسط تمرین ۵، ثابت کنید که تنها نیاز دارید به اینکه نشان دهید f بر یک همسایگی از Z یک به یک است. حال اگر f چنین نباشد، دنباله‌هایی چون $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ بسازید که هر دو در X به نقطه‌ای واحد مانند $z \in Z$ همگرایند، $a_i \neq b_i$ ولی $f(a_i) = f(b_i)$. نشان دهید که این با ناتکین بودن df_x در تضاد است.]

بخش ۴.۱ سابمرشنها

تحلیل موضعی جاریمان را برای حالت ابعادی بسیار مهم $\dim Y \leq \dim X$ دنبال می‌کنیم. اگر $f : X \longrightarrow Y$ نقطهٔ x را به y ببرد، قوی‌ترین شرطی که می‌توانیم روی مشتقش (یعنی، نگاشت $df_x : T_x(X) \longrightarrow (T_y(Y)$ بگذاریم، پوشا بودنش است. اگر df_x پوشا باشد، گفته می‌شود که f در x یک سابمرشن است. نگاشتی که در هر نقطه‌ای سابمرشن است را به یک کلام سابمرشن می‌نامیم.

سابمرشن قانونی از $\mathbb{R}^k$ به $\mathbb{R}^\ell$ تصویر استاندارد از $\mathbb{R}^k$ بروی $\mathbb{R}^\ell$ برای $k \geq \ell$ است که طی آن $(a_1, \cdots, a_k) \longmapsto (a_1, \cdots, a_\ell)$. مانند حالت ایمرشن‌ها، هر سابمرشن، در حد دیفئومورفیسم، موضعاً قانونی است.

قضیه سابمرشن موضعی. فرض کنید که $f : X \longrightarrow Y$ یک سابمرشن در x باشد، و $y = f(x)$. در این صورت، مختصات موضعی گرد x و y چنان وجود دارند که نسبت به آنها $f(x_1, \cdots, x_k) = (x_1, \cdots, x_\ell)$. یعنی، f با سابمرشن قانونی در نزدیکی x موضعاً هم ارز است.

برهان: برهان درست شبیه رده‌بندی موضعی ایمرشن‌ها است. با داشتن نمودار

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "g"'] & V \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} \phi(0) &= x \\ \psi(0) &= y \end{aligned}$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

از پیمایشهای موضعی، به دنبال g هستیم و سپس از قضیه تابع وارون استفاده می‌نماییم. $dg_0:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^\ell$ پوشا است، با انجام تغییر مختصات خطی در $\mathbb{R}^k$ می‌توانیم فرض کنیم که نمایش آن، یک ماتریس $\ell\times k$ مانند $(I_\ell|O)$ است. اکنون، نگاشت $G:U\longrightarrow\mathbb{R}^k$ را با ضابطهٔ $G(a)=(g(a),a_{\ell+1},\cdots,a_k)$ تعریف می‌کنیم که در آن $a=(a_1,\cdots,a_k)$. در این صورت، ماتریس dG_0 برابر I_k است، و لذا G یک دیفئومورفیسم موضعی در 0 می‌باشد. بنابراین، G^{-1} به عنوان یک دیفئومورفیسم از یک همسایگی باز U' شامل 0 بتوی U وجود دارد. آنطور که ساختیم $g=\{$ سابمرشن قانونی $\}\circ G$، پس $g\circ G^{-1}$ سابمرشن است. در این صورت، نمودار مربع شکل زیر تعویضپذیر است:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
U' \arrow[u, "\phi\circ G^{-1}"] \arrow[r, "\text{سابمرشن قانونی}"'] & V \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

و برهان تمام است. □

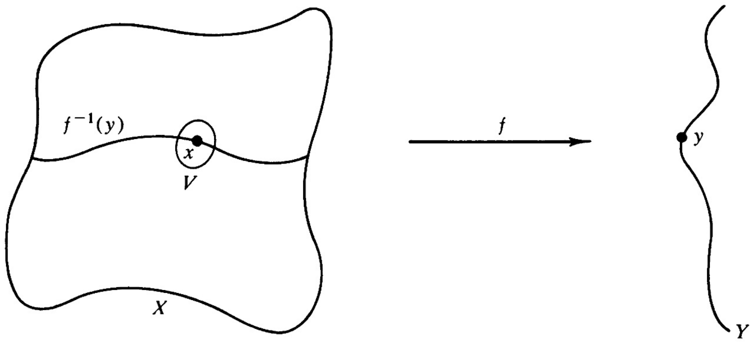
نتیجهٔ روشن آن چیزی نیست جز اینکه اگر f یک سابمرشن در x باشد، آنگاه عملاً یک سابمرشن روی کل یک همسایگی از x نیز هست.

یکی از باارزش‌ترین کاربردهای قضیه رده‌بندی موضعی در ارتباط با طبیعت هندسی جواب‌های معادلات تابعی است. اگر y نقطه‌ای از Y باشد و $f:X\longrightarrow Y$ یک نگاشت، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=y$ زیر مجموعه‌ای از X تشکیل می‌دهد که ما آنرا پیشنگارهٔ y می‌نامیم، و با نماد $f^{-1}(y)$ نمایش می‌دهیم. برای حالت نگاشت کلی، هیچ دلیلی وجود ندارد که حتماً مجموعهٔ $f^{-1}(y)$ به شکل یک شیء هندسی باشد. اما فرض کنیم که f در نقطه $x\in f^{-1}(y)$، یک سابمرشن باشد. مختصات موضعی به گرد x و y را چنان اختیار می‌کنیم که $f(x_1,\cdots,x_k)=f(x_1,\cdots,x_\ell)$, و y متناظر با $(0,\cdots,0)$ باشد. در این صورت، $f^{-1}(y)$ در نزدیکی x دقیقاً عبارت است از مجموعهٔ نقاط به شکل $(0,\cdots,0,x_{k+1},\cdots,x_\ell)$ است. دقیق‌تر اینکه، گیریم V نمایشگر همسایگی‌ای از x باشد که دستگاه مختصاتی $f(x_1,\cdots,x_k)$ روی آن تعریف شده است. در این صورت $f^{-1}(y)\cap V$ مجموعهٔ نقاطی است که $x_1=0$، . . . و $x_\ell=0$. بنابراین توابع $(x_{k+1},\cdots,x_\ell)$، یک دستگاه مختصاتی بر مجموعه $f^{-1}(y)\cap V$ تعریف می‌کنند، که زیر مجموعه‌ای باز (نسبی) از $f^{-1}(y)$ می‌باشد. (به شکل ۱۲.۱ نگاه بیاندازید.)

تعریفی دیگر بیان می‌داریم. در مورد نگاشت هموار بین منیفلدها مثل $f:X\longrightarrow Y$، نقطه $y\in Y$ در صورتی یک مقدار منظم برای f نامیده می‌شود که $df_x:T_x(X)\longrightarrow T_y(Y)$ در هر نقطه مانند x، که $f(x)=y$، پوشا باشد.

قضیه پیشنگاره. اگر y یک مقدار منظم $f:X\longrightarrow Y$ باشد، آنگاه پیشنگارهٔ $f^{-1}(y)$ یک زیرمنیفلد از X است، با $\dim f^{-1}(y)=\dim X-\dim Y$.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱۲.۰۱: دستگاه مختصات بر پیشنگارهٔ یک نگاشت

نقطه‌ای $y \in Y$ که یک مقدار منظم f نیست، **مقدار بحرانی** نامیده می‌شود. مجموعهٔ جواب $\{x : f(x) = y\}$ هنگامی که y یک مقدار بحرانی است، می‌تواند بسیار پیچیده باشد.

نکتهٔ باریکی در مورد تعریف مقادیر بحرانی است که بایستی بیان شود. هر نقطه‌ای $y \in Y$ که به نگارهٔ f متعلق نباشد، خود به خود به عنوان یک مقدار منظم به حساب می‌آید. این عملاً نتیجهٔ اکید منطقی تعریف است؛ ولی اگر چنین برداشت‌هایی شما را می‌آزارد، می‌توانید خیلی ساده آنرا به عنوان حالت خاصی از تعریف قلمداد کنید. در واقع، برخی اوقات می‌خواهیم تا نقاطی که به نگارهٔ $f(X)$ تعلق ندارند را بیابیم، و از این جهت داشتن اطلاعاتی در مورد مقادیر منظم می‌تواند مفید باشد.

بخاطر اهمیت بحث، بیایید تعریف منظم برای هر بعد ممکنی را مجدداً تکرار کنیم. وقتی $\dim Y < \dim X$، منظم بودن یک مقدار y، به این معنی است که f در هر نقطهٔ پیشنگاره $x \in f^{-1}(y)$، یک سابمرشن باشد. وقتی $\dim X = \dim Y$، این به این معنی است که f در هر نقطهٔ پیشنگاره‌ای یک دیفئومورفیسم موضعی است. بالاخره، اگر $\dim X < \dim Y$، آنگاه هر نقطه در $f(X)$ یک مقدار بحرانی است و مقادیر منظم آنهایی هستند که هرگز به توسط f اختیار نمی‌شوند. حالت $\dim X = \dim Y$ به ویژه مهم است؛ پیشنهاد می‌کنیم که برای بالا بردن سطح شهود خود تمرین ۷ را حل کنید.

خلق زیرمنیفلدها با استفاده از قضیه پیشنگاره به مراتب ساده‌تر از روش وقت‌گیر ساختن پیمایشهای موضعی است. مثلاً، نگاشت $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$f(x) = ||x||^2 = x_1^2 + \cdots + x_k^2$$

را تعریف می‌کنیم. مشتق df_a در نقطهٔ $a = (a_1, \cdots, a_k)$ دارای ماتریس $(2a_1, \cdots, 2a_k)$ است. بنابراین، $df_a : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ پوشا است، مگر در حالتی که $f(a) = 0$. لذا هر عدد غیر صفر حقیقی یک مقدار منظم f است. به خصوص، به این صورت مجدداً نشان دادیم که $\mathbb{S}^{k-1} = f^{-1}(1)$ یک منیفلد $k-1$ بعدی است.

کاربرد قوی‌تری از قضیه، ساخت گروه متعامد $\mathrm{O}(n)$، گروه همه تبدیلات $\mathbb{R}^n$ که فاصله را حفظ می‌کنند، را بدست می‌دهد. در اینجا، فضای $\mathrm{Mat}(n \times n)$ همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ یک منیفلد است؛ در واقع (با ردیف کردن تمامی عناصر ماتریس در یک خط)، این چیزی جز $\mathbb{R}^{n^2}$ نیست. $\mathrm{O}(n)$ گروه ماتریسهایی است که در معادلهٔ $AA^t = I$ صدق می‌کنند، که A^t ترانهاد A است و I ماتریس همانی است. حال نشان

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

می‌دهیم که $\mathrm{O}(n)$ منیفلد است. ابتدا متذکر می‌شویم که برای هر ماتریس دلخواه A، ماتریس AA^t متقارن است، چرا که با ترانهادش مساوی است. فضای برداری $\mathrm{Sym}(n)$ متشکل از همه ماتریس‌های $n\times n$ متقارن به روشنی یک زیرمنیفلد از $\mathrm{Mat}(n\times n)$ است که با $\mathbb{R}^k$ دیفئومورف می‌باشد، که $k=\dfrac{n(n+1)}{2}$، و نگاشت $f:\mathrm{Mat}(n\times n)\longrightarrow \mathrm{Sym}(n)$، با ضابطهٔ $f(A)=AA^t$، هموار است. $\mathrm{O}(n)=f^{-1}(I)$، پس، برای نشان دادن اینکه گروه متعامد یک منیفلد است، کافی است تنها نشان بدهیم که I یک مقدار منظم f است. برای این منظور، مشتق f در یک ماتریس دلخواه A را محاسبه می‌کنیم. بنا به تعریف:

$$\begin{aligned}
df_A(B) &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\Big(f(A+sB)-f(A)\Big)\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\Big((A+sB)(A+sB)^t-AA^t\Big)\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\Big(AA^t+sBA^t+sAB^t+s^2BB^t-AA^t\Big)\\
&= \lim_{s\to 0}\Big(BA^t+AB^t+sBB^t\Big)\\
&= BA^t+AB^t.
\end{aligned}$$

آیا هنگامی که A به $f^{-1}(I)=\mathrm{O}(n)$ تعلق دارد $df_A: T_A\mathrm{Mat}(n\times n)\longrightarrow T_{f(A)}\mathrm{Sym}(n)$ پوشا است؟ بنا به یکی گرفتن $\mathrm{Mat}(n\times n)$ و $\mathrm{Sym}(n)$ با فضاهای اقلیدسی، چنین داریم که $T_A\mathrm{Mat}(n\times n)=\mathrm{Mat}(n\times n)$ و $T_{f(A)}\mathrm{Sym}(n)=\mathrm{Sym}(n)$. ماتریس I یک مقدار منظم f است اگر و تنها اگر $df_A:\mathrm{Mat}(n\times n)\longrightarrow \mathrm{Sym}(n)$ بازاء همه $A\in\mathrm{O}(n)$ ها پوشا باشد. یعنی، بازاء هر $C\in\mathrm{Sym}(n)$، یک $B\in\mathrm{Mat}(n\times n)$ ای وجود داشته باشدبه طوری که معادلهٔ $df_A(B)=C$ را حل کند، یا به بیان دیگر $BA^t+AB^t=C$. چون C متقارن است، می‌توانیم بنویسیم $C=\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}C^t$، و در این صورت توجه داریم که حل معادلهٔ $BA^t=\frac{1}{2}C$ برای B ممکن است. چون $AA^t=I$، با ضرب از سمت راست در A، داریم $B=\frac{1}{2}CA$. پس، عملاً

$$\begin{aligned}
df_A(B) &= \left(\frac{1}{2}CA\right)A^t+A\left(\frac{1}{2}CA\right)^t\\
&= \frac{1}{2}C(AA^t)+\frac{1}{2}(AA^t)C^t\\
&= \frac{1}{2}C+\frac{1}{2}C^t=C,
\end{aligned}$$

و لذا ماتریس B مورد نظر را یافته‌ایم. پس f در هر A دلخواه در $f^{-1}(I)$ سابمرشن است؛ بنابراین، I یک مقدار منظم f است و از این رو $\mathrm{O}(n)$ یک زیرمنیفلد $\mathrm{Mat}(n\times n)$ است؛ به علاوه،

$$\begin{aligned}
\dim\mathrm{O}(n) &= \dim\mathrm{Mat}(n\times n)-\dim\mathrm{Sym}(n)\\
&= n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

توجه کنید که $\mathrm{O}(n)$ همان طوری که گروه است، منیفلد نیز می‌باشد. به عنوان مثال، نشان دادن همواری اعمال گروهی به تعبیر ذیل است: نگاشت ضرب $\mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(n)\longrightarrow\mathrm{O}(n)$ با ضابطهٔ $(A,B)\longrightarrow AB$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

و نگاشت وارونگیری با $\mathrm{O}(n) \longrightarrow \mathrm{O}(n)$ با ضابطهٔ $A \longrightarrow A^{-1}$ تعریف می‌شوند و هر دو به عنوان نگاشتهایی میان منیفلدها هموارند. (توجه: در اینجا $A^{-1} = A^t$.) گروهی که منیفلد است، و اعمال گروهی‌اش هموارند، گروه لی نامیده می‌شود.

بعضی صورت‌های دیگر از مطلب پیش را که در بخش بعدی برایمان مفید است، در نظر می‌گیریم. یک صورت عملی مسئله چنین است: فرض کنید که $(g_1, \cdots, g_\ell)$ توابعی با مقدار حقیقی و هموار بر یک منیفلد X با بعد $\ell \leq k$ باشند. تحت چه شرایطی مجموعهٔ صفرهای مشترک آنها یک شیء هندسی مناسب است؟ ما این سئوال را به راحتی با تشکیل نگاشت

$$g = (g_1, \cdots, g_\ell) : X \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

می‌توانیم پاسخ بگوییم. چون $Z = g^{-1}(0)$، در صورتی که 0 یک مقدار منظم g باشد، Z زیرمنیفلدای از X است.

شرط منظم بودن برای 0 را مستقیماً بر اساس توابع g_i می توانیم بیان کنیم. چون هر g_i نگاشتی هموار از X بتوی $\mathbb{R}$ است، مشتق‌اش در یک نقطهٔ x نگاشتی خطی چون $d(g_i)_x : T_x(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ است؛ یعنی اینکه $d(g_i)_x$ یک تابعی خطی بر فضای برداری $T_x(X)$ می‌باشد. به علاوه، به راحتی می‌توانید تحقیق کنید که $dg_x : T_x(X) \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ وقتی و تنها وقتی پوشا است که ℓ تابعی خطی $d(g_1)_x, \cdots, d(g_\ell)_x$ بر $T_x(X)$ مستقل خطی باشند. این شرط را با گفتن این جمله که ℓ تابع $g_1, \cdots, g_\ell$ در x مستقلند، توصیف می‌کنیم. بنابراین، اکنون قضیه پیشنگاره را به این زبان می‌توانیم «ترجمه» کنیم:

گزاره. اگر توابع با مقدار حقیقی و هموار $g_1, \cdots, g_\ell$، در هر نقطه‌ای که همگی صفر می‌شوند، بر X مستقل باشند، آنگاه، مجموعه Z شامل صفرهای مشترک آنها زیرمنیفلدای با بعد مساوی $\dim X - \ell$ از X است.

در اینجا، تعریف « همبعد » یک زیرمنیفلد دلخواه Z از X به صورت $\mathrm{codim} Z = \dim X - \dim Z$ می‌تواند مفید واقع شود. (توجه کنید که این نه تنها به Z بلکه به منیفلد X نیز بستگی دارد.) از این رو هر ℓ تابع مستقل بر X زیرمنیفلدای با همبعد ℓ آماده می‌کنند. از نقطه نظر تاریخی، مطالعه مجموعه صفرهای گردایه‌ای از توابع از دید ریاضی جذاب و مهم بوده است، و همچنان نیز هست. هندسه جبری کلاسیک، در اساس، به مطالعهٔ طبیعت مجموعه‌های آماده شده به توسط چند جمله‌ایها در فضای اقلیدسی مربوط می‌شود.

آیا عکس گزارهٔ پیش نیز درست است؟ یعنی اینکه، آیا هر زیرمنیفلد Z از X به توسط توابعی مستقل «آماده شده است»؟ خواهیم دید که پاسخ این سئوال منفی است (تمرین ۲۰ از بخش ۳ از فصل ۲). اما دو عکس جزیی مفید از آنرا می‌توانیم به دست بیاوریم:

عکس جزیی ۱. اگر y مقدار منظم تابع هموار $f : X \longrightarrow Y$ باشد، آنگاه زیرمنیفلد پیشنگاره‌ای $f^{-1}(y)$ را توسط توابع مستقل می‌توان آماده کرد.

برهان: درست یک دیفئومورفیسم h از یک همسایگی W از y به همسایگی‌ای از مبداء در $\mathbb{R}^\ell$ انتخاب می‌کنیم، که $h(y) = 0$. حال قرار می‌دهیم $g = h \circ f$ و تحقیق می‌کنیم که 0 یک مقدار منظم برای g باشد. در این صورت توابع مختصاتی $g_1, \cdots, g_\ell$، را کاری که می‌خواهیم می‌کنند. □

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

عکس جزیی ۲. هر زیرمنیفلدای از X به طور موضعی توسط توابعی مستقل آماده می‌شود.

برهان: به خصوص، گیریم Z یک زیرمنیفلد با همبعد ℓ باشد، و z نقطه‌ای از Z. در این صورت ادعا می‌کنیم که ℓ تابع مستقل $g_1,\cdots,g_\ell$ تعریف شده بر یک همسایگی باز W از z در X چنان وجود دارند که $Z\cap W$ مجموعهٔ صفر شدن‌های مشترک g_i ها است. (در اینجا با عکس گزاره در مورد زیرمنیفلد $Z\cap W$ در منیفلد W شروع می‌کنیم.) این عکس مستقیماً از بکارگیری قضیه ایمرشن در مورد ایمرشن $Z\longrightarrow W$ منتج می‌گردد؛ در واقع، این دقیقاً تمرین ۲ از بخش پیش است. □

به ویژه، با گرفتن Z به عنوان فضای اقلیدسی دلخواه، توجه می‌کنیم که هر منیفلدای به طور موضعی به وسیله توابع مستقل در فضای اقلیدسی قابل تعریف است.(البته، باز هم اشاره می‌کنیم که این مطلب که همه منیفلدها را به وسیله توابع مستقل به طور سراسری می‌توان آماده کرد، درست نیست. بعداً خواهیم دید چرا.)

گزاره. گیریم Z پیشنگارهٔ مقدار منظم $y\in Y$ تحت نگاشت هموار $f:X\longrightarrow Y$ باشد. در این صورت هسته $df_x:T_x(X)\longrightarrow T_y(Y)$ در هر نقطه دلخواه $x\in Z$ درست همان فضای مماس $T_x(Z)$ بر Z است.

برهان: چون f بر Z ثابت است، df_x بر $T_x(Z)$ صفر است. اما $df_x:T_x(X)\longrightarrow T_y(Y)$ پوشا است، پس بعد هستهٔ df_x بایستی برابر باشد با

$$\dim T_x(X)-\dim T_y(Y)=\dim X-\dim Y=\dim Z.$$

بنابراین $T_x(Z)$ زیر فضایی از هسته است که بعدش با بعد هسته یکی است؛ بنابراین $T_x(Z)$ بایستی هسته باشد.

تمرینات

۱. اگر $f:X\longrightarrow Y$ سابمرشن و U زیر مجموعه بازی از X باشد، نشان دهید $f(U)$ در Y باز است.

۲. **(الف)** در صورتی که X فشرده و Y همبند باشد، نشان دهید که هر سابمرشن به شکل $f:X\longrightarrow Y$ پوشا است.

(ب) نشان دهید که هیچ سابمرشن از یک منیفلد فشرده بروی یک فضای اقلیدسی وجود ندارد.

۳. نشان دهید که خم $t\longrightarrow(t,t^2,t^3)$ خط حقیقی $\mathbb{R}^1$ را بتوی فضای $\mathbb{R}^3$ می‌نشاند. دو تابع مستقل چنان بیابید که نگارهٔ خم را به طور سراسری تعریف کنند. آیا توابع شما بر کل $\mathbb{R}^3$ مستقلند، یا تنها بر یک همسایگی باز از نگارهٔ خم؟

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۴. تعمیم ذیل از عکس جزیی ۲ را ثابت کنید: فرض کنید که $Z \subset X \subset Y$ منیفلد باشند و $z \in Z$. در این صورت، توابع مستقل $g_1, \cdots, g_\ell$ بر یک همسایگی W از z در Y چنان وجود دارند که

$$\begin{aligned} Z \cap W &= \{y \in W : g_1(y) = 0, \cdots, g_\ell(y) = 0\}, \\ X \cap W &= \{y \in W : g_1(y) = 0, \cdots, g_m(y) = 0\}, \end{aligned}$$

که در آنها $\ell - m$ همبعد Z در X است.

۵. تحقیق کنید که 0 تنها نقطه بحرانی نگاشت $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$

می‌باشد. ثابت کنید که اگر b, a هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند، آنگاه $f^{-1}(b), f^{-1}(a)$ دیفئومورفند. [راهنمایی: ضرب اسکالر توسط $\sqrt{b/a}$ بر $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید.] به صورت ترسیمی حادثه‌ای که در توپولوژی $f^{-1}(c)$ هنگامی که c از نقطهٔ بحرانی عبور می‌کند را مطالعه کنید.

۶. کلیتر، گیریم p یک چند جمله‌ای همگن دلخواه $k-$ متغیره باشد. همگنی به این معنی است که $p(tx_1, \cdots, tx_k) = t^m p(x_1, \cdots, xk)$. ثابت کنید که مجموعه نقاط x بطوری که $p(x) = a$، زیرمنیفلدای با بعد $k-1$ از $\mathbb{R}^k$ است، مشروط به اینکه $a \neq 0$. نشان بدهید که منیفلدهای حاصله با $a > 0$ همگی دیفئومورفند، و همینطور آنهایی که متناظر با $a < 0$ اند، با هم دیفئومورفند. [راهنمایی: از اتحاد اولر در مورد چند جمله‌ایهای همگن

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = m.p$$

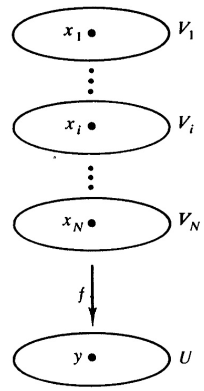
در اثبات اینکه 0 تنها مقدار بحرانی p است استفاده بکنید.]

۷. (قضیه رجبندی صفحه‌ها) فرض کنید y مقدار منظم نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ باشد، که X فشرده بوده و Y یک بعدی است. نشان دهید که $f^{-1}(y)$ مجموعه‌ای متناهی $\{x_1, \cdots, x_n\}$ است. ثابت کنید همسایگی‌های باز V_i از x_i به گونه‌ای وجود دارند که $f^{-1}(U)$ اجتماع مجزای V_1، . . . و V_n است و f هر V_i را به طور دیفئومورف بروی U می‌نگارد. [راهنمایی: همسایگی‌های مجزای W_i از x_i را چنان جدا کنید که به صورت دیفئومورف نگاشته شوند. نشان بدهید که $f(X - U_i$ فشرده بوده و y را شامل نیست.] ۱۳.۱ را نگاه کنید.

۸. گیریم $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$ یک چند جمله‌ای با ضرایب مختلط باشد، و نگاشت $z \longrightarrow p(z)$ متناظر با آن از صفحه مختلط C بتوی خودش را در نظر بگیرید. ثابت کنید که این به جز در تعدادی متناهی از نقاط سابمرشن است.

۹. نشان دهید که گروه متعامد $\mathrm{O}(n)$ فشرده است. [راهنمایی: نشان دهید که اگر $A = [a_{ij}]$ متعامد باشد، آنگاه بازاء هر i ای $\Sigma_j a_{ij}^2 = 1$.]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱.۱۳: قضیهٔ رجبندی صفحات

۱۰. تحقیق کنید که فضای مماس به $\mathrm{O}(n)$ در ماتریس همانی I، فضای برداری ماتریسهای پاد متقارن $n\times n$ می‌باشد - یعنی ماتریسهایی مانند A صادق در شرط $A^t = -A$.

۱۱. **(الف)** ماتریس‌های $n\times n$ با دترمینان $+1$ گروهی تشکیل می‌دهند که ما آنرا با نماد $\mathrm{SL}(n)$ نمایش می‌دهیم. ثابت کنید که $\mathrm{SL}(n)$ زیرمنیفلد $\mathrm{Mat}(n\times n)$ است و لذا گروه لی است. [راهنمایی: ثابت کنید که 0 تنها مقدار بحرانی تابع دترمینان $\det : \mathrm{Mat}(n\times n) \longrightarrow \mathbb{R}$ است. در واقع، اگر $\det(A) \neq 0$، بایستی نشان دهید که وقتی $\det$ به مجموعهٔ $\{tA : t > 0\}$ تحدید می‌گردد یک غوطه وری است. یادداشت: این در اصل حالت خاصی از تمرین ۵ است.]

(ب) تحقیق کنید که فضای مماس به $SL(n)$ در ماتریس همانی از کلیه ماتریس‌های با اثر برابر با صفر تشکیل یافته است.

۱۲. ثابت کنید که مجموعه کلیه ماتریس‌های 2×2 با رتبهٔ ۱ زیرمنیفلدای سه‌بعدی از $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Mat}(2\times 2)$ تشکیل می‌دهند. [راهنمایی: نشان دهید که تابع دترمینان بر منیفلد ماتریس‌های 2×2 ی ناصفر $\mathrm{Mat}(2\times 2) - \{0\}$ سابمرشن است.]

۱۳. ثابت کنید که مجموعهٔ ماتریس‌های $m\times n$ با رتبهٔ r زیرمنیفلد با همبعد $(m-r)(n-r)$ از $\mathbb{R}^{mn}$ می‌باشد. [راهنمایی: برای سادگی، فرض کنید که ماتریسهای $m\times n$ مثل A به شکل

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array}\right) \end{array}$$

هستند، که در آن B ماتریس $r\times r$- ناتکین است. با تحویل کردن آن به ماتریس ناتکین

$$\left(\begin{array}{c|c} I & -B^{-1}C \\ \hline O & I \end{array}\right)$$

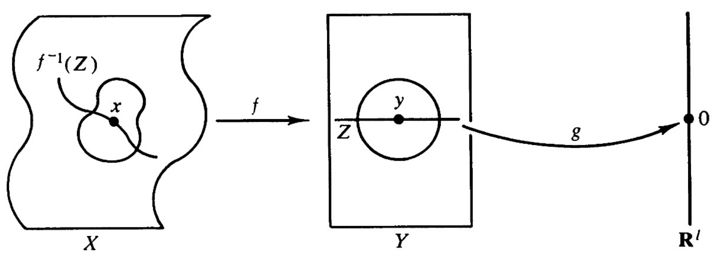
ثابت کنید که وقتی و تنها وقتی رتبهٔ Aمساوی r است که داشته باشیم $E - DB^{-1}C = 0$.]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

بخش ۵.۱ تراگردی

ملاحظه کردیم که جواب‌های معادله‌ای چون $f(x)=y$، مشروط به اینکه y یک مقدار منظم نگاشت $f:X\longrightarrow Y$ باشد، منیفلدای هموار تشکیل می‌دهند. اکنون، مجموعه نقاطی در X که مقادیر تابعی آنها نه لزوماً برابر مقداری ثابت چون y، بلکه در شرط همواری دلخواهی صدق می‌کنند را در نظر می‌گیریم. بنابراین فرض می‌کنیم Z زیرمنیفلد از Y باشد، و مجموعه جواب‌های رابطهٔ $f(x)\in Z$ را مطالعه می‌کنیم. چه موقع می‌توانیم مطمئن باشیم که این مجموعهٔ جواب، یعنی پیشنگارهٔ $f^{-1}(Z)$، یک شیء هندسی رام شدنی است؟ این سئوال ما را به تعریف خاصیت دیفرانسیلی جدیدی، که تعمیمی از مفهوم منظم بودن است، رهنمون می‌نماید که مباحث قسمت بزرگی از کتاب را به دنبال خود دارد.

اینکه $f^{-1}(Z)$ منیفلد است موضوعی موضعی است! یعنی، وقتی و تنها وقتی منیفلد است که هر نقطهٔ $x\in f^{-1}(Z)$ دارای یک همسایگی U در X باشد به طوریکه $f^{-1}(Z)\cap U$ یک منیفلد است. این مشاهده اجازه می‌دهد که مطالعهٔ رابطه $f(x)\in Z$ را به حالت ساده‌تری که پیش‌تر مطالعه کردیم، که در آن Z تک نقطه‌ای بود، تبدیل بنماییم. چون اگر $y=f(x)$، آنگاه Z را در یک همسایگی از Y به صورت مجموعه صفر گردایه‌ای از توابع مستقل g_1، . . . و g_ℓ می‌شود نوشت، ℓ بایستی همبعد Z در Y باشد. پس در نزدیکی x، پیشنگارهٔ $f^{-1}(Z)$ مجموعه صفر توابع $g_1\circ f$، . . . و $g_1\circ f$ می‌باشد. گیریم g نمایشگر سابمرشن $(g_1,\cdots,g_\ell)$ که حول y تعریف می‌شود باشد(شکل ۱۴.۱). حال اینکه کلیه احکام پیش‌تر را در مورد نگاشت $g\circ f:W\longrightarrow\mathbb{R}^\ell$ می‌توانیم به کار ببریم؛ هنگامی که 0 یک مقدار منظم $g\circ f$ باشد، منیفلد بودن $(g\circ f)^{-1}(0)$ تضمین شده است.



شکل ۱۴.۱: اثبات منیفلد بودن $f^{-1}(Z)$

با اینکه نگاشت g خیلی دلخواه بود، شرط اینکه 0 مقدار منظم $g\circ f$ باشد را به راحتی بر اساس تنها f و Z می‌شود مجدداً بیان کرد. چون $d(g\circ f)_x=dg_y\circ df_x$. نگاشت خطی $d(g\circ f)_x:T_x(X)\longrightarrow\mathbb{R}^\ell$ وقتی و تنها وقتی پوشا است که dg_y نگارهٔ df_x را بروی $\mathbb{R}^\ell$ بنگارد. اما $dg_y:T_y(Y)\longrightarrow\mathbb{R}^\ell$ یک تبدیل خطی پوشایی است که هسته‌اش زیر فضای $T_y(Z)$ است. پس dg_y یک زیر فضا از $T_y(Y)$ را در صورتی دقیقاً بروی $\mathbb{R}^\ell$ می‌نگارد که آن زیر فضا و $T_y(Z)$ روی هم کل $T_y(Y)$ را تولید کنند. نتیجه می‌گیریم که $g\circ f$ وقتی و تنها وقتی در نقطهٔ $x\in f^{-1}(z)$ یک سابمرشن است که

$$\operatorname{Im}(df_x)+T_y(Z)=T_y(Y)$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

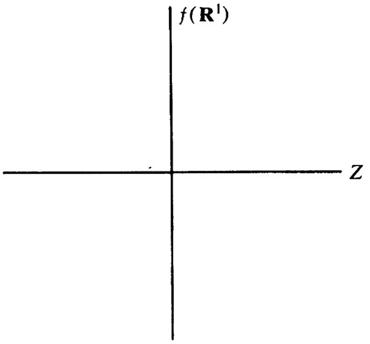
در ادامه به طور جدی به مطالعهٔ این سئوال مبادرت می‌کنیم. نگاشت f در صورتی به زیرمنیفلد Z تراگرد گفته می‌شود، و با کوته نوشت $f \pitchfork Z$ مشخص می‌گردد، که تساوی بالا در هر نقطهٔ x از پیشنگارهٔ Z درست باشد. ثابت کردیم که

قضیه. اگر نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ به زیرمنیفلد Z از Y تراگرد باشد، در این صورت پیشنگارهٔ $f^{-1}(Z)$ زیرمنیفلدای از X است. مضافاً اینکه، همبعد $f^{-1}(Z)$ در X با همبعد Z در Y مساوی است.

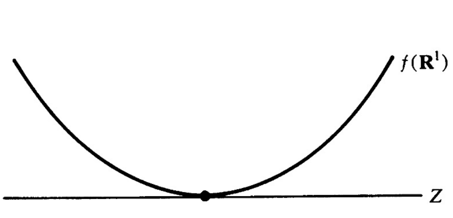
در ارتباط با ادعایی در مورد همبعد، توجه داریم که $f^{-1}(Z)$ را به صورت موضعی به شکل مجموعهٔ صفرهای ℓ تابع مستقل $g_1 \circ f$، . . . و $g_\ell \circ f$ نوشته بودیم. پس همبعد $f^{-1}(Z)$ در X برابر ℓ است، که در ابتدا همبعد Z در Y بوده است.

هنگامی که Z درست از یک نقطه تشکیل یافته، فضای مماسش زیر فضای صفر $T_y(Y)$ است. بنابراین f در صورتی به Y تراگرد است که بازاء همهٔ $x \in f^{-1}(y)$ ها داشته باشیم $df_x[T_x(X)] = T_y(Y)$، که این خود بیانگر این مطلب است که y یک مقدار منظم f است. لذا تراگردی مفهوم منظم بودن را به عنوان حالتی خاص در بر می‌گیرد.

به عنوان مثالی خیلی ساده از تراگردی، نگاشت $f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(t) = (0,t)$ را در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم Z محور x ها در $\mathbb{R}^2$ باشد (شکل ۱۵.۱). اما، با این حال نگاشت $g : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $g(t) = (t,t^2)$ به Z تراگرد نیست (شکل ۱۶.۱).



شکل ۱۵.۱: $f(t) = (0,t)$ با x−محور تراگرد است



شکل ۱۶.۱: $f(t) = (0,t^2)$ با x−محور تراگرد نیست

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

مهمترین و از نظر تصور ساده‌ترین حالت خاص تراگردی، تراگردی نگاشت شمول i یک زیرمنیفلد X از یک منیفلد Y نسبت به زیرمنیفلدای دیگر Z از Y می‌باشد. به جای گفتن اینکه نقطه‌ای $x \in X$ به پیشنگار $f^{-1}(Z)$ تعلق دارد، خیلی ساده می‌گوییم که x به مقطع $X \cap Z$ متعلق است. همچنین، در این وضعیت مشتق $di_x : T_x(X) \longrightarrow T_x(Y)$ نگاشت شمولیت $T_x(X)$ در $T_x(Y)$ می‌باشد. بنابراین وقتی و تنها وقتی $Z \pitchfork i$ که بازاء هر $x \in X \cap Z$،

$$T_x(X) + T_x(Z) = T_x(Y).$$

توجه کنید که این تساوی نسبت به X و Z متقارن است. وقتی که آن برقرار باشد، خواهیم گفت که منیفلدهای X و Z تراگردند، و می‌نویسیم $X \pitchfork Z$. قضیه بالا به صورت ذیل تخصیص می‌یابد:

قضیه. مقطع دو زیرمنیفلد تراگرد Y، زیرمنیفلدای از Y است. مضافاً اینکه

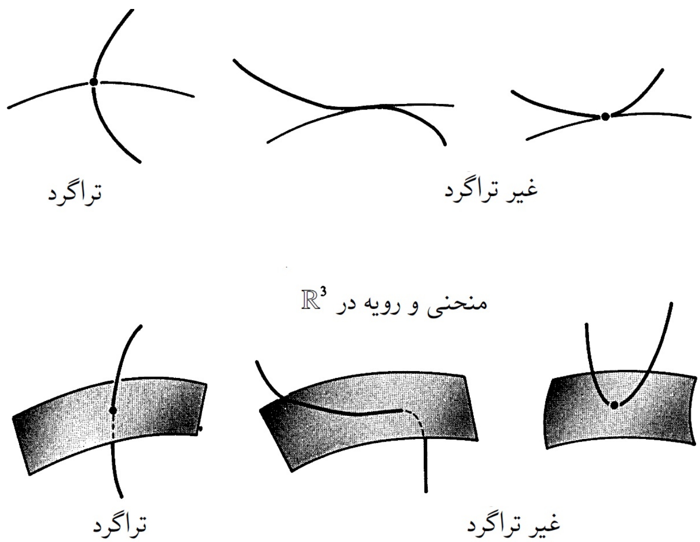
$$\mathrm{codim}(X \cap Z) = \mathrm{codim} X + \mathrm{codim} Z.$$

جمعی بودن هم‌بعد (که از فرم حسابی و بدیهی ادعای هم‌بعدی قضیه پیش منتج شده است) از همه جهت طبیعی است. گرد نقطه‌ای x متعلق به $X \cap Z$، زیرمنیفلد X به توسط $k = \mathrm{codim}(X)$ تابع مستقل از Y برش می‌خورد و زیرمنیفلد Z به توسط $\ell = \mathrm{codim}(Z)$ تابع مستقل. در این صورت $X \cap Z$ به طور موضعی دقیقاً عبارت است از مجموعه صفرهای گردایه مشترک از $k + \ell$ تابع؛ که استقلال این $\ell + k$ توابع به صورت توأم دقیقاً شرط تراگردی است. بایستی یادآوری شود که تراگردی X و Z به فضای پیرامون Y نیز بستگی دارد. به عنوان مثال، دو محور مختصاتی یکدیگر را به طور تراگرد در $\mathbb{R}^2$ قطع می‌کنند، در حالی که وقتی به عنوان زیرمنیفلدهایی از $\mathbb{R}^3$ در نظر گرفته شوند خیر. در کل، اگر ابعاد X و Z روی هم حداقل برابر بعد Y نشود، در این صورت تنها وقتی آنها می‌توانند به طور تراگرد متقاطع باشد که یکدیگر را اصلاً قطع نکنند. مثلاً اگر X و Y دو خم در $\mathbb{R}^3$ باشند، در این صورت $X \pitchfork Y$ ایجاب می‌کند که $X \cap Y$ خالی است. برای مشاهدهٔ چند مثال به شکل‌های ۱۷.۱ تا ۱۹.۱ توجه کنید. در هر حالت، مقطع را برای خود با قضیه بسنجید.

تراگردی در نظریه توپولوژیک فصول آتی نقشی اساسی دارد، و لذا حقیقتاً لازم است که زمانی را به بسط شهود خود در این ارتباط معطوف کنید. احتمالاً بهترین کار ترسیم چندین جین از اشکال مقاطع منیفلدها در 2 یا 3 بعدی است. به موجب آن در خواهید یافت که مقاطع تراگرد خیلی پیش پا افتاده‌اند منتهی بسیار مطمئن و روشن. اما خواهید دید که چگونه مقاطع غیر تراگرد به طور کلی غریب می‌توانند به وجود بیایند – و در این حالات بایستی دقیقاً مشخص بکنید که چرا از تراگردی تخلف شده است. این کار را با یک سری از انواع مثالها، منتهی جزیی شروع کردیم.

تمرینات

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱۷.۱: نمونه‌هایی از تراگردی

۱. **(الف)** فرض کنید که $A : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی خطی باشد و V زیر فضایی برداری از $\mathbb{R}^n$. تحقیق کنید که آیا $A \pitchfork V$ دقیقاً به این معنی است که $A(\mathbb{R}^k) + V = \mathbb{R}^n$.

(ب) اگر W, V دو زیر فضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشند، در این صورت $V \pitchfork W$ درست به معنی $V + W = \mathbb{R}^n$ است.

۲. کدام جفت از فضاهای خطی ذیل یکدیگر را به طور تراگرد قطع می‌کنند؟

(الف) $xy-$صفحه و z محور در $\mathbb{R}^3$.

(ب) $xy-$صفحه و صفحه تولید شده توسط $\{(3,2,0),(0,4,-1)\}$ در $\mathbb{R}^3$.

(ج) صفحه تولید شده توسط $\{(1,0,0),(2,1,0)\}$ و y محور در $\mathbb{R}^3$.

(د) $\{0\}\times\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^k\times\{0\}$ در $\mathbb{R}^n$ (بسته به n, ℓ, k).

(ه) $\mathbb{R}^\ell\times\{0\}, \mathbb{R}^k\times\{0\}$ در $\mathbb{R}^n$ (بسته به n, ℓ, k).

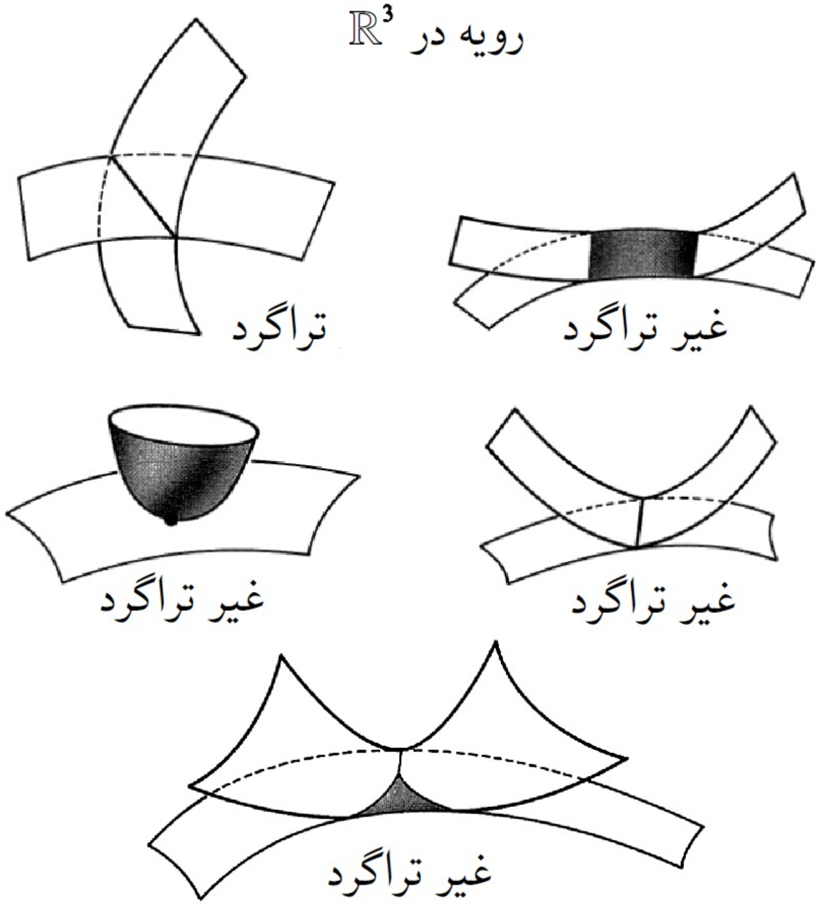
(و) $V\times\{0\}$ و قطر در $V\times V$.

(ز) ماتریس‌های متقارن $(A^t = A)$ و ماتریس‌های پاد متقارن $(A^t = -A)$ در $\mathrm{Mat}(n)$.

۳. گیریم V_1، V_2 و V_3 زیر فضاهایی خطی از $\mathbb{R}^n$ باشند. می‌شود گفت که آنها دارای «مقطع نرمال» اند مشروط به اینکه هر وقت $i \neq j$ و $i \neq k$ داشته باشیم $V_i \pitchfork (V_j \cap V_k)$. ثابت کنید که این وقتی و تنها وقتی مسیر است که

$$\mathrm{codim}(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \mathrm{codim}V_1 + \mathrm{codim}V_2 + \mathrm{codim}V_3$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



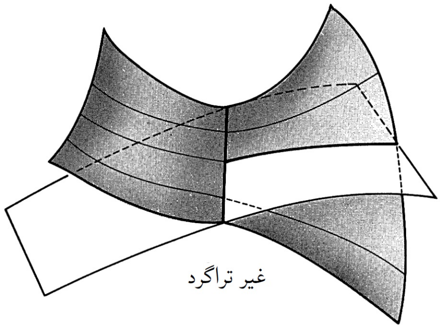
شکل ۱۸.۱: نمونه‌هایی از تراگردی در فضای $\mathbb{R}^3$

۴. گیریم X و Z دو زیرمنیفلد تراگرد در Y هستند. ثابت کنید که اگر $y \in X \cap Z$، آنگاه $T_y(X \cap Z) = T_y(X) \cap T_y(Z)$. (فضای مماس به مقطع، مقطع فضاهای مماس است.)

۵. کلی‌تر، گیریم $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی تراگرد به زیرمنیفلد Z در Y باشد. در این صورت $W = f^{-1}(Z)$ زیرمنیفلدای از X است. ثابت کنید $T_x(W)$ پیشنگارهٔ $T_{f(x)}(Z)$ تحت نگاشت خطی $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$ است. («فضای مماس به پیشنگارهٔ Z، پیشنگارهٔ فضای مماس Z است.») (چرا این تمرین ۴ را موجب می‌شود؟)

۶. فرض کنید که X و Z در Y به طور تراگرد متقاطع نباشند. ممکن است که $X \cap Z$ هنوز هم یک منیفلد باشد؟ اگر ممکن است، آیا در این صورت هنوز بایستی همبعدش برابر با همبعد X بعلاوهٔ همبعد Y شود؟ (این کار شدنی است؟) پاسخ خود را با شکل همراه کنید.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱۹.۱: نمونه‌ای از تراگردی دو رویه در فضا

۷. گیریم $X \stackrel{f}{\longrightarrow} Y \stackrel{g}{\longrightarrow} Z$ دنباله‌ای از نگاشتهای هموار میان منیفلدها باشد و Y با زیرمنیفلد W از Z تراگرد باشد. نشان دهید که وقتی و تنها وقتی $f \pitchfork g^{-1}(W)$ که $g \circ f \pitchfork W$.

۸. بازاء کدام مقادیر a هذلولی‌گون تعریف شده با $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a$ را به طور تراگرد قطع می‌کند؟ برای مقادیر مختلف a مقطع به چه صورتی مشاهده می‌شود؟

۹. گیریم V فضای برداری، و Δ قطر $V \times V$ باشد. نگاشت خطی دلخواه $A : V \longrightarrow V$ را در نظر گرفته نمودارش $W = \{(v, Av) : v \in V\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید که $W \pitchfork \Delta$ اگر و تنها اگر $+1$ مقدار ویژهٔ A نباشد.

۱۰. گیریم f نگاشتی با نقطهٔ ثابت x باشد؛ یعنی، $f(x) = x$. اگر $+1$ مقدار ویژهٔ نگاشت مشتق $df_x : T_x(X) \to T_x(X)$ نباشد، در این صورت x یک نقطهٔ ثابت لیفشیتز f نامیده می‌شود. نگاشت f در صورتی لیفشیتز نامیده می‌شود که همهٔ نقاط ثابتش لیفشیتز باشند. ثابت کنید که اگر X فشرده و f لیفشیتز باشد، آنگاه f تنها تعدادی متناهی نقطهٔ ثابت دارد.

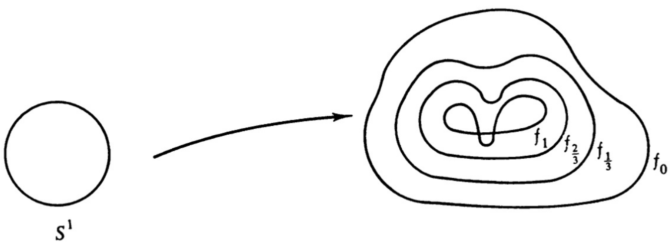
۱۱. قضیه‌ای از آنالیز اذعان می‌دارد که هر زیرمجموعهٔ بسته از $\mathbb{R}^k$ مجموعهٔ صفرهای تابعی هموار مانند $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ است. با استفاده از این قضیه نشان دهید که اگر C زیرمجموعه‌ای بسته و دلخواه از $\mathbb{R}^k$ باشد، آنگاه زیرمنیفلد X از $\mathbb{R}^{k+1}$ چنان وجود دارد که $X \cap \mathbb{R}^k = C$. [در اینجا $\mathbb{R}^k$ را به عنوان زیرمنیفلدای از $\mathbb{R}^{k+1}$ در نظر گرفته شده است، که نگاشت شمول آن نگاشت معمولی $(a_1, \cdots, a_k) \mapsto (a_1, \cdots, a_k, 0)$ است.] چون مجموعه‌های بسته ممکن است بطور کلی غریب باشند، این نشان می‌دهد که چگونه مقاطع غیر تراگرد می‌تواند بوجود بیایند.

بخش ۶.۱ هموتوپی و پایداری

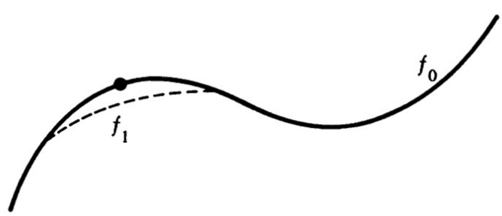
بسیاری از خواص نگاشتها هنگامی که بطریقی هموار تغییر شکل یابد، بی‌تغییر می‌ماند. از نقطه نظر شهودی، نگاشت هموار $f_1 : X \to Y$ تغییر شکل یافتهٔ نگاشت $f_0 : X \to Y$ است، هر گاه آنها را توسط

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

خانواده‌ای از نگاشتهای هموار $f_t : X \to Y$ به شکل هموار بتوان بهم بدل نمود. (به شکل ۲۰.۱ توجه شود.) صورت دقیق فرموله شدهٔ این تعریف یکی از مهمترین مفاهیم توپولوژی است. گیریم I نمایشگر بازهٔ واحد $[0,1]$ در $\mathbb{R}$ باشد. می‌گوییم f_0 و f_1 هوموتوپ‌اند، و به صورت $f_0 \sim f_1$ خلاصه‌وار می‌نویسیم، هرگاه نگاشتی هموار $F : X\times I \longrightarrow Y$ چنان یافت گردد که $F(x,1) = f_1(x), f(x,0) = f_0(x)$ به F، یک هوموتوپی بین f_1, f_0 گفته می‌شود. رابطهٔ هوموتوپی بود یک رابطهٔ هم‌ارزی بر نگاشتهای هموار از X به Y است (به تمرین ۱ نگاه کنید)، و ردهٔ هم‌ارزی‌ای که نگاشتی به آن تعلق دارد را ردهٔ هوموتوپی آن می‌نامیم. برای ارائه خانواده‌ای از نگاشتهای هموار که f_1, f_0 را به طور هموار به هم مربوط می‌سازند، بایستی دقیقاً تعریف کنیم $f_t : X \to Y$ که $f_t(x) = F(x,t)$.



شکل ۲۰.۱: مثالی از یک خانوادهٔ هموتوپ از توابع



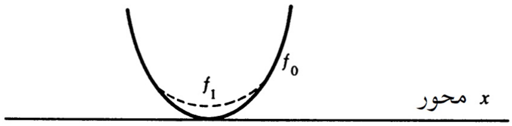
شکل ۲۱.۱: عبور منحنی از نقطه، پایدار نیست

در دنیای حقیقی درک مشاهدات و اندازه‌گیری‌های فیزیکی، هیچ رابطهٔ تابعی یا کمیت پیوسته‌ای، هرگز به صورت کامل مشخص نمی‌گردد. از این جهت، تنها آن خواصی از نگاشتها از دید فیزیک با معنی‌اند که وقتی نگاشت کمی تغییر شکل می‌یابد به قوت خود باقی بمانند. یک چنین خواصی را خاصیت‌های پایدار می‌نامیم، و گردایه‌ای از نگاشتها که دارای یک خاصیت پایدار بخصوص هستند را تحت عنوان ردهٔ پایدار از نگاشتها ارجاع می‌دهیم. به ویژه، یک خاصیت پایدار است مشروط به اینکه هر وقت $f_0 : X \longrightarrow Y$ واجد خاصیتی باشد و $f_t : X \longrightarrow Y$ یک هوموتوپی f_0، آنگاه بازاء یک $\varepsilon > 0$ ای، هر f_t ی با $t < \varepsilon$ نیز واجد آن خاصیت باشد.

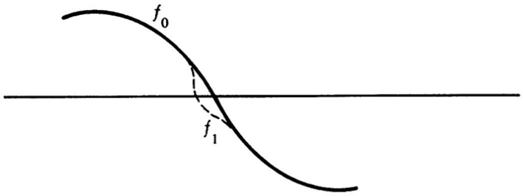
به عنوان مثال، خم‌های در صفحه، نگاشتهای هموار از $\mathbb{R}^1$ به $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیریم. این خاصیت که خمی از مبدأ بگذرد یک خاصیت پایدار نیست، چرا که تکان کوچکی در این نگاشتها بلافاصله باعث می‌شود که خم از 0 نگذرد. (به شکل ۲۱.۱ نگاه کنید). خاصیت قطع کردن محور x ها به توسط یک خم

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

نیز پایدار نیست (شکل ۲۲.۱). اما خاصیت قطع کردن محور x ها به طور تراگرد خاصیتی است پایدار، که به راحتی می‌توانید این امر را تحقیق کنید (شکل ۲۳.۱). این وضعیت بسیار کلیت دارد. شرط طبیعی اشتراک داشتن به هیچ وجه پایدار نیست، و لذا در دنیای فیزیک بی‌معنی است. تراگردی، مفهومی که در ابتدا کلاً غیر شهودی می‌نماید، در واقع آن چیزی است که می‌توانیم به دنبالش باشیم.



شکل ۲۲.۱: برخورد غیر تراگرد پایدار نیست



شکل ۲۳.۱: برخورد تراگرد پایدار نیست

ثابت می کنیم که تمامی خواص دیفرانسیلی نگاشتهای $X \longrightarrow Y$ مطرح شده تا اینجا، مشروط به اینکه X فشرده باشد، پایدارند.

قضیه پایداری رده‌های زیر از نگاشتهای هموار از یک منیفلد فشرده X بتوی یک منیفلد دیگر Y رده‌هایی پایدارند:

الف) دیفئومورفیسم‌های موضعی.

ب) ایمرشنها.

ج) سابمرشنها.

د) نگاشتهای تراگرد به یک زیرمنیفلد بسته به خصوص $Z \subset Y$.

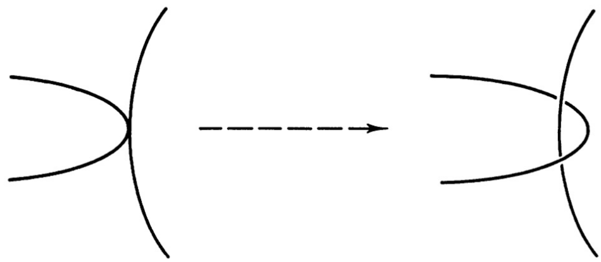
ه) نشانندهها.

و) دیفئومورفیسمها.

مفهوم پایداری بصیرتی در ارتباط با تراگردی را موجب می‌گردد. به عنوان مثال، جرا دو خم در $\mathbb{R}^3$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

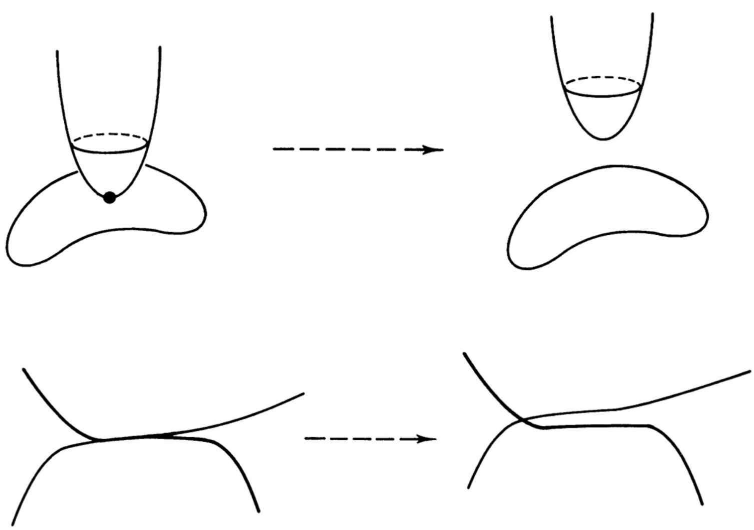
هیچوقت یکدیگر را به طور تراگرد قطع نمی‌کنند مگر آنکه اصلاً متقاطع نباشند؟ پاسخ صوری به آن این است که چون $1 + 1 < 3$، ولی دلیل هندسی‌تری هم وجود دارد. با ایجاد تغییر شکل کوچکی در یکی از خم‌ها، به راحتی می‌توان آنها را کلاً جدا از هم کرد؛ مقطع آنها پایدار نیست (شکل ۲۴.۱). همین اصل،



شکل ۲۴.۱: برخورد دو منحنی در $\mathbb{R}^3$ هیچگاه تراگرد نیست

یک دلیل حقیقی برای همه نتیجه گیری‌های بعدی و خود به خود تعریف تراگردی را توصیف می‌کند. اگر $\dim X + \dim Z < \dim Y$، و $f : X \longrightarrow Y$ منیفلد Z را هدف بگیرد، آن وقت f را می‌توان چنان تغییر شکل داد که خود به خود از Z دوری کند. بنابراین هیچ نگاشت f ای نمی‌تواند Z را به طور پایدار قطع کند.

به علاوه، دیگر مقاطع غیر تراگرد، که بر حسب بعد از دید حسابی رد نشده‌اند، را از همین نقطه نظر به صورت نمودارهای در شکل ۲۵.۱ می‌توان توصیف کرد.



شکل ۲۵.۱: پایداری برخوردهای تراگرد و عدم پایداری برخوردهای غیر تراگرد

برهان: پایداری چهار ردهٔ اول به یک طریق ثابت می‌گردد. دیفئومورفیسم‌های موضعی دقیقاً ایمرشن‌های

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

در حالت خاص $\dim X = \dim Y$ هستند، بنابراین از حالت (ب) آغاز می‌کنیم. اگر f_t یک هوموتوپی برای ایمرشن f_0 باشد، بایستی یک $\varepsilon > 0$ چنان ترتیب بدهیم که $d(f_t)_x$ بازاء جمیع نقاط (x,t) در $X\times(0,\varepsilon) \subset X\times I$ یک به یک باشد. فشردگی X ایجاب می‌نماید که هر همسایگی باز از $X\times\{0\}$ در $X\times I$ اگر $\varepsilon > 0$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، یک $X\times[0,\in]$ ای را دربر دارد. بنابراین تنها نیاز داریم ثابت کنیم که هر نقطهٔ $(x_0,\circ)$ دارای همسایگی U در $X\times I$ است که به طوریکه $(df_t)_x$ برای $(t,x)\in U$ یک به یک می‌باشد. چون این ادعا موضعی است، تنها کافی است ثابت کنیم که وقتی X تکهٔ بازی از $\mathbb{R}^k$ و Y تکه بازی از $\mathbb{R}^\ell$ است، این حکم برقرار است. یک به یک بودن $d(f_0)_x$ ایجاب می‌کند که ماتریس $\ell\times k$ ژاکوبی آن $\left(\frac{\partial(f_0)_i}{\partial x_j}(x_0)\right)$، یک زیر ماتریس $k\times k$ با دترمینان ناصفر را در بر دارد. اما هر مشتق جزیی $\frac{\partial(f_t)_i}{\partial x_j}(x)$ به عنوان تابعی بر $X\times I$ پیوسته است. چون تابع دترمینان نیز پیوسته است، برای کلیه نقاط (x,t) در یک همسایگی از $(x_0,0)$، همانطور که ادعا شد، بایستی همان ماتریس جزیی $k\times k$ نامنفرد باشد.

اثبات در مورد ردهٔ (ج) جداً بدیهی است. در مورد (د) یادآور می‌شویم که تراگردی نسبت به Z را به طور موضعی بر اساس یک شرط سابمرشن می‌توان ترجمه کرد، و لذا اثبات (د) هم فوق‌العاده شبیه به بالا است.

در مورد (ه)، اکنون تنها نیاز به این داریم که نشان دهیم اگر f_0 یک به یک باشد، f_t هم برای t های به قدر کافی کوچک یک به یک می‌باشد. این اثبات به تمرین ۱۰ بخش ۳ بستگی دارد. نگاشتی هموار چون $G : X\times I \longrightarrow Y\times I$ با ضابطهٔ $G(x,t) = (f_t(x),t)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت اگر (ه) غلط باشد، دنباله‌ای $\{t_i\}$ همگرا به ۰ و نقاط متمایز $x_i,y_j\in X$، چنان یافت می‌گردند که $G(x_i,t_i) = G(y_j,t_i)$. چون X فشرده است، با انتخاب زیر دنباله‌هایی مناسب می‌توانیم به دو دنبالهٔ $\{y_i\},\{x_i\}$ که به ترتیب به y_0, x_0 همگرایند برسیم. در این صورت

$$G(x_0,\circ) = \lim G(x_i,i) = \lim(y_i,i) = G(y_0,\circ)$$

اما $G(x_0,\circ) = f_0(x_0)$ و $G(y_0,\circ) = f_0(y_0)$، پس اگر f_0 یک به یک باشد، بایستی x_0 همان y_0 باشد. اکنون، می‌توانیم به طور موضعی در فضای اقلیدسی کار بکنیم. ماتریس $dG(x_0,\circ)$ دقیقاً

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & d(f_0)_{x_0} & & \vdots \\ & & & a_j \\ \hline \circ & \cdots & \circ & 1 \end{array}\right)$$

است که اعداد a_j مهم نیستند. چون $d(f_0)_{x_0}$ یک به یک است، ماتریسش بایستی k سطر مستقل داشته باشد. بنابراین ماتریس $dG(x_0,\circ)$ دارای $k+1$ سطر مستقل است، و بنابراین $dG(x_0,\circ)$ بایستی یک نگاشت خطی یک به یک باشد. نتیجه اینکه G یک ایمرشن حول $(x_0,\circ)$ است و لذا بایستی بر یک همسایگی از $(x_0,\circ)$ یک به یک باشد. اما برای i های بزرگ، $(y_i,t_i),(x_i,t_i)$ به این همسایگی تعلق دارند، که این خود تناقض است.

بالاخره، (و) را به عنوان تمرین ۸ به شما محول می‌کنیم. □

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

تمرینات

۱. فرض کنید $f_1 : X \longrightarrow Y$ و f_0 هموتوپ باشند. نشان بدهید که یک هموتوپی $\tilde{F} : X\times I \longrightarrow Y$ چنان وجود دارد که بازاء همه $t \in [0,1/4]$ ها $\tilde{F}(x,t) = f_0$ و بازاء همهٔ $t \in [3/4,1]$ ها $\tilde{F}(x,t) = f_1(x)$. [راهنمایی: تابعی هموار $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان بیابید که $\rho(t) = 0$ اگر $t \leq 1/4$ و $p(t) = 1$ اگر $t \geq 3/4$. حال F را یک هموتوپی دلخواه بین f_0 و f_1 بگیرید و قرار بدهید که $\tilde{F}(x,t) = F(x,\rho(t))$.]

۲. ثابت کنید که هموتوپی یک رابطهٔ همارزی است: اگر $f \sim g$ و $g \sim h$، آنوقت $f \sim h$. [راهنمایی: برای اتصال هموتوپی‌ها به هم، به تمرین ۱ نیاز دارید. چرا؟]

۳. نشان دهید که هر منیفلد همبند X همبند قوسی است: بازاء هر دو نقطهٔ دلخواه $x_0, x_1 \in X$، خمی هموار مانند $f : I \longrightarrow X$ با ضابطه $f(1) = x_1$ و $f(0) = x_0$ وجود دارد. [راهنمایی: از تمرین ۲ برای نشان دادن اینکه رابطهٔ «x_0 و x_1 توسط خمی هموار به‌هم وصل می‌شوند» رابطه‌ای همارزی بر X است استفاده کنید، و تحقیق کنید که رده‌های همارزی آن بازند.]

۴. در صورتی یک منیفلد انقباض‌پذیر گفته می‌شود که نگاشت همانی‌اش با یک نگاشت ثابتی، $X \longrightarrow \{x\}$، که x نقطه‌ای از X است، هموتوپ باشد. بررسی کنید که اگر X انقباض‌پذیر باشد، آنگاه همهٔ نگاشتهای از منیفلد دلخواه Y بتوی X هموتوپند. (و بالعکس.)

۵. نشان دهید که $\mathbb{R}^k$ انقباض‌پذیر است.

۶. منیفلد X در صورتی همبند ساده است که همبند بوده و هر نگاشت از دایرهٔ $\mathbb{S}^1$ بتوی X با نگاشتی ثابت هموتوپ باشد. تحقیق کنید که همهٔ فضاهای انقباض‌پذیر همبند ساده‌اند، ولی خود را متقاعد کنید که عکس این مطلب غلط است.(بعد ابزار بیشتری که اثبات غلط بودن عکس این حکم را به راحتی میسر می‌سازند، به دست می‌دهیم.)

۷. نشان دهید که اگر k فرد باشد نگاشت متقاطر از $\mathbb{S}^k$ بتوی $\mathbb{S}^k$ با ضابطهٔ $x \mapsto -x$، با نگاشت همانی هموتوپ است. [راهنمایی: با $k = 1$ شروع کنید و از نگاشت خطی تعریف شده توسط $\begin{pmatrix} \cos\pi t & -\sin\pi t \\ \sin\pi t & \cos\pi t \end{pmatrix}$ استفاده کنید.]

۸. ثابت کنید که دیفئومورفیسمها، رده‌ای پایدار از نگاشتهای هموار از یک منیفلد فشرده بتوی یک زیرمنیفلد دلخواه تشکیل می‌دهد؛ یعنی، قسمت (و) قضیه پایداری را اثبات کنید. [راهنمایی: به حالت همبند تبدیل کنید. سپس از اینکه دیفئومورفیسم‌های موضعی مجموعهٔ باز را به مجموعه‌های باز می‌برند، این را به بخش (ه) قضیه پایداری بدل کنید.]

۹. ثابت کنید که قضیه پایداری در مورد دامنه‌های غیر فشرده غلط است. در اینجا مثال نقضی می‌آوریم، اما سایر آنها را که نشان می‌دهند راه به کجا می‌رود خود بیابید. گیریم $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد با $\rho(s) = 1$ برای $|s| < 1$، و $\rho(s) = 0$ برای $|s| > 2$. $f_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $f_t(x) = x\rho(tx)$ تعریف می‌کنیم. تحقیق کنید که این مثال نقضی برای همهٔ شش بخش قضیه است. [برای بخش (د) از $Z = \{0\}$ استفاده کنید.]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۱۰. یک تغییر شکل یک زیرمنیفلد Z در Y یک هوموتوپی هموار $i_t : Z \longrightarrow Y$ است که t_0 نگاشت شمول $Y \longrightarrow Z$ است و هر i_t ای یک نشاننده است. بنابراین $Z_t = i_t(Z)$ یک تغییر شکل هموار زیرمنیفلدای از Y با $Z_0 = Z$ است. نشان دهید که اگر Z فشرده باشد، آنگاه هر هوموتوپی i_t از نگاشت شمولش برای t های کوچک یک تغییر شکل است. مثال نقضی برای حالت غیر فشردگی ارائه کنید (به جز حالت $\dim X = \dim Y$ که بدیهی است).

۱۱. می‌خواهیم از تعمیم مستقیمی از مفهوم هوموتوپی استفاده کنیم. فرض کنیم که $f : X \longrightarrow Y$ یک خانواده از نگاشتهای هموار باشد، که به توسط یک پارامتر s و بر زیر مجموعه S در یک زیر فضای اقلیدسی تغییر می‌کند. در صورتی خواهیم گفت $\{f_s\}$ یک خانواده هموار از نگاشتها است که نگاشت $F : X \times S \longrightarrow Y$ با ضابطهٔ $F(x, s) = f_s(x)$، هموار است. تحقیق کنید که قضیه پایداری، بی‌درنگ به شکل ذیل تعمیم می‌یابد: اگر f_0 به یکی از رده‌های لیست شده متعلق باشد، آنگاه $\varepsilon > 0$ ای چنان وجود دارد که اگر $|s_0 - s| < \varepsilon$ آنگاه f_s نیز به همان رده متعلق است.

بخش ۷.۱ قضیه سارد و توابع مورس

پیشنگارهٔ یک مقدار منظم از نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ زیرمنیفلد خوبی از X است. این حکم ساده ما را بر آن داشت تا تعمیمی از مفهوم منظم بودن (یعنی، تراگردی) بیاوریم که انتظار داریم کلیدی برای پرده‌برداری از بعضی از رموز توپولوژی منیفلدها باشد. اما شرط منظم بودن بر مقادیر f شرطی بسیار قوی است. شاید شرط منظم بودن آنچنان قوی باشد که آنجاهایی که بشود قضیه پیشنگاره را بکار برد حقیقتاً بندرت پیش بیایند. عملاً درست عکس این مطلب درست است، همچنان که دومین قضیهٔ عمیق ما که بر گرفته از حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته است بر این امر صحه می‌گذارد.

قضیهٔ سارد. اگر $f : X \longrightarrow Y$ نگاشت هموار دلخواهی بین منیفلدها باشد، آنگاه تقریباً هر نقطهٔ موجود در Y یک مقدار منظم f است.

ممکن است حکم بالا قدری مبهم به نظر برسد ولی این امر اصلاح خواهد شد. اولاً، روشن می‌کنیم که یک مجموعهٔ دلخواه A در $\mathbb{R}^\ell$ در صورتی دارای اندازهٔ صفر است که آن را به توسط تعدادی شمارا از حجم‌های مستطیل شکل با حجم کل به اندازهٔ کافی کوچک بتوان پوشانید. البته، یک حجم مستطیلی در $\mathbb{R}^\ell$ دقیقاً عبارت است از حاصلضربی دکارتی از ℓ بازه در $\mathbb{R}^\ell$، و حجماش برابر است با حاصلضرب طول‌های ℓ بازهٔ مذکور. بنابراین A در صورتی دارای اندازهٔ صفر است که بازاء هر $\varepsilon > 0$، گردایه‌ای شمارا مانند $\{S_1, S_2, \cdots\}$ از حجم‌های مستطیلی در $\mathbb{R}^\ell$ چنان یافت گردد که A مشمول در اتحاد S_i ها باشد و

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(S_i) < \varepsilon.$$

مفهوم به اندازهٔ صفر بودن توسط پیمایشهای موضعی به منیفلدها تعمیم می‌یابد. یک زیر مجموعهٔ دلخواه $C \subset Y$ در صورتی به اندازهٔ صفر است که بازاء هر پیمایش موضعی φ از Y، پیشنگارهٔ $\varphi^{-1}(C)$ در فضای اقلیدسی به اندازهٔ صفر باشد. لزومی ندارد که حقیقتاً شرط برای هر پیمایشی تحقیق شود، زیرا

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

مشکل نیست نشان بدهیم که اگر $A \subset \mathbb{R}^\ell$ دارای اندازهٔ صفر باشد و $g : \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ یک نگاشت هموار باشد، آنوقت $g(A)$ نیز به اندازهٔ صفر است. (اثبات در ضمیمهٔ الف است.) نتیجه اینکه، C به اندازهٔ صفر است مشروط به اینکه آنرا توسط گردایه‌ای از پیمایشهای موضعی φ_α صادق در این شرط که «$\varphi_\alpha^{-1}(C)$ برای هر α ای به اندازهٔ صفر است»، بتوان پوشانید.

ادعای موجود در قضیه سارد مبنی بر اینکه «تقریباً هر نقطه» از Y، مقداری منظم برای X است بدین معنی می‌باشد که آن نقاطی که مقدار منظم نیستند مجموعه‌ای به اندازهٔ صفر تشکیل می‌دهند. چون متمم مقادیر منظم، مقادیر بحرانی هستند، قضیهٔ سارد را به شکل زیر می‌توان بازنویسی کرد:

قضیهٔ سارد. (با تجدید بیان) مجموعهٔ مقادیر بحرانی هر نگاشت هموار بین منیفلدها نظیر $f : X \longrightarrow Y$ به اندازهٔ صفر است.

اثبات قضیه سارد به دلیل اینکه حکم آن مزه‌ای متفاوت با سایر موضوعات توپولوژیکی می‌دهد که قضیه در آن بکار می‌رود، به ضمیمهٔ الف موکول شده است.

چندان شگفت‌انگیز نیست که بدانیم هیچ حجم مستطیلی در $\mathbb{R}^\ell$ به اندازهٔ صفر نیست، و بنابراین در مجموعه‌ای به اندازهٔ صفر هیچ یک از آنها جا نمی‌گیرد. (اثباتی از این مطلب را در ضمیمه الف می‌توان یافت.) نتیجه اینکه، هیچ مجموعهٔ اندازهٔ صفری در یک منیفلد Y، هیچ مجموعهٔ باز غیر خالی‌ای را شامل نیست. بنابراین نتیجهٔ ذیل را مشاهده می‌کنیم:

نتیجه. مقادیر منظم هر نگاشت هموار به شکل $f : X \longrightarrow Y$ در Y چگال است. در واقع، اگر $f_i : X_i \longrightarrow Y$ تعدادی شمارا از نگاشتهای هموار باشند، آنگاه نقاطی از Y که به طور همزمان مقادیر منظم برای همهٔ f_i ها هستند، چگالند.

برهان: دومین حکم به این دلیل درست است که اجتماع هر گردایه شمارا از مجموعه‌های به اندازهٔ صفر $\{C_1, C_2, \cdots\}$ مجموعه‌ای است به اندازهٔ صفر. برای $\varepsilon > 0$ مفروض، بازاء هر i ای یک دنباله از حجمهای مستطیل شکل $\{S_1^i, S_2^i, \cdots\}$ که C_i را می‌پوشانندچنان انتخاب می‌نماییم که $\sum_{j=1}^\infty \text{Vol}(S_j^i) < \varepsilon/2^i$. در این صورت، گردایهٔ شمارای $\{S_j^i\}$ اجتماع $\cup_i C_i$ را پوشانده و حجم کل آن کمتر از $\sum_{i=1}^\infty \varepsilon/2^i = \varepsilon$ است. حال، برای اثبات نتیجه، کافی است C_i ها را مجموعهٔ نقاط بحرانی f_i ها بگیریم. □

دو مطلب جدید در ارتباط با مفاهیمی که اخیراً مطرح کردیم بیان می‌نماییم. اگر $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی هموار باشد، نقطه $x \in X$ در صورتی یک نقطه منظم f است که $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y)$ پوشا باشد؛ همچنین می‌توان گفت که f در x منظم است. (که بنابراین دقیقاً به معنی «f در x سابمرشن است» می‌باشد.) اگر df_x پوشا نباشد، x یک نقطه بحرانی f است. این اصطلاحات مرسوم و بسیار استاندارند، ولی متاسفانه، با اصطلاحات مشابه «مقدار منظم» و «مقدار بحرانی» به راحتی اشتباه می‌شوند. مطلب را برای خود روشن کنید! مقادیر منظم و بحرانی در Y اقامت دارند؛ نقاط منظم و بحرانی مقیم در X اند. [یادداشت: y در صورتی یک مقدار منظم است که هر $n \in f^{-1}(y)$ ای یک نقطهٔ منظم باشد. y در صورتی یک مقدار بحرانی است که حداقل یک $n \in f^{-1}(y)$، یک نقطهٔ بحرانی باشد.]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

به ویژه، یادآور می‌شویم که قضیه سارد می‌گوید مجموعه مقادیر بحرانی هر نگاشت دلخواه $f : X \longrightarrow Y$ در Y به اندازهٔ صفر است، نه اینکه مجموعهٔ نقاط بحرانی در X به اندازهٔ صفر می‌باشد. برای بهتر به یاد داشتن این مطلب، نگاشت ثابتی از X به Y را در نظر بگیرید؛ اگر بعد $Y > 0$، مجموعه نقاط بحرانی آن کل X است و بنابراین مشخصاً به اندازهٔ صفر نیست.

بیایید با کاربردی نوعی از قضیه سارد، آخرین قسط ما از توصیف رفتار بهینهٔ موضعی نگاشتها، سودمندی قضیه سارد را درک کنیم. در اینجا ما تنها توابعی هموار بر یک منیفلد X را در نظر می‌گیریم – یعنی، نگاشتهایی به شکل $f : X \longrightarrow Y$. در یک $x \in X$ به خصوص، f یا منظم است و یا اینکه $d f_x = 0$. اگر منظم باشد، آنگاه می‌توانیم یک دستگاه مختصاتی به گرد x چنان بیابیم که f دقیقاً عبارت باشد از اولین تابع مختصاتی. پس بنابراین جداً همه چیز در مورد رفتار موضعی f در حول و حوش نقاط منظم می‌دانیم، حداقل در حد دیفئومورفیسم. اما در ارتباط با نقاط بحرانی چه می‌توانیم بگوییم ؟ ملاحظات توپولوژیکی تصدیق می‌کند که اغلب نگاشتها بایستی دارای ماکزیمم و مینمم مقدار باشد. اما اگر $f(x)$ یک مقدار اکسترموم باشد، در این صورت به روشنی f نمی‌تواند حول و حوش x تابعی مختصاتی باشد، و لذا بایستی $d f_x$ صفر باشد. بنابراین هر تابع بر دامنه‌ای فشرده حداقل دو نقطه بحرانی دارد (مگر وقتی که X یک نقطه‌ای باشد).

لااقل یک «بهترین فرم» برای توابع به گرد نقاط بحرانی وجود دارد. بیایید ابتدا در $\mathbb{R}^k$ کار کنیم، با فرض اینکه f یک نقطه بحرانی در x دارد. احتمالاً از حساب دیفرانسیل و انتگرال بیاد دارید که وقتی $d f_x = 0$ – یعنی، وقتی همهٔ مشتقات جزیی $\partial f/\partial x_1$، . . . و $\partial f/\partial x_k$ در x صفراند – آزمون نسبتاً مستقیمی برای مشخص کردن اینکه f در نقطهٔ x ماکزیمم است، مینمم است، و یا اینکه به شکل زین اسب می‌باشد، وجود دارد. این آزمون مبتنی بر مشتق‌های دوم f است، و آنها توأماً وقتی ماتریس هسیان از مشتق‌های جزیی مرتبهٔ دوم

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

را تشکیل می‌دهند و این ماتریس در x ناتکین است، اطلاع مشخصی را به دست می‌دهند. در صورتی که هسیان در نقطهٔ بحرانی x ناتکین باشد، می‌شود گفت که x یک نقطهٔ بحرانی ناتباهیدهٔ f است.

نقاط بحرانی ناتباهیده حداقل از یک حیث پر اهمیت‌اند: از سایر نقاط بحرانی f مجزایند. برای ملاحظهٔ این مطلب، نگاشتی مانند $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ با فرمول $g = (\partial f/\partial x_1, \cdots, \partial f/\partial x_k)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت وقتی و تنها وقتی $d f_x = 0$ که $g(x) = 0$. به علاوه، مشتق $d g_x$ در نمایش ماتریسی استاندارد، چیزی جز ماتریس هسیان f در x نیست. پس اگر x ناتباهیده باشد، آنگاه نه تنها $g(x) = 0$ بلکه g یک همسایگی از x را به طور دیفئومورفیسم بروی یک همسایگی از ۰ نیز می‌نگارد. بنابراین g در هیچ نقطهٔ دیگری در این همسایگی نمی‌تواند صفر باشد، و بنابراین f هیچ نقطهٔ بحرانی دیگری در آنجا ندارد.

رفتار موضعی یک تابع در یک نقطهٔ بحرانی ناتباهیده، در حد دیفئومورفیسم، بر اساس قضیه‌ای به نام لم مورس به طور کامل مشخص می‌گردد. این قضیه «صورت قانونی» دقیقاً شبیه به قضایای رده‌بندی موضعی برای ایمرشن‌ها و سابمرشن‌ها است؛ در یک دستگاه مختصاتی به خصوص، تابع f بر اساس ماتریس هسیان مشتق‌های دوم در نقطهٔ بحرانی صراحتاً بیان می‌گردد.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

لم مورس. فرض کنید که نقطهٔ $a\in\mathbb{R}^k$ یک نقطه بحرانی ناتباهیدهٔ تابع f بوده، و $(h_{ij})=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)$ ماتریس هسیان f در x باشد. در این صورت، یک دستگاه مختصات موضعی مانند $(x_1,\cdots,x_k)$ به گرد a چنان وجود دارد که در نزدیکی a

$$f=f(a)+\sum h_{ij}x_ix_j$$

بنابراین هر تابعی در نزدیکی یک نقطهٔ بحرانی ناتباهیده، به طور موضعی با یک چند جمله‌ای درجهٔ دوم هم‌ارز است، که ضرایب آن درآیه‌های ماتریس هسیان f اند. به وضوح لم مورس، که ما آن را نه اثبات می‌کنیم و نه از آن استفاده می‌کنیم، از این ادعا که هسیان برای یافتن اینکه در چه جاهایی f ماکزیمم یا مینمم مقدار دارد، به کار می‌رود بسیار فراتر و کلی‌تر است. (به تمرین ۱۱ توجه کنید.)

مفهوم ناتباهیدگی به توسط پیمایشها بر منیفلدها نیز تعبیر دارد. فرض کنیم که $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ یک نقطهٔ بحرانی در x داشته باشد و φ یک پیمایش موضعی باشد که مبداء را به x می‌برد. در این صورت $d(f\circ\varphi)_0=df_x\circ d f\varphi_0=0$، و بنابراین 0 یک نقطهٔ بحرانی برای $f\circ\varphi$ نیز هست. اعلام می‌کنیم که در صورتی x یک نقطهٔ بحرانی ناتباهیده f است که $\circ$ برای $f\circ\varphi$ ناتباهیده باشد. مشکل کار کردن با چنین تعاریف موضعی این است که همیشه باید ثابت شود که انتخاب پیمایشها مهم نیست. در این حالت، اگر φ_2,φ_1 دو انتخاب باشند، آنوقت $f\circ\varphi_1=(f\circ\varphi_2)\circ\psi$، که $\psi=\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$. پس بایستی ثابت بشود.

لم. فرض کنید که f تابعی بر $\mathbb{R}^k$ با یک نقطهٔ بحرانی ناتباهیده در 0 باشد، و ψ یک دیفئومورفیسم با $\psi(\circ)=0$. در این صورت $f\circ\psi$ نیز یک نقطهٔ بحرانی ناتباهیده در $\circ$ دارد.

برهان: با فرم سادهٔ قاعدهٔ زنجیری در $\mathbb{R}^k$ محاسبه می‌کنیم. گیریم $f'=f\circ\psi$، و فرض کنیم H و H' ماتریس‌های هسیان به ترتیب f و f' در 0 باشند. بایستی نشان دهیم که $\det(H)\neq 0$ ایجاب می‌نماید که $\det(H')\neq 0$. اکنون قاعدهٔ زنجیری می‌گوید که

$$\frac{\partial f'(x)}{\partial x_i}(x)=\sum_\alpha\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}[\psi(x)]\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_i}(x).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f'}{\partial x_i\partial x_j}(\circ)=&\sum_\alpha\sum_\beta\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}(\circ)\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_i}(\circ)\frac{\partial\psi_\beta}{\partial x_j}(\circ)\\&+\sum_\alpha\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(\circ)\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial x_i\partial x_j}(\circ).\end{aligned}$$

چون $\circ$ یک نقطهٔ بحرانی f است، هر یک از جملات در دومین مجموع در سمت راست صفر است. پس در نمایش ضرب ماتریسی، $H'=(d\psi_0)^tH(d\psi_0)$ که t به معنی «ترانهاد» است. اکنون چون

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

ψ دیفئومورفیسم است، $\det(d\psi_0) \neq 0$، و $\det(d\psi_0)^t = \det(d\psi_0)$. در این صورت قاعدهٔ ضرب دترمینان‌ها نشان می‌دهد که $\det(H') \neq 0$ مشروط به اینکه $\det(H) \neq 0$.

در حالی که تحقیق ناتباهیدگی بر منیفلدها تعریف می‌شود، از جهت کلی چندان جالب به نظر نمی‌رسد. چندین دلیل مرتبط به هم و تنگاتنگ برای اهمیتش وجود دارد. اولاً، لم مورس رفتار توابع در حوالی نقاط ناتباهیده را به کلی توصیف می‌کند و باعث ایجاد ساختارهای جزئی می‌گردد. ثانیاً، توابعی که نقاط بحرانی آنها به تمامی ناتباهیده‌اند - که به نام توابع مورس مشهورند - مطالب زیادی در ارتباط با توپولوژی منیفلدهای زمینه‌شان به ما می‌دهند. ما تنها قادریم تا در دو مورد به طور ملموس، بدون لطافت این موضوع جداً عالی را بیان کنیم (ضمیمهٔ A را به دنبال فصل ۲، و تمرینی از بخش ۵ از فصل ۳ مطالعه کنید). ولی مارستون مورس،[۱] در کتاب خودش [۴] ، توصیفی شهودی از حالت دو بعدی را به نحو احسن آورده است. مرجع جالب دیگر کتاب نظریهٔ مورس اثر جان میلنر [۳] است؛ مشخصاً این کتاب را از هر جایی می‌توانید شروع کنید. ولی جداً توصیه می‌کنیم که مقدمهٔ غیر صوری آن در سه صفحهٔ اول را مطالعه کنید. (جان میلنر [۲] اثبات ساده‌ای از لم مورس را هم مطرح نموده است.)

سومین دلیل اهمیت ناتباهیدگی این است که وضعیتی معمولی است؛ فراوانی نقاط بحرانی بتاهیده جداً بسیار ناچیز است. در واقع، از آنچه که سارد بیان داشت استنباط می‌کنیم که عملاً عدهٔ فوق‌العاده زیادی از توابع، تابع مورس هستند. فرض کنید که منیفلد X در $\mathbb{R}^n$ جا گرفته باشد، و x_1، . . . و x_n توابع مختصاتی معمولی بر $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر f تابعی بر X باشد و $a = (a_1, \cdots, a_n)$ یک $n-$ تایی از اعداد، تابع جدید f_a بر X را با ضابطهٔ

$$f_a := f + a_1\, x_1 + \cdots + a_n\, x_n$$

تعریف می‌کنیم. حکمی که اشاره شد، چنین است:

قضیه. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ هر چه که باشد، بازاء تقریباً هر $a \in \mathbb{R}^n$ ای تابع f_a یک تابع مورس بر X است.

مثل قبل، کلمهٔ «تقریباً هر» به این معنی است که مقادیر a ای که بازاء آنها ادعا غلط است، تنها مجموعه‌ای به اندازهٔ صفر تشکیل می‌دهند.

ابتدا این حکم را در $\mathbb{R}^k$ ثابت می‌کنیم.

لم. گیریم f تابع هموار بر مجموعهٔ بازی مانند U از $\mathbb{R}^k$ باشد. در این صورت، بازاء تقریباً همهٔ $k-$ تایی‌های $a = (a_1, \cdots, a_k)$ در $\mathbb{R}^k$، تابع $f_a := f + a_1\, x_1 + \cdots + a_k\, x_k$ یک تابع مورس بر U است.

---

[۱] Harold Calvin Marston Morse :: ریاضیدانی امریکایی که بین سالهای ۱۸۹۲ تا ۱۹۷۷ می‌زیسته و بیشتر به خاطر کارهایی که در زمینه حساب تغییرات فراگیر انجام داده است، معروف می‌باشد. روشهای او را امروزه بنام نظریه مورس می‌شناسند.

[۲] John Willard Milnor :: ریاضیدانی امریکایی متولد ۱۹۳۱ که بخاطر کارهایش در زمینه توپولوژی دیفرانسیل، $K-$تئوری و دستگاههای دیفرانسیلی معروف است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

برهان: از نگاشت $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ با ضابطهٔ $g = (\partial f/\partial x_1, \cdots, \partial f/\partial x_k)$ مجدداً استفاده می‌کنیم. اکنون مشتق f_a در نقطهٔ p به صورت مختصاتی به شکل

$$(df_a)_p = \left(\frac{\partial f_a}{\partial x_1}(p), \cdots, \frac{\partial f_a}{\partial x_k}(p)\right) = g(p) + a,$$

نمایش داده می‌شود. بنابراین، وقتی و تنها وقتی p یک نقطهٔ بحرانی f_a است که $g(p) = -a$. به علاوه، چون f_a و f مشتق‌های جزیی دوم یکسانی دارند، هسیان f در p ماتریس $(dg)_p$ می‌باشد. حال فرض کنیم که $-a$ یک مقدار منظم برای g باشد. در این صورت، هرگاه $g(p) = -a$، $(dg)_p$ ناتکین خواهد بود. در نتیجه، هر نقطهٔ بحرانی f_a ناتباهیده است. ولی قضیه سارد، ایجاب می‌کند که $-a$ بازاء تقریباً همهٔ $a \in \mathbb{R}^k$ ها مقدار منظم g باشد.

برهان: فرض کنیم x نقطه‌ای دلخواه در X باشد و x_1، . . . و x_n توابع مختصاتی استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ باشند. در این صورت تحدید k تایی از این توابع مختصاتی مثل x_{i_1}، . . . و x_{i_k} به X یک دستگاه مختصاتی در یک همسایگی از x تشکیل می‌دهند. این تمرین بود، ولی آن را در اینجا ثابت می‌کنیم. اگر φ_1، . . . و φ_n پایه استاندارد برای تابعی‌های خطی بر $\mathbb{R}^n$ باشند، در این صورت k تایی از اینها مثل φ_{i_1}، . . . و φ_{i_k} هنگامی که به زیر فضای برداری $T_x(X)$ تحدید شوند، مستقل خطی‌اند. چون مشتق تابع مختصاتی $x_i : \mathbb{R}^n$ درست همان تابع خطی $\varphi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ است، مشتق در x تحدید x_i به X عبارت است از تحدید φ_i به $T_x(X)$. بنابراین، استقلال خطی φ_{i_1}، . . . و φ_{i_k} بر $T_x(X)$ موجب می‌شود که نگاشت $(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}) : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ یک دیفئومورفیسم موضعی در x باشد.

بنابراین X را با زیر مجموعه‌هایی باز U_α چنان می‌توانیم بپوشانیم که بر هر U_α ای یک k تایی از توابع x_1، . . . و x_n یک دستگاه مختصات تشکیل بدهند. به علاوه بنا به دومین اصل شمارایی، می‌توانیم فرض کنیم که تنها تعدادی شمارا از U_α ها موجود است.

حال فرض می‌کنیم که U_α یکی از این مجموعه‌ها باشد. بازاء هر $n-k$ تایی $c = (c_{k+1}, \cdots, c_n)$، تابع $f_{(\circ,c)} := f + c_{k+1}\, x_{k+1} + \cdots + c_n\, x_n$ را در نظر می‌گیریم. لم ایجاب می‌کند که بازاء تقریباً همهٔ $b \in \mathbb{R}^k$ ها، تابع

$$f(b,c) := f_{(\circ,c)} + b_1\, x_1 + \cdots + b_k\, x_k$$

بر U_α یک تابع مورس باشد. حال گیریم S_α مجموعه نقاطی a در $\mathbb{R}^n$ باشد به طوری که f_a یک تابع مورس بر U_α نیست (باشد). دقیقاً نشان می‌دهیم که هر «برش افقی» $S_\alpha \cap \mathbb{R}^k \times \{c\}$ به اندازهٔ صفر است (هنگامی که به عنوان زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^k$ تصور شوند). بایستی باور داشته باشید که اگر زیر مجموعهٔ مفروضی از $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم که همهٔ برش‌های افقی آن دارای اندازهٔ صفر در $\mathbb{R}^k$ باشند، آنگاه این مجموعه لزوماً در $\mathbb{R}^n$ به اندازهٔ صفر خواهد بود: این صورتی از «قضیه فوبینی» است که در ضمیمه (الف) به اثبات می‌رسد. با فرض صحت آن به صورت موقت، نتیجه می‌گیریم که هر S_α در $\mathbb{R}^n$ به اندازهٔ صفر است.

به وضوح، تابع f دارای نقطهٔ بحرانی تباهیده بر X است اگر و فقط اگر در یک U_α، یک چنین نقطه‌ای داشته باشد. بنابراین، مجموعه $n-$ تایی‌های a که بازاء آنها f_a یک تابع مورس بر X نیستند اجتماعی از S_α ها است. چون اجتماعی شمارا از مجموعه‌های به اندازهٔ صفر دارای اندازهٔ صفر است، کار را تمام می‌کنیم. □

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

تمرینات

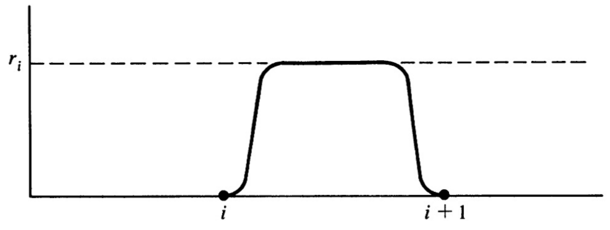
۱. نشان دهید که اگر $k < \ell$ آنگاه $\mathbb{R}^k$ در $\mathbb{R}^\ell$ به اندازهٔ صفر است.

۲. گیریم A زیر مجموعه‌ای به اندازهٔ صفر از $\mathbb{R}^k$ باشد. نشان دهید $A \times \mathbb{R}^\ell$ در $\mathbb{R}^{k+\ell}$ به اندازهٔ صفر است. (این تمرین ۱ را موجب می‌شود. چگونه؟)

۳. فرض کنید Z زیرمنیفلدای از X با $\dim Z < \dim X$ باشد. ثابت کنید Z در X به اندازهٔ صفر است (بدون استفاده از قضیه سارد!)

۴. ثابت کنید که اعداد گویا، با اینکه چگالند، در $\mathbb{R}^1$ به اندازهٔ صفرند.

۵. تابعی هموار مانند $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ که مجموعه مقادیر بحرانی‌اش چگال هستند ارائه بدهید.[راهنمایی: اعداد گویا را به صورت یک دنباله $r_0, r_1, \cdots$ بنویسید. حال تابعی هموار بر $[i, i+1]$ بسازید که در نزدیکی نقاط انتهایی‌اش صفر است و r_i مقدار بحرانی آن است به شکل ۲۶.۱ توجه شود).]



شکل ۲۶.۱: مربوط به تمرین ۵

۶. ثابت کنید کره $\mathbb{S}^k$، اگر $k > 1$، همبند ساده است. [راهنمایی: اگر $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^k$ و $k > 1$، قضیه سارد یک نقطه $p \in f(\mathbb{S}^1)$ به ما می‌دهد. حال از تصویر گنجنگاری استفاده کنید.]

۷. قضیه سارد، هنگامی که $\dim X < \dim Y$، اذعان می‌دارد که نگارهٔ هر نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ در Y به اندازهٔ صفر است. این قضیه «مینی سارد» را خودتان با فرض این حکم که اگر A در $\mathbb{R}^\ell$ به اندازهٔ صفر باشد و $g : \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ هموار، آنگاه $g(A)$ نیز به اندازهٔ صفر است، اثبات کنید. [راهنمایی: مساله را به حالت نگاشت دلخواه f از یک مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^\ell$ بتوی $\mathbb{R}^\ell$ تحویل کنید. نگاشت $F : U \times \mathbb{R}^{\ell-k} \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ با ضابطهٔ $F(x,t) = f(x)$ را در نظر بگیرید.]

۸. رفتار بحرانی توابع زیر را در مبداء تحلیل کنید. آیا نقطه بحرانی ناتباهیده است؟ آیا مجزا است؟ آیا یک ماکزیمم یا مینیمم موضعی است؟

(الف) $f(x,y) = x^2 + 4y^3$،

(ب) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$،

(ج) $f(x,y) = x^2 + y^4$،

(د) $f(x,y) = x^2 + 11xy + y^2/2 + x^6$،

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

(ه) $f(x,y) = 10xy + y^2 + 75y^3$.

۹. لم مورس را در $\mathbb{R}^1$ ثابت کنید. [راهنمایی: از این لم مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده کنید: بازاء هر تابع f بر $\mathbb{R}$ و نقطهٔ دلخواه $a \in \mathbb{R}$، تابعی دیگر مانند g چنان وجود دارد که
$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + (x-a)^2\,g(x)$$
این حکم را در صفحهٔ ۱۳۰ ثابت می‌کنیم.]

۱۰. فرض کنید $f = \sum a_{ij}x_i x_j$ در $\mathbb{R}^k$. تحقیق کنید که ماتریس هسیان f عبارت است از $H = (a_{ij})$. با تصور $\mathbb{R}^k$ به عنوان فضای برداری بردارهای ستونی، H به صورت یک نگاشت خطی با ضرب کردن عمل می‌کند. نشان دهید که اگر $Hv = 0$، آنگاه f در تمام امتداد خطوط گذرنده از v و 0 بحرانی است. بنابراین، مبدأ وقتی و تنها وقتی یک نقطهٔ بحرانی مجزا است که H ناتکین باشد.

۱۱. با استفاده از لم مورس ثابت کنید که اگر a نقطه بحرانی ناتباهیدهٔ یک تابع f باشد، دستگاه مختصات موضعی $(x_1, \cdots, x_n)$ گرد a چنان یافت می‌شود که
$$f = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2 \qquad \text{و} \qquad \varepsilon_i = \pm 1$$
[راهنمایی: $H = (h_{ij})$ را قطری کنید.]

۱۲. ثابت کنید که تابع f در تمرین ۱۱ دارای یک ماکزیمم در a است اگر همه ε_i ها منفی باشند و دارای یک مینیمم، اگر همهٔ آنها مثبت باشند. نشان دهید که اگر همه ε_i ها منفی یا همگی مثبت باشند، آنگاه a یا ماکزیمم است یا مینیمم.

۱۳. نشان دهید که تابع دترمینان، اگر $n = 2$ بر $\mathrm{Mat}(n)$ مورس است، اما اگر $n > 2$ خیر.

۱۴. نشان دهید که «تابع ارتفاعی» $(x_1, \cdots, x_k) \mapsto x_k$ بر کرهٔ $\mathbb{S}^{k-1}$ یک تابع مورس با دو نقطهٔ بحرانی، قطبین، است. توجه کنید که یکی از قطب‌ها ماکزیمم و یکی مینیمم است.

۱۵. گیریم X زیرمنیفلدای از $\mathbb{R}^n$ باشد. ثابت کنید که یک نگاشت خطی $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ که تحدیدش به X یک تابع مورس می‌باشد وجود دارد. (تمرین ۱۴ حالت خاصی است.)

۱۶. گیریم f تابعی هموار بر یک مجموعهٔ باز $U \subset \mathbb{R}^k$ باشد. بازاء هر $x \in U$، گیریم $H(x)$ ماتریس هسیان f باشد، چه x بحرانی باشد چه نباشد، ثابت کنید وقتی و تنها وقتی f بر U مورس است که
$$\det(H)^2 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) > 0$$

۱۷. فرض کنید f_t یک خانوادهٔ هوموتوپیک از توابع روی $\mathbb{R}^k$ باشد. نشان دهید که اگر f_0 در یک همسایگی از یک مجموعه فشرده K مورس باشد، آنگاه بازاء هر t به اندازهٔ کافی کوچک، هر f_t متناظر به آن نیز مورس است.[راهنمایی: نشان دهید که مجموع در تمرین ۱۶ تا جایی که t به اندازهٔ کافی کوچک باشد و تا خود ۰ بر یک همسایگی از k محدود می‌باشد.]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۱۸. (پایداری توابع مورس) گیریم f تابعی مورس بر منیفلد فشرده X باشد، و f_t یک خانواده هوموتوپی از توابع با $f_0 = f$ باشد. نشان دهید هر f_t مورس است مشروط به اینکه t به اندازهٔ کافی کوچک باشد. [راهنمایی: تمرین ۱۷.]

۱۹. گیریم X منیفلدای فشرده باشد. ثابت کنید که توابع مورسی بر X موجودند که در نقاط بحرانی متفاوت مقادیر متفاوت اختیار می‌کنند. [راهنمایی: گیرید f مورس باشد، و x_1، . . . و x_n نقاط بحرانی آن باشد. گیریم p_i تابعی هموار بر X باشد که بر همسایگی‌ای کوچک یکی از x_i ها است و خارج یک همسایگی قدری بزرگ‌تر صفر. اعداد a_1، . . . و a_n را چنان انتخاب کنید که اگر $i \neq j$، آنگاه $f(x_i) + a_i \neq f(x_j) + a_j$. ثابت کنید اگر a_i به اندازهٔ کافی کوچک باشد، آنگاه نقاط بحرانی $f + \sum_{i=1}^{n} a_i p_i$ همان نقاط بحرانی f اند و حتی به اندازهٔ دلخواه نزدیک به f.]

۲۰. (الف) فرض کنید X منیفلدای فشرده در $\mathbb{R}^n$ و f تابعی بر X باشد. نشان دهید $n-$ تایی $(a_1, \cdots, a_n)$ هایی که بازاء آنها $f_a = f + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ تابعی مورس است یک مجموعهٔ باز تشکیل می‌دهند.

(ب) فرض فشردگی بر X را حذف کنید، و نشان دهید که مجموعه f_a مورس است: a اشتراکی شمارا از مجموعه‌های باز است. [راهنمایی: از (الف)، به علاوهٔ دومین اصل موضوع شمارایی استفاده کنید.]

(ج) بنابراین f_a مورس نیست:a اجتماعی شمارا از مجموعه‌های بسته است. نشان بدهید که برای تحقیق آن تنها کافی است از قضیهٔ فوبینی در اثباتمان جهتوجود توابع مورس استفاده بکنیم. (به ضمیمه الف نگاه کنید.)

۲۱. گیریم $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک ایمرشن باشد. نشان دهید بازاء «تقریباً هر» n عدد a_1، . . . و a_n توابع $a_1 \varphi_1 + \cdots + a_n \varphi_n$ بر X مورس‌اند، که φ_1، . . . و φ_n توابع مختصاتی φ هستند. [راهنمایی: نشان دهید که اثبات مطرح شده برای وجود توابع مورس تنها به این نیاز دارد که X فرو برده در $\mathbb{R}^n$ باشد نه نشانده شده در آن.]

۲۲. در اینجا کاربردی از نظریه مورس در الکترواستاتیک را بیان می‌داریم. گیریم x_1، x_2، x_3 و x_4 نقاطی در وضعیت کلی در $\mathbb{R}^3$ باشند (یعنی، الزاما همه در یک صفحه نیستند.) گیریم q_1، q_2، q_3 و q_4 چهار بار الکتریکی در این نقاط باشند. تابع پتانسیل میدان الکتریکی حاصله $V_q = q_1/r_1 + \cdots + q_4/r_4$ است که در آن $r_i = |x - x_i|$. نقاط بحرانی V_q نقاط ترازمندی میدان الکتریکی نامیده می‌شوند، و اگر نقطهٔ ترازمندی‌ای ناتباهیده باشد آن را یک نقطهٔ ترازمندی ناتباهیده می‌گویند. ثابت کنید بازاء «تقریباً هر» q ای نقاط ترازمندی V_q ناتباهیده و از نظر تعداد متناهی‌اند. [راهنمایی: نشان دهید نگاشت $\mathbb{R}^3 - \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ با مختصات r_4، r_3، r_2 و r_1 یک ایمرشن است و تمرین ۲۱ را به کار برید.]

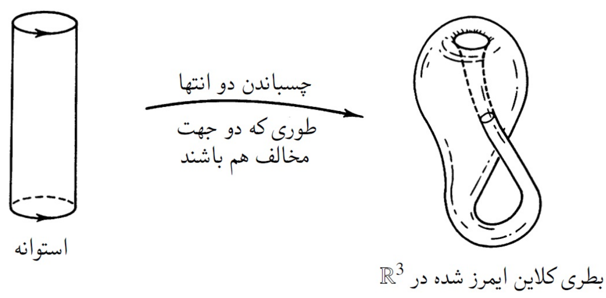
بخش ۸.۱ نشاندن منیفلدها در فضای اقلیدسی

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

دومین کاربردی از قضیه سارد که بیان می‌داریم، در اثبات قضیه نشاندن ویتینی است. منیفلد k بعدی X به عنوان زیر مجموعه‌ای از یک فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ تعریف شده بود که ممکن است نسبت به X فوق‌العاده بزرگ باشد. هنگامی که منیفلد X را به صورت شیئی مجرد در نظر می‌گیریم، فضای پیرامون تا اندازه‌ای دل بخواه است. به عنوان مثال، اگر $n < m$، آنگاه $\mathbb{R}^n$ را به طور طبیعی در $\mathbb{R}^M$ می‌شود نشاند، و لذا همان منیفلد را به جای در $\mathbb{R}^n$، در $\mathbb{R}^m$ می‌توان ساخت. ویتینی به دنبال این مطلب بود که بایستی n تا چه اندازه بزرگ باشد تا $\mathbb{R}^n$ یک کپی دیفئومورف از هر منیفلد $k-$ بعدی دل بخواه را در برداشته باشد. پاسخ اولیه او این بود که $n = 2k + 1$ کافی است؛ این حکم را ثابت خواهیم کرد. ویتینی پس از سعی و کوششی بسیار حکم خود را به این صورت تصحیح کرد که هر منیفلد $k-$ بعدی دلخواه را عملاً در $\mathbb{R}^{2k}$ می‌توان نشاند.

قضیهٔ ویتینی را به عنوان حدی از میزان احتمالی پیچیدگی منیفلد می‌توان تصور نمود. هر منیفلدای که در $\mathbb{R}^n$ بتوان تعریف کرد، در $\mathbb{R}^{n+1}$ نیز می‌توان، اما شاید آزادی بیشتر در $\mathbb{R}^{n+1}$ برای پیچش دادن، اجازهٔ ساختن منیفلدهایی را به ما بدهد که در فضای کوچکتر $\mathbb{R}^n$ میسر نباشد. (در واقع، این مطلب که فضای اقلیدسی به خصوصی که یک کپی از هر منیفلد دل بخواه با بعد مفروض را در برداشته باشد، بدیهی نیست.) مثالی کلاسیک از این امر بطری کلاین است، رویه‌ای که در $\mathbb{R}^4$ با متصل کردن دو سر یک استوانه به یکدیگر به شکلی که جهت آن‌ها متفاوت باشد حاصل می‌شود. (هنگامی که دو سر یک استوانه در حالی که جهت آن‌ها یکی است به هم متصل شوند، منیفلد حاصله دقیقاً چنبره خواهد بود.) یک ایمرشن از بطری کلاین در $\mathbb{R}^3$ وجود دارد، منتهی از خود قطعی آن نمی‌شود دوری کرد؛ در $\mathbb{R}^3$ مجال کافی چرخش برای یک نشاننده وجود ندارد (۱.۲۷). (به منظور جلوه دادن یک نشاننده از آن در $\mathbb{R}^4$، بعد چهارم را با خطوط پررنگ نشان می‌دهیم و برای ترسیم بطری اجازه می‌دهیم که بتواند از خودش (به ظاهر) بگذرد.)

قضیه ویتینی اذعان می‌دارد که پس از دو برابر کردن k بعد منیفلد ساخته شده، مجال کافی برای هرگونه پیچشی در فضای اقلیدسی با آن بعد بوجود می‌آید؛ هر کاری را در $\mathbb{R}^{2k}$ می‌شود انجام داد. بطری کلاین نشان می‌دهد که نتیجهٔ ویتینی در نوع خود بهینه است، زیرا آن یک منیفلد $k = 2$ بعدی است که در فضای اقلیدسی $3 = 2k - 1$ بعدی نمی‌شود نشاندش. (دایره مثالی دیگر از این مطلب می‌باشد).

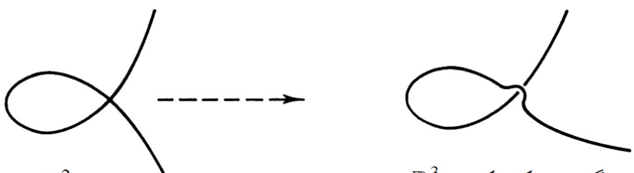


شکل ۲۷.۱: ایمرشن بطری کلاین در $\mathbb{R}^3$

چرا $n = 2k + 1$؟ همانطور که خواهیم دید، دلیل هندسی اینکه چرا $2k + 1$ فضا همهٔ منیفلدهای $k-$ بعدی را می‌تواند منزل بدهد، یک خاصیت پایداری از تراگردی است که در فصل بعدی ثابت خواهیم

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

کرد. یعنی، اگر X و Z دو زیرمنیفلد Y با $\dim Z + \dim X < \dim Y$ باشند، آنگاه با کششی به اندازهٔ دلخواه کوچک می‌توان X و Z را از هم مجزا کرد (تمرین ۶ از بخش ۳ از فصل ۲). برای لحظه‌ای به شکل نادقیق منیفلدها را به عنوان قطعاتی از یک لوله‌کشی تودرتو تصور کنیم، یعنی پروژه‌هایی که از متصل کردن لوله‌های k– بعدی و سایر انواع قطعات استاندارد لوله‌کشی (نظیر k– نیم کره) براساس یک طرح ترکیباتی از پیش مفروض، تهیه می‌گردند. فرض کنید که یک سری دستورالعمل‌هایی برای جفت و جور کردن قطعات به یکدیگر در $\mathbb{R}^n$ دنبال کرده باشیم. چون لوله‌ها را به صورت تحریف شده در نظر گرفتیم، متاسفانه ممکن است لوله‌ها از هم بگذرند، نظیر بطری کلاین ایمزر شده در $\mathbb{R}^3$. اما همین‌که پروژه کامل شد، می‌توانیم به رفع خود قطعی‌ها بپردازیم. مادامی‌که $2k+1 \leq n$، با کششی ناچیز بر مقاطع مورد نظر، می‌توان به منیفلدهایی مطابق با طرح مفروض نایل شد. (این روش حکم بهینهٔ ویتینی $n = 2k$ را توضیح نمی‌دهد. مثلاً خم‌های متقاطع را با یک سری تغییر شکل‌های موضعی در $\mathbb{R}^3$ می‌توان از هم جدا کرد ولی در $\mathbb{R}^2$ این کار شدنی نیست.) به شکل ۲۸.۱ نگاه کنید. مدل‌سازی اثباتی مطمئن بر پایه استدلال



شکل ۲۸.۱: رفع برخورد در بعد بالاتر

رهگشای بالا، بسیار مشکل می‌باشد. خوشبختانه برهانی، که کمتر شهودی است، مستقیماً از قضیه سارد می‌توان به دست آورد.

یک شیء مفید در اثبات قضیه ویتینی، کلاف مماس یک منیفلد X در $\mathbb{R}^n$ است. فضاهای مماس به X در نقاط مختلف زیر فضاهایی از $\mathbb{R}^n$ هستند که در حالت کلی با یکدیگر برخورد دارند، کلاف مماس $T(X)$ استفادهٔ استادانه از جداسازی آنها است. به ویژه، $T(X)$ زیر مجموعه‌ای از $X \times \mathbb{R}^n$ تعریف شده به صورت

$$T(X) = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^n \ : v \in T_x(X)\}$$

می‌باشد. $T(X)$ یک کپی طبیعی X_0 از X را در بردارد، که از همهٔ نقاط به شکل $(x, \circ)$ تشکیل شده است. در جهت عمود به X_0، کپی‌هایی از هر یک از زیر فضاهای مماس $T_x(X)$ را در بر دارد، که به صورت مجموعه‌های $\{(x, v): \text{ با } x \text{ ثابت}\}$ در آن نشانده شده‌اند.

هر نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت مشتق کلی $df : T(X) \longrightarrow T(Y)$ با ضابطهٔ $df(x, v) = (f(x), df_x(v))$ القاء می‌نماید. توجه کنید که $T(X)$ زیر مجموعه‌ای از فضای اقلیدسی است: به عبارت دیگر، اگر $X \subset \mathbb{R}^n$، آنگاه $T(X) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. بنابراین، اگر $X \subset \mathbb{R}^m$، آنگاه df زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^{2n}$ را بتوی $\mathbb{R}^{2m}$ می‌نگارد. ادعا می‌کنیم که df هموار است. چون $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ هموار است، حول هر نقطه‌اش به نگاشتی هموار $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$، که U یک زیر مجموعهٔ باز $\mathbb{R}^n$ است، توسیع می‌یابد. در این صورت، $dF : T(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ توسیع موضعی df است. اما $T(U)$ کل $U \times \mathbb{R}^n$ است، مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}^n$، و به وضوح dF به عنوان نگاشتی از این مجموعهٔ باز با فرمولی هموار

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

تعریف گردیده است. این نشان می‌دهد که $df : T(X) \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ را به طور موضعی به نگاشتی هموار بر یک مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^{2n}$ می‌توان توسیع داد، که این خود به معنی همواری df است.

قاعده زنجیری بیان می‌دارد که بازاء هر دو نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$، نگاشت مرکب $dg \circ df : T(X) \longrightarrow T(Z)$ برابر $d(g \circ f)$ است. نتیجتاً، اگر $f : X \longrightarrow Y$ دیفئومورفیسم باشد، آنگاه $df : T(X) \longrightarrow T(Y)$ نیز هست، چرا که از قاعدهٔ زنجیری نتیجه می‌گردد که $df^{-1} \circ df$ نگاشت همانی $T(X)$ است و $df \circ df^{-1}$ نگاشت همانی $T(Y)$. بنابراین، منیفلدهای دیفئومورف، کلاف‌های مماس دیفئومورف دارند. ولی به خصوص، $T(X)$ یک شیء ذاتاً وابسته به X است؛ به فضای اقلیدسی پیرامون بستگی ندارد.

توجه کنید که اگر W مجموعه‌ای باز از X باشد، و بنابراین خود یک منیفلد باشد، آنگاه $T(W)$ زیر مجموعهٔ $T(X) \cap (W \times \mathbb{R}^n)$ از $T(X)$ خواهد بود. چون $W \times \mathbb{R}^n$ در $X \times \mathbb{R}^n$ باز است، $T(W)$ در توپولوژی $T(X)$ باز می‌باشد. حال فرض کنیم W نگارهٔ یک پیمایش موضعی $\varphi : U \longrightarrow W$ باشد، که U مجموعهٔ بازی در $\mathbb{R}^k$ است. در این صورت $d\varphi : T(U) \longrightarrow T(W)$ دیفئومورفیسم است. اما $T(U) = U \times \mathbb{R}^k$ زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^{2k}$ است، پس $d\varphi$ پیمایش زیر مجموعهٔ باز $T(W)$ از $T(X)$ را به دنبال دارد. چون هر نقطه از $T(X)$ در یک چنین همسایگی‌ای واقع است، ثابت کردیم که

گزاره. کلاف مماس هر منیفلد، خود یک منیفلد است و $\dim T(X) = 2 \dim X$.

حال نوعی از قضیه ویتینی را ثابت می‌کنیم.

قضیه. هر منیفلد k– بعدی یک ایمرشن یک به یک در $\mathbb{R}^{2k+1}$ می‌پذیرد.

برهان: عملاً، اگر $X \subseteq \mathbb{R}^n$ منیفلدای k بعدی باشد و $2k+1 < n$، تصویری خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^{2k+1}$ که وقتی به X تحدید می‌گردد به یک ایمرشن یک به یک مبدل می‌شود، ارائه می‌نماییم. به استقراء عمل کرده، ثابت می‌کنیم که اگر $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک ایمرشن یک به یک باشد با $2k+1 < m$، آنگاه یک بردار $a \in \mathbb{R}^m$ چنان وجود دارد که ترکیب f با تصویری که $\mathbb{R}^m$ را بروی متمم متعامد a می‌برد، هنوز یک ایمرشن یک به یک است. اکنون متمم $H = \{b \in \mathbb{R}^m \ : \ b \perp a\}$ یک زیر فضای برداری $m-1$ بعدی از $\mathbb{R}^m$ است، از این جهت با $\mathbb{R}^{m-1}$ یکریخت است؛ به این صورت به یک ایمرشن یک به یک بتوی $\mathbb{R}^{m-1}$ می‌رسیم.

نگاشتی مانند $h : X \times X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ با ضابطهٔ $h(x,y,t) = t[f(x) - f(y)]$ تعریف می‌کنیم. همچنین، یک نگاشت $g : T(X) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ با ضابطهٔ $g(x,v) = df_x(v)$ تعریف می‌کنیم. چون $2k+1 < m$، قضیه سارد ایجاب می‌کند که نقطه‌ای $a \in \mathbb{R}^m$ که به هیچ یک از نگاره‌ها تعلق ندارد وجود داشته باشد؛ توجه کنید، که چون $\circ$ به هر دو نگاره تعلق دارد، $a \neq 0$.

گیریم π تصویر از $\mathbb{R}^m$ بروی متمم متعامد H عضو a باشد. مشخصاً $\pi \circ f : X \longrightarrow H$ یک به یک است. زیرا فرض کنیم که $\pi \circ f(x) = \pi \circ f(y)$. در این صورت از تعریف π داریم که برای یک اسکالر t ای $f(x) - f(y) = ta$؛ پس اگر $x \neq y$ آنگاه به دلیل یک به یک بودن f، $t \neq \circ 0$. اما در این صورت $a = h(x,y,1/t)$، که با چگونگی انتخاب a در تضاد است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

به صورت مشابه، $\pi\circ f : X \longrightarrow H$ یک ایمرشن است. زیرا فرض کنیم v یک بردار ناصفر در $T_x(X)$ باشد که برای آن $d(\pi\circ f)_x(v) = 0$. چون π خطی است، قاعده زنجیری بیان می‌دارد که $d(\pi\circ f)_x = \pi\circ df_x$. بنابراین، $\pi\circ df_x(v) = 0$، و لذا برای یک اسکالر t ای $df_x(v) = ta$. چون f ایمرشن است،$t \neq ۰$. بنابراین $g(x\frac{1}{t}) = a$ که این با انتخاب a در تضاد است. □

ایمرشن های یک به یک در مورد منیفلدهای فشرده با نشانندها یکی‌اند، لذا قضیهٔ نشاندن را در حالت فشرده به درستی ثابت کردیم. در کل، بایستی ایمرشن را به طور سره تصحیح کنیم – که این مسئله‌ای است توپولوژیکی نه دیفرانسیلی. این وضعیت مثالی نوعی از موضوع توپولوژی دیفرانسیل می‌باشد؛ بسیار پیش می‌آید که مفاهیم دیفرانسیلی فوق‌العاده اساسی، به صورت شهودی و طبیعی‌تری برای منیفلدهای فشرده تحقیق می‌گردند، و سپس با بهره‌گیری از ترفندهایی خاص به منیفلدهای دل بخواه تعمیم می‌یابند. بیشتر ترجیح می‌دهیم که چنین ترفندهایی را برایتان رو کنیم تا اینکه به گسترش مفهومی اولیه خود از موضوع خودمان تداوم ببخشیم، با این حال می‌توانید فعلاً از ادامهٔ این بخش صرف نظر کنید. بعداً، که باز به آنها نیاز شد، می‌توانید باز بگردید و این ترفندها را هم بیاموزید.

حقهٔ اصلی برای چنین تعمیم دهی‌هایی قضیهٔ به شرح زیر است.

قضیه. گیریم X زیر مجموعهٔ دلخواهی از $\mathbb{R}^n$ باشد. بازاء هر پوشش از X توسط زیر مجموعه‌های باز (نسبی) $\{U_\alpha\}$، دنباله‌ای از توابع هموار $\{\theta_i\}$ بر X، به نام افراز یکانی همخوان با پوشش باز $\{U_\alpha\}$، با ویژگی‌های به شرح زیر وجود دارد:

(الف) بازاء همهٔ $x \in X$ ها و همهٔ i ها $0 \leq \theta_i(x) \leq 1$.

(ب) هر $x \in X$ ای یک همسایگی دارد که بر آن همه به جز تعدادی متناهی از توابع θ_i متحد با صفرند.

(ج) هر یک از توابع θ_i، به جز بر یک مجموعهٔ بستهٔ مشمول در یکی از $\{U_\alpha\}$ ها متحد با صفرند.

(د) بازاء هر $x \in X$ ای $\sum_i \theta_i(x) = 1$. (توجه کنید که بر طبق (ب)، همیشه این مجموع متناهی است.)

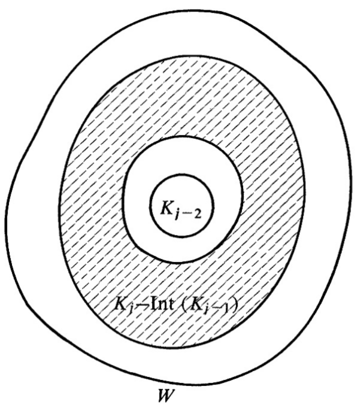
برهان: هر $\{U_\alpha\}$ را به صورت $X\cap W_\alpha$ می‌توان نوشت که W_α زیر مجموعه‌ای باز از فضای اقلیدسی پیرامون $\mathbb{R}^n$ است. قرار می‌دهیم $W = \bigcup_\alpha W_\alpha$، و $\{K_j\}$ را یک دنبالهٔ تودرتوی دلخواه از مجموعه‌های فشرده که W را تمام می‌سازند می‌گیریم. یعنی اینکه، $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = W$ و $K_j \subset \mathrm{Int}(K_{j+1})$. (مثلاً، گیریم $K_j = \{z\in W \,|\, 1/j \leq \mathbb{R}^n - W$ تا z و $|z| < j\}$) گردایه همه گوی‌های باز از $\mathbb{R}^n$ که بستارشان به حداقل یکی از W_α ها متعلق است یک پوشش باز برای W می‌باشد. تعدادی متناهی از چنین گوی‌ها که مجموعه K_2 را می‌پوشانند را در نظر می‌گیریم. بنا بر تمرین ۹ از بخش ۱، بازاء هر گوی انتخابی، یک تابع نامنفی هموار بر $\mathbb{R}^n$ می‌توانیم بیابیم که بر آن متحد با یک است و خارج مجموعهٔ بسته‌ای شامل آن و در W_α برابر صفر است. این توابع را η_1، . . . و η_r می‌نامیم. (به شکل ۲۹.۱ نگاه کنید.)

کار ساختن دنباله توابع را به استقراء دنبال می‌کنیم. بازاء هر $j \geq 3$، مجموعهٔ $K_j - \mathrm{Int}(K_{j-1})$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

مشمول در مجموعهٔ باز $W - K_{j-2}$ است. گردایهٔ همه گوی‌های باز به اندازهٔ کافی کوچک که بستارشان مشمول در $W - K_{j-2}$ و در W_α می‌افتد، یک پوشش باز برای $K_j - \mathrm{Int}(K_{j-1})$ تشکیل می‌دهد. یک زیر پوشش متناهی انتخاب کرده، و سپس توابع برای هر گوی را به دنباله‌مان $\{\eta_i\}$ می‌افزاییم؛ توابعی که بر گوی یکند و خارج یک مجموعهٔ بسته مشمول در $W - K_{j-2}$ و نیز در W_α برابر صفرند.

به این سبب، بازاء هر j ای تنها تعدادی متناهی تابع η_j هست که بر K_j صفر نمی‌گردند. بنابراین چون هر نقطه از W به درون یک K_j ای متعلق است، مجموع $\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j$ عملاً در یک همسایگی از هر نقطهٔ W متناهی است. به علاوه، در هر نقطه از W حداقل یکی از جملات آن ناصفر می‌باشد. از این رو $\eta_i / \left(\sum_{j=1}^{\alpha} \eta_j \right)$ یک تابع هموار خوش تعریف است. اگر θ_i را تحدید این تابع به X بگیریم، به آنچه که می‌خواستیم رسیده‌ایم. $\square$



شکل ۲۹.۱: اثبات وجود افراز یکانی

نتیجه. بر هر منیفلد X یک نگاشت سره $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد.

برهان: گیریم $\{U_\alpha\}$ گردایه زیر مجموعه‌های بازی از X باشد که بستار فشرده دارند، و θ_i افراز یکانی همخوان با آن باشد. در این صورت $p = \sum_{i=1}^{\alpha} i\theta_i$ یک تابع هموار خوشتعریف است. اگر $\rho(x) \leq j$، آنگاه به روشنی حداقل یکی از j تابع اول θ_1، . . . و θ_j بایستی در x مخالف صفر باشد. بنابراین $\rho^{-1}([-j, j])$ مشمول در

$$\bigcup_{i=1}^{j} \{x : \theta_i(x) \neq 0\}$$

مجموعه‌ای با بستار فشرده است. اما هر مجموعه فشردهٔ در $\mathbb{R}$ مشمول در یک بازهٔ به فرم $[-j, j]$ است. $\square$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

قضیهٔ ویتینی. هر منیفلد $k-$ بعدی در $\mathbb{R}^{2k+1}$ نشانده می‌شود.

برهان: با یک ایمرشن یک به یک از X بتوی $\mathbb{R}^{2k+1}$ شروع می‌کنیم. پس از ترکیب آن با هر دیفئومورفیسم از $\mathbb{R}^{2k+1}$ بتوی کرهٔ واحدش (مثل، $Z \mapsto Z/(1+|Z|^2)$) به یک ایمرشن یک به یک $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ می‌رسیم به طوریکه بازاء همه $x \in X$ ها $|f(x)| < 1$. گیریم $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع سره باشد، و یک ایمرشن یک به یک جدید $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ با ضابطهٔ $F(x) = (f(x), \rho(x))$ تعریف می‌کنیم. اکنون مثل در اثبات قضیهٔ پیش، با ترکیب کردن F و تصویر متعامد $\pi : \mathbb{R}^{2k+1} \longrightarrow H$، که H فضای خطی متعامد به یک بردار واحد مناسب a در $\mathbb{R}^{2k+1}$ است، به $\mathbb{R}^{2k+1}$ باز می‌گردیم.

یادآور می‌شویم که نگاشت $\pi \circ F : X \longrightarrow H$ هنوز بازاء همهٔ a های در $\mathbb{S}^{2k+1}$ یک ایمرشن یک به یک است، و لذا می‌توانیم a ای گزینش کنیم که یکی از قطبین کره نباشد. اما اکنون به راحتی دیده می‌شود که $\pi \circ F$ سره می باشد. در واقع، بازاء هر کران مفروض c، ادعا می‌کنیم که عدد دیگری d چنان وجود دارد که مجموعهٔ نقاط $x \in X$ با ویژگی $|\pi \circ F(x)| \leq c$ مشمول نقاطی است که برای آنها $|\rho(x)| \leq d$. چون ρ سره است، مجموعه آخری یک زیر مجموعهٔ فشردهٔ X است. پس ادعا ایجاب می‌کند که پیشنگارهٔ تحت $\pi \circ F$ از هر گوی بستهٔ در H یک زیر مجموعه فشردهٔ X باشد، و این خود نشانگر سره بودن $\pi \circ F$ است. اگر ادعا غلط باشد، در این صورت دنباله‌ای از نقاط $\{x_i\}$ در X وجود دارد که برای آن $|\pi \circ F(x_i)| \leq c$ اما $\rho(x_i) \longrightarrow \infty$. به یاد می‌آوریم که بنا به تعریف، بازاء هر $z \in \mathbb{R}^{2k+2}$ ای بردار $\pi(z)$ نقطه‌ای در H است که بازاء آن $z - H(z)$ مضربی از a می‌باشد. بنابراین $F(x_i) - \pi \circ F(x_i)$ بازاء هر i ای مضرب a است، و در نتیجه، بردار

$$W_i = \frac{1}{\rho(x_i)}[F(x_i) - \pi \circ F(x_i)]$$

هم مضربی از a است. ببینیم که وقتی $i \longrightarrow \infty$ چه می‌گذرد. در این صورت

$$\frac{F(x_i)}{\rho(x_i)} = \left(\frac{f(x_i)}{\rho(x_i)}, 1\right) \mapsto (0, \cdots, 0, 1)$$

چون بازاء همه i ها $|F(x_i)| < 1$. خارج قسمت $\pi \circ F(x_i)/\rho(x_i)$ دارای نرم $\geq c/\rho(x_i)$ است، لذا به صفر همگرا است. بنابراین $w_i \mapsto (0, \cdots, 0, 1)$. اما هر w_i ای مضربی از a است؛ بنابراین حد آنها نیز هست. نتیجه می‌گیریم که بایستی a قطب شمال و یا جنوب $\mathbb{S}^{2k+1}$ باشد، که تناقض است. این ادعا و سپس قضیه را ثابت می‌نماید. □

تمرینات

۱. نشان دهید که $T(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$.

۲. گیریم g تابعی همه جا مثبت و هموار بر X باشد. تحقیق کنید که آیا نگاشت ضربی از $T(X)$ بتوی $T(X)$ با ضابطهٔ $(x, v) \mapsto (x, g(x)v)$ هموار است.

۳. نشان دهید $T(X \times Y)$ با $T(X) \times T(Y)$ دیفئومورف است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۴. نشان دهید کلاف مماس به $\mathbb{S}^1$ با استوانه $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^1$ دیفئومورف است.

۵. ثابت کنید نگاشت تصویر $\rho : T(X) \longrightarrow X$ با ضابطهٔ $\rho(v,x) = x$ یک سابمرشن است.

۶. میدان برداری $\vec{v}$ بر یک منیفلد مفروض X در $\mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار چون $\vec{v} : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ است به طوریکه $\vec{v}(x)$ همیشه در x بر X مماس می‌باشد. نشان دهید که تعریف ذیل (که در آن فضای پیرامون $\mathbb{R}^n$ صراحتاً ظاهر نشده است) با بالا معادل است: یک میدان برداری $\vec{v}$ بر X عبارت است از یک مقطع عرضی از $T(X)$ - یعنی، یک نگاشت هموار $\vec{v} : X \longrightarrow T(X)$ چنانکه $p\circ\vec{v}$ با نگاشت همانی X مساوی است. (مثل ρ در تمرین ۵ است.)

۷. نقطهٔ $x \in X$ صفر میدان برداری $\vec{v}$ است اگر $\vec{v}(x) = 0$. نشان دهید که اگر k فرد باشد، میدان برداری $\vec{v}$ بر $\mathbb{S}^k$ که هیچ صفری ندارد موجود می‌باشد.[راهنمایی: برای $k = 1$ از $(x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1)$ استفاده کنید.] این مطلب که بر کره‌های زوج هیچ میدان برداری همه جا ناصفر موجود نیست، یکی از احکام عمیق توپولوژیکی است. در فصل ۳ دلیل این مطلب را خواهیم دید.

۸. ثابت کنید که اگر $\mathbb{S}^k$ دارای یک میدان برداری صفر نشونده باشد، آنگاه نگاشت متقاطرش و نگاشت همانی‌اش هوموتوپند. (با تمرین ۷ از بخش ۶ مقایسه بکنید.) [راهنمایی: نشان دهید که می‌توانید فرض کنید که در همه جا $|\vec{v}(x)| = 1$. حال در جهت مشخص شده به توسط $\vec{v}(x)$ نقطهٔ x را به $-x$ دوران دهید.]

۹. گیریم $S(X)$ مجموعه نقاطی چون $(x,v) \in T(X)$ باشد که $|v| = 1$. ثابت کنید که $S(X)$ یک زیرمنیفلد $2k-1$بعدی از $T(X)$ است؛ آن را کلاف کره‌ای X نامیده‌اند. [راهنمایی: نگاشت $(x,v) \longrightarrow |v|^2$ را در نظر بگیرید.]

۱۰. قضیه ایمرشن ویتینی. ثابت کنید که هر منیفلد $k-$بعدی X را در $\mathbb{R}^{2k}$ می‌شود ایمرز نمود.

۱۱. نشان دهید که اگر X یک منیفلد $k-$بعدی فشرده باشد، آنگاه یک نگاشت $X \longrightarrow \mathbb{R}^{2k-1}$ که در همه جا بجز در تعدادی متناهی نقاط X ایمرشن است، وجود دارد. سپس با نشان دادن اینکه اگر $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^{2k}$ یک ایمرشن باشد و a یک مقدار منظم برای نگاشت $F : T(X) \longrightarrow \mathbb{R}^{2k}$ با ضابطهٔ $F(x,v) = d\,f_x(v)$ باشد، آنگاه $F^{-1}(a)$ مجموعه‌ای است متناهی. نشان بدهید که $\pi\circ f$ بجز بر $f^{-1}(a)$ ایمرشن است، که π تصویر متعامد عمود بر a است. نقاط مستثنایی، در $f^{-1}(a)$، کلاهای عرضی نامیده می‌شوند. [راهنمایی: نشان دهید که تنها تعدادی متناهی از پیشنگاره‌های a تحت F در مجموعهٔ فشرده $\{(x,v) : |v| \le 1\} \subset T(X)$ قرار دارند. زیرا اگر (x_i, v_i) بی نهایت پیشنگاره باشد، زیر دنباله‌ای چنان هست که $x_i \mapsto x$ و $\frac{v_i}{|v_i|} \mapsto w$. حال نشان بدهید که $d\,f_x(w) = 0$.]

۱۲. ویتینی نشان داده است که برای هر نگاشت از یک دو-منیفلد بتوی $\mathbb{R}^3$ یک کلاه عرضی نوعی شبیه نگاشت $(x,y) \mapsto (x, xy, y^2)$ وجود دارد. تحقیق کنید که این یک ایمرشن است بجز در مبداء. نگارهٔ آن به چه شکلی به نظر می‌رسد؟ به مقالهٔ ویتینی تحت عنوان «نوع کلی یک مجموعه از $2n-1$ تابع n متغیره» در Duke math. Journal, 10 (1943), 161-172 توجه شود.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۱۳. یک پوشش باز $\{V_\alpha\}$ از یک منیفلد X موضعاً متناهی است اگر که هر نقطهٔ از X یک همسایگی بپذیرد که با تنها تعدادی متناهی از مجموعه‌های V_α متقاطع است. نشان دهید که هر پوشش باز $\{U_\alpha\}$ یک زیر پوشش موضعاً متناهی $\{V_\alpha\}$ می‌پذیرد. [راهنمایی: افرازیکانی.]

۱۴. قضیه تابع وارون بار دیگر بیان می‌شود. با تکنیکی مبتنی بر افرازیکانی نوع غیر فشردهٔ تمرین ۱۰ از بخش ۳ را ثابت کنید. فرض کنید که مشتق $f : X \longrightarrow Y$ هر وقت x واقع در زیرمنیفلد $Z \subset X$ است یک یکریختی باشد، و فرض کنیم که f، Z را به طور دیفئومورف بر روی $f(Z)$ بنگارد. ثابت کنید که f یک همسایگی از Z را به طور دیفئومورف بروی یک همسایگی از $f(Z)$ می‌نگارد. [شمای کار: وارون‌های موضعی $g_i : U_i \longrightarrow X$ را بیابید که $\{U_i\}$ یک گردایه موضعاً متناهی از زیر مجموعه‌های باز Y پوشش دهندهٔ $f(Z)$ باشد. تعریف کنید $\{g_i(y) = g_j(y)$ هر وقت $W = \{y \in U_i : y \in U_i \cap U_j$. نگاشتهای g_i را «به هم وصل کرده» و یک نگاشت وارون هموار $g : W \longrightarrow X$ بسازید. بالاخره با اثبات اینکه W یک همسایگی باز از $f(Z)$ را در بر دارد، کار را تمام کنید؛ اینجا است که موضعاً متناهی بودن لازم می‌آید.]

۱۵. قضیه اوریسون هموار. اگر A و B دو زیر مجموعهٔ بسته، هموار و مجزا از یک زیرمنیفلد X باشد، ثابت کنید که تابعی هموار φ بر X چنان وجود دارد که $0 \leq \varphi \leq 1$ با $\varphi = 0$ بر A و $\varphi = 1$ بر B. [راهنمایی: از افراز یکانی استفاده شود.]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

فصل ۲

تراگردی و مقطع

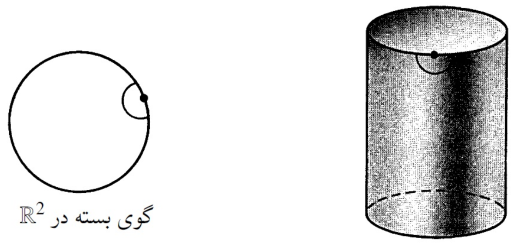
بخش ۱.۲ منیفلدهای مرزدار

اینک با مجاز شمردن اینکه منیفلدها مرز هم داشته باشند، ردهٔ اشیاء هندسی مورد مطالعه‌مان را وسعت می‌بخشیم. مثلاً، می‌خواهیم فضاهایی نظیر گوی یکهٔ بسته در $\mathbb{R}^n$ را که مرزش $\mathbb{S}^{n-1}$ است، یا رویه استوانه‌ای فشردهٔ $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ در $\mathbb{R}^3$ را که توسط دو کپی از دایره محدود شده است در نظر بگیریم. (به شکل ۱.۲ نگاه کنید.) اینها منیفلد نیستند چرا که هر همسایگی از نقاط واقع در مرزشان با هیچ مجموعهٔ بازی در فضای اقلیدسی وابرسان نیست. (تمرین ۱ را ببینید.) درکل، ساده‌ترین مثال از منیفلد مرزدار، نیم فضای مختصاتی $\mathbb{H}^k$ در $\mathbb{R}^k$ می‌باشد، که از کلیه نقاط با آخرین مختص نامنفی تشکیل یافته. مرز $\mathbb{H}^k$ عبارت است از $\mathbb{R}^{k-1}$ تحت نشانندهٔ معمولیش در $\mathbb{R}^k$. $\mathbb{H}^k$ را به دلیل سادگیش به عنوان فضای مدلمان در نظر می‌گیریم. (به شکل ۲.۲ توجه کنید.)

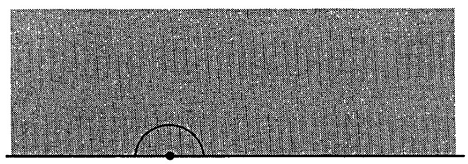
تعریف. زیرمجموعه X از $\mathbb{R}^N$ در صورتی یک منیفلد مرزدار k–بعدی است که هر نقطه از X واجد یک همسایگی وابرسان با مجموعه‌ای باز در فضای $\mathbb{H}^k$ باشد. مثل سابق، به یک چنین وابرسانی‌ای یک پیمایش موضعی X می‌گوییم. مرز X، که با نماد ∂X مشخص می‌گردد، از کلیه نقاطی تشکیل یافته که به نگارهٔ مرز $\mathbb{H}^k$ تحت یک پیمایش موضعی متعلق است. متممش درون X نام دارد، $\mathrm{Int}(X) = X - \partial X$.

مرز یا درون X را با مرز یا درون توپولوژیکی X به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^N$ اشتباه نگیرید. با اینکه اغلب وقتی $\dim X = N$ آنها یکی می‌شوند، هنگامی که $\dim X < N$ هیچ ارتباط مشخصی با هم ندارند. اغلب از این کلمات به تعبیر منیفلدای صحبت می‌کنیم. توجه کنید که منیفلدهای با تعریف پیش را به عنوان «منیفلدهای مرزدار» نیز می‌شود تلقی کرد، منتهی مرزشان تهی است. باز هم از کلمهٔ بدون پسوند «منیفلد» برای اینها استفاده نموده، و بعضاً برای تأکید بیشتر به آنها لفظ «بی‌مرز» را اضافه می‌کنیم.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱.۲: گوی یکهٔ بسته و استوانهٔ فشرده



شکل ۲.۲: فضای مدل برای منیفلد مرزدار: $\mathbb{H}$

متأسفانه حاصلضرب دو منیفلد مرزدار در حالت کلی زیر منیفلد مرزدار نیست؛ مثلاً مربع $[0,1]\times[0,1]$. اما حداقل گزارهٔ درستی به شرح ذیل را داریم:

گزاره. حاصلضرب منیفلد بی‌مرز X و منیفلد مرزدار Y منیفلدای است مرزدار. بعلاوه $\partial(X\times Y)=X\times\partial Y$ و $\dim(X\times Y)=\dim X+\dim Y$.

برهان: اگر $U\subset\mathbb{R}^k$ و $V\subset\mathbb{H}^\ell$ باز باشند، آنگاه $U\times V\subset\mathbb{R}^k\times\mathbb{H}^\ell=\mathbb{H}^{k+\ell}$ باز است. به علاوه، اگر $\pi:U\longrightarrow X$ و $\psi:V\longrightarrow Y$ پیمایشهای موضعی باشند، آنگاه $\pi\times\psi:U\times V\longrightarrow X\times Y$ نیز یک پرمایش موضعی است. □

مهم‌ترین کاربرد این مشاهده در فضای نگاشتی هوموتوپی $X\times I$ یک منیفلد بی‌مرز مفروض X است.

فضاهای مماس و مشتق‌ها نیز هنوز هم در وضعیت منیفلد مرزدار تعریف می‌گردند. ابتدا، فرض کنید که g نگاشتی هموار از مجموعهٔ باز U از $\mathbb{H}^k$ بتوی $\mathbb{R}^\ell$ باشد. اگر u نقطه‌ای درونی U باشد، آنگاه مشتق dg_u قبلاً تعریف شده است. اما اگر $u\in\partial U$، همواری g به معنی این است که آنرا به نگاشتی هموار $\tilde{g}$ که بر یک همسایگی باز u در $\mathbb{R}^k$ تعریف می‌گردد می‌توانیم توسیع دهیم، dg_u را مشتق $d\tilde{g}_u:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^\ell$ تعریف می‌کنیم. بایستی نشان دهید که اگر $\tilde{\tilde{g}}$ یک توسیع موضعی دیگر g باشد، آنگاه $d\tilde{\tilde{g}}_u=d\tilde{g}_u$. گیریم u_i دنباله‌ای دلخواه از نقاط در $\operatorname{Int}(V)$ باشد که به u همگرا است. چون $\tilde{g}$ و $\tilde{\tilde{g}}$ هر دو بر $\operatorname{Int}(V)$ با g یکی‌اند، داریم $d\tilde{\tilde{g}}_{u_i}=d\tilde{g}_{u_i}$. حال از پیوستگی این مشتق‌ها نسبت به u_i ها استفاده می‌کنیم؛ با فرض $u_i\longrightarrow u$ به دست می‌آوریم که $d\tilde{\tilde{g}}_u=d\tilde{g}_u$، که به دنبالش بودیم.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

یادداشت حتی در نقاط مرزی نیز، مشتق dg_u، نگاشتی خطی از کل $\mathbb{R}^k$ بتوی $\mathbb{R}^\ell$ می‌باشد.

تحقیق این مطلب که مشتق‌گیری از نگاشت‌های هموار تعریف شده بر نیم فضاها هنوز هم قاعدهٔ زنجیری را به دنبال دارد، کاریست ساده. این اجازه می‌دهد که دیفرانسیل‌گیری را به راحتی از منیفلدهای بی‌مرز به منیفلدهای مرزدار توسیع بدهیم. اگر $X \subset \mathbb{R}^N$ منیفلد مرزدار k−بعدی باشد، فضای مماس آن $T_x(X)$ در نقطه $x \in X$ را نگارهٔ مشتق یک پیمایش موضعی دلخواه حول x تعریف می‌کنیم. بررسی کنید که $T_x(X)$ یک زیر فضای برداری k−بعدی $\mathbb{R}^N$ می‌باشد−حتی هنگامی‌که x یک نقطهٔ مرزی است! که تعریفش از انتخاب پیمایش موضعی مستقل می‌باشد. همچنین تحقیق کنید که بازاء هر نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ بین دو منیفلد مرزدار، مشتق در هر نقطهٔ x دلخواه را دقیقاً مثل قبل به شکل یک تبدیل خطی $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$ می‌شود تعریف نمود. به علاوه، قاعده زنجیری نیز همچنان برقرار است.

در صورتیکه X یک منیفلد مرزدار باشد، $\mathrm{Int}(X)$ به طور خودکار یک منیفلد فاقد مرز هم بعد با X خواهد بود. دلیلش این است که هر نقطهٔ درونی در برد یک پیمایش موضعی است که دامنه‌اش یک مجموعه باز در $\mathbb{H}^k$ می‌باشد که به تمامی مشمول در $\mathrm{Int}(\mathbb{H}^k)$ است و بنابراین مجموعهٔ بازی از $\mathbb{R}^k$ است. جالب‌تر اینکه

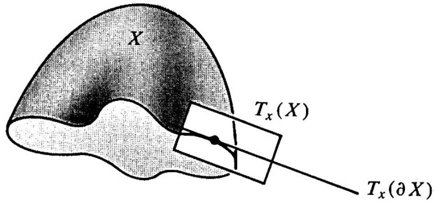
گزاره. اگر X یک منیفلد مرزدار با بعد k باشد، آنگاه ∂X منیفلد بدون مرز با بعد $k-1$ است.

برهان: نکته اساسی نشان دادن این مطلب است که اگر x نسبت به یک دستگاه مختصاتی موضعی در مرز باشد، آنگاه نسبت به هر دستگاه دیگری نیز هست. اگر $x \in \partial X$، یک پیمایش موضعی $\phi : U \longrightarrow V$ وجود دارد که U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{H}^k$ است و V زیرمجموعه‌ای باز از X. تنها نیاز داریم نشان دهیم که $\phi(\partial U) = \partial V$، زیرا در این صورت ϕ به یک وابرسانی از $U \cap \partial\mathbb{H}^k = \partial U$، مجموعهٔ بازی در $\mathbb{R}^{k-1}$، به $\partial V = \partial X \cap V$، یک همسایگی از x در ∂X تحدید می‌گردد. بنا به تعریف $\partial V \subset \phi(\partial U)$، پس تنها نیاز داریم روشن کنیم که آیا $\partial V \subset \phi(\partial U)$. یعنی، اگر ψ یک پیمایش موضعی نگارندهٔ یک مجموعهٔ باز W از $\mathbb{H}^k$ بتوی باشد، باید نشان دهیم که $\psi(\partial W) \subset \phi(\partial U)$، یا به طور معادل اینکه، $\phi^{-1} \circ \psi(\partial W) \subset \partial U$.

پس گیریم $g = \phi^{-1} \circ \psi : W \longrightarrow U$، و فرض کنیم که $w \in \partial W$ ای را به یک نقطهٔ درونی $u = g(w)$ از U بنگارد. چون ϕ و ψ هر دو وابرسانی هستند، بایستی g یک وابرسانی از W بروی یک زیرمجموعهٔ باز $g(W)$ از U باشد، مثل معمول، قاعده زنجیری ایجاب می‌نماید که مشتق وارونش، $d(g^{-1})$ پوشا باشد. اما چون $u \in \mathrm{Int}(U)$، $g(W)$ یک همسایگی از u را در بر دارد که در $\mathbb{R}^k$ باز می‌باشد. بنابراین قضیه تابع وارون، هنگامی‌که در مورد نگاشت g^{-1} تعریف شده بر این زیرمجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^k$ به کار گرفته شود، ایجاب می‌نماید که نگارهٔ g^{-1} یک همسایگی از w را که در $\mathbb{R}^k$ باز است شامل باشد. این با فرض اینکه $w \in \partial W$ در تضاد است.

ملاحظه می‌کنیم که اگر $x \in \partial X$، آنگاه فضای مماس به مرز $T_x(\partial X)$ در نقطه x زیر فضایی خطی از $T_x(X)$ است که همبعد آن برابر 1 می‌باشد. (به شکل ۳.۲ نگاه کنید.) بیایید برای هر نگاشت هموار دلخواه f تعریف شده بر X، نماد گزاری ∂f را برای تحدید f به ∂X به کار ببریم. مشتق ∂f در x دقیقاً عبارت از تحدید df_x به زیر فضای $T_x(\partial X)$ است. همهٔ تعاریفی که بر مبنی مشتق‌های نگاشت‌ها فرمول‌بندی شده‌اند کلمه به کلمه در مورد منیفلدهای مرزدار با معنی است. اما، برای ابقای قضایای اساسی

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۳.۲: فضای مماس بر یک نقطهٔ مرزی از یک منیفلد مرزدار

در فصل ۱، بایستی محدودیت‌های بیشتری را برای نگاشت‌هایمان قایل شویم. شرایطی را می‌خواهیم که طی آنها اگر $f: X \longrightarrow Y$ زیر منیفلد Z از Y را بپوشاند، آنگاه تضمین شده باشد که $f^{-1}(Z)$ زیر منیفلد مرزدار است. همچنین، می‌خواهیم که $\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial X$. متأسفانه، تراگردی f به تنهایی این را تضمین نمی‌کند.(مثلاً، گیریم $f: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ نگاشت $(x_1, x_2) \mapsto x_2$ باشد، و نیز Z برابر $\{0\}$. در این صورت $f^{-1}(Z) = \partial\mathbb{H}^2$.) شرط درست لازم این است که تراگردی بر امتداد مرز را به آن شرط قبلی نیز اضافه کنیم.

قضیه. گیریم f نگاشتی هموار از منیفلد مرزدار X بروی منیفلد بی‌مرز Y باشد، و فرض کنیم که $f: X \longrightarrow Y$ و $\partial f: \partial X \longrightarrow Y$ هر دو نسبت به زیر منیفلد بی مرز Z در Y تراگرد باشند. در این صورت پیشنگارهٔ $f^{-1}(z)$ یک زیر منیفلد مرزدار است،

$$\partial[f^{-1}(Z)] = f^{-1}(Z) \cap \partial X$$

و همبعد $f^{-1}(Z)$ در X برابر با همبعد Z در Y می‌باشد.

برهان: تحدید f به منیفلد بی‌مرز $\mathrm{Int}(X)$ به Z تراگرد است؛ پس، بنا به قضیهٔ پیش، $f^{-1}(Z) \cap \mathrm{Int}(X)$ یک منیفلد بی‌مرز با همبعد درست است. اکنون تنها نیاز داریم که $f^{-1}(z)$ را در یک همسایگی از یک نقطهٔ $f^{-1}(Z) \cap \partial X$ مطالعه بکنیم. مثل معمول، به حالتی که Z تک نقطه‌ای است مسئله را تحویل می‌کنیم. برای این کار یک غوطه‌وری ϕ از یک $f(x)$ در Y بروی $\mathbb{R}^\ell$ به طوریکه در این همسایگی از $Z = \phi^{-1}(0)$ استفاده می‌نماییم. در اینجا $\ell = \mathrm{codim} Z$. در این صورت $\phi \circ f$ در یک همسایگی از x در X تعریف شده است، و مقطع $f^{-1}(Z)$ با آن همسایگی عبارت است از $(\phi \circ f)^{-1}(0)$. حال با انتخاب یک پیمایش موضعی $h: U \longrightarrow X$ گرد x، که U یک زیرمجموعهٔ باز در $\mathbb{H}^k$ است، نگاشت $\phi \circ f$ را به فضای اقلیدسی بازگشت می‌دهیم، و سپس قرار می‌دهیم $g = \phi \circ f \circ h$. چون $h: U \longrightarrow h(U)$ وابرسانی است، مجموعهٔ $f^{-1}(Z)$ منیفلدای مرزدار در یک همسایگی از x است اگر و تنها اگر $g^{-1}(0) = (f \circ h)^{-1}(Z)$ منیفلدای مرزدار در نزدیکی $u = h^{-1}(x) \in \partial U$ باشد.

درست مثل حالت بی‌مرز، فرض تراگردی

$$d f_x(T_x(X)) + T_{f(x)}(Z) = T_{f(x)}(Y)$$

به این گفته ترجمه می گردد که x یک نقطهٔ منظم $\phi \circ f$ است، یا به طور معادل اینکه g در u منظم است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

بنا به تعریف، همواری g بدین معنی است که این را به نگاشتی هموار چون $\tilde{g}$ که بر یک همسایگی $\tilde{U}$ از u در $\mathbb{R}^k$ تعریف می‌گردد می‌توان توسیع داد. همچنین $d\tilde{g}_u = dg_u$ نیز در u منظم است. چون $\tilde{g}$ نگاشتی بین منیفلدهای بی‌مرز است، پیشنگارهٔ $\tilde{g}^{-1}(0)$ که با یک همسایگی از نقطهٔ منظمش u مقطع گرفته شده باشد، زیر منیفلد بی‌مرز S از $\mathbb{R}^k$ می‌باشد.

چون $g^{-1}(0) = S \cap \mathbb{H}^k$ یک همسایگی u است، بایستی نشان دهیم $S \cap \mathbb{H}^k$ منیفلد با مرز است. به این دلیل است که فرض تراگردی بر ∂f اساسی است. آخرین تابع مختصاتی بر $\mathbb{R}^k$ که به S تحدید شده باشد را با π نمایش می‌دهیم، $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}$. در این صورت

$$S \cap \mathbb{H}^k = \{s \in S : \pi(s) \geq 0\}.$$

ادعا می‌کنیم که 0 یک مقدار منظم برای π است، زیرا اگر اینطور نباشد، نقطه‌ای $s \in S$ چنان وجود دارد که $\pi(s) = 0$ و $d\pi_s = 0$. البته $\pi(s) = 0$ به طور ساده بدین معنی است که $s \in S \cap \partial^k\mathbb{H}$. همچنین، چون $\pi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ خطی است، $d\pi_s$ با π مساوی است. بنابراین اینکه $d\pi_s$ بر $T_s(S)$ صفر است تنها بدین معنی است که مختص آخر هر بردار در $T_s(S)$ صفر است، یا به طور معادل اینکه $T_s(S) \subset T_s(\partial\mathbb{H}^k) = \mathbb{R}^{k-1}$. اما چون $S = \tilde{g}^{-1}(0)$، می‌دانیم که هستهٔ $dg_s = d\tilde{g}_s : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ دقیقاً عبارت از $T_s(S)$ است. اکنون مشتق ∂g در s تحدید $dg_s : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^{k-1}$ می‌باشد. بنابراین اگر هستهٔ dg_s مشمول در $\mathbb{R}^{k-1}$ باشد، آنگاه دو نگاشت خطی $dg_s : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ و $d(\partial g)_s : \mathbb{R}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ بایستی دارای یک هسته باشند. اما شرایط تراگردی ایجاب می‌کنند که هر دو نگاشت پوشا باشند؛ سپس رابطهٔ استاندارد بعدها برای نگاشت‌های خطی به ما می‌گوید که هستهٔ dg_s دارای بعد $k-\ell$ است، در حالی که هستهٔ $d(\partial g)_s$ با بعد $k-1-\ell$ می‌باشد. چون این یک تناقض است، دقیقاً نتیجه می‌گیریم که بایستی 0 یک مقدار منظم برای g باشد. بالاخره، لم زیر برهان قضیه را کامل می‌کند. □

لم. فرض کنید S منیفلدای بی‌مرز بوده و $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع هموار با مقدار منظم 0 باشد. در این صورت، زیرمجموعهٔ $\{s \in S : \pi(s) \geq 0\}$ یک منیفلدای مرزدار است، و مرزش $\pi^{-1}(0)$ است.

برهان: مجموعه نقاطی که در آنها π مثبت است، در S باز است و بنابراین زیر منیفلدای از S با همان بعد می‌باشد. پس فرض می‌کنیم که $\pi(s) = 0$. چون π در s منظم است، در نزدیکی s با غوطه‌وری قانونی موضعاً هم‌ارز است. اما، لم برای غوطه‌وری قانونی بدیهی است. □

این لم جدای ازاستفاده‌اش در قضیهٔ بالا، جالب است. مثلاً، با گرفتن $S = \mathbb{R}^n$ و $\pi(s) = 1 - |s|^2$، ثابت می‌شود که گوی واحد بسته $\{s \in \mathbb{R}^n : |s| \leq 1\}$ یک منیفلد مرزدار است.

تعمیم قضیه سارد به منیفلد های مرزدار مستقیم‌تر است.

قضیه سارد. در مورد هر نگاشت هموار f از یک منیفلد مرزدار X بتوی منیفلد بی‌مرز Y، تقریباً هر نقطهٔ Y یک مقدار منظم برای جفت نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ و $\partial f : \partial X \longrightarrow Y$ است.

برهان: چون مشتق ∂f در یک نقطه $x \in \partial X$ درست تحدید df_x به زیر فضای $T_x(\partial X) \subset T_x(X)$ است، بدیهی است که اگر ∂f در x منظم باشد، f نیز هست. بنابراین، نقطه $y \in Y$ تنها هنگامی ممکن است که

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

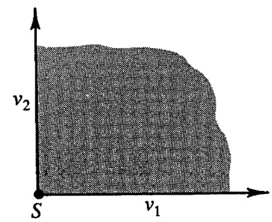
مقدار منظم هر دوی $f : X \longrightarrow Y$ و $\partial f : \partial X \longrightarrow Y$ نباشد که یک مقدار بحرانی $\partial f : \mathrm{Int}(X) \longrightarrow Y$ یا $\partial f : \partial X \longrightarrow Y$ باشد. اما چون $\mathrm{Int}(X)$ و ∂X هر دو منیفلد بی‌مرزند، هر دو مجموعهٔ نقاط بحرانی با اندازهٔ صفرند. بنابراین، متمم مجموعهٔ مقادیر نامنظم مشترک f و ∂f، که اجتماعی از دو مجموعهٔ با اندازهٔ صفر است، خود دارای اندازهٔ صفر است. □

بخش ۱.۲ تمرینات

۱. اگر $U \subset \mathbb{R}^k$ و $V \subset \mathbb{H}^k$ همسایگی صفر باشند، ثابت کنید که هیچ وابرسانی از V به U وجود ندارد.

۲. ثابت کنید که اگر $f : X \longrightarrow Y$ وابرسانی بین منیفلدهای مرزدار باشد، آنگاه ∂f مرز ∂X را به طور وابرسان بر مرز ∂Y می‌نگارد.

۳. نشان دهید که مربع $S = [0, 1] \times [0, 1]$ منیفلد مرزدار نیست. [راهنمایی: اگر f یک همسایگی از گوشهٔ s را بتوی $\mathbb{H}^2$ بنگارد، و مرز را به مرز ببرد، نشان دهید که دو بردار مستقل v_1 و v_2 در $T_s(S)$ به دو بردار وابستهٔ $d f_s(v_1)$ و $d f_s(v_2)$ نگاشته می‌شوند.] به شکل ۴.۲ نگاه کنید.



شکل ۴.۲: مربع، منیفلد مرزدار نیست

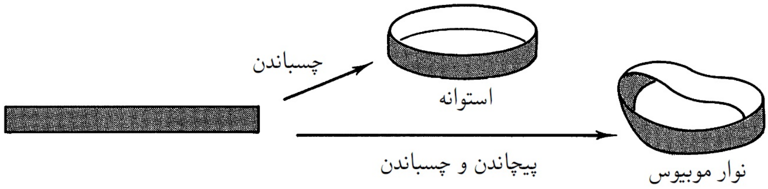
۴. نشان دهید که هذلولی توپور $x^2 + y^2 - z^2 \leq a$ یک منیفلد مرزدار است $(0 < a)$.

۵. مشخص کنید که بازاء کدام مقادیر a مقطع هذلولی توپور $x^2 + y^2 - z^2 \leq a$ و کرهٔ واحد $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ منیفلد مرزدار می‌باشد؟ حاصل شبیه چه است؟

۶. روش استانداردی برای تهیه منیفلد های مرزدار از روی مربع واحد، به هم متصل کردن جفت اضلاع متقابل آن وجود دارد (شکل ۵.۲). طریق ساده‌تر چسباندن استوانه را موجب می‌گردد، و حال آنکه طریق دیگر که پس از یک پیچش عمل چسبانیدن انجام می‌پذیرد به نوار موبیوس منتهی می‌گردد. تحقیق کنید که مرز استوانه از دو کپی از $\mathbb{S}^1$ تشکیل می‌یابد، در حالی که مرز نوار موبیوس از یک کپی از $\mathbb{S}^1$؛ نتیجتاً، استوانه و نوار موبیوس غیر وابرسانند. اگر نوار را پس از n بار پیچش به هم متصل کنیم، چه وضعی پیش می‌آید؟

۷. فرض کنید که X منیفلدای مرزدار باشد و $x \in \partial X$. گیریم $\phi : U \longrightarrow X$ یک پیمایش موضعی با $\phi(0) = x$ باشد، که U زیرمجموعه ای باز از $\mathbb{H}^k$ است. در این صورت $d\phi_0 : \mathbb{R}^k \longrightarrow T_x(X)$

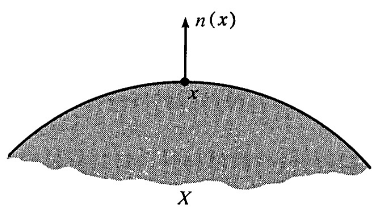
Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۵.۲: ساختن استوانه و نوار موبیوس با استفاده از مستطیل

یک یکریختی است. نیم‌فضای بالایی $H_x(X)$ در $T_x(X)$ را نگارهٔ $\mathbb{H}^k$ تحت $d\phi_0$ تعریف می‌کنیم، $x(X) = d\phi_0(\mathbb{H}^k)$. ثابت کنید که $H_x(X)$ به انتخاب پیمایش موضعی بستگی ندارد.

۸. نشان دهید که دقیقاً دو بردار واحد در $T_x(X)$ به $T_x(\partial\mathbb{H}^k)$ عمودند و یکی از آنها در داخل $H_x(X)$ است و دیگری در خارجش. آن برداری که در $H_x(X)$ است بردار واحد نرمال به سمت داخل بر مرز نام دارد، و آن یکی بردار واحد نرمال به سمت خارج بر مرز. بردار نرمال واحد به سمت بیرون را با $\vec{n}x$ نمایش دهیم. توجه کنید که اگر X در $\mathbb{R}^N$ جا داشته باشد، می‌توان $\vec{n}$ را به عنوان نگاشتی از ∂X بتوی $\mathbb{R}^N$ تلقی کرد. ثابت کنید که n هموار است. (به ویژه اینکه، برای هنگامی که $X = \mathbb{H}^k$ بردار $\vec{n}(x)$ چه است؟) به شکل ۶.۲ توجه کنید.



شکل ۶.۲: بردار نرمال واحد به سمت بیرون

۹. (الف) نشان دهید که ∂X زیرمجموعه‌ای بسته از X است (به خصوص اگر X فشرده باشد، ∂X در X فشرده است).

(ب) مثال‌هایی را بیابید که در آنها ∂X فشرده است ولی خود X خیر.

۱۰. گیریم $x \in \partial X$ نقطه‌ای مرزی است. نشان دهید تابع نامنفی و هموار f بر یک همسایگی باز U از x چنان وجود دارد که وقتی و تنها وقتی $f(z) = 0$ که داشته باشیم $z \in \partial U$، و ضمناً اگر $z \in \partial U$، آنگاه $0 < df_z(\vec{n}(z))$.

۱۱. (عکس لم صفحهٔ ۵۹) نشان دهید که اگر X منیفلدای مرزدار باشد، تابعی نامنفی و هموار بر X، با مقدار منظم در x، چنان یافت می‌گردد که $\partial X = f^{-1}(0)$. [راهنمایی: برای به هم دوختن توابع تمرین ۱۰ از افرازیکانی استفاده کنید. تضمین منظم بودن چه می‌شود؟]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

بخش ۲.۲ یک-منیفلدها و بعضی احکام مربوط به آنها

بازهٔ بسته و دایره تنها منیفلدهای یک بعدی مرزدار، همبند، و فشرده‌اند. این مطلب یکی از گزاره‌های جداً واضح و روشن است که اثباتش از آنچه که به نظر می‌رسد تکنیکی‌تر می‌باشد. ایدهٔ کار به اندازهٔ کافی ساده است. کار با نقطه‌ای به خصوص شروع شده و با سرعتی ثابت در امتداد خم حرکت می‌کنیم. چون منیفلد فشرده است، تا ابد نمی‌توانیم به قلمروهای تازه پای بگذارید؛ یا بار دیگر به نقطهٔ شروع خویش می‌رسید، که این می‌گوید خم دایره است، و یا اینکه در نقطه‌ای مرزی از حرکت باز می‌ایستد، که این می‌گوید خم بازهٔ بسته می‌باشد. اثباتی مطمئن از این حکم را در ضمیمه ۲ می‌توانید بیابید، و لذا فعلاً به سادگی ادعا می‌کنیم که

رده بندی یک-منیفلدها. هر یک-منیفلد مرزدار، همبند، و فشرده با $[0,1]$ یا $\mathbb{S}^1$ وابرسان است.

چون هر یک-منیفلد فشرده اجتماعی مجزا از یک تعداد متناهی مؤلفهٔ هم‌بندی است، به نتیجهٔ بدیهی که کاربردهای غیر بدیهی جالبی دارد می‌رسیم.

نتیجه. مرز هر یک-منیفلد مرزدار فشرده از تعدادی زوج، نقطه تشکیل می‌یابد.

اولین کاربردی از این نتیجه که خواهیم آورد، در اثبات حکم به شرح ذیل است:

قضیه. اگر X یک منیفلد مرزدار دلخواه باشد، در این صورت هیچ نگاشت همواری چون $g : X \longrightarrow \partial X$ که برای آن $\partial g : \partial X \longrightarrow \partial X$ نگاشت همانی باشد، وجود ندارد. یعنی اینکه، هیچ «توبری» از X بروی مرزش وجود ندارد.

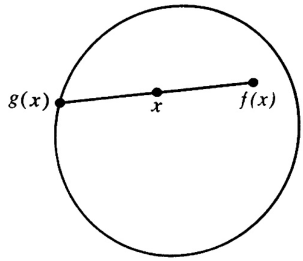
برهان: فرض کنیم یک چنین g ای موجود باشد، و گیریم $z \in \partial X$ یک مقدار منظم باشد. (وجود z را قضیه سارد تضمین میکند.) در این صورت $g^{-1}(z)$ یک زیر منیفلد مرزدار X است. چون همبعد $g^{-1}(z)$ در X برابر همبعد $\{z\}$ در ∂X است، یعنی برابر $\dim X - 1$ است، نتیجه می‌گیریم که $g^{-1}(z)$ یک بعدی و فشرده است. اما چون ∂g همانی است، داریم

$$\partial g^{-1}(z) = g^{-1}(z) \cap \partial X = \{z\},$$

که با نتیجه‌ی قبل در تضاد است. □

اینک قضیهٔ مشهوری از براوئر را ثابت می‌کنیم، که معمولاً یا با به کارگیری ابزارهای پیچیدهٔ توپولوژی جبری و یا تعبیر و کارهای سراسر استادانه به اثبات می‌رسد. (اثبات ذیل که مبتنی بر «تراگردی» است به م. هیرش منتسب می‌باشد.)

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۷.۲: اثبات قضیهٔ نقطه ثابت برائر

قضیه نقطه-ثابت براوئر. هر نگاشت هموار f از گوی واحد بسته $B^n \subset \mathbb{R}^n$ بتوی خودش، لزوماً یک نقطهٔ ثابت دارد؛ یعنی، بازاء یک $x \in B^n$ ای $f(x) = x$.

برهان: فرض کنیم f ای بدون هیچگونه نقطه ثابتی وجود داشته باشد. می‌خواهیم یک توبری $g : B^n \longrightarrow \partial B^n$ بسازیم. چون $f(x) \neq x$، دو نقطهٔ x و $f(x)$ خطی را مشخص می‌کنند. گیریم $g(x)$ نقطه‌ای از این خط باشد که وقتی از نقطهٔ $f(x)$ شروع می‌کنیم و در سمتی که x قرار دارد حرکت می‌کنیم، در مرز به آن برسیم. (شکل ۷.۲). اگر اکنون $x \in \partial B^n$، داریم $g(x) = x$. بنابراین $g : B^n \longrightarrow B^n$ بر ∂B^n همانی است. کافی است نشان دهیم که g هموار است و بدین‌سان به تناقضی با قضیه توبری می‌رسیم و از آنجا برهان قضیه را تکمیل کرده‌ایم. چون x در خط واصل میان $f(x)$ و $g(x)$ است، می‌توانیم بردار $g(x) - f(x)$ را به صورت مضرب t از بردار $x - f(x)$ بنویسیم، که در آن $t \geq 1$. بنابراین $g(x) = tx + (1-t)f(x)$. اگر t به صورت هموار به x بستگی داشته باشد، آنگاه g هموار‌است. حاصلضرب نقطه‌ای دو طرف این تساوی را در نظر می‌گیریم. چون $|g(x)| = 1$، به فرمول

$$t^2|x - f(x)|^2 + 2t f(x).[x - f(x)] + |f(x)|^2 - 1 = 0$$

می‌رسیم. شاید این آخری خیلی پرت به نظر برسد، ولی طبیعت جالبی دارد؛ در واقع یک چند جمله‌ای درجه دوم با یک ریشهٔ منحصر به فرد مثبت است. (ریشه‌ای $t \leq 0$ نیز متناظر با نقطهٔ برخورد خط گذرنده از x و $f(x)$ با مرز وجود دارد). اکنون تنها چیزی که لازم است انجام شود، یادآوری فرمول درجه دوم از دبیرستان و بکارگیری آن برای محاسبهٔ t بر اساس توابع هموار از x است. □

تمرینات

۱. هر زیر منیفلد یک بعدی، همبند، و فشردهٔ از $\mathbb{R}^3$ با یک دایره وابرسان است. اما آیا در $\mathbb{R}^3$ می‌توان آن را به دایره تغییر شکل داد؟

۲. نشان دهید که نقطهٔ ثابت در قضیه براوئر لزوماً یک نقطهٔ درونی نیست.

۳. نگاشتی از چنبرهٔ توپور بتوی خودش بیابید که هیچ نقطهٔ ثابتی نداشته باشد.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۴. ثابت کنید که قضیه براوئر برای گوی باز $|x|^2 < a$ غلط است. [راهنمایی: تمرین ۴ از بخش ۱ از فصل ۱ را نگاه کنید.]

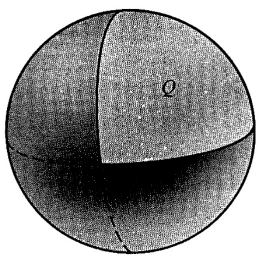
۵. بدون استفاده از مقادیر منظم، قضیه براوئر را برای نگاشت های از $[0,1]$ بروی خودش ثابت کنید.

۶. قضیه براوئر برای نگاشت‌های پیوسته $f : B^n \longrightarrow B^n$ را ثابت کنید. از قضیهٔ تقریب وایرشتراس استفاده کنید، که می‌گوید بازاء هر $\epsilon > 0$ یک نگاشت چند جمله‌ای $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ چنان وجود دارد که $|f - p| < \epsilon$ بر B^n. (یک مرجع: «قضیه استون-وایرشتراس» در اصول آنالیز ریاضی رودین.) [راهنمایی: ابتدا نشان دهید که بازاء $\delta > 0$ مفروض، می‌توانید p را چنان بیابید که $|f - p| < \delta$ و $p : B^n \longrightarrow B^n$. حال از این مطلب که اگر f هیچ نقطهٔ ثابتی نداشته باشد، آنگاه روی B^n، داریم $|f(x) - x| > c > 0$، استفاده کنید.]

۷. به عنوان کاربرد ملموس و جالبی از قضیه براوئر، قضیه‌ای از فروبنیوس را ثابت کنید؛ اگر درآیه‌های یک ماتریس حقیقی $n \times n$ ای A همگی نامنفی باشند، آنگاه A یک مقدار ویژهٔ حقیقی و نامنفی خواهد داشت. [راهنمایی: کافی است فرض کنیم که A نامنفرد است؛ در غیر این صورت 0 خود یک مقدار ویژه است. گیریم A خود نمایشگر نگاشت خطی وابسته به آن از $\mathbb{R}^n$ نیز باشد، و نگاشت $v \mapsto Av/|Av|$ تحدید شده به $\mathbb{S}^{n-1}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که این نگاشت «اولین یک هشتم از کره»

$$Q = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} \ : \ 0 \leq \text{ها } x_1 \text{همهٔ}\}$$

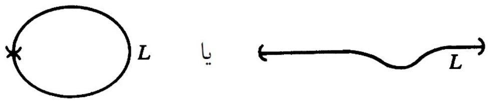
را به خودش می‌نگارد. اثبات این مطلب که Q با B^{n-1} همسایزیخت است، با اینکه امید اعتراض نداریم، چندان سخت نیست؛ یعنی اثبات اینکه یک دوسویی پیوسته از Q به B^n که وارونش پیوسته است وجود دارد. حال از تمرین ۶ استفاده می‌کنیم.] به شکل ۸.۲ توجه فرمایید.



شکل ۸.۲: قضیه فروبنیوس- تمرین ۷

۸. فرض کنید $\dim X = 1$ و L زیرمجموعه‌ای وابرسان با یک بازهٔ در $\mathbb{R}^1$ باشد. ثابت کنید که $\bar{L} - L$ از حداکثر دو نقطه تشکیل می‌یابد: این برای رده‌بندی یک-منیفلدها لازم است. [راهنمایی: برای $g : (a,b) \tilde{\to} L$ مفروض، گیریم $p \in \bar{L} - L$. گیریم J زیر مجوعه‌ای بسته از X باشد که با $[0,1]$ وابرسان است، به طوریکه 1 به p متناظر است و 0 به یک $g(t) \in L$ ای. ثابت کنید که J یا

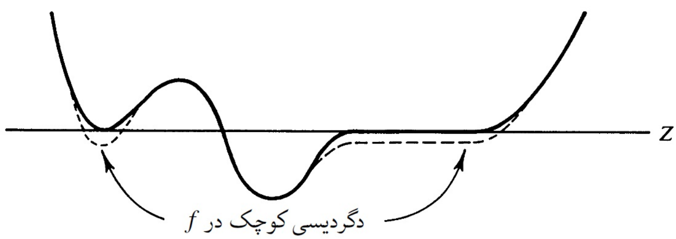
Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شامل $g(a,t)$ است و یا $g(t,b)$، با نشان دادن اینکه مجموعهٔ $\{s\in(a,t):g(s)\in J\}$ در (a,b) باز و بسته است.]

بخش ۳.۲ تراگردی

پیش‌تر ثابت کردیم که تراگردی خاصیتی است که تحت اختلالات کوچک، حداقل در مورد نگاشت‌های با دامنهٔ فشرده، پایدار است. از قضیه سارد این مطلب ظریف‌تر و با ارزش‌تر در مورد تراگردی را استدلال می‌کنیم که تراگردی یک کیفیت جنریک است: هر نگاشت هموار دلخواه $f:X\longrightarrow Y$ را، به هر شکلی که نسبت به یک زیر منیفلد Z در Y عمل کند، با مقدار به اندازهٔ دلخواه کوچکی تغییر شکل به نگاشتی که به Z تراگرد باشد می‌توان تبدیل نمود. پایداری از نقطه نظر فیزیکی بدین معنی است که نگاشت‌های تراگرد عملاً قابل مشاهده‌اند. این مطلب که تراگردی جنریک است چنین می‌گوید که این دسته از نگاشتها تنها نگاشت‌های تراگرد هستند که قابل مشاهده‌اند. به این تعبیر، تقریباً همهٔ نگاشت‌ها تراگردند. (به شکل ۹.۲ نگاه شود). راه‌حل تراگردی خانواده‌های نگاشت‌هایند. فرض کنید که $f_s:X\longrightarrow Y$ یک خانواده از



شکل ۹.۲: دگردیسی در تابع

نگاشت های هموار باشد، که توسط یک پارامتر s که بر مجموعه‌ای S تغییر می‌کند پیمایش شده است. چون با هوموتوپی‌ها کار می‌کنیم، مثل سابق نگاشت $F:X\times S\longrightarrow Y$ با ضابطهٔ $F(x,s)=f_s(x)$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم که وقتی S یک منیفلد فرض می‌شود و F هموار گرفته می‌شود، خانواده به طور هموار تغییر کند. قضیهٔ مرکزی بحث ما چنین است

قضیهٔ تراگردی فرض کنید $F:X\times S\longrightarrow Y$ نگاشتی هموار بین منیفلدها باشد، که تنها X مرزدار است، و گیریم Z یک زیر منیفلد بدون‌مرز دلخواه از Y باشد. اگر F و ∂F هر دو به Z تراگرد باشند، در این صورت بازاء تقریباً هر $s\in S$ ای f_s و ∂f_s هر دو به Z تراگردند.

برهان: پیشنگارهٔ $W=F^{-1}(Z)$ یک زیر منیفلد مرزدار از $X\times S$ و با مرز $\partial W=W\cap\partial(X\times S)$ است. گیریم $\pi:X\times S\longrightarrow S$ نگاشت تصویر طبیعی باشد. نشان خواهیم داد که هر وقت $s\in S$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

مقداری منظم برای نگاشت تحدید شدهٔ $\pi : W \longrightarrow S$ باشد، آنگاه $f_s \pitchfork Z$، و هرگاه s مقداری منظم برای $\partial\pi : \partial W \longrightarrow S$ باشد، آنگاه $\partial f_s \pitchfork Z$. طبق قضیهٔ سارد، تقریباً هر $s \in S$، یک مقدار منظم برای هر دو نگاشت است، و بنابراین قضیه منتج می‌گردد.

برای نشان دادن اینکه $f_s \pitchfork Z$ فرض می‌کنیم که $f_s(x) = z \in Z$. چون $F(x,s) = Z$ و $F \pitchfork Z$، می‌دانیم که

$$dF_{(x,s)}\, T_{(x,s)}\, (X \times S) + T_z(Z) = T_z(Y);$$

یعنی اینکه، بازاء هر بردار دلخواه $v \in T_z(Y)$، برداری مانند $b \in T_{(s,x)}(X \times S)$ چنان وجود دارد که $dF_{x,s}(b) - a \in T_z(Z)$. می‌خواهیم برداری چون $v \in T_x(X)$ چنان بیابیم که $df_s(v) - a \in T_z(Z)$. اکنون

$$T_{(x,s)}(X \times S) = T_x(X) \times T_s(S)$$

بنابراین $b = (w, e)$ برای بردارهای $w \in T_x(X)$ و $e \in T_s(S)$. اگر e صفر می‌بود، کار انجام شده بود، چونکه از اینکه تحدید F به $X \times \{s\}$ عبارت است از f_s نتیجه می‌شود که

$$dF_{(x,s)}\,(w, 0) = d f_s(w).$$

با اینکه e همیشه لزوماً صفر نیست، توسط تصویر π می‌توانیم از بینش ببریم. چون

$$d\pi_{(x,s)} : T_x(X) \times T_s(S) \longrightarrow T_s(S)$$

درست تصویر بروی دومین مؤلفه است، فرض منظم بودن مبنی بر اینکه $d\pi_{(x,s)}$ فضای $T_{(x,s)}(W)$ را بروی $T_s(S)$ می‌نگارد، اذعان می‌دارد که برداری به شکل (u, e) در $T_{(x,s)}(W)$ وجود دارد. اما $F : W \longrightarrow Z$، پس $dF_{(x,s)}(u, e) \in T_z(Z)$. نتیجتاً، بردار $v = w - u \in T_x(X)$ جواب ما است. زیرا

$$\begin{aligned} d f_s - a &= dF_{(x,s)}\,[(w,e) - (u,e)] - a \\ &= [dF_{(x,s)}\,(w,e) - a] - dF_s(u,e), \end{aligned}$$

و هر دو بردار آخری به $T_z(Z)$ متعلقند.

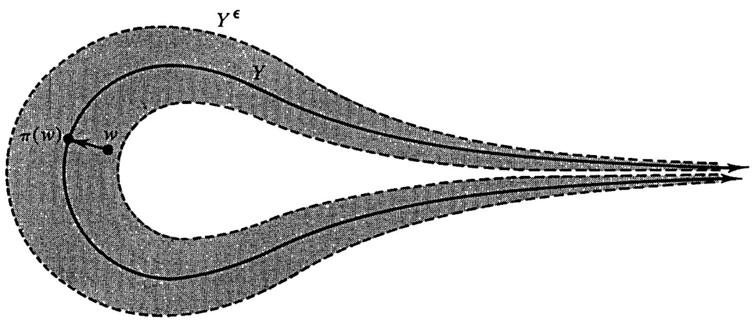
برهانی دقیقاً به همین شکل نشان می‌دهد که $\partial f_s \pitchfork Z$ هنگامی که s یک مقدار منظم $\partial\pi$ باشد. (در واقع، این حالت به خصوصی است از آنچه که دقیقاً ثابت می‌گردد، یعنی برای حالتی که ∂X منیفلد بدون‌مرز است و $\partial F : (\partial X) \times S \longrightarrow Y$.)

قضیه تراگردی به راحتی ایجاب می‌کند که نگاشت‌های تراگرد هنگامی‌که منیفلد هدف Y یک فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^M$ است جنریک‌اند. اگر $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^M$ یک نگاشت هموار دلخواه باشد، گیریم S گوی باز $\mathbb{R}^M$ باشد و سپس نگاشت $F : X \times S \longrightarrow \mathbb{R}^M$ را با ضابطهٔ $F_{(x,s)} = f(x) + s$ تعریف می‌کنیم. برای هر $x \in X$ ثابت، F یک انتقال گوی S است، و لذا به وضوح یک غوطه‌وری است. پس، البته، F یک غوطه‌وری $X \times S$ است و بنابراین به هر زیر منیفلد Z از $\mathbb{R}^M$ تراگرد است. طبق قضیه تراگردی، بازاء تقریباً هر $s \in S$، نگاشت $f_s(x) = f(x) + s$ به Z تراگرد می‌باشد. بنابراین می‌شود f را با اضافه کردن یک کمیت به اندازهٔ دلخواه کوچک s به سادگی به یک نگاشت تراگرد تبدیل نمود.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

اثبات اینکه تراگردی برای هر منیفلد هدف بدون‌مرز دلخواه نیز جنریک است به همین شکل دنبال می‌گردد. Y خود در یک فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^M$ جا دارد، و کافی است نشان دهیم که چگونه یک نگاشت مفروض $f : X \longrightarrow Y$ از بین یک خانواده از نگاشت‌های انتقال دهندهٔ X به $\mathbb{R}^M$ تحت عمل بالا تغییر می‌یابد. اکنون همهٔ آنچه که لازم داریم انجام دهیم این است که به طریقی این نگاشت‌ها را بروی Y تصویر کنیم، که به موجب آن به یک خانوادهٔ مناسب از نگاشت‌های از X بتوی Y برسیم. پس برای این کار، می‌بایستی کمی از هندسهٔ Y نسبت به اطرافش اطلاع داشته باشیم.

قضیه ϵ-همسایگی برای یک منیفلد بدون‌مرز و فشرده Y در $\mathbb{R}^M$ و یک عدد مثبت ϵ، گیریم Y^ϵ مجموعهٔ باز نقاطی در $\mathbb{R}^M$ باشد که به فاصلهٔ کمتر از ϵ از Y قرار دارند. اگر ϵ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، آنگاه هر نقطهٔ $w \in Y^\epsilon$ یک نزدیک‌ترین نقطهٔ منحصر به فرد در Y می‌پذیرد، که ما آنرا با $\pi(w)$ نمایش می‌دهیم. به علاوه، نگاشت $\pi : Y^\epsilon \longrightarrow Y$ یک غوطه‌وری است. هنگامی که Y فشرده نیست، هنوز هم یک غوطه‌وری $\pi : Y^\epsilon \longrightarrow Y$ که بر Y همانی است وجود دارد، منتهی لزوماً ϵ مجاز نیست که تابع مثبت هموار بر Y باشد، و Y^ϵ به شکل $\{w \in \mathbb{R}^M : |w-y| < \epsilon$ ای $y \in Y$ بازاء یک $\}$ تعریف گردیده است. به شکل ۱۰.۲ نگاه کنید.



شکل ۱۰.۲: ϵ-همسایگی

اثبات را برای لحظه‌ای به تعویق می‌اندازیم.

نتیجه. گیریم $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی هموار باشد، و Y بدون‌مرز. در این صورت یک گوی باز S در فضای اقلیدسی و یک نگاشت هموار $F : X \times S \longrightarrow Y$ چنان وجود دارند که $F(x,0) = f(x)$، و بازاء هر $x \in X$ ثابت نگاشت $s \longmapsto F(x,s)$ یک غوطه‌وری $S \longrightarrow Y$ است. به خصوص، F و ∂F هر دو غوطه‌وری‌اند.

برهان: گیریم S گوی واحد در $\mathbb{R}^M$ باشد، که $\mathbb{R}^M$ فضای پیرامون اقلیدسی Y است، و تعریف می‌کنیم $F(x,s) = \pi[f(x) + \epsilon(f(x))s]$. چون هنگامی که $\pi : Y^\epsilon \longrightarrow Y$ به Y تحدید شود، همانی است داریم $F(x,0) = f(x)$ برای x ثابت، مشخصاً $s \longmapsto f(x) + \epsilon(f(x))s$ یک غوطه وری $S \longrightarrow Y^\epsilon$ است. چون ترکیب دو غوطه‌وری، غوطه‌وری است، $s \longmapsto F(x,s)$ نیز غوطه‌وری است. F و ∂F به وضوح

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

بایستی غوطه‌وری باشند، زیرا آنها حتی وقتی به زیر منیفلدهای $\{x\}\times S$ تحدید شوند غوطه‌وریند، و از هر نقطهٔ از $X\times S$ و هر نقطهٔ از $(\partial X)\times S$ یک چنین زیر منیفلدای می‌گذرد.
اینکه تراگردی جنریک است مستقیماً منتج می‌گردد. صورتی از این حکم که به آن نیاز داریم عبارت است از

قضیه هوموتوپی تراگردی بازاء هر نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ و هر زیر منیفلد بدون‌مرز Z از منیفلد بی‌مرز Y، یک نگاشت هموار $g : X \longrightarrow Y$ هوموتوپ با f چنان وجود دارد که $g \pitchfork Z$ و $\partial g \pitchfork Z$.

برهان: قضیه تراگردی در مورد خانوادهٔ نگاشت‌های F در نتیجهٔ بالا، ایجاب می‌کند که بازاء تقریباً همهٔ $s\in S$ ها $f_s \pitchfork Z$ و $\partial f_s \pitchfork Z$. اما هر f_s ای با f هوموتوپ است، که هوموتوپی $X\times I \longrightarrow Y$ با ضابطهٔ $(x,t)\mapsto F(x,ts)$ تعریف می‌گردد.
برای اثبات قضیه $\in$ − همسایگی، یک مشابه زیرکانه از کلاف مماس را مطرح می‌کنیم. برای هر $y\in Y$، $N_y(U)$ را، فضای نرمال Y در y، متمم متعامد $T_y(Y)$ در $\mathbb{R}^M$ تعریف می‌کنیم. در این صورت کلاف نرمال $N(Y)$ را به صورت مجموعهٔ

$$\{(y,u)\in Y\times\mathbb{R}^M \;:\; v\in N_y(Y)\}$$

تعریف می‌نماییم. توجه کنید که بر خلاف $T(Y)$، $N(Y)$ در ذات منیفلد Y نیست ولی به رابطهٔ به خصوص میان Y و فضای پیرامون $\mathbb{R}^M$ وابسته است. یک تصویر طبیعی $\sigma : N(Y \longrightarrow Y)$ با ضابطهٔ $\sigma(y,v)=y$ وجود دارد.
برای نشان دادن اینکه $N(Y)$ منیفلد است، بایستی یک حکم مقدماتی از جبر خطی را یادآوری کنیم. فرض کنید که $A:\mathbb{R}^M\longrightarrow\mathbb{R}^k$ یک نگاشت خطی باشد، ترانهاده‌اش یک نگاشت خطی $A^t:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^M$ است که توسط معادلهٔ حاصلضرب نقطه‌ای «بازاء همهٔ $v\in\mathbb{R}^M$ و $w\in\mathbb{R}^M$ ها $Av.w=v.A^tw$» مشخص می‌گردد. اگر ماتریس A نسبت به پایه‌های استاندارد (a_{ij}) باشد، آنگاه ماتریس A^t عبارت خواهد بود از a_{ji}. توجه کنید که اگر A پوشا باشد، آنگاه A^t کل $\mathbb{R}^k$ را به طور یکریخت بروی متمم متعامد هستهٔ A می‌نگارد. زیرا اگر $A^tw=0$، آنگاه $Av.w=v.A^tw=0$، و بنابراین $w\perp A(\mathbb{R}^M)$؛ چون A پوشا است، بایستی w صفر باشد و بنابراین A^t یک به یک است. مشابهاً، اگر $Av=0$ آنگاه $0=Av.w=v.A^tw$، و لذا $A^t(\mathbb{R}^k)\perp\ker(A)$. بنابراین A^t کل $\mathbb{R}^k$ را به طور یک به یک به متمم متعامد $\ker A$ می‌نگارد. چون $\ker A$ به بعد $M-k$ است، متمم آن به بعد k می‌باشد، از اینرو A^t پوشا نیز هست.

گزاره. اگر $Y\subset\mathbb{R}^M$، آنگاه $N(Y)$ یک منیفلد M بعدی است و تصویر $S : N(Y)\longrightarrow Y$ غوطه‌وری است.

برهان: Y را به صورت موضعی با معادلات تعریف می‌کنیم: حول هر نقطهٔ مفروض Y، یک مجموعهٔ باز $\tilde{U}$ از $\mathbb{R}^k$ و یک غوطه‌وری $\phi:\tilde{U}\longrightarrow\mathbb{R}^k$ ($k=$ هم‌بعد Y) چنان می‌یابیم که $U=Y\cap\tilde{U}=\phi^{-1}(0)$. مجموعهٔ $N(U)$ برابر با $N(Y)\cap(U\times\mathbb{R}^M)$ است، از این جهت در $N(Y)$ باز می‌باشد. بازاء هر $y\in Y$، نگاشت $d\phi_y:\mathbb{R}^M\longrightarrow\mathbb{R}^k$ پوشا است و دارای هستهٔ $T_y(Y)$ می‌باشد. بنابراین ترانهاده‌اش $\mathbb{R}^k$ را به طور یکریخت بروی $N_y(Y)$ می‌نگارد. پس نگاشت $\psi : U\times\mathbb{R}^k\longrightarrow N(U)$ با ضابطهٔ $\psi(y,v)=(y,d\phi^t_y v)$ پوشا است، و $N(U)$ یک منیفلد پیمایش شده توسط ψ است با بعد

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

$M = \operatorname{codim} Y + \dim Y = k + \dim U =$. چون هر نقطه از $N(Y)$ دارای یک چنین همسایگی بخصوص است، $N(Y)$ منیفلد است. چون $U \longrightarrow U : U \times \mathbb{R}^k$ دقیقاً همان غوطه‌وری استاندارد است، σ $\sigma \circ \psi$ یک غوطه‌وری است. □

اثبات قضیه ϵ-همسایگی: گیریم $h : N(Y) \longrightarrow \mathbb{R}^M$ با ضابطهٔ $h(y,v) = y + v$ باشد. توجه کنید که h در هر نقطه از $Y \times \{0\}$ در $N(Y)$ منظم است، چرا که $(y,0)$ به دو منیفلد طبیعی متمم $N(Y)$ تعلق دارد، یعنی $Y \times \{0\}$ و $\{y\} \times N_y(Y)$. مشتق h در $(y,0)$ فضای مماس به $Y \times \{0\}$ در $(y,0)$ را بروی $T_y(Y)$ می‌نگارد و فضای مماس به $\{y\} \times N_y(Y)$ در $(y,0)$ را بروی $N_y(Y)$. بنابراین، فضای مماس به $(y,0)$ را بروی $T_y(Y) + N_y(Y) = \mathbb{R}^M$ می‌نگارد.

چون h مجموعهٔ $Y \times \{0\}$ را به طور وابرسان بروی Y می‌نگارد و در هر $(y,0)$ ای منظم می‌باشد، بایستی یک همسایگی از $Y \times \{0\}$ را به طور وابرسان بروی یک همسایگی از Y در $\mathbb{R}^M$ بنگارد. (تمرین ۱۴ از بخش ۸ از فصل ۱). حال هر همسایگی از Y در $\mathbb{R}^M$ یک Y^ϵ ای را دربر دارد؛ این نکته هنگامی که Y فشرده باشد بدیهی است و در حالت کلی به راحتی قابل نشان دادن است (تمرین ۱). بنابراین $h^{-1} : Y^\epsilon \longrightarrow N(Y)$ تعریف شده است، و $\pi = \sigma \circ h^{-1} : Y^\epsilon \longrightarrow Y$ غوطه‌وری مورد نظر است. توصیف هندسی π در مورد منیفلدهای فشرده، که ما اصلاً از آن استفاده نخواهیم کرد، هدف تمرین ۳ است. □

به یک فرم تا اندازه‌ای قوی‌تر از قضیه هوموتوپی تراگردی نیاز خواهیم داشت. بر این اساس، تعریف کنیم که نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ **بر** یک زیرمجموعهٔ C از X به Z تراگرد است مشروط به اینکه شرط تراگردی

$$d f_x T_x(X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)}(Y)$$

در هر نقطهٔ $x \in C \cap f^{-1}(z)$ ای برقرار باشد.

قضیه توسیع. فرض کنیم Z زیر منیفلدای بسته از Y، هر دو بدون‌مرز بوده، و C زیرمجموعه‌ای بسته از X باشد. گیریم $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی هموار با $f \pitchfork Z$ بر C باشد و $f \pitchfork Z$ بر $C \cap \partial X$. در این صورت نگاشتی هموار مانند $g : X \longrightarrow Y$ هوموتوپ با f چنان وجود دارد که $g \pitchfork Z$، $\partial g \pitchfork Z$، و بر یک همسایگی از C داریم $g = f$.

لم. اگر U یک همسایگی باز از مجموعهٔ بسته C در X باشد، آنگاه یک تابع هموار $\gamma : X \longrightarrow [0,1]$ که خارج U متحد با یک است و بر یک همسایگی از C متحد با صفر می‌باشد وجود دارد.

برهان: گیریم C' یک مجموعهٔ بستهٔ دلخواه مشمول در U باشد که C را در درونش دارد، و $\{\theta_i\}$ یک افراز یکانی همخوان با پوشش باز $\{U, X - C'\}$ برای X باشد. (اثبات قضیه افراز یکانی برای وقتی که X مرزدار است هنوز مانده.) در این صورت γ را درست حاصلجمع آن θ_i هایی می‌گیریم که خارج $X - C'$ صفر می‌گردند. □

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

اثبات قضیه توسیع: ابتدا نشان می‌دهیم که بر یک همسایگی از C داریم $f \pitchfork Z$. اگر $x \in C$ اما $x \notin f^{-1}(Z)$، آنگاه چون Z بسته است، $X - f^{-1}(Z)$ همسایگی‌ای از x است که بر آن به طور خودکار $f \pitchfork Z$. اگر $x \in f^{-1}(z)$، آنگاه یک همسایگی W از $f(x)$ در Y و یک غوطه‌وری $\phi : W \longrightarrow \mathbb{R}^k$ به گونه‌ای وجود دارد که در هر نقطهٔ $x' \in f^{-1}(Z \cap W)$ درست هنگامی $f \pitchfork Z$ که $\phi \circ f$ در x منظم باشد. اما $\phi \circ f$ در x منظم است، پس در یک همسایگی از x نیز منظم است. بنابراین $f \pitchfork Z$ بر یک همسایگی از هر نقطهٔ $x \in C$، و همچنین $f \pitchfork Z$ بر یک همسایگی U از x.

گیریم γ تابع ذکر شده در لم بالا باشد، و گیریم $\tau = \gamma^2$. چون $d\tau_x = 2\gamma(x)\, d\gamma_x$، هر وقت $\tau(x) = 0$ داریم $d\tau_x = 0$. حال نگاشت $F : X \times S \longrightarrow Y$ را که در اثبات قضیه هوموتوپی تراگردی به کار بردیم، با تعریف کردن $G : X \times S \longrightarrow Y$ با ضابطهٔ $G(x,s) = F(x, \tau(x)s)$ اصلاح می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که $G \pitchfork Z$. زیرا فرض کنیم $(x,s) \in G^{-1}(Z)$، و مثلاً $\tau(x) \neq 0$. در این صورت نگاشت $S \longrightarrow Y$ با ضابطهٔ $r \mapsto G(x,r)$ یک غوطه‌وری است، چرا که عبارت است از ترکیب وابرسانی $r \mapsto \tau(x)r$ و غوطه‌وری $r \mapsto F(x,r)$. نتیجه اینکه G در (x,s) منظم است، و بنابراین مشخصاً در (x,s) داریم $G \pitchfork Z$. وقتی $\tau(x) = 0$، $dG_{(x,s)}$ را در عنصر دلخواه

$$(v,w) \in T_x(X) \times T_s(S) = T_x(X) \times \mathbb{R}^M$$

محاسبه می‌کنیم. اگر، برای روشن شدن بحث، $m : X \times S \longrightarrow X \times S$ را با ضابطهٔ $m(x,s) = (x, \tau(x)s)$ تعریف کنیم، آنگاه مشتق‌اش

$$dm_{(x,s)}(v,w) = (v, \tau(x).w + d\tau_x(v).s)$$

خواهد بود که $d\tau_x(v) \in \mathbb{R}$ و $\tau(x)$ مضارب اسکالری بردارهای $s \in \mathbb{R}^M$ و w هستند. حال از قاعده زنجیره‌ای برای $G = F \circ m$ پس از جایگزینی $\tau(x) = 0$ و $d\tau_x(v) = 0$ استفاده می‌نمائیم:

$$dG_{(x,s)}(v,w) = dF_{(x,0)}(v,0)$$

چون وقتی F به $X \times \{0\}$ تحدید می‌شود برابر با f است، داریم

$$dG_{(x,s)}(v,w) = df_x(v).$$

اما اگر $\tau(x) = 0$، آنگاه $x \in U$ و $f \pitchfork Z$ در x، پس این مطلب که df_x و نیز $dG_{(x,s)}$ دارای یک نگارند، ایجاب می‌کند که $G \pitchfork Z$ در (x,s).

تحلیل مشابهی نشان می‌دهد که $\partial G \pitchfork Z$. اکنون، طبق قضیه تراگردی، s ای می‌توانیم برگزینیم که برای آن نگاشت $g(x) = G(x,s)$ در شرایط $g \pitchfork Z$ و $\partial g \pitchfork Z$ صدق دارد. مثل قبل، g با f هوموتوپ است. مضاف بر این، اگر x به همسایگی‌ای از C که بر آن $\tau = 0$ متعلق باشد، آنگاه $g(x) = G(x,s) = F(x,0) = f(x)$. □

چون همیشه ∂X در X بسته است، به حالت خاص ذیل می‌رسیم که

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

نتیجه. اگر در مورد $f : X \longrightarrow Y$، نگاشت مرزی $\partial f : \partial X \longrightarrow Y$ به Z تراگرد باشد، آنگاه نگاشتی مانند $g : X \longrightarrow Y$ هوموتوپ با f چنان وجود دارد که $\partial g = \partial f$ و $g \pitchfork Z$.

با معطوف کردن توجه به مرز، می‌توان نتیجه را به شکل مفید دیگری تعبیر کرد: فرض کنیم $h : \partial X \longrightarrow Y$ نگاشتی تراگرد به Z باشد. در این صورت اگر h به نگاشتی از کل منیفلد X به توی Y توسیع یابد، به نگاشتی که بر کل X به Z تراگرد است توسیع‌پذیر است.

تمرینات

۱. (برای قضیه ϵ−همسایگی). نشان دهید که هر همسایگی $\tilde{U}$ از Y در $\mathbb{R}^M$ یک Y^ϵ ای را دربردارد؛ به علاوه، اگر Y فشرده باشد، ϵ را می‌شود ثابت گرفت. [**راهنمایی:** یک سری مجموعه‌های باز پوشش دهندهٔ $U_\alpha \subset Y$ و $\epsilon_\alpha > 0$ را چنان بیابید که $U_\alpha^{\epsilon_\alpha} \subset \tilde{U}$. فرض کنید $\{\theta_i\}$ یک افراز یکانی زیر دست آن باشد، و نشان دهید که $\epsilon = \sum \theta_i \epsilon_i$ کاری را که می‌خواهیم انجام می‌دهد.]

۲. گیریم Y یک زیر منیفلد فشرده از $\mathbb{R}^M$ بوده، و $w \in \mathbb{R}^M$. نشان دهید که نقطه‌ای (نه لزوماً منحصر به فرد) $y \in Y$ که به w نزدیک‌ترین است وجود دارد، و سپس ثابت کنید که $w - y \in N_y(Y)$. [**راهنمایی:** اگر $C(t)$ خمی بر Y با $c(0) = y$ باشد، آنگاه تابع هموار $|w - c(t)|^2$ در 0 مینیمم مقدار است. از تمرین ۱۲ از بخش ۲ از فصل ۱ استفاده کنید.]

۳. با استفاده از تمرین ۱ مشخص‌سازی هندسی $\pi : Y^\epsilon \longrightarrow Y$ در مورد Y فشرده را تحقیق کنید. فرض کنید که $h : N(Y) \longrightarrow \mathbb{R}^M$ یک همسایگی از Y در $N(Y)$ را به طور وابرسان بروی Y^ϵ ببرد که، با ϵ ثابت است. ثابت کنید که اگر $w \in Y^\epsilon$، آنگاه $\pi(w)$ نزدیک‌ترین نقطهٔ Y به w است و ضمناً **منحصر به فرد** است.

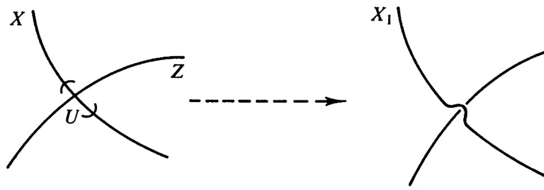
۴. (لم موقعیت کلی) گیریم X و Y دو زیر منیفلد $\mathbb{R}^N$ باشند. نشان دهید که بازاء تقریباً هر $a \in \mathbb{R}^N$ ای انتقال یافتهٔ $X + a$ خود Y را به طور تراگرد قطع می‌نماید.

۵. فرض کنید که زیر منیفلد فشرده X در Y زیر منیفلد دیگری Z را به طور تراگرد قطع کند، ولی $\dim X + \dim Z < \dim Y$. ثابت کنید که با تغییر شکل به اندازهٔ دلخواه کوچکی می‌توان Y را به کلی از Z جدا کرد: بازاء $\epsilon > 0$ مفروض یک تغییر شکل $X_t = i_t(X)$ چنان وجود دارد که X_1 منیفلد Z را قطع نمی‌کند و بازاء همه $x \in X$ ها $|x - i_1(x)| < \epsilon$. (**یادداشت:** به تمرین ۱۱ از بخش ۶ فصل ۱ نیاز دارید. نکته این است که X_t منیفلد است.)

۶. فرم دقیق شدهٔ تمرین ۵. فرض کنیم که Z در Y بسته بوده و U یک مجموعهٔ باز در X باشد که $Z \cap X$ را دربر دارد. نشان دهید که تغییر شکل X_t را می‌توان چنان انتخاب کرد که خارج U ثابت باشد (شکل ۱۱.۲)

۷. فرض کنید X یک زیر منیفلد $\mathbb{R}^N$ باشد. نشان دهید که «تقریباً هر» فضای برداری V با بعد ثابت ℓ در $\mathbb{R}^N$ ای X را به طور تراگرد قطع می‌کند. در اینجا ℓ دلخواه است. [**راهنمایی:** مجموعهٔ

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱۱.۲: دگردیسی که در خارج از U ثابت است

$S \subset (\mathbb{R}^N)^\ell$ از همهٔ $\ell-$ تایی‌های مستقل خطی از بردارهای در $\mathbb{R}^N$ یک زیرمجموعهٔ باز در $\mathbb{R}^{N\ell}$ است، و نگاشت $\mathbb{R}^\ell \times S \longrightarrow \mathbb{R}^N$ با ضابطهٔ

$$[(t_1,\cdots,t_\ell),(v_1,\cdots,v_\ell)] \longrightarrow t_1 v_1+\cdots+t_\ell v_\ell$$

یک غوطه‌وری است.]

۸. فرض کنید $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار با $n>1$ بوده، و $K\subset\mathbb{R}^n$ فشرده باشد و $\epsilon>0$. نشان دهید که نگاشتی $f':\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ چنان وجود دارد که $d f'_x$ هیچ کجا صفر نیست، ولی بر K داریم $|f-f'|<\epsilon$. ثابت کنید که این حکم برای $n=1$ غلط است. [**راهنمایی:** فرض کنید $M(n)$ ماتریس‌های $n\times n$ است، و نشان دهید که نگاشت $F:\mathbb{R}^n\times M(n)\longrightarrow M(n)$ با ضابطهٔ $F(x,A)=d f_x+A$ یک غوطه‌وری است. A را چنان اختیار کنید که $F_A \pitchfork \{0\}$؛ از $n>1$ کجا استفاده شد؟]

۹. گیریم $f:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^k$، و برای هر $a\in\mathbb{R}^k$ ای، تعریف می‌کنیم

$$f_a(x)=f(x)+a_1 x_1+\cdots+a_k x_k.$$

ثابت کنید که بازاء همهٔ $a\in\mathbb{R}^k$ ها، f_a تابع مورس است. [**راهنمایی:** نگاشت‌های $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^k$ با ضابطه‌ی

$$(x,a)\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}+a_1,\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_k}+a_k$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید که این غوطه‌وری است و لذا با $\{0\}$ تراگرد است.]

۱۰. گیریم X یک منیفلد $n-1$ بعدی در $\mathbb{R}^n$ باشد، یعنی یک «ابر رویه». به یک نقطه در $\mathbb{R}^n$ **نقطه کانونی** X گفته می‌شود هرگاه یک مقدار بحرانی برای نگاشت کلاف نرمال $h:N(X)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ $h(x,v)=x+v$ باشد. نقاط کانونی سهمی $y=x^2$ در $\mathbb{R}^2$ را پیدا کنید. [**پاسخ:** خمی با یک نقطهٔ بازگشتی در $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ پیدا می‌کنید.]

۱۱. گیریم X یک زیر منیفلد یک-بعدی $\mathbb{R}^2$ باشد، و گیریم $p\in X$. مختصات خطی در $\mathbb{R}^n$ را چنان انتخاب می‌کنیم که p مبداء باشد، $x-$محور در p به X مماس باشد، و y محور خط نرمال به آن

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

باشد. نشان دهید که در یک همسایگی از $p=0$، X نمودار یک تابع $y=f(x)$ با $f(0)=0$ و $f'(0)=0$ می‌باشد. کمیت $f''(0)$ **انحنای X در** p نامیده شده و با $\kappa(p)$، نمایش داده می‌شود. نشان دهید که اگر $\kappa(p)\neq 0$ آنگاه X یک نقطهٔ کانونی در امتداد خط نرمال و در فاصلهٔ $1/\kappa(p)$ از p دارد. [**راهنمایی:** نشان دهید که فضای نرمال به X در یک نقطهٔ x نزدیک به p توسط $(-f'(x),1)$ تولید می‌گردد. حال نگاشت کلاف نرمال $h:N(X)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ را محاسبه کنید.]

۱۲. گیریم Z زیر منیفلدای از Y باشد، که $Y\subset\mathbb{R}^M$. **کلاف نرمال به Z در** Y را به صورت مجموعهٔ $N(Z;Y)=\{(z,v): v\perp T_z(Z), v\in T_z(Y), z\in Z\}$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $N(Z;Y)$ منیفلدای است که با Y به یک بعد می‌باشد. [**راهنمایی:** فرض کنید که $g_1,\cdots,g_\ell$ توابع مستقلی در یک همسایگی $\tilde{U}$ از z در $\mathbb{R}^M$ باشند، که برای آنها

$$U=Z\cap\tilde{U}=\{g=0,\cdots,g_\ell=0\}\quad \text{و}\quad Y\cap\tilde{U}=\{g_{k+1}=0,\cdots,g_\ell=0\}$$

(تمرین ۴ از بخش ۴ فصل ۱). پیمایش وابسته $N(Z;\mathbb{R}^M)\longrightarrow U\times\mathbb{R}^\ell$ را به نگاشت $U\times\mathbb{R}^k\longrightarrow N(Z;\mathbb{R}^M)$ تحدید کنید. نشان دهید که این، پس از آنکه با یک نگاشت تصویر متعامد دنبال شود، پرامایش مورد نظر را به دست می‌دهد.]

۱۳. $\mathbb{S}^{k-1}$ را به عنوان زیر منیفلدای از $\mathbb{S}^k$ با استفاده از نگاشت نشانندهٔ $(x_1,\cdots,x_k)\mapsto(x_1,\cdots,x_k,0)$ در نظر بگیرید. نشان دهید که متمم متعامد $T_p(\mathbb{S}^{k-1})$ در $T_p(\mathbb{S}^k)$، در نقطهٔ $p\in(\mathbb{S}^{k-1})$، توسط بردار $(0,\cdots,0,1)$ تولید می‌گردد. ثابت کنید که $N(\mathbb{S}^{k-1};\mathbb{S}^k)$ با $\mathbb{S}^{k-1}\times\mathbb{R}$ وابرسان است.

۱۴. ثابت کنید که نگاشت $S:N(Z;Y)\longrightarrow Z$ با ضابطهٔ $\gamma(z,v)=z$ یک غوطه‌وری است. بخصوص پیشنگارهٔ $\gamma^{-1}(z)$، که با نماد $N_z(Z;Y)$ نمایش می‌دهیم، چه است؟

۱۵. نشان دهید که نگاشت $z\mapsto(z,0)$ منیفلد Z را به عنوان زیر منیفلدای از $N(Z;Y)$ می‌نشاند.

۱۶. **قضیه همسایگی جدولی.** ثابت کنید که یک وابرسانی از همسایگی بازی از Z در $N(Z;Y)$ بروی همسایگی بازی از Z در Y وجود دارد.

[**راهنمایی:** $Y^\epsilon\xrightarrow{\pi}Y$ را مثل در قضیهٔ ϵ-همسایگی بگیرید. نگاشت $h:N(Z;Y)\longrightarrow\mathbb{R}^M$ با ضابطهٔ $h(z,v)=z+v$ را در نظر بگیرید. در این صورت $W=h^{-1}(Y^\epsilon)$ یک همسایگی باز از Z در $N(Z;Y)$ است. دنباله نگاشت‌های $W\xrightarrow{h}Y^\epsilon\xrightarrow{\pi}Y$ بر Z همانی است، سپس تمرین ۱۴ در بخش ۸ از فصل ۱ را استفاده کنید.]

۱۷. گیریم Δ قطر در $X\times X$ باشد. نشان دهید که متمم متعامد به $T_{(x,x)}(\Delta)$ در $T_{(x,x)}(X\times X)$ گردایه بردارهای $\{(v,-v): v\in T_x(X)\}$ است. [به تمرین ۱۰ از بخش ۲ در فصل ۱ نگاه کنید.]

۱۸. ثابت کنید که نگاشت $N(\Delta:X\times X)\longrightarrow T(X)$، که (x,v) را به $((x,x),(v,-v))$ می‌برد، وابرسانی است. با استفاده از قضیه همسایگی جدولی استدلال کنید که یک وابرسانی از همسایگی‌ای از X در $T(X)$ به یک همسایگی از Δ در $X\times X$ وجود دارد، طوری که توسیع وابرسانی معمولی $X\longrightarrow\Delta$، با ضابطهٔ $x\mapsto(x,x)$ است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۱۹. گیریم Z یک زیر منیفلد با همبعد k در Y باشد. کلاف نرمال $N(Z:Y)$ **را در صورتی بدیهی است** که یک وابرسانی $\phi : N(Z:Y) \longrightarrow Z\times\mathbb{R}^k$ چنان وجود داشته باشد که بازاء هر نقطهٔ $z\in Z$ به یک یکریختی خطی $N_z(Z:Y) \longrightarrow \{z\}\times\mathbb{R}^k$ بدل شود. به عنوان آزمونی برای درکتان از مطلب، ثابت کنید که $N(Z:Y)$ همیشه **موضعاً بدیهی** است. یعنی اینکه، هر نقطهٔ $z\in Z$ دارای یک همسایگی V در Z است به گونه‌ای که $N(V:Y)$ بدیهی است.

۲۰. ثابت کنید که $N(Z:Y)$ وقتی و تنها وقتی بدیهی است که مجموعه‌ای از k تابع مستقل $g_1,\cdots,g_k$ که بر کل مجموعه U ای در Y تعریف شده‌اند چنان وجود داشته باشند که Z مجموعهٔ صفرهای مشترک آنها باشند، یعنی اینکه،

$$Z = \{y\in U : g_1(y) = 0,\cdots, g_k(y) = 0\}.$$

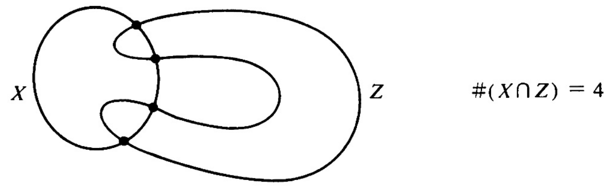
[**راهنمایی:** اگر $N(Z:Y)$ بدیهی باشد، آنگاه به وضوح توابع سراسری معرف Z در $N(Z:Y)$ وجود دارند.توسط قضیه همسایگی جدولی، تمرین ۱۶، این توابع را به مجموعهٔ بازی در Y تبدیل کنید. بالعکس، اگر یک غوطه‌وری $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ با $g^{-1}(0) = Z$ موجود باشد، تحقیق کنید که برای هر $z\notin Z$ ای، نگاشت ترانهادهٔ $dg_z^t : \mathbb{R}^k \longrightarrow T_z(Y)$ کل $\mathbb{R}^k$ را بطور یکریخت بروی متمم متعامد $T_z(Z)$ در $T_z(Y)$ می‌برد؛ سپس $\phi^{-1} : Z\times\mathbb{R}^k \to N(Z;Y)$ را با ضابطهٔ $\phi^{-1}(z,a) = (z, dg_z^t a)$ تعریف کنید.]

بخش ۴.۲ نظریه مقطع به پیمانه ۲

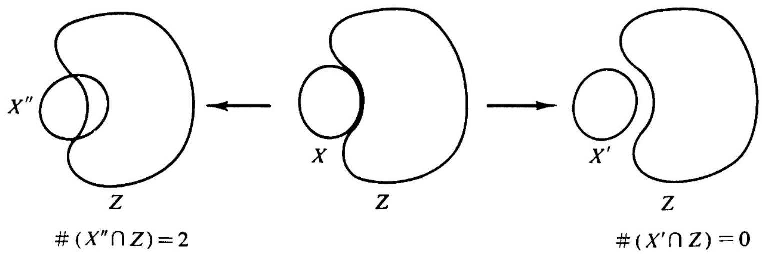
بخش قبلی تکنیکی و تا حدی مشکل بود. اکنون می‌خواهیم شما را متقاعد کنیم که آن کارها به زحمتش می‌ارزد. از لم تراگردی و سایر احکام بخش ۳ برای طرح یک مفهوم ناوردای شهودی ساده برای منیفلدهای متقاطع استفاده می‌کنیم، که به موجب آن می‌توانیم به یک سری نتایج هندسی برسیم.

در صورتی دو زیر منیفلد X و Z که داخل Y اند دارای **ابعاد متمم** اند که $\dim X + \dim Z = \dim Y$. اگر $X \pitchfork Z$، این شرط روی بعدها ایجاب می‌کند مقطع آنها $X\cap Z$ یک منیفلد صفر–بعدی باشد. (داریم با منیفلدهای بدون‌مرز کار می‌کنیم.) به علاوه اگر فرض کنیم که X و Z هر دو بسته باشند و لااقل یکی از آنها، مثلاً X، فشرده باشد، آنگاه بایستی $X\cap Z$ مجموعه‌ای متناهی از نقاط باشد. موقتاً، به تعداد نقاط در $X\cap Z$ تحت عنوان «عدد مقطع» X و Z، با کوته نوشت $\#(X\cap Z)$ اشاره می‌کنیم. به شکل ۱۲.۲ نگاه کنید. چگونه می‌توانیم این توصیف را برای تعریف عدد مقطع یک منیفلد فشردهٔ X با یک منیفلد بستهٔ دلخواه Z که با X دارای ابعاد متمم‌اند، تعمیم دهیم؟ بدون شرط تراگردی مقطع، ممکن است $X\cap Z$ توده‌ای بی‌مصرف و درهم باشد. اما X را می‌توان تکان داده، یک کمی در آن تغییر شکل حاصل کرده، و آن را به Z تراگرد نمود. بنابراین بسادگی می‌شود عدد مقطع X و Z را به صورت عدد مقطع Z با، کمی جراحی پلاستیک شدهٔ X تعریف نمود. مشکل اینجا است که ممکن است انتخاب‌های مختلف برای تغییر شکل‌های روی X موجب اعداد مقطع مختلفی گردد (شکل ۱۳.۲). خوشبختانه این ایده کاملاً مصون از هر گونه گزندی است، زیرا همانطوری که خواهیم دید، اعداد مقطع حاصله حداقل به پیمانهٔ ۲ برای تغییر شکل‌های مختلف مساویند. یا همهٔ تغییر شکل‌ها دارای عدد مقطع فرد یا همگی دارای عدد مقطع زوجند.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱۲.۲: عدد مقطع



شکل ۱۳.۲: دگردیسی و عدد مقطع

بنابراین عدد مقطع به پیمانهٔ ۲را برای X و Z به شکل با معنی می‌توانیم تعریف کنیم. می‌بایستی به لزوم طرح تغییر شکل X به یک تعبیر دقیق ریاضی برای آن توجه کنیم. مبادرت به تعریف تغییر شکل برای مجموعه‌های نقطه‌ای دلخواه در Y راهگشا نیست، و لذا بایستی توجه خود را از سوی دیگری به این مطلب معطوف کنیم. به این صورت که X را به عنوان یک منیفلد مجرد در نظر گرفته و نگاشت شمول آن را $i : X \longrightarrow Y$ به سادگی به عنوان یک نشاننده تصور کنیم، اکنون می‌دانیم که چگونه می‌توان i را تغییر شکل داد، یعنی به توسط هوموتوپی. چون نشاننده‌ها خود یک ردهٔ پایدار تشکیل می‌دهند، هر تغییر هوموتوپیک کوچک روی i، یک نشاننده $X \longrightarrow Y$ به ما می‌دهد که اگر منیفلد نگارش را محاسبه کنیم، یک کپی وابرسان از X است که در همسایگی X اولی واقع است.

به وضعیت کلی به شرح زیر می‌پردازیم. فرض کنیم که X یک منیفلد فشردهٔ دلخواه، نه لزوماً در داخل Y، باشد، و $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی هموار که به منیفلد بستهٔ Z در Y تراگرد است، و ضمناً $\dim X + \dim Z = \dim Y$. در این صورت $f^{-1}(Z)$ یک زیر منیفلد صفر بعدی بسته از X است، و لذا مجموعه‌ای متناهی است. **عدد مقطع به پیمانهٔ ۲**برای نگاشت f نسبت به Z، $I_2(f,Z)$، را تعداد نقاط در $f^{-1}(Z)$ که در پیمانهٔ ۲ حساب شود تعریف می‌کنیم. برای نگاشت هموار **دلخواه** $g : X \longrightarrow Y$، یک نگاشت f که با g هوموتوپ است و به Z تراگرد می‌باشد انتخاب کرده، و تعریف می‌کنیم $I_2(g,Z) = I_2(f,Z)$. ابهام در این تعریف به توسط قضیهٔ ذیل برطرف می‌گردد:

قضیه. اگر $f_1 : X \longrightarrow Y$ و f_0 هوموتوپ بوده و هر دو به Z تراگرد باشند، آنگاه $I_2(f_1,Z) = I_2(f_0,Z)$.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

برهان: گیریم $F : X\times I \longrightarrow Y$ یک هوموتوپی از f_0 به f_1 باشد. بنا به قضیه توسیع، می‌توانیم فرض کنیم که $F \pitchfork Z$. چون $\partial(X\times I) = X\times\{0\}\cup X\times\{1\}$ و ∂F بر $X\times\{0\}$ برابر f_0 است و بر $X\times\{1\}$ برابر f_1، داریم $\partial F \pitchfork Z$. بنابراین $F^{-1}(z)$ یک زیر منیفلد یک‌-بعدی $X\times I$ با مرز

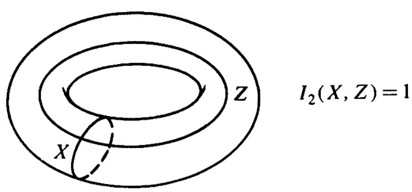
$$\partial F^{-1}(Z) = F^{-1}(Z)\cap\partial(X\times I) = f_0^{-1}(Z)\times\{0\}\cup f_1^{-1}(Z)\times\{1\}$$

می‌باشد. مطابق حکم رده‌بندی یک‌-منیفلدها، $\partial F^{-1}(Z)$ بایستی تعدادی زوج نقطه داشته باشد، لذا (پیمانه ۲) $\#f_0^{-1}(Z) \equiv \#f_1^{-1}(Z)$. □

چون هوموتوپی یک رابطهٔ هم‌ارزی است، بی‌درنگ داریم

نتیجه. اگر $g : X \longrightarrow Y$ و g_0 دو نگاشت هوموتوپ دلخواه باشند، در این صورت، داریم که $I_2(g_0,Z) = I_2(g_1,Z)$.

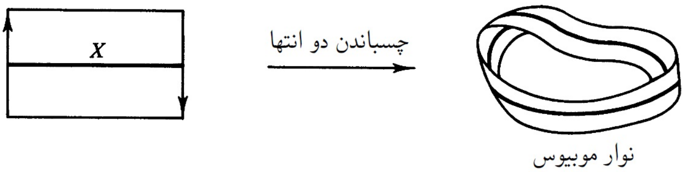
اکنون به حالت خاصی که انگیزهٔ کارمان بود بازمی‌گردیم. اگر X یک زیر منیفلد فشرده از Y بوده و Z یک زیر منیفلد بستهٔ با بعد متمم نسبت به X، عدد مقطع به پیمانهٔ ۲ برای X با Z را با $I_2(X,Z) = I_2(i,Z)$ تعریف می‌کنیم، که $i : X \longrightarrow Y$ نگاشت شمول است. هنگامی که $X \pitchfork Z$، $I_2(X,Z)$ درست عبارت از $\#X\cap Z$ به پیمانهٔ ۲ است. اگر $I_2(X,Z) \neq 0$، آنگاه هیچ فرقی نمی‌کند که X چگونه تغییر شکل بیابد، در هر صورت نمی‌تواند به کلی از Z جدا شود. به عنوان مثال، دو دایرهٔ متمم $\mathbb{S}^1\times\{1\}$ و $\{1\}\times\mathbb{S}^1$ بر روی چنبره $Y = \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ دارای عدد مقطع به پیمانهٔ ۲ ی ناصفرند (شکل ۱۴.۲). یک وضعیت عجیب اما شایع، هنگامی است که $\dim X = \frac{1}{2}\dim Y$، که در این حالت می‌توانیم $I_2(X,X)$ را به عنوان **عدد خود-قطعی به پیمانهٔ ۲** برای X تلقی کنیم. یک مثال بارز از این، خم مرکزی بر نوار موبیوس باز می‌باشد. با به‌هم وصل کردن دو سر یک نوار کاغذی که پیچانده شده است، مدلی از نوار موبیوس ساخته و نشان دهید که $I_2(X,X) = 1$. خود را متقاعد کنید که به هر طریقی که X تغییر شکل یابد، هرگز نمی‌تواند از وضعیت اولیه خود به کلی رهایی یابد (شکل ۱۵.۲) اگر اتفاقاً X مرز یک زیر منیفلد W در Y باشد،



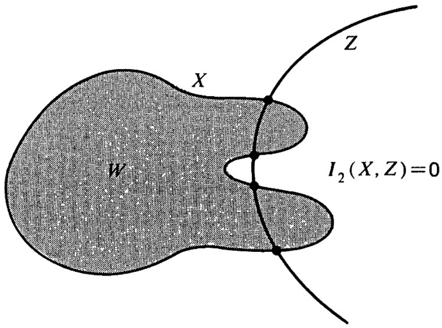
شکل ۱۴.۲: عدد مقطع بر استوانه

در این صورت $I_2(X,Z) = 0$. زیرا، اگر $X \pitchfork Z$، آنگاه، صرف نظر از جزئیات، بایستی Z از W همچون «رهگذرها» گذر کند؛ بنابراین $\#(X\cap Z)$ زوج است (شکل ۱۶.۲) مشاهدات خود را در حالتی کلی‌تر این چنین جمعبندی می‌نمائیم:

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱۵.۲: عدد مقطع بر نوار موبیوس



شکل ۱۶.۲: گذر Z از W

قضیهٔ مرز. فرض کنید که X مرز یک زیر منیفلد فشرده W بوده و $g:X\longrightarrow Y$ نگاشتی هموار باشد. اگر g را بشود به کل W توسیع داد، در اینصورت برای هر زیر منیفلد بستهٔ Z در Y که بعدش متمم بعد X است داریم $I_2(g,Z)=0$.

برهان: گیریم $G:W\longrightarrow Y$ توسیع g باشد؛ یعنی $\partial G=g$. از قضیه هوموتوپی تراگردی، به یک نگاشت هوموتوپ با G می‌رسیم که $F:W\longrightarrow Y$ و $F\pitchfork Z$ و بعلاوه $f=\partial F\pitchfork Z$. در اینصورت $g\sim f$، و لذا (پیمانهٔ ۲) $I_2(g,z)=\#f^{-1}(Z)$. اما $f^{-1}(Z)$ یک منیفلد یک‌−بعدی، فشرده، و مرزدار است، بنابراین $\#\partial F^{-1}(Z)=\#f^{-1}(Z)$ زوج است. □

نظریه مقاطع «ناوردای هوموتوپ» جالبی برای نگاشت‌های بین منیفلدهای با یک بعد به ما می‌دهد. تعریف آن به حکم ذیل وابسته است.

قضیه. اگر $f:X\longrightarrow Y$ نگاشتی هموار از منیفلد فشردهٔ X بتوی منیفلد همبند Y باشد و $\dim X=\dim Y$، آنگاه بازاء همهٔ نقاط $y\in Y$ عدد $I_1(f,\{y\})$ به یک مقدار است. این مقدار مشترک را **درجه نگاشت f به پیمانه ۲** نگاشت f می‌نامیم، و با نماد $\deg_2(f)$ نشان می‌دهیم.

تأکید می‌کنیم که درجه به پیمانهٔ ۲ تنها برای هنگامی تعریف می‌گردد که منیفلد برد Y همبند و منیفلد دامنه فشرده باشد؛ قردار می‌کنیم هر وقت $\deg_2$ نوشته شود، این فرض‌ها معمول شده است.

برهان: برای $y\in Y$ مفروض، پس از تغییر شکل دادن f به طور هوموتوپ، (اگر لازم باشد)، آنرا به $\{y\}$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

تراگرد می‌کنیم. اکنون بنا به «قضیهٔ رج بندی صفحه‌ها» (تمرین ۷، بخش ۴، فصل ۱) یک همسایگی U از y چنان می‌توانیم انتخاب کنیم که پیشنگاره $f^{-1}(U)$ اجتماعی مجزا به صورت $V_1 \cup \cdots \cup V_n$ باشد، که هر V_i ای یک مجموعهٔ باز در X است که به طور وابرسان f آنرا بروی U می‌نگارد. نتیجه می‌گیریم که $I_2(f,\{z\}) = n$ به پیمانهٔ ۲، برای همهٔ نقاط $z \in U$. نتیجتاً، تابع تعریف شده بر Y با ضابطهٔ $y \mapsto I_2(f,\{y\})$ موضعاً ثابت است. چون Y همبند است، بایستی سراسری ثابت باشد. □

توجه کنید که محاسبهٔ درجه به پیمانهٔ ۲ ی f کاری است بسیار ساده. کافی است یک مقدار منظم y برای f انتخاب کرده، و نقاط پیشنگارهٔ آنرا بشمارید: (پیمانهٔ ۲) $\deg_2(f) \equiv \# f^{-1}(y)$. مثلاً، نگاشت $z \mapsto z^n$ (ضرب مختلط) که $\mathbb{S}^1$ را به طور هموار n بار به گرد $\mathbb{S}^1$ می‌چرخاند، دارای درجهٔ صفر به پیمانهٔ ۲ است اگر n زوج باشد، و برابر درجه یک به پیمانهٔ یک است اگر n فرد باشد.

چون $\deg_2$ بدواً به صورت عدد مقطع تعریف شد، بی‌درنگ داریم:

قضیه. نگاشت‌های هموتوپ دارای درجهٔ به پیمانه ۲ ی مساویند.

قضیه. اگر $X = \partial W$ و $f : X \longrightarrow Y$ را به کل W بشود توسیع داد، در این صورت $\deg_2(f) \equiv 0$.

این مشاهدهٔ توپولوژیک را برای مسئلهٔ قدیمی صفرهای توابع می‌توانیم به کار ببریم. من باب مثال، فرض کنیم $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعی مختلط و هموار و W یک ناحیهٔ فشردهٔ هموار در صفحه، در واقع یک منیفلد دو-بعدی مرزدار باشد. آیا برای یک $z \in W$ ای $p(z) = 0$؟

فرض کنیم که p داخل ∂W هیچ صفری نداشته باشد، بنابراین $p/|p| : \partial W \longrightarrow \mathbb{S}^1$ تعریف شده و به عنوان نگاشتی از یک منیفلد یک- بعدی فشرده هموار می‌باشد. اکنون، اگر p داخل W هیچ صفری نداشته باشد، می‌توان $p/|p|$ را بر کل W تعریف نمود، و بلافاصلهٔ از قضیهٔ آخری نتیجه گرفت که:

گزاره. اگر $p/|p| : \partial W \longrightarrow \mathbb{S}^1$ دارای درجه به پیمانه ۲ ی مخالف صفر باشد، آنگاه تابع p داخل W یک صفر دارد.

چقدر جالب است که با شمارش سادهٔ تعداد دفعاتی که $p(z)$ خاصیتی را دارد، در حالی که z روی یک مرز حرکت می‌کند، بتوانیم مشخص کنیم که آیا معادلهٔ $p(z) = 0$ در داخل W حل شدنی است یا خیر! بیائید برای نشان دادن توانایی و محدودیت‌های این نظریه، نیمی از قضیه اساسی جبر را ثابت کنیم. فرض کنیم

$$p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$$

یک چند جمله‌ای مختلط تکین باشد، و یک هوموتوپی آنرا به صورت

$$\begin{aligned} p_t(z) &= t p(z) + (1-t) z^m \\ &= z^m + t(a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m) \end{aligned}$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

تعریف می‌کنیم. بسادگی ملاحظه می‌گردد که اگر W یک گوی بسته باندازهٔ کافی با شعاع بزرگ باشد، آنگاه هیچ یک از p_t ها بر ∂W صفر ندارند. زیرا

$$\frac{p_t(z)}{z^m} = 1 + t(a_1\frac{1}{z} + \cdots + a_m\frac{1}{z^m})$$

و جملهٔ ضریب t هنگامی که $Z \longrightarrow \infty$ به صفر میل می‌کند. بنابراین هوموتوپی $p_t/|p_t| : \partial W \longrightarrow \mathbb{S}^1$ بازاء همهٔ t ها تعریف می‌شود، و لذا نتیجه می‌گیریم که $\deg_2(p/|p|) = \deg_2(p_0/|p_0|)$. چند جمله‌ای p_0 دقیقاً z^m است؛ از اینرو هر نقطهٔ در $\mathbb{S}^1$ دارای درست m نقطهٔ پیشنگاره‌ای در ∂W تحت $p_0/|p_0|$ است. چون $\deg_2$ را با شمارش پیشنگاره‌های مقادیر منظم محاسبه می‌کنیم، (پیمانه ۲) $\deg_2(p_0/|p_0|) = m$. اکنون گزارهٔ قبلی اظهار می‌دارد که:

یک نیمهٔ قضیه اساسی جبر. هر چند جمله‌ای مختلط از درجهٔ فرد، ریشه دارد.

این حکم مشهور به شکل جامع و سریع به دست آمد، ولی همزمان عدم کفایت نظریهٔ مقطع به پیمانهٔ ۲ نشان داده شد: اطلاعات فوق‌العاده زیادی ضایع شده! ناوردای $\deg_2$ خام‌تر از آن است که بتواند میان چند جمله‌ای z^2 و چند جمله‌ای ثابت فرق قایل شود، و بدین سبب نیمهٔ دیگر قضیه اساسی جبر را نتوانست به ثبوت برساند. در فصل آتی مسیرمان را به منظور ساختن نظریه‌ای که تا حد قابل توجهی قویتر است، می‌خواهیم ظریف‌تر کنیم. همانطور که بخش‌های بعد نشان می‌دهند، این روش‌ها هم طبیعی هستند و هم به شکل موفق تصاویر و جلوه‌های عمیقی را با حداقل درگیری می‌نمایانند.

تمرینات

۱. ثابت کنید که عددی مختلط z با

$$z^7 + \cos(|z|^2)(1 + 93z^4) = 0$$

وجود دارد. (سعی نکنید آنرا محاسبه کنید!)

۲. گیریم $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ دنباله‌ای از نگاشت‌های بین منیفلدها، با X فشرده باشد. فرض کنیم که g به یک زیر منیفلد بسته W از Z تراگرد باشد، در این صورت $g^{-1}(W)$ زیر منیفلدای از Y است. تحقیق کنید که

$$I_2(f, g^{-1}(W)) = I_2(g \circ f, W).$$

(به تمرین ۷، بخش ۵، فصل ۱ نگاه کنید.) بخصوص، بررسی کنید که اگر شرایط چنان باشد که یکی از این اعداد مقطع تعریف شود، دیگری نیز قابل تعریف می‌باشد.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۳. فرض کنید X و Z منیفلد فشرده باشند و $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Z \longrightarrow Y$ هر دو نگاشت‌هایی هموار بتوی منیفلد Y می‌باشند. اگر $\dim Z + \dim X = \dim Y$، عدد مقطع به پیمانه ۲ ی f و g را با می‌توانیم به صورت $I_2(f,g) = I_2(f\times, \Delta)$ تعریف کنیم، که Δ قطر $Y \times Y$ است.

(الف) ثابت کنید که اگر f یا g بوسیلهٔ یک هوموتوپی تغییر یابند، $I_2(f,g)$ عوض نمی‌شود.

(ب) تحقیق کنید که $I_2(f,g) = I_2(g,f)$ [**راهنمایی:** از تمرین ۲ به همراه «وابرسانی برگردان» $(a,b) \longrightarrow (b,a)$ از $Y \times Y \longrightarrow Y \times Y$ استفاده کنید.]

(ج) اگر Z عملاً یک زیر منیفلد Y باشد و $i : Z \longrightarrow Y$ شمول باشد، نشان دهید که

$$I_2(f,i) = I_2(f,Z).$$

(د) در مورد دو زیر منیفلد فشردهٔ X و Z ثابت کنید که

$$I_2(X,Z) = I_2(Z,X).$$

(**یادداشت:** هنگامی که $X \pitchfork Z$، این حکم بدیهی است. پس چرا از این روش استفاده کردیم؟)

۴. اگر $f : X \longrightarrow Y$ به یک نگاشت ثابت هوموتوپ باشد، نشان دهید که برای همهٔ زیر منیفلدهای Z در Y که بسته‌اند و نسبت به X با بعد متمم داریم $I_2(f,Z) = 0$، مگر آنکه $\dim X = 0$. [**راهنمایی:** نشان دهید که اگر $\dim Z < \dim Y$، آنگاه f با یک نگاشت ثابت $X \longrightarrow \{y\}$، که $y \notin Z$، هوموتوپ است. اگر X تک نقطه‌ای باشد، برای کدام Z ها $I_2(f,Z) \neq 0$؟]

۵. ثابت کنید که نظریه مقاطع در مورد منیفلدهای انقباض‌پذیر بی محتوی است: اگر Y انقباض‌پذیر باشد و $0 < \dim Y$، آنگاه بازاء هر $f : X \longrightarrow Y$، که X فشرده و Z بسته است، و نیز $\dim Z + \dim X = \dim Y$ داریم $I_2(f,Z) = 0$. (اگر با بعد صفر باشند، وضع عوض نمی‌شود.) بخصوص، نظریه مقاطع در فضای اقلیدسی بی‌مایه است.

۶. ثابت کنید که هیچ منیفلد فشرده‌ای- به جز فضای تک نقطه‌ای- انقباض‌پذیر نیست. [**راهنمایی:** تمرین ۵ را در مورد نگاشت همانی بکار ببرید.]

۷. ثابت کنید که $\mathbb{S}^1$ همبند ساده نیست. [**راهنمایی:** نگاشت همانی را در نظر بگیرید.]

۸. (الف) گیریم $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ یک نگاشت هموار دلخواه است. ثابت کنید که نگاشتی هموار چون $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان وجود دارد که $f(\cos t, \sin t) = (\cos g(t), \sin g(t))$، و در شرط $g(2\pi) = g(0) + 2\pi q$ برای یک عدد صحیح q ای صدق می‌کند. [**راهنمایی:** ابتدا g را بر $[0,2\pi]$ تعریف کرده، و نشان دهید که $g(2\pi) = g(0) + 2\pi q$. حال با توجه به $g(t+2\pi) = g(t) + 2\pi q$، g را توسیع دهید.]

(ب) ثابت کنید که (پیمانه ۲) $\deg_2(f) \equiv q$.

۹. (درجه‌ها تنها اعداد مقطع جالب بر کره‌هایند.) فرض کنید که $f : X \longrightarrow \mathbb{S}^k$ هموار است، X فشرده می‌باشد و $0 < \dim X < k$. در اینصورت برای هر $Z \subset \mathbb{S}^k$ بسته و با بعد متمم نسبت به X، $I_2(X,Z) = 0$. [**راهنمایی:** بنا به قضیه سارد $p \notin f(X \cap Z)$ ای وجود دارد. از تصویر گنجنگاری بعلاوهٔ تمرین ۵ استفاده کنید.]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۱۰. ثابت کنید $\mathbb{S}^2$ و چنبره وابرسان نیستند.

۱۱. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ دارای $\deg_2(f) \neq 0$ باشد. ثابت کنید f برو است. [یادآور می‌شویم که X بایستی فشرده، Y همبند، و $\dim X = \dim Y$، تا اینکه اصلاً $\deg_2(f)$ معنی بدهد.]

۱۲. در صورتی‌که Y فشرده نباشد، بازاء همه نگاشت‌های $f : X \longrightarrow Y$ (X فشرده است) داریم $\deg_2(f) = 0$.

۱۳. اگر $f : X \longrightarrow Y$ به Z تراگرد باشد و $\dim Z + \dim X = \dim Y$، آنگاه تا جایی که $\#f^{-1}(Z)$ متناهی باشد $I_2(f,Z)$ را حداقل به صورت «$\#f^{-1}(Z)$» به پیمانه ۲ می‌توان تعریف نمود. بررسی کنیم که چگونه این تعریف که دو فرض آورده شده در متن، یعنی فشردگی X و بسته بودن Z را ندارد، دور از انتظارمان عمل می‌کند: مثال‌هایی بیابید که نشان دهند:

(الف) اگر Z بسته نباشد، $I_2(f,Z)$ می‌تواند ناوردای هوموتوپ نباشد.

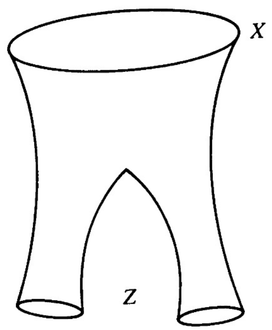
(ب) در صورتی‌که X فشرده باشد، ممکن است $I_2(f,Z)$ ناوردای هوموتوپ نباشد.

(ج) قضیه مرز بدون نیاز به اینکه Z بسته باشد، غلط است.

(د) قضیه مرز بدون نیاز به اینکه X فشرده باشد، غلط است.

(ه) قضیه مرز بدون نیاز به اینکه W فشرده باشد، غلط است، حتی اگر $X = \partial W$ فشرده بوده و Z بسته باشد. [**راهنمایی:** به استوانه $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ بنگرید.]

۱۴. دو زیر منیفلد فشردهٔ X و Z در Y در صورتی هم مرزی گفته می‌شوند که منیفلدای فشرده و مرزدار W در $Y \times I$ چنان یافت گردد که $\partial W = X \times \{0\} \cup Z \times \{1\}$. نشان دهید که اگر بشود X را به Z تغییر شکل داد، آنگاه X و Z هم مرزی هستند. اما، «مثال شلوار» در شکل ۱۷.۲ نشان می‌دهد که عکس این مطلب غلط است.



شکل ۱۷.۲: X و Z هم مرزی هستن

۱۵. ثابت کنید که اگر X و Z در Y هم مرزی باشند، آنگاه بازاء هر منیفلد فشردهٔ C در Y با بعد متمم نسبت به X و Z، داریم $I_2(Z,C) = I_2(X,C)$. [**راهنمایی:** فرض کنید f تحدید نگاشت تصویر $Y \times I \longrightarrow Y$ به W باشد، و از قضیه استفاده کنید.]

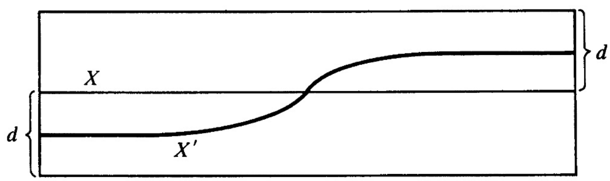
Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۱۶. ثابت کنید $\deg_2(f)$ با کاربرد مستقیم قضیه مرز خوش‌تعریف است. [**راهنمایی:** اگر $y_0, y_1 \in Y$، پس از تغییر هوموتوپ f بدست می‌آوریم که $f \pitchfork \{y_0, y_1\}$. اکنون فرض کنید $c : I \longrightarrow Y$ خمی با $c(0) = y_0$ و $c(1) = y_1$ باشد و $F : X \times I \longrightarrow Y \times Y$ را بصورت $f \times c$ تعریف کنید. ∂F را بررسی کنید.]

۱۷. قضیه درون نبری از بخش ۲ را از قضیه مرز نتیجه بگیرید.

۱۸. فرض کنید Z یک زیر منیفلد فشردهٔ Y با $\dim Z = \frac{1}{2}\dim Y$ است. ثابت کنید اگر Z توسط توابع به طور سراسری قابل تعریف باشد، آنگاه $I_2(Z,Z) = 0$. [**راهنمایی:** بنا به تمرین ۲۰ از بخش ۳، $N(Z;Y) = Z \times \mathbb{R}^k$. مشخصاً در $Z \times \mathbb{R}^k$ داریم $I_2(Z,Z) = 0$، زیرا $Z \times \{a\} \cap Z$ خالی است. حال از قضیه همسایگی جدولی که در تمرین ۱۶ بخش ۳ آمده استفاده کنید.]

۱۹. نشان دهید که دایره مرکزی X در نوار موبیوس باز، دارای عدد خود قطعی به پیمانهٔ ۲ ی $I_2(X,X) = 1$ است. [**راهنمایی:** نشان دهید که وقتی دو سر نوار در شکل ۱۸.۲ پس از یک پیچ خوردن بهم وصل می‌شوند، X' به یک منیفلد قابل تغییر شکل به X بدل می‌شود.



شکل ۱۸.۲: دایرهٔ مرکزی در نوار موبیوس

نتیجه‌ی تمرینات ۱۹ و ۱۸. دایره مرکزی در نوار موبیوس به توسط یک تابع مستقل خطی قابل تعریف نیست.

بخش ۵.۲ عدد چرخش و قضیه جداسازی ژوردان-براوئر

قضیهٔ کلاسیک خم ژوردان می‌گوید که هر خم بستهٔ ساده در $\mathbb{R}^2$ صفحه را به دو تکه تقسیم می‌کند، «داخل» و «خارج» خم. مبادا فکر کنید قضیه خیلی بدیهی است، سعی کنید شهود خود را در مورد مثال نشان داده شده در شکل ۱۹.۲ بیازمایید.

این بخش یک لشگر کشی خود سر با اسلحه و دوربین به وحشی‌های جنگل منیفلدهای n بعدی، با هر n دلخواه است! با یک منیفلد همبند فشرده و نگاشت هموار $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ شروع می‌کنیم. فرض کنیم $\dim X = n-1$، پس بخصوص نگاشت شمول f می‌تواند یک ابررویه در $\mathbb{R}^n$ باشد. (درکل **ابررویه** در یک منیفلد دلخواه، زیر منیفلدای با همبعد یک است.) مایلیم بررسی کنیم که چگونه f منیفلد X را در

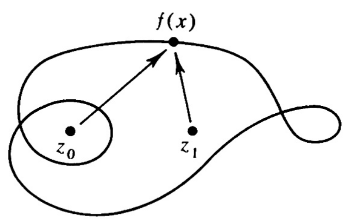
Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

شکل ۱۹.۲: یک خم بستهٔ ساده

$\mathbb{R}^n$ به دور خود می‌چرخاند برای این منظور یک نقطه z از $\mathbb{R}^n$ که به نگارهٔ $f(X)$ تعلق ندارد را انتخاب می‌کنیم برای بررسی اینکه چگونه $f(x)$ نقطهٔ z را دور می‌زند، معمولاً بردار یکهٔ

$$u(x) = \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}$$

را بررسی می‌کنیم که جهت از z به $f(x)$ را مشخص می‌کند. از نظریه مقاطع اطلاع داریم که $u : X \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ به پیمانهٔ ۲ تقریباً هر بردار جهتی را به یک تعداد دفعه قطع می‌نماید، یعنی به $\deg_2(u)$ بار. پس این ناورد را اندازه گرفته و آنرا بعنوان **عدد چرخش** f **به پیمانهٔ ۲** حول z تعریف نموده و با نماد $W_2(f, z) = \deg_2(u)$ نمایش می‌دهیم. (به شکل ۲۰.۲ نگاه کنید. در جایی از این مفهوم (یعنی، عدد



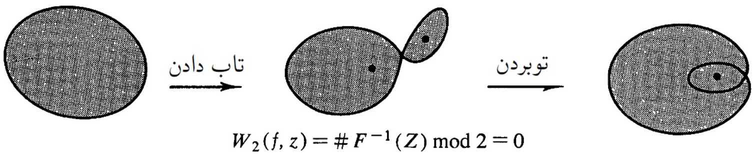
شکل ۲۰.۲: عدد چرخشی

چرخش به پیمانهٔ ۲) برای توصیف یک نوع تعمیم یافته از قضیه خم ژوردان استفاده می‌کنید، منتها ابتدا چند تمرین که قضیهٔ مقدماتی مفیدی را آماده می‌سازد بایستی از نظر بگذرانید. اثبات مطرح شده یک تکنیک ساده و زیبا را معرفی می‌کند. که به دفعات در بخش‌های آتی مورد استفاده است راهنمایی‌های

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

لازم در انتهای بخش تهیه شده است، ولی بهتر است که خود مستقلاً به اثبات آنها بپردازید.

قضیه. فرض کنید X مرز یک منیفلد مرزدار فشرده D بوده و $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت هموار باشد که توسیع f است؛ یعنی، $\partial F = f$. فرض کنید z مقدار منظم F باشد که به نگارهٔ f متعلق نیست. در این صورت $F^{-1}(z)$ مجموعه‌ای متناهی است، و (پیمانهٔ ۲) $W_2(f,z) \equiv \# f^{-1}(z)$. یعنی f به همان تعدادی X را گرد z را می‌چرخاند که F مقدار z را اختیار می‌کند، منتهی به پیمانهٔ ۲. (به شکل ۲۱.۲ توجه کنید
. ذیلاً مسایلی مطرح می‌شود که شما را قادر به اثبات این قضیه می‌سازد:



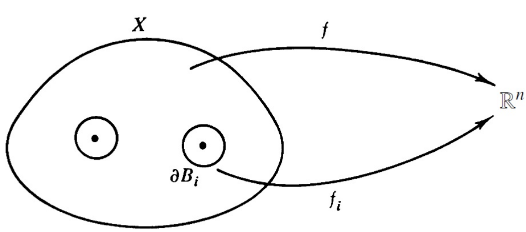
شکل ۲۱.۲:

۱. نشان دهید که اگر F مقدار z را اختیار نکند، آنگاه $W_2(f,z) = 0$.

۲. فرض کنید $F^{-1}(z) = \{y_1, \cdots, y_\ell\}$، و B_i یک گوی به گرد نقطهٔ y_i باشد. (یعنی، B_i نگار یک گوی در $\mathbb{R}^n$ به توسط یک پارامتریسازی موضعی برای D باشد.) کاری کنید که گویها از یکدیگر و نیز از $X = \partial D$ مجزا باشند. گیریم $f_i : \partial B_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تحدید F باشد، و ثابت کنید که

$$W_2(f,z) \equiv W_2(f_1,z) + \cdots + W_2(f_\ell,z) \quad (\text{پیمانهٔ ۲})$$

(به شکل ۲۲.۲ توجه کنید.)



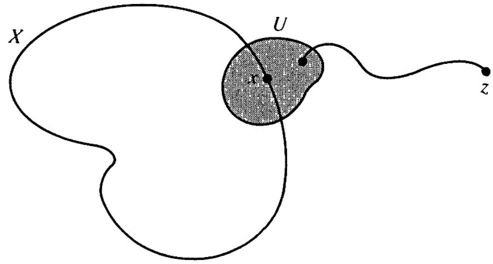
شکل ۲۲.۲:

۳. با استفاده از منظم بودن z، گویهای B_i را چنان انتخاب کنید که $W_2(f_i,z) = 1$، و سپس قضیه را ثابت کنید.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

اکنون فرض کنید که عملاً X یک ابرویهٔ همبند و فشرده در $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر X کل $\mathbb{R}^n$ را به داخل و خارجش مجزا کند، آنگاه بایستی X مرز یک منیفلد مرزدار فشردهٔ n بعدی باشد-یعنی، داخلش. در این حالت، قضیهٔ پیش می‌گوید که اگر $z \in \mathbb{R}^n$ یک نقطهٔ دلخواه غیر واقع بر X باشد، آنگاه بایستی $W_2(X,z)$ برابر 0 یا 1 باشد، بسته به اینکه z در خارج X باشد یا در داخل آن. [در اینجا از نماد $W_2(X,z)$ برای عدد چرخش نگاشت شمول X حول z استفاده شده است.] تمرینات بعدی کمک می‌کنند که با تداوم این استدلال قضیه جداسازی را به ثبوت برسانیم.

۴. گیریم $z \in \mathbb{R}^n - X$. ثابت کنید که اگر x نقطهٔ دلخواهی از X باشد و U یک همسایگی از x در $\mathbb{R}^n$، آنگاه یک نقطه از U که با خمی که هیچگاه X را قطع نمی‌کند به z وصل می‌گردد وجود دارد. (شکل ۲۳.۲)



شکل ۲۳.۲:

۵. نشان دهید $\mathbb{R}^n - X$ حداکثر دو مؤ لفهٔ همبندی دارد.

۶. نشان دهید اگر z_0 و z_1 هر دو به یکی از مؤلفه‌های همبندی $\mathbb{R}^n - X$ متعلق باشند، آنگاه $W_2(X,z_0) = W_2(X,z_1)$.

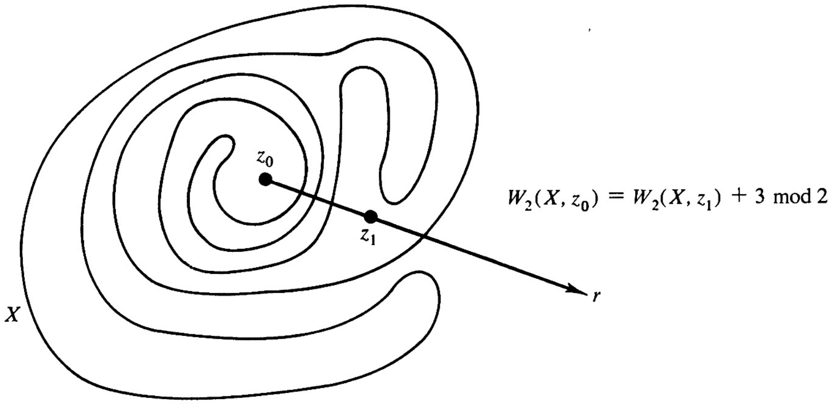
۷. برای نقطهٔ مفروض $z \in \mathbb{R}^n - X$ و بردار هادی $\vec{v}$ در $\mathbb{S}^{n-1}$، شعاع r که از z در جهت $\vec{v}$ صادر شده است $r := \{x + t\vec{v} \,:\, t \geq 0\}$ را در نظر بگیرید. تحقیق کنید که وقتی و تنها وقتی شعاع r به X تراگرد است که $\vec{v}$ مقداری منظم برای نگاشت هادی $u : X \to \mathbb{S}^{n-1}$ باشد. بخصوص، تقریباً هر شعاع از z، X را بطور تراگرد قطع می‌کند.

۸. فرض کنید r یک شعاع صادره از z_0 باشد که X را به طور تراگرد قطع می‌کند و مقطع آن یک مجموعهٔ (لزوماً متناهی) غیر خالی است. فرض کنید z_1 نقطه‌ای دیگر بر r باشد (اما نه بر روی X)، و گیریم ℓ تعداد مراتبی باشد که r منیفلد X را بین z_0 و z_1 قطع می‌کند. نشان دهید (پیمانهٔ ۲) $W_2(X,z_0) \equiv W_2(X,z_0) + \ell$. (به شکل ۲۴.۲ نگاه کنید.)

۹. نتیجه بگیرید $\mathbb{R}^n - X$ دقیقاً دو مؤلفهٔ همبندی دارد، $D_1 = \{z : W_2(X,z) = 1\}$ و $D_1 = \{z : W_2(X,z) = 0\}$.

۱۰. نشان دهید اگر z خیلی بزرگ باشد، آنگاه $W_2(X,z) = 0$.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۲۴.۲:

۱۱. ضمن ترکیب این مشاهدات ثابت کنید.

قضیهٔ جداسازی ژوردان براوئر. متمم ابررویهٔ همبند و فشردهٔ X در $\mathbb{R}^n$ از دو مجموعهٔ باز و همبند تشکیل یافته است، یکی «داخل» D_1 و دیگری «خارج» D_0. بعلاوه، $\bar{D}_1$ یک منیفلد مرزدار فشرده با مرز $\partial\bar{D}_1 = X$ است.

توجه داشته باشید که عملاً روشی ساده برای تعیین اینکه نقطهٔ z داخل یا خارج X است ارائه داده‌ایم.

۱۲. برای $z \in \mathbb{R}^n - X$ مفروض، فرض کنید r شعاع صادره از z باشد که با X تراگرد است. نشان دهید وقتی و تنها وقتی z داخل X است که r منیفلد X را به تعداد فرد نقطه قطع کند (شکل ۲۵.۲).

راهنمایی‌هایی برای حل تمرینات بالا، به ترتیب شماره:

۱. اگر u به D توسیع داده شود، $\deg_2(u) = 0$.

۲. از ۱، با تعویض D با

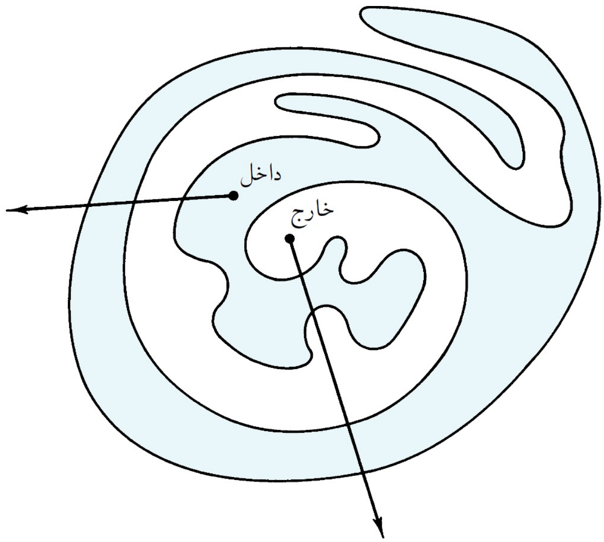
$$D' = D - \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathrm{Int}(B_i)$$

استفاده کنید.)

۳. اگر f_i مرز ∂B_i را به طور وابرسان بروی یک کرهٔ کوچک به مرکز در z ببرد، آنگاه $u_i : \partial B_i \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ یکبیک است. اما f در y_i وابرسانی موضعی است، پس چنین B_i هایی می‌توانید انتخاب کنید.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۴. نشان دهید نقاط $x \in X$ که برای آنها گزاره درست است تشکیل یک مجموعهٔ ناتهی، باز و بسته تشکیل می‌دهد. (بسته بودن: ساده است. باز بودن: با مختصات بندی X به صورتی که موضعاً شبیه تکه‌ای از $\mathbb{R}^{n-1}$ در $\mathbb{R}^n$ شود شروع کنید. ناتهی بودن: خط راست واصل z به نزدیکترین نقطه در X را در نظر بگیرید.)



شکل ۲۵.۲: داخل و خارج

۵. گیرید B یک گوی کوچکی باشد که $B - X$ دو مؤلفه دارد، و نقاط z_0 و z_1 را در مؤلفه‌های مختلف ثابت بگیرید. هر نقطه از $\mathbb{R}^n - X$ را توسط یک خم که X را اصلاً قطع نمی‌کند یا به z_0 و یا به z_1 می‌توان متصل نمود. (احتمال اینکه z_0 و z_1 را توسط چنین خمی بتوان به‌هم وصل کرد از میان برده‌ایم!)

۶. اگر z_t خمی در $\mathbb{R}^n - X$ باشد، آنگاه هوموتوپی

$$u_t(x) = \frac{x - z_t}{|x - z_t|}$$

برای همهٔ t ها تعریف می‌شود. در اینصورت u_0 و u_1 به پیمانه ۲ دارای یک درجه‌اند.

۷. مستقیماً حساب کنید و یا از تمرین ۷ بخش ۵، فصل ۱ استفاده کنید. توجه کنید که اگر $g : \mathbb{R}^n - \{z\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ با ضابطهٔ $g(y) = (y - z)/|y - z|$ باشد، آنگاه $u : X \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ همان g است که با نگاشت شمول X ترکیب گشته است. سپس با استفاده از تمرین مطرح شده، نشان دهید که $u \pitchfork \{\vec{v}\}$ اگر و فقط اگر $X \pitchfork g^{-1}\{\vec{v}\}$.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۸. طبق تمرین ۷، $\vec{v}$ یک مقدار منظم برای هر دوی u_0 و u_1 است. اما

$$\#u_0^{-1}(\vec{v}) = \#u_1^{-1}(\vec{v}) + \ell.$$

۹. تمرین ۸ ایجاب می‌کند که D_0 و D_1 هر دو غیر تهی باشند. حال از تمرینات ۵ و ۶ استفاده کنید.

۱۰. چون X فشرده است، وقتی $|z|$ بزرگ باشد، نگارهٔ $u(X)$ بر $\mathbb{S}^{-1}$ در یک همسایگی کوچک از $z/|z|$ است.

۱۱. طبق تمرین ۱۰، $\bar{D}_1$ فشرده است و $\bar{D}_1 \cup X$. یک پیمایش موضعی از $\bar{D}_1$ به گرد نقطه‌ای $x \in X$ به اینصورت تهیه کنید: گیریم $\psi : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک گوی B حول 0 در $\mathbb{R}^n$ را به طور وابرسان بروی یک همسایگی از x در $\mathbb{R}^n$ بنگارد، که $B \cap \mathbb{R}^{n-1}$ را بروی $X \cap \psi(B)$ ببرد. از تمرینات ۴ و ۶ برای اثبات اینکه $\psi(B \cap H^n) \subset D_1$ و $\psi(B \cap -H^n \subset D_0)$ و یا عکس آنها، استفاده کنید. در دو حالت، ψ به یک پیمایش موضعی $\bar{D}_1$ حول x تحدید می‌شود.

۱۲. تمرین ۸ را با تمرین ۱۰ ترکیب کنید.

بخش ۶.۲ قضیه اولام-بورساک

می‌خواهیم از اسباب عدد چرخش‌مان برای اثبات قضیه مشهور دیگری از توپولوژی، قضیه بورساک-اولام استفاده کنیم. صورتی از آن چنین است

قضیه اولام-بورساک. گیریم $f : \mathbb{S}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ نگاشت هموار باشد که نگارش مبدأ را شامل نیست، و فرض کنیم که f در شرط تقارن

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{بازاء همه } x \in \mathbb{S}^k \text{ ها}$$

صدق کند. در اینصورت $W_2(f, 0) = 1$.

به طور غیر رسمی، هر نگاشتی که به گرد مبداء متقارن باشد، آنرا به تعداد فرد مرتبه دور می‌زند.

برهان: به استقراء بر k عمل می‌کنیم. برای $k = 1$ به تمرین ۲ نگاه کنید.

حال فرض می‌کنیم که قضیه برای $k-1$ درست است، و نیز فرض می‌کنیم $f : \mathbb{S}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1} - \{0\}$ متقارن باشد. $\mathbb{S}^{k-1}$ را خط استوای $\mathbb{S}^k$ در نظر می‌گیریم، که به وسیلهٔ $(x_1, \cdots, x_k) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_k, 0)$ نشانده شده است. ایدهٔ اثبات بسیار شبیه به تمرین ۱۲ در بخش پیش می‌باشد. $W_2(f, 0)$ را با شمارش اینکه f یک خط ℓ در $\mathbb{R}^{k+1}$ را چند بار قطع می‌کند محاسبه می‌کنیم. با جدا انتخاب کردن ℓ از نگارهٔ خط استوا، ما می‌توانیم از فرض استقراء استفاده کرده و نشان دهیم که خط استوا ℓ را به تعدادی فرد مرتبه چرخ می‌زند. سرانجام، به محض اینکه رفتار f به خط استوا را بدانیم، محاسبهٔ مقطع f با ℓ را کاری آسان می‌گردد.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

تحدید f به خط استوا $\mathbb{S}^{k-1}$ را با g نمایش می‌دهیم. در انتخاب یک خط مناسب ℓ، از قضیه سارد برای گزینش یک بردار واحد $\vec{a}$ که مقدار منظمی برای هر دو نگاشت

$$\frac{f}{|f|}:\mathbb{S}^k\longrightarrow\mathbb{S}^k\ ,\ \frac{g}{|g|}:\mathbb{S}^{k-1}\longrightarrow\mathbb{S}^k$$

باشد استفاده می‌کنیم. از تقارن موجود، روشن است که $-\vec{a}$ نیز یک مقدار منظم برای هر دو نگاشت است. طبق آزمون مقایسهٔ ابعاد، منظم بودن $\frac{g}{|g|}$ به سادگی به معنی این است که هرگز $\frac{g}{|g|}$ مقادیر $\vec{a}$ یا $-\vec{a}$ را اختیار نمی‌کند؛ نتیجتاً، g هرگز خط $\ell=\mathbb{R}.\vec{a}$ را قطع نمی‌کند. از شما می‌خواهیم که تحقیق کنید که شرط منظم بودن برای $f/|f|$ معادل با شرط $f\pitchfork\ell$ است. (به تمرین ۷، بخش ۵ از فصل ۱ نگاه کنید.)

اکنون، بنا به تعریف

$$W_2(f,0)\equiv\deg_2\left(\frac{f}{|f|}\right)\equiv\#\left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(\vec{a})\ \mathrm{mod}\ 2.$$

و $f/|f|$ بردار $+\vec{a}$ را دقیقاً مثل بردار $-\vec{a}$، بنا به تقارن موجود، اختیار می‌کند. پس بنابراین

$$\#\left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(\vec{a})=\frac{1}{2}\#\,f^{-1}(\ell).$$

ما اینرا تنها بر نیمکرهٔ بالایی می‌توانیم حساب کنیم. گیریم f_+ تحدید f به نیم کرهٔ بالایی $\mathbb{S}^k_+$ باشد، به نقاطی که $x_{k+1}\le 0$. بنا به تقارن موجود، به علاوهٔ این مطلب که f، خط استوا ℓ را قطع نمی‌کند، می‌دانیم که

$$\#f_+^{-1}(\ell)=\frac{1}{2}\#f^{-1}\,\ell.$$

نتیجه می‌گیریم که $W_2(f,0)\equiv\#f_+^{-1}(\ell)\ \mathrm{mod}\ 2$.

حسن عبارت اخیر برای $W_2(f,0)$ در این است که نیم کرهٔ بالایی یک منیفلد مرزدار است، و مرزش $\partial\mathbb{S}^k_+=\mathbb{S}^{k-1}$ است که می‌توانیم فرض استقراء را در مورد آن به کار ببریم. اما برای به کار بردن فرض استقراء در مورد نگاشت $g:\mathbb{S}^{k-1}\longrightarrow\mathbb{R}^{k+1}$ ابعاد درست نیستند. پس V را متمم متعامد ℓ می‌گیریم، و $\pi:\mathbb{R}^{k+1}\longrightarrow V$ را تصویر متعامد. چون g متقارن است و π خطی، نگاشت مرکب $\pi\circ g:\mathbb{S}^{k-1}\longrightarrow V$ متقارن است؛ مضافاً اینکه $\pi\circ g$ هرگز صفر نمی‌شود، زیرا g هرگز $\ell=\pi^{-1}(0)$ را قطع نمی‌کند. با یکی گرفتن فضای برداری k- بعدی V با $\mathbb{R}^k$ و استمداد از فرض استقراء داریم که $W_2(\pi\circ g,0)=1$.

حال چون $f_+\pitchfork\ell$، پس $\pi\circ f_+:\mathbb{S}^k_+\longrightarrow V$ به $\{0\}$ تراگرد است. پس بنا به اولین قضیهٔ بخش قبلی،

$$W_2(\pi\circ g,0)\equiv\#(\pi\circ f_+)^{-1}(0)\ \mathrm{mod}\ 2.$$

اما $(\pi\circ f_+)^{-1}(0)=f_+^{-1}(\ell)$ بنابراین

$$W_2(f,0)=\#f_+^{-1}(\ell)\equiv W_2(\pi\circ g,0)=1.$$

و برهان تمام شد. □

از اثبات بالا این مشاهدهٔ هندسی خیلی ساده، روشن است:

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

قضیه. اگر $f:\mathbb{S}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}-\{0\}$ نسبت به مبداء متقارن باشد ($f(-x)=-f(x)$)، آنگاه f هر خط گذرنده از مبداء را حداقل یک بار قطع می‌کند.

برهان: اگر f هرگز ℓ را قطع نکند، در اینصورت با استفاده از این ℓ در برهان بالا، به این تناقض می‌رسیم که $W_2(f,0)=\frac{1}{2}\#f^{-1}(\ell)=0$ □

این قضیه تعدادی نتیجهٔ جالب توجه دارد، از جمله

قضیه. هر k تابع هموار $f_1,\cdots,f_k$ بر $\mathbb{S}^k$ که همگی در شرط تقارن صدق می‌کنند، (یعنی، $f_i(-x)=-f_i(x)$ برای $i=1,\cdots,k$)، بایستی صفر مشترک داشته باشند.

برهان: اگر چنین نباشد با به کارگیری نتیجهٔ بالا در مورد نگاشت

$$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_k(x),0)$$

و گرفتن محور x_{k+1} به جای ℓ به تناقض می‌رسیم. □

گزاره بالا را می‌توانیم به این صورت تجدید بیان کنیم:

قضیه. بازاء هر k تابع هموار $g_1,\cdots,g_k$ بر $\mathbb{S}^k$ نقطه‌ای $p\in\mathbb{S}^k$ چنان هست که

$$g_1(p)=g_1(-p),\quad \cdots \quad ,g_k(p)=g_k(-p)$$

برهان: با قرار دادن $f_i(x)=g_i(x)-g_i(-x)$ مسئله به صورت مطرح شده در قضیهٔ قبل بدل می‌گردد. □

یک بیان زیست محیطی این حکم (برای $\mathbb{S}^2$) چنین است که در هر زمان مفروضی دو مکان، که نسبت به مرکز زمین در دو سری متقابلند، در جهان چنان وجود دارد که دارای آب و هوای یکسانند (به عبارت دیگر، دما و فشار در آن دو مکان یکی است). طرز گویش دیگری نیز از قضیه وجود دارد: اگر بالونی بادش خالی شده و به سطح بیافتد، دو نقطهٔ متقاطر از آن بر نقطه‌ای مشترک از سطح می‌رسند.

تمرینات

۱. نشان دهید که قضیه بورساک-اولام با ادعای ذیل معادل است: اگر $f:\mathbb{S}^k\longrightarrow\mathbb{S}^k$ نقاط متقاطر را به نقاط متقاطر ببرد، آنگاه $\deg_2(f)=1$.

۲. ثابت کنید که هر نگاشت $f:\mathbb{S}^1\longrightarrow\mathbb{S}^1$ هر دو نقطهٔ متقاطر را به نقاط متقاطر می‌نگارد، به اینصورت به توسط تمرین ۸ از بخش ۴ نشان دهید $\deg_2(f)=1$. [**راهنمایی:** اگر $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ مثل در تمرین ۸ از بخش ۴ باشد، نشان دهید $g(s+\pi)=g(s)+\pi q$ که q فرد است.]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۳. گیریم $p_1, \cdots, p_n$ چند جمله‌ای همگن حقیقی با $n+1$ متغیر باشند، که همگی از مرتبهٔ فردند. ثابت کنید توابع وابسته به آنها بر $\mathbb{R}^{n+1}$ به طور هم زمان بر خطی که از مبداء مرور می‌کند صفر می‌گردند.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

فصل ۳

نظریهٔ مقطع جهتدار

بخش ۱.۳ انگیزه

قضیه مقطع پیمانه ۲ حساسیت لازم برای مرتفع کردن همهٔ مشکلات پیش رو را ندارد و لذا بایستی با احتیاط لازم، آنرا بهسازی نمود. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ با زیر منیفلد Z از بعد مکمل X (یعنی، $\dim X + \dim Z = \dim Y$) تراگرد، هر سه منیفلد بدون مرز بوده و X فشرده باشد. در اینصورت، $f^{-1}(Z)$ مجموعه‌ای متناهی است که کاردینالیتی آن را ما «عدد مقطع موقت» f با Z می‌نامیم. برای تبدیل اعداد مقطع موقت به کمیتی پایدار نسبت به هوموتوپی، از تمام اطلاعاتی که توسط عدد برخورد موقت بدست می‌آید صرفه نظر نمودیم، به جز خاصیت زوجیت (یعنی، زوج یا فرد بودن).

استدلال را مجدداً مطرح می‌کنیم. اگر $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ هوموتوپ بوده و هر دو با Z تراگرد باشند، آنگاه هوموتوپی $F : X\times I \longrightarrow Y$ وجود دارد که آن نیز با Z تراگرد است. در این صوررت، $f^{-1}(Z)$ از دوایری که در درون $X\times I$ قرار دارند به انضمام منحنی‌هایی که یک جفت از نقاط واقع بر مزر، یعنی

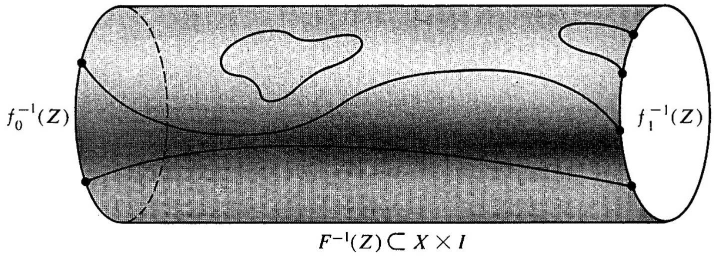
$$\partial F^{-1}(Z) = f_0^{-1}(Z)\times\{0\}\cup f_1^{-1}(Z)\times\{1\}$$

را به هم متصل می‌کنند، (شکل ۱.۳ را ببینید) تشکیل شده است. بنابراین، $\#f_0^{-1}(Z)$ و $\#f_1^{-1}(Z)$ لزوماً مساوی نیستند؛ ولی، حداقل چیزی که می‌توان اظهار داشت این است که هر دو زوج و یا هر دو فرد هستند. در نتیجه $I_2(f_0, Z) = I_2(f_1, Z)$.

ولی چنانچه به دقت نگریسته شود، بعضی منحنیها نقاطی از دو انتهای متقابل استوانه $X\times I$ را به هم وصل می‌کنند و بنابراین عملاً برای مقایسه $\#f_0^{-1}(Z)$ و $\#f_1^{-1}(Z)$ قابل استفاده‌اند، در حالی که سایر منحنیها نقاطی از انتها را به هم وصل می‌کنند. برای تولید یک کمیت پایدار نسبت به هوموتوپی به کمک داده‌های موقت، کافی است اطلاعات حاصل از اتصال جفت نقاط واقع بر یک انتها را حذف کنیم.

سختی کار در تشخیص نقاطی است که باید کنار گذاشته شوند. وقتی تنها یک نگاشت f داریم، می‌توانیم بگوییم که چند تا از نقاط $f^{-1}(Z)$ باید با هوموتوپی متصل شوند؟ و این فاکتور حذف شده آیا

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱.۳: هموتوپی و عدد مقطع موقت

برای سایر هوموتوپیها یکی است؟ همان طوری که در بخشهای بعدی ملاحظه خواهید نمود، پاسخ هر دو پرسش مثبت است. در ادامه تا حدودی جبر خطی استفاده می‌شود و سعی در حداقل استفاده از آن است. این کار به جهت کوچکتر نمودن حجم کتاب صورت می‌پذیرد.

بخش ۲.۳ جهت

فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی با بعد متناهی بوده و $\beta = \{v_1, \cdots, v_k\}$ پایه‌ای مرتب برای آن باشد. اگر $\beta' = \{u'_1, \cdots, u'_k\}$ پایهٔ مرتب دیگری باشد، آنگاه یک ایزومورفیسم منحصر بفرد $A : V \longrightarrow V$ وجود دارد که $\beta' = A\beta$ (که در آن $A\beta$ پایهٔ مرتب $\{Av_1, Av_2, \cdots, Av_k\}$ است). در صورتی می‌گوئیم β و β' با جهت معادلند که دترمینان تبدیل خطی A مثبت باشد. با توجه به قانون دترمینان حاصلضرب، این رابطه، رابطهٔ هم‌ارزی بر مجموعهٔ تمام پایه‌های مرتب V تشکیل داده و آن را به دو دستهٔ هم‌ارزی افراز می‌کند.

منظور از جهت برای V، زدن برچسب مثبت به اعضای یک دستهٔ هم‌ارزی و منفی برای سایرین است. علامت داده شده برای یک پایهٔ مرتب β جهت آن نامیده می‌شود. بنابراین β با توجه به اینکه به کدام دستهٔ هم‌ارزی متعلق است، با جهت مثبت یا با جهت منفی نامیده می‌شود. دقیقاً دو جهت برای V امکان وجود دارد، و برای تمایز بین آنها کافی است فقط علامت تنها یک پایهٔ مرتب را مشخص کنیم. به عنوان مثال، جهت استاندارد برای فضای اقلیدسی، جهتی است که نسبت به آن پایهٔ استاندارد به طور مثبت جهتدار می‌شود. (دقت کنید که در این بحث، مرتب کردن اعضای پایه حیاتی است. تعویض مکان دو بردار از پایهٔ مفروض β، پایهٔ مرتب دیگری را تولید می‌کند که جهت آن با قبلی متفاوت است.)

تعریفی مجزا برای فضای برداری صفر بعدی لازم است. در اینجا، منظور از جهت، انتخاب علامت $+1$ یا -1 برای مجموعه تهی می‌باشد. البته، مشروط به اینکه وجود پایهٔ تهی را قبول کنیم.

اگر $A : V \longrightarrow W$ یک ایزومورفیسم بین فضاهای برداری باشد، در این صورت، هر گاه دو پایهٔ مرتب β و β' به یک دستهٔ هم‌ارزی تعلق داشته باشند، آنگاه $A\beta$ و $A\beta'$ نیز در W چنین هستند. بنابراین، اگر V و W جهتدار باشند، (یعنی، به هر کدام جهتگذاری شده باشند) آنگاه علامت $A\beta$ یا همیشه با علامت β یکی است و یا همیشه مخالف علامت β است. در نتیجه، A یا حافظ جهت است و یا اینکه جهت

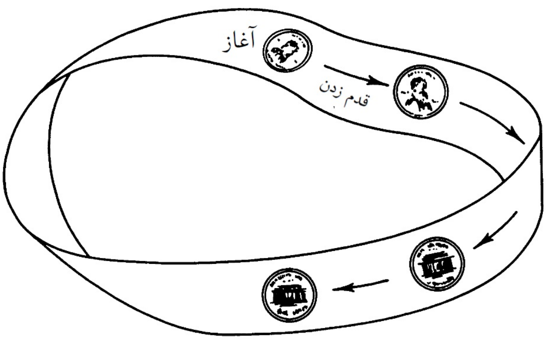
Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

برگردان می‌باشد.

حال به منیفلدها برمی‌گردیم. یک جهت برای منیفلد مرزدار X، انتخابی هموار از جهتها برای تمام فضاهای مماس $T_x(X)$ می‌باشد. شرط همواری به صورت ذیل تفسیر می‌شود: حول هر نقطه $x \in X$ یک پرمایش موضعی $h : U \longrightarrow X$ طوری باید وجود داشته باشد که $dh_u : \mathbb{R}^k \longrightarrow T_{h(u)}(X)$ در هر نقطهٔ u از $U \subset \mathbb{H}^k$ حافظ جهت باشد (مطابق فرض، جهت بر $\mathbb{R}^k$ جهت استاندارد است.) نگاشت h که مشتق آن در هر نقطه حافظ جهت است، حافظ جهت نامیده می‌شود. دقت کنید لزومی ندارد هر منیفلدی جهتپذیر باشد. مشهورترین مثال نوار موبیوس است. شما را به ساختن یک مدل کاغذی از آن دعوت می‌کنیم، که به طور شهودی ثابت می‌کند که هیچ جهت همواری برای نوار موبیوس وجود ندارد. مشکل این است که اگر شما در طول نواری که تصویر سکه‌ها رو به بالا است حرکت کنید، به نقطهٔ شروع برمی‌گرددید در حالیکه در پشت سکه‌اید! (به شکل ۳.۳ توجه شود.)

برای منیفلدهای صفر بعدی جهتدار کردن بسیار ساده است: کافی است به هر نقطه $x \in X$ ای عدد $+1$ یا -1 را نسبت دهیم. در این حالت، هیچ مشکلی در مورد همواری وجود ندارد.

منیفل مفروض X در صورتی جهتپذیر است که برای آن بتوان جهتی منظور نمود. اگر این چنین باشد، X حداقل دو جهت دارد. اگر جهتی برX مشخص شده باشد، برای بدست آوردن جهتگذاری معکوس، کافی است جهت هر فضای مماس را معکوس کنیم.



شکل ۲.۳: نوار موبیس جهت ناپذیر است

گزاره. هر منیفلد مرزدار، همبند و جهتدار دقیقاً دو جهت دارد.

برهان: نشان می‌دهیم که مجموعهٔ نقاطی که دو جهت مورد نظر در آنها موافقند و نیز مجموعهٔ نقاطی که آن دو جهت مخالفند، مجموعه‌های باز و در عین حال بسته می‌باشند. در نتیجه، دو جهت بر یک منیفلد همبند یا یکسانند و یا مخالف.

حال فرض کنید $h : U \longrightarrow X$ و $h' : U' \longrightarrow X$ پرمایشهای موضعی حول $x \in \bar{X}$ باشند، طوری که برای هر $u \in U$ ای dh_u جهت اول را حفظ می‌کند و برای هر $u' \in U$ ای dh'_U جهت دوم را حفظ می‌کند. می‌توانیم فرض کنیم که $h(0) = X = h'(0)$ و $h(U) = h'(U)$. در این صورت، اگر دو جهت بر $T_x(X)$ یکسان باشند، آنگاه $d(h^{-1} \circ h')_\circ : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ حافظ جهت است. بنابراین، دترمینان $d(h^{-1} \circ h')'_u$ در

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

$u' = 0$ است و پیوستگی تابع دترمینان ایجاب می‌کند که دترمینان آن در یک همسایگی از صفر نیز مثبت باشد. با توجه به بحث قبلی، مشخص می‌شود که دو جهت مورد نظر در همسایگی‌ای باز از X یکسانند. به طور مشابه اگر دو جهت مورد نظر در x مخالف باشند، در این صورت دترمینان $d(h^{-1} \circ h')_u$ در همسایگی‌ای از 0 منفی است و بنابراین جهتها در یک همسایگی از صفر مخالف یکدیگرند. □

منظور از منیفلد جهتدار، منیفلدی با یک جهت مشخص هموار است. اگر X جهتدار باشد، منیفلد حاصل از معکوس کردن جهت X را با $-X$ نمایش می‌دهیم. بنابراین، گزارهٔ قبلی چنین اظهار می‌دارد که «اگر X همبند و جهتپذیر باشد، آنگاه تنها دو جهت بر آن می‌توان تعریف نمود: X و $-X$».

اگر X و Y جهتدار و یکی از آنها بی‌مرز باشد، آنگاه $X\times Y$ **جهت حاصلضرب** می‌پذیرد. به این صورت که: در هر نقطه $(x,y)\in X\times Y$ ای، داریم

$$T_{(x,y)}(X\times Y) = T_x(X)\times T_x(Y)$$

فرض کنیم $\alpha = \{v_1,\cdots,v_k\}$ و $\beta = \{w_1,\cdots w_l\}$ پایه‌های مرتبی برای بترتیب $T_x(X)$ و $T_y(Y)$ باشند و پایه مرتب $\{(v_1,0),\cdots,(v_k,0),(0,w_1),\cdots,(0,w_l)\}$ (که با نماد $(\alpha\times 0, 0\times\beta)$ نمایش داده می‌شود) برای $T_x(X)\times T_y(Y)$ را در نظر می‌گیریم. با فرض

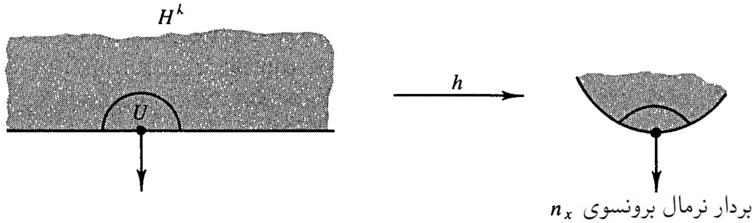
$$\operatorname{sgn}(\alpha\times 0, 0\times\beta) = \operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{sgn}(\beta)$$

جهتی برای $T_x(X)\times T_y(Y)$ تعریف می‌کنیم. بررسی کنید که این جهت به انتخاب α و β بستگی ندارد.

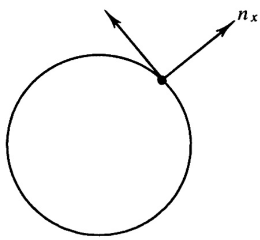
طبیعتاً، هر جهت برای X جهتی بر ∂X القاء می‌کند، که جهت مرزی نامیده می‌شود: به ازای هر نقطهٔ $x\in\partial X$، $T_x(\partial X)$ زیر فضایی با نقصان بعد یک از $T_x(X)$ است. بنابراین، دقیقاً دو بردار یکهٔ عمود بر $T_x(\partial X)$ در $T_x(X)$ وجود دارد؛ یکی به سمت داخل و دیگری به سمت خارج. آنها را بترتیب درونسوی و برونسوی می‌نامیم. به بیان دقیقتر، اگر $h: U\to X$ پرماشی موضعی بوده، U در $\mathbb{H}^k$ باز باشد و $h(0) = x$، در این صورت $(dh_0)^{-1}: T_x(X)\to\mathbb{R}^k$ یک بردار از $T_x(X)$ را بروی یک بردار یکهٔ قائم بر لبهٔ $\mathbb{H}^k$ و واقع در آن می‌نگارد. این بردار را درونسوی می‌نامیم. بعلاوه، برداری از $T_x(X)$ را بروی یک بردار یکهٔ قائم بر لبهٔ و واقع در $-\mathbb{H}^k$ می‌نگارد. این بردار را برونسوی می‌نامیم (به شکل ۳.۳ توجه شود). قبلاً در تمرین ۷ از بخش ۱ از فصل ۲ نشان داده‌اید که این بحث از انتخاب h مستقل است. اکنون $T_x(\partial X)$ را چنین جهتدار می‌کنیم: علامت پایهٔ مرتب $\beta = \{v_1,\cdots,v_{k-1}\}$ برای $T_x(\partial X)$ را علامت پایهٔ مرتب $\{n_x,\beta\} = \{n_x, v_1,\cdots,v_{k-1}\}$ تعریف می‌کنیم، که n_x بردار برونسوی در x است. بسادگی می‌توان نشان داد که به این ترتیب تناظری هموار حاصل می‌گردد و لذا یک جهت بر ∂X ارائه می‌شود. به عنوان مثال، گوی واحد بستهٔ $\mathbb{B}^2$ در $\mathbb{R}^2$، جهتی استاندارد از $\mathbb{R}^2$ به ارث می‌برد. در این صورت، جهت القائی بر $\mathbb{S}^1$ جهتی است که در آن بردارهای مماس نقطه‌ای با جهت ساعتگرد، مثبت قلمداد می‌شوند (به شکل ۴.۳ توجه شود). فضای هوموتوپی $I\times X$ یکی از مثالهای ویژه از این دست است. به ازای هر $t\in I$ ای لایهٔ $X_t = \{t\}\times X$ به طور طبیعی با X وابرسان است، پس می‌شود آن را طوری جهتدار نمود که وابرسانی $(t,x)\longmapsto x$ حافظ جهت باشد. به این ترتیب، $\partial(I\times X)$ به عنوان مجموعه با $X_0\cup X_1$ برابر است؛ اما جهت بر مرز آن چه است؟ بردار نرمال برونسوی بر X_1 برابر $T_{(1,x)} = (1,0)\in T_1(I)\times T_1(X)$ است. هر پایه مرتب برای $T_{(1,x)}(X_1)$ به شکل $(0\times\beta)$ است که β پایه‌ای مرتب برای $T_x(X)$ می‌باشد. با توجه به تعریف جهت مرزی، داریم

$$\operatorname{sgn}(0\times\beta) = \operatorname{sgn}(n_{(1,x)}, 0\times\beta)$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۳.۳: بردار برونسوی



شکل ۴.۳: جهت القائی بر دایرهٔ واحد

حال آن که با تعریف جهت ضربی، داریم

$$\operatorname{sgn}(1\times 0, 0\times\beta) = \operatorname{sgn}(1)\ \operatorname{sgn}\beta = \operatorname{sgn}\beta$$

این نتیجه نشان می‌دهد که جهت مرزی X_1 با جهت آن به عنوان یک کپی از X معادل است. اما، بردار نرمال برونسوی در طول X_0 برابر $(-1,0) = X_{(0,x)}$ است. بنابراین، علامت پایهٔ $0\times\beta$ برای $T_{(0,x)}(X_0)$ نسبت به جهت مرزی روی X_0 برابر

$$\operatorname{sgn}(-1\times 0, 0\times\beta) = \operatorname{sgn}(-1)\operatorname{sgn}\beta = -\operatorname{sgn}\beta$$

است. در نتیجه، جهت مرزی روی X_0 عکس جهت آن به عنوان یک کپی از X است.

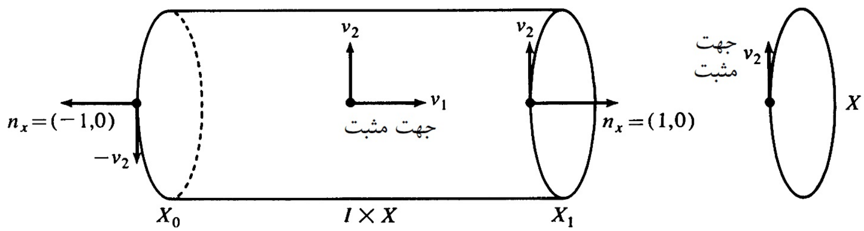
نتیجه می‌گیریم که به عنوان یک منیفلد جهتدار $\partial(I\times X) = X_1 \cup (-X_0)$. نمادگذاری

$$\partial(I\times X) = X_1 - X_0$$

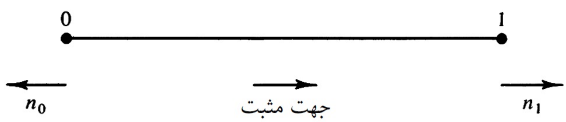
را برای در این مورد معرفی می‌کنیم. اگر $\dim X = 1$، در این صورت بعد ∂X صفر است. جهت فضای برداری صفر بعدی $T_x(\partial X)$ برابر علامت پایهٔ $\{u_x\}$ برای $T_x(X)$ می‌باشد. به عنوان مثال، بازهٔ فشرده $[0,1]$ با جهت استاندارد ارث گرفته شده از $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. در $x = 1$ بردار نرمال برونسوی $1 \in \mathbb{R}^1 = T_1(X)$ می‌باشد، که به طور مثبت جهتدار است، و در نقطهٔ $x = 0$ بردار نرمال برونسوی برابر بردار $-1 \in \mathbb{R}^1 = T_0(X)$ است. بنابراین، جهت $T_1(\partial X)$ برابر $+1$ و جهت $T_0(\partial X)$ برابر -1 است.

با معکوس کردن $[0,1]$ به طور ساده جهتها در هر نقطهٔ مرزی نیز عکس می‌شود. حال فرض کنید X یک منیفلد مرزدار، جهتدار، فشرده و همبند باشد. از آنجایی که (نظر به قضیهٔ طبقه بندی منیفلدهای یک بعدی) نقاط مرزی X با کپیهای وابرسان با بازه به هم متصل شده‌اند، داریم

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۵.۳: ارتباط جهت منیفلد با جهت لبه آن



مشاهده: مجموع تمام اعداد جهتیِ نقاط مرزی هر یک-منیفلد فشرده، جهتدار و همبند صفر است.

بنابراین، اعداد جهتی دقیقاً برای بهبود بخشیدن به تئوری مقطع مفید هستند. ولی ابتدا لازم است که بر پیشنگاره‌ها جهت قرار دهیم. برای این مهم، از مشاهدهٔ ذیل استفاده می‌کنیم: فرض کنید $\bar{V}=V_1\oplus V_2$ مجموع مستقیم باشد. در این صورت، معرفی جهت بر تنها دو تا از این سه فضای برداری، به طور خودکار موجب تعریف جهت بر فضای سوم می‌شود. پایه‌های مرتب β_1 و β_2 را بترتیب برای V_1 و V_2 انتخاب نموده، و فرض کنید $\beta=(\beta_1,\beta_2)$ پایهٔ مرتب حاصل برای V باشد. حال، به سادگی ادعا می‌کنیم که $\operatorname{sgn}(\beta)=\operatorname{sgn}(\beta_1)\cdot\operatorname{sgn}(\beta_2)$. از آنجا که این دو فضای برداری جهت دارند، این فرایند یک علامت بخصوص برای پایهٔ مرتب β مجموعشان معین می‌کند. پیشنهاد می‌کنیم تحقیق کنید که انتخابهای مختلف برای β_1 و β_2، موجب یک جهت یکسان می‌گردد. ولی توجه کنید که ترتیب پیوند V_1 و V_2 اساسی است. جهت (β_1,β_2) می‌تواند با (β_2,β_1) متفاوت باشد.

حال فرض کنید $f:X\longrightarrow Y$ نگاشتی هموار با $f\pitchfork Z$ و $\partial f\pitchfork Z$ است، که X، Y و Z همه جهت دارند و دو تای آخر بی‌مرز هستند. بر منیفلد مرزدار $S=f^{-1}(Z)$ جهتی بنام جهت پیشنگاره تعریف می‌کنیم. اگر $f(x)=z\in Z$، در این صورت $T_x(S)$ پیشنگارهٔ $T_z(Z)$ تحت نگاشت مشتق $df_x:T_x(X)\longrightarrow T_z(Y)$ است. فرض کنید $N_x(S;X)$ مکمل قائم برای $T_x(S)$ در $T_x(X)$ باشد. در این صورت

$$N_x(S;X)\oplus T_x(S)=T_x(X)$$

و بنابراین، برای تعریف جهت بر مجموع مستقیم $T_x(S)$، تنها نیاز به تعیین جهت بر $N_x(S;X)$ داریم.
چون $df_xT_x(X)+T_z(Z)=T_z(Y)$، و $T_x(S)$ کلِ پیشنگارهٔ $T_z(Z)$ است، به مجموع مستقیم

$$df_xN_x(S;X)+T_z(Z)=T_z(Y)$$

می‌رسیم. بنابراین، وجود جهت بر Z و Y موجب تعیین جهت بر $df_xN_x(S;X)$ می‌گردد. از طرفی، $T_x(S)$ کل هستهٔ نگاشت خطی df_x است، و لذا بایستی فضای $N_x(S;X)$ را به طور ایزومورف

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

بروی تصویرش بنگارد. بنابراین، جهت القایی بر $d f_x N_x(S;X)$، توسط ایزومورفیسم $\bar{d} f_x$، جهتی بر $N_x(S;X)$ القاء می‌کند.

تمام بحث بالا به جهت تعریف جهت بر هر یک از فضاهای مماس $T_x(S)$ بود؛ بررسی همواری را به شما واگذار می‌کنیم. (اما هموار‌ی باید واضح باشد، زیرا در ساخت بالا تنها از جبر و نگاشت هموار $d f_x$ استفاده گردید.) به جهت کاستن از پیچیدگی بحث بالا و نیز افزایش درک شما از مفهوم جهت پیشنگاره‌ای، تعدادی مسئله در انتهای بخش آورده شده است. برای ایجاد سهولت در مراجعهٔ دو باره، معادلات مجموع مستقیم بکار رفته برای تعریف جهت بر پیشنگاره را مجدداً مطرح می‌کنیم:

$$d f_x N_x(S;X) \oplus T_z(Z) = T_Z(Y)\,,$$
$$N_x(S;X) \oplus T_x(S) = T_x(X)$$

که در آنها $S = f^{-1}(Z)$.

استفادهٔ $N_x(S;X)$ مکمل قائم $T_x(S)$ در $T_x(X)$، فقط برای راحتی در تعریف بود. در حقیقت، اگر H هر زیر فضای دیگر از $T_x(X)$ و مکمل نسبت به $T_x(S)$ باشد، در این صورت دو مجموع مستقیم

$$d f_x H \oplus T_z(Z) = T_Z(Y) \qquad , \qquad H \oplus T_x(S) = T_x(X)$$

همان جهت را بر $T_x(S)$ تعریف می‌کنند. بررسی این موضوع که تمرینی ساده از جبر است، به عنوان تمرین ۲۸ واگذار می‌کنیم.

در اینجا، خاصیت مهمی از تعاریف بالا را ثابت می‌کنیم. فرض کنید نگاشت $f : X \longrightarrow X$ مثل بالا داریم که $\partial f \pitchfork Z$ و $f \pitchfork Z$، منیفلدها جهتدارند، و تنها X مرزدار است. در این صورت منیفلد $f^{-1}(Z)$ دو جهت دارد (یکی به عنوان جهت پیشنگارهٔ Z تحت نگاشت $\partial f : \partial X \longrightarrow Y$ و دیگری به عنوان مرز منیفلد $(f^{-1}(Z)$). این دو جهت با علامت $(-1)^{\operatorname{codim} Z}$ متفاوتند. اثبات یک مطلب تمرینی خوب به جهت درک تعاریف است. با این حال ترجیح می‌دهیم برهان کامل آن را ارائه کنیم.

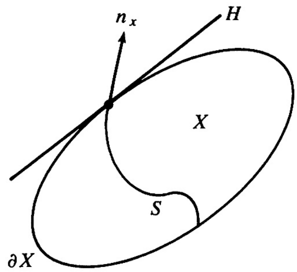
گزاره: $\partial[f^{-1}(Z)] = (-1)^{\operatorname{codim} Z}(\partial f)^{-1}(Z)$.

برهان: $f^{-1}(Z)$ را همانند بالا با S نشان می‌دهیم. فرض کنید H زیر فضایی از $T_x(\partial X)$ که نسبت به $T_x(\partial S)$ مکمل می‌باشد، بنابراین $H \oplus Y_x(\partial S) = T_x(\partial X)$ (به شکل ۶.۳ توجه شود). توجه کنید که H نسبت به $T_x(S)$ در $T_x(X)$ نیز مکمل است. با مقایسهٔ بعدها، به سهولت ملاحظه می‌گردد که بایستی H از $T_x(S)$ مجزا باشد، زیرا

$$T_x(S) \cap T_x(\partial X) = T_x(\partial S)$$

بنابراین، از H برای تعریف جهت بر S و نیز جهت بر ∂S در x می‌توانیم استفاده کنیم (در اینجا به تمرین ۲۸ نیاز داریم.) از آنجایی که $H \subset T_x(\partial X)$، نگاشتهای $d f_x$ و $d(d f_x)_x$ بر H یکسانند. بنابراین، جهتهای یکسانی توسط هر دو نگاشت (با توجه به مجموع مستقیم $d f_x H \oplus T_z(Z) = T_z(Y)$) بر H نسبت داده می‌شود. اکنون که H جهتدار است، جهت القاء شده توسط f بر S را به صورت $H \oplus T_x(S) = T_x(X)$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۶.۳:

تعریف نموده و جهت القاء شده توسط ∂f بر ∂S را به صورت $H \oplus T_x(\partial S) = T_x(\partial X)$ تعریف می‌کنیم.

فرض کنید n_x بردار نرمال یکهٔ برونسوی بر ∂S در S باشد، و $\mathbb{R}.n_x$ نشانگر زیر فضای یک–بعدی تولید شده توسط n_x بوده و طوری جهتدار شده باشد که $\{n_x\}$ یک پایهٔ مرتبِ مثبت آن باشد. متأسفانه، نظر به بحث بالا، لزومی ندارد که n_x به کل $T_x(\partial X)$ عمود باشد. با این وجود، ادعا می‌کنیم که جهت بر $T_x(\partial X)$ و نیز جهت بر $T_x(X)$ با مجموع مستقیم $\mathbb{R}.n_x \oplus T_x(\partial X) = T_x(X)$ بهم مرتبط هستند. بررسی این رابطه را به شما واگذار می‌کنیم. کافی است توجه داشته باشید که n_x یک بردار مکانی برونسوی است و از تمرین ۲۷ استفاده کنید.

با قرار دادن فرمولهای در ارتباط با جهت پیشنگاره‌ای بر S و ∂S در فرمول $T_x(X) = \mathbb{R}.n_x \oplus T_x(\partial X)$، نتیجه می‌گیریم

$$H \oplus T_x(S) = \mathbb{R}.n_x \oplus H \oplus T_x(\partial S)$$

چون $l = \dim H$ تا جابجایی برای حرکت n_x از چپ به راست در یک پایهٔ مرتب برای H لازم است، مجموع مستقیم در سمت راست $(-1)^l$ برابر جهت $H \oplus \mathbb{R}.n_x \oplus T_x(\partial S)$ می‌باشد. بنابراین $T_x(S)$ باید دارای $(-1)^l$ برابر جهت $\mathbb{R}.n_x \oplus T_x(\partial S)$ می‌باشد. بنابراین، وقتی بر ∂S جهت پیشنگاره‌ای قرار داده می‌شود، بایستی $T_x(S)$ دقیقاً با $(-1)^l$ برابر جهت $\mathbb{R}n_x \oplus T_x(\partial S)$ برابر باشد. اما بنابه تعریف، وقتی ∂S دارای جهت مرزی باشد، آنگاه $T_x(S)$ درست همان جهت $\mathbb{R}.n_x \oplus T_x(\partial S)$ را دارد. نتیجه اینکه جهت پیشنگاره‌ای و جهت مرزی بر $T_x(\partial S)$ باید با مضرب $(-1)^l$ متفاوت باشد. چون $l = \dim H = \operatorname{codim} S = \operatorname{codim} Z$ برهان تمام است. □

تمرینات

۱. ثابت کنید رابطهٔ «جهت معادل داشتن» در واقع یک رابطه هم‌ارزی روی پایه‌های مرتب است.

۲. فرض کنید $\beta = \{v_1, \cdots, v_k\}$ یک پایه مرتب برای V باشد ثابت کنید:

(الف) جایگزینی v_i با مضرب cv_i به جهت معادل نتیجه میشود به شرطی که $c > 0$، در غیر این صورت، جهت عکس نتیجه می‌شود.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

(ب) جابجایی دو عضو (یعنی، عوض کردن جاهای v_i و v_j که $i \neq j$) یک پایهٔ مرتب با جهت عکس نتیجه می‌شود.

(ج) با کم کردن یک برداری یا ترکیب خطی بردارهای دیگر یک پایهٔ مرتب جهتدار نتیجه می‌شود.

۳. دنبالهٔ $V_1 \xrightarrow{A_1} V_2 \xrightarrow{A_2} \cdots v_n \xrightarrow{A_n} V_{n+1}$ از نگاشتهای میان فضاهای برداری در صورتی دقیق است که $\operatorname{Im}(A_i) = \ker(A_{i+1})$ برای $i = 1, \cdots, n$. بنابراین دقیق بودن $0 \longrightarrow U \xrightarrow{A} V \xrightarrow{B} W \longrightarrow 0$ یعنی اینکه A یکبیک است، B پوشا است و $\operatorname{Im}(A) = \ker(B)$. به چنین دنباله‌ای دقیق کوتاه گفته می‌شود. نشان دهید که چگونه جهتهای هر دو فضای برداری در یک دنبالهٔ دقیق کوتاه جهتی روی فضای سوم القاء می‌کنند. [راهنمایی: در حالت خاص از جهت بر مجموع مستقیم $V = U \oplus W$ شروع کنید.]

۴*. فرض کنید V مجموع مستقیم V_1 و V_2 است. ثابت کنید جهت مجموع مستقیم از $V_1 \oplus V_2$ برابر $(-1)^{(\dim V_1)(\dim V_2)}$ برابر جهت از $V_2 \oplus V_1$ است.

۵. ثابت کنید جهتهای مرزی هموارند. (تمرین ۷ از بخش ۱ در فصل ۲ را ببینید.)

۶*. $\mathbb{H}^k$ با جهت استاندارد القائی از $\mathbb{R}^k$ جهتدار می‌شود. بنابراین، می‌توان بر $\partial\mathbb{H}^k$ جهت مرزی بدست آورد. ولی ∂H^k را به صورت $\mathbb{R}^{k-1}$ نیز می‌توان تصور نمود. نشان دهید که جهت مرزی بر $\mathbb{H}^k$ با جهت استاندارد بر $\mathbb{R}^{k-1}$ یکسان است اگر و تنها اگر k زوج باشد. این را به صورت $\partial H^k = (-1)^k \mathbb{R}^{k-1}$ می‌توانیم بنویسیم.

۷. با ارائهٔ جهت مثبت برای پایه‌های فضای مماسی در نقاط دلخواه $(a,b,c) \in \mathbb{S}^2$، جهتی بر $\mathbb{S}^2$ (به عنوان مرز B^3) بسازید.

۸. تابع $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y,z) = z$ را در نظر بگیرید. برای مقادیر منظم $-1 < t < 1$، پیشنگارهٔ $f^{-1}(t)$ دایره‌هایی به ارتفاع t هستند. جهت آنها چیست؟ (به طور صریح یک بردار با جهت مثبت در هر نقطه از $f^{-1}(t)$ نمایش دهید.)

۹. ثابت کنید جهت مرزی بر $\mathbb{S}^k = \partial B^{k+1}$ همان جهت پیشنگاره‌ای تحت نگاشت $g : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(x) = |x|^2$ است.

۱۰. فرض کنید f یک نگاشت هموار روی $\mathbb{R}^1$ و $X \subset \mathbb{R}^2$ نمودار آن باشد: $X = \{x, f(x)\}$. جهت X را به عنوان جهت پیشنگاره‌ای 0 تحت نگاشت $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y) = f(x) - y$ به شکل صریح معرفی کنید. [**راهنمایی:** $T_{(x,y)}(X)$ توسط $V = (1, f'(x))$ تولید می‌شود. بنابراین، بردار جهت نرمال بر X برابر $n = (-f(x), 1)$ می‌باشد. آیا v یا $-v$ به طور مثبت جهت دارند؟]

۱۱. به طور مشابه فرض کنید f تابعی هموار بر $\mathbb{R}^2$ بوده و $S \subset \mathbb{R}^3$ نمودار آن باشد: $S = \{(x,y), f(x,y)\}$. جهت S تحت نگاشت $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ را به طور صریح مشخص کنید. [راهنمایی: $T_{(x,y,z)}(S)$ توسط $v_1 = \left(1, 0, \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right)$ و $v_2 = \left(0, 1, \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

تولید می‌شود و خط نرمال توسط $n = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial F}{\partial y}(x,y), 1\right)$ تولید می‌گردد. $\{v_1, v_2\}$ یا $\{v_2, v_1\}$ به طور مثبت جهتدار است؟]

۱۲. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک وابرسانی از منیفلد جهتدار، همبند و کراندار باشد. نشان دهید که اگر $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$ در نقطهٔ x حافظ جهت باشد، آنگاه f به شکل فراگیر حافظ جهت است.

۱۳*. ثابت کنید که هر ابررویهٔ فشرده در فضای اقلیدسی جهت‌پذیر است. [راهنمایی: قضیهٔ جداسازی ژوردان–برائور.]

۱۴*. فرض کنید X و Z زیرمنیفلدهایی تراگرد در Y باشند و هر سه منیفلد جهت دارند. فرض کنید $X \cap Z$ منیفلد حاصل از اشتراک آن دو زیرمنیفلد به همراه جهت پیشنگاره‌ای القائی توسط نگاشت شمول $X \longrightarrow Y$ باشد و بعلاوه $\dim X + \dim Z = \dim Y$. بنابراین $X \cap Z$ صفر بعدی است. در این صورت، در هر نقطه $y \in X \cap Z$ ای $T_y(X) \oplus T_y(Z) = T_y(Y)$. تحقیق کنید که عدد جهتی y در $X \cap Y$ برابر $+1$ است مشروط به اینکه اگر جهتهای X و Z را با فرمول مجموع مستقیم بالا جمع کنیم، جهت Y حاصل شود، و در غیر این صورت -1 است.

۱۵. اگر $\dim X + \dim Z = \dim Y$ و $X \pitchfork Z$ ثابت کنید $X \cap Z = (-1)^{(\dim X)(\dim Z)} Z \cap X$.

۱۶. حال فرض مکمل بودن بعدها را حذف می‌کنیم. ثابت کنید اگر $X \pitchfork Z$ در Y، آنگاه دو جهت روی منیفلد اشتراکی با رابطهٔ

$$X \cap Z = (-1)^{(\operatorname{codim} X \times \operatorname{codim} Z)} Z \cap X$$

به هم مربوطند. توجه کنید هر گاه X و Z دارای بعدهای مکمل باشند، در این صورت

$$(\operatorname{codim} X).(\operatorname{codim} Z) = (\dim X).(\dim Z).$$

[راهنمایی: نشان دهید که جهت $S = X \cap Z$ با فرمول

$$[N_y(Z;X) \oplus N_y(S;Z)] \oplus T_y(S) = T_y(Y)$$

مشخص می شود. اما در مورد $Z \cap X$، دو فضای اولی جابجا می‌شوند.]

۱۷. با ارائهٔ پایه‌های مرتب با جهت مثبت مناسب در هر نقطه از هر یک از موارد داده شده، بر $X \cap Z$ جهتی به صورت صریح مشخص کنید. [برای راحتی ما سه محور را به صورتی جهتدار می‌کنیم که پایه‌های استاندارد به محور مثبت جهتدار شوند. صفحه xy را طوری جهتدار کنید که $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ مثبت باشد و صفحه yz را طوری جهتدار کنید که $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ مثبت باشد. در نهایت $\mathbb{S}^1$ و $\mathbb{S}^2$ را به عنوان مرز B^2 و B^3 جهتدار کنید.]

(a) «محور x ها» : Z و محور X_1 : X (در $\mathbb{R}^2$).

(b) «محور z ها»: Z و $\mathbb{S}^1$: X (در $\mathbb{R}^3$).

(c) «صفحه yz»: Z و «صفحه xy»: X (در $\mathbb{R}^3$).

(d) «صفحه yz»: Z و $\mathbb{S}^2$: X (در $\mathbb{R}^3$).

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

(e) «صفحه $\mathbb{S}^1$: X در صفحه xy و «صفحهٔ yz»: Z (در $\mathbb{R}^3$).
(f) «صفحه yz»: Z و «صفحه xy»: X (در $\mathbb{R}^3$).
(g) «هذلولی‌گون $x^2+y^2-z^2=a$»: X با جهت پیشنگاره‌ای $(a>0)$ و «صفحه xy»: Z (در $\mathbb{R}^3$)

۱۸. فرض کنید که Z ابررویه‌ای در منیفلد جهتدار Y است، یعنی یک زیرمنیفلد با همبعد 1. ثابت کنید که گزاره‌های ذیل معادلند:
(a) Z جهت‌پذیر است.
(b) یک میدان هموار از بردارهای نرمال $\vec{N}(z)$ بر سراسر Z در Y موجود است.
(c) کلاف نرمال $N(Z;Y)$ بدیهی است.
(d) Z به شکل فرگیر با تنها یک تابع غیر مستقل تعریف می‌شود؛ یعنی، یک تابع هموار θ بر همسایگی‌ای از Z موجود است به گونه‌ای که $Z=\theta^{-1}(0)$ و $d\theta$ در هر نقطه از Z نا صفر است.
[راهنمایی: برای $(b)\Leftrightarrow(a)$، تعریف جهت مرزی را تقلید کنید. $(b)\Leftrightarrow(c)$ بدیهی است. برای $(d)\Leftrightarrow(c)$، تمرین ۲۰ از بخش ۳ در فصل ۲ را ببینید.]

۱۹*. فرض کنید Z یک ابررویهٔ جهتدار در منیفلد جهتدار Y است و $\vec{n}$ یک میدان برداری هموار از بردارهای یکهٔ قائم بر سراسر Z در Y می‌باشد. توجه کنید که $\vec{n}$ بر هر فضای نرمال $N_z(Z;Y)$ جهتی را تعریف می‌کند (که بردار $\vec{n}(Z)$ به طور مثبت جهتدار نامیده می‌شود) نشان دهید اگر جهت مجموع مستقیم بر $\mathbb{N}_z(Z;Y)\oplus T_z(Z)$ و جهت بر $T_z(Z)$ در نقطه‌ای $z\in Z$ مطابق باشند، آنگاه آنها در کل مؤلفهٔ همبندی در Z و شامل z مطابقند. نشان دهید دقیقاً یک انتخاب برای $\vec{n}$ وجود دارد که همواره با جهتهای داده شده مطابقت دارد. این $\vec{n}$ را میدان برداری یکهٔ قائم برونسوی بر سراسر Z می‌نامیم. (در حالت صفحه در $\mathbb{R}^3$ فیزیکدانها می‌گویند که $\vec{n}$ با قانون دست راست مطابقت می‌کند.) بررسی کنید که در مورد جهت مرزی، این بردار در هر نقطه با قائم برونسوی مطابقت دارد.

۲۰. ثابت کنید نوار موبیوس جهت‌پذیر نیست. [راهنمایی: دایرهٔ مرکزی جهتپذیراست. حال از تمرین ۱۸ و ۱۹ از بخش ۴ در فصل ۲ استفاده کنید.]

۲۱. ثابت کنید نوار موبیوس به طور فراگیر نمی‌تواند توسط تابع مستقل تعریف گردد.

۲۲. فرض کنید که V یک فضای برداری است. نشان دهید که هر دو جهت روی V موجب یک جهت ضربی یکسان بر $V\times V$ می‌شوند.

۲۳. فرض کنید X یک منیفلد جهت‌پذیر باشد نشان دهید که جهت ضربی روی $X\times X$ برای تمام انتخاب‌های جهت روی X یکسان است.

۲۴. فرض کنید X جهت‌پذیر نیست ثابت کنید $X\times Y$ هرگز جهت‌پذیر نیست هر چند که Y جهتپذیر باشد.[راهنمایی: اول نشان دهید $X\times\mathbb{R}$ جهتپذیر نیست ولی هر Y یک زیر مجموعهٔ باز وابرسان با $\mathbb{R}^1$ دارد.]

۲۵. ثابت کنید که جهتی طبیعی بر یک همسایگی باز از Δ در $X\times X$ وجود دارد در حالیکه X می‌تواند جهتپذیر نباشد. این مطلب را با مثالهای ۲۳ و ۲۴ و این حقیقت که Δ جهتپذیر است اگر و تنها اگر

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

X جهتپذیر باشد، مقایسه کنید. [راهنمایی: یک همسایگی از Δ را توسط $\phi\times\phi : U\times U \longrightarrow X\times X$ می‌توانید پرمایش کنید، که $\varphi : U \longrightarrow X$ پرمایشی موضعی از X است و سپس از تمرین ۲۳ استفاده کنید.]

۲۶. ثابت کنید هر منیفلد همبند ساده X جهتپذیر است. [راهنمایی: یک مبداء $x\in X$ انتخاب نموده و جهتی برای تک فضای $T_x(X)$ انتخاب کنید. اگر $y\in X$، $T_y(X)$ را به شکل ذیل جهتدار کنید: دنباله‌ای از مجموعه‌های باز U_1، . . . و U_l را انتخاب کنید که هر U_i با یک گوی باز در $\mathbb{R}^k$ وابرسان است، به طوری که هر $U_i\cap U_{i+1}\neq 0$، $y\in U_l$ و $x\in U_1$. مجموعه‌های U_i را جهتدار کرده و نشان دهید که جهت القاء شده روی $T_y(X)$ از U_l به انتخاب U_i بستگی ندارد.]

۲۷. در تعریف جهت مرزی از بردار نرمال برونسوی n_x در x بر ∂X استفاده شد. نشان دهید عمود بودن ضروری نیست. یعنی اینکه اگر $u_x\in T_x(X)$ هر بردار برونسوی دیگری باشد، آنگاه همان جهت را روی N_x تعریف خواهد نمود. (در ارائهٔ مفهوم برونسوی بودن، فرض عمود بودن وجود نداشت؛ تمرین ۷ و ۸ از بخش ۱ در فصل ۲ را ببینید.) [راهنمایی: نشان دهید که $h_x = cn_x + v$ در حالیکه $n\in T_x(\partial X)$ و $c>0$.]

۲۸. مشابه تمرین ۲۷، نشان دهید که تعامد برای تعریف جهت پیشنگاره‌ای لازم نیست. به ویژه اگر $H\oplus T_x(S) = T_x(X)$. در این صورت این معادله به اضافه $d f_x H\oplus T_z(Z) = T_z(Z)$ یک جهت پیشنگاره‌ای که با جهت تعریف شده از فرض مکمل متعامد بودن، معادل است.

بخش ۳.۳ عدد مقطع جهتدار

اکنون آماده‌ایم تا نظریهٔ مقطع را بازسازی کنیم. مفروضات کلی مانند حالت به پیمانهٔ ۲ است: X، Y و Z منیفلدهای بی‌مرزند، X فشرده است، Z یک زیرمنیفلد بسته از Y است و $\dim X + \dim Z = \dim Y$. اما، منحصراً با منیفلدهای جهتدار کار می‌کنیم. (گاهی اوقات، این مفروضات را با گفتن اینکه $f : X\to Y$ و Z برای نظریهٔ مقطع مناسبند، خلاصه می‌کنیم.)

اگر $f : X\longrightarrow Y$ با Z تراگرد باشد، در این صورت $f^{-1}(Z)$ دارای تعداد متناهی نقطه است که هر کدام دارای عدد جهتی ±1 تعیین شده به صورت جهت پیش نگاره‌ای هستند. عدد مقطع $I(f,Z)$ را مجموع این اعداد جهتی تعریف می‌کنیم.

عدد جهتی در نقطهٔ $x\in f^{-1}(Z)$ بسیار ساده است. زیرا، اگر $f(x) = z\in Z$، آنگاه تراگردی به انضمام متمم بودن ابعاد، برقراری مجموع مستقیم

$$d f_x T_x(X)\oplus T_z(Z) = T_z(Y)$$

را نتیجه می‌دهد. حال $d f_x$ بایستی ایزومورفیسمی بروی نگاره‌اش باشد، و در نتیجه جهت X یک جهت برای $d f_x T_x(X)$ را مشخص می‌کند. به این ترتیب، عدد جهتی در x در صورتی $+1$ است که تجمیع جهت روی $d f_x T_x(X)$ و نیز بر $T_z(Z)$، جهت از پیش داده شدهٔ Y را نتیجه دهد، و در غیر اینصورت -1 است.

مشاهده در بخش قبلی در خصوص منیفلدهای یک-بعدی، کلید اصلی ناوردایی هوموتوپی تعریف ما است. ابتدا فرض کنید که X مرز یک منیفلد فشرده W است و f به صورتی قابل توسیع به یک نگاشت

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

$F : W \longrightarrow Y$ باشد. بنا به قضیهٔ توسیع، می‌توانیم فرض کنیم $F \pitchfork Z$. بنابراین $F^{-1}(Z)$ یک منیفلد یک-بعدی، فشرده، جهتدار و با مرز $\partial F^{-1}(Z) = f^{-1}(Z)$ است. نتیجتاً، مجموع اعداد جهتی در نقاط مختلف در $f^{-1}(Z)$ بایستی صفر باشد، و به این ترتیب ثابت کردیم که

گزاره: اگر $X = \partial W$ و $f : X \longrightarrow Y$ به W توسیع پذیر باشد، در این صورت $I(f, Z) = 0$ (که W فشرده است).

به ویژه فرض کنید f_0 و f_1 هوموتوپ بوده و هر دو با Z تراگرد باشند. در این صورت اگر $F : I \times X \longrightarrow Y$ یک هوموتوپی بین آنها باشد، می‌دانیم $I(\partial F, Z) = 0$. اما $\partial(I \times X) = X_1 - X_0$ و در ضمن از طریق یکی گیری طبیعی X_0 و X_1 با X، ∂F بر X_0 با f_0 برابر می‌شود و بر X_1 با f_1. در نتیجه $\partial F^{-1}(Z) = f_1^{-1}(Z) - f_0^{-1}(Z)$ و بنابراین

$$I(\partial F, Z) = I(f_1, Z) - I(f_0, Z)$$

این مطلب، ثابت می‌کند که

گزاره: نگاشتهای هوموتوپ همواره دارای عدد مقطع برابرند.

در حال حاضر، عبارت فوق تنها برای نگاشتهایی که با Z تراگردند با معنی است. ولی همانند نظریهٔ به پیمانه ۲، این ناوردایی هوموتوپی به ما امکان می‌دهد که نظریه مقطع را به حالت نگاشتهای دلخواه تعمیم دهیم. به ازای هر $g : X \longrightarrow Y$ مفروض، نگاشت هوموتوپ f با g را چنان انتخاب می‌کنیم که با Z تراگرد باشد، و سپس تعریف می‌کنیم $I(g, Z) = I(f, Z)$. همان طوری که نشان داده‌ایم، هر انتخاب دیگری از f، همان عدد را نتیجه می‌دهد. توجه کنید که دو گزارهٔ اخیر به طور خودکار برای هر نگاشت دلخواه برقرارند، چه تراگرد باشند و یا نباشند.

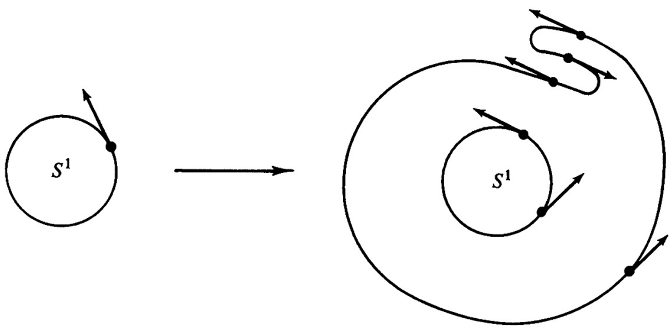
هنگامی که Y همبند و دارای بعد برابر X است، درجهٔ نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ را به صورت عدد مقطع f با هر زیر مجموعهٔ تک نقطه‌ای $\{y\}$ از Y تعریف می‌کنیم، $\deg f := I(f, \{y\})$. اثبات ما در خصوص اینکه $I_2(f, \{y\})$ برای تمام نقاط $y \in Y$ یکی است، کاملاً در مورد نظریهٔ جهتدار صادق است. بنابراین $\deg(f)$ به طور قابل قبولی تعریف شده است. کمی جلوتر، در این بخش، این مطلب را از مشاهدات تکنیکی کلیتری نتیجه خواهیم گرفت. توجه داشته باشید که برای محاسبهٔ $\deg(f)$، کافی است خیلی ساده، ابتدا مقدار منظم y را انتخاب نموده و سپس تعداد نقاط در پیش نگارهٔ $\{x : f(x) = y\}$ را شمرده و به ازای هر نقطه $+1$ یا -1 را به مجموع اضافه می‌کنیم، بسته به اینکه ایزومورفیسم $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y)$ حافظ جهت باشد و یا نباشد.

درجه به عنوان عدد مقطع تعریف شد و بنابراین به شکل خودکار نسبت به هوموتوپی ناوردا می‌باشد.

برای فهمیدن این نکته که چرا تأثیر حذفی برخی از اعداد جهتی موجب ناوردایی هوموتوپی اطلاعات حاصل از پیش نگاره می‌شود، پیشنهاد می‌کنیم که چند شکل در این خصوص ترسیم کنید. برای مثال، به کمک دگردیسی هموار دایره در داخل صفحه و سپس تصویر آن بروی $\mathbb{S}^1$، نگاشتهای فراوانی از $\mathbb{S}^1$ بتوی صفحه می‌توان بدست آورد (شکل ۷.۳ را ببینید.) از آنجایی که چنین نگاشتی با نگاشت همانی هوموتوپ است،

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

درجهٔ آن باید $+1$ باشد. برای مشاهدهٔ این امر به پیش نگارهٔ مقادیری منظم توجه کنید. (مقادیر تکین کدامند؟)



شکل ۷.۳: رابطه بین عدد مقطع و هوموتوپی

دستهٔ دیگر از نگاشتهای جالب از دایره، تحدید تک جمله‌ایهای مختلط $z \longmapsto z^m$ است. وقتی $m > 0$، این نگاشت دایره را m مرتبه حول خودش با حفظ جهت می‌چرخاند. نگاشت در همه جا منظم و حافظ جهت است، و بنابراین درجهٔ آن برابر تعداد نقاط در پیش نگارهٔ هر نقطهٔ دلخواه است؛ یعنی، m. (باید این مشاهده را به سادگی با محاسبهٔ به کمک یک پیمایش موضعی بتوانید ثابت کنید.) پیشنهاد می‌کنیم که از پارامترازیسازی حاصل از نگاشت $\theta \longmapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ از $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ استفده کنید.) به طور مشابه، وقتی $m < 0$ نگاشت در همه جا منظم است ولی جهت برگردان می‌باشد. چون هر نقطه دارای $|m|$ پیش نگاره است، درجه برابر $m = -|m|$ است. سرانجام، اگر $m = 0$، نگاشت ثابت است و درجهٔ آن صفر می‌باشد. (در حالی که در نظریهٔ به پیمانهٔ ۲، پاسخ تنها «m به پیمانهٔ ۲» بود.)

نتیجه‌ای فوری از این محاسبه، (که با نظریهٔ به پیمانه ۲ قابل اثبات نیست) این حقیقت جالب است که دایره دارای تعداد بینهایت نگاشت غیر هوموتوپ است. چون $\deg(Z^m) = m$، هیچکدام از این نگاشتها نمی‌توانند با دیگری هوموتوپ باشند.

قضیهٔ توسیع پذیری در خصوص عدد مقطع به شرح زیر است..

گزاره: فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی هموار بین منیفلدهای فشرده و جهتدار است که دارای بعد یکسانند و $X = \partial W$ (W فشرده). اگر f را به کل W بتوان توسیع داد، در این صورت $\deg(f) = 0$.

اکنون به تکمیل گزاره‌ای که در نظریهٔ پیمانه ۲ ناتمام ماند، می‌پردازیم. قبلاً نشان داده‌ایم که به ازای هر چند جمله‌ای مختلط $p(z)$ از مرتبهٔ m، نگاشتهای $S \longrightarrow \mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ

$$\frac{p(z)}{|p(z)|} \qquad \text{و} \qquad \frac{z^m}{|z^m|} = \left(\frac{z}{|z|}\right)^m$$

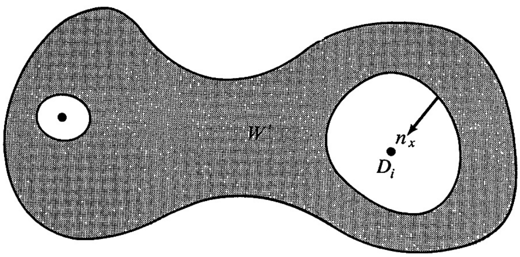
روی دایره‌ای $\mathbb{S}^1$ با شعاع باندازه کافی بزرگ r در صفحه، به شکل هموار هوموتوپند. بنابراین باید $p/|p|$ دارای همان درجه‌ای باشد که $(z/r)^m$ است؛ یعنی m. نتیجه اینکه وقتی $m > 0$، $p/|p|$ به کل یک قرص به شعاع r قابل تعمیم نیست، و لذا بایسی p حداقل یک ریشه در داخل قرص باشد. این ثابت می‌کند که

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

قضیهٔ اساسی جبر: هر چند جمله‌ای غیر ثابت مختلط دارای یک ریشه است.

این بحث را با کسب اطلاعات با جزئیات بیشتری در مورد ریشه‌های p می‌توانیم بهبود ببخشیم. در هر نقطهٔ $z_0 \in \mathbb{C}$ می‌توانیم p را به صورت $p(z) = (z - z_0)^l q(z)$ تجزیه کنیم، که $q(z_0) \neq 0$. البته $p(z_0) = 0$ دقیقاً در حالی ممکن است که $l > 0$، و در این حالت l مرتبهٔ صفر z_0 نامیده می‌شود.

گزاره: فرض کنید W یک ناحیهٔ فشردهٔ هموار در $\mathbb{C}$ است که مرز آن شامل هیچ صفری از چندجمله‌ای p نیست. در اینصورت، تعداد کل صفرهای p در داخل W با احتساب تکرر آنها، برابر درجهٔ نگاشت $p/|p| : \partial W \longrightarrow \mathbb{S}^1$ است.



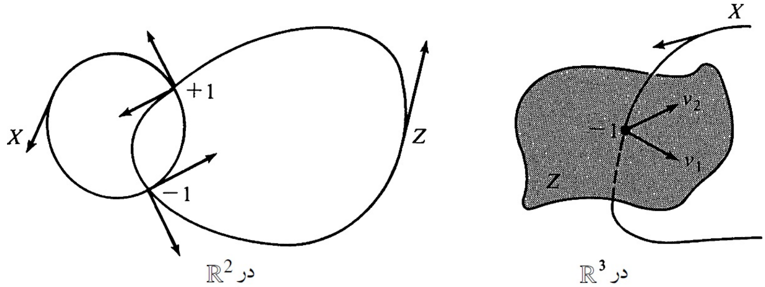
شکل ۸.۳:

برهان: منظور از ناحیهٔ فشردهٔ هموار، یک زیرمنیفلد مرزدار، فشرده و دو بعدی است. قضیه‌ای بدیهی از جبر بیان می‌کند که p تنها تعدادی متناهی ریشه $\{z_0, \cdots, z_n\}$ در W دارد. حال هر دور هر z_i یک قرص بستهٔ کوچک D_i طوری ترسیم می‌کنیم که قرصها دو به دو مجزا باشند و همگی از مرز W مجزایند. به این ترتیب $p/|p|$ بر $W' = W - \cup_{i=0}^{n} D_i$ تعریف می‌گردد. توجه کنید که جهت ∂D_i به عنوان بخشی از W' بر عکس جهت عادی آن به عنوان مرز D_i است، زیرا بردار نرمال برونسوی برای W' همان بردار نرمال درونسوی برای D_i است. (به شکل ۸.۳ توجه شود). بنابراین، تساوی $\partial W' = \partial W - \cup_{i=0}^{n} D_i$ به عنوان منیفلدهای جهتدار برقرار است. از آنجایی که درجهٔ $p/|p|$ بر $\partial W'$ صفر است، نتیجه می‌گیریم که درجهٔ آن بر W مساوی مجموع درجه‌های آن روی دایره‌های جهتدار ∂D_i است.

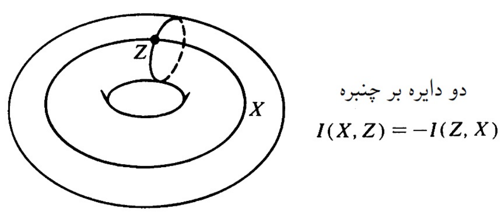
با نشان دادن اینکه درجهٔ $p/|p| : \partial D_i \longrightarrow \mathbb{S}^1$ برابر تکرر p در z_0 است، برهان را تکمیل می‌کنیم. می‌نویسیم $p(z) = (z - z_i)^l q(z)$، که $q(z_0) \neq 0$. از آنجایی که p دارای هیچ صفری در D_i غیر از z_i نیست، g نمی‌تواند در D_i صفر شود. اگر r شعاع D_i باشد در این صورت $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \partial D_i$ که با ضابطهٔ $g(z) = z_i + rz$ تعریف می‌شود، وابرسانی حافظ جهت از $\mathbb{S}^1$ بروی ∂D_i است. بنابراین، درجهٔ $p/|p| : \partial D_i \to \mathbb{S}^1$ برابر درجهٔ $p \circ g/|p \circ g| : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ است. هموتوپی $h_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ را به صورت $h_t(z) = z^l q(z_i + trz)/|q(z_i + trz)|$ تعریف می‌کنیم. (تقسیم با معنی است، زیرا $z_i + trz \in D_i$). در این صورت $h_i = (p \circ g)/|p \circ g|$ و $h_0(z) = cz^L$، که c ثابتی برابر با $q(z_i)/|q(z_i)|$ است. چون $\deg(h_0) = l$، نتیجه می‌گیریم که $\deg(h_1) = l$. □

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

اکنون توجهمان را به مثال بخصوص و متفاوتی از نظریهٔ مقطع معطوف کنیم. هر گاه X زیرمنیفلدای از Y باشد، آنگاه همانند در حالت نظریهٔ به پیمانهٔ ۲ $I(X,Z)$، عدد مقطع آن با Z را به صورت عدد مقطع نگاشت شمول X با Z تعریف می‌کنیم. اگر $X \pitchfork Z$، در این صورت $I(X,Z)$ با شمردن تعداد نقاط در $X \cap Z$ محاسبه می‌گردد. به این ترتیب که به ازای هر نقطهٔ منظم y که تجمیع جهت X و جهت Z (به همین ترتیب) برابر جهت Y در Y شود، یک واحد افزوده و در غیر این صورت یک عدد کاسته می‌گردد (به شکل ۹.۳ توجه شود). مطمئن شوید که شکل بالا را فهمیده‌اید. یک پیشنهاد دیگر برای بررسی چگونگی درک



شکل ۹.۳:



شکل ۱۰.۳:

شما از موضوع، و رهایی از سردرگمی احتمالی در زمینهٔ جهت، توجه به اهمیت در ترتیب است. اگر X و Z فشرده باشند، در این صورت دو عدد مقطع می‌توان در نظر گرفت: $I(X,Z)$ و $I(Z,X)$، و ممکن است این اعداد متفاوت باشند! مثلاً، در شکل ۱۰.۳ $I(X,Z) = -I(Z,X)$. در صفحات بعدی این تفاوت کلی را در نظر می‌گیریم. ولی، به عنوان یک تمرینی از شما خواسته می‌شود که این تفاوت را به طور مستقیم و از فرض $X \pitchfork Z$ نتیجه بگیرید.

می‌دانیم که $I(X,Z)$ با ایجاد دگردیسی در X تغییر نمی‌کند. برای اثبات ناوردایی آن نسبت به دگرگونیهای در Z، تا اندازه‌ای روشمان را تعمیم می‌دهیم. در حال حاضر Z را مانند X آزادانه مستقل از Y می‌توان انتخاب نمود، و عدد مقطع جهتدار را برای هر دو نگاشت دلخواه $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Z \longrightarrow Y$ می‌توان تعریف نمود. البته، وقتی Z زیرمنیفلدای از Y باشد و g نگاشت شمول آن باشد، انتظار داریم که به همان عدد قبلی $I(f,Z)$ برسیم. برای جایگزینی شرط قبلی که Z باید زیر منیفلدای بسته باشد، فشرده بودن آن را شرط می‌کنیم، اما همچنان Z می‌تواند منیفلدای دلخواه و بدون مرز باشد، که در شرط بعدی $\dim X + \dim Z = \dim Y$ صدق می‌کند. مثل همیشه، همه جهتدارند.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

ابتدا حالت تراگرد را در نظر می‌گیریم. دو نگاشت f و g را در صورتی تراگرد $f \pitchfork g$ گوئیم که

$$\text{اگر } f(x)=y=g(z) \text{ آنگاه } df_x T_x(X)+dg_z T_z(Z)=T_y(Y)$$

مکمل بودن بعدها ایجاب می‌کند که مجموع بالا مستقیم است و هر دو مشتق df_x و dg_x یکبیک هستند. بنابراین، این مشتقها فضاهای $T_x(X)$ و $T_z(Z)$ را به طور ایزومورف بروی نگارشان تصویر می‌کنند، و لذا فضاهای نگاره‌ای جهتهایی را از X و Z دریافت می‌کنند. عدد مقطع موضعی در نقطهٔ (x,z) را در صورتی $+1$ تعریف می‌کنیم که جهت مجموع مستقیم $df_x T_x(X)\oplus dg_z T_z(Z)$ برابر جهت داده شده روی $T_y(Y)$ باشد، و در غیر این صورت آن را -1 تعریف می‌کنیم. اکنون، $I(f,g)$ به صورت مجموع موضعی تمام زوجهای (x,y) ای هر $f(x)=g(z)$ تعریف می‌گردد. (توجه شود که وقتی $g:Z\longrightarrow Y$ نگاشت شمول یک زیرمنیفلد است، وقتی و تنها وقتی $f\pitchfork g$ که $f\pitchfork Z$؛ و در این صورت $(I(f,g)=I(f,Z))$.)

برای نشان دادن اینکه مجموع متناهی است، از یک بازنویسی فرمول استاندارد استفاده می‌کنیم. اگر Δ قطر $Y\times Y$ را نشان دهد و $f\times g: X\times Z\longrightarrow Y\times Y$ نگاشت ضربی باشد، در این صورت $f(x)=g(z)$ دقیقاً در نقاط (x,y) در $(f^1\times y)^{-1}(\Delta)$ امکان پذیر است. اما $\dim(X\times Z)=\operatorname{codim}\Delta$. پس، اگر $f\times g\pitchfork\Delta$، آنگاه پیش نگارهٔ Δ یک منیفلد صفر بعدی و فشرده است. بنابراین مجموعه‌ای متناهی است. تراگردی و نظایر آن با کمی جبر خطی نتیجه می‌گردند:

لم: فرض کنید U و W زیر فضایی از فضای برداری V باشند. در این صورت $U\oplus W=V$ اگر و تنها اگر $U\times W\oplus\Delta=V\times V$. (در اینجا Δ قطر $V\times V$ است.) همچنین فرض کنید U و W جهت دارند و به V جهت حاصل از جمع مستقیم را بدهیم و به Δ جهت حاصل از V با ایزومورفیسم طبیعی را نسبت دهیم. در این صورت، جهت حاصلضربی روی $V\times V$ مطابق با جهت جمع مستقیم $U\times W\oplus\Delta$ است اگر و تنها اگر W با بعد زوج باشند.

برهان: توجه کنید که $U\cap W=\{0\}$ اگر و تنها اگر $U\times W\cap\Delta=\{0\}$. به علاوه

$$\dim U+\dim W=\dim V \;\Leftrightarrow\; \Leftrightarrow\; \dim U\times W+\dim\Delta=\dim V\times V$$

و ادعای اول حالا ثابت شده است. راحت تر است جهتها خودتان محاسبه کنید. ولی چنانچه خلاف این را فکر می‌کنید، می‌توانید ادامه دهید.

فرض کنید $\{u_1,\cdots,u_k\}$ و $\{w_i,\cdots,w_l\}$ پایه‌های مرتب و با جهت مثبت برای U و W باشند. در این صورت، پایه مرتب ترکیبی $\{u_1,\cdots,u_k,w_1,\cdots,w_l\}$ برای V به طور مثبت جهتدار است و $\{(u_1,u_1),\cdots,(u_k,u_k),(w_1,w_1)\cdots,(w_l,w_l)\}$ نیز برای Δ به طور مثبت جهتدار است. پایهٔ مرتب $\{(u_1,0),\cdots,(u_k,0),(0,w_1)\cdots,(0,w_l)\}$ در جهت حاصلضربی بر $U\times W$ به طور مثبت جهت دارد. نتیجه اینکه پایهٔ جهتدار مرکب حاصل

$$\{(u_1,0),\cdots,(u_k,0),(0,w_1)\cdots,(0,w_k),(u_1,u_1),\cdots$$
$$\cdots,(u_k,u_k),(w_1,w_1)\cdots,(w_l,w_l)\}$$

نیز، به طور مثبت جهتدار است. حال می‌توان یک عنصر پایه‌ای را از دیگری بدون تغییر جهت کم کنیم. بنابراین، پایهٔ زیر نیز همان علامت را دارد:

$$\{(u_1,0),\cdots,(u_k,0),(0,w_1),\cdots,(0,w_k),(0,u_1),\cdots$$
$$\cdots,(0,u_k),(w_1,0),\cdots,(w_l,0)\}$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

با دنباله‌ای مرکب از $l\times k$ ترانهش از اعضای پایه‌ای، این پایه را به پایهٔ

$$\{(u_1,0),\cdots,(u_k,0),(0,u_1),\cdots,(0,u_k),(0,w_1),\cdots$$
$$\cdots,(0,w_l),(w_1,0),\cdots,(w_l,0)\}$$

می‌توان تبدیل نمود. به این ترتیب که، ابتدا $(0,u_1)$ را l مکان به چپ حرکت دهید، سپس $(0,u_2)$ را و الی آخر. به طور مشابه $l(l+k)$ ترانهش، پایه آخر را به

$$\{(u_1,0),\cdots,(u_k,0),(w_1,0),\cdots,(w_k,0),(0,u_1),\cdots$$
$$\cdots,(0,u_k),\cdots,(0,w_1),\cdots,(0,w_l)\}$$

تبدیل می‌کند. سرانجام، این پایهٔ مرتب برای $V\times V$ بنا به تعریف، به طور مثبت جهت‌دار است. هر ترانهش بین عناصر پایه، جهت را معکوس می‌کند. از آنجایی که $lk+l(l+k)=2lk+l^2$، ترانهش صورت گرفته است، پایهٔ اول و آخر از لحاظ جهت معادلند اگر و تنها اگر $2lk+l^2$ زوج باشد. یعنی، اگر و فقط اگر $l=\dim W$ زوج باشد. □

این لم را با جایگذاری

$$U=d\,f_x\,T_x(X)\quad,\quad W=d_{y_z}\,T_z(Z)\quad,\quad V=T_y(Y)$$

به صورت گزاره زیر ترجمه می‌کنیم.

گزاره: $f\pitchfork g$ اگر و فقط اگر $f\times g\pitchfork\Delta$ و در این صورت

$$I(f,g)=(-1)^{\dim Z}\,I(f\times g,\Delta)$$

یک استفاده از گزاره فوق برداشتن فرض تراگردی f و g است. $I(f,g)$ را برای نگاشتهای دلخواه $f:X\longrightarrow Y$ و $g:\bar{Z}\longrightarrow Y$ به طور ساده به صورت $(-1)^{\dim Z}\,I(f\times g,\Delta)$ می‌توانیم تعریف کنیم.

گزاره: اگر f_0 و g_0 به ترتیب هموتوپ با f_1 و g_1 باشند، در این صورت $I(f_0,g_0)=I(f_1,g_1)$.

برهان: با انتخاب هموتوپیهای f_t و g_t، یک هموتوپی $f_t\times g_t$ بین $f_0\times g_0$ و $f_t\times g_t$ به دست می‌آوریم. □

نتیجه: اگر Z زیرمنیفلدای از Y و $i:Z\longrightarrow Y$ نگاشت شمول آن باشد، در این صورت به ازای هر نگاشت $f:X\longrightarrow Y$ داریم $I(f,i)=I(f,Z)$.

برهان: همان طور که قبلاً بیان شد، هر گاه $f\pitchfork Z$، این ادعا از تعریف دگردیسی کاملاً مشخص است. ولی اگر f دلخواه باشد، آن را به طور هموتوپ می‌توانیم تغییر شکل دهیم و به یک تابع تراگرد با Z برسیم، بی آنکه $I(f,i)$ یا $I(f,Z)$ تغییر کند. □

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

نتیجه: اگر $\dim X = \dim Y$ و Y همبند باشد، در این صورت $I(f,\{y\})$ برای هر $y \in Y$ ای یکی است. بنابراین $\deg(f)$ خوشتعریف است.

برهان: از آنجایی که Y همبند است، نگاشت شمولی i_0 و i_1 برای هر دو مجموعهٔ تک نقطه‌ای $\{y_0\}, \{y_1\} \subset Y$ هموتوپند. بنابراین $I(f,\{y_0\}) = I(f,i_0) = I(f,i_1) = I(f,\{y_1\})$ و برهان تمام است. □

گزاره: همواره $I(g,f)$ $I(g,y) = (-1)^{(\dim X)(\dim Y)}$.

برهان: باید جهت مجموعهای مستقیم بر

$$\begin{aligned} T_y(Y) &= df_x T_x(X) \oplus dg_z T_z(Z) \\ T_y(Y) &= dg_z T_z(Z) \oplus df_x T_x(X) \end{aligned}$$

را بنویسیم. اکنون کافی است پایه‌ها را نوشته و مشاهده نمود که برای تبدیل یکی به دیگری، به $\dim X.\dim Z$ ترانهش نیاز است. □

نتیجه: اگر X و Z هر دو زیرمنیفلدهای فشرده از Y باشند، در این صورت

$$I(X,Z) = (-1)^{(\dim X)(\dim Y)}\, I(Z,X)$$

به ویژه، فرض کنید $\dim Y = 2\dim X$. بنابراین، عدد خود-قطعی $I(X,X)$ قابل تعریف است. اگر بعد X فرد باشد، در این صورت $I(X,X) = -I(X,\bar{X})$ و بنابراین $I(X,X) = 0$. در نتیجه (پیمانه ۲) $I_2(X,X) = I(X,X)$ بخوی خود صفر می‌شود.

این مشاهده موجب بصیرتی در خصوص منیفلدهای جهت ناپذیر می‌گردد. زیرا، در نظریهٔ مقطع به پیمانهٔ ۲، فرض جهت پذیری وجود نداشت. بر این اساس امکان تعریف $I_2(X,X)$ برای زیر هر منیفلد فشردهٔ جهت پذیر X با بعد نصف بعد منیفلد دلخواه Y وجود دارد. اگر یکی از این اعداد خود-قطعی صفر نشود، در این صورت Y نمی‌تواند جهتدار شود. برای مثال، دایرهٔ مرکزی نوار موبیوس دارای عدد خود-قطعی غیر صفر به پیمانه ۲ است، بنابراین نوار موبیوس جهت پذیر نیست.

اگر Y منیفلدی فشرده و جهتدار باشد، در این صورت مشخصهٔ اویلر $\chi(Y)$ به صورت عدد خود-خودقطعی قطر Δ در $Y \times Y$ تعریف می‌گردد.

$$\chi(Y) := I(\Delta,\Delta)$$

مشخصهٔ اویلر یک ناوردای دیفرانسیلی برای منیفلدهای فشرده است و در مباحث هندسی و توپولوژیک بسیاری نقش اساسی ایفاء می‌کند. در بخشهای بعدی ضمن روشن شدن اهمیت بیشتر این مفهوم، تعاریف اساسی بیشتری ارائه خواهد شد. در حال حاضر توجهمان را به این تعریف معطوف نموده و مطلب بالا را به شکل زیر خلاصه می‌کنیم.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

گزاره: مشخصهٔ اویلر برای هر منیفلد جهتدار فشرده صفر است.

تمرینات بسیاری از تمرینهای در خصوص نظریهٔ مقطع به پیمانهٔ ۲، به همین ترتیب، در مورد نظریهٔ مقطع جهتدار صادقند. نظر به اطلاعات موجود در مورد جهت، توجه به فصل ۲ بخش ۴ می‌تواند بسیار مهم و با ارزش باشد.

۱. * فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک دیفئومورفیسم بین منیفلدهای فشرده و همبند باشد. بررسی کنید که $\deg(f) = +1$ اگر f حافظ جهت باشند و $\deg(f) = -1$ اگر f جهت را معکوس کند.

۲. a) درجهٔ نگاشت متقاطر $\mathbb{S}^k \longrightarrow \mathbb{S}^k$ با ضابطهٔ $x \longmapsto -x$ را بدست آورید.

b) ثابت کنید نگاشت متقاطر با نگاشت همانی هموتوپ است اگر و تنها اگر k فرد باشد. (تمرین ۷ فصل ۱ بخش ۶)

c) ثابت کنید که یک میدان برداری ناصفر بر $\mathbb{S}^k$ وجود دارد اگر و تنها اگر k فرد باشد (تمرین ۷ و ۸ فصل ۱ بخش ۱ را ببینید.)

d) آیا به کمک نظریهٔ به پیمانه ۲ می‌توان قسمتهای b و c را ثابت کرد؟

۳. گیریم $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$ یک چند جمله‌ای مختلط باشد. ثابت کنید که اگر $r^m > |a_1| r^{m-1} + \cdots + |a_m|$، آنگاه p یک ریشه در داخل دیسک $\{|z| < r\}$ به شعاع r و مرکز در مبداء در $\mathbb{C}$ دارد.

۴. نگاشت $f(z) = 1/z$ بر دایره به شعاع r و مرکز در مبداء در $\mathbb{C}$ را درنظر بگیرید.

a) $\deg(f/|f|)$ را محاسبه کنید.

b) آیا اثبات ما برای قضیهٔ اساسی جبر ایجاب نمی‌کند که برای یک $z \in C$ ای $1/z = 0$؟

۵. کجای اثبات قضیه اساسی جبر برای $\mathbb{R}$ صادق نیست؟ (یعنی اینکه چرا نمی‌توانیم از همان استدلال برای نشان دادن اینکه هر چند جمله‌ای در $\mathbb{R}$ با ضرایب حقیقی ریشه‌ای در $\mathbb{R}$ دارد، استفاده کنیم؟)

۶. نشان دهید $z^2 = e^{-|z|^2}$ برای بعضی اعداد مختلط z برقرار است.

۷*. ثابت کنید که نگاشت $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ $z \longmapsto \bar{z}^m$، که $\bar{z}$ مزدوج مختلط z است، دارای درجهٔ $-m$ است [**راهنمایی:** $z \longmapsto \bar{z}$ یک دیفئورفیسم جهت برگردان است.]

۸*. طبق تمرین ۸ از بخش ۴ و فصل ۲، برای هر نگاشت $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ یک نگاشت $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که $f(\cos t, \sin t) = (\cos g(t), \sin g(t))$. به علاوه، g در معادلهٔ $g(t + 2\pi) = g(t) + 2\pi q$، q عددی صحیح است، صدق می‌کند. نشان دهید $\deg(f) = q$.

۹*. نشان دهید دو نگاشت از دایره $\mathbb{S}^1$ بتوی خودش وقتی و تنها وقتی هموتوپند که درجهٔ یکسان داشته باشند. این حالت خاصی از قضیهٔ هوپف [۱] است که بعداً ثابت خواهد شد. [**راهنمایی:** اگر

[۱] Hopf

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

$g_0, g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ هر دو در $g(t+1) = g(t) + 2\pi q$ صدق کنند. در این صورت، برای هر s ای که $0 \leq s \leq 1$ نیز نگاشت $g_s = Sg_1 + (1-s)g_0$ در این شرط صدق می‌کند.]

۱۰. فرض کنید $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ داده شده‌اند. ثابت کنید $\deg(g \circ f) = \deg f . \deg g$.

۱۱*. ثابت کنید نگاشت $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ به کل گوی $B = \{|z| \leq 1\}$ توسیع می‌یابد اگر و تنها اگر $\deg(f) = 0$. [**راهنمایی:** اگر $\deg(f) = 0$ از تمرین ۹ استفاده نموده و f را به $A = \{z | 1/2 \leq |z| \leq 1\}$ طوری توسیع دهید که بر دایرهٔ داخلی $\{z | |z| = 1/2\}$ ثابت باشد. با استفاده از ابتکار در تمرین ۱ از بخش ۶ در فصل ۱، یک نگاشت ثابت بر کل یک همسایگی از دایرهٔ داخلی می‌توانید بدست آورید. اکنون آن را به بقیهٔ B توسیع دهید.]

۱۲. فرض کنید $X \pitchfork Z$ و هر دو فشرده و جهتدار باشند. به طور مستقیم از تعریف ثابت کنید که $I(X,Z) = (-1)^{(\dim X)(\dim Z)} = I(Z,X)$.

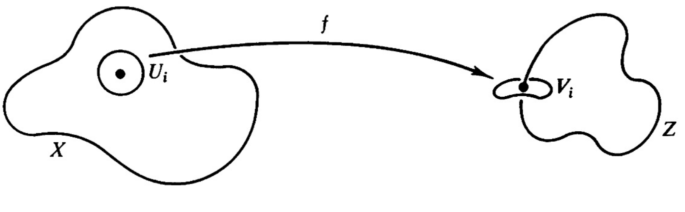
۱۳. ثابت کنید مشخصهٔ اویلر برای حاصلضرب دو منیفلد جهتدار و فشرده، حاصلضرب مشخصهٔ اویلر آنها است.

۱۴*. فرض کنید $W \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ یک دنباله از نگاشتها با $f \pitchfork Z$ در Y است. نشان دهید اگر $f \circ g$ و Z برای نظریهٔ مقطع مناسب باشند، آنگاه g و $f^{-1}(Z)$ نیز مناسبند. ثابت کنید $I(f \circ g, Z) = I(g, f^{-1}(Z))$.

۱۵. عدد مقطع برای نگاشتهای تراگرد را به عنوان حالت خاصی از عدد مقطع برای زیرمنیفلدها می‌توان در نظر گرفت. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ و $Z \subset Y$ برای نظریهٔ مقطع مناسب باشند و $f \pitchfork Z$. در این صورت $f^{-1}(Z) = \{x_1, \cdots, x_n\}$. نشان دهید که از مکمل بودن بعدها و نیز تراگردی نتیجه می‌گردد که f در هر نقطهٔ x_i ایمرشن است. بنابراین f یک همسایگی U_i از x_i را به طور دیفئومورف بروی زیرمنیفلدی $V_i \subset Y$ با

$$V_i \pitchfork Z \qquad \text{و} \qquad V_i \cap z = \{f(x_i)\}$$

می‌نگارد (به شکل ۱۱.۳ توجه شود). V_i را توسط این دیفئومورفیسم جهتدار نموده و بررسی کنید که $I(f,z)$ برابر مجموع عدد مقطع $V_n \cap Z$، . . . و $V_i \cap Z$ است. (البته، اجتماع $V_i \cap \cdots \cap V_n$ می‌تواند منیفلد نباشد، زیرا لزومی ندارد که نقاط $f(x_i)$ متمایز باشند).



شکل ۱۱.۳:

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۱۶. فرض کنید Z زیرمنیفلد فشرده از Y و هر دو جهتدار باشند و $\dim Z = \frac{1}{2}\dim Y$. ثابت کنید $I(Z,Z) = I(Z\times Z,\Delta)$، که Δ قطر Y است. [**راهنمایی:** فرض کنید i نگاشت شمول Z باشد. در این صورت

$$
\begin{aligned}
I(Z\times Z) &= I(i,Z) = I(i,i) \\
&= (-1)^{\dim Z} I(i\times i.\Delta) \\
&= (-1)^{\dim Z} I(Z\times Z,\Delta)
\end{aligned}
$$

وقتی $\dim Z$ فرد است، چه رخ می‌دهد؟]

۱۷*. ثابت کنید مشخصهٔ اویلر هر منیفلد جهتدار X برای تمام انتخابهای ممکن از جهت، یکی است [**راهنمایی:** از تمرین ۱۶ در حالی استفاده کنید که Z قطر $X\times X$ است و $Y = X\times X$. سپس از تمرین ۲۳ از فصل ۲ بهره ببرید.]

۱۸. نمونه‌هایی از عدد مقطع وجود دارند که حتی در فقدان فرض جهتهای کلی با معنی می‌باشند. فرض کنید X و Z زیرمنیفلدهایی از Y باشند که بعدشان مکمل یکدیگر است. فرض کنید یک همسایگی باز U از $X\cap Z$ در Y وجود دارد، طوری که U، $U\cap X$ و $U\cap Z$ جهتدارند. ثابت کنید $I(X,Z)$ خوشتعریف است و با تغییرات کم در X یا در Z تغییر نمی‌کند. [**راهنمایی:** $X \pitchfork Z$ را با تغییر فرم آن تنها در داخل U بسازیم.]

۱۹. به طور خاص، فرض کنید Z یک زیرمنیفلد فشرده از Y با بعد $\dim Z = \frac{1}{2}\dim Y$ است. فرض کنیم فقط Y جهتدار است. ثابت کنید عدد خود-قطعی $I(Z\times Z)$ هنوز هم خوشتعریف است و با تغییر شکلهای کوچک Z، تغییر نمی‌کند. [**راهنمایی:** تعریف کنید $I(Z,Z) = I(Z\times Z,\Delta)$، که Δ قطر Y است. طبق تمرین ۱۷، این با تعریف متداول در حالت جهت پذیری مطابق است. حال از تمرین ۲۵ از بخش ۲ به همراه تمرین ۱۸ استفاده کنید.]

۲۰. به عنوان حالت خاصی از تمرین ۱۹، ثابت کنید که مشخصهٔ اویلر خوشتعریف است، حتی برای منیفلدهای جهت ناپذیر. بعلاوه، این هنوز هم ناوردای دیفرانسیل است. [**راهنمایی:** شما باز هم تمرین ۲۵ از فصل ۲ نیاز دارید.]

بخش ۴.۳ قضیه نقطه ثابت لفشیتز

می‌توان از قضیه تقاطع برای مطالعه نقاط ثابت از یک نگاشت هموار $f : X \longrightarrow X$ روی یک منیفلد جهت‌دار شده که جواب‌های معادله $f(x) = x$ است. شاید ساده‌ترین سؤال برای پرسیدن این است که بپرسید که چند نقطه ثابت وجود دارد. و از نقطه نظر قضیه تقاطع یک جواب طبیعی خودش پیشنهاد می‌کند. توجه کنید که x یک نقطه ثابت است. دقیقاً وقتی که $(x,f(x)) \in X\times X$ متعلق می‌شود به تقاطع Γ_f با قطر Δ است. همانند مورد قبلی منیفلدهایی با بعد مکمل در $X\times X$ وجود دارند (هر دو دیفئومرفیسمشان روی X جهت‌دارند.) ما قضیه تقاطع را برای شمردن نقاط مشترکشان استفاده می‌کنیم. $I(\Delta,\Gamma_f)$ عدد عمومی f نامیده می‌شود.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

البته f می‌تواند در واقع تعداد متناهی نقطه ثابت داشته باشد تابع همانی یک مثال بدیهی است. $L(f)$ مجموعه نقاط ثابت را تا حدودی زیرکانه اندازه می‌کند. با این وجود ما این را خواهیم دید وقتی تعداد نقاط ثابت متناهی است. سپس $L(f)$ می‌تواند به طور مستقیم محاسبه شود به عنوان رفتار موضعی f حول نقاط ثابت.[۲]

قضیه نقطه ثابت هموار لفشیتز. فرض کنید $f : X \longrightarrow X$ یک نگاشت هموار روی منیفلد جهت‌دار فشرده X باشد. اگر $L(f) \neq 0$ سپس f یک نقطه ثابت دارد.

برهان: جالب بدانید که اثبات واضع است. زیرا، اگر f نقطه ثابت نداشته باشد و Δ و Γ_f مجزا باشند بنابراین به طور بدیعی متقاطعند در نتیجه

$$L(f) = I(\Delta, \Gamma_f) = 0$$

و برهان تمام است □

نتیجه فوق نفع زیادی دارد و می‌توانیم راه‌های مؤثری برای محاسبه اعداد لفشیتز بدست آوریم. در حال حاضر $L(f)$ را می‌شناسیم که ممکن است برای هر f صفر باشد. از آنجاییکه $L(f)$ به عنوان یک عدد تقاطعی تعریف می‌شود شما می‌توانید به طور ساده متوجه شوید.

گزاره: $L(f)$ ناوردا هموتوپی است.

گراف نگاشت همانی قطر خودش است. بنابراین

$$L(\text{همانی}) = I(\Delta, \Delta) = \chi(X) \quad \text{مشخصه اویلر}$$

بنابراین

گزاره: اگر f همانی هوموتوپ باشد در این صورت $L(f)$ برابر مشخصه اویلر X است. به ویژه اگر X دارای یک نگاشت هموار $f : X \longrightarrow X$ که با نگاشت همانی هموتپ است باشد؛ و دارای نقاط ثابت نیست در این صورت $\chi(X) = 0$.

بوضوح اولین پیشنهاد برای مطالعه نگاشت‌های $f : X \longrightarrow X$ که $gargh(f) \pitchfork \Delta$. چنان نگاشت‌هایی، نگاشت‌های لیفشیتز نامیده می‌شوند که تنها دارای تعداد متناهی نقطه ثابت هستند. و برعکس مسأله غلط است از آنجاییکه نگاشت‌های لیفشیتز با شرط تقاطع تعریف می‌شوند، کسی نباید متعجب شوند که بفهمد که اکثر نگاشت‌ها لیفشیتز هستند.

[۲] عدد لیفشیتز، شبیه مشخصه اویلر که در بخش قبلی تعریف گردید، یک ناوردای توپولوژیک است، به این معنی که آن را تنها با استفاده از مجموعه‌های باز در X می‌توان تعریف نمود، و در تعریف آن نیازی به توجه به ساختار منیفلدی X نیست. روش مطرح شده در اینجا چنان است، که تنها ناوردایی منیفلدی آن مشهود است، و نه ناوردایی توپولوژیک آن! در کتاب گرینبرگ [۱۲] توصیفی توپولوژیک از هر دو مفهوم را می‌توانید مطالعه نمایید.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

گزاره: هر نگاشت $f: X \longrightarrow X$ با یک نگاشت لیفشیتز هموتپ است.

برهان: از فصل ۲ بخش لم پایه‌ای که برای اثبات تقاطع در حالت کلی استفاده شد به خاطر آورید. ما می‌توانیم یک گوی باز S از فضای اقلیدسی و یک نگاشت هموار $F: X\times S \longrightarrow X$ به طوری که $F(x,0)=f(x)$ و $s \longmapsto F(x,s)$ یک سابمرشن $S \longrightarrow X$ تعریف می‌کند برای هر نقطه $x \in X$ توجه کنید که نگاشت $G: X\times S \longrightarrow X\times X$ که توسط $G(x,s)=(x,F(x,s))$ تعریف می‌شود نیز یک سابمرشن است. فرض کنید $G(x,s)=(x,y)$. از آنجایی که G می‌تواند مانند همانی روی فاکتو X تصویر $dG(x,s)$ عمل کند. شامل یک بردار به فرم (u,w) برای تمام v ها در $T_x(X)$ است. تحدید G به $\{x\}\times S$ یک سابمرشن برای $\{X\}\times X$ است. تصویر شامل یک بردار به فرم $(0,w)$ نیز برای تمام w ها در $T_y(X)$ است. بنابراین G یک سابمرشن است. در نتیجه، دقیقا همان $G \pitchfork \Delta$ می‌باشد. بنا به قضیه تقاطع تراگردی، به ازای تقریباً هرنگاشت S به شکل $X \longrightarrow X\times X$ تعریف شده به وسیله $x \longmapsto G(x,s)=(x,F(x,s))$، همان یک $\pitchfork \Delta$ می‌باشد. این بدان معنی است که نگاشت $x \longmapsto F(x,s)$ لیفشیتز است.

لیفشیتز بودن f به چه معنی است؟ فرض کنید که x یک نقطه ثابت از f است. فضای مماس به Γ_f در $T_x(X)\times T_x(X)$ نمودار نگاشت $df_x: T_x(X) \longrightarrow T_x(X)$ بوده و فضای مماس به قطر Δ، همان قطر فضای $T_x(X)\times T_x(X)$ است. بنابراین $\Gamma_f \pitchfork \Delta$ در (x,x) اگر و فقط اگر

$$\Gamma_{df_x} + T_x\Delta = T_x(X)\times T_x(X)$$

از آنجایی که Γ_{df_x} و $T_x\Delta$ زیر فضاهای برداری با بعد مکمل از $T_x(X)\times T_x(X)$ هستند، همه چیز تمام است، مشروط به آنکه اشتراک آنها صفر باشد. ولی $\Gamma_{df_x}\cap T_x\Delta=0$ به این معنی است که df_x دارای نقطه ثابت غیر صفر نیست یا به زبان جبر خطی df_x فاقد بردار ویژه با مقدار حقیقی $+1$ می‌باشد.

نقطه ثابت x را یک نقطه ثابت لیفشیتز می‌نامیم اگر df_x دارای نقطه ثابت غیر صفر نباشد (اگر مقادیر ویژه df_x همه مخالف $+1$ باشند.) f یک نگاشت لیفشیتز است اگر و تنها اگر تمام نقاط ثابت آن لیفشیتز باشند توجه کنید که شرط لیفشیتز بودن روی x کاملاً طبیعی و مستقیم است.

اگر f یک نقطه ثابت لیفشیتز باشد، عدد جهتی ± 1 از (x,x) در اشتراک $\Delta\cap\Gamma_f$ را با نماد $L_x(f)$ نمایش می‌دهیم، که عدد موضعی لیفشیتز f در x نامیده می‌شود. بنابراین، برای نگاشتهای لیفشیتزی

$$L(f)=\sum_{f(x)=x} L_x(f).$$

مناسبتر است که $L_x(f)$ را با وضوح بیشتر معرفی کنیم. ابتدا بررسی کنید که شرط لیفشیتز بودن در نقطه x معادل شرط ایزوموفیسم بودن نگاشت $df_x - I$ بر $T_x(X)$ می‌باشد. هسته $df_x - I$ شامل مجموعه نقاط ثابت df_x است. I نگاشت همانی از $T_x(X)$ است.) جای تعجب نیست که بگوییم $L_x(f)$ عملا منعکس کننده این واقعیت است که $df_x - I$ حافظ جهت است و یا جهت برگردان می‌باشد.

گزاره. عدد لفشیتز موضعی $L_x(f)$ در یک نقطه ثابت لفشیتز مفروض x، در صورتی $+1$ است که $df_x - I$ بر $T_x(X)$ حافظ جهت باشد، و در صورتی -1 است که جهت برگردان باشد. یعنی عدد $L_x(f)$ با علامت دترمینان $df_x - I$ یکی است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

برهان: فرض کنید $A = d\,f_x$ و $\beta = \{v_1, \cdots, v_k\}$ یک پایه مرتب به طور مثبت جهتدار برای $T_x(X)$ باشد در این صورت

$$\{(v_1, v_1), \cdots, (v_k, v_k)\} \ , \ \{(v_1, Av_1), \cdots, (v_k, Av_k)\}$$

پایه‌های به طور مثبت جهتدار برای $T_{(x,x)}(\Gamma_f), T_{x,x}(\Delta)$ هستند بنابراین علامت $L_x(f)$ همان علامت پایه مرکب

$$\{(v_1, v_1), \cdots, (v_k, v_k)\} \ , \ \{(v_1, Av_1), \cdots, (v_k, Av_k)\}$$

در جهت حاصلضرب $X \times X$ می‌باشد. از آنجایی که ممکن است یک ترکیب خطی از بردارهای پایه را از دیگری بدون عوض کردن جهت، کم کنیم، پایه مرکب دارای علامت مشابه با

$$\{(v_1, v_1), \cdots, (v_k, v_k), (0(A-I)v_1), \cdots (0, (A-I)v_k)\}$$

می‌باشد. از آنجایی که $A - I$ یک ایزومورفیسم است. ما می‌توانیم ترکیب خطی مناسب از k بردار را از اولی کم کنیم تا بطور معادل، به یک پایه جهتدار بشکل زیر برسیم:

$$\{(v_1, 0), \cdots, (V - x, 0), (0, (A-I)v_1), \cdots, (0, (A-I)v_k)\} = \{\beta \times 0, 0 \times (A-I)\beta\}$$

به وسیله تعریف جهت ضربی، علامت آخری برابر $\operatorname{sgn}\beta.\operatorname{sgn}(A-I)\beta$ است. به منظور فهم بهتر $L_x(f)$، اجازه دهید حالت دو بعدی را بررسی کنیم. از آنجایی که یک خاصیت موضعی را بررسی می‌کنیم، فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ و همچنین، فرض کنید f مرکز را ثابت نگه دارد. قرار می‌دهیم $A = d\,f_0$ بنابراین

$$f(x) = A\,x + \epsilon(x)$$

که در آن $\epsilon(x) \longrightarrow 0$ هنگامی که $x \longrightarrow 0$. فرض کنید A دارای ۲ بردار ویژه حقیقی مستقل خطی باشد؛ بنابراین، با انتخاب مناسب مختصات، ماتریس آن قطری است

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

پس

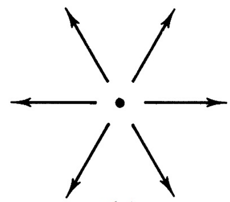
$$L_0(f) = \operatorname{sgn} X(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)$$

فرض کنید که α_1 و α_2 هر دو مثبت باشند.

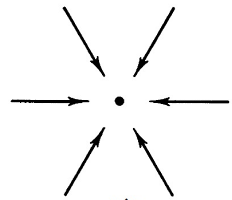
حالت اول: هر دو $\alpha_1, \alpha_2 > 1$. $L_0(f) = +1$ و موضعاً f یک **نگاشت منبسط دهنده** است که مرجع آن مبدأ است. (شکل ۱۲.۳)

حالت دوم: $\alpha_1, \alpha_2 < 1$. دوباره $L_0(f) = +1$ و f موضعاً یک **نگاشت منقبض کننده** است با فرو رفتن دو نقطه مبدأ. (شکل ۱۳.۳)

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱۲.۳: چشمه



شکل ۱۳.۳: چاهک

حالت سوم: $\alpha_1 < 1 < \alpha_2$ و $L_0(f) = -1$ و مبدأ یک **نقطه زینی** از f است. (شکل ۱۴.۳).

دقت کنید که چگونه $L_x(f)$ رفتار توپولوژیکی f را نزدیکی نقطه ثابت x بیان می‌کند. در این مثال‌های دوبعدی می‌توان $L_x(f)$ را به طور مستقیم از نمایشهای f خواند به عنوان مثال فرض کنید $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ یک نگاشت هموار از کره واحد باشد که هر نقطه به استثنای قطب‌ها را حرکت می‌دهد (شکل ۱۵.۳). اگر $\pi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^2$ تصویر $x \longmapsto x/|x|$ باشد در این صورت

$$f(x) = \pi\left(x + (0, 0, -\frac{1}{2})\right)$$

یک مثال مناسب است این f یک نگاشت لفشیتزی است که چشمه در شمال و چاهک در قطب جنوب است پس $L_N(f) = +1 = L_S(f)$ بنابراین

$$L(f) = L_N(f) + L_S(f) = 2.$$

از آنجایی که f، با نگاشت همانی از طریق نگاشت

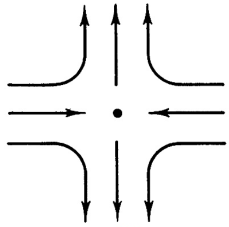
$$f_t(x) = \pi\left[x + (0, 0, -\frac{t}{2})\right]$$

هموتوپ است، داریم $L(f) = \chi(\mathbb{S}^2)$.

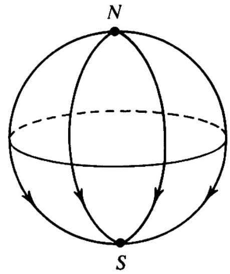
گزاره: مشخصهٔ اویلر S برابر ۲ است.

قضیه مربوط به مشخصه‌های اویلر برای نقاط ثابت دو جهتی است. فقط از آن برای محاسبه $\chi(S)^2$ استفاده کردیم، ولی حال می‌توانیم جهت‌ها را برعکس کنیم تا نتیجه بگیریم که

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱۴.۳: زینی



شکل ۱۵.۳:

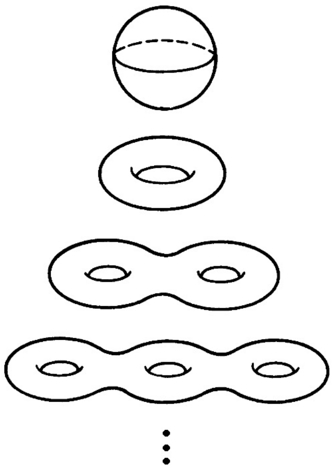
نتیجه: هر نگاشت از $\mathbb{S}^2$ که با نگاشت همانی هوموتوپ است، می‌بایست دارای یک نقطه ثابت باشد به ویژه نگاشت قرینه‌سازی $x \longmapsto -x$ با نگاشت همانی هوموتوپ نیست.

می‌توانیم محاسبه مشخصه اویلر را برای همه منیفلدهای دو بعدی جهتدار فشرده تعمیم دهیم. ابتدا قضیه‌ای را بدون ذکر اثبات، بیان می‌کنیم (اثباتی کلاسیک از آن را در آلفورس و ساریو [۷]، و اثباتی مدرن بر اساس نظریه مورس را درگرامیان [۶] و یا والاس [۵] می‌توان پیدا نمود.)

طبقه‌بندی ۲- منیفلدها: هر ۲- منیفلد فشرده جهتدار با یکی از موارد در شکل ۱۶.۳ دیفئومورف است.

حال یک نگاشت لفشیتز روی سطحی از جنس k، مانند زیر می‌سازیم. سطح را به طور عمودی روی انتها نگه دارید و آن را بطور یکنواخت از بالا با شکلات داغ بپوشانید. فرض کنید که $f_t(x)$، معرف مسیر تراوش شده شکلات از نقطه x، هنگامی که زمان t سپری شده است، باشد. در لحظه $t = 0$، f_0 همان نگاشت همانی است. در لحظه $t > 0$، f_t یک نگاشت لفشیتزی با یک نقطه چشمه در بالا، یک نقطه چاهک در پایین و نقاط زینی در بالا و پایین هر حفره می‌باشد. شکل ۱۷.۳ این نگاشت را برای سطحی از جنس ۴ نشان می‌دهد.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱۶.۳: رویه‌های از جنس‌های مختلف

گزاره: سطح از جنس k در یک نگاشت لفشیتزی که با نگاشت همانی هوموتوپ است، می‌پذیرد، به گونه‌ای که، یک چشمه، یک چاهک و $2k$ نقطه زینی دارد. در نتیجه مشخصه اویلر آن برابر $2-2k$ است.

توجه کنید که اگر $k>1$ باشد، مشخصه اویلر سطح از جنس k، منفی است، که عجیب‌تر از عدد خود قطعی است!
علارغم اینکه اکثر نگاشتها لفشیتزی هستند، ولی بسیاری از نگاشتهای متداول اینطور نیستند، به عنوان مثال نگاشت دو جمله‌ای $z \longmapsto z+z^m$ روی C لفشیتزی نیستند (البته، برای $m>1$). ولی خواهیم دید که نقاط ثابت و پیچیده فقط ترکیبی از نقاط لفشیتزی هستند. آنها مانند ذرات مرکب غیر پایدار در فیزیک می‌باشند.

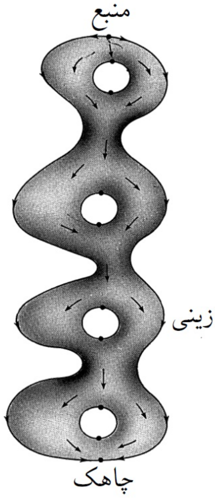
گزاره تجزیه: فرض کنید U یک همسایگی نقطه ثابت x باشد که شامل نقطه ثابت دیگری از f نیست. در این صورت، یک هموتوپی f_t از f وجود دارد که f_1 فقط دارای نقاط ثابت لفشیتزی در U است و هر f_t در خارج یک زیر مجموعه فشرده از U، برابر f است.

برهان: ابتدا فرض کنید که U یک مجموعه باز در $\mathbb{R}^k$ و $f:U \longrightarrow RR^k$ صفر را ثابت نگه می‌دارد. ولی سایر نقاط را در U ثابت نگه نمی‌دارد. فرض کنید $\rho:\mathbb{R}^k \longrightarrow [0,1]$ یک نگاشت هموار باشد که روی یک همسایگی V از مرکز برابر یک و در خارج یک زیر مجموعه فشرده $K\subset U$ صفر است. نشان خواهیم داد که نقاط $a\in\mathbb{R}^k$ چنان وجود دارند که $|a|$ به اندازه کافی کوچک است به طوری که

$$f_t(x)=f(x)+t\rho(x)a.$$

توجه کنید که $|a|$ به اندازه کافی کوچک است و f_t، فاقد هر گونه نقطه ثابتی در بیرون V می‌باشد. از

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱۷.۳:

آنجاییکه f دارای نقطه ثابت در مجموعه فشرده $K-V$ نیست، در آنجا داریم:

$$|f(x)-x|>c>0.$$

اگر $|a|<c/2$ داریم

$$|f_t(x)-x|\geq|f(x)-x|-t\rho(x)|a|>\frac{c}{2}$$

روی $K-V$ و البته بیرون K

$$f_t(x)=f(x)\neq x.$$

حال از قضیه سارد برای انتخاب هر نقطه a به اندازه کافی نزدیک به صفر استفاده کنید. که a یک مقدار منظم برای نگاشت $x\longmapsto f(x)-x$ می‌باشد و $|a|<c/2$. اگر x نقطه ثابت f_1 باشد، در این صورت $x\in V$ نیز چنین است و در نزدیکی x داریم $f_1=f+a$. در نتیجه $d(f_1)_x=d\,f_x$. بنابراین x یک نقطه ثابت لفشیتزی برای f_1 است اگر و تنها اگر $d\,f_x-I$ ناتکین باشد ولی چون $f_1(x)=x$.

$$f(x)-x=a$$

و منظم بودن a ایجاب می‌کند که

$$d(f_1)_x=d\,f_x-I$$

0 ناتکین باشد.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

این نکته، گزاره را در $\mathbb{R}^k$ ثابت می‌کند. تبدیل کردن به منیفلدهای راحت است. یک پیمایش ϕ را حول $x \in X$ انتخاب کنید که 0 را به x می‌نگارد. و حالت اقلیدسی را برای $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$ به کار ببرید. شما نیاز دارید که فقط بررسی کنید که آیا z یک نقطه ثابت لفشیتز برای g_t است. در این صورت $\phi(z)$ یک نقطه ثابت لفشیتز برای $f_t = \phi \circ g_t \circ \phi^{-1}$ خواهد بود. ولی، قاعده زنجیره‌ای نشان می‌دهد که $d(f_t)_{\phi(z)}$ دارای یک نقطه ثابت غیر صفر است اگر و تنها اگر $d(g_t)_z$ اینگونه باشد. □

نقاط ثابت مرکب می‌توانند به شکل‌های ابتدایی به طرق مختلف بتاهیده شوند. بسته به اهمیت دقیق آشوب روش و حتی عدد لفشیتز ذرات می‌تواند تغییر کند. ولی می‌دانیم که ثابت است: مجموع اعداد لفشیتزی موضعی که از نقاط ثابت نتیجه می‌شوند. این اعداد نقش شارژ الکتریکی را در ذرات بازی می‌کنند؛ و ناوردایی هموتوپی عدد لفشیتزی عمومی مانند قانون بقاء شارژ می‌باشد. برای شناختن این حقیقت که اعداد مختلف از ذرات بنیادی می‌تواند تولید گردند. در مورد نقاط ثابت لفشیتزی فکر کنید که دارای علامت مثبت هستند که همانند معادلهای ضد ماده شارژ شده هستند. آنها یکدیگر را می‌توانند نابود کنند یا به عکس آنها می‌توانند زوج، زوج به وجو آیند.

یقیناً باید توانا باشیم که به طور تجربی شارژ یک ذره مرکب را تعیین کنیم بدون آنکه آنرا به تکه‌های کوچک بشکنیم تا شارژهای ± 1 حاصله را محاسبه کنیم. یک آزمایش، با استفاده از وسیله قضیه تقاطع، یک فضای اقلیدسی پیشنهاد می‌کند. برای نقاط ثابت f روی فضای اقلیدسی همان صفرهای نگاشت $x \longmapsto f(x) - x$ می‌باشد و تجربه‌هایی در اندازه‌گیری این پدیده‌ها داشته‌ایم فرض کنیم x یک نقطه ثابت تنهای f در $\mathbb{R}^k$ باشد اگر B یک گوی بسته کوچک به مرکز x باشد شامل هیچ نقطه ثابت دیگری نیست، پس

$$z \longmapsto \frac{f(z) - z}{|f(z) - z|}$$

یک نگاشت هموار $F : \partial B \longrightarrow \mathbb{S}^{k-1}$ تعریف می‌کند. به درجه این نگاشت عدد لفشیتزی موضعی f در x می‌گویند. که با $L_x(f)$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که انتخاب B بی اهمیت است، زیرا اگر B' یک گوی دیگر باشد با شعاع کوچکتر، F روی کل طوقه $\overline{B - B'}$ تعریف می‌شود. عبارت آخر، یک منیفلد فشرده کراندار است و مرز آن برابر ∂B است با جهت معمولی، به اضافه $\partial B'$ با جهت مخالف چون درجه F روی مرز $\overline{B - B'}$، درجه آن روی B صفر است، باید برابر درجه آن روی B' باشد. این اصطلاحات نیازمند تشریح بیشتری می‌باشد.

گزاره: در نقاط ثابت لفشیتزی هر دو تعریف $L_x(f)$ مطابقند.

برهان: برای سادگی فرض کنید که $x = 0$. چون $f(0) = 0$، می‌توانیم بنویسیم $f(z) = Az + \epsilon(z)$، که $A = df_0$ و $\frac{\epsilon(z)}{|z|} \to 0$ وقتی $z \to 0$. چون نگاشت خطی $A - I$ یک ایزومورفیسم است، تصویر کره واحد تحت $A - I$، شامل کره‌های بسته‌ای با شعاع $c > 0$ است. خطی بودن ایجاب می‌کند که $|(A - I)z| > c|z|$ برای تمام $z \in \mathbb{R}^k$. حال گوی B را با شعاع به حد کافی کوچک انتخاب کنید که روی B داشته باشیم:

$$\frac{|\epsilon(z)|}{|z|} < \frac{c}{2}$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

تعریف کنید

$$f_t(z) = Az + t\epsilon(z)$$

چون

$$|f_t(z) - z| \geq |(A-I)z| - t|\epsilon(z)| > \frac{1}{2}c|z|$$

برای $0 \leq t \leq 1$، نگاشت

$$f_t(z) = \frac{f_t(z) - z}{|f_t(z) - z|}$$

یک هموتوپی بشکل $\partial B \times I \to \mathbb{S}^{k-1}$ تعریف می‌کند.
حال $\deg(F_1)$ دقیقاً یک تعریفجدید $L_0(f)$ است. چون $\deg(F_1) = \deg(F_0)$ کافی است ثابت کنیم که درجه نگاشت:

$$F_0 : z \to \frac{(A-I)z}{|(A-I)z|}$$

برابر ± 1 است، بسته به اینکه آیا $A - I$ حافظ جهت است یا خیر. حال، به یک لم جبری متوسل می‌شویم، که شما در تمرینها آن را ثابت خواهید نمود (تمرین ۱). □

لم: فرض کنید E یک ایزومورفیسم خطی روی $\mathbb{R}^k$ باشد. که جهت را حفظ می‌کند در این صورت، هموتوپی E_t که شامل ایزومورفیسمهای خطی است، چنان موجود است که $E_0 = E$ و E_1 همانی است. اگر E جهت را عکس کند، در این صورت یک چنین هموتوپی وجود دارد که در آن، E_1 با نگاشت انعکاسی زیر برابر است:

$$E_1(x_1, \cdots, x_k) = (-x_1, x_2, \cdots, x_k).$$

این را برای $E = A - I$ به کار برید تا یک هموتوپی از F_0 برای $z \to E_1 z/|E_1 z|$ به دست آورید.
هر دو امکان برای E_1، نرم را حفظ می‌کند. پس $|E_1 z| = |z| = r$ (شعاع B). پس اگر $A - I$ حافظ جهت باشد F_0 با دیفئومورفیسم استاندارد حافظ جهت $z \mapsto z/r$ از $\partial B \to \mathbb{S}^{k-1}$ است، پس $\deg(F_0) = 1$ اگر $A - I$ جهت را معکوس کند در این صورت F_0 با همان دیفئومورفیسم هموتوپ است که نگاشت انعکاس معکوس کننده جهت روی $\mathbb{S}^k$ نتیجه می‌شود؛ پس $\deg(F_0) = -1$. □

توجه کنید که تعریف جدید نه تنها با تعریف قبلی نقاط ثابت لفشیتزی مطابق است، بلکه به آسان ناوردایی شارژ، قابل ملاحظه است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

گزاره: فرض کنید که نگاشت f در $\mathbb{R}^k$ دارای یک نقطه ثابت تنها در x باشد و فرض کنید B یک گوی بسته حول x که شامل هیچ نقطه ثابت دیگری از f نیست، باشد. نگاشت f_1 را چنان انتخاب کنید که در بیرون زیر مجموعه فشرده‌ای از $\mathrm{Int}B$ با f برابر است و تنها دارای نقاط ثابت لفشیتزی در B است، انتخاب کنید. در این صورت، داریم

$$L_x(f) = \sum_{f_1(z)=z} L_z(f_1) \quad z\in B.$$

برهان: $L_x(f)$ درجه F روی $F\ \partial\beta$ می‌باشد، که در آن F، نگاشت زیر می‌باشد:

$$F : z \longmapsto \frac{f(z)-z}{|f(z)-z|}.$$

ولی روی ∂B، برابر با نگاشت زیر می‌باشد:

$$F_1 \longmapsto \frac{f_1(z)-z}{|f_1(z)-z|}.$$

حال فرض کنید که $z_1,\cdots,z_N$ نقاط ثابتی از f_1 باشند و گوی‌های کوچک B_i حول z_i را چنان انتخاب کنید که از یکدیگر و همچنین از ∂B مجزا می‌باشند. پس F_1 به

$$B' = B - \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{Int}(B_i),$$

توسیع می‌یابد به طوری که درجه نگاشت $\partial\beta' \to \mathbb{S}^{k-1}$ صفر است ولی چون

$$\partial B' = \partial B - \bigcup_{i=1}^{N} \partial B_i,$$

این درجه برابر درجه آن روی ∂B است منهای درجه آن روی ∂B_1 سرانجام درجه F_1 روی ∂B_i برابر با $L_{z_i}(f_1)$ است. □

حال اجازه دهید این تعریف اقلیدسی از اعداد لفشیتز موضعی را به منیفلدها به روش ابتدایی‌تری ثابت کنیم. اگر $f : X \longrightarrow X$ دارای یک نقطه ثابت تنها در x باشد. دیفئومورفیسم دلخواه ϕ حول x را انتخاب کنید و روی فضای اقلیدسی قرار دهید $g = \phi^{-1}\circ f\circ\phi$. فرض کنید که $\phi(0) = x$ و تعریف کنید $L_x(f) = L_0(g)$ آیا این تعریف به انتخاب ϕ بستگی دارد؟ ابتدا نقاط ثابت لفشیتزی را بررسی می‌کنیم اگر x لفشیتزی باشد در این صورت $L_x(f)$ مثبت است یا منفی، بسته به اینکه آیا $df_x - I$ جهت را حفظ می‌کند یا خیر؛ ولی

$$\begin{aligned}\deg_0 - I &= 1(d\phi_0^{-1}\circ df_x\circ\phi_0) - I\\ &= d\phi_0^{-1}\circ(df_x - I)\circ d\phi_0.\end{aligned}$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

پس $dg_0 - I$ یک ایزومورفیسم است اگر $df_x - I$ باشد و آن دارای اثر مشابه روی جهت $df_x - I$ است. پس 0 نیز یک نقطه ثابت لفشیتزی است برای g است و $L_0(g) = L_x(f)$.

اگر x یک نقطه ثابت دلخواه باشد، می‌توانیم به طور مستقیم از بررسی را اجتناب کرد. انتخاب مختصات، به وسیله گسترش x به نقاط ثابت لفشیتزی است.

فرض کنید دو پیمایش ϕ و ϕ' حول x موجود باشد. یک نگاشت $f_1 : X \to X$ را طوری انتخاب کنید که در بیرون مجموعه کوچک U که مشمول در تصاویر هر دو برابر f باشد، و فقط دارای نقاط ثابت لفشیتزی در U هستند. سپس به وسیله گزاره آخر عدد موضعی لفشیتزی از $\phi^{-1} \circ f \circ \phi$ در صفر برابر مجموع اعداد موضعی لفشیتزی از $\phi^{-1} \circ f_1 \circ \phi$ در $\phi^{-1}(U)$ می‌باشد. بنابراین ما نشان داده‌ایم که عدد محاسبه شده برای $\phi^{-1} \circ f_1 \circ \phi$ در هر نقطه ثابت لفشیتزی برابر عدد متناظر برای f است. بنابراین،

$$L_0(\phi^{-1} \circ f \circ \phi) = \sum_{f_1(z)=z} L_z(f_1) \quad z \in U.$$

اگر ما همان فرمول را با استفاده از ϕ'، به دست آوریم، $L_x(f)$ خوش‌تعریف است. به علاوه ما ثابت کرده‌ایم که

محاسبه موضعی عدد لفشیتز فرض کنید $f : X \to X$ یک نگاشت هموار دلخواه روی یک منیفلد فشرده با نقاط ثابت متناهی باشد. در این صورت عدد عمومی لفشیتزی (که ناوردای هموتوپی است) برابر مجموع اعداد موضعی لفشیتزی است.

$$L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f).$$

برهان: کافی است که f را بطور موضعی حول هر نقطه ناوردا، منحرف کنیم تا یک نگاشت لفشیتزی مانند $f_1 : X \to X$ را بدست آوریم. قصیه را برای f_1 می‌دانیم؛ می‌دانیم که $L(f) = L(f_1)$؛ و نهایتا، تنها نشان دادیم که مجموع اعداد لفشیتزی موضعی f برابر مجموع مشابه، برای تابع f_1 می‌باشد. □

تمرینات

۱. در اینجا یک راهنمایی برای اثبات لم صفحه ؟؟ وجود دارد.

a) نشان دهید که شما فقط به حالت حافظ جهت نیاز دارید. [**راهنمایی:** اگر E جهت را عکس کند، آنرا با نگاشت انعکاس ترکیب کنید.]

b) چون E دارای مقدار ویژه حقیقی یا مختلط است، آن بعضی زیر فضاهای یک بعدی یا دو بعدی $V \subseteq \mathbb{R}^k$ را به خودش تصویر می‌کند $V \subset \mathbb{R}^2$، قرار دهید: $\mathbb{R}^x = V \oplus W$ یک هموتوپی که شامل ایزومورفیسم خطی مانند E_t است، طوری که $E_0 : V \to V$ و $E_0 : W \to W$ پیدا کنید.]

راهنمایی: در یک پایه مناسب $E = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ 0 & C \end{array}\right)$، قرار دهید $E_t = \left(\begin{array}{c|c} A & tB \\ 0 & C \end{array}\right)$.]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

c) برای $k=1$ هموتوپی را به صورت صریح بسازید.

d) فرض کنید $x=2$ و E فقط دارای مقادیر ویژه مختلط است نشان دهید که $E_t = tI + (1-t)E$ همیشه یک ایزومورفیسم است.

e) حال روی k استقراء استفاده کنید.

۲. فرض کنید $A : V \to V$ یک نگاشت خطی باشد. نشان دهید که عبارتهای زیر معادلند:

a) 0 یک نقطه ناوردا تنها A است.

b) $A - I : V \to V$ ایزومورفیسم است.

c) 0 یک نقطه ناوردا لفشیتزی از A است.

d) نگاشت A لفشیتزی است.

۳. ناوردا کنید که شرایط زیر معادلند: a) x یک نقطه ناوردا لفشیتزی نگاشت $f : X \to X$ است.

b) 0 یک نقطه ناوردا لفشیتزی نگاشت $df_x : T_x(X) \to T_x(X)$ است.

c) نگاشت $df_x : T_x(X) \to T_x(X)$ لفشیتزی است.

۴. ناوردا کنید کلاس نگاشت‌های لفشیتزی از یک منیفلد فشرده X بتوی خودش پایدارند. [ذب راهنمایی: $\pitchfork$ یک شرط پایدار است.]

۵. در تمرین‌های بخش ۲، با مثالهایی از زیرمنیفلدها آشنا شدید که به شکل کلی به توسط توابع قابل تعریف نبودند. این گونه مثالها از حیث معرفی جهت بر آنها نیز دارای پیچیدگیهای مخصوص به خود هستند. نشان دهید که پدیده جهت‌ناپذیری در این موارد، پدیده‌ای قالب نیست. برای این منظور نشان دهید که قطر Δ در $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ به طور کلی توسط توابع مستقل تعریف نمی‌شود. در حالی که، کپی‌های استاندارد $\mathbb{S}^2$ در $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$، یعنی $\mathbb{S}^2 \times \{a\}$ با $a \in {}^2$ به کمک توابع بطور فراگیر قابل تعریف هستند. [**راهنمایی:** با تمرین ۱۸ فصل ۲ بخش ۴ مقایسه کنید.]

۶. نشان دهید که نگاشت $f(x) = 2x$ روی $\mathbb{R}^k$ با چشمه 0 ، دارای $L_0(f) = 1$ با این وجود بررسی کنید که چاهک $f(x) = x/2$، دارای $L_0(f) = (-1)^k$ می‌باشد.

۷. ناوردا کنید $\chi(\mathbb{S}^k) = \begin{cases} 2 & k \text{ زوج} \\ 0 & k \text{ فرد} \end{cases}$ [**راهنمایی:** از نگاشت ساخته شده برای $\mathbb{S}^2$ به اضافه تمرین ۶ استفاده کنید.]

۸. از وجود نگاشت‌های لفشیتزی برای اثبات دیگری از $\chi(X \times X) = \chi(X) \times \chi(Y)$ استفاده کنید.

۹. نشان دهید که با جمع کردن اعداد موضعی لفشیتزی (از نگاشت‌هایی که دارای نقاط ناوردا متناهی هستند) بدون فرض فشردگی، یک خاصیت ناوردای هموتوپی تعریف نمی‌کند. [**راهنمایی:** $\mathbb{R}^k$ برای مثال مناسب است].

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

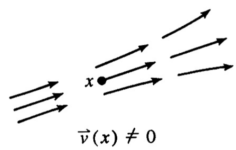
۱۰. a) ناوردا کنید که نگاشت $z \mapsto z+z^m$ دارای نقطه ناوردا با عدد موضعی لفشیتزی m در مبداء از $\mathbb{C}$ است $(m>0)$

b) نشان دهید برای هر $c \neq 0$ نگاشت هوموتوپیی $z \mapsto z+z^m+c$ لفشیتزی است؛ با m نقطه ناوردا که ؟ موضعی هستند.

c) نشان دهید نگاشت $z \to z+z^{-m}$ دارای نقاط ناوردا با عدد لفشیتزی $-m$ در مبداء $\mathbb{C}$ است. $(m \geq 0)$

۱۱. نشان دهید مشخصه اویلر گروه متعامد (یا هر گروه لی فشرده) صفر است. [**راهنمایی:** ضرب چپ به وسیله عضو $A \neq I$ روی $\mathrm{O}(n)$ را در نظر بگیرید.

بخش ۵.۳ میدانهای برداری و قضیه پوآنکاره-هوپف



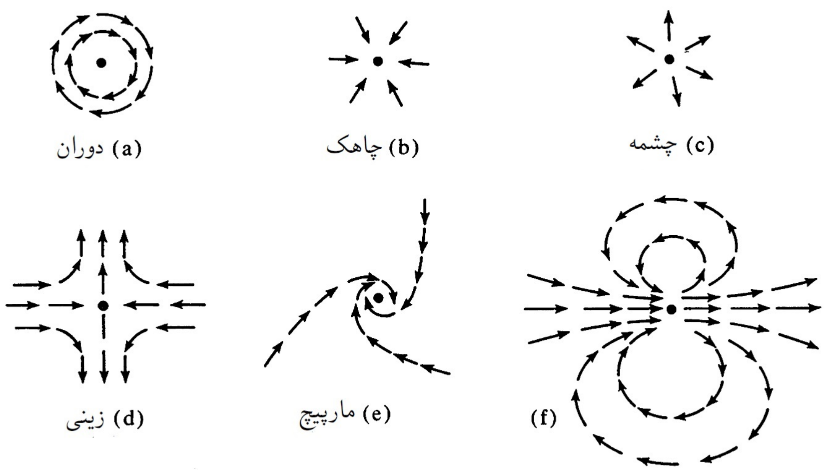
شکل ۱۸.۳:

میدان برداری روی منیفلد X در $\mathbb{R}^N$ عبارت است از نسبت دادن هموار یک بردار مماس بر X در هر نقطه x (یعنی، یک نگاشت هموار $\vec{v}: X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ به گونه‌ای که برای هر x داشته باشیم $(\vec{v}(X) \in T_x(X)$. از نقطه نظر موضعی، ممکن است $\vec{v}$ رفتارهای جالبی تنها در حول و حوش صفرهایش (یعنی نقاطی چون $x \in X$ که $\vec{v}(x)=0$) دارد. چرا که اگر $\vec{v}(x) \neq 0$، آنگاه $\vec{v}$ از نظر اندازه و جهت در نزدیکی x تقریباً ناوردا است (شکل ۱۸.۳). با این وجود، هنگامیکه $\vec{v}(x)=0$، جهت $\vec{v}$ ممکن است به طور اساسی در هر همسایگی کوچک از x تغییر نماید. میدان برداری می‌تواند حول x بچرخد؛ دارای چشمه [۳] باشد، مرکز یک چاهک [۴] باشد و یا حتی زینی [۵] باشد؛ ممکن است همچون مارپیچ به سمت x رفته و یا از آن دور شود؛ یا ممکن است الگوی پیچیده‌تری نیز را بسازد (شکل ۱۹.۳).

سعی کنید چند نمونه از میدانهای برداری بر صفحات فشرده مختلف را ترسم کنیم؛ برای این منظور، ابتدا الگوها را حول صفر مشخص نموده و سپس مابقی میدان را به نرمی به آن اضافه می‌کنیم. به سرعت درخواهید یافت که توپولوژی منیفلد زمینه، محدودیتهایی را ترسیم ایجاد می‌نماید. برای مثال، روی کره می‌توان به آسانی میدانهایی که دقیقاً دو صفر دارند را پدید آورد، بسته به اینکه که هر کدام از صفرها یک چشمه، چاهک، مارپیچ و یا چرخش باشد. میدانهای با یک صفر که از جنس (f) باشند نیز به سرعت پیدا می‌شوند. هیچ کدام از این الگوها روی چنبره وجود ندارد. به طور مشابه، الگوهایی چون یک نقطه زینی همراه با یک چشمه که روی چنبره قابل قبول هستند، را نمی‌توان روی کره آورد.

[۳] Source
[۴] Sink
[۵] Saddle

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱۹.۳:

به خصوص، چنبره دارای میدان برداری می‌باشد که هیچ صفری ندارد، در صورتیکه چنین حالتی برای کره غیر ممکن است (اگر سر شما به شکل یک دونات بود آنگاه می‌توانستید موهایتان را طوری شانه کنید که هیچ نقطه برهنه‌ای نماند.)

برای بررسی رابطه میان $\vec{v}$ و توپولوژی X، بایستی تغییر جهتی $\vec{v}$ حول صفرهایش را اندازه بگیریم. ابتدا فرض کنید که در $\mathbb{R}^k$ هستیم و $\vec{v}$ یک صفر تنها شده در مبداء دارد. جهت $\vec{v}$ در یک نقطه چون x چیزی جز بردار واحد $\frac{\vec{v}(x)}{|\vec{v}(x)|}$ نیست. لذا تغییر جهتی $\vec{v}$ حول 0 توسط نگاشت $x \longmapsto \frac{\vec{v}(x)}{|\vec{v}(x)|}$ که هر کره کوچک چون S_ϵ حول 0 را بتوی S^{k-1} می‌برد، اندازه گرفته می‌شود. شعاع ϵ را به قدر کافی کوچک انتخاب می‌کنیم به گونه‌ای که $\vec{v}$ هیچ صفری در S_ϵ نداشته باشد مگر در مبداء آنگاه شاخص $\vec{v}$ در 0، $\operatorname{ind}_0(\vec{v})$ را درجهٔ این نگاشت جهتی $S_\epsilon \longrightarrow {}^{k-1}$ تعریف می‌نماییم. طبق معمول، خود شعاع اهمیتی ندارد چرا که اگر ϵ' نیز مناسب باشد آنگاه $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ به شاخص محدود شده توسط دو کره گسترش می‌یابد.

در حالت دوبعدی، $\operatorname{ind}_0(\vec{v})$ به سادگی در واقع تعداد مرتبه‌ای که وقتی در جهت عکس عقربه‌های ساعت حول دایره می‌چرخیم، $\vec{v}$ کاملاً می‌چرخد را می‌شمارد؛ با این وجود، چرخش $\vec{v}$ در جهت عکس عقربه‌های ساعت $+1$ را اضافه می‌کند، در حالیکه در چرخش عقربه‌های ساعت -1 را شرکت می‌دهد. شاخصهای ۵ میدان برداری آمده در شکل (۱۹.۳) را محاسبه کرده و با جوابهای داده شده مقایسه کنید $(a:+1,\ b:+1,\ c:+1,\ d:-1,\ e:+1,\ f:+2)$.

در تعریف اندلیس میدانهای برداری در صفرهای تنها شده روی منیفلدهای با جهت دلخواه، از پیمایش موضعی استفاده می‌کنیم. اگر به منیفلد به صورت موضعی نگاه کنیم، اساساً قسمتی از یک فضای اقلیدسی را می‌بینیم، لذا به سادگی شاخص را می‌خوانیم گویی که فضای برداری، فضایی اقلیدسی است - البته مشکل کار آن است که لازم است ناوردا نماییم که با هر پیمایش موضعی که برای مشاهده استفاده کنیم یک شاخص به دست می‌آید.

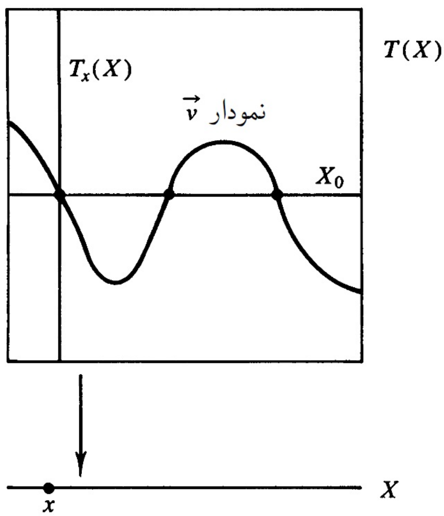
صریحاً، فرض کنید که $\phi : U \longrightarrow X$ یک پیمایش موضعی باشد که مبداء $\mathbb{R}^k$ را به x می‌برد. یک

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

روش طبیعی برای عقب کشیدن میدان برداری $\vec{v}$ از X وجود دارد که یک میدان برداری روی مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^k$ می‌سازد. برای هر $u \in U$ مشتق $d\phi_u$ یک ایزومورفیسم بین $\mathbb{R}^k$ با فضای مماس X در $\phi(u)$ می‌باشد. ما به سادگی میدان برداری پولبک را که با $\phi^*\vec{v}$ نمایش می‌دهیم به این صورت تعریف می‌کنیم که، به هر u برداری را که متناظر با مقدار $\vec{v}$ در $\phi(u)$ است نسبت می‌دهیم:

$$\phi^*\vec{v}(u) = d\phi_u^{-1}\vec{v}(\phi(u))$$

حال اگر $\vec{v}$ صفر تنها در x داشته باشد آنگاه $\phi^*\vec{v}$ یک صفر تنها در مبداء خواهد داشت و تعریف می‌کنیم $\mathrm{ind}_x(\vec{v}) = \mathrm{ind}_0(\phi^*\vec{v})$. ما بعداً به واسطه یک ترفند نشان خواهیم داد که این تعریف مستقل از انتخاب پیمایش موضعی است و در اینجا از اثبات خسته کننده آن خودداری می‌کنیم. طبیعت محدودیت توپولوژیکی روی $\vec{v}$ به واسطه قضیه با ارزش زیر توضیح داده می‌شود.



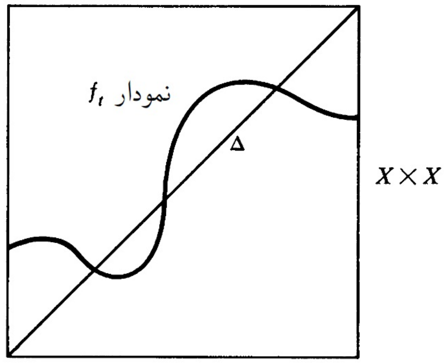
شکل ۳.۲۰:

قضیه شاخص پوانکاره - هوپف. هرگاه $\vec{v}$ یک میدان برداری هموار روی منیفلد جهتدار و فشرده X باشد تعداد صفرهای آن حداکثر متناهی است آنگاه جمع کلی شاخص‌های $\vec{v}$ برابر با مشخصه اویلری X خواهد بود.

با علم به قضیه لفشیتز [۶]، انتظار پدیدار شدن مشخصه اویلری داشتیم چرا که میدانهای برداری بیشتر از دسته پیکان‌ها روی X هستند، در واقع آنها دستورالعملی برای حرکت می‌باشند. وقتی به عکس یک میدان برداری نگاه کنیم، یک جریان سیال هموار را در راستای خطوط میدان درمی‌یابیم. هر ذرهٔ روی سطح ظاهراً مسیرس را طی می‌کند که همیشه مماس بر میدان است. وجود ریاضی چنین جریانی با حل معادلات

[۶] Lefschetz Theorem

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۲۱.۳:

دیفرانسیل و تکنیک‌های خاص نشان داده می‌شود که در حیطه بحث ما نیست. اما از نظر مفهومی، فرض کنیم هر ذره برای مدت t روی یک منیفلد فشرده X جریان داشته باشد. در این صورت یک انتقال h_t برای X به دست می‌آید که اگر t به قدر کافی کوچک باشد نقاط ناوردا آن دقیقاً صفرهای $\vec{v}$ خواهند بود. رفتار جریان حول این نقاط و لذا الگوی $\vec{v}$ حول صفرهایش به وسیله عدد لفشیتز h_t هدایت می‌شود. اما همینکه زمان سپری شده به صفر تحلیل می‌یابد انتقال جریان h_t به صورت هموتوپیک به انتقال همانی مبدل می‌شود. لذا عدد لفشیتز مربوط به جریان جیزی جز همان مشخصه اویلر X نیست.

از همین دست آورد در اثبات قضیه پوآنکاره–هوپف استفاده می‌کنیم به جز آنکه به جای پرداختن به معادلات دیفرانسیل خودمان را به تقریب ناپخته مسأله به فرم جریان راضی می‌کنیم. تنها خاصیت حساس و بحرانی جریان آن است که «در زمان صفر بر میدان مماس است» یک شرط نسبتاً ضعیف. فرض کنید $\{f_t\}$ یک خانواده هموتوپ از انتقال‌های X باشند و همانی $f_0 = 0$. می‌گوییم $\{f_t\}$ در زمان صفر بر میدان برداری $\vec{v}$ مماس است هرگاه برای هر ناوردا $x \in X$، بردار $\vec{v}(x)$ بر منحنی $f_t(x)$ در زمان صفر مماس باشد. محاسبات موضعی پایه اقلیدسی را اجرا می‌کنیم، پس فرض کنید که $\vec{v}$ و نگاشت‌های f_t در یک همسایگی U از مبداء $\mathbb{R}^k$ تعریف شده باشند.

گزاره. فرض کنید، برای $f \neq 0$، نگاشت‌های f_t هیچ نقطه ثابتی به جز مبداء در U نداشته باشند و میدان برداری $\vec{v}$ تنها در صفر ناپدید شود. هرگاه $\{f_t\}$ در زمان صفر بر $\vec{v}$ مماس باشد آنگاه عدد لفشیتز موضعی مربوط به هر f_t در صفر برابر با شاخص $\vec{v}$ خواهد بود.

$$\mathrm{ind}_0(\vec{v}) = L_0(f_t)$$

برای محاسبه رابطه فوق کافی است قضیه اساسی حساب را به کار برید.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

لم. هرگاه $g(t)$ یک تابع هموار از t باشد آنگاه یک تابع هموار دیگر چون $r(t)$ وجود دارد قسمی که

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + t^2 r(t)$$

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم که $g(t) = g(0) + tq(t)$. t را ثابت فرض کرده و تعریف می‌کنیم $h(s) = g(ts)$. آنگاه $h'(s) = tg'(ts)$، لذا

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(s)ds = t\int_0^1 g'(ts)ds.$$

از آنجا که $h(0) = g(0)$ و $h(1) = g(t)$، تنها کافی است که قرار دهیم

$$q(t) = \int_0^1 g'(ts)ds.$$

توجه داشته باشید که

$$q(0) = \int_0^1 g'(0)ds = g'(0).$$

حال، همین بحث را برای تابع q به کار برده و به دست می‌آوریم $q(t) = q(0) + tr(t)$، لذا

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + t^2 r(t)$$

و برهان تمام است. $\square$

توجه داشته باشید که اگر g به طور هموار به متغیر دیگری نیز بستگی داشته باشد آنگاه تابع r که با فرمول انتگرالی تعریف شد، خود به طور هموار با متغیرهای دیگری تغییر می‌کند.
برهان: برای راحتی فرض کنیم برای هر t، $f_t'(x)$ مشخص کننده برداری باشد که مختصات آن مشتقات مختصات $f_t(x)$ متناظر در زمان t است؛ بنابراین مماس بودن $\{f_t\}$ بر $\vec{v}$ یعنی $f_0'(x) = \vec{v}$. x را ثابت گرفته و لم را برای هر کدام از مختص‌های تابع $f_t(x)$ به کار بندید. در این صورت یک تابع برداری-مقدار هموار $r(t,x)$ به دست می‌آوریم که

$$f_t(x) = f_0(x) + tf_0'(x) + t^2 r(t,x).$$

یا

$$f_t(x) = x + t\vec{v}(x) + t^2 r(t,x).$$

با تغییر جا داریم

$$f_t(x) - x = t\vec{v}(x) + t^2 r(t,x).$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

بنا بر فرض

$$\text{اگر}\ t \neq 0 \quad \text{آنگاه} \quad f_t(x) - x \neq 0$$

لذا می‌توانیم دو طرف تساوی را بر فرم آن تقسیم کنیم.

$$\frac{f_t(x) - x}{|f_t(x) - x|} = \frac{\vec{v}(x) + tr(t, x)}{|\vec{v}(x) + tr(t, x)|}$$

حال اجازه می‌دهیم x روی کره S_ϵ تغییر کند. درجهٔ نگاشت سمت چپ بنا بر تعریف برابر $L_0(f_t)$ است. در سمت راست یک خانواده هموتوپ از نگاشت‌های $S_\epsilon \longrightarrow {}^{k-1}$ را داریم که حتی در $t = 0$ نیز تعریف شده است. در واقع، در $t = 0$ سمت راست به نگاشت $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ تبدیل می‌شود که درجه آن $\operatorname{ind}_0(\vec{v})$ است. از آنجا که درجه یک ناوردا هموتوپ است داریم

$$L_0(f_t) = \operatorname{ind}_0(\vec{v})$$

و برهان تمام است. □

یکی از نتایج فوری گزاره فوق، این است که شاخص تحت دیفئومورفیسم‌ها ثابت می‌ماند. ابتدا توجه داشته باشید که هر میدان برداری $\vec{v}$ روی $\mathbb{R}^k$ خانواده‌های مناسب $\{f_t\}$ متعددی دارد که در زمان صفر بر آن مماس هستند. جریان موضعی، یک مثال از این نوع است و تقریب مرتبه اول آن $f_t(x) = x + t\vec{v}(x)$ نیز چنین است. حال فرض کنید $\vec{v}$ یک صفر تنها در مبداء داشته باشد و همچنین فرض کنید ϕ یک دیفئومورفیسم از همسایگی‌های صفر باشد که $\phi(0) = 0$. در این صورت قاعده زنجیره‌ای معین آن است که اگر $\{f_t\}$ در زمان صفر مماس بر $\vec{v}$ باشد، آنگاه $\{\phi^{-1} \circ f_t \circ \phi\}$ مماس بر $\phi^* \vec{v}$ خواهد بود. اما ϕ تنها یک پارامتره‌سازی مجدد از یک همسایگی مبداء است و ما می‌دانیم که اعداد لفشیتز موضعی به پیمایش بستگی ندارد؛ لذا

$$\operatorname{ind}_0(\vec{v}) = L_0(f_t) = L_0(\phi^{-1} \circ f_t \circ \phi) = \operatorname{ind}_0(\phi^* \vec{v}),$$

همانطور که ادعا کرده بودیم.

این مشاهده همچنین ثابت می‌نماید که شاخص روی منیفلدهای دلخواه خوش‌تعریف است. چون اگر ϕ_1 و ϕ_2 دو پارامتره‌سازی موضعی برای یک همسایگی از نقطه ثابت تنها $x \in X$ باشد، داریم

$$\phi_1 * \vec{v} = (\phi_2^{-1} \circ \phi_1)^* [\phi_2^* \vec{v}].$$

نتیجتاً

$$\operatorname{ind}_0(\phi_1^* \vec{v}) = \operatorname{ind}_0(\phi_2^* \vec{v})$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

اثبات قضیه پوانکاره - هوپف: آنچه از اثبات قضیه پوآنکاره–هوپف باقیمانده یک ساختن است. هرگاه میدان برداری $\vec{v}$ تعریف شده بر منیفلد فشرده X داده شده باشد، ما یک خانواده از نگاشت‌های f_t که در زمان صفر مماس بر $\vec{v}$ بوده و دو خاصیت مهم زیر را دارند، تولید می‌کنیم: نقاط ثابت هر کدام از f_t ها برای $t > 0$ دقیقاً صفرهای $\vec{v}$ باشند و f_0 نگاشت همانی برای X باشد. حال از گزاره نتیجه می‌شود که جمع شاخصهای $\vec{v}$ برابر جمع اعداد لفشیتز موضعی مربوط به f_t است–که همان عدد لفشیتز کلی است. اما از آنجا که f_0 همانی است $L(f_t) = L(f_0)$ مشخصه اویلری X است. قضیه $\epsilon-$ همسایگی را به خاطر آورید. فرض کنیم X^ϵ مؤید مجموعه نقاطی در $\mathbb{R}^k$ باشد که فاصله‌شان تا X کمتر از ϵ است. آنگاه اگر عدد مثبت ϵ به قدر کافی کوچک باشد، یک نگاشت تصویر نرمال $\pi : X^\epsilon \longrightarrow X$ که به نگاشت همانی X محدود می‌شود. حال از آنجا که X فشرده است تمامی نقاط $x + t\vec{v}(x)$ در درون X^ϵ قرار خواهند گرفت، مادامی که پارامتر t به قدر کافی کوچک بوده و $x \in X$. بنابراین می‌توانیم تعریف کنیم

$$f_t(x) = \pi[x + t\vec{v}(x)].$$

اگر x ثابت باشد مماس بر منحنی $f_t(x)$ در زمان صفر $d\pi_x\vec{v}(x)$ خواهد بود. اما از آنجا که π بر X همانی است، $d\pi_x$ همانی بر $T_x(X)$ است. لذا $d\pi_x\vec{v}(x) = \vec{v}(x)$ و $\{f_t\}$ در $t = 0$ بر $\vec{v}$ مماس است.

بدیهی است که صفرهای $\vec{v}$ نقاط ثابت f_t هستند، کافی است نشان دهیم هیچ نقطه ثابت دیگری وجود ندارد. به خاطر آورید که، آنطور که ما ساختیم، π یک نگاشت تصویر نرمال است؛ اگر $\pi(Z) = X$ آنگاه $Z - X$ بایستی برداری عمود بر X باشد. اما آنگاه اگر x یک نقطه ثابت $f_t(x)$ باشد، $\pi(x + t\vec{v}(x))$ پس $t\vec{v}(x) \perp T_x(X)$. از آنجا که $\vec{v}(x) \in T_x(X)$، در نتیجه تنها زمانی می‌تواند عمود باشد که برابر با 0 باشد. □

اگر نقطه نظر مساعد در نظریه مقطع، به مسأله بنگریم می‌توانیم دید بازتر و لذا ساده‌تری از پوآنکاره–هوپف را به دست آوریم. قبلاً خاطر نشان کردیم (تمرین ۶، فصل ۱، قسمت ۸) که یک میدان برداری $\vec{v}$ روی X یک برش عرضی از کلاف مماس [۷] $T(X)$ است، لذا $\Gamma_{\vec{v}}$ یک کپی از X در $T(X)$ است. میدان برداری «متحد با صفر» [۸] X_0 از X را به طور طبیعی در $T(X)$ قرار می‌دهد. بنابراین صفرهای $\vec{v}$ دقیقاً متناظر با نقاط $X_0 \cap \Gamma_{\vec{v}}$ هستند. حال دیگر برای اندازه‌گیری کلی صفرهای $\vec{v}$ نیازی به الهام نیست؛ جواب بایستی $I(X_0, \Gamma_{\vec{v}})$ باشد. (شکل ۲۰.۳) اگر x_0 در شکل (۲۰.۳) به سمت بالا چرخانده شود، تشخیص خواهید داد که یک کپی بسیار کوچک شکل (۲۱.۳) است که در آن $\{f_t\}$ در زمان صفر بر $\vec{v}$ مماس است. برای آنکه اثباتی خالی از لفشیتز برای قضیه پوآنکاره–هوپف به دست آوریم بایستی: (۱) از تشابه عکسها استفاده کرده تا نشان دهیم $I(X_0, \Gamma_{\vec{v}})$ برابر $I(\Delta, \Gamma_{f_t})$ می‌باشد، که ناوردایی هموتوپی $I(\Delta, \Delta) = \chi(X)$ است؛ و $I(X_0, \Gamma_{\vec{v}})$ را موضعی سازیم–یعنی بعد از آنکه صفرهای $\vec{v}$ تنها شدند، $\mathrm{ind}_x(\vec{v})$ را به عنوان نقش هر یک از x ها بشناسیم.

این روند در تمرین ۶ تا ۹ دنبال شده است.

تمرینات

---
[۷] Tangent Bandle
[۸] Identically Zero

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۱. فرض کنید $\vec{v}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $\vec{v}(x,y)=(x,y)$ باشد. نشان دهید که خانوادهٔ دیفئومورفیسم‌های $h_t:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ تعریف شده با ضابطه $h_t(z)=tz$، جریان متناظر با $\vec{v}$ است. یعنی اینکه اگر هر z ای را ثابت نگه داریم آنگاه منحنی $t\longmapsto h_t(z)$ همیشه مماس بر $\vec{v}$ است؛ بردار مماس آن در هر زمان t برابر $\vec{v}(h_t(z))$ است. شکلی از $\vec{v}$ و منحنی‌های جریان آن بکشید. $\mathrm{ind}_0(\vec{v})$ را با $L_0(h_t)$ مقایسه کنید.

۲. حال قرار دهید $\vec{v}(x,y)=(-y,x)$. نشان دهید که انتقال‌های جریان نگاشت‌های دوران خطی $h_t:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ با ماتریس $\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$ است. $\vec{v}$ و منحنی‌های جریان آن را بکشید. همچنین $\mathrm{ind}_0(\vec{v})$ را با $L_0(h_t)$ مقایسه کنید.

۳*. به یاد آورید که یک میدان برداری $\vec{v}$ روی یک منیفلد X در $\mathbb{R}^N$ نوع خاصی از نگاشت $\vec{v}:X\longrightarrow\mathbb{R}^N$ است. نشان دهید که در یک صفر x، مشتق $d\vec{v}_x:T_x(X)\longrightarrow\mathbb{R}^N$ در واقع $T_x(X)$ را بتوی خودش می‌نگارد. [**راهنمایی:** اگر $X=\mathbb{R}^N\times\{0\}$ آنگاه ادعا بدیهی است. اما می‌توانید مسأله را با یک پیمایش مناسب حول x در $\mathbb{R}^N$ به این حالت تقلیل دهید.]

۴. فرض کنید $f_t:X\to X$ نگاشت ساخته شده در برهان پوآنکاره–هوپف باشد،

$$f_t(x)=\pi(x+t\vec{v}(x))$$

ثابت کنید که در یک صفر x از $\vec{v}$، $d(f_t)_x=I-t\,d\vec{v}_x$ به عنوان نگاشت‌های خطی از $T_x(X)$ بتوی خودش می‌باشد. (I همانی است) [**راهنمایی:** π محدود شده به X، همانی است پس مورد $(d\pi)_x$ روی $T_x(X)$ چه می‌توان گفت؟]

۵*. یک نقطه صفر x از $\vec{v}$ در صورتی ناتباهیده [۹] گفته می‌شود که $d\vec{v}_x:T_x(X)\longrightarrow T_x(X)$ دوسویی باشد. نشان دهید که صفرهای ناتباهیده تنها هستند. همچنین نشان دهید که در یک صفر ناتباهیده چون x، $\mathrm{ind}_x(\vec{v})=+1$ اگر ایزومورفیسم $d\vec{v}_x$ جهت را حفظ کند و $\mathrm{ind}_x(\vec{v})=-1$ اگر $d\vec{v}_x$ جهت را عکس کند. [**راهنمایی:** از تمرین ۴ نتیجه بگیرید که x یک صفر ناتباهیده $\vec{v}$ است اگر و تنها اگر یک نقطه ثابت لفشیتز f_t باشد.]

۶. یک میدان برداری $\vec{v}$ روی X به طور طبیعی یک نگاشت برشی عرضی $f_{\vec{N}}:X\to T(X)$ را به صورت $f_{\vec{v}}(x)=(x,\vec{v}(x))$ تعریف می‌کند.

الف) نشان دهید که $f_{\vec{v}}$ یک نشاننده [۱۰] است، لذا تصویر آن $X_{\vec{v}}$ یک زیرمنیفلد از $T(X)$ می‌باشد که دیفئومورف با X است.

ب) فضای مماسی $X_{\vec{v}}$ در یک نقطه $(x,\vec{v}(x))$ چیست؟

ج) به یاد داشته باشید که صفرهای $\vec{v}$ متناظر با اشتراک نقاط $X_{\vec{v}}$ با $X_0=\{(x,0)\}$ هستند. بررسی کنید که x یک صفر ناتباهیده است از $\vec{v}$ اگر و تنها اگر $X_0 \pitchfork X_{\vec{v}}$ در $(x,0)$.

[۹] Nondegenerate
[۱۰] Embedding

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

د) اگر x یک صفر ناتباهیده از $\vec{v}$ باشد، نشان دهید که $\mathrm{ind}_x(\vec{v})$ عدد جهت نقطه $(x,0)$ در $X_0 \cap X_{\vec{v}}$ است.

۰۷ صفرهای میدانهای برداری می‌توانند توسط اغتشاش [11] جداً شوند، درست مقل نقاط ثابت نگاشت‌ها. فرض کنید x یک صفر $\vec{v}$ بوده و U یک همسایگی x در X باشد که هیچ صفر دیگری از $\vec{v}$ را شامل نمی‌شود. ثابت کنید که یک میدان برداری $\vec{v}_1$ وجود دارد به قسمی که در خارج از زیر مجموعه فشرده‌ای از U با $\vec{v}$ برابر است و در داخل U تنها ناتباهیدگی دارد. [**راهنمایی:** مسأله را به حالتی که در آن U یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^k$ است تقلیل دهید. تابع ρ را انتخاب کنید که در نزدیکی x، 1 است و خارج زیر مجموعه فشرده U، 0 می‌باشد و تعریف کنید

$$\vec{v}_1(z) = \vec{v}(z) + \rho(z)\vec{a} \ , \ \ \vec{a} \in \mathbb{R}^k.$$

نشان دهید که اگر $\vec{a}$ به قدر کافی کوچک باشد، $\vec{v}_1$ تنها در جایی می‌تواند صفر باشد که $\rho \equiv 1$. حال بخواهید که $-\vec{a}$ یک مقدار منظم از $\vec{v}$ باشد.]

۰۸ در تمرین ۱۸، فصل ۲، قسمت ۳ نشان دادید که یک دیفئومورفیسم از همسایگی X_0 در $T(X)$ به همسایگی از قطر Δ در $X \times X$ وجود دارد، که دیفئومورفیسم طبیعی $\Delta \longrightarrow X_0$ تعریف شده توسط $(x,0) \longmapsto (x,x)$ را گسترش می‌دهد. از این نتیجه بگیرید که $I(X_0, X_0) = I(\Delta, \Delta)$.

۰۹ نشان دهید که اگر $\vec{v}$ یک میدان برداری دلخواه روی X باشد آنگاه $X_{\vec{v}}$ می‌تواند به طور هموار به X_0 تغییر شکل یابد. از این نتیجه و سه مسأله قبلی استفاده کنید تا اثباتی برای قضیه پوآنکاره-هوپف بسازید.

۰۱۰ فرض کنید V یک زیر فضای برداری $\mathbb{R}^N$ باشد و همچنین فرض کنید $v \in V$. یک تابع خطی ψ_v را روی V با ضابطه $\psi_v(w) = v.w$ تعریف کنید. ثابت کنید که نگاشت $v \mapsto \psi_v$ یک ایزومورفیسم بین V و فضای دوگان [12] V^* است.

۰۱۱ فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار روی منیفلد X در $\mathbb{R}^N$ باشد. برای هر $x \in X$، $df_x : T_x(X) \to R$ یک تابع خطی روی $T_x(X)$ تعریف می‌کند. با توجه به تمرین ۱۰، می‌توان نوشت $df_x(W) = \vec{v}(X).W$ برای برداری مثل $\vec{v}(x) \in T_x(X)$. این میدان برداری $\vec{v}$ میدان گرادیان [13] f نامیده می‌شود، $\vec{v} = \vec{\mathrm{grad}}(f)$. در حالت خاص که $X = \mathbb{R}^k$، نشان دهید که گرادیان نمایش ساده مختصات استاندارد را دارد:

$$\mathrm{grad}(f) := \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big).$$

۰۱۲ فرض کنید $\phi : U \to X$ یک پیمایش موضعی برای $k-$ منیفلد X در $\mathbb{R}^N$ باشد و میدان برداری $\phi^*\mathrm{grad}(f)$ روی U را زمانی محاسبه می‌کنیم که f یک تابع روی X باشد. فرض

---

[11] Peturbations
[12] Dual Spuee
[13] Gradient Field

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

کنید $\{e_1,\cdots,e_k\}$ یک پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^k$ باشد و تابع هموار g_{i_j} روی U را با فرمول $g_{ij}(u) = d\phi_u(e_i).d\phi_u(e_j)$ تعریف کنید. حال ثابت کنید که

$$\phi^*\text{grad}(f) = \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial(f\circ\phi)}{\partial x_1} g_{ij} e_j$$

به عنوان یک میدان برداری روی U.

۱۳. ا ز تمرین قبل نتیجه بگیرید که اگر f یک تابع هموار روی X باشد آنگاه $\text{grad}(f)$ یک میدان برداری هموار خواهد بود.

۱۴. الف) ثابت کنید که صفرهای میدان برداری $\text{grad}(f)$ همان نقاط بحرانی f هستند. [**راهنمایی:** توابع g_{i_j} در تمرین ۱۲ هیچ وقت روی U ناپدید نمی‌شود].

ب) ثابت کنید که x یک صفر ناتباهیده $\text{grad}(f)$ است اگر و تنها اگر یک نقطه بحرانی ناتباهیده f باشد. [**راهنمایی:** از تمرین ۱۲ استفاده کرده و نشان دهید که اگر $\phi(u)$ یک صفر $\text{grad}(f)$ باشد آنگاه مشتق $\phi^*\text{grad}(f)$ در u دارای ماتریسی است که از ضرب هسیان [۱۴] $f\circ g$ در نقطه u با ماتریس $(g_{ij}(u))$ حاصل می‌شود. نشان دهید که $(g_{ij}(u))$ معین مثبت است و از آن نتیجه بگیرید که $\det(g_{ij}(u)) > 0$].

۱۵. برای تمرین بیشتر، از تمرین ۱۴ استفاده کرده و نشان دهید که روی منیفلد X یک میدان برداری چنان موجود است که تنها صفرهای تنها دارد: (برای اثبات مستقیم تمرین ۱۱ فصل ۳ بخش ۶ را ببینید.)

۱۶. اگر x یک نقطه بحرانی ناتباهیده تابع f روی X باشد، $\text{ind}_x(f)$ را به عنوان علامت دترمینان هسیان f در x، که در سیستم مختصاتی دلخواهی محاسبه شده، تعریف می‌کنیم. نشان دهید که این تعریف خوشتعریف است (به عبارت دیگر در هر سیستم مختصاتی یکسان در می‌آید). [**راهنمایی:** اگر از تمرین ۱۴ استفاده کنید چیزی برای محاسبه باقی نمی‌ماند.]

۱۷. فرض کنید X یک منیفلد فشرده و f یک تابع مورس [۱۵] روی X باشد. ثابت کنید که جمع شاخص‌های f در نقاط ثابتش برابر مشخصه اویلری X است.

۱۸. فرض کنید $\vec{v}$ یک میدان برداری با صفرهای تنها $\mathbb{R}^k$ باشد W یک زیرمنیفلد K بعدی فشرده و مرزدار از $\mathbb{R}^k$ باشد. همچنین فرض کنید که $\vec{v}$ در ∂W هیچ‌گاه صفر نشود. ثابت کنید که جمع شاخص‌های $\vec{v}$ در صفرهایی از آن که داخل W هستند برابر با درجه نگاشت

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} : \partial W \to {}^k$$

است. [**راهنمایی:** گوی‌های حول صفرها را پاک کنید و از بحث معمول استفاده نمایید.]

[۱۴] Hessian
[۱۵] Morse Function

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۱۹. الف) میدانهای برداری روی $\mathbb{R}^k$ را می‌توان به سادگی توسط نگاشت‌های $\mathbb{R}^k$ بتوی خودش مشخص کرد. خصوصاً نگاشت $z \mapsto z^m$ روی $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$؛ d میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌کند که یک صفر در مبداء دارد. بررسی کنید که شاخص این صفر برابر m است.

ب) بررسی کنید که شاخص میدان برداری $z \mapsto \bar{z}^m$ روی $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$، در مبداء برابر $-m$ است. [**راهنمایی:** $z \to \bar{z}$ یک انعکاس جهت برگردان از $\mathbb{R}^2$ است.]

بخش ۶.۳ قضیه درجه هوپف

نظریه مقطع نشان داده است که چگونه ممکن است نگاشتهای $f : X \to Y$ اصطلاحا n به یک را بفهمیم، با این معنی که، چنین نگاشتی n نقطه از X را به نقطه‌ای از Y می‌نگارد. هر چند نگاشتهای معدودی وجود دارند که رفتارشان آنقدر ساده باشد که بتوان آنها را به واسطه یک عدد صحیح، به طریقی طبیعی حس نمود، تنها لازم است یاد بگیریم که چگونه درست بشمریم تا بتوانیم مفهوم نگاشت های هموار کلی را در بیاوریم. چرا که اگر با استفاده از جهت به حسابرسی بپردازیم آنگاه حداقل تقریباً تمامی نقاط y «n مرتبه ضربه می‌خورند» (در اینجا خودمان را به منیفلدهای جهتدار، فشرده، همبند با بعد یکسان محدود می‌کنیم.) حال عدد صحیح $n-$ درجه $f-$ دارای خاصیت ناوردا هموتوپی است: برای تمامی دفوماسیون‌های [۱۶] هموتوپ f یکسان است. در این بخش ثابت خواهید کرد که وقتی Y یک کره باشد، این عدد صحیح ساده کاملاً رابطه هموتوپی را مشخص می‌کند. به عبارت دیگر دو نگاشت $f_0, f_1 : X \to \mathbb{S}^k$ هموتوپ هستند اگر و تنها اگر دارای درجه یکسان باشند. قضیه مربوطه، منسوب به هوپف است و به واسطه مجموعه‌ای از تمرین‌ها ثابت می‌شود. از آنجاییکه این تمرین‌ها در مقایسه با تمرین‌های قسمت جردن-براور پیچیده‌تر می‌باشند، اشارات مفصلی در پایان فصل آورده شده است. تکنیکها بسیار مشابه روش‌های بخش‌های قبلی است لذا این قسمت مرور خوبی خواهد بود.

برای اثبات به مفاهیم توپولوژیک جدیدی نیازمندیم. منظور از ایزوتوپی [۱۷] همومورفیسمی است که در آن هر نگاشت h_t دیفئومورفیسم باشد. دو دیفئومورفیسم در صورتی ایزوتوپ هستند که آنها را توسط یک ایزوتوپی بتوان به هم مرتب ساخت. یک ایزوتوپی در صورتی با محمل فشرده [۱۸] است که نگاشتهای h_t همگی در خارج یک مجموعهٔ فشرده ثابتی برابر نگاشت همانی باشند.

لم ایزوتوپی هرگاه نقاط دلخواه z و y در منیفلد همبند Y مفروض باشند یک دیفئومورفیسم $h : Y \longrightarrow Y$ وجود دارد به قسمی که $h(y) = z$ و h ایزوتوپ با همانی است. بیشتر آنکه، ایزوتوپی را می‌توان به طور فشرده حمایت شده انتخاب کرد.

برهان: اگر عبارت، برای دو نقطه y و z درست باشد، آنها را ایزوتوپ خواهیم خواند. نسبتاً آشکار است که این یک رابطه هم‌ارزی روی Y تعریف می‌کند. نشان خواهیم داد که هر یک از کلاس‌های هم‌ارزی

[۱۶] Deformation
[۱۷] Isotopy
[۱۸] Compactly Supported

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

یک مجموعه باز هستند. آنگاه Y اجتماع مجزا از مجموعه‌های باز است لذا نتیجه می‌شود که یک کلاس هم‌ارزی بیشتر وجود نداشته که این قضیه را ثابت می‌کند.

برای اینکه ثابت کنیم کلاس‌های هم‌ارزی باز هستند، ایزوتوپی h_t روی $\mathbb{R}^k$ را چنان می‌سازیم که h_0 همانی باشد، هر h_t خارج از گوی کوچک مشخصی حول صفر همانی بوده و $h_1(0)$ نقطه دلخواهی به قدر کافی نزدیک به صفر باشد. شما به آسانی می‌توانید اثبات را از آنجا به پایان برسانید: همسایگی از y را پارامتره ساخته و از h_t برای سر دادن y داخل یک گوی کوچک استفاده کنید؛ هر h_t به طور هموار به یک دیفئومورفیسم Y گسترش می‌یابد اگر آنرا خارج گوی برابر همانی تعریف کنید. لذا y با هر نقطه به قدر کافی نزدیک، هموتوپ است که این باز بودن را ثابت می‌کند.

ابتدا h_t را روی $\mathbb{R}^1$ بسازید. برای هر $\epsilon > 0$ داده شده فرض کنید ρ یک تابع هموار باشد که خارج $(-\epsilon, \epsilon)$ ناپدید می‌گردد و در صفر برابر است. اگر $z \in \mathbb{R}^1$ تعریف کنید

$$h_t(x) = x + t\rho(x)z$$

آنگاه $h_t(x) = x$ اگر $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ یا اگر $t = 0$ و $z = h_1(0)$. آیا h_t یک ایزوتوپی است؟

مشتقات را محاسبه کنید: $h'_t = 1 + t\rho'(x)z$. از آنجا که $|\rho'(x)|$ بیرون یک مجموعه فشرده ناپدید می‌شود، بایستی کراندار باشد. بنابراین مادامی که $|Z|$ به قدر کافی کوچک باشد، $|t\rho'(x)z| < 1$ برای تمام $t \in [0, 1]$ و $x \in \mathbb{R}^1$ لذا $h'_t(x) > 0$. نتیجتاً h_t اکیداً صعودی است و قضیه تابع معکوس مؤید آنست که تابع وارون آن نیز هموار است. لذا هر h_t یم دیفئومورفیسم از $\mathbb{R}^1$ است مادامی که z به قدر کافی به صفر نزدیک باشد.

در $\mathbb{R}^k$ نیز به سادگی این برهان را به کار می‌بندیم. هر نقطه‌ای در $\mathbb{R}^k$ که داده شده باشد می‌توانیم محورهای مختصات را دوران دهیم تا نقطه روی محور اول بیفتد. پس اگر بنویسیم $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{k-1}$، تنها کافیست ایزوتوپی مطلوب را که مبداء را به نقاط نزدیک به فرم $(z, 0)$ می‌برد، نمایش می‌دهیم. تابع σ بر $\mathbb{R}^{k-1}$ را طوری انتخاب کنید که در مبداء 1 و خارج گوی کوچکی به شعاع δ صفر باشد. h_t روی $\mathbb{R}^k$ را این طور تعریف کنید: برای $(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{k-1}$ قرار دهید

$$h_t(x, y) = (x + t\sigma(y)p(x)z, y)$$

در این صورت $h_t(x, y) = (x, y)$ مگر آنکه $|x| < \epsilon$، $|y| < \delta$ و $t > 0$ باشد. همچنین $h_1(0, 0) = (z, 0)$ همانطور که می‌خواستیم. بایستی نشان دهیم که وقتی $|z|$ کوچک است هر h_t یک دیفئومرفیسم از $\mathbb{R}^k$ است. یک به یک و پوشاست چرا که وقتی $|z|$ کوچک است روی هر خط ثابت $y =$ یک دیفئومورفیسم القاء می‌کند. بیشتر آنکه مشتق آن در نقطه $(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{k-1}$ دارای ماتریس زیر است

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 + t\sigma(y)\rho'(x)z & a_1, \cdots, a_{k-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & I \\ 0 & \end{array}\right)$$

که در آن I ماتریس $k-1$ در $k-1$ همانی است. وقتی $|z|$ کوچک است گوشه سمت چپ همیشه مثبت است لذا ماتریس همیشه دارای دترمینان مثبت است. حال قضیه تابع معکوس مؤید آنست که معکوس h_t هموار است. $\square$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

نتیجه: فرض کنید Y یک منیفلد همبند با بعد بیشتر از 1 باشد و $y_1, \cdots, y_n$ و $z_1, \cdots, z_n$ دو مجموعه از نقاط تنها در Y باشند. آنگاه یک دیفئومورفیسم $h : Y \longrightarrow Y$ وجود دارد که ایزوتوپ با همانی است و داریم:

$$h(y_1) = z_1, \cdots, h(y_n) = z_n$$

به علاوه، ایزوتوپی را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که به طور فشرده حمایت شده باشد.

برهان: به استقراء بحث می‌کنیم؛ قضیه برای حالت $n = 1$ بدهی است. فرض کنید نتیجه برای $n - 1$ برقرار باشد و یک ایزوتوپی به طور فشرده حمایت شده از منیفلد سوراخ شده $Y - \{y_n, z_n\}$ چنان بیابید که $h'_1(y_i) = z_i$ برای $i < n$ و h'_0 برابر با همانی می‌باشد.
در اینجا از فرض $\dim Y > 1$ استفاده می‌کنیم که تضمین می‌کند منیفلد سوراخ شده همبند است (اثبات؟ از همبندی کمانی استفاده کنید). از آنجا که در این فراهم سازی به طور فشرده حمایت شده، نتیجه می‌دهد که h'_t همگی در نزدیکی y_n و z_n برابر همانی هستند. پس آنها به دیفئومورفیسمهایی از Y که آن دو نقطه را ثابت می‌کنند گسترش می‌یابند.
به طور مشابه، با به کار بردن قضیه برای منیفلد سوراخ شده $Y - \{y_1, \cdots, y_{n-1}, z_1, \cdots, z_{n-1}\}$ ایزوتوپی به طور فشرده حمایت شدهٔ h_t روی Y را چنان به دست می‌آوریم که $h''(y_n) = z_n$ و همانی $= h''_0$. و تمامی h''_t نقاط y_i و z_i را برای $i < n$ ثابت می‌کنند. پس $h_t = h''_t \circ h'_t$ همان ایزوتوپی مطلوب است. $\square$

حال اثبات قضیه هوپف را شروع می‌کنیم. در اینجا مناسب است که صریحاً مفهوم عدد تاب [۱۹] را مجدداً معرفی کنیم چرا که خواهید دید این تعریف در تعاریف اعداد لفشیتز و شاخصهای میدانهای برداری خود را نشان می‌دهد. اگر X یک منیفلد ℓ بعدی جهتدار فشرده باشد و $f : X \to \mathbb{R}^{\ell+1}$ یک تابع هموار آنگاه عدد ثابت f حول هر نقطه چون $z \in \mathbb{R}\ell + 1 - f(X)$ همانطور که در قضیه به پیمانه ۲، آوردیم تعریف می‌شود. به سهولت نگاشت جهتی $u : X \longrightarrow \mathbb{S}^\ell$ را با $u(x) = \frac{f(x)-z}{|f(x)-z|}$ بسازید و قرار دهید $W(f, z) = \deg(u)$. اولین تمرین نشان می‌دهد که دیفئومورفیسم‌های موضعی چگونه تاب می‌خورند و دومین تمرین از این اطلاعات برای شمردن پیشنگاره‌ها استفاده می‌کند.

۱. فرض کنید $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ نگاشت هموار تعریف شده‌ای بر مجموعه U از $\mathbb{R}^k$ باشد و x نیز یک نقطه منظم باشد که $f(x) = z$ شود. فرض کنید B گوی بسته به اندازه کافی کوچک به مرکز x باشد و $\partial f : \partial B \longrightarrow \mathbb{R}^k$ را تحدید f به مرز B تعریف کنید. ثابت کنید $W(\partial f, z) = +1$ اگر f جهت را در x حفظ کند و $W(\partial f, z) = -1$ اگر f جهت را در x عکس کند.

۲. فرض کنید $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^k$ نگاشت هموار تعریف شده‌ای بر گوی بسته B در $\mathbb{R}^k$ باشد. فرض کنید z یک مقدار منظم از f بوده که هیچ پیشنگاره روی مرز کره ∂B ندارد و $\partial f : \partial B \longrightarrow \mathbb{R}^k$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که تعداد پیشنگاره‌های z که با جهت مرسوم شمرده می‌شوند برابر عدد تاب $W(\partial f, z)$ است.

تمرین سر راست ذیل، یکی دیگر از موارد لازم در بحث کلی ما می‌باشد:

---
[۱۹] Winding Number

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۳. فرض کنید B یک گوی بسته در $\mathbb{R}^k$ و $f:\mathbb{R}^k-\mathrm{Int}(B)\longrightarrow Y$ یک نگاشت هموار تعریف شده خارج گوی باز $\mathrm{Int}(B)$ باشد. نشان دهید که اگر تحدید $\partial f:\partial B\longrightarrow Y$ هموتوپ با یک ثابت باشد، آنگاه f قابل گسترش به یک نگاشت هموار خواهد بود که از تمام $\mathbb{R}^k$ به توی Y است.

با این ابزار، حال توجه خود را به سمت قضیه هوپف معطوف می‌داریم. اولین قدم ساختن حالت خاصی از قضیه استو نهایتاً نشان خواهیم داد که کل قضیه به سادگی از حالت خاص آن نتیجه می‌شود.

حالت خاص $^{\ell}$ $f:\mathbb{S}^\ell\longrightarrow$ با درجه صفر، هموتوپ با یک نگاشت ثابت است.

۴. بررسی کنید که حالت خاص نتیجه زیر را به ما می‌دهد.

نتیجه: هر نگاشت هموار $f:\mathbb{S}^\ell\longrightarrow\mathbb{R}^{\ell+1}-\{0\}$ با عدد تاب صفر نسبت به مبداء با یک ناوردا هموتوپ است.

حالت خاص را به استقراء حساب کنید. برای $\ell=1$ شما قضیه هوپف را قبلاً به دست آوردید، در تمرین ۹ بخش ۳. لذا فرض کنید که حالت خاص برای $\ell=k-1$ درست باشد و آنرا به $\ell=k$ گسترش دهید. تمرین بعدی که قلب بحث استقرائی است، از نتیجه فوق استفاده می‌کند تا نگلشتها را از مبداء دور کند.

۵. فرض کنید $f:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^k$ یک نگاشت هموار با مقدار منظم صفر باشد. فرض کنید $f^{-1}(0)$ متناهی بوده و تعداد نقاط پیشنگاره در $f^{-1}(0)$ صفر باشد، البته وقتی که با جهت مرسوم شمرده شوند. با فرض حالت خاص در $k-1$، ثابت کنید که یک نگاشت $g:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^k-\{0\}$ چنان وجود دارد که در خارج یک مجموعه فشرده، $g=f$.

یک نکته قابل تذکر آنست که از آنجا که f و g خارج از یک مجموعه فشرده برابر هستند، هموتوپی $tf+(1-t)g$ خارج محدوده فشرده، ثابت است. با توجه به این امر، شما تنها لازم است روش مناسبی برای تقلیل $\mathbb{S}^k$ به $\mathbb{R}^k$ بیابید تا حالت خاص را کامل کرده باشید.

۶. حالت خاص را برای بعد k بسازید.

قضیه هوپف به صورت کاملش اساساً خود حالت خاصی از قضیه بعدی است.

قضیه گسترش: فرض کنید W یک منیفلد $k+1$ بعدی، جهتدار، همبند فشرده مرزدار باشد و $f:\partial W\to\mathbb{S}^k$ یک نگاشت هموار. ثابت کنید f قابل گسترش به نگاشت به طور سرتاسری تعریف شده $F:W\longrightarrow\mathbb{S}^k$ که $\partial F=f$ است، می‌باشد اگر و تنها اگر درجه f صفر باشد.

قضیه گسترش[۲۰] نیز از حالت خاصی از آن نتیجه می‌شود اما قبل از آن بایستی لمی که مربوط به بدیهی بودن توپولوژیک فضای اقلیدسی است، را ثابت کنید.

[۲۰] Extension theorem

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۷. فرض کنید W منیفلد فشرده مرزدار باشد و $f:\partial W\longrightarrow\mathbb{R}^{k+1}$ یک نگاشت هموار دلخواه باشد. ثابت کنید که f قابل گسترش به تمام W است.

۸. قضیه گسترش را ثابت کنید.

۹. نتیجه بگیرید:

قضیه درجه هوپف: دو نگاشت از یک k منیفلد X فشرده و همبند و جهتدار X بتوی $\mathbb{S}^k$ هوتوپیک هستند اگر و تنها اگر دارای درجات یکسان باشند.

به عنوان توضیح قضیه هوپف، ما به یک سؤال کلاسیک جواب خواهیم داد کدام منیفلد فشرده دارای میدان‌های برداری نامرئی هستند. قضیه پوانکره-هوپف یک شرط لازم را فراهم می‌کند، که مشخصه اویلر را بی‌ارزش می‌کند. ما نشان خواهیم داد که این شرط، تنها شرط است.

قضیه: یک منیفلد فشرده، همبند، جهتدار X شامل یک میدان برداری همه جا ناصفر است اگر و فقط اگر مشخصه اویلر آن صفر باشد.

ایده اثبات این است که بحث جداسازی معرفی شده در بخش لیفشیتز را برعکس کنیم و صفرهای تعدادی میدان برداری دلخواه را ادغام کنیم. در این صورت، قضیه درجه هوپف در حالت اقلیدسی ظاهر می‌شود.

۱۰. فرض کنید $\vec{V}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}$ با تعدادی متناهی صفر باشد. و فرض کنید که مجموع شاخص‌های صفرهای آن صفر باشد نشان دهید که یک میدان برداری وجود دارد که فاقد صفر بوده و در بیرون یک مجموعه فشرده برابر با $\vec{v}$ می‌باشد.

۱۱. نشان دهید روی هر منیفلد فشرده X یک میدان برداری وجود دارد و با صفرهای متناهی.

۱۲. در حقیقت اگر U هر مجموعه بازی در منیفلد فشرده و همبند X باشد، وجود یک میدان برداری که تنها دارای تعداد متناهی صفر است که تمام آنها در U قرار دارد را بررسی کنید.

۱۳. قضیه را ثابت کنید.

راهنمایی: نکته در ارتباط با هر مورد از تمرینات بالا با شمارهٔ متناظر فهرست شده است:

۱. برای سادگی قرار دهید، $z=0=x$ و $A=df_0$. با استفاده از مرتب بودن A دوسویی است. بنویسید $f(x)=Ax+\epsilon(x)$ که $\frac{\epsilon(x)}{|x|}\to 0$ هنگامی که $x\to 0$. نشان دهید که $W(A,0)=W(\partial f,0)$ اگر β به اندازه کافی کوچک باشد در این صورت از لم ایزوتوپی خطی استفاده کنید. (بخش ۴ صفحه ؟؟.)

۲. گوی‌های کوچک B_i را حول هر نقطه پیشنگاره بکشید. و نشان دهید که درجه نگاشت جهتی u روی مرز $' := B-UB_i$ صفر است. (u به کل B' گسترش می‌یابد) حال از تمرین ۱ استفاده کنید.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۳. فرض کنید B به مرکز 0 باشد و قرار دهید $g_t \partial B \to Y$ یک هموتوپی باشد که $g_1 = \partial f$ و ثابت $g_0 =$. در این صورت یک گسترش پیوسته از f روی B توسط $f(tx) = f_t(x)$ داده می‌شود، $x \in \partial B$ و $t \in [0,1]$. برای گسترش هموار فقط از این و ترفند در تمرین ۱ از فصل ۱ بخش ۶ استفاده کنید.

۴. فرض کنید درجه $f/|f|$ برابر صفر است، بنابراین $f/|f|$ با یک نگاشت ثابت هوموتوپ است. و به عنوان نگاشتهای بتوی $\mathbb{R}^{k+1} - \{0\}$ ، f و $f/|f|$ هوموتوپ هستند.

۵. یک گوی بزرگ B حول مبداء انتخاب کنید که شامل تمام $f^{-1}(0)$ باشد از تمرین ۲ استفاده کنید و نشان دهید که $\partial f : \partial B \to \mathbb{R}^k - \{0\}$ دارای عدد چرخشی صفر است. فرض استقراء ایجاب می‌کند که $\partial f : \partial B \to \mathbb{R}^k - \{0\}$ با نگاشت ناوردا هوموتوپ است. بنابراین تمرین ۳ اثبات را کامل می‌کند.

۶. مقادیر مرتب a و b را برای f انتخاب کنید. لم ایزوتوپی را برای $\mathbb{S}^- f^{-1}(b)$ برای پیدا کردن یک همسایگی باز U از $f^{-1}(a)$ که با $\mathbb{R}^k$ دیفئومورفیک است، بکار برید. و در شرط $b \notin f(U)$ صدق می‌کند. فرض کنید $\alpha : \mathbb{R}^k \to U$ یک دیفئومورفیسم باشد و یک دیفئومورفیسم دیگر $\rho : \mathbb{S}^k - \{b\} \to \mathbb{R}^k$ انتخاب کنید که α را به صفر می‌نگارد. حال تمرین ۵ را برای $\beta \circ f \circ \alpha$ بکار ببرید تا یک نگاشت $g : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^k - \{b\}$ پیدا کنید که با f دیفئومورف است. ولی از آنجایی که $\mathbb{S}^-\{b\}$ با $\mathbb{R}^k$ دیفئومورف بوده و در نتیجه، قابل انقباض است، بنابراین g با نگاشتی ثابت هوموتوپ خواهد بود.

۷. فرض کنید W در $\mathbb{R}^N$. قرار دارد قضیه $\epsilon-$همسایگی را برای ∂W استفاده کنید و f را به یک نگاشت هموار F که روی یک همسایگی U از ∂W در $\mathbb{R}^N$ تعریف می‌شود توسیع دهید. فرض کنید ρ یک نگاشت هموار باشد که برابر 1 در ∂W و برابر صفر بیرون یک زیرمجموعه فشرده U باشد. حال f را به کل $\mathbb{R}^N$ با مساوی قرار دادن برابر ρF روی U و صفر در بیرون از U، گسترش دهید.

۸. ابتدا از تمرین ۷ استفاده نموده و f را به نگاشت $F : W \to \mathbb{R}^{x+1}$ توسیع دهید. با استفاده از قضیه توسیع تراگردی، می‌توانیم فرض کنیم که صفر یک مقدار منظم F باشد. از لم ایزوتوپی برای جایگزینی مجموعه نقاط متناهی $F^{-1}\{0\}$ در درون زیر مجموعه u از $\mathrm{Int}(W)$ که با $\mathbb{R}^{x+1}$ دیفئومورقیک است استفاده کنید فرض کنید B یک گوی در U باشد که شامل $F^{-1}\{0\}$ است و نشان دهید که $\partial F : \partial B \to \mathbb{R}^{k+1} - \{0\}$ دارای عدد چرخشی صفر است که متناظر با مبداء است. توجه کنید که $\frac{F}{|F|}$ به منیفلد $W' = W - \mathrm{Int} B$ توسیع پیدا می‌کند. ولی در حال حاضر می‌دانیم که درجه آن روی $\partial W'$ برابر صفر است. حال از نتیجه برای حالت خاص استفاده کنید.

۹. $f_0, f_1 : X \to \mathbb{S}^k$ را در نظر گفته و قرار دهید: $W = X \times I$. نگاشت $f : \partial W \to \mathbb{S}^k$ را تعریف کنید که روی $X \times \{0\}$ برابر f_0 و روی $X \times \{1\}$ برابر f_1 باشد. حال از تمرین ۸ استفاده شود.

۱۰. با تمرین ۵ مقایسه کنید.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۱۱. فرض کنید $X \subset \mathbb{R}^k$ و $T_x(X)$ نمایشگر کلاف مماس باشد. نگاشت $\rho : X \times \mathbb{R}^N \to T(X)$، را به این صورت تعریف می‌کنیم، که $\rho(x,v)$ تصویر قائم بردار v روی $T_x(X)$ باشد. بررسی کنید که آیا ρ سابمرشن است و آنگاه قضیه مقطع را با $Y = T(X)$ و $S = \mathbb{R}^N$ و $Z = X \times \{0\}$ به کار ببرید. نتیجه بگیرید که برای بعضی از vها فضای برداری $x \mapsto \rho(x,v)$ با $X \times \{0\}$ متقاطع است. (اثباتی جایگزین که بر تصویر گرادیان میدان برداری استوار است، در تمرین ۱۵ بخش ۵ آورده شده است).

۱۲. از نتیجه لم ایزوتوپی استفاده کنید. (یک فرآیند برای کشیدن میدان‌های برداری به عقب توسط دیفئومورفیسم‌ها که در بخش ۵ تعریف شده‌اند).

۱۳. از تمرین ۱۱ و ۱۲ استفاده کنید که یک میدان برداری روی X به دست آورید که دارای صفرهای متناهی است. که همه در داخل مجموعه باز U قرار دارند که با $\mathbb{R}^k$ ایزومورفیک هستند. قضیه پوآنکاره–هوپف ایجاب می‌کند که مجموع شاخصها برابر صفر است پس میدان برداری را در $\mathbb{R}^k$ پولبد می‌برید و از تمرین ۱۰ استفاده کنید.

بخش ۷.۳ مشخصه اویلر و مثلث‌بندی

با اینکه تعریف اصلی از مشخصه اویلر به عنوان عدد خوداشتراکی بسیار عجیب ظاهر شد، متوجه شده‌ایم که آن اطلاعات توپولوژیکی پایه‌ای را بیان می‌کند. میدانهای برداری و نگاشتهایی که با یک منیفلد فشرده و جهتدار مطابقت داده شده‌اند که توسط مشخصه اویلر آن محدود شده است. هنوز این اثبات واقعاً غیر ابتدایی‌تر از آن است که شما انتظار دارید. با این وجود برای دیدن این نکته ما باید منیفلدها را از یک زاویه کاملاً متفاوت ببینیم.

کل راه فهمیدن آناتومی یک شیء تقسیم کردن آن به بخشهای مشابه است. سپس، امتحان کردن راهی که بخش‌ها را به هم متصل می‌کند. شاید یک سطح را به چند ضلعی‌ها تقسیم کنیم.

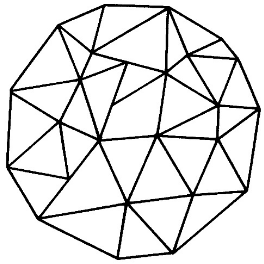
این بخش کاملاً غیر معمول و شهودی است هیچ نیازی به بیان شرایط تکنیکی برای تقسیم‌بندیهای مجاز برای X نیست. به طور ساده X را به تکه‌هایی تقسیم کنید که شبیه کپی‌هایی از صفحه استاندارد چند ضلعی‌ها، مثلث‌ها، مربع‌ها و ... می‌باشد. (شکل ۲۳.۳ را ببینید.) فرآیند متداول این است که فقط از مثلثها استفاده کنیم بنابراین این چنین تقسیم‌بندی‌هایی مثلث‌بندی نامیده می‌شود.

حال فقط بخشها را بشمارید فرض کنید F تعداد صورت‌های چند ضلعی‌ها باشد E تعداد یالها و V تعداد رأسها در سطح چهارگوش مورد نظر باشد. اگر شما چند مثالی در کره را تمرین کنید شما متوجه می‌شوید که رابطه زیر درست است:

$$F - E + V = 2$$

ناوردایی این فرمول متغیر، خاصیتی که تنها کره بستگی داشته باشد نیست. در واقع، اگر یک سطح فشرده را مثلث‌بندی کنیم، آنگاه $F - E + V$ همیشه برابر شاخص ثابت سطح خواهد بود، که در واقع همان χ شاخص اویلر سطح می‌باشد.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۲۲.۳: کره چندوجهی

با اینکه اثبات این قضیه با این امکانات، مشکل نیست، وارد جزئیات بیشتر نمی‌شویم. بسیار ساده است که خودتان را متقاعد کنید که یک میدان برداری روی X موجود است که دارای یک چشمه در هر سطح چند ضلعی است و یک نقطه زینی به هر یال و یک چاهک در هر رأس داشته و هیچ صفر دیگری ندارد. از آنجایی که شاخصهای چشمه، زینی و چاهک بترتیب $+1$ و -1 و $+1$ است، به کمک قضیه پوآنکاره–هوپف، داریم $F-E+V=\chi(X)$.

ایده ساخت این شاخص، چنین است. ابتدا صفرهای مناسب روی X را جایگزین نموده و سپس آنها را جداسازی می‌کنیم. واضح است که مابقی میدان برداری، بطور هموار قابل جایگزین شدن می‌باشد. بررسی مشکل روی اضلاع مثلث می‌توان متقاعد کننده باشد (به شکل ۲۳.۳ توجه گردد).

اگر X ، kبعدی باشد، از تعمیم k بعدی به چند ضلعیها استفاده می‌شود، و مشخصه اویلر را به صورت مجموع متناوب زیر بدست می‌آوریم:

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\ .\ (\text{تعداد سطوح } j \text{ بعدی})$$

نکته قابل تامل این است که به چه میزان این ناوردای قدرتمند و در عین حال ساده می‌باشد!

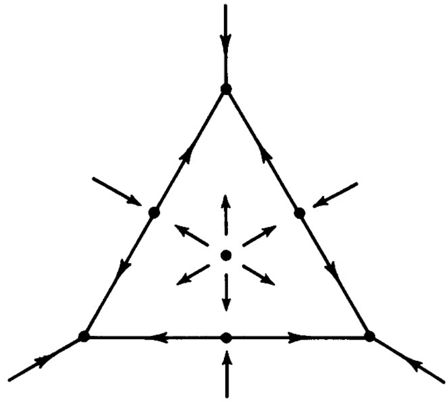
تمرینات

۱. نشان دهید که اگر مجموع اویلر $F-E+V$ برابر مشخصه اویلر برای مثلث‌بندی است، که واقعاً از مثلثها تشکیل شده است. سپس ثابت کنید که این رابطه برای تعمیمات به چند ضلعیهای دلخواه نیز درست است.

۲. شاخص اویلر کره $\mathbb{S}^2$ و تیوپ را با مثلث‌بندی مناسب محاسبه کنید.

۳. رویهٔ از جنس k را به صورت کره‌ای در نظر بگیرید که k تا تیوب به آن دوخته شده است. مشخصهٔ اولرِ آن را با استفاده از یک مثلث‌بندی مناسب، محاسبه کنید. [راهنمایی: با حذف $2k$ ناحیهٔ گرد مجزا از سطح کره آغاز کنید؛ مجموع اولر چه تغییری می‌کند؟ استوانهٔ بستهٔ $\mathbb{S}^1\times[0;1]$ را مثلثبندی نموده و تحقیق کنید که مجموع اویلر آن صفر است. حال به کمک کپی‌های این استوانه،

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۲۳.۳:

هر دو تا از حفره‌های ایجاد شده را بهم بدوزید، و نشان دهید که مجموع اویلر کرهٔ سوراخ شده با این کار هیچ تغییری نمی‌کند.]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

فصل ۴

انتگرالگیری بر منیفلدها

بخش ۱.۴ مقدمه

منیفلدها را تا کنون تنها از نقطه نظر حساب دیفرانسیل بررسی کرده‌ایم. فصل قبل زمینهٔ لازم برای ورود به بحث حساب انتگرال را فراهم نمود. در بخش‌های بعد که در آنها ابزار لازم برای کارهای بعدی را فراهم‌می‌کنیم، احتمالاً خواننده می‌پرسد که ارتباط آنها با بخش‌های قبلی چیست. خوشبختانه، در پایان فصل، این نگرانی به سرعت رفع می‌شود. با این حال، طرح مثال اولیهٔ ذیل می‌تواند مفید باشد.

گیریم $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$ یک چند جمله‌ای مختلط بر Ω فشرده و هموار در صفحه است که مرزش هیچ ریشه‌ای از p را در برندارد. در بخش ۳ از فصل قبل نشان داده شد که تعداد صفرهای p در داخل Ω، با احتساب تکرار آنها، با درجهٔ نگاشت

$$\frac{p}{|p|} : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

برابر است. قضیه‌ای معروف از نظریهٔ توابع مختلط، به نام اصل آرگومان، اذعان می‌دارد که این تعداد را به کمک انتگرال

$$\oint_{\partial\Omega} d(\arg p)$$

نیز می‌توان محاسبه نمود. فهم دقیق این رابطه در درک مفهوم کلی‌ای که به دنبال آن هستیم، لازم نیست. مهم این است که تعداد صفرها را هم با محاسبهٔ عدد مقطع و هم با محاسبهٔ انتگرال، می‌شود به دست آورد.

قضایای شبیه اصل آرگومان که در توپولوژی دیفرانسیل مطرح می‌شوند، نتیجهٔ هندسی قضیه‌ای کلی به نام قضیهٔ استوکس هستند. انواع با بعد پایین‌تر قضیهٔ استوکس را در حساب دیفرانسیل و انتگرال دیده‌اید:

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۱. دومین قضیه اساسی حسابان:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

۲. **قضیهٔ گرین** در صفحه:

$$\oint_{\partial\Omega} f_1\,dx + f_2\,dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dxdy.$$

۳. **قضیهٔ دیورژانس** در ۳ فضا:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F})\,dV = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}.\vec{n}\,dA, \qquad \vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$$

۴. **قضیهٔ کلاسیک استوکس** در ۳ فضا:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz \;&=\; \iint_{S} \vec{n}.\mathrm{Curl}\,(\vec{F})\,dA \\ &= \iint_{S} \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\wedge dy.\end{aligned}$$

مشروط به آنکه کمی از توابع تحلیلی مختلط بدانید، اصل آرگومان را به کمک قضیهٔ گرین عملاً می‌توان استنتاج کرد.

فرمول‌های بالا وجه مشترکی دارند؛ در همهٔ آنها چگونگی محاسبهٔ انتگرالی بر یک ناحیهٔ کراندار به کمک انتگرالی بر مرز آن بیان می‌شود. جال، است بدانیم که این روابط به حالت منیفلدهای دلخواه چگونه تعمیم می‌یابند، با این حالت از ابتدا چگونگی آن بدیهی به نظر نمی‌رسد. قسمتی از مسأله به تعبیر عبارات بینهایت کوچک نظیر $f_1\,dx$ یا $(\partial f_2/\partial x - \partial f_1/\partial y)\,dxdy$ برمی‌گردد. در کتب حسابان مقدماتی بحث چندانی در خصوص این گونه عبارات نمی‌شود. با این حال بایستی صور با بعد بالای آن به طور کامل بیان گردد. براین اساس، در بخش بعد به بیان مباحث جبری لازم برای تعریف و کار کردن با بینهایت کوچک‌ها را مطرح می‌کنیم. در بخش ۳ اشیایی مناسب برای انتگرال‌گیری به نام فرمهای دیفرانسیل را مطرح می‌کنیم.

به نظر می‌رسد که تعبیری شهودی از فرمهای دیفرانسیل در آغاز می‌تواند مفید باشد. چرا که دانشجو تنها با درک مفهوم مذکور و خواص جبری آن قادر به درک مبانی طبیعی نظریهٔ انتگرال‌گیری خواهد بود. چنانچه قضیهٔ استوکس را به زبان فرمهای دیفرانسیل ترجمه کنیم، صورتی کوتاه و ساده پیدا می‌کند. و در حقیقت، سادگی ملاک اصلی برای تمام مفاهیم در هر نظریه است. این طور نیست!؟ چرا فیزیک‌دانان قوانین مکانیک را بر اساس اندازهٔ حرکت و انرژی بیان می‌کنند، نه بر حسب توابعی دلخواه از جرم و سرعت؟ چرا که مفاهیم مذکور تا حد زیادی باعث بیان ساده‌تر معادلات اساسی می‌شوند و این امر موجب درک ساده‌تر نظریه می‌گردد.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

بخش ۱.۴ بخش ۲: جبر خارجی

به منظور بیان مبانی جبری لازم برای طرح مفهوم فرم دیفرانسیل، با تعمیم‌های به خصوص از مفهوم فضای دوگان یک فضای برداری V آغاز می‌کنیم. $p-$ تانسور بر V، تابعی است با مقدار T بر حاصلضرب دکارتی

$$V^p := \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{تا } p}$$

که نسبت به هر یک از متغیرهایش خطی است. به بیان دیگر، چند خطی است. یعنی، اگر همهٔ متغیرها به جز j امین آنها را ثابت بگیریم، در این صورت بایستی

$$T(v_1, \cdots, v_j + av'_j, \cdots, v_p) = T(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_p) + a\,T(v_1, \cdots, v'_j, \cdots, v_p).$$

به ویژه، $1-$تانسور به معنی تابعک خطی بر V است. ضرب داخلی بر $\mathbb{R}^k$ یک $2-$تانسور آشنا است. همچنین، دترمینان یک $k-$تانسور معروف بر $\mathbb{R}^k$ است. به ازاء هر k بردار مفروض $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^k$، آنها را در یک ماتریس $k \times k$ به شکل

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$$

می‌توان مرتب نمود و در این صورت دترمینان این ماتریس، نسبت به بردارهای سطری‌اش چند خطی است؛ آن را با نماد $\det(v_1, \cdots, v_k)$ نشان می‌دهیم.

چون مضارب اسکالر و نیز مجموع توابع چند خطی، همچنان چند خطی است، گردایهٔ همهٔ $p-$تانسورها یک فضای برداری $\mathcal{T}^p(V^*)$ است. توجه شود که $\mathcal{T}^1(V^*) = V^*$. تانسورها را به سادگی می‌توان در هم ضرب نمود؛ اگر T و S به ترتیب $p-$ تانسور و $q-$تانسور باشند، $(p+q)-$تانسور $T \otimes S$ را به صورت

$$T \otimes S\,(v_1, \cdots, v_p, v_{p+1}, \cdots, v_{p+q}) = T(v_1, \cdots, v_p)\, S\,(v_{p+1}, \cdots, v_{p+q}),$$

تعریف می‌کنیم. $T \otimes S$ را حاصلضرب تانسوری T در S می‌گوییم. توجه شود که ضرب تانسوری، تعویضپذیر نیست، یعنی $T \otimes S \neq S \otimes T$. اما شرکتپذیری و توزیعپذیری آن نسبت به جمع به راحتی قابل تحقیق است.

ضرب تانسوری روشی برای ساخت $\mathcal{T}^p(V^*)$ از روی V^* را فراهم می‌سازد.

قضیه: گیریم $\{\varphi_1, \cdots \varphi\}$ پایه‌ای برای V^* باشد. در این صورت، مجموعهٔ $p-$تانسورهای $\{\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_p} | 0 \leq i_1, \cdots, i_p \leq k\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}^p(V^*)$ تشکیل می‌دهد. در نتیجه $\mathcal{T}^p(V^*) = k^p$.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

برهان: از قرداد دادن ذیل تنها در این برهان استفاده می‌کنیم : اگر $I(i_1, \cdots, i_p)$ دنباله‌ای از اعداد صحیح بین 1 تا k باشد، تعریف می‌کنیم

$$\varphi_I := \varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_p}$$

گیریم $\{v_1, \cdots v_k\}$ پایهٔ دوگان در V باشد، و V_I را دنبالهٔ $(v_{i_1}, \cdots, v_{i_p})$ تعریف کنیم. بنا به تعریف، اگر I و J دو نمونه از چنین دنباله‌های اندیسی باشند، آنگاه در صورتی $\varphi_I(v_J)$ برابر یک است که $I = J$ و در غیر این صورت صفر است. از چند خطی بودن، نتیجه می‌گردد که شرط لازم و کافی برای برابری $p-$تانسورهای T و S آن است که به ازاء هر دنبالهٔ اندیسی Jای داشته باشیم $T(v_J) = S(v_J)$. بنابراین، اگر T مفروض باشد، آنگاه بایستی

$$S = \sum_I T(v_I)\varphi_I$$

خود T باشد؛ در نتیجه، مجموعهٔ $\{\varphi_I\}$ کل $\mathcal{T}^p(V^*)$ را تولید می‌کند. به علاوه، φ_Iها مستقلند، زیرا اگر $S = \sum_I a_I \varphi_i = 0$، آنگاه به ازاء هر Jای $0 = S(v_J) = a_J$. □

تانسور T در صورتی نوسانی است که هرگاه دو متغیر از آن با هم تعویض شوند، علامت T تغییر کند. یعنی،

$$T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_p) = -T(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_p),$$

همهٔ $1-$تانسورها به طور خودکار، نوسانی هستند. دترمینان نیز نوسانی است، ولی ضرب داخلی نوسانی نیست. لازم است این شرط را به نحو دقیق‌تری بیان کنیم. گیریم S_p نمایشگر گروه همهٔ جایگشت‌های اعداد 1 تا p است. یادآور می‌شویم که جایگشت $\pi \in S_p$ را در صورتی زوج یا فرد می‌گوییم که به ترتیب، به صورت تعدادی زوج یا فرد ترانهش قابل بیان باشد. گیریم $(-1)^\pi$ بسته به اینکه π زوج یا فرد باشد، به ترتیب برابر $+1$ یا -1 باشد. به ازاء هر $p-$تانسور T و هر $\pi \in S_p$، $p-$تانسور T^π را به صورت

$$T^\pi(v_1, \cdots, v_p) := T(v_{\pi(1)}, \cdots, v_{\pi(p)})$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت روشن است که در مورد $p-$تانسورهای نوسانی داریم

$$T^\pi = (-1)^\pi T \qquad \text{به ازاء هر } \pi \in S_p \text{ ای}$$

توجه شود که همواره $(T^\pi)^\sigma = T^{\pi\circ\sigma}$.

روندی استاندارد برای تبدیل تانسورهای معمولی به تانسورهای نوسانی وجود دارد، زیرا به وضوح $(-1)^\sigma(-1)^\pi = (-1)^{\pi\circ\sigma}$ و بنابراین

$$[\mathrm{Alt}\,(T)]^\sigma = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}(-1)^\pi (T^\pi)^\sigma = \frac{1}{p!}(-1)^\sigma \sum_{\pi\in S_p}(-1)^{\pi\circ\sigma} T^{\pi\circ\sigma}.$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

توجه شود که اگر A از قبل نوسانی باشد، آنگاه $\mathrm{Alt}\,(T) = T$، چرا که هر یک از عوامل $(-1)^\pi T^\pi$ با خود T برابرند و تعداد آنها برابر $p!$ جایگشت در S_p است.

چون مجموع و مضرب اسکالر توابع نوسانی، نوسانی است، $p-$ تانسورهای نوسانی یک زیر فضای برداری $\wedge^p(V^*)$ از $\mathcal{T}^p(V^*)$ را تشکیل می‌دهند. متأسفانه، حاصلضرب تانسوری در تانسور نوسانی، نوسانی نیست. در اینجا عملگر Alt به کار می‌آید. اگر $T \in \wedge^p(V^*)$ و $S \in \wedge^q(V^*)$، حاصلضرب گوه‌ای $T \wedge S \in \wedge^{p+q}(V^*)$ را به صورت $\mathrm{Alt}\,(T \otimes S)$ تعریف می‌کنیم.[1] چون عملگر Alt خطی است، ضرب گوه‌ای نسبت به جمع و ضرب اسکالر توزیع‌پذیر است؛ اما اثبات شرکت‌پذیری آن کمی کار دارد، به حکم زیر نیاز داریم.

لم: اگر $\mathrm{Alt}(T) = 0$، آنگاه $T \wedge S = 0 = S \wedge T$.

برهان: S_{p+q} یک کپی از S_p را در بردارد - یعنی، زیر گروه G متشکل از همهٔ جایگشت‌های از $\{1, 2, \cdots, p+q\}$ به خودش که $p+1$، $\cdots, p+q$ را ثابت نگاه می‌دارند. اکنون باید با تحدید جایگشت‌های $\pi \in G$ به مجموعهٔ $\{1, \cdots, p\}$، اعضاء $\pi' \in S_p$ را می‌توان به دست آورد. توجه شود که $(T \otimes S)^\pi = T^{\pi'} \otimes S$ و $(-1)^\pi = (-1)^{\pi'}$. بنابراین

$$\sum_{\pi \in G} (-1)^\pi (T \otimes S)^\pi = \left\{ \sum_{\pi' \in S_p} (-1)^{\pi'} T^{\pi'} \right\} \otimes S = \mathrm{Alt}\,(T) \otimes S = 0$$

حال، زیر گروه G، گروه S_{p+q} را به اجتماعی مجزا از همدسته‌های راست

$$G \circ \sigma = \{\pi \circ \sigma \,|\, \pi \in G\}$$

افراز می‌کند. اما، در مورد هر یک از این همدسته‌ها داریم

$$\sum_{\pi \in G} (-1)^{\pi \circ \sigma} (T \otimes S)^{\pi \circ \sigma} = (-1)^\sigma \left\{ \sum_{\pi \in G} (-1)^\pi (T \otimes S)^n \right\} \sigma = 0.$$

چون $T \wedge S = \mathrm{Alt}\,(T \otimes S)$ مجموعی از این مجموعهای جزئی (روی همدسته‌های G) است، بنابراین $T \wedge S = 0$. به صورت مشابه $S \wedge T = 0$. □

قضیه: ضرب گوه‌ای شرکت‌پذیر است، یعنی $(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R)$ و لذا می‌توان از نماد $T \wedge S \wedge T$ استفاده نمود.

برهان: ادعا می‌کنیم که $(T \wedge S) \wedge R$ با $\mathrm{Alt}\,(T \otimes S \otimes R)$ یکی است. بنا به تعریف

$$(T \wedge S) \wedge R := \mathrm{Alt}\,((T \wedge S) \otimes R),$$

[1] بحث‌های فراوانی در نمونهٔ ساده کردن تعریف $\wedge$ وجود دارد. مثلاً در اسپواک ضرایب فاکتوریلی خاصی برای این منظور مطرح شده است. چون هدف ایجاد نهایت سادگی در کار است، ترجیه داده‌ایم از ذکر این گونه فاکتوریلها صرف نظر کنیم.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

و از خطی بودن Alt نتیجه می‌گیریم

$$(T\wedge S)\wedge R-\mathrm{Alt}\,(T\otimes S\otimes R)=\mathrm{Alt}\,([T\wedge S-T\otimes S]\otimes R).$$

چون $T\wedge S$ نوسانی است، داریم

$$\mathrm{Alt}\,(T\wedge S-T\otimes S)=\mathrm{Alt}\,(T\wedge S)-\mathrm{Alt}\,(T\otimes S)=T\wedge S-T\wedge S=0.$$

پس، از لم نتیجه می‌گیریم

$$\mathrm{Alt}\,([T\wedge S-T\otimes S]\otimes R)=0,$$

که به دنبال آن بودیم. به صورت مشابه داریم

$$T\wedge(S\wedge R)=\mathrm{Alt}\,(T\otimes S\otimes R),$$

و برهان تمام است. $\square$

به وضوح، فرمول $T\wedge(S\wedge R)=\mathrm{Alt}\,(T\otimes S\otimes R)$ استخراج شده در اثبات قضیهٔ قبل را به ضرب گوه‌ای هر تعداد تانسور می‌توان گسترش داد. به کمک آن پایه‌ای برای $\wedge^p(V^*)$ می‌توان ساخت. زیرا، اگر T یک $p-$ تانسور دلخواه باشد، آنگاه می‌توان نوشت

$$T=\sum t_{i_1,\cdots,i_p}\,\varphi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_p},$$

که $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_k\}$ پایه‌ای برای V است، و مجموع بر همه دنباله‌های اندیسی $(1,\cdots,i_p)$، که همه اعضاء آن بین 1 و p هستند، صورت می‌پذیرد. اگر T نوسانی باسشد، آنگاه $T=\mathrm{Alt}(T)$ و بنابراین

$$T=\sum t_{i_1,\cdots,i_p}\,\mathrm{Alt}\big(\varphi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_p}\big),=\sum t_{i_1,\cdots,i_p}\,\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p}.$$

از این پس، تانسور نوسانی $\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p}$ را با φ_I نشان می‌دهیم، که $I=(i_1,\cdots,i_p)$. نشان می‌دهیم که φ_I ها، کل $\wedge^p(V^*)$ را تولید می‌کنند، البته، بنا به خاصیت اساسی ضرب گوه‌ای، این اعضاء مستقل نیستند.

فرض کنید φ و ψ تابعیکهای خطی بر V اند (یعنی φ و $\psi\in\wedge^1(V^*)$). در این حالت، عملگر Alt خیلی ساده می‌شود:

$$\varphi\wedge\psi=\frac{1}{2}(\varphi\otimes\psi-\psi\otimes\varphi)$$

ملاحظه می‌شود که

$$\varphi\wedge\psi=-\psi\wedge\varphi \qquad \text{یا} \qquad \varphi\wedge\varphi=0$$

این احکام، مبین ناجابجایی بودن $\wedge$ بر $\wedge^1(V^*)$ هستند. همان طوری که پی برده‌اید، ناجابجایی بودن ضرب گوه‌ای در مورد ۱-فرمها، خاصیتی اساسی است. در اصل، دلیل اساسی گسترش جبر تانسورهای نوسانی، ساخت ناجابجایی در اساس نظریهٔ انتگرال‌گیری است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

خاصیت ناجابجایی، روابطی را بین مجموعهٔ تانسورهای مولد $\{\varphi_I\}$ موجب می‌گردد.
اگر دو دنبالهٔ اندیسی I و J تنها در ترتیب متفاوت باشند، آنگاه با بکارگیری خاصیت ناجابجایی، داریم $\varphi_I = \pm\varphi_J$. به علاوه، اگر لااقل دو اندیس از I برابر باشند، آنگاه $\varphi_I = 0$. نتیجتاً، جملات اضافی موجود در مجموعهٔ مولد $\{\varphi_I\}$ را می‌توانیم حذف کنیم و عملاً φ_I هایی را در نظر بگیریم که در آنها $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le k$. تعداد چنین دنباله‌هایی، با تعداد انتخاب‌های p شیء متفاوت از مجموعهٔ $\{1,\cdots,k\}$ یکی است. یعنی

$$\binom{k}{p} = \frac{k!}{p!(k-p)!}$$

به سادگی، می‌توان تحقیق کرد که تانسورهای باقی مانده، مستقل خطی هستند. گیریم $\{v_1,\cdots,v_k\}$ پایه‌ای برای V دوگان با $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_k\}$ است. به ازای هر دنبالهٔ اندیسی $I = (i_1,\cdots,i_p)$، فرض می‌کنیم $v_I := (v_{i_1},\cdots,v_{i_p})$. اکنون تعریف عملگر Alt نشان می‌دهد که $\varphi_I(v_I) = 1/p!$، اما اگر J دنبالهٔ اندیسی صعودی دیگر باشد، آنگاه $\varphi_I(v_J) = 0$. در نتیجه، اگر $\sum a_I\varphi_I = 0$، رابطه‌ای میان مجموعهٔ مولد جدید حاصل می‌شود. بنابراین:

$$0 = \sum a_I\varphi_I(v_J) = \frac{1}{p!}a_J$$

و لذا $a_J = 0$. پس ثابت کردیم که:

قضیه: اگر $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_k\}$ پایه‌ای برای V^* باشد، آنگاه

$$\{\varphi_I := \varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p} \,\big|\, 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le k\},$$

پایه‌ای برای $\wedge^p(V^*)$ است و در نتیجه

$$\dim\wedge^p(V^*) = \binom{k}{p} = \frac{k!}{p!(k-p)!}$$

فرض کنید دنبالهٔ اندیس I به طول p باشد، در حالی که J به طول q می‌باشد. از ناجابجایی بودن $\wedge$ بر $\wedge^1(V^*)$ به سادگی می‌توانید نتیجه بگیرید که

$$\varphi_I\wedge\varphi_J = (-1)^{pq}\varphi_J\wedge\varphi_I$$

اکنون از قضیهٔ اخیر، نتیجه می‌گیریم که

نتیجه: ضرب گوه‌ای در رابطهٔ نابجایی مشروح در ذیل صدق می‌کند:

$$T\wedge S = (-1)^{pq}S\wedge T$$

که در آن $T \in \wedge^p(V^*)$ و $S \in \wedge^q(V^*)$.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

از قضیهٔ پایه‌ای همچنین نتیجه می‌گرد که $\wedge^k(V^*)$ یک بعدی است، که $k = \dim V$. شما احتمالاً این حکم را سال‌ها قبل نشان داده‌اید، منتهی با این بیان، احتمالاً خیر. ما از قبل یک k−تانسور ناصفر بر $\mathbb{R}^k$ می‌شناسیم، یعنی تانسور دترمینان det. پس $\wedge^k(\mathbb{R}^{k*}) = 1$ به این معنی است که هر تابع k−خطی نوسانی بر $\mathbb{R}^k$، مضربی از دترمینان است. به بیان دیگر، تابع دترمینان یکتا است.

اگر طول دنبالهٔ اندیس I بیش از k بعد V باشد، آنگاه برخی از اعضاء آن تکرار می‌شوند: بنابراین $\varphi_I = 0$. نتیجه می‌گیریم که اگر $p > k$ آنگاه $\wedge^p(V^*) = 0$، و لذا دنبالهٔ فضاهای برداری $\wedge^1(V^*)$، $\wedge^2(V^*)$، $\cdots$ به $\wedge^k(V^*)$ ختم می‌شود. افزودن جملهٔ جدیدی به این لیست می‌تواند مفید باشد: $\wedge^p(V^*) = \mathbb{R}$، که به معنی مجموعهٔ توابع ثابت بر V می‌باشد. به این ترتیب، ضرب گوه‌ای را چنان می‌توان گسترش داد، تا جمع مستقیم

$$\wedge(V^*) := \wedge^0(V^*) \oplus \wedge^1(V^*) \oplus \cdots \oplus \wedge^k(V^*)$$

به یک جبر ناجابجایی، به نام جبر خارجی V^* تبدیل گردد. عنصر همانی این جبر، $1 \in \wedge^(V^*)$ است. یک ساخت اساسی دیگر نیز داریم. فرض کنید $A : V \longrightarrow W$ نگاشتی خطی باشد. نگاشت ترانهاد $A^* : W^* \longrightarrow V^*$ را به شکل طبیعی به جبرهای خارجی می‌توان توسیع داد: $A^* : \wedge^p(W^*) \longrightarrow \wedge^p(V^*)$ که به ازای هر $p \geq 0$، اگر $T \in \wedge^p(W^*)$، عنصر $A^*T \in \wedge^p(V^*)$ را به صورت

$$A^*T(v_1, \cdots, v_p) := T(Av_1, \cdots, Av_p)$$

تعریف می‌کنیم، که $v_1, \cdots, v_p \in V$ بردارهای دلخواهند. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که A^* خطی است و

$$A^*(T \wedge S) = A^*T \wedge A^*S$$

پس A^* یک هومورفیسم بین جبرها است: $\wedge(W^*) \to \wedge(V^*)$. توجه شود که اگر $B : W \longrightarrow U$ نگاشت خطی دیگری باشد، آنگاه $(BA)^* = A^*B^*$. به ویژه، فرض کنید $A : V \longrightarrow V$ نگاشتی خطی است و $\dim V = k$. در این صورت $A^* : \wedge^k(V^*) \to \wedge^k(V^*)$ نگاشتی خطی بین فضاهی برداری یک بعدی است، و لذا بایستی مضربی ثابت $\lambda \in \mathbb{R}$ از نگاشت همانی باشد: به ازاء هر $T \in \wedge^k(V^*)$ ای $A^*T = \lambda T$. ادعا می‌کنیم که بایستی λ برابر دترمینان A باشد. می‌دانیم $\det \in \wedge^k(\mathbb{R}^{k*})$. پس اگر $B : V \to \mathbb{R}^k$ ایزومورفیسمی دلخواه باشد، آنگاه $T = B^*(\det) \in \wedge^k(V^*)$. با قرار دادن در رابطهٔ $A^*T = \lambda T$، نتیجه می‌گیریم $A^*B^*(\det) = \lambda B^*(\det)$، و در نتیجه

$$B^{*-1}A^*\, B^*(\det) = \lambda(B^*)^{-1}B^*(\det) = \lambda(BB^{-1})^*(\det) = \lambda(\det)$$

یا $(BAB^{-1})^*(\det) = \lambda(\det)$. حال دو طرف این معادله را بر پایهٔ مرتب استاندارد $\{e_1, \cdots, e_k\}$ برای $\mathbb{R}^k$ تأثیر می‌دهیم. با کمی توجه به تعریف تانسور det، ملاحظه می‌شود که بازاء هر نگاشت خطی C، داریم $\det(C\,e_1, \cdots, C\,e_k) = \det(C)$. بنابراین، همانطوری که انتظار داشتیم $\lambda = \det(BAB^{-1}) = \det(A)$.

پس ثابت شد که

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

قضیهٔ دترمینان: اگر $A : V \longrightarrow V$ نگاشتی خطی باشد، آنگاه بازاء هر $T \in \wedge^k(V)$ ای $A^*T = (\det A)T$، که $k = \dim V$. اگر $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in \wedge^1(V^*)$، آنگاه

$$A^*\varphi_1 \wedge \cdots \wedge A^*\varphi_k = (\det A)\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k.$$

بخش ۱.۴ تمرین

۱. فرض کنید $T \in \wedge^p(V^*)$ و $v_1, \cdots, v_p \in V$ وابستهٔ خطی هستند. ثابت کنیدکه بازاء هر $T \in \wedge^p(V^*)$ ای $T(v_1, \cdots, v_p) = 0$.

۲. به شکل دوگان، فرض کنید $\varphi_1, \cdots, \varphi_p \in V^*$ وابستهٔ خطی هستند. ثابت کنید $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_p = 0$.

۳. فرض کنید $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in V^*$ و $v_1, \cdots, v_k \in V$ که $k = \dim V$. ثابت کنید

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k(v_1, \cdots, v_k) = \frac{1}{k!} \det[\varphi_i(V_j)]$$

که $[\varphi_i(V_j)]$ ماتریس $k \times k$ با درآیه‌های حقیقی است. [**راهنمایی:** اگر φ_i ها وابستهٔ خطی باشند، آنگاه سطرهای ماتریس فوق وابستهٔ خطی‌اند، و در این حالت تمرین ۲ کافی است. در غیر این صورت، با انتخاب پایه‌ای دوگان برای V، حکم به راحتی قابل تحقیق است. حال نشان دهید که این ماتریس یک k–تانسور نوسانی در V می‌سازد، و سپس از $\dim \wedge^k(V^*) = 1$ استفاده کنید.]

۴. در کل،نشان دهید که هرگاه $\varphi_1, \cdots, \varphi_p \in V^*$ و $v_1, \cdots, v_p \in V$، آنگاه

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_p(v_1, \cdots, v_p) = \frac{1}{p!} \det[\varphi_i(V_j)]$$

[**راهنمایی:** اگر V_j ها وابسته باشند، از تمرین یک استفاده کنید. در غیر این صورت، از تمرین ۳ برای $\bar{\varphi}_i$ تحدید تابعک φ_i به زیر فضای $p-$ بعدی تولید شده توسط $\{v_1, \cdots, v_p\}$ استفاده کنید.]

۵. $\mathrm{Alt}\,(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3)$ را که $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in V^*$ به شکل مبسوط بیان کنید.

۶*. (الف) گیریم T عنصری مخالف صفر از $\wedge^k(V^*)$ است، که $\dim V = k$. ثابت کنید دو پایهٔ مرتب $\{v_1, \cdots, v_k\}$ و $\{v_1^2, \cdots, v_k^1\}$ برای V وقتی و تنها وقتی از نظر جهت هم‌ارزند که $T(v_1, \cdots, v_k)$ و $T(v_1', \cdots, v_k')$ هم‌علامت باشند. [**راهنمایی:** از قضیه دترمینان استفاده کنید.]

(ب) فرض کنید V جهت‌دار است. نشان دهید فضای برداری $\wedge^k(V^*)$ به طور طبیعی جهت می‌پذیرد. به این صورت که علامت عنصر غیر صفر $T \in \wedge^k(V^*)$ را علامت $T(v_1, \cdots, v_k)$ تعریف کنید، که $\{v_1, \cdots, v_k\}$ پایهٔ مرتب برای V است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

(ج) بالعکس، نشان دهید که هر جهت برای $\wedge^k(V^*)$، به طور طبیعی یک جهت بر V تعریف می‌کند. [**راهنمایی:** روش بالا را بر عکس عمل کنید.]

۷. بازاء هر $k\times k$ ماتریس A، ماتریس A^t را به صورت ماتریس ترانهاد A تعریف می‌کنیم. با استفاده از این واقعیت که $\det(A)$ نسبت به سطرهای و نیز ستون‌های A چند خطی است، ثابت کنید $\det(A^t)=\det(A)$. [**راهنمایی:** از $\dim\wedge^k(\mathbb{R}^{k*})=1$ استفاده کنید.]

۸. یادآور می‌شویم که ماتریس A در صورتی متعامد است که $AA^t=I$. نتیجه بگیرید که اگر A متعامد باشد، آنگاه $\det(A)=\pm1$.

۹. گیریم V یک زیر فضای k–بعدی از $\mathbb{R}^N$ است. یادآور می‌شویم که پایهٔ $v_1,\cdots,v_k$ از V در صورتی متعامد یکه است که

$$v_i.v_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

گیریم $A:V\longrightarrow V$ نگاشتی خطی است. ثابت کنید سه شرط زیر معادلند:

(الف) بازاء هر $v,w\in V$ ای $Av.Aw=v.w$.

(ب) A پایه‌های متعامد یکه را به متعامد یکه می‌نگارد.

(ج) ماتریس A نسبت به هر پایهٔ متعامد یکه، متعامد است. چنین A ای را تبدیل متعامد می‌نامند. [توجه کنید که بنا به (ب) هر چنین A ای، ایزومورفیسم است.]

*۱۰. (الف) گیریم V یک فضای برداری k–بعدی مرتب از $\mathbb{R}^N$ است. ثابت کنید یک k–تانسور نوسانی $T\in\wedge^k(V^*)$ طوری وجود دارد که $T(v_1,\cdots,v_k)=1/k!$ بازاء هر پایهٔ متعامد یکهٔ مرتب با جهت مثبت $v_1,\cdots,v_k$. به علاوه، نشان دهید که T منحصر به فرد است؛ آنرا المان حجم V می‌نامند. [**راهنمایی:** از قضیه دترمینان و تمرینات ۸ و ۹ به انضمام $\dim\wedge^k(V^*)=1$ برای یکتایی استفاده کنید.]

(ب) در واقع، فرض کنید $\varphi_1,\cdots,\varphi_k nV^*$ پایه‌ای مرتب و دوگان با پایه‌ای متعامد یکه، مرتب و با جهت مثبت برای V است. نشان دهید المان حجم برای V عبارت است از $\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k$.
[راهنمایی: به تمرین ۳ را توجه کنید.]

۱۱. گیریم T المان حجم $\mathbb{R}^2$ است. ثابت کنید که بازاء هر دو بردار $v_1,v_2\in\mathbb{R}^2$، عدد $T(v_1,v_2)$ برابر $\pm$ نصف مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط v_1 و v_2 است. به علاوه، وقتی v_1 و v_2 مستقل هستند، علامت مذکور با علامت پایهٔ مرتب $\{v_1,v_2\}$ در جهت استاندارد برای $\mathbb{R}^2$ یکی است. این حکم را به $\mathbb{R}^3$ تعمیم می‌دهید. حال، حجم یک متوازی السطوح در $\mathbb{R}^k$ را چگونه تعریف می‌کنید.

۱۲. (الف) گیریم V زیر فضایی از $\mathbb{R}^N$ است. بازاء هر $v\in V$، تابعک خطی $\varphi_n\in V^*$ را به صورت $\varphi_v(w)=v.w$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید نگاشت $v\mapsto\varphi_v$ ایزومورفیسمی از V به V^* می‌باشد.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

(ب) حال فرض کنید V مرتب است و $\dim V = 3$. گیریم T المان حجم بر V است. گیریم $u, v \in V$. تابعکی خطی بر V با ضابطهٔ $w \mapsto 3!T(u,v,w)$ تعریف می‌کنیم. بنا به قسمت (الف)، برداری وجود دارد که آن را با نماد $u\times v$ نشان می‌دهیم، به گونه‌ای که بازاء هر $w \in V$ ای داشتبه باشیم $T(u,v,w) = (u\times v).w$. ثابت کنید این ضرب خارجی در شرط $u\times v = -v\times u$ صدق می‌کند. به علاوه، نشان دهید که اگر $\{v_1, v_2, v_3\}$ یک پایهٔ متعامد یکهً با جهت مثبت برای V باشد، در این صورت $v_1\times v_2 = v_3$، $v_2\times v_3 = v_1$ و $v_3\times v_1 = v_2$. (همچنین، همواره $v\times v = 0$).

بخش ۲.۴ فرم دیفرانسیل

فرم در هندسه دیفرانسیل کلاسیک، کمیتی نمادین نظیر

$$\sum_i f_i dx_i, \qquad \sum_{i<j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j, \qquad \sum_{i<j<k} f_{ijk} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k,$$

می‌باشد. از این عبارات انتگرال و دیفرانسیل گرفته می‌شد، و از آن جهت که ناجابجایی بودن آن ثابت می‌شد، با آنها همچون تانسور برخورد می‌شد. فرمهای دیفرانسیل نوین به شکل موضعی با کمیتهای نمادین یکی‌اند، اما دارای این توانایی هستند که به شکل فراگیر بر منیفلدها قابل تعریف هستند. تعریف فراگیر اشیایی که از آنها انتگرال گرفته می‌شود، امکان تعریف انتگرال فراگیر را فراهم می‌سازد.

تعریف. گیریم X منیفلدی هموار مرزدار و یا بدون مرز است. منظور از $p-$ فرم بر X، تابعی مانند ω است که به هر نقطهٔ $x \in X$، یک $p-$ تانسور نوسانی $\omega(x)$ بر فضای مماس به X در x متناظر می‌کند؛ $\omega(x) \in \wedge^p[T_x(X)^*]$.

دو $p-$ فرم ω_1 و ω_2 را نقطه به نقطه می‌توان با هم جمع نمود و به یک $p-$ فرم جدید $\omega_1+\omega_2$ رسید: $(\omega_1+\omega_2)(x) := \omega_1(x)+\omega_2(x)$.

همهٔ فرمها بر هر زیر مجموعه باز U از فضای اقلیدسی را به سادگی بر حسب $dx_1, \cdots, dx_k$ می‌توان بیان کرد. فرض کنیم، به ازاء هر دنبالهٔ اندیسی صعودی $I = (i_1, \cdots, i_p)$، یک $p-$ فرم بر $\mathbb{R}^k$ به صورت

$$dx_I := dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت از قضیهٔ پایه برای فضاهای برداری، نتیجه می‌گیریم

$$\wedge^p[T_z(U)^*] = \wedge^p(\mathbb{R}^{k*})$$

و بنابراین، داریم

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

گزاره. هر $p-$ فرم بر یک مجموعهٔ باز $U \subset \mathbb{R}^k$ را به صورتی یکتا به شکل مجموع $\sum_I f_I \, dx_I$ می‌توان نوشت، که جمع بر دنباله‌های اندیسی صعودی $I = (i_1 < \cdots < i_p)$ محاسبه می‌شود، و f_I ها توابعی بر U هستند.

این گزاره می‌گوید که فرمهای در فضای اقلیدسی در اساس همان کمیات نمادین در ریاضیات کلاسیک هستند - به جز اینکه، این نمادها دیگر با معنی شده‌اند. تمرینی ساده وجود دارد که شما می‌توانید انجام دهید. نشان دهید که تعاریف بالا را درک کرده‌اید: نشان دهید که اگر φ تابعی هموار بر $\mathbb{R}^k$ باشد، آنگاه

$$d\varphi = \sum_I \frac{\partial \varphi}{\partial x_I} \, dx_I$$

(خود فرمول بدیهی است، اما معنی هر طرف از آن چیست؟)
یکی از مزایای مهم فرمها این است که آنها را به طور طبیعی توسط نگاشت‌های هموار می‌توان برگشت داد. اگر $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی هموار و ω یک $p-$ فرم بر Y باشد، $f^*\omega$ فرمی $p-$ بر x به صورت ذیل تعریف می‌کنیم: اگر $f(x) = y$، آنگاه f نگاشت مشتق $df_x : T_x(x) \longrightarrow T_y(Y)$ را القاء می‌کند. چون $\omega(y)$ یک $p-$ فرم نوسانی بر $T_y(Y)$ است، با استفاده از ترانهاد $(df_x)^*$ آنرا می‌توان بر $T_x(X)$ می‌توان برگشت داد. به تعبیری که در بخش قبل شرح دادیم. تعریف می‌کنیم

$$f^*\omega(x) := (df_x)^*\omega[f(x)].$$

در این صورت، $f^*\omega(x)$ یک $p-$ تانسور نوسانی بر $T_x(X)$ است، و لذا $f^*\omega$ یک $p-$ فرم بر X، بنام برگشت ω توسط f است. هنگامی که ω یک $0-$فرم است (یعنی، تابعی بر Y است) داریم $f^*\omega = \omega \circ f$، که تابعی بر X است. یادآور می‌شویم که f^* فرمها را برگشت می‌دهد، و آنها را به جلو نمی‌برد: وقتی $f, f^* : X \longrightarrow Y$، فرمهای بر Y را به فرمهای بر X می‌برد.
پیش از شرح بیشتر تعریف f^*، فرمول‌های زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1 + \omega_2) &= f^*\omega_1 + f^*\omega_2, \\ f^*(\omega \wedge \theta) &= (f^*\omega) \wedge (f^*\theta), \\ (f \circ h)^*\omega &= h^* f^* \omega. \end{aligned}$$

حال ببینیم که f^* عملاً بر فضاهای اقلیدسی چه می‌کند. گیریم $U \subset \mathbb{R}^k$ و $V \subset \mathbb{R}^\ell$ زیر مجموعه‌های بازند و $f : V \longrightarrow U$ هموار است. از $x_1, \cdots, x_k$ برای توابع مختصاتی استاندارد بر $\mathbb{R}^k$ و از $y_1, \cdots, y_\ell$ برای توابع روی $\mathbb{R}^\ell$ استفاده می‌کنیم. f را نیز به شکل $f = (f_1, \cdots, f_k)$ می‌نویسیم، که هر یک از f_i ها تابعی هموار بر V هستند. مشتق df، مشتق در نقطهٔ دلخواه $y \in V$ را با ماتریس

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y) \right),$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

نمایش می‌دهیم و نگاشت ترانهاد $(df_y)^*$ با ماتریس ترانهاد نمایش داده می‌شود. در نتیجه

$$f^* dx_i = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} dy_j = d f_i$$

(قبل از ادامهٔ بحث لازم است صحت این تساوی‌ها را تحقیق کنید و معنی دقیق آنها را بدانید.)

چنانچه رفتار f^* را بر 0−فرمها و 1−فرمهای پایه‌ای dx_i بدانیم، قادر به تعیین کامل آن هستیم. زیرا، هر فرم دلخواه ω بر U را به صورتی یکتا به شکل $\omega = \sum_I a_I dx_I$ می‌توان نوشت. اکنون از خواص مجرد f^* مشروح در بالا استفاده کرده، نتیجه می‌گیریم

$$f^*(\omega) = \sum_I (f^* a_I) df_I$$

که در اینجا $f^* a_I = a_I \circ f$ برگشت 0−فرم a_I از U به V است و f_I به معنی $f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_p}$ است.

مثالی از بحث بسیار مهم است: فرض کنید $f : V \longrightarrow U$ دیفئومورفیسم‌ای بین مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}^k$ است و $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ (که المان حجم بر U نامیده می‌شود). اگر $f(y) = x$ آنگاه $T_y(V)$ و $T_x(U)$ با $\mathbb{R}^k$ برابرند، با این حال از نمادهای $dx_1(x), \cdots, dx_k(x)$ برای نشان دادن توابع خطی پایه‌ای بر $\mathbb{R}^k$ به عنوان $T_x(U)$ استفاده می‌کنیم و از نمادهای $dy_1(x)$، $\cdots, dy_k(y)$ برای $\mathbb{R}^k$ به عنوان $T_y(V)$ استفاده می‌کنیم. اکنون، بنا به قضیهٔ دترمینان از بخش ۲، به فرمول زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} f^*\omega(y) &= (df_y)^* dx_1(x) \wedge \cdots \wedge (df_y)^* dx_k(x) \\ &= \det(df_y)\, dy_1(y) \wedge \cdots \wedge dy_k(y). \end{aligned}$$

به اختصار

$$f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k) = \det(df)\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k$$

که $\det(df)$ عبارت است از تابع $y \longrightarrow \det(df_y)$ بر V.

فرم ω بر مجموعهٔ باز $U \subset \mathbb{R}^k$ را در صورتی هموار گوییم که هریک از توابع ضریب a_I در بیان $\omega = \sum_I a_I dx_I$ هموار باشند. از چگونگی محاسبات مشروح در بالا چنین استنباط می‌شود که اگر $f : V \longrightarrow U$ نگاشتی هموار بین زیر مجموعه‌های باز در فضای اقلیدسی باشد، آنگاه اگر ω هموار باشد، $f^*\omega$ نیز هست.

در کل، همواری فرم ω بر منیفلد X را به این معنی تعریف می‌کنیم که به ازاء هر پیمایش موضعی $h : U \longrightarrow X$، فرم $h^*\omega$ بر $U \subseteq \mathbb{R}^k$ هموار باشد. البته، حقیقتاً لازم نیست همهٔ پیمایش‌های موضعی را مورد بررسی قرار دهیم، بلکه کافی است تعدادی از آنها که X را پوشش می‌دهند، مورد بررسی قرار می‌دهیم؛ اگر $h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow X$ ها گردایه‌ای از پیمایش‌های موضعی پوشش دهندهٔ X باشند (یعنی،

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

$X = \cup_\alpha h_\alpha(U_\alpha)$)، آنگاه در صورتی فرم ω هموار است که همهٔ برگشت‌های $h_\alpha \omega$ هموار باشند. زیرا، اگر $h : U \longrightarrow X$ پیمایش موضعی دیگری باشد، آنگاه دامنهٔ آن U را به صورت اجتماعی از زیر دامنه‌های باز $h^{-1}[h_\alpha(U_\alpha)]$ می‌توان نوشت. بعلاوه، رابطهٔ

$$h^*\omega = (h_\alpha^{-1} \circ h)^* h_\alpha^* \omega \quad \text{بر} \quad h^{-1}[h_\alpha(U_\alpha)]$$

نشان می‌دهد که $h^*\omega$ هموار است.

چون تنها به فرمهای هموار توجه داریم، از این پس کلمه هموار را ذکر نمی‌کنیم و فرم به معنی فرم هموار است.

این بخش را با تمرینی به پایان می‌بریم که می‌توان آن را محکی از میزان درک شما از فرمول‌های بالا دانست. آن را مستقیماً از تعاریف و بدون استفاده از هیچ یک از محاسبات انجام شده در فضای اقلیدسی، حل کنید.

تمرین گیریم $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی هموار بین منیفلدها است و φ تابعی هموار بر Y است. ثابت کنید

$$f^*(d\varphi) = d(f^*\varphi)$$

بخش ۳.۴ انتگرالگیری بر منیفلدها

فرمها به جهت انتگرالگیری طرح شدند، اما چگونه می‌شود از آنها انتگرال گرفت؟ شاید مزیت بنیادی آنها این باشد که با تغییر مختصات، به طور خودکار و به شکل صحیح تغییر می‌یابند. قضیهٔ بنیادی ذیل از حسابان را یاد آور می‌شویم (اثبات آن را در بسیاری از کتب از جمله صفحهٔ ۶۷ از اسپیواک [۲] می‌توان یافت).

تغییر متغیر در $\mathbb{R}^k$. فرض کنید $f : V \longrightarrow U$ دیفئومورفیسم بین مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}^k$ است و a تابعی انتگرالپذیر بر U می‌باشد. در این صورت

$$\int_U a.dx_1 \cdots dx_k = \int_V (a \circ f).|\det(df)|.dy_1 \cdots dy_k$$

به پیروی از نماد گزاریهای قبلی، $\det(df)$ نمایشگر تابع $y \longrightarrow \det(df_y)$ بر V است. به سادگی می‌توان تحقیق نمود که حکم مشابهی در نیم فضای $\mathbb{H}^k$ برقرار است.

وقتی متغیرها را با چنین نگاشتی چون f عوض می‌کنیم، توابع نظیر a به صورت برگشت بدیهی $a \circ f$ منتقل می‌گردند. اما این تبدیل هنوز شکل طبیعی دیدگاه انتگرال نیست. چون f موجب تخریب حجم از V به U می‌شود، انتگرال $a \circ f$ طبیعی است که با انتگرال a یکی نباشد. این را باید با افزودن عامل $|\det(df)|$ تکمیل نمود، که مقدار نوسان حجم را به شکل بینهایت کوچک محاسبه می‌کند. فرمها

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

به طور خودکار این تغییر حجم را انجام می‌دهند. مثلاً، عامل انتگرالگیری a را نه فقط با نماد صوری انتگرالگیری $ax_1, \cdots, dx_k$ در نظر نگیرید. بلکه آن را به عنوان یک k−فرم $\omega = a\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ را در نظر بگیرید. در این صورت، تعریف می‌کنیم

$$\int_U \omega := \int_U a.dx_1 \cdots dx_k.$$

همان طور که در بخش قبل دیدیم، ω به فرم

$$f^*(\omega) = (a \circ f)\det(df)dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k$$

برگشت داده می‌شود. اگر f حافظ جهت باشد، آنگاه $\det(df) > 0$، و لذا $f^*\omega$ عملاً عامل انتگرالگیری در سمت راست قضیهٔ تغییر متغیر است. هر k−فرم ω بر U به شکل $a\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ است که برابر با a تابع است، و لذا ω در صورتی انتگرالپذیر است که a باشد. به این ترتیب، قضیه شکل طبیعی‌تری پیدا می‌کند.

قضیهٔ تغییر متغیر در $\mathbb{R}^k$. فرض کنید $f : V \longrightarrow U$ یک دیفئومورفیسم حافظ جهت بین مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}^k$ یا $\mathbb{H}^k$ است، و ω یک k−فرم انتگرالپذیر بر U است. در این صورت

$$\int_U \omega = \int_V f^*\omega.$$

چنانچه f جهت برگردان باشد، داریم

$$\int_U \omega = -\int_V f^*\omega.$$

چنانچه به مباحثات در بخش‌های قبل توجه کنید، خواهید دید که عامل اصلاح کنندهٔ $\det(df)$ نتیجهٔ مکانیکی رفتار ناجابجایی 1−فرمها (یعنی $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$) است و لذا خود به خود در بحث ظاهر می‌شود. بنابراین، تمام ویژگی‌های جبری فرمها بر این اساس تنظیم شده است که کمال مناسبت را برای انتگرالگیری داشته باشند.

این ویژگی تبدیل از آن جهت با اهمیت است که امکان انتگرالگیری بر منیفلدها را فراهم می‌سازد، بی آنکه لازم باشد آنرا به دستگاه مختصات استاندارد در فضای اقلیدسی منتقل کنیم. گیریم ω یک k−فرم هموار بر X است که X منیفلدی k−بعدی و مرزدار است. محمل ω را به صورت بستار مجموعهٔ همهٔ نقاطی $x \in X$ تعریف می‌کنیم که $\omega(x) \neq 0$؛ فرض کنیم این بستار فشرده باشد، در این حالت می‌گوییم ω **با محمل فشرده** است. در ابتدا، فرض می‌کنیم که محمل ω در داخل زیر مجموعهٔ بازی مانند W از X قرار دارد که دامنهٔ پیمایشی مشخص از X است. در این صورت، اگر $h : U \longrightarrow W$ یک دیفئومورفیسم حافظ جهت از زیر مجموعهٔ باز $U \subseteq \mathbb{H}^k$ بروی W باشد، آنگاه $h^*\omega$ یک k−فرم هموار با محمل فشرده

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

بر U است. در این صورت $h^*\omega$ انتگرالپذیر است، و تعریف می‌کنیم

$$\int_X \omega = \int_U h^*\omega$$

چنانچه $g : V \longrightarrow W$ پیمایشی دیگر بر روی W باشد، چه رخ می‌دهد؟ در این صورت $f = h^{-1} \circ g$ یک دیفئومورفیسم حافظ جهت از V به U است و لذا

$$\int_U h^*\omega = \int_V f^*h^*\omega = \int_V g^*\omega$$

پس، نظر به خواص تبدیل فرمها، $\int_X \omega$ معنی‌ای ذاتی دارد، یعنی معنی‌ای مستقل از انتخاب پیمایش.

اکنون به جهت تعریف انتگرال یک k−فرم ω هموار با محمل فشردهٔ دلخواه بر X، کافی است که از افراز یکانی استفاده کرده و ω را به قطعات با محمل قابل پیمایش بر X تجزیه کنیم. گردایهٔ زیر مجموعه‌های باز قابل پیمایش X، پوششی باز تشکیل می‌دهند؛ یک افرازیکانی زیر دست $\{\rho_i\}$ نسبت به آن افراز انتخاب می‌کنیم. (برای تعریف به صفحهٔ ۵۲ توجه شود.) خاصیت موضعاً متناهی بودن $\{\rho_i\}$ موجب می‌شود که همهٔ آنها به جز تعدادی متناهی از آنها بر محمل فشردهٔ ω غیر صفر باشند. بنابراین، تنها تعدادی متناهی از فرمهای $\rho_i\omega$ غیر صفرند، و هر یک از آنها دارای محملی فشرده و داخل یک مجموعهٔ باز پیمایش است. اکنون تعریف می‌کنیم

$$\int_X \omega := \sum_i \int_X \rho_i\omega$$

نشان دادن اینکه $\int_X \omega$ به انتخاب افراز یکانی به خصوص بستگی ندارد، آسان می‌باشد. البته، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که اگر محمل ω عملاً در داخل یک مجموعهٔ باز پیمایش پذیر قرار داشته باشد، آنگاه دو تعریف $\int_X \omega$ یکی‌اند. چون در هر $x \in x$ ای $\sum_i \rho_i(x) = 1$، بنابراین

$$\sum_i \rho_i\,\omega = \omega$$

اکنون، از خطی بودن پولبک و انتگرالگیری بر فضای اقلیدسی، نتیجه می‌گیریم

$$\int_X \omega = \sum_i \int_x \rho_i\omega$$

که به دنبالش بودیم. اکنون فرض کنیم $\{\rho'_j\}$ افراز یکانی مناسب دیگری باشد. در این صورت، از بحث بالا نتیجه می‌شود که به ازاء هر i ای

$$\int_X \rho_i\omega = \sum_j \int_X \rho'_j\rho_i\omega,$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

و به صورت مشابه، به ازای هر j ای

$$\int_X \rho'_j\omega = \sum_j \int_X \rho_i\rho'_j\omega.$$

در نتیجه

$$\sum_j \int_X \rho_i\omega = \sum_i \sum_j \int_X \rho'_j\rho_i\omega = \sum_j \sum_i \int_X \rho_i\rho'_j\omega = \sum_i \int_X \rho'_j\omega,$$

که نشان می‌دهد که محاسبهٔ $\int_X \omega$ نسبت به هر یک از افرازها، نتیجه‌ای یکسان دارد.
به سادگی می‌شود تحقیق کرد که $\int_X$ خواص خطی استاندارد را دارد:

$$\int_X(\omega_1+\omega_2) = \int_X \omega_1 + \int_X \omega_2, \qquad \int_X c\omega = c\int_X \omega, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

همچنین در تمرینات از شما خواسته می‌شود که نشان دهید تعمیم انتگرال مطرح شده، به خوبی در مورد تغییر دامنه‌ها عکس العمل مناسب نشان می‌دهد.

قضیه اگر $f: Y \longrightarrow X$ دیفئومورفیسم حافظ جهت باشد، آنگاه به ازاء هر $k-$فرم هموار و با محمل فشردهٔ ω بر X (که $k=\dim X=\dim Y$) داریم

$$\int_X \omega = \int_Y f^*\omega.$$

احتمالاً پی‌برده‌اید که ویژگی تبدیل، نظریه‌ی ما را به طور کامل مشخص می‌کند. تنها عملی خطی بر فرمهای با محمل فشرده ساخته‌ایم که به طور طبیعی آنها را تبدیل می‌کند و به موجب آن می‌توان مسأله را به انتگرالگیری معمولی در فضای اقلیدسی تبدیل نمود.
با اینکه تاکنون تنها قادر به انتگرالگیری از $k-$فرمها بر منیفلدهای $k-$بعدی هستیم، قادریم آن را به انتگرالگیری از فرمها بر سایر زیرمنیفلدها تبدیل کنیم. اگر Z زیر منیفلد جهت‌داری از X بوده و ω یک فرم بر X باشد، اعمال مجرد مطرح شده در بالا امکان تحدید ω به Z به طور طبیعی را می‌دهد. گیریم $i: Z \hookrightarrow X$ نگاشت شمول است، و تحدید ω به Z را فرم $i^*\omega$ تعریف می‌کنیم. واضح است که وقتی ω یک صفر فرمی باشد، آنگاه $i^*\omega$ درست عبارت از تحدید معمولی تابع ω به Z است. حال اگر $\dim Z=\ell$ و ω یک $\ell-$فرم باشد که محمل آن Z را در مجموعه‌ای فشرده قطع می‌کند، آنگاه انتگرال ω بر Z را به صورت انتگرال از تحدیدش تعریف می‌کنیم:

$$\int_Z \omega := \int_Z i^*\omega.$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

حال چند مثال خاص را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم

$$\omega = f_1\,dx + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3,$$

یک 1–فرم هموار بر $\mathbb{R}^3$ است، و $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک منحنی ساده است. به بیان دیگر، γ یک دیفئومورفیسم از بازهٔ یکهٔ $I = [0;1]$ بروی منیفلد مرزدار یک بعدی و فشردهٔ $\gamma(I)$ است. در این صورت

$$\int_C \omega := \int_I \gamma^* \omega.$$

چنانچه $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$، آنگاه

$$\gamma^* dx_i = d\gamma_i = \frac{d\gamma_i}{dt}\,dt,$$

و بنابراین

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^{3} \int_0^1 f_i[\gamma(t)] \frac{d\gamma_i}{dt}(t)\,dt.$$

اگر میدان برداری (f_1, f_2, f_3) بر $\mathbb{R}^3$ را با $\vec{F}$ نشان دهیم، آنگاه سمت راست تساوی بالا را **انتگزال خط** $\vec{F}$ روی C نامیده و با نماد $\oint_C \vec{F}.d\gamma$ نشان می‌دهیم.

حال 2–فرم با محمل فشردهٔ

$$\omega = f_1\,dx_2 \wedge dx_3 + f_2\,dx_3 \wedge dx_1 + f_3\,dx_1 \wedge dx_2.$$

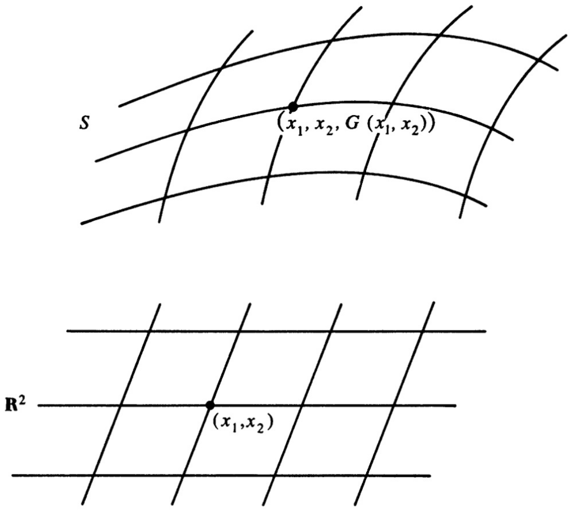
بر $\mathbb{R}^3$ را در نظربگیرید. ω را بر یک رویه S انتگرال می‌گیریم، که به طور ساده S را به شکل نمودار تابع $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $x_3 = G(x_1, x_2)$ می‌توان در نظر گرفت. به شکل ۱.۴ توجه شود. (این فرض حقیقتاً محدود کننده نیست، زیرا هر رویهٔ دلخواه را لااقل به شکل موضعی به صورت نمودار یک تابع می‌توان وشت. اکنون کافی است x_2, x_1 را متغیرهای آن تابع و x_3 را خود آن تابع بگیریم.) $\int_S \omega$ چه است؟ رویهٔ S را توسط $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ با ضابطهٔ

$$h(x_1, x_2) = (x_1, x_2, G(x_1, x_2))$$

می‌توان پیمایش کرد. در این صورت

$$\begin{aligned}
h^*(dx_1 \wedge dx_2) &= dx_1 \wedge dx_2 \\
h^*(dx_2 \wedge dx_3) &= dx_2 \wedge dG = dx_2 \wedge \left(\frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} dx_2 \right) \\
&= -\frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2
\end{aligned}$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۱.۴:

به صورت مشابه

$$h^*(dx_3 \wedge dx_1) = -\frac{\partial G}{\partial x_2}\, dx_1 \wedge dx_2$$

با جاگذاری در فرمول انتگرال، داریم

$$\int_S \omega = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3 f_3\Big)\, dx_1\, dx_2,$$

که در آن

$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) := \left(-\frac{\partial G}{\partial x_1}, -\frac{\partial G}{\partial x_2}, 1\right).$$

تحقیق کنید که به ازای هر نقطهٔ $x = (x_1, x_2, G(x_1, x_2)) \in S$ ای از S، بردار $\vec{n}(x)$ به رویهٔ S قائم است؛ یعنی $\vec{n}(x) \perp T_x(S)$. این انتگرال را به صورتی می توانیم بنویسیم که احتمالاً در ریاضی ۲ دیده‌اید. گیریم $\vec{u} := \vec{n}/||\vec{n}||$ بردار یکهٔ قائم است، $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ و $2-$فرم هموار dA را به صورت $|\vec{n}| dx_1 \wedge dx_2$ تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$\int_S \omega = \int_{\mathbb{R}^2} (\vec{F}.\vec{u})\, dA.$$

فرم dA را **فرم مساحت** رویهٔ S می‌نامند. با یک تمرین در این خصوص، قدری انگیزه پیدا می‌کنید.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

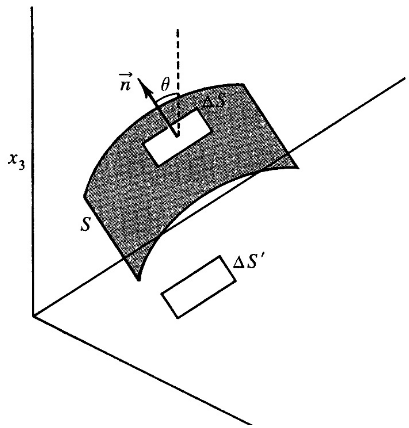
ابتدا نشان دهید که اگر ΔS مستطیل کوچکی در $\mathbb{R}^3$ باشد و $\Delta S'$ تصویر آن بر روی $x_1\,x_2$–صفحه باشد، آنگاه

$$\text{Area}\,(\Delta S) = (\sec\theta).\text{Area}\,(\Delta S'),$$

که θ زاویهٔ بین نرمال به ΔS و x_3–محور است. [ابتدا ΔS را روی صفحه‌اش طوری حرکت دهید که یکی از یال‌هایش با محمل برخورد صفحه‌اش با $x_1\,x_2$–صفحه موازی باشد؛ سپس فرمول‌بندی ساده است. حال نشان دهید که در مورد رویهٔ ما

$$|\vec{n}| = \sqrt{1+\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right)^2}$$

با سکانت زاویهٔ θ بین بردار نرمال به S و x_3–محور است. سر انجام، توجه کنید که مساحت $\Delta S'$ برابر انتگرال $dx_1 \wedge dx_2$ بر $\Delta S'$ می‌باشد.] به شکل ۲.۴ توجه شود.



شکل ۲.۴:

تمرینات

۱. گیریم Z مجموعه‌ای متناهی از نقاط در X است که به صورت 0–منیفلد در نظر گرفته می‌شود. جهتی بر Z مشخص می‌کنیم. یعنی، به هر $z \in Z$ دلخواه، اعداد جهتی به خصوص $\sigma(z) = \pm 1$ نسبت می‌دهیم. گیریم f تابعی دلخواه بر X است که به عنوان 0–فرم در نظر گرفته می‌شود. نشان دهید

$$\int_Z f = \sum_{z\in Z} \sigma(z).f(z).$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۲. گیریم X منیفلدی مرزدار و k−بعدی است و ω یک k−فرم با محمل فشرده بر X است. یادآور می‌شویم که $-X$ نمایشگر منیفلد X با جهت برعکس است. نشان دهید

$$\int_{-X} \omega = -\int_X \omega.$$

۳. گیریم $c : [a;b] \longrightarrow X$ خمی هموار است، $c(a) = p$ و $c(b) = q$. نشان دهید که اگر ω دیفرانسیل تابعی بر X مانند $\omega = df$ باشد، آنگاه

$$\int_a^b c^*\omega = f(q) - f(p).$$

۴. گیریم $c : [a,b] \longrightarrow X$ خمی هموار است و$f : [a_1, b_1] \longrightarrow [a;b]$ نگاشتی هموار است با $f(a_1) = a$ و $f(b_1) = b$. نشان دهید که انتگرال‌های

$$\int_{a_1}^{b_1} (c \circ f)^*\omega \quad \text{و} \quad \int_a^b c^*\omega,$$

یکی‌اند (به عبارت دیگر، $\int_c \omega$ مستقل از پیمایش با حافظ جهت c است).

۵. **خم بسته** بر منیفلد X، نگاشتی هموار $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ است. اگر ω یک 1−فرم بر X باشد، **انتگرال خط** ω در امتداد γ را به صورت

$$\oint_\gamma \omega = \int_{\mathbb{S}^1} \gamma^*(\omega)$$

تعریف می‌کنیم. در حالت $X = \mathbb{R}^k$، انتگرال $\oint_\gamma \omega$ را صراحتاً بر حسب بیان مختصاتی γ و ω بیان کنید.

۶. گیریم $h : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ $h(t) = (\cos t, \sin t)$ است. نشان دهید که اگر ω یک 1−فرم دلخواه بر $\mathbb{S}^1$ باشد، آنگاه

$$\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \int_0^{2\pi} h^*\omega.$$

۷.* فرض کنید 1−فرم ω بر X دیفرانسیل تابعی $\omega = df$ باشد. ثابت کنید به ازاء هر خم بستهٔ γ بر X داریم $\oint_\gamma \omega = 0$. [**راهنمایی:** تمرینات ۳ و ۵.]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

*۸. 1−فرم ω بر صفحهٔ سفتهٔ $\mathbb{R}^2-\{0\}$ را به صورت

$$\omega(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت الف) مقدار $\int_C\omega$ را بر یک دایرهٔ دلخواه C به شعاع r و مرکز مبداء محاسبه کنید.

ب) ثابت کنید در نیم صفحه $\{(x,y)|x>0\}$، فرم ω دیفرانسیل یک تابع است. [**راهنمایی:** تابع $\arctan(y/x)$ را به عنوان احتمال حساب کنید.]

ج) چرا ω بر $\mathbb{R}^2-\{0\}$ دیفرانسیل هیچ تابع فراگیری نیست؟

*۹. ثابت کنید که یک 1−فرم ω بر $\mathbb{S}^1$ در صورتی و تنها در صورتی دیفرانسیل یک تابع است که $\int_{\mathbb{S}^1}\omega=0$. [**راهنمایی:** «تنهااگر» از تمرین ۶ نتیجه می‌شود. حال فرض کنید h مثل در تمرین ۵ است و تابعی g بر $\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(t)=\int_0^t h^*\omega$ تعریف کنید. نشان دهید که اگر $\int_{\mathbb{S}^1}\omega=0$ آنگاه $g(t+2\pi)=g(t)$. بنابراین به ازاء یک تابع f بر $\mathbb{S}^1$، داریم $g=f\circ h$. نشان دهید $df=\omega$.]

*۱۰. گیریم v یک 1−فرم دلخواه بر $\mathbb{S}^1$ با انتگرال ناصفر است. ثابت کنید که اگر ω یک 1−فرم دیگر باشد، آنگاه ثابتی C چنان وجود دارد که به ازاء یک تابع f بر $\mathbb{S}^1$ داریم $w-cv=df$.

۱۱. فرض کنید ω یک 1−فرم بر منیفلد همبند X است با این خاصیت که به ازاء همهٔ خم‌های بستهٔ γ داریم $\oint_\gamma\omega=0$. در این صورت اگر $p,q\in X$، آنگاه $\int_p^q\omega$ را به صورت $\int_0^1 c^*\omega$ تعریف می‌کنیم که $c:[0;1]\to X$ خمی با $c(0)=p$ و $c(1)=q$ است. نشان دهید که $\int_p^q\omega$ خوش تعریف است (به بیان دیگر، از انتخاب c مستقل است). [**راهنمایی:** هر دو چنین منحنی‌ای را می‌توانید به هم متصل کنید و به یک منحنی بسته برسید. این کار از فرض ثابت بودن این منحنی‌ها در 0 و یک میسر است. از تمرین ۴ استفاده کنید.]

*۱۲. ثابت کنید که هر 1−فرم ω بر X با این خاصیت که به ازاء هر منحنی بستهٔ γ دلخواه، $\oint_\gamma\omega=0$ برابر دیفرانسیل یک تابع است، $\omega=df$. [**راهنمایی:** نشان دهید حالت همبند کافی است. حال فرض کنید $p\in X$ دلخواه و ازاین پس ثابت است و $f(x)=\int_p^x\omega$. با محاسبهٔ f در دستگاه مختصاتی در یک همسایگی U از x، نشان دهید $\omega=df$. توجه کنید که اگر $p'\in U$، آنگاه $f(x)=f(p')+\int_{p'}^x\omega$.]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۱۳. گیریم S یک 2−منیفلد جهتدار در $\mathbb{R}^3$ است و $\vec{n}(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ بردار قائم یکهٔ برونسوی بر S در x است. (تمرین ۱۹ از بخش ۲ از فصل ۳ را برای تعریف نگاه کنید.) 2−فرم dA بر S را به صورت

$$dA = n_1\, dx_2 \wedge dx_3 + n_2\, dx_3 \wedge dx_1 + n_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

تعریف کنید. (در اینجا هر یک از dx_i ها به S تحدید شده‌اند.) نشان دهید که هرگاه S نمودار تابع $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ باشد، و جهت بر S را از جهت استاندارد $\mathbb{R}^2$ بسازیم، آنگاه dA را مشابه در متن کتاب می‌توان تعریف کرد.

۱۴. گیریم

$$\omega = f_1\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2\, dx_3 \wedge dx_1 + f_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

یک 2−فرم دلخواه در $\mathbb{R}^3$ است. نشان دهید که تحدید ω به S به شکل $(\vec{F}.\vec{n})\, dA$ است، که $\vec{F}(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$. [**راهنمایی:** مستقیماً نشان دهید که اگر $u, v \in T_x(S) \subseteq \mathbb{R}^3$، آنگاه $\omega(x)(u, v)$ با نصف دترمینان ماتریس

$$\begin{pmatrix} \vec{F}(x) \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

برابر است. اگر $\vec{F}(x) \in T_x(S)$، این دترمینان صفر است و مولفهٔ قائم $\vec{F}(x)$ صفر است.]

بخش ۴.۴ مشتق خارجی

نه تنها از فرمها می‌توان انتگرال گرفت، از آنها دیفرانسیل نیز می‌توان گرفت. قبلاً این کار را در مورد 0−فرمها انجام داده‌ایم: از هر تابع هموار f، یک 1−فرم df می‌توان ساخت. در فضای اقلیدسی، ادامهٔ این کار روشن است. اگر $\omega = \sum a_I\, dx_I$ یک $p-$ فرم هموار بر زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^k$ باشد، آنگاه کافی است از توابع ضریب a_I دیفرانسیل بگیریم: مشتق خارجی ω را $(p+1)-$فرم $d\omega = \sum da_I \wedge dx_I$ تعریف می‌کنیم. در قضیهٔ زیر، مهمترین خواص این تعریف ذکر شده است:

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

قضیه عملگر دیفرانسیل خارجی d، که بر فرمهای هموار روی مجموعهٔ باز $U \subset \mathbb{R}^k$ (یا $U \subset \mathbb{H}^k$)تعریف می‌گردد، سه خاصیت ذیل را دارد:

۱. خطی بودن:

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2,$$

۲. قانون ضرب: اگر ω یک $p-$ فرم باشد، آنگاه

$$d(\omega \wedge \theta) = (d,\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta,$$

۳. شرط دوری:

$$d(d,\omega) = 0.$$

بعلاوه، d تنها عملگری است که این خواص را دارد و در مورد توابع هموار f، با تعریف قبلی df یکی است.

برهان: قسمت (۱) بدیهی است. قسمتهای (۲) و (۳) جنبهٔ محاسباتی دارند. (۳) را نشان داده و (۲) را به عنوان تمرین می‌گذاریم. اگر $\omega = \sum a_I dx_I$، آنگاه

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_I \left(\sum_i \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_I.$$

بنابراین

$$d(d,\omega) = \sum_I \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i \wedge dx_I.$$

حال با توجه به این که

$$\frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_j \partial x_i},$$

و $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$، جملات دو به دو در $d(d,\omega)$ با هم حذف می‌شوند و بنابراین $d(d,\omega) = 0$.
یکتایی به سهولت نتیجه می‌شود. فرض کنید D عملگر دیگری است که دارای خواص (۱)، (۲) و (۳) است و در مورد توابع $Df = df$. در این صورت $D(dx_i) = 0$. از (۲) نتیجه می‌گیریم

$$D(dx_i \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = \sum_j \pm dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge D dx_{i_j} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

اما

$$D(dx_{i_j}) = D(Dx_{i_j}) = 0$$

حال فرض می‌کنیم $\omega = \sum_I a_I\, dx_I$ یک $p-$ فرم دلخواه است، در این صورت بنابه (۱) و (۲) داریم

$$D\omega = \sum_I \left[D(a_I) \wedge dx_I + a_I D(dx_I)\right]$$

چون $D(dx_I) = 0$ و $D(a_I) = da_I$، نتیجه می‌گیریم $D\omega = d_\iota\omega$. □

نتیجه فرض کنید $g : V \longrightarrow U$ یک دیفئومورفیسم بین مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}^k$ (یا $\mathbb{H}^k$) است. در این صورت، به‌ازاء هر فرم ω بر U داریم $d(g^*\omega) = g^*(d_\iota\omega)$.

برهان: کافی است بررسی شود که عملگر $D = (g^{-1})^* \circ d \circ g^*$ خواص (۱)، (۲) و (۳) را دارد. نتیجه را قبلاً در مورد توابع ثابت کرده‌اید. پس D و d در مورد توابع بر U یکسانند. نتیجتاً $D = d$ یا $d \circ g^* = g^* \circ d$. □

درست مثل قانون تبدیل طبیعی

$$\int_V g^*\omega = \int_U \omega$$

که امکان تعریف انتگرال بر منیفلدها را فراهم نمود، رابطهٔ $d \circ g^* = g^* \circ d$ نیز امکان می‌دهد که از فرمهای بر منیفلدها دیفرانسیل بگیریم. فرض کنید ω یک $p-$ فرم بر یک منیفلد مرزدار X است. مشتق خارجی $d_\iota\omega$ رابه صورت موضعی تعریف می‌کنیم. اگر $\varphi : U \longrightarrow X$ یک پیمایش موضعی دلخواه باشد، آنگاه $d_\iota\omega$ را بر مجموعهٔ برد $\varphi(U)$ به صورت

$$(\varphi^{-1})^* d(\varphi^*\omega)$$

تعریف می‌کنیم. اگر $\psi : V \longrightarrow X$ پیمایش موضعی دیگری با برد همپوش با برد φ باشد، آ نگاه بر منطقهٔ همپوش $\varphi(U) \cap \psi(V)$ داریم

$$(\varphi^{-1})^* d(\varphi^*\omega) = (\psi^{-1})^* d(\psi^*\omega)$$

زیرا اگر $g = \varphi^{-1} \circ \psi$، آنگاه بنابه نتیجهٔ بالا، داریم

$$g^* d(\varphi^*\omega) = d(g^*\varphi^*\omega) = d(\psi^*\omega)$$

و بنابراین

$$(\psi^{-1})^* d(\psi^*\omega) = (\psi^{-1})^* g^* d(\varphi^*\omega) = (\varphi^{-1})^* d(\varphi^*\omega)$$

چون هر نقطه از X در برد یک پیمایش قرار دارد، $d_\iota\omega$ یک $(p+1)-$فرم خوش تعریف و فراگیر بر X است. ترجمهٔ خواص مشتق خارجی از حالت فضای اقلیدسی به حالت کلی را به شما می‌سپاریم. یعنی ثابت کنید که

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

قضیه. عملگر دیفرانسیل خارجی در مورد فرمهای بر منیفلدهای مرزدار دلخواه خواص ذیل را دارد:

۱. $d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$.

۲. $d(\omega\wedge\theta)=(d,\omega)\wedge\theta+(-1)^p\,\omega\wedge d\theta$، که ω یک $p-$ فرم است.

۳. $d(d,\omega)=0$

۴. اگر f تابع باشد، df با تعریف قبلی‌اش یکی است.

۵. اگر $g:Y\longrightarrow X$ دیفئومورفیسم باشد، آنگاه $d\circ g^*=g^*\circ d$.

دو عملگر اقلیدسی $\int$ و d به شیوهٔ یکسانی به حالت منیفلدها توسیع یافتند: هر دو نسبت به تغیر مختصات به طور طبیعی تبدیل می‌یابند. اما تفاوت بسیاری در عمق این دو تبدیل است. قضیهٔ تغییر متغییر برای انتگرال‌ها (که در بخش قبل مطرح شد ولی اثبات نشد) پیچیده‌تر است، و نیاز به تحلیل دقیق این مطلب دارد که المان حجم اقلیدسی چگونه توسط دیفئومورفیسم‌ها تخریب می‌شود. در مقابل، اینکه d با برگشت تعویض می‌شود، $d\circ g^*=g^*\circ d$، نتیجه‌ای ساده از تعریف می‌باشد. به علاوه، لزومی ندارد g دیفئومورفیسم باشد؛ فرمول در مورد نگاشت‌های دلخواه نیز صحیح است.

قضیه. گیریم $g:Y\longrightarrow X$ نگاشتی هموار بین منیفلدهای مرزدار است. در این صورت به‌ازاء هر فرم ω بر X، داریم $d(g^*\omega)=g^*(d,\omega)$.

برهان: وقتی ω یک $0-$فرم باشد، قبلاً در پایان بخش ۳ این فرمول اثبات شده است. همچنین، هرگاه $\omega=df$ دیفرانسیل یک $0-$فرم باشد، آنگاه $d\omega=0$ و لذا $g^*(d,\omega)=0$ و

$$d(g^*\omega)=d(g^*df)=d(dg^*f)=0$$

به علاوه، قسمت (۲) از قضیهٔ قبل نشان می‌دهد که اگر این قضیه برای یک ω و θ ای برقرار باشد، آنگاه برای $\omega\wedge\theta$ نیز برقرار است.اما هر فرم بر X به شکل موضعی به صورت ضرب خارجی $0-$فرمها و تعدادی دیفرانسیل از $0-$ فرمها قابل بیان است، چرا که در فضای اقلیدسی هر فرمی به شکل $\sum a_I\,dx_I$ است. چون قضیه موضعی است (دو فرم $d(g^*\omega)$ و $g^*(d,\omega)$ وقتی و تنها وقتی برابرند که در همسایگی هر یک از نقاط X برابر باشند)، حکم اثبات شده است. □

قبل از پایان این بخش، عملگر d را در چند حالت خاص به صورت صریح محاسبه می‌کنیم. در واقع، بیان فرمها به شکل میدان‌های برداری، ممکن است بیشتر معروف باشد.

$0-$فرمها اگر f تابعی بر $\mathbb{R}^3$ باشد، آنگاه

$$df=g_1\,dx_1+g_2\,dx_2+g_3\,dx_3$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

که در آن

$$(g_1, g_2, g_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = \text{grad}(f)$$

گرادیان میدان برداری f است.

1**–فرمها.** گیریم

$$\omega = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + f_3\, dx_3$$

در این صورت

$$\begin{aligned} d,\omega &= df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 + df_3 \wedge dx_3 \\ &= g_1\, dx_2 \wedge dx_3 + g_2\, dx_3 \wedge dx_1 + g_3\, dx_1 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

که در آن

$$g_1 = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \qquad g_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \qquad g_3 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

اگر (f_1, f_2, f_3) و (g_1, g_2, g_3) را به ترتیب $\vec{F}$ و $\vec{G}$ بنامیم، آنگاه $\vec{G} = \text{Curl}\,(\vec{F})$.

2**–فرمها.** بهازاء

$$\omega = f_1\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2\, dx_3 \wedge dx_1 + f_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

داریم

$$\begin{aligned} d,\omega &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (\text{div}\, \vec{F})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

3**–فرمها.** دیفرانسیل هر 3–فرم بر $\mathbb{R}^3$ الزاماً صفر است. چرا؟

پس عملگرهای کلاسیک در حسابان برداری در 3–فضا (یعنی، گرادیان، کرل و دیورژانس) عملاً همان عملگر d در شکل میدان برداری هستند. نشان دهید که شرط دوری $d^2 = 0$ بر $\mathbb{R}^3$ با فرمهای معروف زیر معادل است:

$$\text{Curl}\,(\text{grad}\, f) = 0, \qquad \text{div}\,(\text{Curl}\, \vec{F}) = 0.$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

تمرینات

۱. مشتق خارجی هر یک از فرمهای زیر که در $\mathbb{R}^3$ هستند را محاسبه کنید:

الف) $z^2 dx \wedge dy + (z^2+2y) dx \wedge dz,$ ب) $13x dx + y^2 dy + xyz dz,$

ج) $f\,dy$, f و g توابع هموار دلخواهند د) $(x+2y^3)(dz \wedge dx = \frac{1}{2} dy \wedge dx).$

۲. نشان دهید که میدان برداری

$$\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

دارای کرل صفر است، ولی آنرا به صورت گرادیان هیچ تابعی نمی‌توان نوشت.

بخش ۵.۴ کوهومولوژی فرمها

[۲] $p-$ فرم ω بر X را در صورتی بسته گوییم که $d\omega = 0$ و آنرا در صورتی دقیق گوییم که برای یک $(p-1)-$ فرم θ بر X، داشته باشیم $\omega = d\theta$. چون $d^2 = 0$، پس هر فرم دقیق، بسته است، اما در حالت کلی لازم نیست هر فرم بسته، دقیق باشد. در واقع، اینکه فرمهای بسته بر X حتماً دقیق باشند، عملاً یک موضوع کاملاً توپولوژیک است. شما احتمالاً در حسابان با این مطلب منتهی با بیانی متفاوت، مواجه شده‌اید. همهٔ میدان‌های برداری گرادیان دارای کرل صفرند، ولی عکس آن به چگونگی دامنهٔ میدان بستگی دارد (تمرین ۲). به بیان فرمها، $1-$فرمها

$$\omega = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy$$

t بسته است، ولی دقیق نیست. در این بخش به مطالعهٔ مقدماتی تفاوتهای بین دقیق بودن و دقیق نبودن می‌پردازیم. موضوع بسیار جالب است، لذا همچون بحث در مورد اعداد چرخشی، تحقیق بسیاری از مطالب را به عنوان تمرین بر عهدهٔ شما می‌گذاریم.

به منظور تعیین میزان اشتباه نتیجه‌گیری «بسته $\Leftarrow$ دقیق»، رابطه‌ای هم‌ارزی بر فضای برداری همهٔ $p-$ فرمهای بستهٔ بر X تعریف می‌کنیم. دو $p-$ فرم بستهٔ ω و ω' را در صورتی کوهومولوگ گوییم و به اختصار می‌نویسیم $\omega \sim \omega'$ که تفاضل آنها دقیق باشد: $\omega - \omega' = d\theta$. (نشان دهید که این رابطه، رابطه‌ای هم‌ارزی است.) مجموعهٔ دسته‌های هم‌ارزی را با نماد $H^p(X)$ نشان داده و به آن $p-$ امین گروه کوهومولوژی دورام X می‌گوییم. $H^p(X)$ بیش از یک مجموعه است؛ به طور طبیعی

[۲] این بخش در ادامهٔ درس بکار نمی‌آید، بلکه تنها در تعدادی مسأله از آن استفاده می‌شود. می‌توانید از آن صرف نظر کنید.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

فضای ساختار برداری می‌پذیرد. زیرا اگر $\omega_1 \sim \omega_1'$ و $\omega_2 \sim \omega_2'$، آنگاه $\omega_1+\omega_2 \sim \omega_1'+\omega_2'$. به علاوه اگر $c \in \mathbb{R}$، آنگاه $c\omega_1 \sim c\omega_1'$. پس اعمال فضایی برداری بر $p-$ فرمهای بسته، به طور طبیعی موجب تعریف اعمال فضای برداری بر دسته‌های کوهومولوژی می‌شود. دستهٔ کوهومولوژی صفر 0 در فضای برداری $H^p(X)$ درست عبارت است از گردایه همهٔ $p-$ فرمهای دقیق بر X، زیرا همواره داریم: $\omega + d\theta \sim \omega$.

فرض کنید $f : X \longrightarrow y$ نگاشتی هموار است، در این صورت f^* $p-$ فرمهای بر y را به $p-$ فرمهای بر X برگشت می‌دهد. با استفاده از رابطهٔ $f^* \circ d = d \circ f^*$ ملاحظه می‌گردد که f^* فرمهای بسته را به فرمهای بسته برگشت می‌دهد و فرمهای دقیق را نیز به فرمهای دقیق. در واقع اگر $\omega \sim \omega'$ آنگاه $f^*\omega \sim f^*\omega'$. بنابراین f^* دسته‌های کوهومولوژی بر Y را به دسته‌های کوهومولوژی بر X برگشت می‌دهد؛ یعنی f^* نگاشتی $f^\sharp : H^p(Y) \to H^p(X)$ القا می‌کند. چون f^* خطی است، به سادگی می‌توانید تحقیق کنید که $f^\#$ نیز خطی است. (یادآور می‌شویم که $f^\sharp$ برگشت است، یعنی اگر $f : X \to Y$ آنگاه $f^\# : H^p(Y) \to H^p(X)$.)

اثبات گزاره‌های شماره‌گذاری شده در زیر، به عنوان تمرین برعهدهٔ خواننده است:

۱. اگر $Z \xleftarrow{g} Y \xleftarrow{f} X$، آنگاه $(g\circ f)^\# = f^\# \circ g^\#$.

$H^p(X)$ را در حالتهای ساده می‌توان به راحتی محاسبه کرد. مثلاً اگر $p > \dim X$ آنگاه $H^p(X) = 0$. حالت سادهٔ دیگر چنین است؛

۲. بعد $H^0(X)$ با تعداد مؤلفه‌های همبندی در X برابر است.

[راهنمایی: هیچ $0-$فرم غیر دقیقی وجود ندارد.] نشان دهید که یک $0-$فرم (یعنی هر تابع) وقتی و تنها وقتی بسته است که بر هریک از مؤلفه‌های همبندی X ثابت باشد.

برای حصول به سایر اطلاعات کوهومولوژی، به تعریف عملگر P بر فرمها نیاز داریم. درست مثل عملگرهای $\int$ و d، عملگر P را ابتدا در حالت فضای اقلیدسی تعریف می‌کنیم و سپس آنرا به کمک پیمایش‌های موضعی به منیفلدها گسترش می‌دهیم؛ و مشابه عملگرهای قبلی، علت اینکه P قابل گسترش است، این است که تحت دیفئومورفیسمها به طور طبیعی تبدیل می‌گردد.

فرض کنید U مجموعهٔ بازی در $\mathbb{R}^k$ است و ۵ یک $p-$ فرم بر $R \times U$ می‌باشد. در این صورت ω را به صورت یکتا به شکل مجموع

$$\omega = \sum_I f_I(t,x)\, dt \wedge dx_I + \sum_J g_J(t,x)\, dx_J \qquad (۱.۴)$$

می‌توان نوشت. در اینجا t تابع مختصاتی استاندارد بر $\mathbb{R}$ است و $x_1, \cdots, x_k$ توابع مختصاتی استاندارد بر $\mathbb{R}^k$ می‌باشند. I و J دنباله‌های اندیسی هستند که به ترتیب طول آنها $p-1$ و p است. عملگر P $p-$ فرم ω را به $(p-1)-$فرم P_ω بر $R\times U$ می‌نگارد:

$$P\omega(t,x) := \sum_I \Big(\int_0^1 f_I(s,x)\, ds \Big) dx_I$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

توجه شود که $P\omega$ شامل جملهٔ dt نیست.
حال فرض کنیم $g: V \longrightarrow U$ دیفئومورفیسم بین مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}^k$ است $\phi: R\times V \longrightarrow \mathbb{R}\times U$ دیفئومورفیسم $\phi = (\times g)$ می‌باشد. خواص تبدیلی اساسی زیر را اثبات کنید:

۳. $\phi^* P\omega = P\phi^*\omega$.

[راهنمایی: اگر از نوشتن همه چیز به شکل مختصاتی صرف نظر کنید، کار مشکل نیست. فقط توجه کنید که $\phi^* dt = dt$ و نگاشت ϕ^* هر یک از دو مجموع در (۱) برای ω را به مجموعه‌های مشابه تبدیل می‌کند.]

حال استدلالهای برای انتقال عملگرهای $\int$ و d به حالت خمیندها را تکرار کنید:

۴. عملگرهای منحصر به فرد P وجود دارد که برای همهٔ خمیندها X تعریف می‌شود، $p-$ فرمهای بر $\mathbb{R}\times X$ را به $(p-1)-$فرمهای بر $\mathbb{R}\times X$ می‌برد و دو ویژگی به شرح زیردارد:
الف) اگر $\varphi: X \longrightarrow Y$ دیفئومورفیسم باشد و $\varphi\times$همانی$=\Phi$، آنگاه $\Phi^*\circ P = P\circ\Phi^*$.
ب) اگر X زیر مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}^k$ باشد، آنگاه P همچون قبل است.

مهم‌ترین مزیت این عملگر، فرمول شگفت‌انگیز زیر است. (تعجب نکنید. این فرمول در ابتدا شگفت‌آور است، صبر کنید!)

۵. گیریم $\pi: \mathbb{R}\times X \longrightarrow X$ عملگر تصویر معمولی است و $i_a: X \longrightarrow \mathbb{R}\times X$ نشانندهٔ با ضابطهٔ $x \mapsto (a,x)$ است. در این صورت

$$dP\omega + Pd\omega = \omega - \pi^* i_a^*\omega$$

[**راهنمایی:** این فرمول اساساً به نماد گذاری بالا ربط دارد. مثلاً، اگر ω به شکل در مجموع (۱) بیان شود، آنگاه $\pi^* i_a^*\omega = \sum_J g_J(x,a)dx_J$.]

اولین نتیجهٔ مهم این فرمول، عبارت است از

۶. **(لم پوآنکاره)** نگاشت‌های

$$\pi^\#: H^p(X) \longrightarrow H^p(\mathbb{R}\times X) \quad \text{و} \quad i_a^\#: H^p(\mathbb{R}\times X) \longrightarrow H^p(X)$$

وارون یکدیگرند. به ویژه، $H^p(\mathbb{R}\times X)$ با $H^p(X)$ ایزومورف است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

[**راهنمایی:** همانی= $\pi \circ i_a$، و لذا از تمرین ۱ نتیجه می‌شود همانی= $i_a^{\#} \circ \pi^{\#}$. تمرین ۵ درمورد فرمهای بسته ω را در مورد $\pi^{\#} \circ i_a^{\#}$ تعبیر کنید.]

اگر X را تک نقطه بگیریم، آنگاه به ازاء هر $P > 0$ ای $H^p(X) = 0$. اکنون لم پوآنکاره را به استقراء می‌توان نتیجه گرفت:

نتیجه اگر $k > 0$ آنگاه $H^p(\mathbb{R}^k) = 0$؛ یعنی، هر $p-$ فرم بسته بر $\mathbb{R}^k$ دقیق است، به شرطی که $0 < P$.

چند نتیجهٔ کمی پیچیده‌تر، به شرح زیرند

۷. اگر تگاشتهای $g : X \longrightarrow Y$ و f هموتوپ باشند، آنگاه $f^{\#} = g^{\#}$.

[**راهنمایی:** گیریم $H : \mathbb{R} \times X \longrightarrow Y$ نگاشتی هموار باشد که $H(a, x) = f(x)$ و $H(b, x) = g(x)$. در این صورت $f^{\#} = i_a^{\#} \circ H^{\#}$ و $g^{\#} = i_b^{\#} \circ F^{\#}$. اما از تمرین ۶ روشن است که $i_a^{\#} = i_b^{\#}$.]

اکنون نتیجهٔ تمرین ۶ را کامل کرده، ثابت کنید.

۸. اگر X انقباض‌پذیر باشد، آنگاه به ازاء هر $p > 0$ ای $H^p(x) = 0$.

این بخش را با حکمی عمیق‌تر تکمیل می‌کنیم.

قضیه اگر $p = 0$ یا $p = k$، آنگاه $H^(\mathbb{S}^k)$ یک بعدی است. به ازاء سایر p ها و نیز همهٔ $k > 0$ ها داریم $H^p(\mathbb{S}^k) = 0$.

روش استقرایی برای اثبات قضیه وجود دارد. فرض کنید قضیه برای $\mathbb{S}^{k-1}$ درست باشد، و آنرا برای $\mathbb{S}^k$ ثابت کنید. گیریم U_1 برابر $\mathbb{S}^k$ منهای قطب جنوب باشد، و U_2 برابر $\mathbb{S}^k$ منهای قطب شمال. U_1 و U_2 به کمک تصاویر گنجنگاری با $\mathbb{R}^{k-1}$ دیفئومورفند. ثابت کنید

۹. $U_1 \cap U_2$ با $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{k-1}$ وابرسان است.

[**راهنمایی:** تصویر گنجاوری نشان می‌دهد که $U_1 \cap U_2$ با $\mathbb{R}^{k-1} - \{0\}$ وابرسان است.]

اکنون روش تکنیکی در توپولوژی جبری، «استدلال میر–ویتوریس»، را به کار برده و حکم کلیدی زیر را ثابت می‌کنیم:

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

گزاره به ازاء هر $p > 1$، ای فضاهای برداری $H^p(U_1 \cap U_2)$ و $H^{p-1}(U_1 \cap U_2)$ ایزومورفند.

با p- فرم بستهٔ ω بر $\mathbb{S}^k$ آغاز می‌کنیم. چون $U_1 \cap U_2 = \mathbb{S}^k$ انقباض‌پذیر است، تمرین ۸ ایجاب می‌کند که تحدید ω به U_1 دقیق است؛ بنابراین $\omega = d\varphi_1$ بر U_1. به صورت مشابه $\omega_2 = d\varphi_2$ بر U_2. حال $(p-1)$-فرم $v = \varphi_1 - \varphi_2$ بر $U_1 \cap U_2$ را در نظر بگیرید. چون $d\varphi_1 = d\varphi_2$ بر $U_1 \cap U_2$، فرم v بسته است. بنابراین روشی برای ساخت $(p-1)$-فرمهای بستهٔ بر $U_1 \cap U_2$ از روی p- فرمهای بستهٔ بر $U_1 \cap U_2$ در اختیار داریم.

این روش عملاً معکوس‌پذیر است. توابعی بر $\mathbb{S}^k$ چون p_1 و p_2 به گونه‌ای می‌یابیم که p_1 در همسایگی‌ای از قطب شمال صفر می‌شود و p_2 در همسایگی‌ای از قطب جنوب، اما در همه جا $p_1 + p_2 = 1$. اکنون اگر v یک $(p-1)$-فرم بسته بر $U_1 \cap U_2$ باشد، آنگاه فرم φ_1 بر U_1 را $p_1 v$ تعریف می‌کنیم. اما v خود به خود در قطب شمال می‌ترکد و p_1 آنرا از بین می‌برد و لذا φ_1 بر کل U_1 به شکل هموار تعیین می‌گردد. به صورت مشابه بر U_2 تعریف می‌کنیم $\varphi_2 = -p_2 v$. توجه شود که $\varphi_1 - \varphi_2 = v$ بر $U_1 \cap U_2$. با فرض $\omega = d\varphi_1$ بر U_1 و$\omega = d\varphi_2$ بر U_2، یک p- فرم ω بر $U_1 \cup U_2$ تعریف می‌کنیم. چون $d\varphi_1 - d\varphi_2 = dv = 0$ بر $U_1 \cap U_2$، پس ω فرمی خوش‌تعریف بر کل $U_1 \cup U_2$ است و مشخصاً بسته است.

۱۰. ثابت کنید دو روش مشروح در بالا، گزاره را اثبات می‌کنند. (برای $p = 1$ چه رخ می‌دهد؟)

اکنون تقریباً کار تمام است. با توجه به بحث بالا

$$H^p(U_1 \cup U_2) = H^p(\mathbb{S}^k),$$

و بنا به تمرین ۹ و لم پوآنکاره داریم

$$H^{p-1}(U_1 \cap U_2) \simeq H^{p-1}(\mathbb{S}^{k-1}).$$

بنابراین، اگر $p > 1$، آنگاه

$$H^p(\mathbb{S}^k) \simeq H^{p-1}(\mathbb{S}^{k-1}).$$

دو مطلب جا افتاده است. بایستی برای آغاز استقراء ثابت شود، بعد $H^1(\mathbb{S}^1)$ برابر یک است، و نیز نشان داد که اگر $k > 1$ آنگاه $H^1(\mathbb{S}^k) = 0$. حکم اخیر، نتیجه‌ای از قضیهٔ استوکس است، و اثبات آنرا به تمرین ۱۰ از بخش ۷ موکول می‌کنیم. چنانچه تمرینات ۹ و ۱۰ از بخش ۴ و تمرین ۱۲ از بخش ۵ را تلفیق کنید، یک بعدی بودن $H^1(\mathbb{S}^1)$ را می‌توانید ثابت کنید.

بخش ۶.۴ قضیهٔ استوکس

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

رابطه‌ای قابل توجه بین عملگرهای $\int$ و d بر فرمها و عملگر ∂ (که به هر منیفلد مرزدار، مرزش را نسبت می‌دهد) بر منیفلدها وجود دارد. (جالبی آن از این جهت است که عملگر ∂ طبیعتی کاملاً هندسی دارد و عملگرهای d و $\int$ طبیعتی کاملاً آنالیزی دارند.) این رابطه در حالت یک بعدی، همان قضیهٔ بنیادی حسابان است و در حالت دو و سه بعدی، موضوع قضایای کلاسیک گرین، گاوس و استوکس هستند. در کل، فرض کنید X منیفلدی k–بعدی، جهت‌دار و فشرده است. پس ∂X یک منیفلد $(k-1)$–بعدی با جهت مرزی القایی از X بر ∂X است.

قضیهٔ تعمیم یافتهٔ استوکس اگر ω یک $(k-1)$–فرم هموار دلخواه بر X باشد، آنگاه

$$\int_{\partial X}\omega=\int_X d,\omega.$$

برهان: دو طرف معادله بر حسب ω خطی‌اند، و لذا می‌توان فرض کنیم ω دارای محمل فشردهٔ واقع در برد یک پیمایش موضعی $h:U\longrightarrow X$ است که U زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^k$ یا $\mathbb{H}^k$ است.
ابتدا فرض کنیم U در $\mathbb{R}^k$ باز است؛ به عبارت دیگر، $h(U)$ مرز X را قطع نکند. در این صورت $\int_{\partial X}\omega=0$ و

$$\int_X d\omega=\int_U h^*(d,\omega)=\int_U dv$$

که در آن $v=h^*\omega$. چون v یک $(k-1)$–فرم در k–فضا است، آنرا به صورت

$$v=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}f_i\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_k$$

می‌توان نوشت؛ که در اینجا $\widehat{dx_i}$ به معنی حذف جملهٔ dx_i از ضرب است. در این صورت

$$dv=\left(\sum_i\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k,$$

و

$$\int_{\mathbb{R}^k}dv=\sum_i\int_{\mathbb{R}^k}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\,dx_1\cdots dx_k. \qquad (۲.۴)$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

انتگرال روی $\mathbb{R}^k$ را مثل معمول با دنباله‌ای مکرر از انتگرال‌های روی $\mathbb{R}^1$ می‌توان محاسبه کرد، که در هر مورد آنرا به کمک قضیهٔ فوبینی می‌شود دنبال نمود. با انتگرال‌گیری از جملهٔ i ام نسبت به x_i، داریم:

$$\int_{\mathbb{R}^{k-1}}\left(\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\,dx_i\right)dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_k.$$

البته $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\,dx_i$ تابعی از $x_1,\cdots,\widehat{x_i},\cdots x_k$ است که هر $(k-1)$–تایی دلخواه $(b_1,\cdots,\widehat{b_i},\cdots,b_k)$ را به عدد $\int_{-\infty}^{\infty}g'tdt$ می‌نگارد، که $g(t)=f_i(b_1,\cdots,t,\cdots,b_k)$. چون v با محمل فشرده است، g در خارج هر بازهٔ به اندازه کافی بزرگ $(-a,a)$ در $\mathbb{R}^1$ صفر است. بنابراین، قضیهٔ بنیادی حسابان ایجاب می‌کند

$$\int_{-\infty}^{\infty}g'(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}g'(t)\,dt=g(a)-g(-a)=0-0=0.$$

بنابراین، همان طور که می‌خواستیم $\int_X d\omega=0$.

وقتی $U\subseteq\mathbb{H}^k$، تحلیل بالا کلاً مورد قبول است بجز آخرین قسمت در (۲). چون مرز $\mathbb{H}^k$ مجموعهٔ با شرط $x_k=0$ در $\mathbb{R}^k$ است، آخرین انتگرال برابر است با

$$\int_{\mathbb{R}^{k-1}}\left(\int_{0}^{\infty}\frac{\partial f_k}{\partial x_k}\,dx_k\right)dx_1\cdots\widehat{dx_k}$$

اکنون از شرط بالا با محمل فشرده بودن ω نتیجه می‌گیریم که اگر x_k در خارج بازهٔ به اندازه کافی بزرگ $(0;a)$ قرار داشته باشد، آنگاه f_k صفر است. پس $f_k(x_1,\cdots,x_k,a)=0$ و $f_k(x_1,\cdots,x_{k-1},0)\neq 0$. بنابراین، با استفاده از قضیهٔ بنیادی حسابان مثل بالا، داریم

$$\int_X d\omega=\int_{\mathbb{R}^{k-1}}-f_k(x_1,\cdots,x_{k-1},0)\,dx_1\cdots dx_{k-1}$$

از سوی دیگر

$$\int_{\partial X}\omega=\int_{\partial\mathbb{H}^k}v$$

چون $x_k=0$ بر $\partial\mathbb{H}^k$، پس $dx_k=0$ بر $\partial\mathbb{H}^k$. نتیجتاً، اگر $i<k$، آنگاه تحدید فرم $(-1)^{i-1}f_i\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx^k$ به $\partial\mathbb{H}^k$ برابر صفر است. پس تحدید v به $\partial\mathbb{H}^k$ برابر $(-1)^{k-1}f_k(x_1,\cdots,x_{k-1},0)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{k-1}$ است، که در نتیجه، انتگرال روی $\partial\mathbb{H}^k$ از آن برابر $\int_{\partial X}\omega$ است.

اکنون $\partial\mathbb{H}^k$ به طور طبیعی با $\mathbb{R}^{k-1}$ نسبت به نگاشت بدیهی، دیفئومورف می‌باشد؛ یعنی نسبت به $(x_1,\cdots,x_{k-1},0)\mapsto(x_1,\cdots x_{k-1})$. اما در حالت کلی این دیفئومورفیسم جهت معمولی $\mathbb{R}^{k-1}$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

را به جهت مرزی $\partial\mathbb{H}^k$ نمی‌برد. گیریم $e_1,\cdots,e_k$ پایهٔ استاندارد برای $\mathbb{R}^k$ است. پس $e_1,\cdots,e_{k-1}$ پایهٔ مرتب استاندارد برای $\mathbb{R}^{k-1}$ می‌شود. چون $\mathbb{H}$ نیم فضای بالایی است، بردار یکهٔ قائم برونسوی بر $\partial\mathbb{H}^k$ عبارت است از $-e_k=(0,\cdots,0,-1)$. بنابراین، در جهت مرزی بر $\partial\mathbb{H}^k$، علامت پایهٔ جهت‌دار $\{-e_k,e_1,\cdots,e_{k-1}\}$ در جهت استاندارد $\mathbb{H}^k$ است. ملاحظه می‌شود که این علامت با $(-1)^k$ برابر است. بنابراین، دیفئومورفیسم معمولی $\partial\mathbb{H}^k\longrightarrow\mathbb{R}^k$ جهتی با عامل $(-1)^k$ را حفظ می‌کند.
نتیجه، چنین است

$$\begin{aligned}\int_{\partial X}\omega &= \int_{\partial\mathbb{H}^k}(-1)^{k-1}f_k(x_1,\cdots,x_{k-1},0)\,dx_1\cdots dx_{k-1}\\ &= (-1)^k\int_{\mathbb{R}^{k-1}}(-1)^{k-1}f_k(x_1,\cdots,x_{k-1},0)\,dx_1\cdots dx_{k-1}\,.\end{aligned}$$

چون $(-1)^k(-1)^{k-1}=-1$، فرمول درست همان است که برای $\int_X d,\omega$ آمد. □

انواع کلاسیک قضیهٔ استوکس در تمرینات مطرح شده‌اند و در آن میان کاربردهایی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. با این حال، قدر قضیهٔ استوکس برای ما از این جهت است که ارتباطی بنیادی بین آنالیز و توپولوژی برقرار می‌سازد. بخش‌های بعدی کتاب به توضیح این ارتباط اختصاص دارند.

تمرینات

۱. نشان دهید که قضیهٔ استوکس در مورد بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ در $\mathbb{R}^1$ درست همان قضیهٔ بنیادی حسابان است. (به تمرین ۱ از بخش ۴ توجه شود.)

۲. فرمول کلاسیک گرین در صفحه را ثابت کنید: گیریم W یک دامنهٔ فشرده در $\mathbb{R}^2$ با مرز $\partial W=\gamma$ است. ثابت کنید

$$\int_X f\,dx+g\,dy=\int_W\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

۳. قضیهٔ دیوژانس را ثابت کنید: گیریم ω دامنه‌ای فشرده در $\mathbb{R}^3$ با مرز هموار است و $F=(f_1,f_2,f_3)$ میدان برداری هموازی بر ω می‌باشد. در این صورت

$$\int_W(\operatorname{div}\vec{F})\,dx\,dy\,dz=\int_{\partial W}(\vec{n}.\vec{F})\,dA.$$

(در اینجا $\vec{n}$ بردار یکهٔ قائم برنسو بر ∂W است. به تمرینات ۱۳ و ۱۴ از بخش ۴ برای dA و به صفحهٔ ؟؟برای $\operatorname{div}\vec{F}$ مراجعه شود.)

۴. قضیهٔ کلاسیک استوکس را ثابت کنید: گیریم S یک $2-$منیفلد جهتدار، مرزدار و فشرده در $\mathbb{R}^3$ است و $\vec{F}=(f_1,f_2,f_3)$ یک میدان برداری هموار در همسایگی‌ای از S است. ثابت کنید

$$\int_S(\mathrm{Curl}\ \vec{F}.\vec{n})\,dA=\int_{\partial S}f_1dx_1+f_2dx_2+f_3dx_3.$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

(در اینجا $\vec{n}$ بردار یکهٔ قائم برونسوی بر S است. برای dA به تمرینات ۱۳ و ۱۴ از بخش ۴ و برای $\mathrm{Curl}\,\vec{F}$ به صفحهٔ ۱۷۸ توجه شود.)

۵. قضیهٔ دیورژانس تعبییر جالبی در دینامیک سیالات دارد. گیریم D دامنه‌ای فشرده در $\mathbb{R}^3$ با مرز هموار $S = \partial D$ است. فرض کنید D با یک سیال تراکم‌ناپذیر که چگالی آن در نقطهٔ x برابر $p(x)$ است و سرعت آن برابر $\vec{v}(x)$ می‌باشد، پر شده است. در این صورت کمیت

$$\int_S \rho(\vec{v}.\vec{n})\,dA$$

میزان جریان عبوری از S در هر لحظهٔ به خصوص ثابت را می‌سنجد. اگر x $mathrmind$ و B_ϵ گوی به شعاع ϵ و مرکز x باشد، «مقدار بینهایت کوچک» شار افزوده شده به D در x در یک لحظهٔ ثابت دلخواه، برابر است با

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B_\epsilon}\frac{p(\vec{v}.\vec{n})\,dA}{\mathrm{Vol}\,(B_\epsilon)} \qquad (۳.۴)$$

نشان دهید ۳.۴ با $\mathrm{div}\,\rho\vec{v}$ برابر است و از قضیهٔ دیورژانس استفاده کرده و نشان دهید که شار خارج شده از D در هر لحظهٔ دلخواه ثابت با مقدار شار موجود در آن برابر است.

۶. قضیهٔ دیورژانس در الکترو استاتیک نیز مفید است. گیریم D ناحیه‌ای فشرده در $\mathbb{R}^3$ است که مرز آن هموار و برابر S است. فرض کنید $0 \in \mathrm{Int}\,(D)$. اگر بار الکتریکی به اندازهٔ q در مکان 0 قرار داشته باشد، میدان برداری حاصل برابر با $q\vec{r}/r^3$ است که $\vec{r}(x)$ بردار از 0 به x است و $r(x)$ طول آن می‌باشد. نشان دهید که مقدار بار q را با نیروی موجود بر مرز آن به کمک قانون گاوس می‌توان محاسبه کرد:

$$\int_S \vec{F}.\vec{n}\,dA = 4\pi q.$$

[**راهنمایی:** قضیهٔ دیوژرانس را برای ناحیهٔ شامل D منهای یک گوی باز کوچک حول مبداء به کار ببرید.]

۷*. گیریم X منیفلدی فشرده و بدون مرز است و ω یک $k-$فرم دقیق بر X می‌باشد، که k بعد X می‌باشد. ثابت کنید $\int_X \omega = 0$. [**راهنمایی:** از قضیهٔ استوکس استفاده کنید. به یاد داشته باشید که X منیفلد ای بدون مرز است و بنابراین ∂X تهی می‌باشد.]

۸*. فرض کنید $X = \partial W$، که ω منیفلدی فشرده است و $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی هموار می‌باشد. گیریم ω یک $k-$فرم بسته بر Y است، که $k = \dim X$. ثابت کنید که اگر f به کل W توسیع داده شود، آنگاه $\int_X f^*\omega = 0$.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۹*. فرض کنید $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ نگاشت‌هایی هموتوپ هستند و بعد منیفلد فشرده و بدون مرز X برابر k است. ثابت کنید که به ازاء همهٔ k−فرم های بستهٔ ω بر Y داریم

$$\int_X f_0^*\omega = \int_X f_1^*\omega.$$

[**راهنمایی:** تمرین قبل.]

۱۰. نشان دهید که اگر X منیفلدی همبند ساده باشد، آنگاه $\oint_\gamma \omega = 0$ به ازاء هر 1−فرم بستهٔ ω بر X و همهٔ منحنی‌های بستهٔ γ در X. [**راهنمایی:** تمرین قبل.]

۱۱. ثابت کنید که اگر X منیفلدی همبند ساده باشد، آنگاه همهٔ 1−فرمهای بسته ω بر X دقیق هستند. [**راهنمایی:** به تمرین ۱۱ از بخش ۴ توجه کنید.]

۱۲. از تمرین ۱۱ نتیجه بگیرید که اگر $k > 1$، آنگاه $H^1(\mathbb{S}^k) = 0$.

۱۳. فرض کنید Z_0 و Z_1 زیر منیفلدهایی p− بعدی و فشرده و هم مرز در X هستند. ثابت کنید به ازاء هر p− فرم بسته ω بر X داریم

$$\int_{Z_0} \omega = \int_{Z_1} \omega.$$

۱۴. (الف) فرض کنید ω_1 و ω_2 دو p− فرم هومولوگ بر X هستند و Z زیر منیفلدی p− بعدی، جهت‌دار و فشرده است. ثابت کنید

$$\int_Z \omega_1 = \int_Z \omega_2.$$

(ب) نتیجه بگیرید که انتگرالگیری روی Z، نگاشتی از گروه کوهومولوژی $H^p(X)$ بتوی $\mathbb{R}$ تعریف می‌کند، که آنرا با نماد $\int_Z : H^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ نشان می‌دهیم. تحقیق کنید $\int_Z$ تابعکی خطی بر $H^p(X)$ است.

(ج) فرض کنید Z مرز یک زیر منیفلد $(p+1)$−بعدی جهت‌دار، فشرده و مرزدار چون X است. نشان دهید $\int_Z$ بر $H^p(X)$ صفر است.

(د) نشان دهید که اگر دو منیفلد جهت‌دار فشرده Z_1 و Z_2 در X هم مرز باشند، آنگاه دو تابعک خطی $\int_{Z_1}$ و $\int_{Z_2}$ نیز برابرند.

بخش ۷.۴ انتگرال و نگاشت

اولین کاربرد قضیهٔ استوکس که مطرح می‌کنیم، قضیهٔ زیر است که عملگر تحلیلی انتگرالگیری را به رفتار توپولوژی نگاشتها ارتباط می‌دهد.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

فرمول درجه. گیریم $f : X \longrightarrow Y$ نگاشت هموار دلخواهی بین منیفلدهای جهت‌دار و فشرده و با بعد k است، و ω یک k−فرم بر Y است. در این صورت

$$\int_X f^* \omega = \deg(f) \int_Y \omega.$$

پس نگاشت f انتگرال هر فرم را با مضربی صحیح تغییر می‌دهد. مضربی که طبیعتی کاملاً توپولوژی دارد: ناوردای $\deg(f)$. این قضیه کاربردهای فراوانی دارد. یکی از ساده‌ترین آنها اصل آرگومان است که در فصل مقدمه تشریح شد. گیریم

$$p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$$

چند جمله‌ای مختلط است و Ω ناحیه‌ای در صفحه‌است که مرز آن هموار است و هیچ صفری از p را در بر ندارد. می‌خواهیم ثابت کنیم که تعداد صفرهای p در داخل Ω، با احتساب تکرار آنها، برابر انتگرال زیر است

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} d(\arg p(z))$$

صلاح می‌دانیم که انتگرال را تعبیر کنیم. یادآور می‌شویم که هر عدد مختلط ناصفر ω را به شکل $r e^{i\theta}$ می‌توان نوشت، که r نرم ω و θ، بنا به تعریف، آرگومان ω است. اما $\theta = \arg(\omega)$ تابعی است حقیقتاً خوش تعریف؛ چون $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi)}$، مقادیر $\theta + 2\pi n$ همگی شایستگی $\arg(\omega)$ را دارند، که n عددی صحیح است. خوشبختانه، با گذر بخ مشتق خارجی، این ابهام را می‌توان رفع کرد. زیرا در یک همسایگی مناسب از هر نقطه‌ای، همواره مقادیر $\arg(\omega)$ را طوری می‌توان در هر نقطه‌ای انتخاب کرد که $\arg(\omega)$ تابعی هموار از ω شود؛ آنرا $\arg_0(\omega)$ می‌نامیم. در این صورت، هر تابع هموار $\varphi(\omega)$ دیگر در این همسایگی که در فرمول لازم $\omega = |\omega| e^{i\varphi(\omega)}$ صدق کند، می‌بایستی به ازاء یک عدد صحیح n ای با $\arg_0(\omega) + 2\pi n$ برابر باشد. چون φ و $\arg_0$ در عددی ثابت متفاوتند، $d\varphi = d\arg_0$. این 1−فرم هموار که بر $C - \{0\}$ تعریف می‌شود، با نماد $d\arg$ نشان می‌دهیم. البته به ظاهر این شیء دیفرانسیل یک تابع است. ولی چنین نیست، بلکه در همسایگی از هر نقطه‌ای، موضعاً دیفرانسیل تابعی مناسب است.

تابع مورد انتگرال در اصل آرگومان، 1−فرم $Z \mapsto d\arg p(z) = p^*(d\arg)$ است. این تابع بر کل صفحهٔ مختلط به جز ریشه‌های p تعریف شده و هموار است. چون قبلاً ثابت کرده‌ایم که صفرهای p در Ω با درجهٔ نگاشت $f : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{S}^1$ قابل محاسبه است، که

$$f(z) = \frac{p(z)}{|p(z)|} = e^{i \arg(p(z))}$$

بایستی انتگرال $d\arg p(z)$ را با $2\pi \deg(f)$ تعویض نمود. اکنون، از فرمول درجه در مورد تحدید 1−فرم $d\arg$ به $\mathbb{S}^1$ استفاده می‌کنیم. اگر

$$\omega = f(z) = e^{i\arg(p(z))}$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

آنگاه $\arg(\omega) = \arg p(z)$. چون $\arg p(z)$ عملاً تابعی هموار است، حداقل به شکل موضعی، داریم

$$d \arg p(z) = d[f^* \arg(\omega)] = f^* \, d \arg(\omega)$$

بنابراین

$$\int_{\partial\Omega} d \arg p(z) = \deg(f) \int_{\mathbb{S}^1} d \arg(\omega)$$

محاسبهٔ انتگرال روی $\mathbb{S}^1$ خیلی بدیهی است. به وضوح، اگر از $\mathbb{S}^1$ نقطه‌ای، مثلاً $\omega = 1$ را حذف کنیم، مقدار انتگرال تغییر نخواهد کرد. اما $\mathbb{S}^1 - \{1\}$ را توسط $\theta \mapsto e^{i\theta}$ که $\theta \in (0, 2\pi)$ می‌توان پیمایش کرد. $\arg(\omega)$ تابعی هموار بر $\mathbb{S}^1 - \{1\}$ است که توسط نگاشت همانی $\theta \mapsto \theta$ به $(0; 2\pi)$ برگشت داده می‌شود. بنابراین

$$\int_{\mathbb{S}^1} d \arg(\omega) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

که به دنبال آن بودیم.

قضیهٔ ذیل در مرکز فرمول درجه جا دارد، که آنرا به عنوان ویژگی اساسی درجه می‌توان به خاطر سپرد.

قضیه. اگر $X = \partial W$ و $f : X \longrightarrow Y$ به طور هموار به کل W توسیع یابد، آنگاه به ازاء هر k–فرم ω بر Y داریم $\int_X f^* \omega = 0$. (در اینجا X و ω فشرده‌اند، هر سه منیفلد جهت‌دارند و $k = \dim X = \dim Y$.)

برهان: گیریم $F : W \longrightarrow Y$ توسیعی از f است. چون $F = f$ بر X، بنابراین

$$\int_X f^* \omega = \int_{\partial W} F^* \omega = \int_W F^* d, \omega$$

اما ω یک k–فرم بر منیفلدی k–بعدی است و بنابراین $d\omega = 0$. (همهٔ $(k+1)$–فرمهای بر منیفلدهای k–بعدی خود به خود صفر است.) $\square$

نتیجه. اگر $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ نگاشت‌هایی هموتوپ بین منیفلدهای k–بعدی جهت‌دار و فشرده باشند آنگاه به ازاء هر k–فرم ω بر Y داریم

$$\int_X f_0^* \omega = \int_X f_1^* \omega.$$

برهان: گیریم $F : I \times X \to Y$ هموتوپی است. در این صورت $\partial(I \times X) = X_1 - X_0$ و لذا

$$0 = \int_{\partial(I \times X)} (\partial F)^* \omega = \int_{X_1} (\partial F)^* \omega - \int_{X_0} (\partial F)^* \omega,$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

(بر طبق قضیه، صفر است). اما وقتی X_0 و X_1 را با X یکی بگیریم، ∂F بر X_0 برابر f_0 و بر X_1 برابر f_1 می‌شود.

نوع موضعی فرمول درجه حول مقادیر منظم، به سادگی قابل طرح است، و اثباتش نشان می‌دهد که عملاً چرا عامل $\deg(f)$ ظاهر می‌گردد.

لم. گیریم y یک مقدار منظم برای نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ بین منیفلدهای $k-$بعدی است. در این صورت یک همسایگی چون U از y چنان وجو دارد که فرمول درجه

$$\int_X f^* \omega = \deg(f) \int_Y \omega$$

به ازاء هر $k-$فرم ω با محمل در U برقرار است.

برهان: چون f به شکل موضعی در هر نقطهٔ در پیشنگارهٔ $f^{-1}(y)$ دیفئومورفیسم موضعی است، y یک همسایگی U چنان می‌پذیرد که $f^{-1}(U)$ از مجموعه‌های باز مجزای $V_1, \cdots, V_N$ تشکیل می‌شود، و به ازاء هر $i = 1, \cdots, N$ ای $f : V_i \longrightarrow U$ دیفئومورفیسم است (تمرین ۷ از بخش ۴ در فصل ۱). اگر ω با محمل در U داشته باشد، در این صورت $f^* \omega$ با محمل در $f^{-1}(U)$ خواهد بود؛ در نتیجه

$$\int_X f^* \omega = \sum_{i=1}^{N} \int_{V_i} f^* \omega$$

اما چون $f : V_i \longrightarrow U$ دیفئومورفیسم است، می‌دانیم

$$\int_{V_i} f^* \omega = \sigma_i \int_U \omega$$

علامت σ_i بسته به اینکه $f : V_i \longrightarrow U$ حافظ جهت باشد یا نباشد، برابر $+1$ یا -1 است. حال، با استفاده از تعریف، داریم $\deg(f) = \sum \sigma_i$ و اثبات تمام است. □

بالاخره، فرمول درجه را در حالت کلی ثابت می‌کنیم. مقدار منظمی y برای $f : X \longrightarrow Y$ انتخاب نموده و همسایگی‌ای U از y مثل در لم انتخاب می‌کنیم. بنا به لم ایزوتوپی از بخش ۶ در فصل ۳، به ازاء هر نقطهٔ $z \in Y$، دیفئومورفیسم‌ای $h : Y \longrightarrow Y$ می‌توانیم بیابیم که با نگاشت همانی ایزوتوپ است و y را به z می‌نگارد. پس گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های باز $h(U)$، که $h : Y \longrightarrow Y$ یک دیفئومورفیسم ایزوتوپ با نگاشت همانی است و Y را می‌پوشانند. بنا به فرض فشردگی، تعدادی متناهی از نگاشت‌های $h_1, \cdots, h_n$ چنان می‌توانیم بیابیم که $y = h_1(U) \cup \cdots \cup h_n(U)$. به کمک افراز یکانی، هر فرم ω را به صورت مجموعی از فرمها می‌توان نوشت، که محمل هر یک از آنها در یکی از مجموعه‌های $h_i(U)$ قرار دارد؛ پس چون هر دو طرف فرمول درجه

$$\int_X f^* \omega = \deg(f) \int_Y \omega$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

نسبت به ω خطی هستند، کافی است فرمول را برای فرمهای با محمل در یک $h(U)$ دلخواه ثابت کنیم.
پس فرض کنیم ω فرمی با محمل در $h(U)$ است. چون همانی $\sim h$، پس $h\circ f \sim f$. در نتیجه، بنا به نتیجهٔ بالا، داریم

$$\int_X f^*(h^*\omega) = \deg(f)\int_Y h^*\omega$$

بالاخره، دیفئومورفیسم h حافظ جهت است؛ زیرا از همانی $\sim h$ نتیجه می‌شود $\deg(h) = +1$. اکنون، از خاصیت تغییر متغیر داریم

$$\int_Y h^*\omega = \int_Y \omega$$

و

$$\int_X f^*\omega = \deg(f)\int_Y \omega$$

که به دنبال آن بودیم. □

تمرینات

۱. نشان دهید که 1–فرم $d\arg$ در $\mathbb{R}^2-\{0\}$ درست عبارت است از

$$\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

که در تمرینات قبلی مطرح شده است. [**راهنمایی:** $\theta = \arctan(y/x)$] (این فرم را نیز با نماد $d\theta$ نشان می‌دهیم.) به ویژه، قبلاً نشان داده‌ایم که $d\arg$ بسته است ولی دقیق خیر.

۲. گیریم γ یک منحنی بستهٔ هموار در $\mathbb{R}^2-\{0\}$ و ω یک 1–فرم بستهٔ دلخواه بر $\mathbb{R}^2-\{0\}$ است. ثابت کنید

$$\oint_\gamma \omega = W(\gamma,0)\int_{\mathbb{S}^1}\omega$$

که $W(\gamma,0)$ **عدد چرخشی** γ نسبت به مبداء است. $W(\gamma,0)$ درست مثل $W_2(\gamma,0)$ است که در آن به جای درجهٔ به پیمانهٔ ۲ از درجه استفاده شده است؛ یعنی $W(\gamma,0)=\deg(\gamma/|\gamma|)$. به ویژه، نتیجه بگیرید

$$W(\gamma,0) = \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma darg$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

۳. به سهولت می‌توان فرمهای با مقدار مختلط بر X را تعریف کرد. فرمهایی که تا کنون با آنها کار می‌کردیم فرم حقیقی نامیده می‌شوند. با ضرب کردن هر $p-$ فرم حقیقی در $i=\sqrt{-1}$ به یک $p-$ فرم موهومی حاصل می‌شود. پس هر فرم مختلط به شکل $\omega=\omega_1+i\omega_2$ است که ω_1 و ω_2 حقیقی هستند. ضرب گوه‌ای را به راحتی چنان می‌توان توسیع داد که d و $\int$ را نیز طوری بتوان تعریف کرد که با ضرب در i تعویض می‌شوند:

$$d\omega=d,\omega_1+id,\omega_2 \qquad \int_X\omega=\int_X\omega_1+i\int_X\omega_2$$

قضیهٔ استوکس برای فرمهای مختلط نیز درست است، زیرا برای هر یک قسمت‌های حقیقی و موهومی درست است. اکنون بر آنیم که قضیه‌ای بنیادی در نظریهٔ توابع مختلط را ثابت کنیم: فرمول انتگرال کوشی.

(الف) گیریم z تابع مختصاتی مختلط استاندارد بر $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ است. تحقیق کنید که $dz=dx+idy$.

(ب) گیریم $f(z)$ تابعی با مقدار مختلط بر زیر مجموعه‌ای باز U از $\mathbb{C}$ است. ثابت کنید که $1-$فرم $f(z)\,dz$ وقتی و تنها وقتی بسته است که $f(z)=f(x,y)$ در معادلهٔ کوشی-ریمان

$$\frac{\partial f}{\partial y}=i\frac{\partial f}{\partial x}$$

صدق کند. f را بر حسب قسمت حقیقی و موهومی بسط داده $f=f_1+if_2$ و نشان دهید که معادلهٔ کوشی-ریمان عملاً دو معادلهٔ حقیقی است. اگر $f(z)\,dz$ بسته باشد، می‌گوییم تابع f بر U هولومورف است.

(ج) نشان دهید که حاصل ضرب هر دو تابع هومولومرف، هولومورف است.

(د) تحقیق کنید که تابع مختصاتی مختلط z هومولومورف است. نتیجه بگیرید که هر چند جمله‌ای مختلط، هولومورف است.

(ه) فرض کنید f در U هولومورف است و γ_1 و γ_2 دو منحنی بستهٔ هوموتوپ در U هستند. ثابت کنید

$$\oint_{\gamma_1}f(z)\,dz=\oint_{\gamma_2}f(z)\,dz$$

[**راهنمایی:** از تمرین ۹ در بخش ۷ استفاده کنید.]

(و) اگر f در یک ناحیهٔ همبند ساده U هولومورف باشد، نشان دهید که به ازاء هر منحنی بستهٔ γ در U داریم $\oint_\gamma f(z)\,dz$.

(ز) ثابت کنید که تابع $f(z)=i/z$ در صفحهٔ سفقهٔ $\mathbb{C}-\{0\}$ هولومورف است به صورت مشابه، $1/(z-a)$ در $\mathbb{C}-\{a\}$ هومولورف است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

(ح) گیریم C_r دایره‌ای به شعاع r حول نقطهٔ $a \in \mathbb{C}$ است. با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید

$$\int_{C_r} \frac{1}{z-a}\, da = 2\pi i$$

(ط) فرض کنید $f(z)$ تابعی هولومورف در U است و C_r دایره‌ای به شعاع r و مرکز در $a \in U$ است. ثابت کنید

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i . f(a)$$

[**راهنمایی:** بنا به قسمت (ه)، این به r بستگی ندارد. توجه کنید $|f(z) - f(a)| < \epsilon_r$ بر C_r، که $\lim_{r\to 0} \epsilon_r = 0$. پس فرض کنید $r \to 0$ و از همبند ساده بودن استفاده کنید.]

(ی) فرمول انتگرال کوشی را ثابت کنید: اگر f در U هومولورف باشد و γ منحنی بستهٔ در U و غیر گذرنده از $a \in U$ باشد، آنگاه

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = W(\gamma, a). f(a)$$

[**راهنمایی:** از قسمت (ی) و نیز تمرین ۲ استفاده کنید.]

۴. یک k–فرم با انتگرال ناصفر بر $\mathbb{S}^k$ بسازید. [**راهنمایی:** یک k–فرم با محمل فشرده در $\mathbb{R}^k$ بسازید که انتگرالش مخالف صفر است، و سپس آنرا توسط تصویر گنجنگاری، تصویر کنید.]

۵. (الف) ثابت کنید k–فرم بستهٔ ω بر $\mathbb{S}^k$ وقتی و تنها وقتی دقیق است که $\int_{\mathbb{S}^k} \omega = 0$. [**راهنمایی:** $\dim H^k(\mathbb{S}^k) = -$. حال از تمرین قبل استفاده کنید.]

(ب) نتیجه بگیرید که نگاشت خطی $\int_{\mathbb{S}^k} : H^k(\mathbb{S}^k) \to \mathbb{R}$ ایزومورفیسم است.

۶. ثابت کنید که k–فرم یا محمل فشردهٔ ω بر $\mathbb{R}^k$ وقتی و تنها وقتی مشتق خارجی یک $(k-1)$ فرم یا محمل فشرده است که $\int_{\mathbb{R}^k} \omega = 0$. [راهنمایی: از تصویر گنجنگاری استفاده کرده، ω را به یک فرم ω' بر $\mathbb{S}^k$تبدیل کنید. بنابر تمرین ۵ داریم $\omega' = dv$. اکنون dv در یک همسایگی انقباض‌پذیر U از قطب شمال N صفر است. از این برای یافتن یک $(k-2)$– فرم μ بر $\mathbb{S}^k$ استفاده کنید که در نزدیکی N در رابطهٔ $v = d\mu$ صدق می‌کند. در این صورت در یک همسایگی از N، فرم $v - d\mu$ صفر است و لذا به یک فرم با محمل فشرده بر $\mathbb{R}^k$ برگشت داده می‌شود.]

۷. نشان دهید که به ازای هر منیفلد k–بعدی جهتدار فشرده X، نگاشت خطی $\int_X : H^k(X) \to \mathbb{R}$ ایزومورنیم است. به ویژه، نشان دهید که $\dim H^k(X) = 1$. [راهنمایی: فرض کنید که Uمجموعه‌ای باز و وابرسان با $\mathbb{R}^k$ است و ω یک k–فرم با محمل فشرده در U است که $\int_X \omega = 1$. با استفاده از تمرین ۶ نشان دهید که هر فرم با محمل فشرده در U با مضرب

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

اسکالری از ω هومولوگ می‌باشد. اکنون مجموعه‌های باز $U_1, \cdots, U_N$ را طوری انتخاب کنید که X را پوشش میدهند و هر یک قابل دگردیسی به U توسط یک ایزوتوپی هموار هستند. از تمرین ۷ از بخش ۶ و افرازیکانی استفاده کرده، نشان دهید که هر k-فرم θ بر X به ازای یک $c \in \mathbb{R}$ ای با $c\omega$ هومولوگ است. c را تعیین کنید.]

۸. گیریم $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی هموار بین منیفلدهای جهتدار، k-بعدی و فشرده است. نگاشت القایی بر گروههای کوهومولوژی بالا را در نظر بگیرید، یعنی $f^\# : H^k(Y) \to H^k(X)$. انتگرالگیری، ایزومورنیم‌های کانونی هر دوی $H^k(X)$ و $H^k(Y)$ با $\mathbb{R}$ را فراهم می‌کند. پس $f^\#$ نظر به این ایزومورنیم‌ها، بایستی به صورت ضرب در یک اسکالر ثابت باشد. ثابت کنید که این اسکالر $\deg(f)$ است. به بیان دیگر، دیاگرام تعویض‌پذیر زیر را داریم

$$\begin{tikzcd} H^k(Y) \arrow[r, "f^\#"] & H^k(X) \\ \mathbb{R} \arrow[u, "\int_Y"] \arrow[r, "\text{ضرب در } \deg f"'] & \mathbb{R} \arrow[u, "\int_X"'] \end{tikzcd}$$

بخش ۸.۴ قضیهٔ گاوس-بونه

این بخش را با توصیفی از حجم آغاز می‌کنیم. فرض کنید X یک منیفلد k- بعدی، جهتدار و فشرده در $\mathbb{R}^N$ است. به ازای هر $x \in X$، فرض می‌کنیم $D(x)$ المان حجم بر $T_x(X)$ باشد، یعنی k- تانسور نوسانی‌ای که مقدار آن بر هر پایهٔ مقادیکهٔ با جهت مثبت برای $T_x(X)$ برابر $1/k!$ است. (به تمرین ۱۰ از بخش ۲ توجه شود.) نشان دادن اینکه k-فرم v_x بر X هموار است، دشوار نیست؛ آنرا فرم حجمی X مینامیم. مثلاً، فرم حجمی بر $\mathbb{R}^k$ درست $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ است. ضریب $1/k!$ در نرمالسازی تعریف ضرب گوه‌ای لحاظ شده است. (این را با زیر نویس صفحهٔ ؟؟ مقاسه کنید). انتگرال $\int_X v_X$ را حجم X می‌نامیم.

فرم حجمی متغیر است، چرا که معنی انتگرال‌گیری از توابع را فراهم می‌سازد. اگر g تابعی بر X باشد، آنگاه gv_x یک k-فرم بر X است، و لذا $\int_X g$ را به صورت $\int_X gv_X$ می‌توان تعریف نمود. (وقتی X خود $\mathbb{R}^N$ است، $v_X = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$، و لذا $\int_{\mathbb{R}^k} gv_X$ به معنی انتگرال معمولی است.

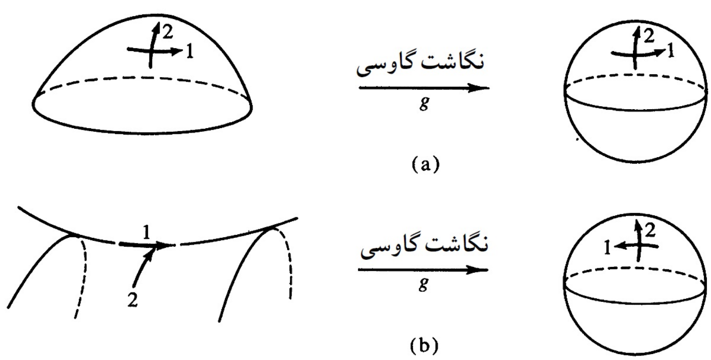
البته لازم است توجه شود که فرم حجمی یک شئ هندسی است نه توپولوژیکی؛ بستگی تام به چگونگی قرارگرفتن منیفلد در فضای اقلیدسی دارد. نتیجتاً، انتگرال‌گیری از توابع، عملی با طبیعت توپولوژیک نیست؛ نسبت به دیفئومورفیسم قابل تبدیل نیست. (ینی در اغلب موارد، اگر $h : Y \to X$ دیفئومورفیسم باشد، آنگاه $\int_X g \neq \int_Y h^*g$.)

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

دلیل اینکه انتگرالگیری از توابع به شکل مطلوب تعیین نمی‌شوند، همان طور که در بخش ۴ گفتیم، این است که اغلب دیفئومورفیسم‌ها المان حجم را تخریب می‌کنند. میزان این تخریب را به کمک فرمهای حجمی به شکل کمی می‌توان اندازه گرفت. در واقع، اگر $f : X \to Y$ نگاشتی هموار بین منیفلدهای k-بعدی مرزدار باشد، برگشت f^*V_Y یک k-فرم بر X است. در هر نقطهٔ $x \in X$، $v_X(x)$ پایه‌ای برای $\wedge^k(T_x(X)^*)$ است، و لذا باید $(f^*v_Y)(x)$ مضربی اسکالر از $v_X(x)$ باشد. این اسکالر را ژاکوبی f در x نامیده و با $J_f(x)$ نشان می‌دهیم. به جهت ایجاد انگیزهٔ بیشتر، توجه کنید که تانسور $v_X(x)$ به k-تایی $(v_1, \cdots, v_k)$ به علاوه یا منهای حجم متوازی السطوح تولید شده توسط آنها در فضای برداری $T_x(X)$ را نسبت می‌دهد، ضرب در عامل $1/k!$ (معمولی). با مسألهٔ ۱۱ از بخش ۲ مقایسه شود. $(f^*v_Y)(x)$ بعلاوه یا منهای حجم متوازی السطوح تولید شده توسط $(df_x(v_k, \cdots, df_x(v_1))$ در $T_{f(x)}(Y)$ ضرب در همین عامل $1/k!$ را نسبت میدهد. بنابراین، مقدار میزان افزایش یا کاهش حجم توسط df_x با اندازهٔ $J_f(x)$ برابر است؛ علامت آن به این بستگی دارد که df_x حافظ جهت باشد یا خیر. به این معنی، J_f میزان تغییرات بی‌نهایت کوچک المان حجم و جهت توسط f در نقاط مختلف را می‌سنجد.

این بحث را در مورد مطالعهٔ هندسهٔ **ابررویه‌ها**، زیر منیفلدهای k-بعدی در $\mathbb{R}^{k+1}$، به کار می‌بندیم. ابررویهٔ X وقتی و تنها وقتی جهتدار است که در همهٔ نقاط آن دو بردار یکهٔ نرمال به شکل هموار بتوانیم انتخاب کنیم (به تمرین ۱۸ از بخش ۲ از فصل ۳ توجه شود). به خصوص، اگر X ابررویه‌ای فشرده باشد، از قضیهٔ جداسازی جردن-براور نتیجه می‌گیریم که X به عنوان مرز داخلش جهت‌پذیر است؛ یعنی، مثلاً می‌توان در $x \in X$ بردار $\vec{n}(x)$ قائم به سمت خارج را انتخاب نمود.

نگاشت $g : X \longrightarrow \mathbb{S}^k$ با ضابطهٔ $g(x) = \vec{n}(x)$ را **نگاشت گاوسی** ابررویهٔ جهت‌دار X نامیده و ژاکوبین آن $J_g(x) := \kappa(x)$ را انحنای X در x می‌نامیم. مثلاً، اگر X کرهٔ k-بعدی به شعاع r باشد، آنگاه $\kappa(x) = 1/r^k$ در همه جا (تمرین ۶). پس هرگاه شعاع افزایش یابد، انحنای کاهش می‌یابد، چرا که کره‌های بزرگتر، به نظر تخت‌تر از کره‌های کوچکتر هستند. اما، وقتی $X = \mathbb{R}^k$، داریم $k = 0$، چرا که g ثابت است.



شکل ۳.۴:

بنابراین، مقدار $\kappa(x)$ به تعبیری میزان انحنای X در x را می‌سنجد؛ اگر رویه بیشتر انحنای پیدا کند، بردار قائم بر آن سریع‌تر خواهد چرخید. علامت $\kappa(x)$ در مورد رویه‌ها، مشخص می‌کند که نگاشت گاوسی

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

جهت را حفظ می‌کند یا خیر؛ و به کمک آن می‌توان مشخص کرد که رویه موضعاً محدب است یا موضعاً به شکل زینی است: در قسمت (الف) از شکل ۳.۴ نگاشت گاوسی جهت را حفظ می‌کند، در حالی که در قسمت (ب)، جهت را بر می‌گرداند.

انحنای یک خصوصیت ذاتاً هندسی از ابررویه‌ها است؛ روشنی است که توسط تبدیلات توپولوژی تغییر می‌کند. اما یکی از قضایای جالب ریاضیات وجود دارد که بر طبق آن، انتگرال فراگیر انحنای بر هر ابررویهٔ فشردهٔ با بعد زوج، یک ناوردای توپولوژی است. بنابراین، توفیقی نمی‌کند که ابررویه را له کنیم، بکشیم و یا بپیچانیم، چرا که با وجود تغییرات در انحنای، مقدار انتگرال فراگیر آن تغییر نمی‌کند. به علاوه، چون $\int_X \kappa$ یک ناوردای توپولوژی فراگیر برای X است، احتمالاً از اینکه ببینید این ناوردا بر اساس شاخص اویلر بیان می‌شود، شکه نمی‌شوید! (دیگر چگونه می‌توانست باشد؟)

قضیهٔ گاوس-بونه اگر X یک ابررویهٔ با بعد زوج و فشرده در $\mathbb{R}^{k+1}$ باشد، آنگاه

$$\int_X \kappa = \frac{1}{2}\gamma_k \chi(X),$$

که $\chi(X)$ شاخص اویلر X است و γ_k حجم کرهٔ k-بعدی واحد $\mathbb{S}^k$ می‌باشد.

البته، وقتی بعد X فرد است، قضیه درست نیست، چرا که عملاً شاخص اویلر به طور خودکار صفر است. بخش اول اثبات، کاربردی از فرمول درجه در تبدیل انتگرال به یک عبارت توپولوژی است:

$$\int_X k = \int_X J_g\, v_X = \int_X g^*\, v_{\mathbb{S}^k} = \deg(g) \int_{\mathbb{S}^k} v_{\mathbb{S}^k} = \deg(g).\gamma_k$$

بنابراین، برای اثبات قضیهٔ گاوس-بونه، باید نشان دهیم که درجهٔ نگاشت گاوس برابر نصف شاخص اویلر X است: $\deg(g) = \frac{1}{2}\chi(X)$. برای انجام این امر، از قضیهٔ هوف-پوآنکاره استفاده می‌کنیم.

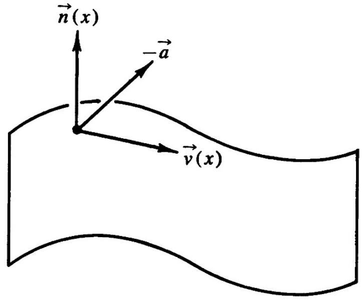
یک بردار یکه $a \in \mathbb{S}^k$ طوری انتخاب می‌کنیم که a و $-a$-مقادیر منظم g باشند. (چرا چنین a ای وجود دارد؟) گیریم $\vec{v}$ میدان برداری‌ای بر X است که مقدار آن در نقطهٔ دلخواه $x \in X$، برابر تصویر بردار $-a$ روی $T_x(X)$ است:

$$\vec{v}(x) = (-a) - [-a.\vec{n}(x)]\vec{n}(x) = [a.g(x)]g(x) - a$$

(به شکل ۴.۴ توجه شود.) نقطهٔ $z \in X$ وقتی و تنها وقتی یک صفر میدان برداری $\vec{v}$ است که $g(z)$ مضربی از a باشد؛ یعنی، $g(z) = \pm a$. چون a و $-a$ مقادیر منظم g هستند، و X فشرده است، بنابراین $\vec{v}$ تنها تعدادی متناهی صفر دارد. فرض کنید نگاشت انتقالی $y \mapsto y - a$ در $\mathbb{R}^{k+1}$ را با نماد T نشان می‌دهیم. به این ترتیب، نگاشت $\vec{v} : X \to \mathbb{R}^{k+1}$ را به صورت $\vec{v} = T \circ [a.g]g$ می‌توان بیان کرد.

لم. ۱ اگر $g(z) = a$، آنگاه $d\vec{v}_z = dT_a \circ dg_z$؛ و ۲ اگر $g(z) = -a$، آنگاه $d\vec{v}_z = -dT_a \circ dg_z$.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ۴.۴:

برهان: مشتق نگاشت $f : X \to \mathbb{R}^{k+1}$ با ضابطهٔ $f(x) = [a.g(x)]g(x)$ در نقطهٔ z را محاسبه می‌کنیم: اگر $\omega \in T_z(X)$، آنگاه بردار $df_z(\omega) \in \mathbb{R}^{k+1}$ عبارت است از

$$df_z(\omega) = [a.g(z)]\, dg_z(\omega) + [a.dg_z(\omega)]\, g(z) \tag{۴.۴}$$

[برای تحقیق این مطلب، ω را به صورت بردار مماس به یک منحنی $c(t)$ نوشته و سپس $df_z(\omega)$ را به عنوان بردار مماس به منحنی $f(c(t))$ به دست می‌آوریم. حال قاعدهٔ ضرب معمولی را در هر مختص از $f(c(t))$ به کار می‌بریم.] چون $a \in \mathbb{S}^k$، ضرب $a.a$ برابر یک است؛ بنابراین، اولین جملهٔ در (۳) برابر $dg_z(\omega)$ است به شرطی که $g(z) = +a$ و برابر $-dg_z(\omega)$ است به شرطی که $g(z) = -a$. در مورد دومین جمله، با دیفرانسیل‌گیری از تابع ثابت $g(x).g(x) = 1$، داریم $g(z).dg_z(\omega) = 0$. (این حکم را می‌توان چنین تعبیر کرد که تصویر dg_z در $g(z)$ به $\mathbb{S}^k$ مماس است.) نتیجتاً، اگر $g(z) = \pm a$، آنگاه $a.dg_z(\omega) = 0$، و دومین جملهٔ در (۳) نیز صفر است. □

نتیجه. شاخص میدان برداری $\vec{v}$ در صفرش z در صورتی $+1$ است که $g : X \to \mathbb{S}^k$ در z حافظ جهت باشد، و در غیر این صورت برابر -1 است.

برهان: بر طبق مسألهٔ ۳ و ۵ از بخش ۵ در فصل ۳، مشتق $d\vec{v}_a : T_z(X) \to \mathbb{R}^{k+1}$ عملاً $T_z(X)$ را به روی خودش می‌برد؛ به علاوه، اگر $d\vec{v}_z$ ایزومورفیسمی از $T_z(X)$ باشد، آنگاه $\mathrm{ind}_z(\vec{v})$ با علامت دترمینان $d\vec{v}_z : T_z(X) \to T_z(X)$ برابر است. اما، نگاشت خطی $dT_a : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{k+1}$ نگاشت همانی است، و لذا اگر به عنوان نگاشتی خطی از $T_z(X)$ بتوی $\mathbb{R}^{k+1}$ در نظر گرفته شود، آنگاه $d\vec{v}_z = \pm dg_z$.
ابتدا، فرض کنیم $g(z) = +a$. پس $d\vec{v}_z = +dg_z$. چون

$$dg_z : T_z(X) \to T_a(\mathbb{S}^k) \quad , \quad d\vec{v}_z : T_z(X) \to T_z(X)$$

پس باید زیر فضاهای $T_z(X)$ و $T_a(\mathbb{S}^k)$ یکی باشند. به علاوه، چون بردار قائم یکهٔ برونسوی در z از X برابر $\vec{n}(z) = g(z) = a$ است و بردار یکهٔ قائم برونسوی در a از $\mathbb{S}^k$ خود a است، این دو فضا هم‌جهت نیز هستند. چون a مقداری منظم از g است، نگاشت خطی $dg_z = d\vec{v}$ ایزومورفیسم است. چون

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

$\det(d\vec{v}_z) = \det(dg_z)$، نتیجه می‌گیریم که اگر dg_z حافظ جهت باشد، آنگاه $\mathrm{ind}_z(\vec{v}) = +1$ و اگر جهت برگردان باشد، $\mathrm{ind}_z(\vec{v}) = -1$.

اگر $g(z) = -a$، آنگاه $d\vec{v}_z = -dg_z$. باز هم نتیجه می‌گیریم که دو زیر فضای $T_z(X)$ و $T_{-a}(\mathbb{S}^k)$ در $\mathbb{R}^{k+1}$ یکی‌اند و جهت آنها نیز یکی هستند. منظم بودن $-a$ ایجاب می‌کند که $d\vec{v}_z$ ایزومورفیسم است و تمرین اثبات شد. در اینجا

$$\det(d\vec{v}_z) = \det(-dg_z) = (-1)^k \det(dg_z)$$

که هنوز برابر $\det(dg_z)$ است، زیرا k زوج می‌باشد. پس، باز هم اگر dg_z حافظ جهت باشد، آنگاه $\mathrm{ind}_z(\vec{v}) = +1$ و در غیر این صورت اگر dg_z جهت برگردان باشد، داریم $\mathrm{ind}_z(\vec{v}) = -1$ و برهان تمام است. □

قضیهٔ گاوس-بونه مستقیماً نتیجه می شود. زیرا، بنا به قضیهٔ هوف-پوآنکاره، مجموع شاخص‌های $\vec{v}$ برابر $\chi(X)$ است. بنا به نتیجه، اگر ابتدا شاخص‌های در صفرهایی که $g(z) = +a$ را جمع بزنیم، به دست می‌آوریم $I(g,\{a\}) = \deg(g)$؛ به صورت مشابه با جمع کردن شاخص‌های در صفرهایی که $g(z) = -a$، به دست می‌آوریم $I(g,\{-a\}) = \deg(g)$. بنابراین $\chi(X) = 2\deg(g)$ و برهان تمام است. (**سؤال:** چرا اثبات برای رویه‌های با بعد فرد، معتبر نیست؟) چون این محاسبه یکی از احکام مهم و قدیمی است، آنرا به شکل زیر فرمول‌بندی می‌کنیم.

قضیه. به ازاء هر منیفلد با بعد زوج، شاخص اویلر با دو برابر درجهٔ نگاشت گاوسی برابر است.

یادداشت نهایی: با استفاده از خواص متری خود منیفلد X، و نه خواص نشاندن آن در $\mathbb{R}^N$، تعریف دیگری از انحنای می‌توان ارائه نمود. این حکم را در حالت دو بعدی، گاوس مطرح کرد و به نام **قضیهٔ افتخار گاوس** معروف است. چون اثباتی ذاتی از قضیهٔ گاوس-بونه مطرح کرده است، یعنی برهانی که در آن تماماً از به کارگیری نشاننده خودداری شده است. (مرجع [۱۶] را ملاحظه کنید.) در [۱۷] نوع دو بعدی این برهان به نحو ساده‌ای ارائه شده است. (یک نوع «به طور قطعه‌ای پیوسته» از قضیهٔ گاوس-بونهٔ ذاتی در تمرین ۱۱ آورده شده است.)

تمرینات

۱. گیریم $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی هموار است و $S \subset \mathbb{R}^3$ نمودار آن می‌باشد. ثابت کنید فرم حجم بر S دقیقاً همان فرم dA توصیف شده در بخش ۴ است.[۳]

۲. اگر S رویه‌ای جهتدار در $\mathbb{R}^3$ و (n_1,n_2,n_3) بردار یکهٔ قائم بر آن باشد، ثابت کنید فرم حجم آن

$$n_1\,dx_2 \wedge dx_3 + n_2\,dx_3 \wedge dx_1 + n_3\,dx_1 \wedge dx_2$$

[۳] در حالت دو بعدی سخن گفتن از فرم حجم کمی دشوار است. بهتر است از اصطلاح «فرم مساحت» استفاده کنیم.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

است. به ویژه، نشان دهید که فرم حجم بر کرهٔ واحد عبارت است از

$$x_1\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2\, dx_3 \wedge dx_1 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

[**راهنمایی:** نشان دهید که 2-فرم مطرح شده درست عبارت است از 2-فرم:

$$(v,w) \mapsto \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} v \\ w \\ n \end{pmatrix} \qquad v, w \in \mathbb{R}^3].$$

۳. گیریم $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ دوران است (یعنی، یک نگاشت خطی متعامد). نشان دهید که نگاشت از $\mathbb{S}^{n-1}$ به روی $\mathbb{S}^{n-1}$ القایی از A، فرم حجم را حفظ می‌کند (یعنی، اگر A^* بر فرم حجم اثر کند، آن را مجدداً به خود فرم حجم برمی‌گرداند).

۴. گیریم $C : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی پیمایش شده در $\mathbb{R}^3$ است. نشان دهید که حجم آن (یعنی، انتگرال فرم حجمی روی C) درست برابر طول C است:

$$\int_a^b \left| \frac{dC}{dt} \right| dt$$

۵. گیریم f نگاشتی هموار از بازهٔ $[a,b]$ بتوی مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت است. گیریم S رویهٔ حاصل از دوران نمودار f حول $x-$ محور در $\mathbb{R}^3$ است. فرمولی کلاسیک وجود دارد که بنا به آن: مساحت سطحی رویهٔ S برابر

$$\int_a^b 2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}\, dt$$

است. این فرمول را با انتگرالگیری از فرم حجمی روی S استخراج کنید. [**راهنمایی:** تمرین ۲ را ملاحظه کنید.]

۶. ثابت کنید که انحنای گاوسی در همهٔ نقاط کرهٔ $(n-1)$-بعدی به شعاع r در $\mathbb{R}^n$ برابر $1/r^{n-1}$ است. [**راهنمایی:** کافی است نشان دهید مشتق نگاشت گاوسی در همه جا برابر $1/r$ نگاشت همانی است.]

۷. انحنای هذلولی‌گون $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ در نقطهٔ $(1,0,0)$ را محاسبه کنید. [**راهنمایی:** پاسخ -1 است.]

۸. گیریم $f = f(x,y)$ تابعی هموار بر $\mathbb{R}^2$ است و $U \subset \mathbb{R}^3$ نمودار آن است. فرض کنید

$$f(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

گیریم k_1 و k_2 مقادیر ویژهٔ هسیان

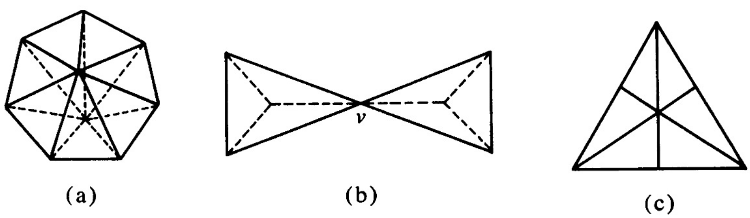
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

در صفرند. نشان دهید، انحنای S در $(0,0,0)$ درست برابر حاصلضرب k_1k_2 است. [راهنمایی: کافی است حالت سادهٔ $f(x,y) = k_1x^2 + k_2y^2$ را در نظر بگیرید. چرا؟]

۹. رویهٔ $S \subset \mathbb{R}^3$ را در صورتی «خطدار» گوییم که از هر نقطهٔ S خط راستی عبور کند که تماماً در S قرار داشته باشد. نشان دهید که انحنای گاوسی هر رویهٔ خطدار در کلیهٔ نقاط، کمتر یا برابر صفر است.

۱۰. گیریم $T = T_{a,b}$ تیوپ استاندارد متشکل از همهٔ نقاط در $\mathbb{R}^3$ است که به فاصلهٔ a از دایرهٔ به شعاع b در xy-صفحه است $(0 < a < b)$. در چه نقاطی انحنای مثبت است، چه نقاطی منفی و در چه نقاطی صفر است؟

۱۱. گیریم $T_1, T_2, \cdots, T_k$ گردایه‌ای از مثلثهای بسته در $\mathbb{R}^3$ است. مجموعهٔ $S = T_1 \cup \cdots \cup T_k$ را در صورتی رویهٔ چند وجهی گوییم که احکام زیر درست باشد.[۴]



شکل ۵.۴:

(الف) هر ضلع از T_i، دقیقاً ضلع یک مثلث دیگر است.

(ب) هیچ دو مثلثی، در بیش از یک ضلع اشتراک ندارند.

(ج) اگر $T_{i_1}, \cdots, T_{i_S}$ مثلث‌هایی در خانواده باشند که در رأس v مشترک‌اند و S_{i_t} ضلع مقابل به v در T_{i_t} باشد، آنگاه $\cup S_{t_i}$ همبند است. [در قسمت (ب) از شکل ۵.۴ یک مثال نقض آورده شده است.

به ازاء هر رأس v، عدد $k(v)$ را به صورت 2π منهای مجموع زوایای در رأس v تعریف می‌کند. ثابت کنید:

[۴] [به قسمت (الف) از شکل ۵.۴ توجه شود.]

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

(i) اگر هر مثلث T_i به مثلثهای کوچک‌تر تقسم شود (مثلاً، مثل در قسمت (ج) از شکل ۵.۴، آنگاه مجموع کلی $\sum_v k(v)$ روی همهٔ رئوس، تغییر نمی‌کند.

(ii) $\Sigma_v k(v) = 2\pi.\chi(S)$، شاخص اویلر $\chi(S)$ به صورت تعداد رئوس منهای تعداد یالها به علاوهٔ تعداد مثلثها تعریف می‌گردد. (با بخش ۷ از فصل ۳ مقایسه شود). [**راهنمایی:** هر مثلث n ضلع دارد و هر ضلع در دو مثلث جا دارد.]

۱۲. گیریم X یک $(n-1)$-بعدی جهتدار است و $f : X \to \mathbb{R}^n$ ایمرشن است. نشان دهید که نگاشت گاوسی $g : X \to \mathbb{S}^{n-1}$ همچنان قابل تعریف است، حتی اگر X را نتوان زیر منیفلدی از $\mathbb{R}^n$ دانست. ثابت کنید وقتی X با بعد زوج است، درجهٔ g نصف شاخص اویلر X می‌باشد. نشان دهید برای منیفلدهای با بعد فرد، این حکم غلط است. برای این منظور، نشان دهید نگاشت گاوسی ایمرشن $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $t \mapsto (\cos(nt), \sin(nt))$ دارای درجهٔ n است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

پیوست آ

اندازهٔ صفر و قضیهٔ سارد

اگر $a = (a_1, \cdots, a_n)$ و $b = (b_1, \cdots, b_n)$ دو $n-$ تایی با $a_1 < b_1, \cdots, a_n < b_n$ باشند، جعبهٔ متشکل از همهٔ نقاط $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ صادق در $a_i < x_i < b_i$ که $i = 1, \cdots, n$ را با نماد $S(a,b)$ نشان می‌دهیم. حاصل‌ضرب $\Pi_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ را حجم $S = S(a,b)$ نامیده و با $\mathrm{Vol}\,(S)$ نشان می‌دهیم.

(اگر $b_1 - a_1 = \cdots = b_n - a_n$، S را مکعب می‌نامیم.)

مثل در فصل ۱، بخش ۷، زیر مجموعهٔ $A \subset \mathbb{R}^n$ را در صورتی با **اندازهٔ صفر** گوییم که به ازاء هر $\epsilon > 0$ یک گردایهٔ شمارا از جعبه‌های $S_1, S_2, \cdots$ پوشش دهندهٔ A به گونه‌ای یافت گردد که $\sum_i \mathrm{Vol}\,(S_i) < \epsilon$.

(**مسأله:** نشان دهید S_i ها را می‌توان مکعب گرفت.)

روشن است که زیر مجموعهٔ هر مجموعهٔ با اندازهٔ صفر، با اندازهٔ صفر است. در بخش ۷ از فصل یک نشان دادیم که اجتماع شمارا از مجموعه‌های با اندازهٔ صفر، باز هم با اندازهٔ صفر است. به کمک این حکم می‌توان مجموعه‌های با اندازهٔ صفر را توصیف نمود.

تمرین. نشان دهید که کپی طبیعی $\mathbb{R}^{n-1}$ در $\mathbb{R}^n$ (یعنی $\{(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)\}$) با اندازهٔ صفر است. [**راهنمایی:** نشان دهید که هر زیر مجموعهٔ فشرده از $\mathbb{R}^{n-1}$ در داخل یک جعبهٔ با حجم کمتر از ϵ در $\mathbb{R}^n$ قرار دارد.]

آنچه که عملاً کار دشواری است، اثبات این مطلب است که مجموعه‌های با اندازهٔ مخالف صفر وجود دارد! این مطلب را با اثباتی هوشمندانه از فون نیومن[1] نشان می‌دهیم.

گزاره: فرض کنید S جعبه‌ای دلخواه است و جعبه‌های $S_1, S_1, \cdots$ پوششی برای بستار $\bar{S}$ هستند. در این صورت $\sum_j \mathrm{Vol}\,(S_j) \geq \mathrm{Vol}\,(S)$.

[1] John von Neumann :: ریاضی–فیزیکدانی امریکایی که بین سالهای ۱۲۸۲ تا ۱۳۳۶ شمسی می‌زیسته و متولد لهستان بوده است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

برهان: منظور از نقطهٔ صحیح در $\mathbb{R}^n$ یک n تایی از اعداد صحیح است. گیریم $S = S(a,b)$. تعداد اعداد صحیح در بازهٔ $(a_i;b_i)$ کمتر از $b_i - a_i + 1$ و حداقل بزرگتر از $b_i - a_i - 1$ است. برای لحظه‌ای، فرض کنید طول $b_i - a_i$ هر یال از S بزرگتر از ۱ باشد. در این صورت تعداد نقاط صحیح در S کمتر از حاصل‌ضرب $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i + 1)$ است و حداقل $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i - 1)$ است.

اگر $S_1, S_2, \cdots$ پوششی برای $\bar{S}$ باشد، آنگاه بنا به فشردگی $\bar{S}$، تعدادی متناهی از آنها مثل $S_1, \cdots, S_N$ یک پوششی برای $\bar{S}$ است. حال، تعداد نقاط صحیح در S حداکثر برابر مجموع تعداد نقاط صحیح در $S_1, \cdots, S_N$ می‌باشد. بنابراین اگر $S_j = S(a^i, b^j)$، آنگاه

$$\prod_{i=1}^n (b_i - a_i - 1) \leq \sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^n (b_i^j - a_i^j + 1)$$

به ازاء هر عدد صحیح مثبت λ، تعریف می‌کنیم $\lambda S(a,b) := S(\lambda a, \lambda b)$. چون $\lambda \bar{S}$ توسط $\lambda S_1, \cdots, \lambda S_N$ پوشانده می‌شود، با توجه به محاسبهٔ بالا، داریم

$$\prod_{i=1}^n (\lambda b_i - \lambda a_i - 1) \leq \sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^n (\lambda b_i^j - \lambda a_i^j + 1)$$

حال اگر اندازهٔ S هر قدر باشد، با انتخاب λ به اندازهٔ کافی بزرگ، می‌توان فرض کرد طول هر یال از آن بزرگتر از 1 است. پس نامساوی آخر برای λ بزرگ بدون هیچ محدودیتی بر S درست است.

اکنون با تقسیم کردن هر یال از آن بر λ^n و سپس فرض $\lambda \to \infty$، برهان تکمیل می‌شود. □

برای اثبات قضیهٔ سارد، به نوع اندازهٔ صفر قضیهٔ فوبینی نیاز داریم. فرض کنید $n = k + \ell$ و بنویسیم $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$. به ازاء هر $c \in \mathbb{R}^k$، فرض کنیم V_c **برش قائم** $\{c\} \times \mathbb{R}^\ell$ است. زیر مجموعه‌ای از V_c را به اندازهٔ صفر گوییم که پس از یکی گیری V_c با $\mathbb{R}^\ell$، به معنی معمولی در $\mathbb{R}^\ell$ با اندازهٔ صفر باشد.

قضیهٔ فوبینی (برای اندازهٔ صفر) گیریم A زیر مجموعه‌ای بسته از $\mathbb{R}^n$ است به گونه‌ای که به ازاء هر $c \in \mathbb{R}^k$ ای $A \cap V_c$ در V_c با اندازهٔ صفر باشد. در این صورت A با اندازهٔ صفر است.

برهان: چون A را به صورت اجتماعی شمارا از زیر مجموعه‌های فشرده می‌توان نوشت، عملاً می‌توانیم فرض کنیم که A فشرده است. همچنین، با استقراء بر k، کافی است قضیه را برای $k = 1$ و $\ell = n - 1$ ثابت کنیم. اثبات را به دو لم زیر تقسیم می‌کنیم.

لم ۱ گیریم $S_1, \cdots, S_N$ پوششی برای بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ در $\mathbb{R}$ تشکیل می‌دهند. پوششی دیگر $S'_1, \cdots, S'_N$ چنان وجود دارد که هر یک از S'_j ها در یک S_i ای قرار دارند و

$$\sum_{j=1}^M \text{طول}\, S'_j < 2(b-a)$$

برهان: بر عهدهٔ خواننده. □

به ازاء مجموعهٔ مفروض $I \subset \mathbb{R}$، مجموعهٔ $V_I = I \times \mathbb{R}^{n-1}$ را در $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

لم ۲ گیریم A زیر مجموعه‌ای فشرده از $\mathbb{R}^n$ است. فرض کنید $A\cap V_c$ در مجموعه‌ای باز U از V_c قرار دارد. در این صورت به ازاء هر بازهٔ با اندازهٔ کافی کوچک I شامل c در $\mathbb{R}$، $A\cap V_I$ در $I\times U$ قرار دارد.

برهان: اگر این طور نباشد، دنباله‌ای از نقاط (x_j,c_j) در A چنان وجود دارد که $c_j\to c$ و $x_j\notin U$. با تعویض این دنباله با دنباله‌ای همگرا، به تناقض می‌رسیم. $\square$

اثبات قضیهٔ فوبینی: چون A فشرده است، بازه‌ای $I=[a;b]$ چنان انتخاب می‌کنیم که $A\subset V_j$. به ازاء هر $c\in I$، پوششی از $A\cap V_c$ توسط جعبه‌های $(n-1)$بعدی $S_1(c),\cdots,S_{N_c}(c)$ با مجموع حجم کمتر از ϵ می‌پوشانیم. بازه‌ای $J(c)$ در $\mathbb{R}$ چنان انتخاب می‌کنیم که جعبه‌های $J(c)\times S_j(c)$ مجموعهٔ $A\cap V_J$ را بپوشانند (لم ۲). $J(c)$ ها بازهٔ خطی $[a,b]$ را پوشش می‌دهند، و لذا بنا به لم ۱، آنها را با گردایه‌ای متناهی از زیر بازه‌های J'_j با مجموع طول کمتر از $2(b-a)$ می‌توان پوشاند. هر یک از J'_j ها در بازه‌ای $J(c_j)$ قرار دارند، و بنابراین جعبه‌های $J'_j\times S_i(c_j)$ کل A را پوشش می‌دهند؛ به علاوه، حجم کل آنها کمتر از $2\epsilon(b-a)$ می‌باشد. $\square$

به یک حکم دیگر از نظریهٔ اندازه نیاز داریم: اندازهٔ صفر بر خمینه‌ها با معنی است. برای این منظور، نشان می‌دهیم که

قضیه. گیریم U مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ و $f:U\to\mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار است. اگر $A\subset U$ با اندازهٔ صفر باشد، آنگاه $f(A)$ نیز با اندازهٔ صفر است.

برهان: می‌توانیم فرض کنیم $\bar{A}$ فشرده است و در U قرار دارد، چون A را به صورت اجتماعی شمارا از زیر مجموعه‌های با این خاصیت می‌توان نوشت. گیریم W همسایگی بازی از A است به گونه‌ای که $\bar{W}$ فشرده است و در U قرار دارد.

چون $\bar{W}$ فشرده است، ثابتی M چنان وجود دارد که به ازاء هر $x,y\in\bar{W}$ ای $|f(x)-f(y)|<M|x-y|$. نتیجه اینکه، ثابتی دیگر همچون M' چنان وجود دارد که اگر S مکعبی در W باشد، آنگاه $f(S)$ در مکعبی چون S' با حجم کمتر از $M'\mathrm{Vol}\,(S)$ قرار دارد.

حال، نشان دهید که مجموعهٔ A را با دنباله‌ای از مکعب‌های $S_1,S_2,\cdots$ می‌توان پوشاند که هر یک در W قرار دارند و $\sum\mathrm{Vol}\,(S_i)$ کمتر از هر ϵ از پیش تعیین شده است. بنابراین، یک پوشش $S'_1,S'_2,\cdots$ از مکعب‌ها برای $f(A)$ طوری می‌توان انتخاب کرد که $\sum\mathrm{Vol}\,(S'_j)<M'\epsilon$ چون ϵ دلخواه بود، $f(A)$ با اندازهٔ صفر است. $\square$

تمرین. با تلفیق این قضیه و تمرین اول، ثابت کنید:

قضیهٔ کوچک سارد. گیریم U زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ و $f:U\to\mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار است. اگر $m>n$، آنگاه $f(U)$ در $\mathbb{R}^m$ با اندازهٔ صفر است.

(این نوع ضعیف قضیهٔ سارد، عملاً همهٔ آن چیزی است که در قضیهٔ نشاندن ویتینی به کار بردیم.)

اکنون، زیر مجموعهٔ A از خمینهٔ k بعدی X را در صورتی با اندازهٔ صفر گوییم که به ازاء هر پرمایش موضعی $f:U\to X$، پیش نگارهٔ $f^{-1}(A)$ در $U\subset\mathbb{R}^k$ با اندازهٔ صفر باشد. به دلیل قضیهٔ قبل، کافی است

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

تحقیق کنیم که حول هر نقطه از X یک پرمایش موضعی $f: U \to X$ طوری وجود دارد که $f^{-1}(A)$ با اندازهٔ صفر است.

اکنون آمادگی لازم برای اثبات حکم زیر را داریم:

قضیهٔ سارد. گیریم $f: X \to Y$ نگاشتی هموار بین خمینه‌ها است و c مجموعهٔ نقاط تکین f در X است. در این صورت $f(c)$ در Y با اندازهٔ صفر است.

اثبات ما عملاً شرحی از برهان میلنر در صفحات ۱۶ تا ۱۹ کتاب [۱] است. بنا به دومین اصل شمارایی، گردایه‌ای شمارا از مجموعه‌های باز (U_i, V_i) که U_i در X باز است، و V_i در Y، به گونه‌ای یافت می‌شود که U_i ها X را می‌پوشانند، $f(U_i) \subset V_i$، و U_i ها و V_i ها با مجموعه‌های بازی در $\mathbb{R}^n$ وابرسانند. بنابراین، کافی است ثابت شود:

قضیه. فرض کنید U در $\mathbb{R}^n$ باز است $f: U \to \mathbb{R}^p$ نگاشتی هموار است. گیریم C مجموعهٔ نقاط تکین f است. در این صورت $f(C)$ در $\mathbb{R}^p$ با اندازهٔ صفر است.

مشخصاً قضیه برای $n = 0$ درست است، لذا فرض می‌کنیم قضیه برای $n-1$ درست است و آنگاه درستی آن را برای n ثابت می‌کنیم. با افراز C به دنباله‌ای از مجموعه‌های تو در تو $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ شروع می‌کنیم که C_1 مجموعهٔ همهٔ $x \in U$ هایی است که $df_x = 0$ و C_i با $i \geq 1$، مجموعهٔ همهٔ x هایی است که مشتقات f تا مرتبهٔ $i \geq$ در x صفرند. (توجه کنید که C_i ها زیر مجموعه‌های بستهٔ در C هستند.) ابتدا ثابت می‌کنیم:

لم ۱ تصویر $f(C - C_1)$ با اندازهٔ صفر است.

برهان: مجموعه‌ای باز V گرد هر $x \in C - C_1$ طوری انتخاب می‌کنیم که $f(V \cap C)$ با اندازهٔ صفر باشد. چون $C - C_1$ توسط تعدادی شمارا از این همسایگی‌ها (بنا به اصل دوم شمارایی) پوشانده می‌شود، این اثبات می‌کند که $f(C - C_1)$ با اندازهٔ صفر است.

چون $x \notin C_1$، یک مشتق جزیی مثل $\partial f / \partial x_1$ هست که در x صفر نیست. نگاشت $h: U \to \mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ $h(x) = (f_1(x, x_2, \cdots, x_n))$ را در نظر بگیرید. dh_x ناتکین است و لذا h یک همسایگی V از x را به شکل وابرسان بروی مجموعهٔ بازی V' در $\mathbb{R}^n$ می‌نگارد. در این صورت، ترکیب $g = f \circ h^{-1}$، V' را بتوی $\mathbb{R}^p$ می‌نگارد، که مقادیر تکین آن عبارت از همان مقادیر f محدود در V هستند.

g را طوری ساخته‌ایم که خواص به شرح ذیل را دارد: نقاط به شکل $(t, x_2, \cdots, x_n)$ در V' را به نقاط به شکل $(t, y_2, \cdots, y_p)$ در $\mathbb{R}^p$ می‌نگارد (به عبارت دیگر، مختصات اول یکی‌اند). بنابراین g به ازاء هر t ای یک نگاشت g^t از $(t \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$ بتوی $t \times \mathbb{R}^{p-1}$ تعریف می‌کند. چون مشتق g به شکل

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline * & \dfrac{\partial g^t}{\partial x_j} \end{array}\right)$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

است، نقطه‌ای از $t\times\mathbb{R}^{n-1}$ وقتی و تنها وقتی برای g^t تکین است که برای g تکین باشد. [چون دترمینان ماتریس سمت راست برابر $\det(\partial g_i^t/\partial x_j)$ است.] بنا به استقراء، قضیهٔ سارد برای $n-1$ درست است، و لذا مجموعهٔ مقادیر تکین g^t با اندازهٔ صفر است. نتیجتاً، بنا به قضیهٔ فوبینی، مجموعهٔ مقادیر تکین g با اندازهٔ صفر است. □

سپس، ثابت می‌کنیم:

لم ۲ به ازاء هر $k\geq 1$ ای $f(C_k-C_{k+1})$ با اندازهٔ صفر است.

برهان: این هم شبیه لم ۱ ثابت می‌شود، ولی ساده‌تر است. به ازاء هر $x\in C_k-C_{k+1}$، یک مشتق مرتبهٔ $(k+1)$ ام f وجود دارد که صفر نیست. بنابراین، یک مشتق مرتبهٔ k ام f مثل p طوری می‌توان یافت (که بنا به تعریف) بر C_k صفر است، ولی مشتق اول آن (یعنی $\partial p/\partial x_1$) صفر نیست. در این صورت، نگاشت $h:U\to\mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ $h(x)=(p(x),x_2,\cdots,x_n)$، یک همسایگی V از x را به طور وابرسان بروی مجموعه‌ای باز V' می‌نگارد. بنا به روش ساخت بالا، h مجموعهٔ $C_k\cap V$ را بتوی ابر صفحهٔ $0\times\mathbb{R}^{n-1}$ می‌نگارد. بنابراین، نگاشت $g=f\circ h^{-1}$ همهٔ نقاط تکین از نوع C_k در ابر صفحهٔ $0\times\mathbb{R}^{n-1}$ هستند. گیریم $\bar{g}:(0\times\mathbb{R}^{n-1})\cap V'\to\mathbb{R}^p$ تحدید g است. بنا به استقراء، مجموعهٔ مقادیر تکین $\bar{g}$ با اندازهٔ صفر است. به علاوه، نقاط تکین g از نوع C_k به وضوح نقاط تکین $\bar{g}$ هستند. این ثابت می‌کند که تصویر این نقاط تکین با اندازهٔ صفر است، و بنابراین $f(C_k\cap V)$ با اندازهٔ صفر است. چون C_k-C_{k-1} با تعدادی شمارا از چنین V هایی پوشانده می‌شود، برهان تمام است. □

بالاخره، ثابت می‌کنیم:

لم ۳. به ازاء هر $k>\frac{n}{p}-1$ ای، $f(C_k)$ با اندازهٔ صفر است.

با تلفیق دو قضیهٔ قبل، قضیه اثبات می‌گردد.

اثبات لم ۳: گیریم $S\subset U$ مکعبی است که یال‌های آن به طول δ هستند. اگر k با اندازهٔ کافی بزرگ باشد، (مشخصاً $k>\frac{n}{p}-1$) ثابت می‌کنیم که $f(C_k\cap S)$ با اندازهٔ صفر است. چون C_k را با تعدادی شمارا از چنین مکعب‌هایی می‌توان پوشاند، ثابت می‌کنیم $f(C_k)$ با اندازهٔ صفر است.

از فرض فشردگی S، قضیهٔ تیلور و نیز تعریف C_k نتیجه می‌گیریم که $f(x+h)=f(x)+R(x,h)$، که به ازاء هر $x\in C_k\cap S$ و هر $x+h\in S$ ای

$$|R(x,h)|<a|h|^{k+1} \qquad (۱.۱)$$

در اینجا a ثابتی است که تنها به f و S بستگی دارد. حال S را به r^n مکعب که طول یال‌های آنها $\frac{\delta}{r}$ است تقسیم می‌کنیم. گیریم S_1 مکعبی از این تقسیمات است که نقطه‌ای x از C_k را در بر دارد. در این صورت هر نقطه از S_1 را به صورت $x+h$ می‌توان نوشت، که

$$|h|<\sqrt{n}(\delta/r) \qquad (۲.۱)$$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

از ۲.۱ نتیجه می‌گیریم که $f(S_1)$ در مکعبی با یال بعه طول b/r^{k+1} و مرکز در $\delta(x)$ قرار دارد که در آن $b = 2a(\sqrt{n}\delta)^{k+1}$ ثابت است. بنابراین، $f(C^k \cap S)$ در اجتماعی از حداکثر r^n مکعب با حجم کل

$$v \leq r^n \left(\frac{b}{r^{k+1}}\right)^p = b^p \, r^{n-(k+1)p}$$

قرار دارد. اگر $k+1 > \frac{n}{p}$، آنگاه وقتی $r \to \infty$ بداهتاً $v \to 0$ و لذا $f(C_k \cap S)$ بایستی با اندازهٔ صفر باشد. این اثبات قضیهٔ سارد را تکمیل می‌کند. $\square$

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

پیوست ب

طبقه بندی ۱-خمینه‌های فشرده

قضیهٔ طبقه بندی مشروح در ذیل را به کمک توابع مورس ثابت می‌کنیم. در ضمیمهٔ کتاب میلنر [۱] اثباتی مبتنی بر طول قوس مطرح شده است.

قضیه. هر خمینهٔ یک بعدی فشردهٔ مرزدار با دایره یا بازهٔ بسته وابرسان است.

اثبات به لمی تکنیکی به شرح زیر نیاز دارد، که آن را در ابتدا ثابت می‌کنیم.

لم همواری. گیریم g تابعی بر $[a;b]$ است که هموار بوده و در همه جا به جز یک نقطهٔ درونی c از بازه دارای مشتق مثبت است. در این صورت تابعی هموار و فراگیر $\bar{g}$ وجود دارد که در نزدیکی دو انتهای بازه با g برابر است و در همه جا مشتقش مثبت می‌باشد.

برهان: گیریم p تابعی نامنفی و هموار است که خارج زیر مجموعه‌ای فشرده از $(a;b)$ صفر می‌شود، در نزدیکی c برابر یک می‌شود و در شرط $\int_a^b p = 1$ صدق می‌کند. تعریف می‌کنیم

$$\bar{g}(x) = g(a) + \int_a^x \{kp(S) + g'(S)(1 - p(S))\}\, dS$$

که در آن

$$k = g(b) - g(a) - \int_a^b g'(S)(1 - p(S))\, dS$$

(توجه شود که $0 < k$) تحقیق اینکه $\bar{g}$ خاصیت مورد نظر را دارد، بر عهدهٔ خوانده است. □

برای اثبات قضیه، تابع مورس f بر X انتخاب می‌کنیم. گیریم S اجتماع نقاط تکین f و نقاط مرزی X است. چون S متناهی است، $X - S$ تعدادی متناهی یک منیفلد همبند مانند $L_1, \cdots, L_N$ را شامل است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

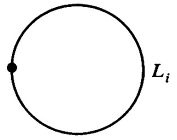
گزاره. f هر یک از L_i ها را به شکل وابرسان بروی بازه‌ای از $\mathbb{R}^1$ می‌نگارد.

برهان: گیریم L یکی از L_i ها است. چون f وابرسانی موضعی و L همبند است، $f(L)$ در $\mathbb{R}$ همبند و باز است. به علاوه، $f(L)$ در مجموعهٔ فشردهٔ $f(X)$ قرار دارد و لذا $f(L) = (a,b)$. کافی است نشان دهیم f بر L یک به یک است، زیرا در این صورت $f^{-1} : (a,b) \to L$ قابل تعریف است، و چون f دیفئومورفیسم موضعی است، موضعاً هموار است.

گیریم p نقطه‌ای دلخواه از L است و $c = f(p)$. نشان می‌دهیم هر نقطهٔ $q \in L$ دیگری را توسط منحنی $\delta : [c;d] \to L$ (یا $\delta : [d;c] \to L$) طوری می‌توان به p متصل کرد که همانی $= f \circ \delta$ و $\delta(d) = q$. چون $f(q) = d \neq c - f(p)$، نتیجه می‌گیریم f یک به یک است (و در واقع f^{-1} را نیز ساختیم). پس فرض کنیم Q مجموعهٔ نقاطی چون q است که می‌توان به این شکل متصل کرد. تنها چیزی که باید نشان داده شود، این مطلب ساده است که Q هم باز است و هم بسته، که چون f دیفئومورفیسم موضعی است، کاری ساده می‌باشد. بنابراین $Q = L$. □

حال لمی را مطرح می‌کنیم که قبلاً به عنوان مسألهٔ ۸ در بخش ۲ از فصل ۲ مطرح شده بود.

لم. گیریم L زیر مجموعه‌ای از X است که با بازه‌ای باز در $\mathbb{R}$ وابرسان می‌باشد و $\dim X = 1$. در این صورت، بستار آن $\bar{L}$ حداکثر دو نقطهٔ غیر واقع در L دارد.

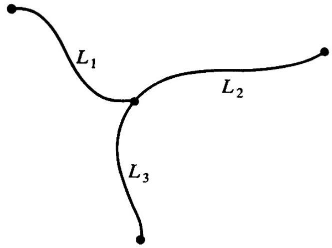


شکل ب.۱:

در اینجا، وابرسانی f از L_i بازه‌ای باز در $\mathbb{R}$ به بستار $\bar{L}_i$ توسیع می‌گردد، و لذا شکل $A-1$ غیر ممکن است. بنابراین، هر یک از $\bar{L}_i$ ها دقیقاً دو نقطهٔ مرزی دارد. همچنین، چون X خمینه است، هر نقطه $p \in S$ یا بر مرز یکی از $\bar{L}_i$ ها است و یا حداکثر بر مرز دو تا از آنها؛ و در حالت اخیر، $p \in \partial X$. (چرا شکل $A-2$ ممکن نیست؟) دنبالهٔ $L_1, \cdots, L_k$ را در صورتی زنجیر گوییم که هر جفت $\bar{L}_j$ و $\bar{L}_{j+1}$ دارای یک نقطهٔ مرزی مشترک p_j داشته باشند، که $g = 1, \cdots, k-1$. گیریم p_0 نقطهٔ مرزی دیگری از L_1 است، و p_k نقطهٔ مرزی دیگری از L_k است. چون تنها تعدادی متناهی L_i دیگر وجود دارد، به وضوح زنجیره‌ای ماکسیمال وجود دارد، رنجیره‌ای که با افزودن L_i های دیگر قابل توسیع نیست. اثبات را با مطلب زیر تکمیل می‌کنیم:

ادعا. اگر $L_1, \cdots, L_k$ زنجیره‌ای کامل باشد، آنگاه هر یک از L_i ها را در بر دارد. اگر $\bar{L}_0$ و $\bar{L}_k$ نقطهٔ مرزی مشترکی داشته باشند، آنگاه X با دایره وابرسان است؛ و در غیر این صورت X با بازه‌ای بسته وابرسان می‌باشد.

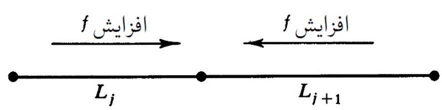
Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah



شکل ب.۲:

برهان: فرض کنید L در زنجیره نباشد. در این صورت $\bar{L}$ نقطه‌ای مرزی مثل p_0 یا P_k را دارد؛ در غیر این صورت بایستی زنجیره طولانی‌تر شود. همچنین در هیچ p_j دیگری ملحق نمی‌شود، زیرا شکل ۲.۴ غیر ممکن است. بنابراین $\cup_{j=1}^{k} \bar{L}_j$ هیچ یک از $\bar{L}$ های غیر واقع در زنجیره را قطع نمی‌کند. نتیجتاً، این اجتماع هم باز است و هم بسته (در X) و بنابراین $X = \cup_{j=1}^{k} \bar{L}_j$ بنا به همبندی برقرار است.

اکنون f بر هر L_j ای به خوبی عمل می‌کند، ولی وقتی یکی از L_j ها به نقاط مرزی برمی‌گردد، ممکن است جهت برعکس شود (شکل ۵.۴). در آخرین مرحلهٔ کار، این مشکل را نیز می‌توان مرتفع نمود. گیریم $a_j = f(p_j)$ و $L_j f$ را به شکل وابرسان بروی $(a_{j-1}; a_j)$ یا $(a_j; a_{j-1})$ بنگارد (هر کدام بامعنی باشد). به ازاء هر $j = 1, \cdots, k$ ای یک نگاشت آفین $\tau_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ طوری انتخاب می‌کنیم که a_{j-1} را به $j-1$ و a_j را به j ببرد. (نگاشت آفین نگاشتی خطی به علاوه نگاشتی ثابت است: $t \mapsto \alpha t + \beta$.) تابع $f_j : \bar{L}_j \to [j-1; j]$ را با ضابطهٔ $f_j = \tau_j \circ f$ تعریف می‌کنیم. اگر $a_0 \neq a_k$، آنگاه f_j بر نقاط مشترک



شکل ب.۳:

تعریف یکسان دارند. بنابراین، می‌توان f_i ها به هم متصل کرده و نگاشتی همچون $F : X \to [0; k]$ با ضابطهٔ $F = f_i$ بر $\bar{L}_i$ تعریف کرد. F پیوسته است و به جز در نقاط $p_1, \cdots, p_{k-1}$ وابرسانی می‌باشد. حال به کمک لم همواری، می‌توان F را به یک وابرسانی فراگیر توسیع داد.

اگر $a_0 = a_k$، فرض می‌کنیم $g_j = \exp(i(2\pi/k)f_j)$. در این صورت می‌توانیم $G : X \to \mathbb{S}^1$ را با ضابطهٔ $G = g_j$ بر $\bar{L}_j$ تعریف کنیم. G پیوسته است و به جز در نقاط $p_1, \cdots, p_{k-1}$ وابرسان می‌باشد. باز هم به کمک لم همواری (که بر مختصات موضعی بر $\mathbb{S}^1$ به کار گرفته شود) می‌توان G را به یک وابرسانی فراگیر توسیع داد. □

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

کتاب‌نامه

[] همان طور که در متن هم اشاره شد، مطالعهٔ دو کتاب زیر را در کنار این کتاب پیشنهاد می‌کنیم.

[1] J. MILNOR, Topology from a Differential Viewpoint. University of Virginia Press, 1965.

[2] M. SPIVAK, Calculus on Manifolds. New York: Benjamin, 1965.

مراجع زیر را نیز مطرح می‌کنیم که هر یک تا حدودی با این کتاب موافقند. پیشنهاد نمی‌کنیم که شما همهٔ این کتب را یکی پس از دیگری مطالعه کنید. فرض بر این است که به اندازهٔ کافی مطالعه کرده‌اید و اکنون وقت آزاد دارید و می‌خواهید بیشتر بدانید. بسیاری از مراجع مطرح شده کتاب درسی نیستند. در مجموع از اختصارهای زیر برای ساده‌تر شدن بحث می‌توان استفاده کرد:

G = کتاب مقدماتی است. با دانستن آنالیز و جبر مقدماتی می‌توان آن را مطالعه کرد.

pG = کتاب کمتر مقدماتی است. پیشنیاز بیشتری برای فهم آن لازم است (مثل توپولوزی جبری).

R = در سطح فوق لیسانس است اما دانشجویان کارشناسی با سطح خوب می‌توانند آن را مطالعه کنند.

X = کتاب برای دانشجویان کارشناسی ارشد هم کمی سخت است، به این معنی که توجه و دقت بیشتری باید در مطالعهٔ آن داشت.

چند مرجع برای فصل ۱:

[3] J. MILNOR, Morse Theory. Princeton, N.J.: Princeton University Press, No. 51,1963.

در بخش ۷ از فصل ۱ نشان دادیم که هر خمینه‌ای، توابع مورس می‌پذیرد. برای مشاهدهٔ کاربردهایی از این حکم، به بخش اول از این کتاب (صفحات ۱ تا ۴۲) توجه شود. کمی توپولوژی جبری لازم است ولی نه خیلی. [pG]

[4] M. MORSE, Pits, Peaks, and Passes. Produced by the Committee on Educational Media, Mathematical Association of America. Released by Martin Learning Aids, 1966.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

در این فیلم جالب، مارستون مورس نشان می‌دهد که جغرافی چه مطالبی در خصوص توپولوژی به ما می‌آموزد. در حالت دو بعدی، نقاط تکین هر تابع مورس به نوک قله‌ها و ته گودال‌ها نظیر به نقشهٔ زمین اشاره دارند. [G]

[5] A. WALLACE, Differential Topology, First Steps. New York: Benjamin, 1968.

نویسنده برخی موضوعات مرتبط (از نظریهٔ مورس و یا نظریهٔ جراحی) را به زبان ساده مورد بحث قرار می‌دهد و طبقه بندی دو-خمینه‌ها را به کمک مورس مطرح می‌کند.[pG]

[6] A. GRAMAIN, Cours d'initiation a la topologie algebrique, Orsay, Faculte des Sciences, 1970.

در این کتاب هم طبقه بندی دو-خمینه‌ها به کمک نظریهٔ مورس را می‌توان یافت. این کتاب کمی برای مبتدی‌ها دشوارتر از والاس است. (اما به زبان فرانسه است .) [G]

[7] L. AHLFORS and L. SARlO, Riemann Surfaces. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1960.

در این اثر روش کلاسیک طبقه بندی دو-خمینه‌ها مطرح شده است. [pG]

[8] R. ABRAHAM, Transversal Mappings and Flows. New York: Benjamin, 1967.

قضیهٔ تراگردی کاربرد مهمی در نظریهٔ دستگاه‌های دینامیکی دارد. البته بهتر است که قبل از مطالعهٔ اثر آبراهام، مقالهٔ اسمیل که در ذیل معرفی شده است را مطالعه کنید. [R]

[9] M. GOLUBITSKY and V. GUILLEMIN, Stable Mappings and Their Singularities. New York: Springer, 1973.

در اینجا یک کاربرد جالب دیگر از تراگردی مطرح شده است: مطالعهٔ نقاط تکین نگاشت‌ها. [R]

در ارتباط با مباحث ۲ و ۳ قویاً توصیه می‌کنیم که کتاب میلنر [۱] را مطالعه کنید. به خصوص، بخش ۷ از میلنر، مقدمه‌ای بر نظریهٔ «هم‌مرزی» است. در صورت لزوم می‌توانید مراجع زیر را نیز در این ارتباط مطالعه کنید.

[10] L. PONTRYAGIN, "Smooth Manifolds and Their Applications in Homotopy Theory," Amer. Math. Society Translations, Series 2, 11(1959), 1-114.

این کتاب را به راحتی می‌شود مطالعه کرد و در آن خبری از لم و قضیهٔ صوری نیست و رعایت امانت در ترجمه شده است. کمی توپولوژی لازم است. [R]

[11] P. ALEXANDROFF and H. HOPF, Topologie. New York: Chelsea, 1965.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

این کتاب یکی از آثار کلاسیک در زمینهٔ توپولوژی است. به راحتی نمی‌توان آن را مطالعه کرد -اصل آن به زبان آلمانی است- ولی کاربردهای جالبی در آن می‌توانید ملاحظه کنید. $[X]$

در بیان معمولی قضیهٔ نقطه-ثابت لفشیتز، آشنایی با روش محاسبهٔ عدد لغشیتز بر اساس نظریهٔ هومولوژی لازم است. برای مشاهدهٔ این امر و نیز مطالعهٔ بخشهایی از توپولوژی جبری به اثر زیر توجه کنید:

[12] M. GREENBERG, Lectures on Algebraic Topology. New York: Benjamin, 1967, Section 30 [PG].

چنانچه مایلید مطالب دقیق‌تری در خصوص جنبه‌های توپولوژیک شار و میدان‌های برداری را ملاحظه کنید، به اثر زیر توجه کنید.

[13] W. HUREWICZ, Lectures on Ordinary Differential Equations. Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1958, Chapter 5, pp. 102-115 [G].

مقالهٔ خواندنی و توصیفی زیر را نیز توصیه می‌کنیم:

[14] S. SMALE, "Differentiable Dynamical Systems," Bulletin of the A.M.S., 73 (1967), 747-817 [PG].

مرجع اصلی ما در فصل ۴، اسپیواک [۲] است. البته، مطالعهٔ آن احتمالاً کمی دشوار است و لازم است به یک کتاب حسابان نظیر آپوستل مراجعه کنید. لازم است قضیهٔ گرین، دیورژانس و استوکس را بدانید.

در مورد اصل آرگومان به مرجع زیر توجه کنید:

[15] AHLFORS, Complex Analysis. New York: McGraw-Hill, 1953, p. 123 [PG].

نوعی از قضیهٔ گاوس-بونه که در بخش ۹ از فصل ۴ مطرح کردیم، قضیهٔ گاوس-بونهٔ غیر ذاتی (برای ابر رویه‌های در $\mathbb{R}^n$) است. در مرجع زیر نوع ذاتی قضیهٔ گاوس-بونه مطرح شده است:

[16] S. CHERN, "A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds,"Annals of Math, 45 (1944),747-752 [X].

احتمالاً با مقدماتی که از هندسه دیفرانسیل می‌دانید، خواندن مقالهٔ چرن دشوار و بلکه محال است. در فصل ۷ از مرجع ذیل حالت دو بعدی قضیهٔ گاوس-بونهٔ ذاتی آورده شده است.

[17] I. M. SINGER and H. A. THORPE, Lecture Notes on Elementary Geometry and Topology. Glenview, Ill.: Scott, Foresman, 1967 [PG].

(دلیل اینکه نوع دو بعدی قضیهٔ گاوس-بونه از حالت کلی آن ساده‌تر است، این می‌باشد که گروه ماتریس‌های 2×2 متعامد آبلی است!)

برای مشاهدهٔ مقدمات کوهومولوژی فرم‌ها، به بخش ۶ از مرجع زیر توجه شود:

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

[18] M. SPIVAK, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol. 1, Boston, Mass. : Publish or Perish, Inc.

در مجموع، کتاب اسپیواک را به عنوان مرجعی کامل معرفی می‌کنیم. این اثر بهترین مقدمهٔ در سطح کارشناسی ارشد از هندسهٔ دیفرانسیل می‌باشد.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

پروفسور ویکتور ویلیام گیلومن (Guillemin William Victor)، متولد ۱۳۱۶ شمسی در بوستون) ریاضیدانی برجسته و پیشرو در زمینه هندسه سیمپلکتیک می‌باشد، که کارهای او کمکهای اساسی به زمینه‌هایی چون نظریه میکرولوکال، نظریه طیفی، و فیزیک ریاضی نموده است. او قالبا با دانشجویان، فارغ التحصیلان، بازدید کنندگان و دانشجویان پسا دکترا در موسسه تکنولوژی ماساچوست در مباحثات علمی است، جایی که او به عنوان استاد بخش ریاضیات در آن مشغول است، و جایی که او بیش از ۴۰ دانشجوی دکترا در آن تربیت نموده است.

گیلومن در سال ۱۳۳۸ کارشناسی خود را از دانشگاه شیکاگو اخذ نمود و پس از آن در سال ۱۳۳۹ مدرک کارشناسی ارشد و در ۱۳۴۱ نیز موفق به اخذ مدرک دکتری ریاضیات از دانشگاه هاروارد شد. او تز دکتری خود را با پروفسور استرنبرگ تحت عنوان «نظریه G–ساختارها» تهیه نموده است. او کتابها و مقالات متعددی در زمینه‌های مختلف ریاضیات دارد. کتاب حاضر از معروفترین کارهای ایشان است. این کتاب در زمینه توپولوژی دیفرانسیل بسیار معروف و قریب ۴۰ سال است که با هیچ نیازی به تغییر مورد توجه دانشمندان قرارگرفته است. در سال ۱۳۸۹ انجمن ریاضی امریکا این کتاب را به همان صورت اولیه‌اش تجدید چاپ نمود.

آقای آلن پولاک (Pollack Stuart Alan) در سال ۱۳۵۱ شاگر دکتری آقای گیلمن در موسسه تکنولوژی ماساچوست بوده است.

Homepage: http://www-math.mit.edu/ vwg/

مترجم. دکتر مهدی نجفی‌خواه (متولد ۱۳۴۹ شمسی در تهران)، استاد دانشکده ریاضیات دانشگاه علم و صنعت ایران است. کارهای او در زمینه‌های مختلف هندسه دیفرانسیل، از جمله نظریه G–ساختارها، کنجهای متحرک، نظریه هم‌ارزی، و تقارنهای معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آن می‌باشد.

Homepage: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah
e-mail: m_nadjafikhah@iust.ac.ir

نسخه نهایی این کتاب را خانم دکتر فاطمه آهنگری و خانم دکتر پرستو کعبی‌نژاد در سال ۱۳۹۰ بازبینی و با نسخه اصلی کتاب مقایسه نموده‌اند. بدین وسیله از ایشان تشکر می‌گردد.

توجه: آخرین ویرایش ترجمه این کتاب را در سایت مترجم می‌توانید پیدا کنید. آخرین تغییرات در این نسخه، در تاریخ ۱۳ خرداد ۱۳۹۲انجام شده است.

Copyright: Mehdi Nadjafikhah, 7/1/2013. URL: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah