روش گروهها
در
معادلات دیفرانسیل

اثر: جیمز م. هیل

دیباچه

مشکلی که در حل معادلات دیفرانسیل وجود دارد، این است که زمانی که می توانیم آنرا حل کنیم بندرت چرایی نحوه حل آنرا می‌پرسیم. مفهوم گروه تبدیلات یک—پارامتری که معادله دیفرانسیل را ناوردا می‌کند فهم همزمان اغلب تکنیک‌های حل راممکن می‌سازد. در این کتاب سعی کرده‌ایم که دلیلی مختصر و جامع برای استفاده از گروههای یک—پارامتری در حل معادلات دیفرنسیل ارائه دهیم. روش ارائه بگونه‌ای است که درخواست ریاضیدانان کاربردی و مهندسانی که اصلی‌ترین نگرانیشان یافتن راه‌حل‌های معادلات دیفرانسیل است را تامین می‌کند. در اینجا فقط موضوعات اساسی که برای توانمند کردن خواننده برای استفاده از روش گروهها در هنگام حل معادلات دیفرانسیل لازم است را مد نظر قرار داده‌ایم و عمداً همه نتایج شناخته شده را بخاطر اینکه منجر به ارائه دلایل غیرضروری بیشتری می شود ارائه نکرده‌ایم. برای معادلات دیفرانسیل معمولی کتاب ارائه شده توسط «ل . د. دیکسون» «معادلات دیفرانسیل از دید گروهی» هنوز به اندازه‌ی زیادی قابل مطالعه است و برای خواننده علاقه‌مند به دنبال کردن بیشتر موضوع، توصیه می شود. برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی کتاب «ج . و .بلومن» و «ج . د. کول» «روشهای تقارنی در معادلات دیفرانسیل» و کتاب «خواص گروهیِ معادلات دیفرانسیل» نوشته «ل . ب .اوزیانیکوف» شامل چندین کاربرد و مثال می‌باشند که در اینجا آنها را ارائه نکرده‌ایم.

دو فصل اول مقدماتی است. فصل اول مقدمه‌ای با مثالهای ساده در ارتباط با معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی است. در فصل دوم مفاهیم گروههای یک—پارامتری و سریهای لی آورده شده‌است. همانگونه که روشهای معمولی حل معادلات دیفرانسیل نیاز به ابتکار خاصی دارند، روش گروهی نیز به آن نیازمند است. به منظور شروع برخی از آشنایی‌ها با روش گروهی، سعی کرده‌ایم که تجربیاتمان را در معادلات خطی بکار ببریم. اغلب می‌دانیم که معادلات دیفرانسیل خطی برای $y(x)$ تحت تبدیل $x_1 = f(x)$ و $y_1 = g(x)y$ خطی باقی می‌مانند و فصل ۳ را به نتایج آن اختصاص داده‌ایم. در فصول ۴ و ۵ سعی کرده‌ایم نظریه معمولی برای روش گروهی را با نتایج بدست آمده در فصل ۳ مرتبط کنیم. از این نظر این کتاب متفاوت از بقیه کتابها می‌باشد و معتقدم که شماری از نتایج بدست آمده بالاخص در فصل ۳ جدیدند.

دو فصل نهایی به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی اختصاص داده شده است. بخش اعظم این نظریه با ارجاع به انتشار وابسته به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی توضیح داده شده است. نظریه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی در فصل ٦ برای انتشار کلاسیک یا معادله انتقال حرارت و معادله فوکر—پلانک معرفی شده است، به معادلات غیر خطی در فصل ۷ می‌پردازیم. برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی رویکرد گروهی کارایی کمتری دارد چون برای مشکلات مقدار مرزی ناوردا می‌باشد. در این جا ما اساساً فقط ناوردا بودن معادله و دیدگاه گروهی را که به عنوان ابزار سیستماتیک برای استنباط راه حل معادلا ت دیفرانسیل با مشتقات جزیی داده شده است، را در نظر می‌گیریم.

این کتاب مرجع تدریس یک دوره بعد—فارغ التحصیلی در دانشگاه ولانگنگ برای چندین سال بوده است که تعداد زیادی مساله و مثال به آن افزوده‌ایم. علاوه بر این از مسائل انتهایِ هر فصل، بمنظور تفهیم آسان نتایج استاندارد برای معادلات دیفرانسیل که در متن ارائه شده‌اند، استفاده کرده‌ایم و در بعضی مواقع از این مسائل برای ارائه خلاصه تئوری‌هایی که پیشتر از این بنحوی کامل در متن توصیف شده‌اند استفاده نموده‌ایم. چندین صفحه در خصوص پاسخ‌ها و نکات مربوط به مسائل در انتهای هر فصل و در انتهای کتاب آورده شده است که برای ایجاد متنی قابل استفاده برای دانشجویان فارغ—التحصیل و در حال فارغ—التحصیلی در رشته ریاضیات، علوم و مهندسی طراحی شده‌اند. در این گونه نظام‌ها معادلات دیفرانسیل کماکان نقش اساسی بازی کرده و متن حاضر سعی می کند از فرضیات پایه‌ای که معادلات دیفرانسیل را بوجود می آورند برای حل آنها استفاده نماید. تئوری موجود حل معادلات دیفرانسیل بوسیله گروههای یک—پارامتری به هیچ عنوان کامل نیست و بسیاری از نواقص این موضوع در متن مشخص شده است. وقتی این روش کارایی دارد بسیار آسان بوده و بنابراین زمینه دانشی است که هر فردی در زمینه ریاضیات کاربردی باید داشته باشد. محدودیتهای (روش گروه) هر چه باشد کماکان این روش ایده بسیار جالبی جهت حل مسائل معادلات دیفرانسیل محسوب می‌شود. امیدواریم این کتاب مفید واقع شده و اطلاعات قبلی شما را کامل کند.

دانشگاه ولانگنگ،
۱۹۹۲

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ مقدمه

اگر چه در دو سده اخیر تحقیقات خوبی در زمینه معادلات دیفرانسیل صورت گرفته است، ولی فهم حاضرمان دربارهٔ آنها کامل نیست. هدف این کتاب بدست آوردن جواب معادلات دیفرانسیل با استفاده از گروه تبدیلات یک—پارامتری که نسبت به معادله ناوردا هستند، می‌باشد. این موضوع در صد سال پیش توسط آقای «سوفس لی» بنیان گذاشته شد. هر چند این روش همیشه در رسیدن به جواب موفق نیست، ولی یک چارچوب در روشهای خاص موجود برای حل معادلات دیفرانسیل تولید می‌کند که بطور مناسبی قابل فهم بوده و در حل معادلات خطی و غیر خطی به طور متشابه قابل اجرا است. در تنظیم کردن معادلات دیفرانسیل، ریاضیدانان کاربردی ناچار می‌شوند مفروضات معینی را در نظربگیرند که با استفاده از نظریه گروه، این مفروضات می‌توانند به عنوان کلیدی برای بدست آوردن جواب آن معادلات مورد استفاده قرار گیرند.

هدف این فصل ارائه یک مقدمه ساده دربارهٔ این موضوع برای هر دو نوع معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی با استفاده از مثالهای شناخته شدهٔ ساده است. برای معادلات دیفرانسیل معمولی، مراجع جامعی از این نوع موضوع در کتابهای «کوهن ۱۹۱۱»، «پیگ ۱۸۹۷» و اخیراً «بلومن و کول ۱۹۷۴» و در مقالات تجدید نظر شده، توسط «جستر ۱۹۷۷» و «دیکسون ۱۹۲۴» ارائه شده‌اند. و خواننده می‌تواند برای آشنایی بیشتر با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی به «بلومن و کول ۱۹۷۴» و «اوزیانیکوف ۱۹۶۷» و منابعی که این دو معرفی می‌کنند، رجوع کند. این حقیقت که این فرایند، از گروههای یک—پارامتری برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده می‌کند که منتج به نتایجی در معادلات دیفرانسیل آبل از نوع دوم (۲۱.۱) می شود که روند حل عمومی برای آن وجود ندارد، غیر قابل باور است. کافی است بدانیم که کلیت معادلات آبل با انتگرال گیری‌هایی که فهرست شده است (به عنوان مثال «مرفی ۱۹۶۰» را ببینند.) به طور کلی به هیچ یک از سه رده‌بندی جزیی حل معادلات تعلق نمی‌گیرند. آنها می‌توانند با تغییر متغیر $z = y^2$ به یک معادله دیفرانسیل خطی استاندارد یا به یک معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه اول همگن یا به نوع تفکیک‌پذیر تبدیل شوند. بنابراین این فصل مقدماتی را با جزئیات عمومی از معادلات آبل از نوع دوم به پایان می‌رسانیم.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی

بمنظور تشریح برخی از ایده‌هایی که در این کتاب بسط داده می‌شوند، مثال ساده زیر را در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیل همگن از مرتبه اول

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \quad (۱.۱)$$

با تغییر متغیر $u(x, y) = y/x$ می‌تواند به یک معادله دیفرانسیل تفکیک‌پذیر تبدیل شود، بنابراین داریم:

$$udu = \frac{dx}{x},$$

و با حل آن

$$\log x - \frac{۱}{۲}\Big(\frac{y}{x}\Big)^{۲} = C, \qquad (۲.۱)$$

بدست می‌آید که C یک ثابت دلخواه است. اکنون سوالهای مناسب زیر را می‌توانیم بپرسیم:

سوال اول: چرا تغییر متغیر $u(x,y) = y/x$ معادله را به یک معادله تفکیک‌پذیر برای u تغییر می‌دهد؟

سوال دوم: چگونه می‌توانیم درجه آزادی ثابت دلخواه C را در جواب معادله تفسیر کنیم؟

جواب این سوال ها می‌تواند در چارچوب تبدیلات خطی که معادله دیفرانسیل را تغییر نمی‌دهند، تامین شود. تبدیلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$x_۱ = e^{\varepsilon} x, \quad y_۱ = e^{\varepsilon} y, \qquad (۳.۱)$$

که در آن ε ثابت دلخواهی است. توجه می‌کنیم که (۱.۱) تحت (۳.۱) ناوردا باقی می‌ماند، به این معنا که معادله دیفرانسیل جدید با تغییر متغیرهای $x_۱$ و $y_۱$ با معادله دیفرانسیل اولیه یکی است. یعنی:

$$\frac{dy_۱}{dx_۱} = \frac{x_۱^۲ + y_۱^۲}{x_۱ y_۱}, \qquad (۴.۱)$$

بعلاوه می‌بینیم که (۳.۱) در خواص زیر صدق می‌کند:

(i) $\varepsilon = ۰$ تبدیل همانی را بدست می‌دهد: $x = x_۱$ و $y = y_۱$.

(ii) $-\varepsilon$ تبدیل وارون را بدست می‌دهد: $x = e^{-\varepsilon} x_۱$ و $y = e^{-\varepsilon} y_۱$.

(iii) اگر $x_۲ = e^{\delta} x_۱$ و $y_۲ = e^{\delta} y_۱$ آنگاه تبدیل حاصلضرب دوباره عضوی از مجموعه تبدیلات (۳.۱) بوده و با پارامتر $\varepsilon + \delta$ مشخص می‌شود: $x_۲ = e^{\varepsilon+\delta} x$ و $y_۲ = e^{\varepsilon+\delta} y$.

مجموعهٔ تبدیلاتی که در سه خاصیت بالا صدق می‌کنند را گروه تبدیلات یک—پارامتری می‌نامند. مشاهده می‌کنیم که خاصیت شرکت‌پذیری گروه به آسانی از خاصیت (iii) بدست می‌آید. اکنون با استفاده از این اصطلاح شناسی، سوالهای بالا را به صورت زیر می‌توانیم پاسخ دهیم:

جواب ۱: تغییر متغیر $u(x,y) = y/x$، بدلیل ناوردا بودن $u(x,y)$ نسبت به (۳.۱) به معادله‌ای تفکیک‌پذیر برای u منجر می‌شود، به این معنا که $u(x_۱, y_۱) = u(x,y)$، در واقع داریم:

$$u(x_۱, y_۱) = \frac{y_۱}{x_۱} = \frac{y}{x} = u(x,y), \qquad (۵.۱)$$

و این خاصیتی است که ساده‌سازی (۱.۱) را نتیجه می‌دهد. در حالت کلی خواهیم دید که اگر معادله دیفرانسیل تحت گروه یک—پارامتری ناوردا باشد، استفاده از ناوردای گروه، ساده‌سازی معادله دیفرانسیل را آسان می‌کند. اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه اول باشد، آن به معادله تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شود و اگر از مرتبه بالاتر باشد، استفاده از ناوردای گروه، مرتبه آنرا کاهش خواهد داد.

جواب ۲: با توجه به (۲.۱) و (۳.۱) داریم:

$$\log x_۱ - \frac{۱}{۲}\Big(\frac{y_۱}{x_۱}\Big)^{۲} = C + \varepsilon, \qquad (۶.۱)$$

بنابراین درجه آزادی در جواب (۲.۱) از ثابت دلخواه C نتیجه می‌شود که به ناوردای معادله دیفرانسیل (۱.۱) تحت گروه تبدیلات (۳.۱) که توسط پارامتر ε مشخص شده، وابسته است. یعنی تبدیل (۳.۱) خم‌های جواب (۲.۱) را پس و پیش می‌کند. در حالت کلی خواهیم دید که برای هر گروه یک—پارامتری با دو متغیر، توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ با خاصیت زیر وجود دارند.

$$u(x_۱, y_۱) = u(x,y), \quad v(x_۱, y_۱) = v(x,y) + \varepsilon, \qquad (۷.۱)$$

بعلاوه اگر معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تحت این گروه ناوردا باشد، آنگاه فرم این معادلات بر حسب متغیرهای جدید v و u بشکل زیر است:

$$\frac{dv}{du} = \phi(u), \qquad (۸.۱)$$

و در نتیجه دارای جواب به شکل

$$v + \psi(u) = C \qquad (۹.۱)$$

برای توابع مناسب $\phi(u)$ و $\psi(u)$، خواهد بود.

۱.۲.۱ مثال. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{۲}{x^۳} - \frac{۳}{x^۲}y.$$

این معادله دیفرانسیل آبل از نوع دوم است «مرفی (۱۹٦۰) ،صفحه ۲۵» که در حالت کلی قابل حل با هیچ ابزار استانداردی نیست. بوضوح این معادله تحت گروه

$$x_۱ = e^{\varepsilon}x, \qquad y_۱ = e^{-\varepsilon}y,$$

ناوردا است. بنابراین $u(x,y) = xy$ را به عنوان متغیر وابسته جدید می‌توان برگزید، که در این صورت معادله بصورت

$$xu\frac{du}{dx} = u^۲ - ۳u + ۲,$$

که تفکیک—پذیر است، تغییر می‌یابد، و با انتگرال‌گیری از صورت ساده شدهٔ آن، یعنی:

$$\frac{dx}{x} = \frac{udu}{(u-۱)(u-۲)} = \Big\{\frac{۲}{(u-۲)} - \frac{۱}{(u-۱)}\Big\}du,$$

جواب معادله بصورت:

$$(xy-۲)^۲ = Cx(xy-۱),$$

بدست می آید.

اشاره به این نکته که همه معادلات با این روش ساده قابل حل نمی‌باشند، بسیار ارزشمند خواهد بود. به عنوان مثال معادله

$$y\frac{dy}{dx} = \Big(\frac{۲}{x^۳} + ٦\Big) - \Big(\frac{۳}{x^۲} + ٦x\Big)y,$$

که در الاسیسیته متناهی ظاهر می‌شود را در نظر بگیرید. این معادله نیز معادله آبل از نوع دوم است ولی در این حالت هیچ گروه ساده‌ای که معادله مورد نظر را ناوردا کند، وجود ندارد. در این مقدمه عمومی یادآوری دو موضوع مهم درباره تئوری گروهها که هنوز تا حد بسیاری جای سوال دارند، مناسب به نظر می‌رسد. خواننده بایست به خوبی این مسائل را با نقطه نظر توسیع نتایج در این موضوعات در ذهن داشته باشد.

(الف) معادلات دیفرانسیل تفاضلی جواب فرمولی معادلات دیفرانسیل تفاضلی خطی شناخته شده است. به عنوان مثال معادله زیر که در آن $x_\circ$ ثابت است را در نظر بگیرید:

$$\frac{dy(x)}{dx} = -y(x-x_\circ), \qquad (۱۰.۱)$$

آن دارای جواب عمومی بصورت

$$y(x) = \sum_j c_j e^{-w_j x},$$

که در آن C_jها ثابتهایی دلخواه و w_jها ریشه‌های معادله $w = e^{wx_\circ}$ هستند، خواهد بود. اگر معادله دیفرانسیل غیرخطی باشد، آنگاه یک روش عمومی برای حل آن وجود ندارد. به عنوان مثال معادله دیفرانسیلِ هاتکینسون را که از تئوری جمعیت بدست آمده است را در نظر بگیرید:

$$\frac{dy(x)}{dx} = y(x)[\text{۱} - y(x - x_\circ)], \tag{۱۱.۱}$$

نتایج تئوری گروهی برای معادلاتی از این دست چیست؟ (مسائل ۱۹ و ۲۰ از فصل دوم را ببینید).

(ب) معادلات دیفرانسیلی که تحت تبدیلاتی ناوردا هستند که نمی‌توان آنها را بعنوان گروههای یک–پارامتری در نظر گرفت برای معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^{\text{۲}} x}{dt^{\text{۲}}} = \text{۲}\frac{dx}{dt} + \frac{(\text{۵} + \text{۳}x)}{\text{۴}x(\text{۱} + x)}\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^{\text{۲}} + \frac{\text{۳}x(\text{۱} - x)}{(\text{۱} + x)}, \tag{۱۲.۱}$$

که در دینامیک سیال ظاهر می‌شود قابل اثبات است که اگر $x(t)$ جوابی برای معادله باشد آنگاه $x(t)^{-\text{۱}}$ نیز جوابی از آن خواهد بود. در واقع با نمایش $X(t) = x(t)^{-\text{۱}}$ و اعمال

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{\text{۱}}{x^{\text{۲}}}\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{d^{\text{۲}}X}{dt^{\text{۲}}} = -\frac{\text{۱}}{x^{\text{۲}}}\frac{d^{\text{۲}}x}{dt^{\text{۲}}} + \frac{\text{۲}}{x^{\text{۳}}}\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^{\text{۲}},$$

نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{\text{۲}}X}{dt^{\text{۲}}} - \text{۲}\frac{dX}{dt} - \frac{(\text{۵} + \text{۳}X)}{\text{۴}X(\text{۱} + X)}\Big(\frac{dX}{dt}\Big)^{\text{۲}} - \frac{\text{۳}X(\text{۱} - X)}{(\text{۱} + X)}\\
&\quad = -\frac{\text{۱}}{x^{\text{۲}}}\Big\{\frac{d^{\text{۲}}x}{dt^{\text{۲}}} - \text{۲}\frac{dx}{dt} - \frac{(\text{۵} + \text{۳}x)}{\text{۴}x(\text{۱} + x)}\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^{\text{۲}} - \frac{\text{۳}x(\text{۱} - x)}{(\text{۱} + x)}\Big\},\\
&\quad = \circ,
\end{aligned}$$

که اگر قرار دهیم $y = dx/dt$، آنگاه آن بصورت

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{\text{۳}x(\text{۱} - x)}{(\text{۱} + x)} + \text{۲}y + \frac{(\text{۵} + \text{۳}x)}{\text{۴}x(\text{۱} + x)}y^{\text{۲}}, \tag{۱۳.۱}$$

که دوباره معادله آبل از نوع دوم است، تغییر می‌یابد، بر اساس خواص جواب معادله (۱۲.۱) می‌توانیم نتیجه بگیریم که (۱۳.۱) تحت تبدیلات

$$x_{\text{۱}} = \frac{\text{۱}}{x}, \qquad y_{\text{۱}} = -\frac{y}{x^{\text{۲}}}, \tag{۱۴.۱}$$

که نمی‌توان آنرا بصورت گروه یک–پارامتری در نظر گرفت، ناوردا است. آیا می‌توانیم از خواص ناوردایی برای تعیین جواب‌های این گونه معادلات دیفرانسیل، استفاده کنیم؟

۳.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

برخلاف معادلات دیفرانسیل معمولی، موفقیت نگرش گروهی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی به اندازه قابل توجهی به شرایط مرزی آن وابسته است. یعنی نگرش گروهی تنها در حل مسائل مقدار مرزی که معادله و شرایط مرزی آن بوسیله گروه یک–پارامتری تغییر نمی‌کنند، موثر است. در اغلب موارد، توجه خود را در مقایسه با مسائل مقدار مرزی بیشتر به معادلات خاصی معطوف می‌کنیم. برای مسائل مقدار مرزی خاص بایست همیشه در ابتدا خواص ناوردایی ساده‌ای را جستجو کنیم. مسائل با مفروضات فیزیکی نسبت به خودِ معادلات بیشتر آشکارترند. اگر هیچ‌گونه ناوردایی نتوانیم پیدا کنیم و مسئله با روش‌های عددی حل شود آنگاه نگرش گروهی با تحمیل کردن شرایط مرزی مصنوعی بگونه‌ای که مسئله جدید دارای جواب باشد، به منظور بررسی تکنیک‌های عدديِ بکار رفته، مناسب است.

به منظور توضیح بیشتری از این بحث، مسئله مقدار مرزی زیر که هم معادله و هم شرایط مرزی آن نسبت به گروه یک–پارامتری ساده ناوردا هستند، را در نظر می‌گیریم.

۱.۳.۱ مثال. منبع تولید معادله انتشار یک بعدی یا انتقال حرارت برای $c(x,t)$، یعنی

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial^{2} c}{\partial x^{2}} \quad (t>0, -\infty<x<\infty), \tag{۱۵.۱}$$

را تعیین کنید.

منبع تولید برای (۱۵.۱) جوابی است که در همه زمان‌ها در نقطه بی‌نهایت صفر می‌شود و در شرط زیر که در آن C_0 ثابتی دلخواهِ وابسته به نیروی منبع بوده و $\delta(x)$ تابع دلتای معمولی دیراک را نشان می‌دهد، صدق می‌کند.

$$c(x,0)=c_0\delta(x), \tag{۱۶.۱}$$

ملاحظه می‌کنیم که (۱۵.۱) و (۱۶.۱) تحت تبدیلات زیر که در آن ε یک ثابت دلخواه است، تغییر نمی‌یابند:

$$x_1=e^{\varepsilon}x, \quad t_1=e^{2\varepsilon}t, \quad c_1=e^{-\varepsilon}c, \tag{۱۷.۱}$$

که آنرا بر اساس این خاصیت مقدماتیِ توابع دلتا

$$\delta(\lambda x)=\lambda^{-1}\delta(x)$$

برای ثابت غیر صفر λ، می‌توان بدست آورد. بنابراین اگر $c=\phi(x,t)$ جواب (۱۵.۱) و (۱۶.۱) باشد آنگاه $c_1=\phi(x_1,t_1)$ نیز جواب آن خواهد بود. بوضوح در این حالت $\phi(x,t)$ دارای شکل تابعی بصورت:

$$\phi(x,t)=t^{-1/2}\psi(xt^{-1/2}) \tag{۱۸.۱}$$

می‌باشد که در آن ψ تابعی با آرگومان‌های مشخص است. به مجرد قرار دادن (۱۸.۱) در (۱۵.۱) معادله دیفرانسیل معمولی

$$2\psi''(\xi)+\xi\psi'(\xi)+\psi(\xi)=0, \tag{۱۹.۱}$$

بدست می آید که در آن ξ نماینده $xt^{-1/2}$ بوده و علامت پریم مشتق نسبت به ξ را مشخص می‌کند. معادله (۱۹.۱) بسهولت به صورت

$$2\psi'(\xi)+\xi\psi(\xi)=2A,$$

که در آن A یک ثابت است می‌تواند تبدیل شود و بدین صورت حل این معادله دیفرانسیل مرتبه اول نتیجه می‌دهد:

$$\psi(\xi)=Ae^{\frac{-\xi^{2}}{4}}\int^{\xi}e^{\tau^{2}/4}d\tau+Be^{-\xi^{2}/4},$$

که در آن B ثابت نهایی است، را می توان بدست آورد و با توجه به اینکه جواب مناسب (۱۹.۱) در بی نهایت صفر می‌شود به سادگی می‌توانیم

$$\psi(\xi)=Be^{-\xi^{2}/4}, \tag{۲۰.۱}$$

که در آن ثابت B از (۱۶.۱) تعیین می‌شود را بدست آوریم. یعنی،

$$\int_{-\infty}^{+\infty}c(x,t)dx=c_0.$$

از معادلات (۱۸.۱) و (۲۰.۱) جواب خواسته شده برای مسئله مقدار مرزی (۱۵.۱) و (۱۶.۱) را به صورت زیر

$$c(x,t)=c_0\frac{e^{-x^{2}/4t}}{(4\pi t)^{1/2}} \quad (t>0, \quad -\infty<x<+\infty)$$

که البته کاملاً خوش تعریف است، بدست می آوریم.

برای رسیدن به اهدافمان این مثال را اولاً بعنوان مسئله مقدار مرزی غیر بدیهی خاص که معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی آن تحت گروه یک—پارامتری ناوردا بودند و ثانیاً به منظور تشریح یک گروه یک—پارامتری که معادله را ناوردا می‌کند، بکار برده‌ایم. برای متغیرهای مستقل بیشتر، گروهِ ناوردا نسبت به معادله، تعداد متغیرهای مستقل را به یکی کاهش می‌دهد. در این کتاب یک روند کلی برای تعیین کردن گروههایی مانند (۱۷.۱) را که نسبت به معادلات خاص، ناوردا هستند، همچنین یک تکنیک عمومی برای ساختن فرمِ تابعی جواب، مانند آنچه که در (۱۸.۱) بیان شده است، ارائه می‌کنیم.

۴.۱ معادلات آبل از نوع دوم

مکرراً خواهیم دید که تلاشمان برای حل معادلات دیفرانسیل بوسیله گروههای یک–پارامتری منجر به حل معادلات آبل از نوع دوم می‌شود، یعنی معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه اول به شکل:

$$y\frac{dy}{dx}+a(x)+b(x)y=0, \tag{۲۱.۱}$$

که $a(x)$ و $b(x)$ توابعی داده شده از x هستند. به طور عمومی، برای حل این معادله با توابع دلخواه $a(x)$ و $b(x)$ هیچ ابزار استاندارد و حل عمومی وجود ندارد. این چنین نتیجه‌ای دست آوردهای فراوانی در ریاضیات کاربردی دارد و بر این اساس خواننده علاقه‌مند در این جا با مسئله قابل توجهی مواجه می‌شود، زیرا این معادله‌ای است که بارها و بارها اتفاق می‌افتد. در این بخش نتایج ساده‌ای را که به منشأ و حل‌های شناخته شده آن مرتبط است، را به طور مختصر بیان می‌کنیم.

معادله (۲۱.۱) را در تئوری نوسان غیر–خطی می‌توان دید که در آن با تابعی مانند $x=x(t)$ مواجه‌ایم که در معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه دوم

$$\frac{d^2x}{dt^2}+b(x)\frac{dx}{dt}+a(x)=0$$

صدق کرده و با تغییر متغیر استاندارد

$$y=\frac{dy}{dx},\qquad y\frac{dy}{dx}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

می‌توان آنرا به معادله آبل از نوع معادله (۲۱.۱) تبدیل کرد. در ابتدا آبل معادله‌ای بصورت:

$$[y+s(x)]\frac{dy}{dx}+[p(x)+q(x)y+r(x)y^2]=0, \tag{۲۲.۱}$$

که $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$ و $s(x)$ توابعی معلوم از x هستند، تعریف کرد. وی نشان داد که تغییر متغیرهای

$$z=[y+s(x)]e^{t(x)},\qquad t(x)=\int^x r(\tau)d\tau,$$

معادله (۲۲.۱) را به معادله‌ای به صورت (۲۱.۱) تبدیل می‌کند. یعنی

$$z\frac{dz}{dx}+\Big\{(p-qs+rs^2)e^{2t}+\Big(q-2rs-\frac{ds}{dx}\Big)ze^t\Big\}=0, \tag{۲۳.۱}$$

که بوضوح دو حالت ممکنِ قابل تصور برای آن وجود دارد:

الف) $p-qs+rs^2=0$، در این حالت $(y+s)$ فاکتوری از (۲۲.۱) است. بنابراین (۲۲.۱) به یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه اول استاندارد، ساده می‌شود. (یعنی: معادله (۳.۳))

ب) $q=2rs+\frac{ds}{dx}$، در این حالت (۲۲.۱) در حقیقت با متغیر مستقل $(y+s)^2$ بعنوان معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول استاندارد می‌تواند نوشته شود. یعنی

$$\frac{d}{dx}(y+s)^2+2r(y+s)^2=2\Big\{s\Big(\frac{ds}{dx}+rs\Big)-p\Big\}.$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول که از معادله (۲۱.۱) ناشی می‌شود، به معادله آبل از نوع اول معروف شده است:

$$\frac{dy}{dx}=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2+S(x)y^3, \tag{۲۴.۱}$$

که $P(x)$، $Q(x)$، $R(x)$ و $S(x)$ همگی توابعی معلوم از x هستند. اگر $y_1(x)$ جواب خاص معادله (۲۴.۱) باشد، آنگاه تغییر متغیر:

$$w(x)=\frac{e^T(x)}{[y(x)-y_1(x)]},\qquad T(x)=\int^x[q(\tau)+2R(\tau)y_1(\tau)+3S(\tau)y_1(\tau)^2]d\tau,$$

معادله (۲۴.۱) را به معادله دیفرانسیل به فرم (۲۱.۱) یعنی

$$w\frac{dw}{dx}+S(x)e^{۲T(x)}+[۳S(x)y_۱(x)+R(x)]we^{T(x)}=۰,$$

تبدیل می‌کند، مشاهده این مطلب با جایگذاری

$$y(x)=y_۱(x)+\frac{e^{T(x)}}{w(x)},$$

در (۲۴.۱) و استفاده از این حقیقت که $y_۱(x)$ جواب خاص معلوم است، بسیار آسان خواهد بود.

۱.۴.۱ مثال. با تعریف

$$A(x)=\int^x a(\tau)d\tau,\qquad B(x)=\int^x b(\tau)d\tau,$$

و نوشتن (۲۱.۱) بشکل

$$ydy+[a(x)+b(x)y]dx=۰, \tag{۲۵.۱}$$

فاکتورهای انتگرال‌گیری $\mu(x,y)$ برای حالات لیست شده زیر را تحقیق کنید:

(i)

$$\mu(x,y)=\frac{\exp\{[y+B(x)]^۲\}}{B(x)},\qquad a(x)=-\frac{b(x)}{۲B(x)},$$

(ii)

$$\mu(x,y)=\Big[y+\frac{(\alpha+۱)}{\alpha}B(x)\Big]^\alpha,\qquad a(x)=-\frac{(\alpha+۱)}{\alpha^۲}b(x)B(x),$$

(iii)

$$\mu(x,y)=\exp\Big\{\frac{۲B(x)^۲}{[B(x)^۲+۲yB(x)+\alpha]}\Big\},\qquad a(x)=\frac{b(x)[B(x)^۲+\alpha]^۲}{۴B(x)^۳},$$

که α ثابت دلخواهی را نمایش می‌دهد.

برای اینکه $\mu(x,y)$ فاکتور انتگرال‌گیری (۲۵.۱) باشد، می‌بایست رابطه

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu y)=\frac{\partial}{\partial y}\{\mu[a(x)+b(x)y]\},$$

برقرار باشد، بنابراین:

$$y\frac{\partial\mu}{\partial x}-[a(x)+b(x)y]\frac{\partial\mu}{\partial y}=b(x)\mu.$$

در نتیجه لازم است که برای معادلات لیست شده بررسی کنیم که آیا $\mu(x,y)$ داده شده در رابطه بالا صدق می‌کند یا خیر.

(i)

$$\mu(x,y)=\frac{\exp\Big\{[y+B(x)]^۲\Big\}}{B(x)},\qquad a(x)=-\frac{b(x)}{۲B(x)},$$

در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} y\frac{\partial\mu}{\partial x} - [a(x)+b(x)y]\frac{\partial\mu}{\partial y} - b(x)\mu \\ &= e^{(y+B)^۲}\Big\{y\Big[۲(y+B)\frac{b}{B} - \frac{b}{B^۲}\Big] - (a+by)\frac{۲}{B}(y+B) - \frac{b}{B}\Big\} \\ &= e^{(y+B)^۲}\frac{(y+B)}{B}\Big\{۲yb - ۲(a+by) - \frac{b}{B}\Big\} \\ &= -e^{(y+B)^۲}\frac{(y+B)}{B^۲}(b+۲aB), \end{aligned}$$

که در صورت انتخاب $a(x)$ و $b(x)$ بصورت $(b+۲aB)=۰$، عبارت اخیر برابر صفر می‌شود.

(ii)

$$\mu(x,y) = \Big[y + \frac{(\alpha+۱)}{\alpha}B(x)\Big]^{\alpha}, \qquad a(x) = -\frac{(\alpha+۱)}{\alpha^۲}b(x)B(x).$$

در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} y\frac{\partial\mu}{\partial x} - [a(x)+b(x)y]\frac{\partial\mu}{\partial y} - b(x)\mu \\ &= \Big[y + \frac{(\alpha+۱)}{\alpha}B\Big]^{\alpha-۱}\Big\{(\alpha+۱)by - (a+by)\alpha - b\Big[y + \frac{(\alpha+۱)}{\alpha}B\Big]\Big\} \\ &= -\Big[y + \frac{(\alpha+۱)}{\alpha}B\Big]^{\alpha-۱}\Big\{\alpha a + \frac{(\alpha+۱)}{\alpha}bB\Big\}, \end{aligned}$$

که آن نیز با برقراری شرایط داده شدهٔ مسأله، برابر صفر می‌شود.

(iii)

$$\mu(x,y) = \exp\Big\{\frac{۲B(x)^۲}{[B(x)^۲ + ۲yB(x) + \alpha]}\Big\}, \qquad a(x) = \frac{b(x)[B(x)^۲+\alpha]^۲}{۴B(x)^۳},$$

در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} y\frac{\partial\mu}{\partial x} - [a(x)+b(x)y]\frac{\partial\mu}{\partial y} - b(x)\mu &= \exp\Big\{\frac{۲B^۲}{(B^۲+۲yB+\alpha)}\Big\} \\ &\times\Big\{\frac{۴bBy}{(B^۲+۲yB+\alpha)} - \frac{۴bB^۲(B+y)y}{(B^۲+۲yB+\alpha)^۲} + \frac{(a+by)۴B^۳}{(B^۲+۲yB+\alpha)^۲} - b\Big\} \\ &= \exp\Big\{\frac{۲B^۲}{(B^۲+۲yB+\alpha)}\Big\}\times\Big\{\frac{۴B^۳a - b(B^۲+\alpha)^۲}{(B^۲+۲yB+\alpha)^۲}\Big\}, \end{aligned}$$

و آن نیز دوباره با انتخاب $a(x)$ و $b(x)$ مناسب صفر می‌شود. این فاکتورهای انتگرالگیری و نتایج بعدی آن که همگی به آبل منتسب می‌شود را در مسئله ۱۵ بطور کاملتری توضیح خواهیم داد.

۲.۴.۱ مثال. نشان دهید معادله (۲۲.۱)، با توابع $p(x)$ و $q(x)$ که با شرط

$$p(x) = \alpha[s'(x) + r(x)s(x)]s(x), \qquad q(x) = \beta s'(x) + (\beta+۱)r(x)s(x),$$

تولید شده است، با تبدیل

$$y = s(x)u,$$

به یک معادله تفکیک—پذیر تبدیل می‌شود که در آن α و β ثابتهای دلخواه بوده و علامت پریم مشتق نسبت به x را نشان می‌دهد.
بعداً با $p(x)$ و $q(x)$ معادله‌ای هم‌ارز با معادلهٔ آبل از نوع دوم (یعنی: (۱.۲۱)) را نتیجه بگیرید و نشان دهید

$$\alpha(x) = -\frac{\beta-\alpha}{(\beta-1)^2} b(x)B(x)$$

لزوماً حالت دوم از مثال ۱.۳ است.

با استفاده از $y = s(x)u$، $p(x)$ و $q(x)$ ای که در بالا تعریف شده‌اند می بینیم که معادله (۱.۲۲) به صورت

$$(1+u)s\Big(s\frac{du}{dx} + s'u\Big) + \alpha(s'+rs)s + [\beta s' + (\beta+1)rs]su + rs^2u^2 = 0,$$

یا به صورت ساده‌تر

$$(1+u)\frac{du}{dx} + \Big(r + \frac{s'}{s}\Big)[u^2 + (\beta+1)u + \alpha] = 0,$$

تبدیل می‌شود که معادلهٔ اخیر بوضوح تفکیک—پذیر است. برای قسمت دوم از معادله (۱.۲۳) داریم:

$$a(x) = (p - qs + rs^2)e^{2t}, \qquad b(x) = (q - 2rs - s')e^t,$$

که با تحدیدهای مناسب روی $p(x)$ و $q(x)$

$$\begin{aligned} a(x) &= (\alpha-\beta)[s'(x) + r(x)s(x)]s(x)e^{2t(x)}, \\ b(x) &= (\beta-1)[s'(x) + r(x)s(x)]e^{t(x)}, \end{aligned}$$

سپس با تقسیم دو معادله بر هم

$$\frac{a(x)}{b(x)} = -\frac{(\beta-\alpha)}{(\beta-1)} s(x)e^{t(x)}.$$

و با استفاده از عبارت بالا برای $b(x)$،

$$B(x) = \int^x b(\tau)d\tau = (\beta-1)s(x)e^{tx},$$

را بدست می آوریم، که براساس آن ساختار داده شده، نتیجه می‌شود.

۱.۴.۳ مثال. برای معادله دیفرانسیل (۱.۲۲)، که در آن $p(x)$ و $q(x)$ در مثال قبلی تعریف شده‌اند، نشان دهید معادله دیفرانسیل (۱.۲۲) تحت گروه تبدیلات بشکل:

$$x_1 = f(x), \qquad y_1 = g(x)y,$$

که براساس خاصیت

$$s(x_1)e^{t(x_1)} = s(x)e^{t(x)+\varepsilon}, \qquad \frac{y_1}{s(x_1)} = \frac{y}{s(x)}, \tag{۱.۲۶}$$

که $t(x)$ در مثال قبلی تعریف شده است، ناوردا است.

خاصیت ناوردایی معادله (۱.۲۲) تحت تبدیل مورد نظر با توجه به

$$u = \frac{y}{s(x)} = \frac{y_1}{s(x_1)},$$

قابل مشاهده است و براساس مثال قبلی نتیجه می‌شود که معادله (۱.۲۲) را بصورت زیر می‌توان ساده‌تر کرد.

$$\frac{(1+u)du}{[u^2 + (\beta+1)u + \alpha]} = -\Big[r(x) + \frac{s'(x)}{s(x)}\Big]dx, \tag{۱.۲۷}$$

و نتیجه آن این خواهد بود که معادله (۲۲.۱) نسبت به تبدیلات (۲۶.۱) ناوردا است، یعنی

$$[y_۱ + s(x_۱)]\frac{dy_۱}{dx_۱} + [p(x_۱) + q(x_۱)y_۱ + r(x_۱)y_۱^۲] = ۰,$$

برای بدست آوردن آن می‌بایست نشان دهیم که طرف راست (۲۷.۱) نسبت به همین تبدیلات ناوردا است، یعنی

$$\Big[r(x) + \frac{s'(x)}{s(x)}\Big]dx = \Big[r(x_۱) + \frac{s'(x_۱)}{s(x_۱)}\Big]dx_۱.$$

که برای این منظور کافی است از ۱—(۲۶.۱) لگاریتم گرفته و سپس مشتق بگیریم. بنابراین برای $p(x)$ و $q(x)$ که در مثال قبلی داده شده‌اند ثابت کردیم که (۲۲.۱) تحت تبدیل (۲۶.۱) ناوردا باقی می‌ماند.

مسائل

۱. ثابت‌های α و β را بگونه‌ای تعیین کنید که معادلات زیر تحت تبدیلات

$$x_۱ = e^{\alpha\varepsilon}x, \qquad y_۱ = e^{\beta\varepsilon}y,$$

ناوردا باقی بماند و با استفاده از ناورداهای بدست آمده برای این گروههای یک—پارامتری، معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید:

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{A}{x^{۳/۲}} + By^۳$ (A و B ثابت‌اند).

(ii) $x(x^۴ - ۲y^۳)\dfrac{dy}{dx} + (۲x^۴ + y^۳)y = ۰$.

(iii) $x(A + xy^n)\dfrac{dy}{dx} + By = ۰$ (A و B و n ثابت‌اند).

۲. ثابت کنید

$$y_۱ = e^{-۲\varepsilon}y, \qquad x_۱ = x + \varepsilon,$$

یک گروه تبدیلات یک—پارامتری است و براساس آن معادله دیفرانسیل

$$(۱ - ۲x - \log y)\frac{dy}{dx} + ۲y = ۰.$$

را حل کنید.

۳. معادله دیفرانسیل

$$(x-y)^۲\frac{dy}{dx} = A^۲$$

که A یک ثابت است، را با بررسی اینکه معادله نسبت به گروه تبدیلات

$$y_۱ = y + \varepsilon, \qquad x_۱ = x + \varepsilon,$$

ناوردا است، حل کنید.

۴. $\rho(x)$ به عنوان جوابی از معادله دیفرانسیل—تفاضلی (۱۰.۱) داده شده است. نشان دهید که

$$y(x) = \frac{\rho(x - x_۰)}{\rho(x)}$$

جواب معادله دیفرانسیل—تفاضلی غیرخطی

$$\frac{dy(x)}{dx} = y(x)[y(x) - y(x - x_۰)]$$

است.

۵. نشان دهید، تبدیل

$$y(x)=\frac{e^x}{f(e^{x-x_\circ})}$$

معادله (۱۱.۱) را به معادله

$$\frac{df(t)}{dt}=\frac{f(t)}{f(\lambda t)}$$

که در آن $t=e^{x-x_\circ}$ و $\lambda=e^{-x_\circ}$ می‌باشند، تقلیل می‌دهد.

٦. نشان دهید با تغییر متغیر $w=y/x$، معادله (۱۳.۱) بصورت زیر تبدیل می‌شود.

$$xw\frac{dw}{dx}=\frac{۳(۱-x)}{(۱+x)}+۲w+\frac{(۱-x)}{(۱+x)}\frac{w^۲}{۴}.$$

سپس با تغییر متغیر $s=(۱-x)/(۱+x)$ نتیجه بگیرید که آن به معادله

$$\frac{(s^۲-۱)}{۲}w\frac{dw}{ds}=۳s+۲w+\frac{sw^۲}{۴},$$

تبدیل می‌شود و از آنجا نتیجه بگیرید که تبدیلات (۱۴.۱) را می‌توان بصورت $w_۱=-w$ و $s_۱=-s$ بیان کرد.

۷. قابل مشاهده است که معادله دیفرانسیل با مشقات جزیی (۱۵.۱) نسبت به تبدیلات بشکل:

$$c_۱=c,\qquad t_۱=e^{۲\varepsilon}t,\qquad x_۱=e^{\varepsilon}x,$$

ناوردا است، بنابراین معادله دارای جوابی بشکل $c(x,t)=\phi(xt^{-۱/۲})$ است. معادله معمولی برای ϕ را بدست بیاورید و از آنجا نشان دهید:

$$c(x,t)=A\int_\circ^{xt^{-۱/۲}}e^{-y^۲/۴}dy+B$$

که A و B ثابتهای دلخواه هستند.

۸. برای معادله انتشار غیر–خطی

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(D(c)\frac{\partial c}{\partial x}\Big)$$

که در آن انتشار D تابعی از c است، از گروه یک–پارامتری و شکل تابعی جواب مسئله قبل، معادله دیفرانسیل

$$D(\phi)\phi''(\xi)+\frac{dD(\phi)}{d\phi}\phi'(\xi)^۲+\frac{\xi\phi'(\xi)}{۲}=\circ$$

را نتیجه بگیرید.

۹. برای حالت $D(c)=c$ نشان دهید که معادله دیفرانسیل معمولی مسئله قبل تحت گروه

$$\phi_۱=e^{۲\varepsilon}\phi,\qquad \xi_۱=e^{\varepsilon}\xi,$$

ناوردا باقی می‌ماند و با توجه به اینکه $\psi=\phi/\xi^۲$، آن به معادله آبل از نوع دوم بشکل

$$\psi p\frac{dp}{d\psi}+p^۲+\Big(۷\psi+\frac{۱}{۲}\Big)p+\psi(٦\psi+۱)=\circ$$

که در آن $p=\frac{d\psi}{dy}$ و $y=\log\xi$ است، تحویل می‌شود و نشان دهید که جواب منفرد $p=-۲\psi$ با جواب $\phi(\xi)$ متناظر است.

۱۰. نشان دهید که تبدیل $p=q/\psi$ معادله مسئله قبلی را به معادله آبل از نوع دوم بشکل

$$q\frac{dq}{d\psi}+\Big(۷\psi+\frac{۱}{۲}\Big)q+\psi^{۲}(۶\psi+۱)=۰$$

تبدیل می‌کند. که این معادله، معادله آبل استاندارد از نوع دوم است.

۱۱. با تغییر متغیر $z=e^{Bc}$ نشان دهید که معادله انتشار غیر–خطی

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(Ae^{Bc}\frac{\partial c}{\partial x}\Big),$$

که A و B ثابت‌های دلخواهی را نشان می‌دهند، به معادله

$$\frac{\partial z}{\partial t}=Az\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}$$

تبدیل می‌شود. نشان دهید که این معادله تحت گروه

$$t_{۱}=e^{n\varepsilon}t,\qquad z_{۱}=e^{m\varepsilon}z,\qquad x_{۱}=e^{\varepsilon}x$$

که n و m با شرط $m+n=۲$، انتخاب شده‌اند، ناوردا باقی می‌ماند.

۱۲. نشان دهید، معادله مسئله قبل دارای جوابی بشکل

$$z(x,t)=t^{m/n}\phi(\xi)$$

که در آن $\xi=x/t^{۱/n}$ بوده و $\phi(\xi)$ تابعی است که در معادله‌ای بشکل

$$nA\phi(\xi)\phi''(\xi)+\xi\phi'(\xi)-m\phi(\xi)=۰.$$

صدق می‌کند، می‌باشد، سپس نشان دهید این معادله نسبت به گروه یک–پارامتری که در مسئله ۹ داده شده ، تغییر نمی‌یابد و آن معادله را به معادله آبل از نوع دوم بشکل:

$$p\frac{dp}{d\psi}+\Big(۲\psi+\frac{۱}{A}\Big)+\Big(۳+\frac{۱}{nA\psi}\Big)p=۰$$

که p و ψ بطور دقیق در مسئله ۹ تعریف شده‌اند، تبدیل می‌کند.

۱۳. با توجه به این که معادله انتشار غیر–خطی

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(Ae^{Bc}\frac{\partial c}{\partial x}\Big)$$

که A و B ثابت‌های دلخواهی را نشان می‌دهد، جوابی بشکل $c(x,t)=f(x)+g(t)$ دارد، نتیجه بگیرید: جواب آن بصورت

$$c(x,t)=\frac{۱}{B}\log\Big\{\frac{(x-x_{۰})^{۲}+C}{۲A(t_{۰}-t)}\Big\},$$

که $x_{۰}$ و $t_{۰}$ و C نمایندهٔ ثابت‌های دلخواهی هستند، می‌باشد.

۱۴. با محاسبهٔ کمییت

$$\frac{\partial c_{۱}}{\partial t_{۱}}-\frac{\partial^{۲}c_{۱}}{\partial x_{۱}^{۲}}$$

مستقیماً با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، نشان دهید که معادله انتشار کلاسیک (۱۵.۱) نسبت به تبدیلات زیر ناوردا است.

$$i)\qquad x_{۱}=x+\varepsilon t,\ \ t_{۱}=t,\ \ c_{۱}=c\exp\Big(-\frac{\varepsilon x}{۲}-\frac{\varepsilon^{۲}t}{۴}\Big),$$

$$ii)\qquad x_{۱}=\frac{x}{۱-\varepsilon t},\ \ t_{۱}=\frac{t}{۱-\varepsilon t},\ \ c_{۱}=c(۱-\varepsilon t)^{۱/۲}\exp\Big(-\frac{\varepsilon x^{۲}}{۴(۱-\varepsilon t)}\Big),$$

۱۵. با نمادگذاری‌های مثال (۳.۱) نشان دهید که اگر $a(x)$ و $b(x)$ بصورت داده شده انتخاب شوند، عبارات زیر فاکتورهای انتگرال گیری برای معادله آبل از نوع دوم (۲۵.۱) خواهند بود.

$$
\begin{aligned}
i) \qquad & \mu(x,y)=\exp\Big\{[y+B(x)]^{۳}+۳A(x)[y+B(x)]+\int^{x}۳a(\tau)B(\tau)d\tau\Big\},\\
& a(x)=-\frac{b(x)}{۳[A(x)+B(x)^{۲}]},\\
ii) \qquad & \mu(x,y)=\Big\{\frac{۲y+B(x)+\alpha B(x)^{-۱}+\beta B(x)}{۲y+B(x)+\alpha B(x)^{-۱}-\beta B(x)}\Big\}^{۱/\beta},\\
& a(x)=\frac{b(x)}{۴B(x)}\{[B(x)+\alpha B(x)^{-۱}]^{۲}-\beta^{۲}B(x)^{۲}\},
\end{aligned}
$$

که α و β ثابتهای دلخواهی را نشان می‌دهند.

فصل ۲

گروههای یک–پارامتری و سریهای لی

۱.۲ مقدمه

در این فصل به معرفی گروههای یک–پارامتری و سریهای لی می‌پردازیم. برای گروههای یک–پارامتری دو نتیجه مهم وجود دارد، روش بدست آوردن فرم عمومی از روی فرم بی‌نهایت کوچک، وجود مختصات متعارف برای گروه و روشهای یافتن آن.
همچنین برای سریهای لی یک نتیجه مهم و ارزشمند که قضیه تبدیل نامیده می‌شود را در این فصل معرفی خواهیم کرد.

۲.۲ گروه تبدیلات یک–پارامتری

در صفحه (x, y) تبدیلات

$$x_1 = f(x, y, \varepsilon), \qquad y_1 = g(x, y, \varepsilon), \tag{۱.۲}$$

را تبدیلات یک–پارامتری می‌نامیم هرگاه در خاصیتهای زیر صدق کند:

(i) (همانی): مقدار $\varepsilon = 0$ تبدیل همانی را بدست می‌دهد.

$$x = f(x, y, 0), \qquad y = g(x, y, 0),$$

(ii) (وارون): پارامتر $-\varepsilon$ تبدیل وارون را بدست می‌دهد.

$$x = f(x_1, y_1, -\varepsilon), \qquad y = g(x_1, y_1, -\varepsilon),$$

(iii) (بسته بودن): اگر $x_2 = f(x_1, y_1, \delta)$، $y_2 = g(x_1, y_1, \delta)$، آنگاه آن نبز دوباره عضوی از گروه باشد و علاوه بر آن بتوان نتیجه گرفت که پارامتر $\varepsilon + \delta$ آنرا بدست می‌دهد. یعنی،

$$x_2 = f(x, y, \varepsilon + \delta), \qquad y_2 = g(x, y, \varepsilon + \delta),$$

دوباره یادآور می‌شویم که خاصیت شرکت پذیری معمولی را می‌توان از خاصیت بسته‌بودن گروه نتیجه گرفت. مثالهای ساده ای از گروههای یک–پارامتری بدین قرارند:

الف: گروه انتقال:

$$x_۱ = x, \qquad y_۱ = y + \varepsilon,$$

ب: گروه امتدادی:

$$x_۱ = e^{\varepsilon} x, \qquad y_۱ = e^{\varepsilon} y$$

ج: گروه دوران:

$$x_۱ = x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, \quad y_۱ = x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon,$$

۱.۲.۲ مثال. نشان دهید که گروه دورانی تعریف شده در قسمت (ج) واقعاً یک گروه یک–پارامتری است.

می خواهیم نشان دهیم که (ج) یک گروه یک–پارامتری تشکیل می‌دهد، بنابراین اگر $\varepsilon = ۰$ آنگاه $x_۱ = x$ ، $y_۱ = y$ ، در نتیجه آن در خاصیت اول صدق می‌کند. حال برای وارون آن

$$x = x_۱\cos\varepsilon + y_۱\sin\varepsilon, \quad y = -x_۱\sin\varepsilon + y_۱\cos\varepsilon$$

را بدست می‌آوریم، بنابراین $\varepsilon-$ وارون آن را مشخص می‌کند و از آنجا نتیجه می‌شود که (ج) در خاصیت دوم نیز صدق می‌کند. برای قسمت سوم می‌بینیم که اگر $x_۲ = x_۱\cos\delta - y_۱\sin\delta$ و $y_۲ = x_۱\sin\delta + y_۱\cos\delta$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} x_۲ &= (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon)\cos\delta - (x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon)\sin\delta \\ &= x\cos(\varepsilon+\delta) - y\sin(\varepsilon+\delta), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} y_۲ &= (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon)\sin\delta - (x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon)\cos\delta \\ &= x\sin(\varepsilon+\delta) - y\cos(\varepsilon+\delta), \end{aligned}$$

و بنابراین آن در خاصیت سوم نیز صدق می‌کند.

توابع $f(x,y,\varepsilon)$ و $g(x,y,\varepsilon)$ را شکل عمومی گروه می‌نامند. برای مقادیر کوچک ε اگر (۱.۲) را بسط دهیم آنگاه از آنجا که $\varepsilon = ۰$ همانی را بدست می‌دهد، داریم:

$$x_۱ = x + \varepsilon\Big(\frac{dx_۱}{d\varepsilon}\Big)\Big|_{\varepsilon=۰} + O(\varepsilon^۲), \quad y_۱ = y + \varepsilon\Big(\frac{dy_۱}{d\varepsilon}\Big)\Big|_{\varepsilon=۰} + O(\varepsilon^۲), \tag{۲.۲}$$

که $O(\varepsilon^۲)$ جملاتی را که فقط شامل $\varepsilon^۲$ و مراتب بالاتری از آن هستند را نشان می‌دهد. اگر توابع $\xi(x,y)$ و $\theta(x,y)$ را بصورت

$$\Big(\frac{dx_۱}{d\varepsilon}\Big)_{\varepsilon=۰} = \xi(x,y), \quad \Big(\frac{dy_۱}{d\varepsilon}\Big)_{\varepsilon=۰} = \eta(x,y), \tag{۳.۲}$$

تعریف کنیم آنگاه بدست می‌آوریم:

$$x_۱ = x + \varepsilon\xi(x,y) + O(\varepsilon^۲), \quad y_۱ = y + \varepsilon\eta(x,y) + O(\varepsilon^۲), \tag{۴.۲}$$

که (۴.۲) را فرم بی‌نهایت کوچک گروه می‌نامند. قضیه اساسی گروه تبدیلات یک—پارامتری آن است که با فرم بی‌نهایت کوچک داده شده، می‌توان با حل دستگاه معادله خودگردان زیر از معادلات دیفرانسیل،

$$\frac{dx_1}{d\varepsilon}=\xi(x_1,y_1),\qquad \frac{dy_1}{d\varepsilon}=\eta(x,y), \tag{۵.۲}$$

با شرایط اولیه:

$$x_1=x,\qquad y_1=y \tag{۶.۲}$$

وقتی که $\varepsilon=0$ فرم عمومی آن را بدست آورد. اثبات این قضیه را می‌توان در دیکسون (۱۹۲۴)(صفحه ۲۹۳) یافت. اینک اعتبار آنرا با یک مثال ساده تأیید می‌کنیم.

۲.۲.۲ مثال. فرم بی‌نهایت کوچک گروه دورانی قسمت (ج) را بدست آورده و با حل دستگاه معادله (۵.۲) فرم عمومی آن را نتیجه بگیرید.

برای گروه دورانی قسمت (ج) داریم:

$$\frac{dx_1}{d\varepsilon}=-x\sin\varepsilon-y\cos\varepsilon,\qquad \frac{dy_1}{d\varepsilon}=x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon,$$

و بنابراین با قرار دادن $\varepsilon=0$ از (۳.۲) داریم:

$$\xi(x,y)=-y,\qquad \eta(x,y)=x.$$

پس در این حالت نیازمندیم که معادله:

$$\frac{dx_1}{d\varepsilon}=-y_1,\qquad \frac{dy_1}{d\varepsilon}=x_1.$$

را با شرایط اولیه (۶.۲) حل کنیم. بدین منظور متغیرهای مختلط $z=x+iy$ و $z_1=x_1+iy_1$ را تعریف کرده و بدست می آوریم:

$$\frac{dz_1}{d\varepsilon}=iz_1,$$

و بنابراین:

$$\log z_1=i\varepsilon+\log z,$$

که در بدست آوردن آن از شرایط اولیه (۶.۲) استفاده شده است. با محاسبه قسمت حقیقی و قسمت مختلط $z_1=e^{i\varepsilon}z$ می‌توانیم فرم عمومی گروه دورانی (ج) را بدست آوریم. اگر مختصات قطبی (r,θ) را بصورت:

$$r=(x^2+y^2)^{1/2},\qquad \theta=\tan^{-1}(y/x).$$

معرفی کنیم آنگاه داریم: $z=re^{i\theta}$ و از $z_1=e^{i\varepsilon}z$، قابل مشاهده است که فرم عمومی گروه دورانی (ج) را می‌توان بصورت دیگری بشکل $r_1=r$ و $\theta_1=\theta+\varepsilon$ نوشت. یعنی، با جملات بر حسب (r,θ) در مختصات قطبی گروه دورانی بصورت گروه انتقال ظاهر می‌شود.

این خاصیت عمومی گروه تبدیلات یک—پارامتری است.

برای هر گروه یک—پارامتری (۲.۲) توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ وجود دارند که با فرم عمومی گروهی دارای خاصیت زیر هستند.

$$u(x_1,y_1)=u(x,y)\qquad v(x_1,y_1)=v(x,y)+\varepsilon, \tag{۷.۲}$$

تابع $u(x,y)$ را ناوردا و (u,v) را مختصات متعارف گروه می‌نامند.

(i) روش یافتن $u(x,y)$. از (۵.۲) بدست می آوریم:

$$\frac{dx_1}{dy_1}=\frac{\xi(x_1,y_1)}{\eta(x_1,y_1)}, \tag{۸.۲}$$

که بعد از حل معادله و با فرض $u(x_1,y_1)=$ constant و از شرایط اولیه (٦.۲) معادله اول (۷.۲) را بدست می آوریم که از آنجا $u(x,y)$ بدست می آید. راه دیگر برای بدست آوردن $u(x,y)$ این است که بطور ساده با استفاده از (۱.۲) مستقیماً با حذف ε از ۱–(۱.۲) و ۲–(۱.۲) آنرا بدست آورد. دقت می‌کنیم که اگر $u(x,y)$ یک ناوردا باشد آنگاه هر تابعی از آن نیز یک ناوردا خواهد بود. یعنی: $\phi(u)$.

(ii) روش یافتن $v(x,y)$. در جواب معادله (۵.۲) $\alpha=u(x,y)$ را قرار داده و با فرض $u(x_1,y_1)=\alpha$ می‌توانیم رابطه صریح $y_1=\phi(x_1,\alpha)$ را نتیجه بگیریم. حال در معادله (۵.۲) با فرض αی ثابت و از ۱–(۵.۲) ملاحظه می‌کنیم که:

$$\frac{dx_1}{d\varepsilon}=\xi[x_1,\phi(x_1,\alpha)]. \tag{۹.۲}$$

حال اگر $\psi(x,\alpha)$ را برای برخی از ثابت‌های x_0 بصورت:

$$\psi(x,\alpha)=\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\xi[t,\phi(t,\alpha)]}. \tag{۱۰.۲}$$

تعریف کنیم آنگاه از (٦.۲) و (۹.۲) می‌توانیم ۲–(۷.۲) را بصورت $v(x,y)=\psi[x,u(x,y)]$ نتیجه بگیریم و بنابراین $v(x,y)$ نیز مشخص می‌شود.

۳.۲.۲ مثال. نشان دهید که تبدیل:

$$x_1=\frac{x}{(1+\varepsilon x)},\qquad y_1=(1+\varepsilon x)^2y, \tag{۱۱.۲}$$

یک گروه یک–پارامتری است و مختصات متعارف (u,v) را برای آن بدست آورید.

خواننده به آسانی می‌تواند نشان دهد که سه خاصیت (i) و (ii) و (iii) با توجه به تعریف گروه یک–پارامتری برای آن برقرار است. حال برای مقادیر کوچک ε داریم:

$$x_1=x-\varepsilon x^2+O(\varepsilon^2),\qquad y_1=y_2\varepsilon xy+O(\varepsilon^2),$$

پس از (۴.۲)، $\xi(x,y)=-x^2$ و $\eta(x,y)=2xy$ را بدست می آوریم. بطریق دیگر با دیفرانسیل‌گیری روی معادله (۱۱.۲) نسبت به ε داریم:

$$\frac{dx_1}{d\varepsilon}=-\frac{x^2}{(1+\varepsilon x)^2}=-x^2,\qquad \frac{dy_1}{d\varepsilon}=2(1+\varepsilon x)xy=2x_1y_1, \tag{۱۲.۲}$$

و (۵.۲) این عبارت‌ها را برای $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$ تثبیت می‌کند. از (۱۲.۲) داریم

$$\frac{dx_1}{dy_1}=-\frac{x_1}{2y_1},$$

که با حل آن $u(x,y)=x^2y$ بعنوان ناوردای گروه بدست می آید و همین‌طور ملاحظه می‌شود که $v(x,y)=x^{-1}$ در ۲–(۷.۲) صدق می‌کند. بطریق دیگر ناوردای x^2y را از (۱۱.۲) با حذف ε نیز می‌توانستیم بطور مستقیم محاسبه کنیم.

۴.۲.۲ مثال. نشان دهید که ξ و η با روابط

$$\xi(x,y)=-\frac{\partial u}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},\qquad \eta(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \tag{۱۳.۲}$$

با مختصات متعارف (u,v) مرتبط هستند، که ژاکوبین تبدیل بصورت

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

تعریف شده‌است.

با مشتق‌گیری از (۷.۲) نسبت به ε

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\varepsilon}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{d\varepsilon},\qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\varepsilon}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{d\varepsilon}. \tag{۱۴.۲}$$

که در آن u_1 و v_1 بترتیب نماینده $u(x_1,y_1)$ و $v(x_1,y_1)$ هستند. از (۵.۲) و (۱۴.۲) با جایگذاری (x,y) بجای (x_1,y_1) داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\xi+\frac{\partial u}{\partial y}\eta=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}\xi+\frac{\partial v}{\partial y}\eta=0,$$

که (۱۳.۲) بسهولت از همین رابطه می‌تواند نتیجه شود.

۵.۲.۲ مثال. تبدیل در صفحه (x,y) مساحت—نگهدار است اگر در شرط

$$\frac{\partial(x_1,y_1)}{\partial(x,y)}=1. \tag{۱۵.۲}$$

صدق کند. نشان دهید که (۱.۲)مساحت—نگهدار است اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\phi(u)$$

و ϕ تابعی است که تنها به متغیر u وابسته است.

از (۴.۲) و (۱۵.۲) بر حسب جملات از مرتبه ε

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}=0. \tag{۱۶.۲}$$

را بدست می‌آوریم. اکنون از (۱۳.۲) و (۱۶.۲)،

$$\frac{\partial[\partial(u,v)/\partial(x,y),u]}{\partial(x,y)}=0$$

را بدست می‌آوریم که براساس آن شرایط خواسته شده مسئله بدست می‌آید.

نکته دقت به این نکته جالب بنظر می‌رسد که از گروه بودن تبدیلات مساحت—نگهدار می‌توان نتیجه گرفت که شرایط بینهایت کوچکِ (۱۶.۲) دقیقاً همان شرایط عمومی است، یعنی اینکه با مشتق‌گیری از (۱۵.۲) نسبت به ε داریم:

$$\frac{\partial(dx_1/d\varepsilon,y_1)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(x_1,dy_1/d\varepsilon)}{\partial(x,y)}=0,$$

و با ضرب این برابری در $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x_1,y_1)}$، بدست می آوریم که:

$$\frac{\partial(dx_1/d\varepsilon,y_1)}{\partial(x_1,y_1)}+\frac{\partial(x_1,dy_1/d\varepsilon)}{\partial(x_1,y_1)}=0,$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{dx_1}{d\varepsilon}\Big)+\frac{\partial}{\partial y_1}\Big(\frac{dy_1}{d\varepsilon}\Big)=0. \tag{۱۷.۲}$$

و با استفاده از (۵.۲) مشاهده می‌کنیم که (۱۷.۲) دقیقاً همان شرایط (۱۶.۲) می‌باشد.

۳.۲ سریهای لی و قضیه تبدیل

فرض کنید که گروه (۱.۲) را با نسخه بینهایت کوچک (۴.۲) داریم. عملگر L را بصورت:

$$L = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \qquad (۱۸.۲)$$

تعریف می‌کنیم. حال به ازای هر تابع $\phi(x_۱, y_۱)$ که بطور ضمنی به ε وابسته نیست، داریم:

$$\frac{d\phi_۱}{d\varepsilon} = \frac{\partial \phi_۱}{\partial x_۱}\frac{dx_۱}{d\varepsilon} + \frac{\partial \phi_۱}{\partial y_۱}\frac{dy_۱}{d\varepsilon}, \qquad (۱۹.۲)$$

که در آن $\phi_۱$، $\phi(x_۱, y_۱)$ را نشان می‌دهد. از (۵.۲) و (۱۹.۲)،

$$\frac{d\phi_۱}{d\varepsilon} = L_۱(\phi_۱), \qquad (۲۰.۲)$$

را که در آن $L_۱$، عملگر دیفرانسیلی با جایگذاری $(x_۱, y_۱)$ به جای (x,y) در L است، بدست می آید. بطور مشابه داریم:

$$\frac{d^۲\phi_۱}{d\varepsilon^۲} = L_۱(L_۱(\phi_۱)), \qquad \frac{d^۳\phi_۱}{d\varepsilon} = L_۱(L_۱(L_۱(\phi_۱))). \qquad (۲۱.۲)$$

با قرار دادن $\phi(\varepsilon) = \phi(x_۱, y_۱)$ و استفاده از بسط ماکلورن بدست می آوریم:

$$\phi(\varepsilon) = \phi(۰) + \varepsilon\Big(\frac{d\phi}{d\varepsilon}\Big)_{\varepsilon=۰} + \frac{\varepsilon^۲}{۲!}\Big(\frac{d^۲\phi}{d\varepsilon^۲}\Big)_{\varepsilon=۰} + \frac{\varepsilon^۳}{۳!}\Big(\phi\Big)$$

و بنابراین از (۲۰.۲) و (۲۱.۲) با $\varepsilon = ۰$ بدست می آوریم که:

$$\phi(x_۱, y_۱) = \phi(x,y) + \varepsilon L(\phi) + \frac{\varepsilon^۲}{۲!}L^۲(\phi) + \frac{\varepsilon^۳}{۳!}L^۳(\phi) + \dots.$$

یعنی، داریم:

$$\phi(x_۱, y_۱) = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}L^n(\phi), \qquad (۲۲.۲)$$

و آنرا سری لی می‌نامیم.

$$\phi(x_۱, y_۱) = e^{\varepsilon L}\phi(x,y), \qquad (۲۳.۲)$$

که عملگر دیفرانسیلی $e^{\varepsilon L}$ عملگر سريِ

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}L^n()$$

است، بویژه اگر $\phi(x,y)$، x و y باشد، آنگاه از (۲۲.۲) بدست می آوریم که:

$$x_۱ = e^{\varepsilon L}x, \qquad y_۱ = e^{\varepsilon L}y. \qquad (۲۴.۲)$$

با ترکیب (۲۳.۲) و (۲۴.۲) نتیجه ارزشمندی بصورت زیر خواهیم داشت:

$$\phi(e^{\varepsilon L}x, e^{\varepsilon L}y) = e^{\varepsilon L}\phi(x,y), \qquad (۲۵.۲)$$

که قضیه تبدیل سریهای لی نامیده می‌شود (گروبنر و ناپ (۱۹۶۷) صفحه ۱۷).

۱.۳.۲ مثال. برای گروه دوران (ج) فرم عمومی گروه را بوسیله (۲۴.۲) و عملگر دیفرانسیلی مناسب L بیابید.
در این حالت عملگر دیفرانسیلی L بصورت

$$L = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y},$$

است. بنابراین $L(x) = -y$ و $L(y) = x$. فرم عمومی گروه می‌تواند از (۲۴.۲) و بسط‌های

$$\cos\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varepsilon^{2k}}{(2k!)} \qquad \sin\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varepsilon^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

نتیجه شود.

توجه به این نکته که با استفاده از سریهای لی جواب عمومی هر دستگاه خود برگردان از معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه را می‌توانیم بدست آوریم، ارزشمند خواهد بود. به این معنا که دستگاه

$$\frac{dX}{dt} = F(X,Y), \qquad \frac{dY}{dt} = G(X,Y),$$

را با شرایط اولیه $X = \alpha$ و $Y = \beta$ در $t = 0$، در نظر بگیرید. جواب عمومی این مسئله مقدار اولیه بصورت

$$X = e^{tM}\alpha, \qquad Y = e^{tM}\beta, \tag{۲۶.۲}$$

که در آن عملگر M بصورت

$$M = F(\alpha,\beta)\frac{\partial}{\partial\alpha} + G(\alpha,\beta)\frac{\partial}{\partial\beta}.$$

تعریف شده است، می‌باشد.

در این موقعیت دو مثال ساده را در نظر می‌گیریم.

۲.۳.۲ مثال. جواب معادله دیفرانسیل

$$\frac{dX}{dt} = -X^2,$$

را با استفاده از سریهای لی بالا بدست آورید.

در این حالت داریم:

$$M = -\alpha^2\frac{\partial}{\partial\alpha}$$

و $M(\alpha) = -\alpha^2$ ، $M^2(\alpha) = 2\alpha^3$ و در حالت کلی

$$M^n(\alpha) = (-1)^n n! \alpha^{n+1}.$$

بنابراین

$$X = e^{tM}\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} M^{(n)}(\alpha) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha t)^n,$$

در نتیجه برای $|\alpha t| < 1$ جواب

$$X = \frac{\alpha}{1+\alpha t}$$

را بدست می‌آوریم.

۳.۳.۲ مثال. با استفاده از سریهای لی جواب معادله

$$\frac{dX}{dt} = AX + BY, \quad \frac{dY}{dt} = -AY + BX, \tag{۲۷.۲}$$

که در آن A و B ثابتند را بدست آورید.

در این حالت داریم:

$$M = (A\alpha + B\beta)\frac{\partial}{\partial\alpha} + (B\alpha - A\beta)\frac{\partial}{\partial\beta},$$

بنابراین:

$$\begin{array}{ll}
M(\alpha) = (A\alpha + B\beta), & M(\beta) = (B\alpha - A\beta), \\
M^{۲}(\alpha) = K^{۲}\alpha, & M^{۲}(\beta) = K^{۲}\beta, \\
M^{۳}(\alpha) = K^{۲}(A\alpha + B\beta), & M^{۳}(\beta) = K^{۲}(B\alpha - A\beta), \\
M^{۴}(\alpha) = K^{۴}\alpha, & M^{۴}(\beta) = K^{۴}\beta, \\
M^{۵}(\alpha) = K^{۴}(A\alpha + B\beta), & M^{۵}(\beta) = K^{۴}(B\alpha - A\beta),
\end{array}$$

و ...، که در آن $K = (A^{۲} + B^{۲})^{۱/۲}$. از این نتایج و (۲۶.۲) جواب زیر را می‌توانیم برای آن نتیجه بگیریم.

$$\begin{aligned}
۲KX &= [K\alpha + (A\alpha + B\beta)]e^{Kt} + [K\alpha - (A\alpha + B\beta)]e^{-Kt}, \\
۲KY &= [K\beta + (B\alpha - A\beta)]e^{Kt} + [K\beta - (B\alpha - A\beta)]e^{-Kt},
\end{aligned}$$

که البته بوسیله روشهای مقدماتی دیگری (بعنوان مثال : از ۱–(۲۷.۲) نسبت به t مشتق بگیرید و ۲–(۲۷.۲) را بکار ببرید.) نیز می‌توانستیم آن را حل کنیم که خواننده با حل به روش یکی از آنها می‌تواند به آزمون این جواب بپردازد.

(مسائل ادامه دارانتهای این فصل (یعنی آنها که بصورت مکمل هم ارائه شده‌اند) در ایجاد مهارت در ضرب سریهای لی می‌توانند مفید واقع شوند).

مسائل

۱. در مختصات استوانه‌ای (r, θ) تبدیل مساحت–نگهدار است هرگاه

$$\frac{\partial(r_{۱}, \theta_{۱})}{\partial(r, \theta)} = \frac{r}{r_{۱}},$$

از این معادله نسبت به ε مشتق گرفته و نشان دهید که

$$\frac{\partial}{\partial r_{۱}}\Big(\frac{dr_{۱}}{d\varepsilon}\Big) + \frac{۱}{r_{۱}}\frac{dr_{۱}}{d\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial\theta_{۱}}\Big(\frac{d\theta_{۱}}{d\varepsilon}\Big) = ۰.$$

و سپس نتیجه بگیرید تابع $\phi(r_{۱}, \theta_{۱}, \varepsilon)$ با خاصیت

$$\frac{dr_{۱}}{d\varepsilon} = -\frac{۱}{r_{۱}}\frac{\partial\phi}{\partial\theta_{۱}}, \frac{d\theta_{۱}}{d\varepsilon} = \frac{۱}{r_{۱}}\frac{\partial\phi}{\partial r_{۱}}.$$

وجود دارد که اگر ϕ بطور ضمنی به ε وابسته نباشد، آنگاه جواب دستگاه با شرط $r_{۱} = r$ و $\theta_{۱} = \theta$ در $\varepsilon = ۰$ یک گروه یک پارامتری با ناوردای ϕ است یعنی:

$$\phi(r_{۱}, \theta_{۱}) = \phi(r, \theta)$$

۲. در مسئله قبلی نشان دهید که گروههای یک–پارامتری متناظر با ناورداهای زیر

$$\begin{aligned}
(i) \qquad & \phi(r,\theta) = Ar^{۲}\theta + B\theta,\\
(ii) \qquad & \phi(r,\theta) = Ar^{۲}\theta + Br^{۲}\log r,\\
(iii) \qquad & \phi(r,\theta) = \frac{A}{۴}(\theta + \sin\theta\cos\theta),
\end{aligned}$$

که A و B ثابتهای دلخواه هستند، بترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned}
(i) \qquad & r_{۱} = [e^{-۲A\varepsilon}r^{۲} + BA^{۱}(e^{-۲A\varepsilon} - ۱)]^{۱/۲}, \quad \theta_{۱} = e^{۲A\varepsilon}\theta,\\
(ii) \qquad & r_{۱} = e^{-A\varepsilon}r, \quad \theta_{۱} = e^{۲a\varepsilon}\theta + BA^{-۱}(e^{۲A\varepsilon} - ۱)\log r + B\varepsilon,\\
(iii) \qquad & r_{۱} = [r^{۲} - A\varepsilon\cos^{۲}\theta]^{۱/۲}, \quad \theta_{۱} = \theta,
\end{aligned}$$

۳.

$$x_{۱} = \frac{۱}{\varepsilon}\log(۱ + \varepsilon x), \qquad y_{۱} = (۱ + \varepsilon x)y$$

را در نظر گرفته و با محاسبهٔ $\frac{dx_{۱}}{d\varepsilon}, \frac{dy_{۱}}{d\varepsilon}$ آنها را با جملاتی بر حسب $(x_{۱}, y_{۱})$ بیان کنید و نتیجه بگیرید که آن یک گروه تبدیلات یک–پارامتری نیست.

۴. گروه یک پارامتری

$$\begin{aligned}
x_{۱} &= f(x,y,\varepsilon) = x + \varepsilon\xi(x,y) + O(\varepsilon^{۲})\\
y_{۱} &= g(x,y,\varepsilon) = y + \varepsilon\eta(x,y) + O(\varepsilon^{۲}).
\end{aligned}$$

و عملگرهای

$$L = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}, \qquad P = L + w, \qquad Q = L - w,$$

را که در آنها w بصورت :

$$w = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y},$$

تعریف شده است را در نظر بگیرید. فرض کنید $\phi(x,y)$ و $\psi(x,y)$ توابع دلخواه و نماد (ϕ,ψ) نشان دهنده ژاکوبین باشد، یعنی:

$$(\phi,\psi) = \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}.$$

آنگاه برای سریهای لی در نظر گرفته شده زیر:

$$\begin{aligned}
e^{\varepsilon L}\phi(x,y) &= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}L^n(\phi) = \sum_{n=۰}^{\infty}\varepsilon^n\phi_n(x,y).\\
e^{\varepsilon L}\psi(x,y) &= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}L^n(\psi) = \sum_{n=۰}^{\infty}\varepsilon^n\psi_n(x,y).
\end{aligned}$$

نشان دهید که:

$$(i) \qquad \phi_n = \frac{۱}{n}L(\phi_{n-۱}), \qquad \psi_n = \frac{۱}{n}L(\psi_{n-۱}),$$

$$(ii) P(\phi,\psi) = (L(\phi),\psi) + (\phi, L(\psi)).$$

« راهنمایی: برای (ii) با بررسی $L(\phi,\psi)$ آغاز کنید».

۵. با فرض

$$(e^{\varepsilon L}\phi, e^{\varepsilon L}\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\chi_n(x,y)$$

نشان دهید که

$$(i)\qquad \chi_n=\sum_{k=0}^{n}(\phi_k,\psi_{n-k}),$$
$$(ii)\qquad \chi_n=\frac{1}{n}P(\chi_{n-1}).$$

سپس نتیجه بگیرید که

$$(e^{\varepsilon L}\phi, e^{\varepsilon L}\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}P^n(\phi,\psi)=e^{\varepsilon P}(\phi,\psi).$$

«راهنمایی: برای قسمت (ii) با بررسی $P(\chi_{n-1})$ شروع کرده و از (i) و (ii) مسئله قبلی استفاده کنید».

٦. با در نظر گرفتن حالت

$$(x_1,y_1)=(e^{\varepsilon L}x, e^{\varepsilon L}y)=e^{\varepsilon P}\,1$$

یعنی:

$$(x_1,y_1)=1+\varepsilon w+\frac{\varepsilon^2}{2!}P(w)+\frac{\varepsilon^3}{3!}P^2(w)+...$$

برابریهای زیر را اثبات کنید.

$$(i)\qquad \log(x_1,y_1)=\varepsilon w+\frac{\varepsilon^2}{2!}L(w)+\frac{\varepsilon^3}{3!}L^2(w)+...$$
$$(ii)\qquad (x_1,y_1)^1=1-\varepsilon w-\frac{\varepsilon^2}{2!}Q(w)-\frac{\varepsilon^3}{3!}Q^2(w)+...$$

۷. گروه یک—پارامتری

$$r_1=f(r,\theta,\varepsilon)=r+\varepsilon\xi(r,\theta)+O(\varepsilon^2),$$
$$\theta_1=g(r,\theta,\varepsilon)=\theta+\varepsilon\eta(r,theta)+O(\varepsilon^2),$$

و عملگرهای خطی

$$L=\xi\frac{\partial}{\partial r}+\eta\frac{\partial}{\partial\theta},\qquad P_1=L+w_1,\qquad P_2=L+w_2,$$

را که در آن w_1 و w_2 بصورت $w_2=\frac{\xi}{r}$, $w_1=\frac{\partial\xi}{\partial r}\frac{\partial\eta}{\partial\theta}$، را در مختصات قطبی (r,θ) در نظر بگیرید. فرض کنید که:

$$r_1=e^{\varepsilon L}r=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}L^n(r)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n f_n(r,\theta),$$
$$\lambda=\frac{r_1}{r}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\lambda_n(r,\theta),$$
$$\mu=\frac{\partial(r_1,\theta_1)}{\partial(r,\theta)}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\mu_n(r,\theta).$$

نشان دهید

$$(i)\qquad f_n=\frac{۱}{n}L(f_{n-۱}),$$
$$(ii)\qquad \lambda_n=\frac{۱}{n}P_۲(\lambda_{n-۱}),$$
$$(iii)\qquad \lambda=e^{\varepsilon P_۲}۱.$$

۸. از مسئله ٦

$$\mu=e^{\varepsilon P_۱}۱$$

را می‌توان نتیجه گرفت. با فرض

$$\lambda\mu=\frac{r_۱}{r}\frac{\partial(r_۱,\theta_۱)}{\partial(r,\theta)}=\sum_{n=۰}^{\infty}\varepsilon^n\sigma_n(r,\theta).$$

ثابت کنید:

$$(i)\qquad \sigma_n=\sum_{K=۰}^{n}\lambda_k\mu_{n-k},$$
$$(ii)\qquad \sigma_n=\frac{۱}{n}P_۳(\sigma_{n-۱}),$$

که در آن $P_۳$ بصورت

$$P_۳=L+(w_۱+w_۲)$$

تعریف شده است. سپس نتیجه بگیرید

$$\frac{r_۱}{r}\frac{\partial(r_۱,\theta_۱)}{\partial(r,\theta)}=e^{\varepsilon P_۲}۱e^{\varepsilon P_۱}۱=e^{\varepsilon P_۳}۱$$

«راهنمایی: قسمت (ii) را با بررسی $L(\sigma_{n-۱})$ آغاز کنید».

فصل ۳

ناوردایی معادلات دیفرانسیل معمولی استاندارد

۱.۳ مقدمه

این که معادلات دیفرانسیل خطی برای $y(x)$ تحت تبدیلات خطی بشکل:

$$x_1 = f(x,\varepsilon), \qquad y_1 = g(x,\varepsilon)y, \tag{۱.۳}$$

خطی باقی می‌ماند، کاملاً روشن است.

در سرتاسر این فصل فقط تبدیلات خطی بشکل (۱.۳) که گروه یک—پارامتری بوده و فرم بی‌نهایت کوچک بصورت

$$x_1 = x + \varepsilon\xi(x) + O(\varepsilon^2), \qquad y_1 = y + \varepsilon\eta(x)y + O(\varepsilon^2). \tag{۲.۳}$$

دارند را در نظر می‌گیریم و بدنبال گروههایی هستیم که معادله خطی استاندارد را ناوردا می کند و شکل معادلات دیفرانسیل را با جملاتی بر حسب مختصات متعارف (u,v) بدست می آوریم «(۲۷.۲) را ببینید».

در ابتدا خواننده بایست این نگرش را برای معادله‌ای کاملاً متفاوت به خوبی بررسی کرده و البته خواننده‌ی دقیق، برای معادله مرتبه اول خواهد دید که همیشه حل آن را به وسیله روش‌های کلاسیک که از لحاظ سختی با معادله اولیه قابل مقایسه است، بپایان می‌رسانیم. موضوع ااصلی و هدف تمرینات این فصل آن است که نگرش گروهی را در موقعیت‌های متشابه، با این پیش زمینه که خواننده بعضی از این بینش‌ها را درباره ارتباط بین جواب‌ها و گروههایی که معادله را ناوردا می‌کند می‌داند، بدست آورد. بعلاوه برای معادلات دیفرانسیل خطی که قابل حل نبودند نتایجی را در بخش‌های (۴.۳) و (۵.۳) بوسیله این روش‌ها بدست می آوریم که عمومی بوده و قبلاً در هیچ جای دیگری بدست نیامده‌اند.

۲.۳ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول $y' + p(x)y + q(x)$

برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول هدف اولیه‌مان این است که متغیرهای جدیدی را با شرط تفکیک‌پذیر کردن معادله اولیه تعریف کنیم و برای معادله دیفرانسیلی که تحت یک گروه یک پارامتری ناورداست، مناسبترین متغیرها، مختصات متعارف (u,v) گروه خواهد بود. در ابتدا این روند عمومی را برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \tag{۳.۳}$$

شرح می‌دهیم. برای راحتی تابع $s(x)$ را بصورت:

$$s(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}, \tag{۴.۳}$$

که در آن $x_\circ$ ثابت است، تعریف می‌کنیم. با این تعریف جواب معادله (۳.۳) بصورت:

$$s(x)y-\int_{x_\circ}^{x}s(t)q(t)dt=C, \qquad (۵.۳)$$

که در آن C ثابت است، بدست می‌آید.

اینک جواب (۵.۳) را با یافتن گروهی بشکل (۱.۳) که نسبت به (۳.۳) ناوردا است، نتیجه می‌گیریم. یعنی:

$$\frac{dy_\text{۱}}{dx_\text{۱}}+p(x_\text{۱})y_\text{۱}=q(x_\text{۱}).$$

می‌توانیم از این معادله و از (۱.۳)،

$$\frac{dy}{dx}+\Big\{\frac{g'(x)}{g(x)}+f'(x)p(f)\Big\}y=\frac{f'(x)}{g(x)}q(f),$$

را نتیجه بگیریم که دوباره معادله‌ای بشکل (۳.۳) با خاصیت:

$$p(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}+f'(x)p(f), \qquad q(x)=\frac{f'(x)}{g(x)}q(f)$$

است. از این معادلات و از

$$\begin{aligned}&f(x)=x+\varepsilon\xi(x)+O(\varepsilon^\text{۲}), \qquad g(x)=\text{۱}+\varepsilon\eta(x)+O(\varepsilon^\text{۲}),\\&p(f)=p(x)+\varepsilon\xi(x)p'(x)O(\varepsilon^\text{۲}), \qquad q(f)=q(x)+\varepsilon\xi(x)q'(x)+O(\varepsilon^\text{۲}),\end{aligned} \qquad (۶.۳)$$

و برابر قرار دادن جملات بر حسب ε، معادلات:

$$\eta'+\xi'p+\xi p'=\circ, \qquad \xi'q+\xi q'-\eta q=\circ,$$

را بدست می‌آوریم. بنابراین

$$\eta+\xi p=C_\text{۱}, \qquad \xi'+\xi\Big(p+\frac{q'}{q}\Big)=C_\text{۱}, \qquad (۷.۳)$$

که در آن $C_\text{۱}$ ثابت است. بنابراین

$$\begin{aligned}&\xi(x)=\frac{\text{۱}}{q(x)s(x)}\Big\{C_\text{۱}\int_{x_\circ}^{x}s(t)q(t)dt+C_\text{۲}\Big\},\\&\eta(x)=C_\text{۱}-p(x)\xi(x),\end{aligned} \qquad (۸.۳)$$

که $C_\text{۲}$ ثابت دیگری است «البته برای بدست آوردن این نتایج لزوماً می‌بایست معادله‌ای از نوع (۳.۳) یعنی ۲.(۷.۳)، را حل کنیم».

اکنون شکل عمومی گروه (۱.۳) با حل دستگاه معادلات

$$\frac{dx_\text{۱}}{d\varepsilon}=\xi(x_\text{۱}), \qquad \frac{dy_\text{۱}}{d\varepsilon}=\eta(x_\text{۱})y_\text{۱}, \qquad (۹.۳)$$

که $x_\text{۱}=x$ و $y_\text{۱}=y$ در $\varepsilon=\circ$ شرایط اولیه آن است، بدست می‌آید «(۲۵.۲) و (۶.۲) را ببینید».

از ۲—(؟؟) و (۹.۳)

$$\frac{\text{۱}}{y_\text{۱}}.\frac{dy_\text{۱}}{d\varepsilon=C_\text{۱}-p(x_\text{۱})\frac{dx_\text{۱}}{d\varepsilon}}$$

را داریم و بنابراین از حل این معادله

$$y_\text{۱}s(x_\text{۱})=e^{C_\text{۱}\varepsilon}ys(x), \qquad (۱۰.۳)$$

که در آن $s(x)$ در (۴.۳) تعریف شده است را بدست می آوریم. از ۱–(؟؟) و ۱–(۹.۳)

$$\frac{q(x_1)s(x_1)dx_1}{\left\{C_1\int_{x_0}^{x}s(t)q(t)dt+C_2\right\}}=d\varepsilon, \tag{۱۱.۳}$$

را داریم. باید دقت کنیم که دو حالت وجود دارد که می‌بایست در نظر گرفته شوند.

اولاً اگر $C_1\neq 0$ آنگاه (۱۱.۳) معادلهٔ

$$\frac{1}{C_1}\log\left\{C_1\int_{x_0}^{x_1}s(t)q(t)dt+C_2\right\}=\frac{1}{C_1}\log C_1\int_{x_0}^{x}s(t)q(t)dt+C_2\right\}+\varepsilon,$$

نتیجه می‌شود و از این معادله و (۱۰.۳) مختصات متعارف (u,v) را بصورت:

$$u(x,y)=\frac{s(x)y}{\left\{C_1\int_{x_0}^{x_1}s(t)q(t)dt+C_2\right\}},$$
$$v(x,y)=\frac{1}{C_1}\log\left\{C_1\int_{x_0}^{x}s(t)q(t)dt+C_2\right\}.$$

بدست می آوریم «(۷.۲) را ببینید».

در این مختصات معادله دیفرانسیل بصورت

$$\frac{du}{dv}=1-C_1u,$$

که تفکیک‌پذیر بوده و جوابی بصورت

$$-\frac{1}{C_1}\log(1-C_1u)=v-\frac{1}{C_1}\log C_3,$$

یعنی:

$$(1-C_u)e^{C_1}v=C_3,$$

که در آنها C_3 ثابت است دارد، تبدیل می‌شود. این معادله می‌تواند با در نظر گرفتن $C=(C_2-C_3)/C_1$ در معادله (۵.۳) با آن تطبق داده شود.

ثانیاً اگر $C_1=0$ آنگاه از (۱۰.۳) و (۱۱.۳) مختصات متعارف:

$$u(x,y)=s(x)y,\qquad v(x,y)=\frac{1}{C_2}\int_{x_0}^{x}s(t)q(t)dt,$$

را داریم و در این مختصات (۳.۳) به

$$\frac{du}{dv}=C_2.$$

تبدیل می‌شود که دوباره این معادله با این متغیرهای جدید تفکیک‌پذیر است و می‌تواند بصورت:

$$u-C_2v=C,$$

حل شود که آن نیز با (۵.۳) که ثابت C در هر دو یکی است می‌تواند تطبیق داده شود. دقت می‌کنیم که (۳.۳) تحت گروههای دیگری نیز ناوردا است.

۳.۳ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن $y''+p(x)y=0$

برای معادله خطی همگن از مرتبه دوم بدون اینکه کلیت مسئله را از دست بدهیم می‌توانیم شکل نرمال آن یعنی:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)y=0, \tag{۱۲.۳}$$

را در نظر بگیریم (مسئله ۸ را ببینید).

فرض می‌کنیم که $\phi_۱(x)$ و $\phi_۲(x)$ جوابهای مستقل خطی (۱۲.۳) بوده و برای راحتی کار رونسکین آنها برابر ۱ است. یعنی:

$$\phi_۱\phi'_۲ - \phi_۲\phi'_۱ = ۱. \tag{۱۳.۳}$$

در این موقعیت هدفمان این است که آنچنان رابطه‌ای بین $\phi_۱$ و $\phi_۲$ بیابیم بگونه ای که معادلهٔ (۱۲.۳) تحت گروه تبدیلات (۱.۳) ناوردا باقی بماند. برای معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر استفاده از مختصات (u, v) آنرا به معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت تبدیل می‌کند. از (۱.۳) معادلات:

$$\frac{dy_۱}{dx_۱} = \frac{g}{f'}\frac{dy}{dx} + \frac{g'}{f'}y,$$

و

$$\frac{d^۲y_۱}{dx_۱{}^۲} = \frac{g}{f'^۲}\frac{d^۲y}{dx^۲} + \Big(\frac{۲g'}{f'^۲} - \frac{gf''}{f'^۳}\Big) + \Big(\frac{g''}{f'^۲} - \frac{g'f''}{f'^۳}\Big)y, \tag{۱۴.۳}$$

را داریم. بوضوح برای اینکه (۱۲.۳) نسبت به هرگونه تبدیلی ناوردا باشد می‌بایست معادله تبدیل یافته دارای جمله‌ای شامل y' نباشد. با مساوی صفر قرار دادن ضرایب y' در (۱۴.۳) نتیجه می‌شود که

$$\frac{f'(x)}{g(x)^۲}$$

ثابت است که بدلیل گروه یک—پارامتری بودن (۱.۳) برابر ۱ بوده و بنابراین داریم:

$$f'(x) = g(x)^۲. \tag{۱۵.۳}$$

از(۱۴.۳) و (۱۵.۳) به معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^۲y_۱}{dx_۱^۲} + p(x_۱)y_۱ = ۰,$$

می‌رسیم که به معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} + \Big(\frac{g''}{g} - ۲\frac{g'^۲}{g^۲} + p(f)g^۴\Big)y = ۰,$$

تبدیل می‌شود و بنابراین ناوردایی (۱۲.۳) معادلهٔ

$$\frac{g''}{g} - ۲\frac{g'^۲}{g^۲} + p(f)g^۴ = p(x) \tag{۱۶.۳}$$

را نتیجه داده و معادلات (۱۵.۳) و (۱۶.۳) معادلاتی برای تعیین گروه (۱.۳) بنیان می‌گذارند. از(؟؟) ، (۱۵.۳) و (۱۶.۳) می‌توانیم با مساوی قرار دادن جملات بر حسب ε به معادلات

$$\xi' = ۲\eta, \qquad \frac{\xi'''}{۲} + ۲p\xi' + p'\xi = ۰. \tag{۱۷.۳}$$

دست می‌یابیم. معادله ۲—(۱۷.۳) برای $\xi(x)$ معادله دیفرانسیل از مرتبه سوم خود—الحاق است «اغلب معادله پاد خود الحاقی نامیده می‌شود، به مرفی (۱۹۶۰) صفحه ۱۹۹ رجوع کنید». که ابتداً با انتگرال‌گیری از آن به

$$\frac{۱}{۴}(۲\xi\xi'' - \xi'^۲) + p\xi^۲ = \text{constant}, \tag{۱۸.۳}$$

می‌رسیم. اینکه جواب عمومی معادله ۲—(۱۷.۳) بصورت:

$$\xi = A\phi_۱^۲ + ۲B\phi_۱\phi_۲ + C\phi_۲^۲, \tag{۱۹.۳}$$

که در آن A ، B و C ثابتهای دلخواهی‌اند، کاملاً شناخته شده است (مسئله ۲۰ را از همین فصل یا مرفی (۱۹۶۰) صفحه ۲۰۰ را ببینید).

«بمنظور مشاهده اینکه (۱۹.۳) یک جواب عمومی برای معادله است، مثال ساده $\hat{\xi}=\phi_۱\phi_۲$ را در نظر بگیرید. آنگاه داریم:

$$\hat{\xi}'=\phi_۱\phi_۲'+\phi_۱'\phi_۲,\qquad \hat{\xi}''=\phi_۱\phi_۲''+۲\phi_۱'\phi_۲'+\phi_۲\phi_۱''.$$

با دقت به معادله اولیه داریم:

$$\hat{\xi}''=۲(\phi_۱'\phi_۲'-p\phi_۱\phi_۲),$$

و با جایگذاری این عبارت بجای $\hat{\xi}'$ و $\hat{\xi}$ در ۲–(۱۷.۳) می‌بینیم که آن برابر صفر می‌شود». بعلاوه از (۱۲.۳) و (۱۹.۳) می‌توانیم

$$\xi'=۲[A\phi_۱\phi_۱'+B(\phi_۱\phi_۲'+\phi_۲\phi_۱')+C\phi_۲\phi_۲'],$$
$$\xi''=۲(A\phi_۱'^۲+۲B\phi_۱'\phi_۲'+C\phi_۲'^۲)-۲p\xi,$$

را نتیجه بگیریم. و با جایگذاری آن در (۱۸.۳) با بکار بردن (۱۳.۳) می‌بینیم که(۱۸.۳) بصورت

$$\frac{۱}{۴}(۲\xi\xi''-\xi'^۲)+p\xi^۲=(AC-B^۲). \tag{۲۰.۳}$$

تبدیل می‌شود.

اکنون شکل عمومی گروه یک–پارامتری (۱.۳) را با حل معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dx_۱}{d\varepsilon}=\xi(x_۱),\qquad \frac{dy_۱}{d\varepsilon}=\frac{\xi'(x_۱)}{۲}y_۱.$$

با شرایط اولیه $x=x_۱$ و $y=y_۱$ به شرط $\varepsilon=۰$، می‌توان بدست آورد. پس نتیجه می‌شود که مختصات متعارف (u,v) مناسب برای آن بصورت:

$$u(x,y)=\frac{y}{\xi(x)^{۱/۲}},\qquad v(x,y)=\int_{x_۰}^{x}\frac{dt}{\xi(t)},$$

که در آن $x_۰$ ثابت است، می‌باشد. با جملای بر حسب (u,v) می‌بینیم که معادله دیفرانسیل (۱۲.۳) به معادله‌ای بصورت:

$$\frac{d^۲u}{dv^۲}+\Big\{\frac{۱}{۴}(۲\xi\xi''-\xi'^۲)+p\xi^۲\Big\}u=۰.$$

تبدیل می‌شود. اما از (۲۰.۳) مشاهده می‌شود که معادله دیفرانسیل مورد نظر نهایتاً بصورت:

$$\frac{d^۲u}{dv^۲}+(AC-B^۲)u=۰. \tag{۲۱.۳}$$

در می آید.

بنابراین بعنوان مثال اگر $(AC-B^۲)$ مثبت باشد آنگاه جواب عمومی (۱۲.۳) بصورت

$$y(x)=\xi(x)^{۱/۲}\Big\{C_۱\cos\Big(K\int_{x_۰}^{x}\frac{dt}{\xi(t)}\Big)+C_۲\sin\Big(K\int_{x_۰}^{x}\frac{dt}{\xi(t)}\Big)\Big\}, \tag{۲۲.۳}$$

که در آن $C_۱$، $C_۲$ ثابتهای دلخواه بوده و $K=(AC-B^۲)^{۱/۲}$ است. بنابراین رابطه‌ای بین جواب عمومی معادله (۱۲.۳) و نسخه بی‌نهایت کوچک گروه یک–پارامتری که معادله (۱۲.۳) را ناوردا می‌کند، ایجاد کرده‌ایم. این جمله دارای این معنا است که (۲۲.۳) معکوس (۱۹.۳) است. با توجه به (۱۹.۳) متوجه می‌شویم که اگر گروهی که معادله (۱۲.۳) را تغییر نمی‌دهند بشناسیم آنگاه لزوماً رابطه‌ای از درجه دوم بین جوابهای مستقل خطی (۱۲.۳) را داریم. دقت می‌کنیم هر چند جوابهای (۱۲.۳) بشکل (۲۲.۳) قبلاً وجود داشتند ولی تابع $\xi(x)$ ای که در(۲۲.۳) ظاهر شده است را با گروه یک–پارامتری که معادله را ناوردا می‌کند، بدست نیاورده‌ایم «بعنوان مثالی از این دست کوپل (۱۹۷۱)، صفحه ۱۹ را ببینید».

۱.۳.۳ مثال. تئوری بالا را با رجوع به معادله اویلر ساده

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+\frac{y}{۴x^۲}=۰.$$

شرح دهید.

در این حالت معادله بوضوح تحت گروه $x_۱=e^\varepsilon x$ و $y_۱=y$ ناوردا است بنابراین $\xi(x)=x$. چون $\phi_۱(x)=x^{۱/۲}$ و $\phi_۲(x)=x^{۱/۲}\log x$ جوابهای مستقل خطی معادله‌اند پس با توجه به (۱۹.۳) متوجه می‌شویم که $A=۱$، $B=C=۰$، و بنابراین از (۲۱.۳) داریم: $u=C_۱v+C_۲$. این عبارت جوابهای مستقل خطی ما را تایید می‌کند زیرا $u=y/x^{۱/۲}$ و $v=\log x$.

۴.۳ معادله دیفرانسیل همگن مرتبهٔ سوم $y'''+p(x)y'+q(x)y=۰$

در مسئله ۱۲ برای معادلات دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه سوم خواهیم دید بدون اینکه کلیت مسئله را از دست بدهیم، می‌توانیم آن را بصورت معادلهٔ

$$\frac{d^۳y}{dx^۳}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=۰. \tag{۲۳.۳}$$

در نظر بگیریم. در این بخش فرض می‌کنیم که $\phi_۱(x)$ و $\phi_۲(x)$ جوابهای مستقل خطی از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+\frac{p(x)}{۴}y=۰, \tag{۲۴.۳}$$

هستند بطوریکه رونسکین آنها برابر ۱ است. اینک توجه خود را به یافتن گروه یک–پارامتری بشکل (۱.۳) که معادله (۲۳.۳) را ناوردا می‌کند جلب می‌کنیم. با مشتق‌گیری از معادله (۱۴.۳) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{d^۳y_۱}{dx_۱^۳}&=\frac{g}{f'^۳}\frac{d^۳y}{dx^۳}+۳\Big(\frac{g'}{f'^۳}-\frac{gf''}{f''^۴}\Big)\frac{d^۲y}{dx^۲}+\Big(\frac{۳g''}{f'^۳}-\frac{۶g'f''}{f'^۴}+\frac{۳gf''^۲}{f'^۵}-\frac{gf'''}{f'^۴}\Big)\frac{dy}{dx}\\&+\Big(\frac{g'''}{f'^۳}+\frac{۳g'f''^۲}{f'^۵}-\frac{۳g''f''}{f'^۴}-\frac{g'f'''}{f'^۴}\Big)y.\end{aligned} \tag{۲۵.۳}$$

شرط لازم برای اینکه (۲۳.۳) ناوردا باشد آن است که ضرایب y'' در (؟؟) صفر باشد. از این شریط نتیجه می‌گیریم که:

$$f'(x)=g(x), \tag{۲۶.۳}$$

و از آنجا (؟؟) به

$$\frac{d^۳y_۱}{dx_۱^۳}=\frac{۱}{g^۲}\frac{d^۳y}{dx^۳}+\Big(\frac{۲g''}{g^۳}-\frac{۳g'^۲}{g^۴}\Big)\frac{dy}{dx}+\Big(\frac{g'''}{g^۳}+\frac{۳g'^۳}{g^۵}-\frac{۴g'g''}{g^۴})y.$$

تبدیل می‌شود با استفاده از این معادله و معادله

$$\frac{d^۳y_۱}{dx_۱^۳}+p(x_۱)\frac{dy_۱}{dx_۱}+q(x_۱)y_۱=۰,$$

و با ضرب طرفین معادله در $g^۲$ به معادله

$$\begin{aligned}&\frac{d^۳y}{dx^۳}+\Big(\frac{۲g''}{g}-\frac{۳g'^۲}{g^۲}+p(f)g^۲\Big)\frac{dy}{dx}\\&\quad+\Big(\frac{g'''}{g}+\frac{۳g'^۳}{g^۳}-\frac{۴g'g''}{g^۲}+p(f)gg'+q(f)g^۳\Big)y=۰,\end{aligned}$$

دست می‌یابیم. برای اینکه این معادله ناوردا باشد بایست آن با(۲۳.۳) برابر باشد و بنابراین $f(x)$ و $g(x)$ ای که در (۲۶.۳) صدق می‌کنند بایست در معادلات زیر نیز صدق کنند.

$$\begin{aligned}
&\frac{2g''}{g}-\frac{3g'^2}{g^2}+p(f)g^2=p(x),\\
&\frac{g'''}{g}+\frac{3g'^3}{g^3}-\frac{4g'g''}{g^2}+p(f)gg'+q(f)g^3=q(x).
\end{aligned}\tag{27.3}$$

از معادلات (؟؟) و (۲۶.۳) $\eta=\xi'$، بدست می آید و از معادلات (؟؟) داریم:

$$\begin{aligned}
&2\xi'''+2p\xi'+p'\xi=0,\\
&\xi''''+p\xi''+3q\xi'+q'\xi=0,
\end{aligned}\tag{28.3}$$

و این معادلات تنها در صورتی سازگارند که:

$$\xi^3\left(q-\frac{p'}{2}\right)=D,\tag{29.3}$$

که D یک ثابت است. بوضوح اگر (۲۳.۳) خود—الحاق باشد(مسئله ۱۴ را ببینید) آنگاه $p'=2q$ و (۲۹.۳) بطور بدیهی با ثابت D مساوی صفر، برقرار است. به هر حال اگر (۲۳.۳) خود—الحاق نباشد آنگاه $\xi(x)$ که جواب ۱—(؟؟) است در (۲۹.۳) نیز صدق می‌کند. بر اساس جوابهای (۲۴.۳) جواب عمومی ۱—(؟؟) بصورت:

$$\xi=A{\phi_1}^2+2B\phi_1\phi_2+C{\phi_2}^2,\tag{30.3}$$

است و داریم:

$$2\xi\xi''-{\xi'}^2+p\xi^2=(AC-B^2),\tag{31.3}$$

که در آن A، B و C ثابتهای دلخواهی را نمایش می‌دهند و دقت می‌کنیم که در رسیدن به نتیجه اخیر از ۱ بودن رونسکین ϕ_1 و ϕ_2 استفاده کرده‌ایم. اگر (۲۳.۳) خود—الحاق نباشد آنگاه برای رسیدن به $p(x)$ مجبوریم فرض کنیم $q(x)$ بصورت:

$$q(x)=\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}+\frac{D}{\xi(x)^3},\tag{32.3}$$

که در آن $\xi(x)$ در (۳۰.۳) تعریف شده است، می‌باشد.

از معادلات

$$\frac{dx_1}{d\varepsilon}=\xi(x_1),\qquad \frac{dy_1}{d\varepsilon}=\xi'(x_1)y_1,$$

به مختصات متعارف مناسب (u,v) بصورت

$$u(x,y)=\frac{y}{\xi(x)},\qquad v(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\xi(t)},$$

که x_0 ثابت است. در این مختصات جدید می‌توان نشان داد که (۲۳.۳) بصورت:

$$\frac{d^3u}{dv^3}+(2\xi\xi''-{\xi'}^2+p\xi^2)\frac{du}{dv}+\xi^2(\xi'''+p\xi'+q\xi)u=0,$$

که استفاده از ۱.(؟؟)، (۲۹.۳) و (۳۱.۳) نهایتاً آن را به

$$\frac{d^3u}{dv^3}+4(AC-B^2)\frac{du}{dv}+Du=0.\tag{33.3}$$

تبدیل می‌کند.

بنابراین برای معادله دیفرانسیل مرتبه سوم (۲۳.۳) که خود–الحاق نیست، برای $p(x)$ داده شده گروه یک–پارامتری بشکل (۱.۳) بدست آوریم که که معادلهٔ تولید شده با تابع $q(x)$ بشکل (۳۲.۳) با ثابتهای مناسب A، B، C، D، را ناوردا می‌کند. اگر این حالت برقرار باشد آنگاه جواب (۲۳.۳)، معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه سوم را برای اینکه قابل حل باشد به معادلهٔ (۳۳.۳) با ضرایب ثابت تحویل می‌کند. اگر (۲۳.۳) خود–الحاق باشد آنگاه جواب عمومی معمولاً برای چنین معادلاتی از جوابهای (۲۴.۳) می‌تواند بدست آید« مرفی (۱۹٦۰)، صفحه ۲۰۰».

۱.۴.۳ مثال. تئوری بالا را برای حالتی که $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$ جوابهای مستقل خطی معادله اویلر داده شده در مثال ۳.۱ است را تشریح کنید.

در این حالت $p(x)=x^{-2}$، $\phi_1(x)=x^{1/2}$، $\phi_2(x)=x^{1/2}\log x$ بوده و از (۳۲.۳) نتیجه می‌شود $q(x)$ باید بصورت

$$q(x)=x^{-3}\{[A+2B\log x+C(\log x)^2]^{-3}D-1\}$$

که A، B،C و D ثابتهای مناسبی هستند. در این حالت (۳۳.۳) جوابی بصورت

$$u=C_1e^{k_1v}+C_2e^{k_2v}+C_3e^{k_3v},$$

که C_1، C_2، و C_3 ثابتهای دلخواه بوده و k_1، k_2 k_3 ریشه‌های معادله از درجه سوم

$$k^3+4(AC-B^2)k+D=0.$$

است را دارد. با فرض اینکه ریشه‌های این معادله درجه سوم را می‌دانیم بایست به یافتن جوابهای مستقل خطی از معادله اولیه به فرم (۲۳.۳) بپردازیم.

۵.۳ معادله مرتبه چهارم خودالحاق $y''''+[p(x)y']'+q(x)y=0$

از مسائل ۱٦ و ۱۷ می‌توانیم نتیجه بگیریم که معادله مرتبه چهارم خود–الحاق در حالت کلی دارای شکل

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dy}{dx}\Big)+q(x)y=0. \tag{۳۴.۳}$$

می‌باشد. در این بخش فرض می‌کنیم که $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$ جوابهای مسقل خطی معادلهٔ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{p(x)}{10}y=0, \tag{۳۵.۳}$$

هستند بطوریکه رونسکین آنها برابر ۱ است.

با مشتق‌گیری از (؟؟) و مساوی صفر قرار دادن ضریب y''' به

$$f'(x)=g(x)^{2/3}, \tag{۳٦.۳}$$

می‌رسیم که در این حالت معادلهٔ

$$\begin{aligned}\frac{d^4y_1}{dx_1^4}=\frac{1}{g^{5/3}}\Big\{&\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{10}{3}\Big(\frac{g''}{g}-\frac{4}{3}\frac{g'^2}{g^2}\Big)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{10}{3}\Big(\frac{g'''}{g}-\frac{11}{3}\frac{g'g''''}{g^2}+\frac{8}{3}\frac{g'^3}{g^3}\Big)\frac{dy}{dx}\\&+\Big(-\frac{8}{3}\frac{g''^2}{g^2}+\frac{g''''}{g}-\frac{14}{3}\frac{g'g'''}{g^2}+\frac{38}{3}\frac{g'^2g''}{g^3}-\frac{56}{9}\frac{g'^4}{g^4}\Big)y\Big\}.\end{aligned} \tag{۳۷.۳}$$

را بدست می‌آوریم. از معادله

$$\frac{d^4y_1}{dx_1^4}+\frac{d}{dx_1}\Big(p(x_1)\frac{dy_1}{dx_1}\Big)+q(x_1)y_1=0,$$

و (؟؟) می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر معادله اخیر با (۳۴.۳) مساوی باشد آنگاه توابع $f(x)$ و $g(x)$ باید در شرایط زیر صدق کنند.

$$
\begin{aligned}
p(x) &= p(f)g^{4/3} + \frac{10}{3}\Big(\frac{g''}{g} - \frac{4}{3}\frac{g'^2}{g^2}\Big),\\
q(x) &= q(f)g^{8/3} + p(f)\Big(g^{1/3}g'' - \frac{2}{3}\frac{g'^2}{3g^{2/3}}\Big) + \frac{dp}{df}gg'\\
&\quad + \Big(\frac{g''''}{g} - \frac{14}{3}\frac{g'g'''}{g^2} - \frac{8}{3}\frac{g''^2}{g^2} + \frac{38}{3}\frac{g'^2g''}{g^3} - \frac{56}{9}\frac{g'^4}{g^4}\Big). \qquad (۳۸.۳)
\end{aligned}
$$

از (؟؟)، (۳۶.۳) و (؟؟) داریم

$$
\begin{aligned}
&5\xi''' + 2p\xi' + p'\xi = 0,\\
&3[\xi'''' + p\xi'']' + 8q\xi' + 2q'\xi = 0, \qquad (۳۹.۳)
\end{aligned}
$$

و $\eta = 3\xi'/2$. هرگاه

$$
\xi^4\Big(q - \Big(\frac{3p}{10}\Big)^2 - \frac{3p''}{10}\Big) = D, \qquad (۴۰.۳)
$$

که D ثابت است برقرار باشد آنگاه دو معادله‌ی (؟؟) سازگارند. بنابراین در حالت کلی برای $p(x)$ داده شده بایست فرض کنیم که $q(x)$ بصورت

$$
q(x) = \frac{9p(x)^2}{100} + \frac{3}{10}\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{D}{\xi(x)^4}, \qquad (۴۱.۳)
$$

است که در آن $\xi(x)$ جواب ۱—(؟؟) بوده و دارای شکل عمومی (۳۰.۳) است که $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$ جوابهای مستقل خطی معادله (۳۵.۳) می‌باشند. بعلاوه اگر ثابتهای A، B، و C همان ثابتهای (۳۰.۳) باشند آنگاه داریم

$$
\frac{1}{4}(2\xi\xi'' - \xi'^2)\frac{p}{10}\xi^2 = (AC - B^2). \qquad (۴۲.۳)
$$

شکل عمومی گروه یک—پارامتری (۱.۳) از

$$
\frac{dx_1}{d\varepsilon} = \xi(x_1), \qquad \frac{dy_1}{d\varepsilon} = \frac{3}{2}\xi'(x_1)y_1,
$$

که دارای شرط اولیه: $x_1 = x$ و $y_1 = y$ وقتی که $\varepsilon = 0$ است، می‌تواند نتیجه شود. مختصات متعارف مناسب (u, v) برای آن بصورت

$$
u(x,y) = \frac{y}{\xi^{3/2}}, \qquad v(x,y) = \int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\xi(t)},
$$

که x_0 ثابت است، می‌باشد. با بکار بردن نتیجه‌ای که از مسئله ۱۸ بدست می‌آوریم (با جایگذاری $\xi^{3/2}$) و $\xi(x)^{-1}$ بجای $\alpha(x)$ و $\beta'(x)$)، می‌فهمیم که معادله (۳۴.۳) نهایتاً به

$$
\frac{d^4u}{dv^4} + 10(AC - B^2)\frac{d^2u}{dv^2} + [D + 9(AC - B^2)^2]u = 0, \qquad (۴۳.۳)
$$

تبدیل می‌شود که برای رسیدن به آن از ۱—(؟؟)، (۴۰.۳) و (۴۲.۳) استفاده کرده‌ایم. بنابراین با قرار دادن $q(x)$ ای که در (۴۱.۳) تعریف شده است، (۳۴.۳) می‌تواند به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل شود. نهایتاً این نگرش پیش زمینه‌ای را که $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$ جوابهای مسقل خطی وابسته به (۳۵.۳) هستند را می‌توان بدست آورد.

۱.۵.۳ مثال. روند بالا را برای حالتی که $p(x)$ برابر صفر است، شرح دهید.

در این حالت جوابهای مستقل خطیِ (۳۵.۳)، $\phi_1(x) = 1$ و $\phi_2(x) = x$ می‌باشند و بنابراین $\xi(x)$ بشکل،

$$
\xi(x) = A + 2Bx + Cx^2,
$$

است و نگرش بالا، در دست یافتن به $q(x)$ بصورت:

$$q(x) = \frac{D}{(A + ۲Bx + Cx^{۲})^{۴}},$$

که A، B، C و D ثابتهای مناسبی‌اند. بعنوان مثال، فرض کنید که $A = ۰$، $B = -۱/۲$ و $C = D = ۱$. در این حالت داریم:

$$\xi(x) = x(x - ۱), \qquad q(x) = [x(۱ - x)]^{۴},$$

و (۴۳.۳) دارای جواب عمومی بشکل:

$$u = (C_۱ + C_۲ v)e^{v\sqrt{۵}/۲} + (C_۳ + C_۴ v)e^{-v\sqrt{۵}/۲},$$

که در آن $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$ و $C_۴$ ثابتهای دلخواهی را نشان می‌دهند، است. اکنون جواب عمومی معادله اولیه بفرم (۳۴.۳) می‌تواند بدست آید.

«در مسائل زیر، فرض می‌شود که $s(x)$ در (۴.۳) تعریف شده است. همچنین برای مسائل ۴، ۵، ٦ و ۷ ثابتهای بعدی مورد نیاز حل مسأله در صورت تحدید ضرایب می‌تواند تعریف شود. در این مسئله‌ها فرض می‌کنیم که ثابتها ثابت $x_۰$ (۴.۳) را که در تعریف $s(x)$ بکار بردیم، همگی این ثابتها را در برمی‌گیرد.

مسائل

۱. برای معادله برنولی:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \qquad (n \neq ۱),$$

نشان دهید که:

$$\xi(x) = \frac{۱}{q(x)s(x)^{۱-n}}\Big\{(۱ - n)C_۱\int_{x_۰}^{x} s(t)^{۱-n}q(t)dt + C_۲\Big\},$$
$$\eta(x) = C_۱ - p(x)\eta(x).$$

۲. با فرض اینکه $C_۱$ ثابتی ناصفر است، نشان دهید که مختصات متعارف مناسب (u, v) برای معادله مسئله قبل بصورت:

$$u(x, y) = \frac{s(x)y}{\Big\{\Big(۱ - n)C_۱\int_{x_۰}^{x} s(t)^{۱-n}q(t)dt + C_۲\Big\}^{\frac{۱}{(۱-n)}}},$$
$$v(x, y) = \frac{۱}{(۱ - n)C_۱}\log\Big\{(۱ - n)C_۱\int_{x_۰}^{x} s(t)^{۱-n}q(t)dt + C_۲\Big\},$$

است و با این تغییر مختصات معادله بصورت:

$$\frac{du}{dv} = u(u^{n-۱} - C_۱).$$

تغییر می‌یابد و علاوه بر آن با حل این معادله تفکیک—پذیر به جواب:

$$(۱ - C_۱u^{۱-n})e^{(۱-n)C_۱v} = C_۳,$$

دست می‌یابیم و سپس با بکار بردن آن جواب معادلهٔ اولیه را نتیجه بگیرید.

۳. اگر ثابت $C_۱$ صفر باشد، نشان دهید تغییر متغیر

$$u(x,y)=s(x)y, \qquad v(x,y)=\frac{۱}{C_۲}\int_{x_\circ}^{x} s(t)^{۱-n}q(t)dt,$$

معادله مسئله (۱) را بصورت

$$\frac{du}{dv}=C_۲u^n.$$

تبدیل می‌کند و با حل آن جواب

$$u^{۱-n}-C_۲(۱-n)v=C_۴,$$

را نتیجه گرفته و سپس نشان دهید که این جواب با انتخاب ثابت $C_۴=(C_۲-C_۳)/C_۱$، همان جواب مسئله قبل است.

۴. نشان دهید که معادله تعمیم یافته ریکاتی:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)+r(x)y^۲,$$

تحت (۱.۳) با $r(x)=q(x)s(x)^۲$ ناوردا است و نشان دهید که در این حالت داریم

$$\xi(x)=\frac{۱}{q(x)s(x)}, \qquad \eta(x)=\frac{-p(x)}{q(x)s(x)},$$

و مختصات متعارف مناسب بصورت:

$$u(x,y)=s(x)y, \qquad v(x,y)=\int_{x_\circ}^{x} s(t)q(t)dt.$$

بوده و بنابراین این معادله دیفرانسیل به معادلهٔ

$$\frac{du}{dv}=۱+u^۲,$$

تبدیل می‌شود و از آن نتیجه بگیرید

$$y(x)=\frac{۱}{s(x)}\tan\Big(\int_{x_\circ}^{x} s(t)q(t)dt+C\Big).$$

جواب معادله اولیه است.

۵. نشان دهید که معادله آبل از نوع اول

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)+r(x)y^۳,$$

تحت گروه ارائه شده در مسئله قبل با $r(x)=q(x)s(x)^۳$ ناوردا است و بر ا ساس آن نشان دهید که معادله دیفرانسیل با این تغییر متغیر به

$$\frac{du}{dv}=۱+u^۳.$$

تبدیل می‌شود.

۶. نشان دهید که

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)+r(x)\log y,$$

تحت گروه ارائه شده در مسئله قبل با $r(x)=q(x)\log s(x)$ ناوردا است و براساس آن نشان دهید که در این حالت داریم:

$$\xi(x)=\frac{۱}{r(x)s(x)},\qquad \eta(x)=\frac{-p(x)}{r(x)s(x)},$$
$$u(x,y)=s(x)y,\qquad v(x,y)=\int_{x_۰}^{x}s(t)r(t)dt,$$

و این معادله دیفرانسیل به معادله

$$\frac{du}{dv}=\log u.$$

تبدیل می‌شود.

۷. ثابت کنید که معادله

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^m+r(x)y^n,$$

در گروه تبدیلات (۱.۳) با $r(x)=q(x)s(x)^{n-m}$ صدق می‌کند و در این حالت نتیجه بگیرید که:

$$\xi(x)=\frac{۱}{q(x)s(x)^{۱-m}},\qquad \eta(x)=\frac{-p(x)}{q(x)s(x)^{۱-m}}$$
$$u(x,y)=s(x)y,\qquad v(x,y)=\int_{x_۰}^{x}s(t)^{۱-m}q(t)dt,$$

و با این تغییر متغیر معادله بالا به معادلهٔ

$$\frac{du}{dv}=u^m+u^n.$$

تبدیل می‌شود.

۸. نشان دهید معادله همگن از مرتبه دوم

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=۰,$$

را به صورتهای زیر می‌توان به شکل نرمال تبدیل کرد.

(i) با تغییر، متغیر وابستهٔ y با متغیر y^* که بصورت:

$$y=e^{-۱/۲\int_{x_۰}^{x}a(t)dt}y^*,$$

تعریف شده است که در این حالت داریم:

$$\frac{d^۲y^*}{dx^۲}+\Big\{b(x)-\frac{a(x)^۲}{۴}-\frac{۱}{۲}\frac{da}{dx}\Big\}y^*=۰,$$

(ii) با تغییر متغیر مستقلِ x با متغیر جدید x^* که بصورت:

$$x^*=\int_{x_۰}^{x}e^{-\int_{x_۰}^{x}a(t)dt}ds,$$

تعریف شده است و در این حالت داریم:

$$\frac{d^۲y}{dx^{*۲}}+\frac{b(x)}{(\frac{dx^*}{dx})^۲}y=۰.$$

۹. برای معادله دیفرانسیل،

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}-\frac{۳x}{(۱-x^۲)}\frac{dy}{dx}+\frac{n(n+۲)}{(۱-x^۲)}y=۰,$$

تغییر متغیرهای موجود در مسئله قبل بترتیب به معادلاتی بصورت،

$$\frac{d^۲y^*}{dx^۲}+\Big\{\frac{n(n+۲)}{(۱-x^۲)}+\frac{۳}{۴}\frac{(۲-x^۲)}{(۱-x^۲)^۲}\Big\}y^*=۰,$$
$$\frac{d^۲y}{dx^{*۲}}+\frac{n(n+۲)}{(۱+x^{*۲})^۲}y=۰.$$

منجر می‌شود.

۱۰. با نمادهای بکار رفته در بخش (۳.۳) معادله دیفرانسیل غیرهمگن،

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+p(x)y=q(x).$$

را در نظر بگیرید. اگر این تحت همان گروهی که معادله همگن نسبت به آن تغییر نمی‌یابد ناوردا باشد، نشان دهید که در این صورت $q(x)$ بشکل

$$q(x)=q_۰\xi(x)^{-۳/۲},$$

که در آن $q_۰$ ثابت است، می‌باشد و از آن نتیجه بگیرید این معادله با این تغییر متغیر به معادلهٔ

$$\frac{d^۲u}{dv^۲}+(AC-B^۲)u=q_۰.$$

تبدیل می‌شود.

۱۱. اگر $\xi(x)$ در،

$$\frac{۱}{۴}(۲\xi\xi''-\xi'^۲)+p\xi^۲=K^۲,$$

که در آن K ثابت است، صدق کند، آنگاه نشان دهید که $w(x)=\xi(x)^{۱/۲}$ در معادله مرتبه دوم غیرخطی،

$$\frac{d^۲w}{dx^۲}+p(x)w=\frac{K^۲}{w^۲}.$$

صدق می‌کند.

۱۲. نشان دهید که معادلات دیفرانسیل خطی، تحت عملگرهای زیر خطی باقی می‌مانند.

(i) با تغییر متغیر وابستهٔ y با متغیر y^* که بصورت $y=\alpha(x)y^*,$ تعریف شده است.

(ii) با تغییر متغیر وابستهٔ x با متغیر x^* که بصورت $x^*=\beta(x),$ تعریف شده است.

(ii) با ضرب معادله مورد نظر در تابع غیر—صفر $\gamma(x)$.

نشان دهید که با انتخاب α، β و γ بصورت:

$$\alpha(x)\beta'(x)=e^{-\int_{x_۰}^{x}\frac{B(t)}{۲A(t)}dt},\qquad \gamma(x)=\Big[\alpha(x)\beta'(x)^۳A(x)\Big]^{-۱},$$

معادله دیفرانسیل مرتبه سوم خطی عمومی

$$A(x)\frac{d^۳y}{dx^۳}+B(x)\frac{d^۲y}{dx^۲}+C(x)\frac{dy}{dx}+D(x)y=۰, \tag{۴۴.۳}$$

می‌تواند به معادله

$$\frac{d^۳y}{dx^۳}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=۰.$$

تحویل شود.

۱۳. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم خود—الحاق است اگر بشکل

$$\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dy}{dx}\Big)+Q(x)y=۰.$$

باشد. نشان دهید که هر معادله خطی مرتبه دوم با هر یک از عملگرهای مسئله قبل می‌تواند به معادله‌ای خود—الحاق تبدیل شود.

۱۴. بطور قراردادی معادله دیفرانسیل از مرتبه سوم خود—الحاق (یا پاد خود—الحاق) است اگر بشکل

$$\frac{d^۲}{dx^۲}\Big(p(x)\frac{dy}{dx}\Big)+\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{d^۲y}{dx^۲}\Big)+\frac{d}{dx}(Q(x)y)+Q(x)\frac{dy}{dx}=۰.$$

باشد. نشان دهید که معادلهٔ (۴۴.۳) خود—الحاق است اگر و تنها اگر

$$B(x)=\frac{۳}{۲}\frac{dA}{dx},\qquad D(x)=\frac{d}{dx}\Big\{C(x)-\frac{۱}{۳}\frac{dB}{dx}\Big\}.$$

در ادامه این نتیجه را برای بدست آوردن معادله (۴۵.۳) بکار ببرید و نشان دهید که هیچ ترکیبی از عملگرهای (i)، (ii) و (iii) از مسائل ۱۲ نمی‌توانند به معادله دیفرانسیل مرتبه سوم را به معادله‌ای خود—الحاق تبدیل کند مگر آنکه آن از ابتدا خود—الحاق باشد.

۱۵. نشان دهید اگر معادله مرتبه سوم خود—الحاق باشد آنگاه آن تحت (i)، (ii) و (iii) از مسئله سوم با $\alpha(x)$ ثابت، که برابر حاصلضرب $\gamma(x)\beta'(x)$ است، ناوردا باقی می‌ماند.

۱۶. نشان دهید که عملگرهای مسئله ۱۲، معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم عمومی

$$A(x)\frac{d^۴y}{dx^۴}+B(x)\frac{d^۳y}{dx^۳}+C(x)\frac{d^۲}{dx^۲}+D(x)\frac{dy}{dx}+E(x)y=۰,$$

با انتخاب α، β و γ بصورت،

$$\alpha(x)^۲\beta'(x)^۳=e^{-\int_{x_۰}{}^{x}\frac{B(t)}{۲A(t)}dt},\qquad \gamma(x)=[\alpha(x)\beta'(x)^۴A(x)]^{-۱}.$$

را به معادله‌ای بشکل:

$$\frac{d^۴y}{dx^۴}+a(x)\frac{d^۲y}{dx^۲}+b(x)\frac{dy}{dx}+c(x)y=۰,$$

تحویل می‌کند.

۱۷. معادله مرتبه چهارم خود—الحاق است اگر و تنها اگر دارای شکلی بصورت

$$\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}\Big(P(x)\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\Big)+\frac{d}{dx}\Big(Q(x)\frac{dy}{dx}\Big)+R(x)y=\circ.$$

باشد. نشان دهید که (۴۵.۳) خود—الحاق است اگر و تنها اگر

$$B(x)=۲\frac{dA}{dx},\qquad D(x)=\frac{d}{dx}\Big\{C(x)-\frac{۱}{۲}\frac{dB}{dx}\Big\}.$$

برای آن برقرار باشد.

۱۸. نشان دهید که هیچ ترکیب خطی از عملگرهای i، ii و iii از مسئله ۱۲ نمی‌تواند معادله (۴۵.۳) را به معادله‌ای خود—الحاق تبدیل کند مگر آنکه آن از ابتدا خود—الحاق باشد. اگر (۴۵.۳) خود—الحاق باشد این تغییر متغیرها با $\alpha=\gamma(x)\beta'(x)$ آنرا به معادله‌ای دیگر که آنهم خود—الحاق است تبدیل می‌کند.

«راهنمایی: برای قسمت دوم، اگر (۴۵.۳) خود—الحاق باشد آنگاه $b(x)=a'(x)$. که در این صورت معادله به

$$\frac{d^{۲}}{dx^{*۲}}\Big(P^*\frac{d^{۲}y^*}{dx^{*۲}}\Big)+\frac{d}{dx^*}\Big(Q^*\frac{dy^*}{dx^*}\Big)+R^*y^*=\circ,$$

تبدیل می‌شود که در آن داریم،

$$\begin{aligned}
P^*&=\alpha^{۲}\beta'^{۳}\\
Q^*&=\alpha^{۲}\beta'''+۲\alpha\alpha'\beta''+(۴\alpha\alpha''-۲\alpha'^{۲}+a\alpha^{۲})\beta',\\
R^*&=\frac{\alpha}{\beta'}(\alpha''''+a\alpha''+a'\alpha'+c\alpha),
\end{aligned}$$

که α، β، a و c همگی توابعی از x بوده و پریم مشتق نسبت به x را نشان می‌دهد و در آن رابطهٔ $\gamma=\alpha/\beta'$ برقرار است».

۱۹. اگر در مسئله قبل توابع $a(x)$ و $b(x)$ در رابطهٔ

$$c=\frac{a''}{۲}+(\frac{a}{۲})^{۲},$$

صدق کنند، آنگاه نشان دهید که (۴۵.۳) دارای عامل فاکتورگیری

$$L^{۲}[\lambda_{۳}L^{۲}y^*]=\circ,$$

است که $L^{۲}$ عملگر مرتبه دوم است که بصورت

$$l^{۲}y^*=\frac{d}{dx^*}\Big(\lambda_{۱}\frac{dy^*}{dx^*}\Big)+\lambda_{۲}y^*,$$

که در آن $\lambda_{۱}$، $\lambda_{۲}$ و $\lambda_{۳}$ بصورت،

$$\lambda_{۱}=\alpha^{۲}\beta',\qquad \lambda_{۲}=\frac{\alpha}{\beta'}(\alpha''+\frac{a}{۲}\alpha),\qquad \lambda_{۳}=\frac{\beta'}{\alpha^{۲}},$$

تعریف شده‌اند.

۲۰. با مشتقگیری نشان دهید که معادله دیفرانسیل مرتبه سوم خود–الحاق مسئله ۱۴ با انتگرال گیری اولیه بصورت:

$$P(2yy''-y'^2)+P'yy'+Qy^2=\text{constant}.$$

تبدیل می‌شود. اگر $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$ جوابهای مستقل معادله مرتبه دوم

$$4P\frac{d^2y}{dx^2}+2P'\frac{dy}{dx}+Qy=0,$$

باشند و اگر $y(x)$ بصورت

$$y=A\phi_1^2+2B\phi_1\phi_2+C\phi_2^2,$$

که در آن A، B و C ثابتهای دلخواهی هستند، تعریف شده باشد، آنگاه نتیجه بگیرید که

$$P(2yy''-y'^2)+P'yy'+Qy^2=4(AC-B^2)Pw^2,$$

که در آن $w(x)$ رونسکین توابع $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$ یعنی

$$w=\phi_1\phi_2'-\phi_2\phi_1'.$$

است. سپس نتیجه بگیرید این عبارت ارائه شده برای y حل عمومی معادله خود–الحاق مسئله ۱۴ است.

۲۱. با نمادهای بخش (۳.۴)،

(i) از (۲٦.۳) و (؟؟) معادله،

$$\Big(q(f)-\frac{1}{2}\frac{dp(f)}{df}\Big)g(x)^3=\Big(q(x)-\frac{1}{2}\frac{dp(x)}{dx}\Big),$$

را نتیجه گرفته و از آنجا، شرایط (؟؟) را بدست آورید.

(ii) معادله ناهمگن،

$$\frac{d^3y}{dx^3}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x),$$

را در نظر بگیرید و نشان دهید که این معادله تحت همان گروهی که معادله همگن نسبت به آن تغییر نمی‌یابد، با فرض

$$r(x)=r_0(x)\xi(x)^{-2},$$

که در آن r_0 ثابت است، ناوردا باقی می‌ماند. نشان دهید که آن مانند (۳۳.۳) به معادله‌ای بشکل،

$$\frac{d^3u}{dv^3}+4(AC-B^2)\frac{du}{dv}+Du=r_0.$$

تبدیل می‌شود.

۲۲. با نمادهای بخش (۳.۵)،

(i) از (۳٦.۳) و (؟؟) معادله،

$$\Big(q(f)-\frac{9p(f)^2}{100}-\frac{3}{10}\frac{d^2p(f)}{df^2}\Big)g(x)^{8/3}=\Big(q(x)-\frac{9p(x)^2}{100}-\frac{3}{10}\frac{d^2p(x)}{dx^2}\Big),$$

را نتیجه گرفته و از آنجا شرایط (۴۰.۳) را نتیجه بگیرید.

(ii) معادله ناهمگن،

$$\frac{d^۴y}{dx^۴}+\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dy}{dx}\Big)+q(x)y=r(x),$$

را در نظر بگیرید و نشان دهید که این معادله تحت همان گروهی که معادله همگن نسبت به آن تغییر نمی‌یابد، با فرض نشان دهید که آن مانند

$$r(x)=r_{\circ}\xi(x)^{-۵/۲},$$

که در آن $r_{\circ}$ ثابت است، ناوردا باقی می‌ماند. سپس نشان دهید که

(۴۳.۳) به معادله‌ای بشکل،

$$\frac{d^۴u}{dv^۴}+۱۰(AC-B^۲)\frac{d^۲u}{dv^۲}+[D+۹(AC-B^۲)^۲]u=r_{\circ}.$$

تبدیل می‌شود.

فصل ۴

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

۱.۴ مقدمه

در این فصل در مورد «مسائل اساسی لی برای یافتن گروه تبدیلات یک–پارامتری که معادله دیفرانسیل مرتبه اول را ناوردا می‌کنند» بحث می‌کنیم. یعنی، برای تابع $F(x,y)$ داده شده بدنبال تعیین گروهی یک پارامتری بشکل،

$$x_1 = x + \varepsilon\xi(x,y) + O(\varepsilon^2), \qquad y_1 = y + \varepsilon\eta(x,y) + O(\varepsilon^2), \tag{۱.۴}$$

هستیم بطوریکه معادله دیفرانسیل،

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y), \tag{۲.۴}$$

تحت آن ناوردا باقی بماند. این مسئله در حالت کلی بدین صورت مطرح نمی‌شود. بسیاری از کتابها در مورد یافتن معادلاتی که تحت گروه یک–پارامتری داده شده ناوردا باقی می‌مانند، بحث می‌کنند. در این زمینه‌ها خواننده می‌تواند به جداولی استاندارد که معادلات دیفرانسیل و گروههای تبدیلاتی که نسبت به آنها ناوردا هستند را لیست می‌کنند، مراجعه نموده یا خود برای گروههای یک–پارامتری چنین جداولی را رسم کند «بعنوان مثال دیکسون (۱۹۲۴) صفحه ۳۲۴ یا بلومن و کول (۱۹۷۴) صفحه ۹۹ را ببینید». البته تا حدودی در مورد این مسئله متداول نیز به بحث خواهیم پرداخت. برای مسئلهٔ اساسی نقش جوابهای خصوصی و منفرد معادله (۲.۴) را به خوبی روشن می‌کنیم که برای روشن شدن بحث خواننده می‌تواند به کتاب «پیگ (۱۸۹۷) صفحه ۱۱۳» مراجعه کند.

اساساً خمهای انتگرالی معادله (۲.۴) یعنی $z(x,y) = \text{constant}$ در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی،

$$\frac{\partial z}{\partial x} + F(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{۳.۴}$$

صدق می‌کنند. در بخش ۶.۴ در مورد ارتباط گروه یک–پارامتری که معادله (۳.۴) تحت آن ناوردا است و عوامل انتگرال گیری معادله (۲.۴) بحث می‌کنیم و خواهیم دید، همین ارتباط می‌تواند نتیجه معروف لی درباره عوامل انتگرال گیری معادله را تعمیم دهد «مسئله ۱ را ببینید». همچنین این فصل با با نگرش گروهی درباره معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی ارتباط خاصی دارد، در حالی که برای خواننده بهتر است تا زمانی که درباره موضوعات معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی در فصول مرتبط آشنایی مختصری پیدا نکرده است از آن اجتناب کند.

در بخش پایانی از این فصل سعی می‌کنیم به حل مسئله اساسی لی بپردازیم. چون دو تابع $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$ نمی‌توانند بوسیله قیدهای واحد (۶.۴) تعیین شوند، بنابراین بایست قیدهای مسقل دیگری روی گروه (۱.۴) که با آن قیدها سازگارند، تعریف کنیم. در اینجا قید می‌کنیم که گروه تبدیلات (۱.۴) مساحت–نگهدار است.

هر چند نتایجی که در اینجا به آنها دست می‌یابیم قطعی نیستند ولی با استناد به آنها به نگرشی خاص در ارتباط با شکلهای دیگری از مسئله اساسی لی، می‌توان دست یافت.

۲.۴ مدل بی‌نهایت کوچک y' و $y'=F(x,y)$ و مسائل اساسی

مدل بی‌نهایت کوچک y' را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم. از (۱.۴) داریم،

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{dy+\varepsilon\Big(\frac{\partial\eta}{\partial x}dx+\frac{\partial\eta}{\partial y}dy\Big)}{dx+\varepsilon\Big(\frac{\partial\eta}{\partial x}dx+\frac{\partial\eta}{\partial y}dy\Big)}+O(\varepsilon^2)$$

و با تقسیم آن بر x، بدست می‌آوریم:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{\frac{dy}{dx}+\varepsilon\Big(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{dy}{dx}\Big)}{1+\varepsilon\Big(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{dy}{dx}\Big)}+O(\varepsilon^2),$$

بنابراین با استفاده از قضیه دوجمله‌ایِ مقسوم علیه داریم،

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{dy}{dx}+\varepsilon\pi(x,y,y')+O(\varepsilon^2), \tag{۴.۴}$$

که $\pi(x,y,y')$ بصورت

$$\pi=\frac{\partial\eta}{\partial x}+\Big(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)\frac{dy}{dx}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2, \tag{۵.۴}$$

تعریف شده است و این مدل بی‌نهایت کوچک y' است.

اگر معادله (۲.۴) نسبت به گروه تبدیلات (۱.۴) ناوردا باشد، آنگاه از (۴.۴)،

$$\frac{dy_1}{dx_1}=F(x_1,y_1)$$

و

$$F(x_1,y_1)=F(x,y)+\varepsilon\Big(\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial y}\Big)+O(\varepsilon^2),$$

معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx}+\varepsilon\pi(x,y,y')=F(x,y)+\varepsilon\Big(\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial y}\Big)+O(\varepsilon^2),$$

را بدست می‌آوریم. و بنابراین با در نظر گرفتن جملاتی که از مرتبه ε هستند، داریم

$$\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial x}+\Big(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)F-\frac{\partial\xi}{\partial y}F^2, \tag{۶.۴}$$

که برای بدست آوردن آن از (۱.۴) و (۵.۴) استفاده کرده‌ایم. مسئله اساسی لی برای معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول بدین صورت مطرح می‌شود که برای تابع $F(x,y)$ داده شده چگونه با روشی قاعده‌مند می‌توان توابع $\eta(x,y)$ و $\xi(x,y)$ را تعیین کرد بطوریکه در (۶.۴) صدق کنند و رابطه $\eta\neq F\xi$ برقرار باشد. بایست دقت کنیم که $\eta=F\xi$ همواره در معادله (۶.۴) صدق می‌کند، بنابراین، این جواب برای رسیدن به اهدافمان مناسب نبوده و آنرا برآوره نمی‌کند. در واقع در این حالت برای بدست آوردن شکل عمومی از گروه تبدیلات (۱.۴) بایست معادلهٔ

$$\frac{dx_1}{d\varepsilon}=\xi(x_1,y_1),\qquad \frac{dy_1}{d\varepsilon}=F(x_1,y_1)\xi(x_1,y_1),$$

را حل کنیم که در حقیقت به همان مسأله اولیه برگشته‌ایم. همچنین از (۸.۴) که در بخش آتی معرفی می‌شود، دلیل اینکه $\eta=F\xi$ نمی‌تواند جوابی قابل قبول از (۶.۴) باشد، روشنتر می‌گردد.

در بخش بعدی نشان می‌دهیم که اگر $\eta(x,y)$ و $\xi(x,y)$ توابعی معلوم باشند، آنگاه شرط (۶.۴) به وجود عامل انتگرالگیری برای معادله دیفرانسیل (۲.۴) تقلیل می‌یابد. علاوه براین برای توابع $\eta(x,y)$ و $\xi(x,y)$ داده شده، (۶.۴) معادله‌ای دیفرانسیل با مشتقات جزیی برای تعیین تابع $F(x,y)$ است. بنابراین می‌توانیم رده‌ای از معادلات دیفرانسیل را که تحت گروه یک—پارامتری مشخص، ناوردا هستند را تعیین کنیم و این همان مسأله متداول است که در بخش‌های آتی در مورد آن نیز به بحث خواهیم پرداخت.

۳.۴ عامل‌های انتگرال‌گیری و مختصات متعارف $y' = F(x,y)$

اگر $\lambda(x,y)$ بصورت $\lambda = \eta - F\xi$ تعریف شود آنگاه (۶.۴) ساده‌تر شده و

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + F^{۲}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\lambda}{F}\Big) = ۰. \qquad (۷.۴)$$

بدست می آید. هر چند این معادله در مقایسه با (۶.۴) ساده‌تر است اما جنبه‌ی قابل توجهی از آن یعنی وابسته بودن مستقیم (۶.۴) به توابع $\eta(x,y)$ و $\xi(x,y)$ حذف شده است. اگر $\mu(x,y)$ بصورت $\mu = \lambda^{-۱}$ تعریف شود آنگاه داریم

$$\mu(x,y) = \frac{۱}{\eta(x,y) - F(x,y)\xi(x,y)}, \qquad (۸.۴)$$

و می‌توان نشان داد که (۷.۴) به معادله

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(F\mu) = ۰. \qquad (۹.۴)$$

تبدیل می‌شود. بنابراین اگر معادله اولیه (۲.۴) را بصورت،

$$dy - F(x,y)dx = ۰. \qquad (۱۰.۴)$$

بنویسیم آنگاه براساس (۴.۴) می‌بینیم که $\mu(x,y)$ عامل انتگرال گیری معادله (۱۰.۴) است. این نتیجه به لی منتسب است و عموماً با بیان‌های دیگری نیز مطرح می‌شود. به هر حال اگر از دید حل معادله به مسأله نگاه کنیم آنگاه استفاده از مختصات متعارف بیشتر مناسب است. بعلاوه همانطور که در فصل قبل دیدیم مختصات متعارف برای معادلات از مرتبه بالا نیز قابل استفاده است و براین اساس در اینجا بر آن تأکید می‌کنیم.

از (۸.۴) و (۹.۴) می‌بینیم که تابعی مانند $z(x,y)$ با خاصیت

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F}{(\eta - F\xi)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{۱}{(\eta - F\xi)}. \qquad (۱۱.۴)$$

وجود دارد. اما داریم،

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{dy - Fdx}{(\eta - F\xi)} = ۰,$$

که برای بدست آوردن آن از (۱۰.۴) و (۱۱.۴) استفاده شده است. بنابراین $z(x,y) = C$ که C ثابت جواب معادله (۲.۴) است و با استفاده از (۱۱.۴) داریم،

$$\xi\frac{\partial z}{\partial x} + \eta\frac{\partial z}{\partial y} = ۱. \qquad (۱۲.۴)$$

بنابراین اگر عملگر L را بصورت

$$L = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$$

تعریف کنیم آنگاه از (۱۲.۴) نتیجه می‌شود که $L(z) = ۱$ و از قضیه تبدیل ((۲۵.۴) را ببینید) داریم

$$z(x_۱, y_۱) = e^{\varepsilon L}z(x,y) = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}L^n(z),$$

و بنابراین

$$z(x_۱, y_۱) = z(x,y) + \varepsilon, \qquad (۱۳.۴)$$

از این معادله و (۷.۴) نتیجه می‌شود، اگر معادله دیفرانسیل مرتبه اول تحت گروه یک–پارامتری ناوردا باشد آنگاه جواب معادله بشکل

$$z(x,y)=v(x,y)+\psi[u(x,y)], \qquad (۱۴.۴)$$

می‌باشد که در آن (u,v) مختصات متعارف گروه و ψ تابعی تنها بر حسب u است. برای اینکه بتوانیم (۱۴.۴) را بطور مستقیم بدست آوریم فرض می‌کنیم که معادله (۲.۴) در مختصات متعارف به

$$\frac{dv}{du}=\phi(u,v)$$

تبدیل می‌شوند. اما بوضوح اگر معادله تحت $u_۱=u$ و $v_۱=v+\varepsilon$ ناوردا باشد آنگاه بایست ϕ از v مستقل بوده و در نتیجه (۱۴.۴) فوراً از معادله

$$\frac{dv}{du}=\phi(u).$$

نتیجه می‌شود.

۱.۳.۴ مثال. معادله دیفرانسیل،

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{(x+x^۲+y^۲)},$$

را با پیدا کردن گروه یک–پارامتری که معادله نسبت به آن ناورداست، حل کنید. در این حالت داریم،

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{-(۱+۲x)y}{(x+x^۲+y^۲)^۲}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{(x+x^۲-y^۲)}{(x+x^۲+y^۲)^۲},$$

و با استفاده از (٦.۴) بایست توابع $\eta(x,y)$ و $\xi(x,y)$ را که در

$$(x+x^۲-y^۲)\eta-(۱+۲x)y\xi=(x+x^۲+y^۲)^۲\frac{\partial\eta}{\partial x}+\Big(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)y(x+x^۲+y^۲)-y^۲\frac{\partial\xi}{\partial y}$$

صدق می‌کنند را بیابیم. متاسفانه در اینجا این توابع با آزمون و خطا تعیین می‌شوند. با فرض $\eta=۱$، ξ بایست در

$$(x+x^۲+y^۲)\frac{\partial\xi}{\partial x}+y\frac{\partial\xi}{\partial y}=(۱+۲x)\xi-\frac{(x+x^۲-y^۲)}{y}$$

صدق کند. متاسفانه در این قدم نمی‌توانیم جواب را با روشی اسلوب‌مند، بدست آوریم، زیرا حل آن به روش لاگرانژ نیازمند حل معادله اولیه است (مسئله ۳ را ببینید). به هر حال، با برخی امتحانها و پافشاریها به جواب $\xi=x/y$ دست می‌یابیم. در نتیجه شکل عمومی گروه با حل معادله

$$\frac{dx_۱}{d\varepsilon}=\frac{x_۱}{y_۱}, \qquad \frac{dy_۱}{d\varepsilon}=۱,$$

و با شرط اولیه $x_۱=x$ و $y_۱=y$ در صورتی که $\varepsilon=۰$، بدست می آید. در نتیجه

$$x_۱=x+\varepsilon\frac{x}{y}, \qquad y_۱=y+\varepsilon,$$

را بدست می آوریم و خواننده می‌تواند نشان دهد که معادلهٔ داده شده حقیقتاً تحت این گروه ناوردا است. مختصات متعارف بصورت

$$u=\frac{y}{x}, \qquad v=y,$$

بوده که در این حالت معادله مورد نظر به معادله‌ای بشکل

$$\frac{dv}{du}=\frac{۱}{\left(\frac{۱}{x}-\frac{y}{x^۲}\frac{dx}{dy}\right)}=-\frac{۱}{(۱+u^۲)}.$$

تبدیل می شود، بنابراین دارای جوابی بصورت

$$v + \tan^{-۱} u = C$$

یا

$$y + \tan^{-۱} \frac{y}{x} = C$$

است. در یک روش دیگر، اگر معادله را بصورت (۴.۱۰) یعنی،

$$dy - \frac{ydx}{(x + x^۲ + y^۲)} = ۰$$

بنویسیم آنگاه از (۴.۸) عامل فاکتور گیری این معادله یعنی $\mu(x, y)$، بشکل

$$\mu(x, y) = \frac{(x + x^۲ + y^۲)}{(x^۲ + y^۲)}$$

خواهد بود که در نتیجه معادله

$$dy + \frac{(xdy - ydx)}{(x^۲ + y^۲)} = ۰.$$

بدست می آید و حل آن به جوابهایی که قبلاً بدست آمده است، منتج می‌شود.

۴.۳.۲ مثال. تابع $a(x)$ یا رده‌ای از توابع را با شرط اینکه معادله دیفرانسیل،

$$\frac{dy}{dx} = a(x) + y^۲,$$

تحت گروهی یک–پارامتری ناوردا باشد، را بدست آورید.

از (۴.۶) داریم،

$$\xi a' + ۲y\eta = \Big(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\Big)(a^۲ + y^۲) - \frac{\partial \xi}{\partial y}(a^۲ + ۲ay^۲ + y^۴).$$

این شرایط با فرض $\xi = \xi(x)$ و $\eta = \eta(x)y$ ساده‌تر شده و در این صورت معادلهٔ

$$\xi(x)a'(x) + ۲\eta(x)y^۲ = \eta'(x)y + [\eta(x) - \xi'(x)][a(x) + y^۲]$$

بدست می آید که از این معادله با در نظر گرفتن ضرایب y، نتیجهٔ

$$\xi(x) = Ax + B, \qquad \eta(x) = -A$$

بدست می آید و در نتیجه $a(x)$ بصورت:

$$a(x) = \frac{C}{(Ax + B)^۲}$$

که در آن A، B و C همگی ثابتند، خواهد بود. از معادلات

$$\frac{dx_۱}{d\varepsilon} = (Ax_۱ + B), \qquad \frac{dy_۱}{d\varepsilon} = -Ay_۱,$$

مختصات متعارف مناسب را بصورت

$$u = (Ax + B)y, \qquad v = \frac{۱}{A}\log(Ax + B),$$

بدست می آوریم و از معادله اولیه، معادلهٔ

$$\frac{dv}{du} = \frac{۱}{(u^۲ + Au + C)}.$$

نتیجه می‌شود که تفکیک–پذیر بوده و برای مقادیر داده شده A و B براحتی حل می‌شود.

۴.۴ مسئله متفاوت

آیا برای توابع $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$ داده شده می‌توان $F(x,y)$ کلی پیدا کرد بطوریکه (۶.۴) برقرار باشد. (۶.۴) را بعنوان معادله‌ای دیفرانسیل با مشتقات جزیی از مرتبه اول در نظر گرفته و آنرا حل می‌کنیم. معادله مشخصهٔ آن بصورت

$$\frac{dx}{d\tau}=\xi(x,y),\qquad \frac{dy}{d\tau}=\eta(x,y), \tag{۱۵.۴}$$

بوده و داریم:

$$\frac{dF}{d\tau}=\frac{\partial\eta}{\partial x}+\Big(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)F-\frac{\partial\xi}{\partial y}F^{۲}, \tag{۱۶.۴}$$

برای یافتن این $F(x,y)$ عمومی بایست دو جواب مسقل خطی معادلات (۱۵.۴) و (۱۶.۴) را بدست آوریم. در حالت کلی معادله (۱۶.۴) معادله ریکاتی است که با جواب بدیهی معادله (۶.۴) یعنی، $\eta=F\xi$ قابل حل است. با فرض

$$F=\frac{\eta}{\xi}+\frac{۱}{w}, \tag{۱۷.۴}$$

معادله مرتبه اول

$$\frac{dw}{d\tau}+\Big(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}-۲\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}\Big)w=\frac{\partial\xi}{\partial y} \tag{۱۸.۴}$$

بدست می‌آید که به روش معمول قابل حل است.

۱.۴.۴ مثال. شکل کلی معادلات دیفرانسیلی که تحت گروه یک–پارامتری بشکل

$$x_۱=f(x),\qquad y_۱=g(x)y.$$

ناورداست را بدست آورید.

شکل بی نهایت کوچک گروه بصورت

$$x_۱=x+\varepsilon\xi(x)+O(\varepsilon^۲),\qquad y_۱=y+\varepsilon\eta(x)y+O(\varepsilon^۲),$$

بوده و در نتیجه معادلات مشخصه (۱۵.۴) و (۱۶.۴) به معادلاتی بصورت:

$$\frac{dx}{d\tau}=\xi(x),\qquad \frac{dy}{d\tau}=\eta(x)y, \tag{۱۹.۴}$$

و

$$\frac{dF}{d\tau}=\eta'(x)y+(\eta(x)-\xi'(x))F. \tag{۲۰.۴}$$

تبدیل می‌شوند و از (۱۹.۴) داریم،

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\eta(x)}{\xi(x)}y,$$

و بنابراین

$$ys(x)=A, \tag{۲۱.۴}$$

بدست می‌آید که A ثابت است و $s(x)$ بصورت:

$$s(x)=e^{-\int_{x_۰}^{x}\frac{\eta(t)}{\xi(t)}dt}, \tag{۲۲.۴}$$

برای $x_\circ$ ثابت مناسب، تعریف می‌شود. از ۱–(۱۹.۴)، (۲۰.۴) و (؟؟) بدست می آوریم

$$\frac{dF}{dx}+\Big(\frac{\xi'(x)}{\xi(x)}-\frac{\eta(x)}{\xi(x)}F=\frac{A\eta'(x)}{\xi(x)s(x)}\Big),$$

که حل آن به جواب

$$\xi(x)s(x)F=A\eta(x)+B, \tag{۲۳.۴}$$

که B ثابت است، منتج می‌شود. بنابراین شکل عمومی این گونه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از $B=\Phi(A)$ بدست می آید، یعنی

$$\frac{dy}{dx}-\frac{\eta(x)}{\xi(x)}y=\frac{\Phi[s(x)y]}{\xi(x)s(x)}$$

که در این حالت می‌توان نشان داد که مختصات متعارف مناسب (u,v)، به صورت

$$u(x,y)=s(x)y,\qquad v(x,y)=\int_{x_\circ}^{x}\frac{dt}{\xi(t)}$$

بوده و معادله دیفرانسیل بالا در این مختصات جدید به معادلهٔ

$$\frac{du}{dv}=\Phi(u),$$

تبدیل می‌شود (توجه کنید که این مثال تعمیمی از مسائل ۴، ۵، ٦ و ۷ از فصل ۳ بود).

۲.۴.۴ مثال. شکل کلی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را که تحت گروه یک–پارامتری

$$\xi(x,y)=\xi(x)e^{ky},\qquad \eta(x,y)=\eta(x)e^{ky},$$

که k ثابت است، ناوردا باقی می‌ماند را بدست آورید.

در این حالت از (۱۵.۴) داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\eta(x)}{\xi(x)}$$

و بنابراین

$$y-\int_{x_\circ}^{x}\frac{\eta(t)}{\xi(t)}dt=A, \tag{۲۴.۴}$$

که A ثابت است. با استفاده از نتیجه‌ای که در مسئلهٔ ٦ داده شده است مجبوریم که انتگرال‌گیری بصورت

$$W=\frac{k}{e^{kA}}\int_{x_\circ}^{x}\frac{s(t)^k}{\xi(t)}dt+B, \tag{۲۵.۴}$$

را حل کنیم که در آن B ثابت بوده و $s(x)$ در (۲۲.۴) تعریف شده است. در واقع $w=\xi(x,y)W$، نتیجه می‌دهد که: (۱۷.۴) داریم

$$W=\frac{۱}{e^{ky}}\Big(\xi(x)\frac{dy}{dx}-\eta(x)\Big)^{-۱},$$

بنابراین معادلهٔ

$$\Big(\xi(x)\frac{dy}{dx}-\eta(x)\Big)^{-۱}=\frac{k}{s(x)^k}\int_{x_\circ}^{x}\frac{s(t)^k}{\xi(t)}dt+\Phi\Big(y-\int_{x_\circ}^{x}\frac{\eta(t)}{\xi(t)}dt\Big),$$

که Φ نماینده تابع دلخواهی است، همان معادله دیفرانسیل مورد نیاز می‌باشد. مختصات متعارف مناسب بشکل:

$$u(x,y)=y-\int_{x_\circ}^{x}\frac{\eta(t)}{\xi(t)}dt,\qquad v(x,y)=\frac{۱}{s(x)^ke^{ky}}\int_{x_\circ}^{x}\frac{s(t)^k}{\xi(t)}dt,$$

بوده و با استفاده از

$$\frac{du}{dv}=\frac{du/dx}{dv/dx}=\frac{1}{\left(-kv+\frac{1}{e^{kv}\xi(x)}dx/du\right)},$$

می‌بینیم که معادله دیفرانسیل مورد نظر به معادله

$$\frac{du}{dv}=\frac{e^{ku}}{\Phi(u)}.$$

تبدیل می‌شود. بخش نهایی این فصل را به جنبه‌های گوناگونی که به مسئله اساسی و شرایط (۶.۴) آن مرتبط است اختصاص می‌دهیم.

۵.۴ مسئله اساسی و جوابهای منفرد معادله $y'=F(x,y)$

فرض می‌کنیم که جواب $z(x,y)=C$ برای (۲.۴) که دارای خاصیت

$$y=S(x,C). \tag{۲۶.۴}$$

را داریم، اما براساس (۱۳.۴) مشاهده می‌کنیم که اگر (۲.۴) تحت گروه (۱.۴) ناوردا باشد، آنگاه نتیجه می‌شود:

$$y_1=S(x_1,C+\varepsilon)$$

و بنابراین با در نظر گرفن جملاتی که تنها بر حسب ε هستند، داریم

$$\eta=\xi\Big(\frac{\partial S}{\partial x}\Big)+\Big(\frac{\partial S}{\partial C}\Big),$$

که مشقات جزیی داخل پرانتز نسبت به متغیر y که تابعی دو متغیره بر حسب x و C است، می‌باشند. از این معادله و از (۲.۴) نتیجه می گیریم که

$$\Big(\frac{\partial y}{\partial C}\Big)=\eta(x,y)-F(x,y)\xi(x,y). \tag{۲۷.۴}$$

اکنون $\lambda=\eta-F\xi$ در (۷.۴) صدق می‌کند و با استفاده از (۲۷.۴) می‌بینیم که (۷.۴) را به دو روش متفاوت می‌توان بدست آورد.

روش اول: (۷.۴) با گرفتن یک مشتق جزیی از (۲.۴) نسبت به C بدست می آید که در این صورت (۲.۴) به معادله

$$\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)=F(x,y), \tag{۲۸.۴}$$

تبدیل می‌شود که با مشتق‌گیری جزیی از آن معادله

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial y}{\partial C}\Big)\Big)=\frac{\partial F}{\partial y}\Big(\frac{\partial y}{\partial C}\Big)$$

را بدست می آوریم. بنابراین داریم،

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial y}{\partial C}\Big)\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial y}{\partial C}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial y}{\partial C}\Big)\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big),$$

که می‌توان (۷.۴) را براساس آن بدست آورد.

روش دوم: (۷.۴) با انجام محاسبات بر روی (۲۷.۴)و(۲۸.۴) بدست می آید که انجام این کار را به خواننده محول می‌کنیم.

از (۲۷.۴) مشاهده می‌شود که اگر $y=y_0(x)$ جواب منفرد (۲.۴) باشد آنگاه $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$ دارای رابطه‌ای بصورت

$$\eta(x,y_0)=F(x,y_0)\xi(x,y_0) \tag{۲۹.۴}$$

هستند. بنابراین در اغلب مواردی که جواب منفرد (۲.۴) مشخص است، (۲۹.۴) رابطه‌ای طبیعی برای توابع $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$ است. این ملاحظات بر اهمیت بیش از پیش جواب منفرد تأکید می‌کند و نشان می‌دهد که در حل اغلب معادلات دیفرانسیل مرتبه اول آن دارای نقشی اساسی است.

۶.۴ ناوردایی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه اول همبسته

در این بخش به ناوردایی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه اول همبسته (۳.۴) می‌پردازیم و نگرش گروهی را برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی که در بخش‌های دنباله‌ای به بررسی بیشتر آنها می‌پردازیم، مورد استفاده قرار می‌دهیم. در اینجا بدنبال گروه یک–پارامتری با سه متغیر (x, y, z) هستیم که معادله دیفرانسیل (۳.۴) را ناوردا می‌کنند و بطور قراردادی مشتق جزیی نسبت به متغیرها را با زیراندیس نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم که گروه یک–پارامتری

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \varepsilon\xi(x,y,z) + O(\varepsilon^2), \\ y_1 &= y + \varepsilon\eta(x,y,z) + O(\varepsilon^2), \\ z_1 &= z + \varepsilon\zeta(x,y,z) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{۳۰.۴}$$

نسبت به معادله (۳.۴) ناوردا است. $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}$ و $\frac{\partial z_1}{\partial y_1}$ را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} \\ &= \Big\{\frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon\Big(\zeta_x + \zeta_z\frac{\partial z}{\partial x}\Big)\Big\}\Big\{1 - \varepsilon\Big(\xi_x + \xi_z\frac{\partial z}{\partial x}\Big)\Big\} \\ &+ \Big\{\frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon\Big(\zeta_y + \zeta_z\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\Big\}\Big\{-\varepsilon\Big(\eta_x + \eta_z\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\Big\} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon\Big\{\zeta_x + (\zeta_z - \xi_x)\frac{\partial z}{\partial x} - \eta_x\frac{\partial z}{\partial y} - \xi_z\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 - \eta_z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\Big\} + O(\varepsilon^2) \tag{۳۱.۴}$$

و بطور مشابه

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} &= \frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_1} \\ &= \Big\{\frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon\Big(\zeta_x + \zeta_z\frac{\partial z}{\partial x}\Big)\Big\}\Big\{-\varepsilon\Big(\xi_y + \xi_z\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\Big\} \\ &+ \Big\{\frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon\Big(\zeta_y + \zeta_z\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\Big\}\Big\{1 - \varepsilon\Big(\eta_y + \eta_z\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\Big\} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\frac{\partial z_1}{\partial y_1} = \frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon\Big\{\zeta_y + (\zeta_z - \eta_y)\frac{\partial z}{\partial y} - \xi_y\frac{\partial z}{\partial x} - \eta_z\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2 - \xi_z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\Big\} + O(\varepsilon^2) \tag{۳۲.۴}$$

که در نتیجه اگر $z = \phi(x,y)$ جواب (۳.۴) باشد، آنگاه براساس خواص ناوردایی داریم: $z_1 = \phi(x_1, y_1)$ ونتیجه می‌شود که $z = \phi(x,y)$ در معادله

$$\xi(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + \eta(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = \zeta(x,y,z). \tag{۳۳.۴}$$

صدق می‌کند. اکنون از

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + F(x_1, y_1)\frac{\partial z_1}{\partial y_1} = 0,$$

و (؟؟)، (۳۱.۴) و (۳۲.۴) می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\zeta_x + F\zeta_y = \theta[(\eta - F\xi)_x + F(\eta - F\xi)_y - (\eta - F\xi)F_y], \tag{۳۴.۴}$$

که در آن $\theta = \frac{\partial z}{\partial y}$، بوده و از رابطهٔ $\frac{\partial z}{\partial x} = -F\theta$ استفاده کرده‌ایم. از (۳.۴) و (۳۳.۴) داریم

$$\zeta = (\eta - \xi F)\theta,$$

و در نتیجه از (۳۴.۴) داریم:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(F\theta)=0. \qquad (۳۵.۴)$$

بنابراین θ، یعنی $\zeta/(\eta-\xi F)$ عامل انتگرال گیری معادله (۱۰.۴) است. بوضوح اگر z در معادله‌ای از نوع (۳۳.۴) مانند (۳.۴) صدق کند آنگاه (۳۵.۴) را می‌توان بسهولت برای آن نتیجه گرفت. در واقع از (۳.۴) و (۳۳.۴) داریم،

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F\zeta}{(\eta-F\xi)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\zeta}{(\eta-F\xi)},$$

و بر اساس سازگاری همین معادلات، (۳۵.۴) نتیجه می‌شود.

در بالا از یک نگرش غیر—کلاسیک که در فصل بعدی توصیف می‌شود برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی استفاده شد و نشان دادیم که ناوردایی (۳.۴) تحت (؟؟) با وجود عامل انتگرال‌گیری برای (۱۰.۴) معادل است. بعلاوه این شرایط نسبت به شرایطی که با (۳.۴) و (۳۳.۴) سازگارند، هیچ گونه اطلاعات بیشتری را بدست نمی‌دهد. اگر یک نگرش کلاسیک را برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی بکار ببندیم آنگاه با برابر قرار دادن ضرایب θ^0 و θ در (۳۴.۴) با صفر نتیجه می‌شود که $\xi=\Phi(z)$، و از آن نتیجه می‌شود که $\lambda=\eta-F\xi$ در (۷.۴) با مشتقات جزیی که در آن معادله داده شده است، صدق می‌کند. بنابراین نگرش کلاسیک برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی دارای یک نتیجه آشناست و آن این است که اگر μ عامل انتگرال گیری معادله باشد، آنگاه $\phi(z)\mu$ نیز که در آن z جواب معادله دیفرانسیل است، عامل انتگرال گیری معادله دیفرانسیل مورد نظر است.

۷.۴ مسئله لی و گروههای مساحت—نگهدار

در این بخش برای معادله دیفرانسیل داده شده (۲.۴) سعی می‌کنیم که با فرض اینکه گروه یک—پارامتری (۱.۴) مساحت—نگهدار است به حل (٦.۴) بپردازیم. یعنی فرض می‌کنیم که تابع به اندازهٔ کافی مشتق پذیر و پیوسته $G(x,y)$ با خصوصیات:

$$\xi(x,y)=\frac{\partial G}{\partial y},\eta(x,y)=-\frac{\partial G}{\partial x}. \qquad (۳٦.۴)$$

موجود بوده و اینک از (٦.۴) و (۳٦.۴) برای $G(x,y)$، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی از مرتبه دوم

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+2F\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}+F^2\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=\frac{\partial(G,F)}{\partial(x,y)}, \qquad (۳۷.۴)$$

را بدست می‌آوریم که می‌باید آن را برای تابع $F(x,y)$ معلوم حل کنیم. اصولاً این معادله را با تعریف دو تابع $A(G,F)$ و $B(G,F)$ بطوریکه

$$\frac{\partial G}{\partial x}=A(G,F),\qquad \frac{\partial G}{\partial y}=B(G,F). \qquad (۳۸.۴)$$

می‌توانیم حل کنیم. شرایط سازگاری برای $G(x,y)$ همراه با (۳۷.۴) دو معادله برای تعیین کردن مشتق مرتبه اول $F(x,y)$ و شرایط سازگاری برای این توابع معادلات نهایی برای تعیین $A(G,F)$ و $B(G,F)$ را تولید می‌کنند. اگر چه معادله بدست آمده نسبت به معادله (۳۷.۴) انعطاف پذیرتر نیست ولی از جنبه‌های ساده‌سازی دارای تحلیل قابل ارزشی است. بطور دقیقر $G(x,y)$ ناوردای گروه است و (۳٦.۴) از (۱۳.۲) در صورتی که ژاکوبین در (۱۳.۲) فقط تابعی از u باشد، نتیجه می‌شود. این تحلیل را می‌توان با اعمال قیدهای دیگری بر روی گروه یک—پارامتری بدست آورد. بعنوان مثال می‌توانیم η و ξ را بصورت گرادیان برخی از توابع در نظر بگیریم. بمنظور حل معادله (۳۷.۴) بوسیله (۳۸.۴) بایست فرض کنیم که ژاکوبین

$$J=\frac{\partial(G,F)}{\partial(x,y)}, \qquad (۳۹.۴)$$

ناصفر و نامتناهی است. همچنین برای اینکار روابط مقدماتی زیر را نیاز داریم،

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial G}&=\frac{1}{J}\frac{\partial F}{\partial y},\qquad \frac{\partial x}{\partial F}=-\frac{B}{J},\\ \frac{\partial y}{\partial G}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial F}{\partial x},\qquad \frac{\partial y}{\partial F}=\frac{A}{J},\end{aligned} \qquad (۴۰.۴)$$

اکنون با نوشتن شرایط سازگاری برای $G(x,y)$ بشکل:

$$\frac{\partial(A,x)}{\partial(G,F)}+\frac{\partial(B,y)}{\partial(G,F)}=0,$$

معادلهٔ

$$\frac{\partial B}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial y}=B\frac{\partial A}{\partial G}-A\frac{\partial B}{\partial G}. \qquad (۴۱.۴)$$

را بدست می‌آوریم. با فرض $C=A+FB$، از (۷.۴) می‌بینیم که (۳۷.۴) را می‌توان بصورت:

$$\frac{\partial(C,y)}{\partial(G,F)}-F^{2}\frac{\partial(C/F,x)}{\partial(G,F)}=0,$$

که صورت ساده شدهٔ آن بشکل

$$\frac{\partial C}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial x}+\Big(F\frac{\partial C}{\partial F}-C\Big)\frac{\partial F}{\partial y}=-C\frac{\partial C}{\partial G}, \qquad (۴۲.۴)$$

است، نوشت. با حل (۴۱.۴) و (۴۲.۴) برای $\frac{\partial F}{\partial x}$ و $\frac{\partial F}{\partial y}$، معادلهٔ

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=-F\frac{\partial C}{\partial G}-\Big(F\frac{\partial C}{\partial F}-C\Big)H,\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=\frac{\partial C}{\partial G}+\frac{\partial C}{\partial F}H,\end{aligned} \qquad (۴۳.۴)$$

که در آن $H(G,F)$ بصورت

$$H(G,F)=\Big\{\frac{\partial C}{\partial G}\frac{\partial C}{\partial F}-C\frac{\partial B}{\partial G}\Big\}\Big\{\frac{\partial(BC)}{\partial F}-\Big(\frac{\partial C}{\partial F}\Big)^{2}\Big\}^{-1}. \qquad (۴۴.۴)$$

تعریف می‌شود را بدست می آوریم. توجه می‌کنیم که بر اساس (۳۸.۴) و (؟؟) معادله دیفرانسیلی که در (۲.۴) داده شده به معادلهٔ

$$\frac{dF}{dG}=\Big\{\frac{\partial F}{\partial x}+F\frac{\partial F}{\partial y}\Big\}\Big\{\frac{\partial G}{\partial x}+F\frac{\partial G}{\partial y}\Big\}^{-1}=H(G,F). \qquad (۴۵.۴)$$

تبدیل می‌شود. از معادله بالا بعد از برخی محاسبات می‌فهمیم که شرایط سازگاری برای $F(x,y)$ به

$$\begin{aligned}&C\frac{\partial^{2}C}{\partial G^{2}}+2HC\frac{\partial^{2}C}{\partial G\partial F}+H^{2}C\frac{\partial^{2}C}{\partial F^{2}}+\Big(\frac{\partial C}{\partial G}\Big)^{2}+\Big(\frac{\partial C}{\partial F}-B\Big)\\ &\frac{\partial(HC)}{\partial G}-C\frac{\partial C}{\partial G}\frac{\partial H}{\partial F}=0,\end{aligned} \qquad (۴۶.۴)$$

که آنرا بصورت:

$$\frac{\partial}{\partial G}\Big\{C\Big(\frac{\partial C}{\partial F}-B\Big)H+C\frac{\partial C}{\partial G}\Big\}+H^{2}\frac{\partial}{\partial F}\Big\{C\Big(\frac{\partial C}{\partial F}-B\Big)+\frac{C}{H}\frac{\partial C}{\partial G}\Big\}=0 \qquad (۴۷.۴)$$

نیز می‌توان نوشت، تبدیل می‌شود. با مقایسه این معادله با (۷.۴) می‌بینیم که (۴۷.۴) گزاره‌ای است که ادعا می‌کند معادله (۴۵.۴) تحت گروه یک پارامتری با شکل بی‌نهایت کوچک $\xi^*(G,F)$ و $\eta^*(G,F)$ است که در آنها داریم:

$$\xi^*(G,F)=C\Big(\frac{\partial C}{\partial F}-B\Big),\qquad \eta^*(G,F)=-C\frac{\partial C}{\partial G}. \qquad (۴۸.۴)$$

ناوردا است. بنابراین $(H\xi^*-\eta^*)^{-1}$ عامل انتگرال گیری معادله

$$dF-H(G,F)dG=0, \qquad (۴۹.۴)$$

است. حال می‌توانیم ثابت کنیم که:

$$H\xi^*-\eta^*=C^{2}\frac{\partial(A,B)}{\partial(G,F)}\Big\{\frac{\partial(BC)}{\partial F}-\Big(\frac{\partial C}{\partial F}\Big)^{2}\Big\}^{-1}, \qquad (۵۰.۴)$$

بطوریکه شرایط سازگاری برای $F(x,y)$ به عبارتی بشکل

$$\frac{\{C\frac{\partial B}{\partial G}-\frac{\partial C}{\partial G}\frac{\partial C}{\partial F}\}dG+\{\frac{\partial(BC)}{\partial F}-(\frac{\partial C}{\partial F})^{۲}\}dF}{C^{۲}\frac{\partial(A,B)}{\partial(G,F)}}=۰, \qquad (۵۱.۴)$$

تقلیل می‌یابد. مسائل ۱۳ و ۱۴، تحلیل بالا را با دو جواب ساده از (۴۷.۴) شرح می‌دهد. برای مثالهای خاص‌تر بایست J را بصورتی که در (۳۹.۴) تعریف شده است، در نظر بگیریم. از (۳۸.۴)، (۳۹.۴)، (؟؟) و (۵۰.۴) به نتیجهٔ

$$J=C^{۲}\frac{\partial(A,B)}{\partial(G,F)}\Big\{\frac{\partial(BC)}{\partial F}-\Big(\frac{\partial C}{\partial F}\Big)^{۲}\Big\}^{-۱}. \qquad (۵۲.۴)$$

دست می‌یابیم که با فرض $C=A+FB$ می‌توان (۵۱.۴) را بصورت

$$\frac{\frac{\partial C}{\partial F}dA+(F\frac{\partial C}{\partial F}-C)dB}{C^{۲}\frac{\partial(A,B)}{\partial(G,F)}}=۰.$$

ساده کرد. بنابراین با فرض $\phi=C^{-۱}$ شرایط (۴۷.۴) با جمله

$$\frac{\partial(\phi,G)}{\partial(A,B)}dA+\frac{\partial(F\phi,G)}{\partial(A,B)}dB=۰. \qquad (۵۳.۴)$$

معادل است. یعنی شرایط سازگاری برای $F(x,y)$ به

$$\frac{\partial\Big(\frac{\partial\phi}{\partial B},G\Big)}{\partial(A,B)}+\frac{\partial\Big(\phi,\frac{\partial G}{\partial B}\Big)}{\partial(A,B)}=\frac{\partial\Big(\frac{\partial\psi}{\partial A},G\Big)}{\partial(A,B)}+\frac{\partial(\psi,\frac{\partial G}{\partial A})}{\partial(A,B)}, \qquad (۵۴.۴)$$

که در آن توابع ϕ و ψ بصورت

$$\phi=\frac{۱}{(A+FB)},\qquad \psi\frac{F}{(A+FB)}. \qquad (۵۵.۴)$$

تعریف شده‌اند، تبدیل می‌شود.

به رئوس کلی روش حل معادله (۵۴.۴) در مسائل ۱۵، ۱۶، ۱۷ و ۱۸ می‌پردازیم.

اکنون ارزشمند است که به این نکته اشاره کنیم که شکلهای تفاضلی (۵۱.۴) و (۵۳.۴) با این شرط که $(A+F)^{-۱}$ بایست یک عامل انتگرال‌گیری برای (۹.۴) باشد، سازگاری دارد. در نتیجه از عبارتهای (؟؟) برای بیان عبارتهای $\frac{\partial F}{\partial x}$ و $\frac{\partial F}{\partial y}$ استفاده می‌کنیم. در واقع از (؟؟) و استفاده از $C=A+FB$ داریم:

$$\frac{dy-Fdx}{(A+FB)}=\frac{CdF-\Big(\frac{\partial F}{\partial x}+F\frac{\partial F}{\partial y}dG\Big)}{JC}$$

و (؟؟)، (۴۴.۴) و (۵۲.۴) دقیقاً به (۵۱.۴) منجر می‌شود.

تحلیل سه بخش نهایی این فصل نشان دهندهٔ این است که هرچند می‌توان نگرشهای جایگزین در «مسئله لی» بدست آمده، اما پیشرفت واقعی برای معادلات دیفرانسیلی عمومی درجهٔ اول مشکل است. مسئله لی یک مسئله پایه‌ای از ریاضیات است که که حل نشده باقی مانده است و راه‌حل آن بدون شک شامل بکارگیری نگرشی نو می‌باشد. چون $\mu=(\eta-F\xi)^{-۱}$ عامل انتگرال‌گیری معادله (۱۰.۴) است، یعنی اینکه برای $\mu(x,y)$ داده شده تعداد بی‌نهایت $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$ مناسب وجود دارد و در نتیجه معادلات دیفرانسیلی درجه اول تحت عداد نامتناهی گروه ناوردا هستند. این مطلب با اینکه معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر تحت حداکثر تعداد متناهی گروه ناوردا می‌باشند متناقض است.

مسائل

۱. اگر معادله دیفرانسیل

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰$$

تحت گروه (۱.۴) ناوردا باشد، آنگاه نشان دهید شرایط بی‌نهایت کوچک و وجود عامل انتگرال گیری $\mu(x,y)$ با تعریف:

$$\mu(x,y)=\frac{1}{\xi M+\eta N}.$$

معادل می‌باشند.

۲. اگر $\mu(x,y)$ عامل انتگرال گیری برای دو معادله

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \quad and \quad N(x,y)dx-M(x,y)dy=0$$

باشد، نشان دهید که $\Theta=\tan^{-1}(M/N)$ در معادله

$$\nabla^2\Theta=\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=0$$

صدق می‌کند.

۳. برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه اول شبه—خطی

$$a(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=c(x,y,z),$$

نشان دهید جواب عمومی آن بصورت:

$$\rho=\Phi(\sigma)$$

می‌باشد که در آن Φ تابعی دلخواه بوده و $\rho(x,y,z)$ و $\sigma(x,y,z)$ دو جواب مستقل خطی از معادلات

$$\frac{dx}{d\tau}=a(x,y,z), \quad \frac{dy}{d\tau}=b(x,y,z), \quad \frac{dz}{d\tau}=z(x,y,z).$$

هستند.

«راهنمایی: از $\rho=\text{constant}$ و $\sigma=\text{constant}$ داریم

$$\frac{d\rho}{d\tau}=a\rho_x+b\rho_y+c\rho_z=0,$$
$$\frac{d\sigma}{d\tau}=a\sigma_x+b\sigma_y+c\sigma_z=0,$$

که زیراندیس نشانگر مشق جزیی نسبت به متغیرهای مستقل x، y و z است. این دو معادله به همراه (٪) تشکیل سه معادله همگن برای a، b و c را می‌دهند. برای جوابهای نابدیهی دترمینان صفر می‌شود و این شرایط می‌توان نشان داد که بصورت:

$$\frac{\partial(\rho,\sigma)}{\partial(x,y)}=0,$$

است که از همین عبارت اخیر شرایط مورد نیاز بدست می آید. در ژاکوبین، مشقات جزیی نسبت به متغیرهای x و y خود مسقل‌اند، یعنی

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\rho_x+\rho_z\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial y}=\sigma_y+\sigma_x\frac{\partial z}{\partial y},$$

و ...».

۴. اگر $y_0(x)$ جواب معلومی از معادله ریکاتی

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)+r(x)y^2,$$

باشد، نشان دهید که غییر متغیر $y=y_0+w^{-1}$ آنرا به معادله خطی

$$\frac{dw}{dx}+[2r(x)y_0(x)-p(x)]w=-r(x).$$

تبدیل می‌کند.

۵. نشان دهید که فرم عمومی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی که تحت گروه

$$\xi(x,y)=\xi(x), \qquad \eta(x,y)=\eta(x)y+\zeta(x),$$

ناوردا هستند، بصورت

$$\frac{dy}{dx}-\frac{\eta(x)}{\xi(x)}y-\frac{\zeta(x)}{\xi(x)}=\frac{۱}{\xi(x)s(x)}, \qquad \Phi\Big(s(x)y-\int_{x_۰}^{x}\frac{\zeta(t)}{\xi(t)}s(t)dt\Big),$$

که در آن $s(x)$ بصورت

$$s(x)={}^{-\int_{x_۰}^{x}\frac{\eta(t)}{\xi(t)}dt},$$

تعریف شده و Φ تابعی دلخوه با آرگومانهای معلوم است، می‌باشد.

٦. با استفاده از ۲—(۱۵.۴) و (۱۸.۴) تغییر متغیر $w=\xi W$ را ساخته و معادله

$$\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big)\frac{dW}{dy}+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big)W=\frac{۱}{\xi^۲}\frac{\partial\xi}{\partial y}.$$

را نتیجه بگیرید.

۷. نشان دهید که فرم عمومی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی که نسبت به گروه

$$\xi(x,y)=\xi(x)y^{n-۱}, \qquad \eta(x,y)=\eta(x)y^{n},$$

ناوردا هستند بصورت

$$y\Big(\frac{dy}{dx}-\frac{\eta(x)}{\xi(x)}y\Big)^{-۱}=\frac{\xi(x)}{s(x)^{n-۱}}\Big\{(n-۱)\int_{x_۰}^{x}\frac{s(t)^{n-۱}}{\xi(t)}dt+\Phi[s(x)y]\Big\},$$

که در آن Φ تابعی دلخواه و $S(x)$ در مسئله ۵ تعریف شده است، می‌باشد و با استفاده از مختصات متعارف

$$u(x,y)=s(x)y, \qquad v(x,y)=\frac{۱}{y^{n-۱}s(x)^{n-۱}}\int_{x_۰}^{x}\frac{s(t)^{n-۱}}{\xi(t)}dt,$$

نشان دهید که معادله دیفرانسیل در این مختصات جدید بصورت

$$\frac{du}{dv}=\frac{u^n}{\Phi(u)}.$$

است.

۸. برای معادله ریکاتی داده شده در مسئله ۴، نشان دهیدکه تغییر متغیر

$$y(x)=-\frac{۱}{r(x)z(x)}\frac{dz}{dx},$$

به معادله

$$\frac{d^۲z}{dx^۲}+\Big(p(x)-\frac{۱}{r(x)}\frac{dr}{dx}\Big)\frac{dz}{dx}+q(x)r(x)z=۰.$$

منجر می‌شود و از آنجا فرم نرمال این معادله دیفرانسیل را بدست آورید.

۹. نشان دهید که معادله دیفرانسیل مسئله ۴ در گروه

$$\xi(x,y)=\xi(x), \qquad \eta(x,y)=\eta y+\zeta(x),$$

که توسط

$$\frac{d}{dx}(r\xi)=-r\eta, \qquad \frac{d}{dx}(p\xi+\eta)=۲r\zeta,$$

و

$$\frac{d}{dx}(q\eta-\zeta)=(p\zeta+q\eta).$$

تولید شده است، صدق می‌کند. و از این معادلات تنیجه می‌شود که $\xi(x)$ در معادله

$$(۲\xi\xi''-\xi'^{۲})+۴\Big\{qr-\frac{۱}{۲}\frac{d}{dx}\Big(p-\frac{۱}{۲}\frac{dr}{dx}\Big)-\frac{۱}{۴}\Big(p-\frac{۱}{r}\frac{dr}{dx}\Big)^{۲}\Big\}\xi^{۲}=C,$$

که در آن C ثابت است، صدق می‌کند. ایا می‌توانید این نتیجه را با نتایج بخش ۳.۳ تطبیق دهید.

«سه مسئله بعدی ضوابط دیکسون (۱۹۲۴) (صفحه۳۱۳) را برای ناوردایی معادله دیفرانسیل تحت گروه تبدیلات یک–پارامتری به طور خلاصه بیان می‌کند».

۱۰. نشان دهید که معادله دیفرانسیل مرتبه اول تحت گروه

$$x_۱=x+\varepsilon\xi(x,y)+O(\varepsilon^۲), \qquad y_۱=y+\varepsilon\eta(x,y)+O(\varepsilon^۲),$$

ناوردا است، اگر و تنها اگر

$$Lz=\Phi(z),$$

که در آن $z(x,y)$ جواب معادله دیفرانسیل و L عملگر

$$L=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y},$$

بوده و Φ تابع دلخواهی را نشان می‌دهد.

۱۱. معادله دیفرانسیل

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰,$$

و عملگر دیفرانسیلی P را که بصورت

$$P=N\frac{\partial}{\partial x}-M\frac{\partial}{\partial y}.$$

تعریف شده است را در نظر بگیرید، برای عملگر جابجاگر (LP) که بصورت

$$(LP)=LP-PL.$$

تعریف شده است گزاره‌های زیر را نشان دهید.

(i)

$$(LP)=(LN-P\xi)\frac{\partial}{\partial x}-(LM-P\eta)\frac{\partial}{\partial y}.$$

(ii) معادله دیفرانسیل (+) تحت گروه (++) ناورداست اگر عملگر جابجاگر (LP) بصورت حاصلضرب یک ثابت در عملگر P باشد.

۱۲. توسیع اول L، بصورت

$$L' = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \pi\frac{\partial}{\partial y'},$$

تعریف می‌شود، که در آن π بصورت،

$$\pi = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \Big(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)y' - \frac{\partial\xi}{\partial y}y'^{۲}.$$

است. نشان دهید که معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$F(x,y,y') = ۰,$$

تحت (++) ناورداست اگر و تنها اگر

$$L'F = ۰$$

«شش مسأله زیر به بخش ۴.۷ مربوط می‌شود».

۱۳. فرض کنید که

$$A = f(G), \qquad B = g(G)F^{-۱},$$

که در آن f و g توابعی وابسته به G هستند، نشان دهید که معادله (۴۷.۴) بصورت

$$f''(۱ + f/g) + f'(f/g)' = ۰,$$

که در آن علامت پریم مشتق نسبت به G را نشان می‌دهد، ساده می‌شود.این معادله را حل کرده و نشان دهید که $J = \alpha g$ که α که ثابت انتگرال گیری است. بنابراین از رابطهٔ (؟؟) نتیجه بگیرید

$$x = -\frac{۱}{\alpha}\log\Big(\frac{fF}{g}\Big) + \int_{G_۰}^{G}\frac{dt}{f(t)}, \qquad y = \frac{fF}{\alpha g} - \frac{\beta}{\alpha},$$

که β و $G_۰$ ثابتهای بعدی انتگرال گیری هستند. با استفاده از این نتایج نشان دهید در این حالت معادله دیفرانسیل اولیه (۲.۴) بشکل

$$\frac{dy}{dx} = (\alpha y + \beta)h[\alpha x + \log(\alpha y + \beta)],$$

برای تابع مناسب h با آرگومانهای مشخص است، می‌باشد. مشاهده می‌کنید این معادله می‌تواند با تغییر متغیر

$$\rho = \alpha x + \log(\alpha y + \beta).$$

حل شود.

۱۴. فرض کنید که $H(G,F)$ برابر صفر است، از (۴۴.۴) و (۴۷.۴) نشان دهید

$$B = \frac{\{l'(F)[(F)G + m(F)] - [l(F)m'(F) - m(F)l'(F)]\}}{۲l(F)[l(F)G + m(F)]^{۱/۲}}$$
$$C = [l(F)G + m(F)]^{۱/۲},$$

که در آن l، m و n توابع دلخواهی از F بوده و علامت پریم مشتق نسبت به F را نشان می‌دهد. نشان دهید $J = l(F)/۲$ و از روابط (؟؟) نتیجه بگیرید،

$$x = \frac{۲}{l(F)}[l(F)G + m(F)]^{۱/۲} + p(F), \qquad y = \frac{۲F}{l(F)}[(F)G + m(F)]^{۱/۲} + q(F),$$

که در آن $p(F)$ و $q(F)$ توابعی مناسبند. با فرض $s(F) = q(F) - Fp(F)$ نشان دهید در این حالت معادله دیفرانسیل اولیه (۲.۴) بصورت معادله کلورو است (مرفی (۱۹۶۰)، صفحه ٦٥ را ببینید).

$$y = x\frac{dy}{dx} + s\Big(\frac{dy}{dx}\Big),$$

که $y = \gamma x + s(\gamma)$ برای ثابت مناسب γ، جواب آن است.

۱۵. فرض کنید تابعی مانند $w(A,B)$ که ϕ و ψ در (۵۵.۴) بصورت

$$\phi = \frac{\partial w}{\partial B}, \qquad \psi = -\frac{\partial w}{\partial A},$$

تعریف شده‌اند، نشان دهید معادله (۵۴.۴) به معادله

$$\frac{\partial(\nabla^۲ w, G)}{\partial(A,B)} + \frac{\partial(\frac{\partial w}{\partial A}, \frac{\partial G}{\partial A})}{\partial(A,B)} + \frac{\partial(\frac{\partial w}{\partial B}, \frac{\partial G}{\partial B})}{\partial(A,B)} = ۰,$$

که لاپلاسین $\nabla^۲$ بصورت

$$\nabla^۲ = \frac{\partial^۲}{\partial A^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial B^۲}$$

تعریف شده است، تبدیل می‌شود. نشان دهید (//) به صورت متفاوت

$$\nabla^۲ \frac{\partial(w,G)}{\partial(A,B)} = \frac{\partial(w, \nabla^۲ G)}{\partial(A,B)} - \frac{\partial(\nabla^۲ w, G)}{\partial(A,B)}.$$

نیز می‌توان نوشت.

۱۶. از (۵۵.۴) و (/) نتیجه بگیرید $w(A,B)$ در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه اول

$$A\frac{\partial w}{\partial B} - B\frac{\partial w}{\partial A} = ۱,$$

صدق می‌کند. و بنابراین

$$w = \tan^{-۱}(B/A) + f[(A^۲ + B^۲)^{۱/۲}],$$

که در آن f تابعی دلخواه با آرگومانهای مشخص است. با تعریف مختصات قطبی

$$R = (A^۲ + B^۲)^{۱/۲}, \qquad \Theta = \tan^{-۱}(B/A),$$

نشان دهید

$$F = [B - Ag(R)]/[A + Bg(R)],$$

که در آن $g(R) = Rf'(R)$ و علامت پریم مشتق نسبت به R را نشان می‌دهد.

۱۷. در مختصات (r,Θ) مشاهده می‌شود که (///) از مسئله ۱۵ به معادله

$$\nabla^۲ \frac{۱}{R}\frac{\partial(w,G)}{\partial(R,\Theta)} = \frac{۱}{R}\Big\{\frac{\partial(w,\nabla^۲ G)}{\partial(R,\Theta)} - \frac{\partial(\nabla^۲ w, G)}{\partial(R,\Theta)}\Big\},$$

که در آن $\nabla^۲$ بصورت

$$\nabla^۲ = \frac{\partial^۲}{\partial R^۲} + \frac{۱}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{۱}{R^۲}\frac{\partial^۲}{\partial \Theta^۲}.$$

تعریف شده است، تبدیل می‌شود. با استفاده از $w = \Theta + f(R)$ نشان دهید معادله (////) به

$$\frac{\partial^۲ G}{\partial R^۲} - \frac{۱}{R}\frac{\partial G}{\partial R} - \frac{۱}{R^۲}\frac{\partial^۲ G}{\partial \Theta^۲} + \frac{\partial}{\partial R}\Big\{\Big(g' - \frac{۲g}{R}\Big)\frac{\partial G}{\partial \Theta}\Big\} = ۰,$$

که در آن $g(R)$ در مسئله ۱۶ تعریف شده است.

۱۸.   با فرض $G=R^{۲}$ و $h(G)\equiv g(G^{۱/۲})$ نشان دهید

$$A=\frac{G^{۱/۲}[۱-Fh(G)]}{\{[۱+F^{۲}][۱+h(G)^{۲}]\}^{۱/۲}},\qquad B=\frac{G^{۱/۲}[F+h(G)]}{\{[۱+F^{۲}][۱+h(G)^{۲}]\}^{۱/۲}}.$$

در این صورت نشان دهید $J=(۱+F^{۲})/۲$ و روابط (؟؟) جدا از انتخاب ثابتهای دلخواه، نتیجه می‌شوند.

$$x=\frac{۲G^{۱/۲}[۱-Fh(G)]}{\{[۱+F^{۲}][۱+h(G)^{۲}]\}^{۱/۲}},\qquad y=\frac{۲G^{۱/۲}[F+h(G)]}{\{[۱+F^{۲}][۱+h(G)^{۲}]\}^{۱/۲}}.$$

بنابراین در این حالت معادله دیفرانسیل (۲.۴) به معادله

$$\frac{dy}{dx}=\Big\{\frac{y-xg[(x^{۲}+y^{۲})^{۱/۲}/۲]}{x+yg[(x^{۲}+y^{۲})^{۱/۲}/۲]}\Big\},$$

که در مختصات قطبی به آسانی قابل حل است، تبدیل می‌شود (مرفی (۱۹٦۰)، صفحه (٦۷) را ببینید).

۱۹.   برای گروه یک—پارامتری داده شده

$$x_{۱}=x+\varepsilon\xi(x,y)+O(\varepsilon^{۲}),\qquad y_{۱}=y+\varepsilon\eta(x,y)+O(\varepsilon^{۲})$$

نشان دهید

$$\begin{aligned}&y_{۱}(x_{۱}-x_{\circ})=y(x-x_{\circ})\\&+\varepsilon\Big\{[\xi(x,y)-\xi(x-x_{\circ},y(x-x_{\circ}))]\frac{dy}{dx}(x-x_{\circ})+\eta(x-x_{\circ},y(x-x_{\circ}))\Big\}+O(\varepsilon^{۲}).\end{aligned}$$

«این نتیجه را به دو روش جدا از هم می‌توان بدست آورد»

(i) فرض کنید $y=S(x,C)$ و $y_{۱}=S(x_{۱},C+\varepsilon)$ آنگاه $y(x-x_{\circ})=S(x-x_{\circ},C)$ و

$$\begin{aligned}y_{۱}(x_{۱}-x_{\circ})&=S(x_{۱}-x_{\circ},C+\varepsilon),\\&=S(x-x_{\circ},C)+\varepsilon\xi(x,y),C+\varepsilon)+O(\varepsilon^{۲}),\\&=S(x-x_{\circ},C)+\varepsilon\Big\{\xi(x,y)\Big(\frac{\partial S}{\partial x}\Big)+\Big(\frac{\partial S}{\partial C}\Big)\Big\}+O(\varepsilon^{۲}),\\y(x-x_{\circ})&=\varepsilon\Big\{\xi(x,y)\frac{dy}{dx}(x-x_{\circ})+\Big(\frac{\partial S}{\partial C}\Big)\Big\}+O(\varepsilon^{۲}),\end{aligned}$$

که مشتق جزیی S نسبت به C دارای آرگومانهای $x-x_{\circ}$ و C است که آن را می‌توان از (۲۷.۴) بصورت

$$\Big(\frac{\partial S}{\partial C}\Big)=\eta(x-x_{\circ},y(x-x_{\circ}))-\xi(x-x_{\circ},y(x-x_{\circ}))\frac{dy}{dx}(x-x_{\circ}),$$

بدست آورد که نتایج مطلوب مسأله را نتیجه می‌دهد.

(ii) به روش متفاوت داریم

$$y(x-x_{\circ})=e^{-x_{\circ}d/dx}y(x),$$

و بایست رابطه زیر را بیابیم.

$$y_{۱}(x_{۱}-x_{\circ})=e^{-x_{\circ}d/dx_{۱}}y_{۱}(x_{۱}).$$

از

$$x=x_{۱}-\varepsilon\xi(x_{۱},y_{۱})+O(\varepsilon^{۲}),$$

داریم،

$$dx = dx_۱\Big\{۱ - \varepsilon\Big(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\Big)\Big\} + O(\varepsilon^۲).$$

و بنابراین

$$\frac{d}{dx_۱} = \Big\{۱ - \varepsilon\Big(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\Big)\Big\}\frac{d}{dx} + O(\varepsilon^۲).$$

پس اگر عملگرهای دیفرانسیلی $D_۱$ و $D_۲$ را بصورت

$$D_۱ = \frac{d}{dx}, \qquad D_۲ = -\Big(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\Big)\frac{d}{dx}$$

تعریف کنیم، آنگاه بایست رابطه زیر را ارزیابی کنیم.

$$y_۱(x_۱ - x_\circ) = e^{-x_\circ(D_۱+\varepsilon D_۲)}[y + \varepsilon\eta(x,y)] + O(\varepsilon^۲).$$

گروبنر و نپ (۱۹۶۷) در صفحه (۴۰) فرمولهایی برای عملگرهایی از این دست ارائه می‌دهند. مشاهده می‌کنیم که،

$$e^{-x_\circ D_۱}x = x - x_\circ, \qquad e^{-x_\circ D_۱}y = y(x - x_\circ),$$

و

$$D_۲y(x+\tau) = -\frac{d\xi}{dx}(x,y)\frac{dy}{dx}(x+\tau).$$

برای محاسبه جملات بر حسب ε بر اساس

$$e^{-x_\circ(D_۱+\varepsilon D_۲)}y,$$

از جوابهای داده شده در گروبنر و نپ (۱۹۶۷)(۴۰) استفاده می‌کنیم. داریم

$$e^{-x_\circ(D_۱+\varepsilon D_۲)}y = y(x-x_\circ) + \varepsilon\int_\circ^{-x_\circ}[D_۲y(x+\tau)]^*d\tau + O(\varepsilon^۲),$$

که «ستاره» در انتگرال نشان می‌دهد که (x,y) در کروشه به $(x - x_\circ - \tau, y(x - x_\circ - \tau))$ تبدیل می‌شود. اگر در انتگرال تغییر متغیر

$$\rho = x - x_\circ - \tau$$

را بدهیم آنگاه داریم،

$$e^{-x_\circ(D_۱+\varepsilon D_۲)}y = y(x-x_\circ) + \varepsilon\int_{x-x_\circ}^{x}\frac{d\xi}{d\rho}(\rho.y(\rho))\frac{dy}{dx}(x-x_\circ)d\rho + O(\varepsilon^۲),$$

و بنابراین

$$e^{-x_\circ(D_۱+\varepsilon D_۲)}y = y(x-x_\circ) + \varepsilon\frac{dy}{dx}((x-x_\circ)\Big[\xi(x,y) - \xi(x-x_\circ, y(x-x_\circ))\Big] + O(\varepsilon^۲).$$

و نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود، در واقع

$$x_۱ - x_\circ = e^{-(D_۱+\varepsilon D_۲)}\varepsilon\eta(x-x_\circ, y(x-x_\circ)) + O(\varepsilon^۲).$$

و توجه کنید که می‌توانیم اعتبار روش دوم را بوسیله انتگرالهایی که در گروبنر و نپ (۱۹۶۷) ارائه شده است، با ارزیابی

$$x_۱ - x_\circ = e^{-x_\circ(D_۱+\varepsilon D_۲)}[x + \varepsilon\xi(x,y)] + O(\varepsilon^۲).$$

بررسی کنیم. با ادامه روند بالا بدست می آوریم

$$x_۱ - x_\circ = x - x_\circ + \varepsilon\xi(x,y) + O(\varepsilon^۲),$$

که همان نتیجه مورد نظر است.

۲۰. نشان دهید که گروه‌های یک—پارامتری که

$$x_1 = x + \varepsilon\xi(x) + O(\varepsilon^2), \qquad y_1 = y + \varepsilon\eta(x)y + O(\varepsilon^2)$$

نسبت به معادلات زیر ناوردا هستند،

(i)

$$\frac{dy}{dx}(x) = -y(x - x_0),$$

(ii)

$$\frac{dy}{dx}(x) = y(x)[1 - y(x - x_0)],$$

(iii)

$$\frac{dy}{dx}(x) = y(x)[y(x) - y(x - x_0)],$$

بترتیب عبارتند از،

(i)

$$x_1 = x + \alpha\varepsilon, \qquad y_1 = e^{\beta\varepsilon}y,$$

(ii)

$$x_1 = x + \varepsilon, \qquad y_1 = y,$$

(iii)

$$x_1 = e^{-\alpha\varepsilon}x + \beta\alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha\varepsilon}), \qquad y_1 = e^{\alpha\varepsilon}y,$$

که α و β ثابتهای دلخواهی هستند. آیا از این گروهها برای حل یا ساده‌تر کردن این معادلات استفاده کنیم. «توجه کنید، در واقع

$$y(x - x_0) = e^{-x_0 d/dx}y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x_0)^n}{n!}y^{(n)}(x),$$

معادلات دیفرانسیل—تفاضلی معادلاتی دیفرانسیل از مرتبه متناهی هستند.»

فصل ۵

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

۱.۵ مقدمه

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول می‌توانند تحت تعداد نامتناهی گروه یک—پارامتری ناوردا باشند در حالی که معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر تحت حداکثر متناهی گروه ناوردا هستند. معادلات از مرتبه دوم تحت حداکثر هشت و برای $n > 2$ معادلات دیفرانسیل از مرتبه n ام می‌توانند تحت حداکثر $n+4$ گروه ناوردا باشند (دیکسون (۱۹۲۴)، صفحه ۳۵۳ را ببینید). معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر که تحت گروهی یک—پارامتری ناوردا هستند را می‌توان با روشی سیستماتیک به معادله‌ای مرتبه اول تحویل کرد. اغلب کتب به عامترین معادله دیفرانسیل ناوردا تحت گروه داده شده پرداخته و جداولی ارائه می‌کنند که به خواننده توصیه می‌شود که مطالعاتی درباره این جداول استاندارد انجام دهد (بعنوان مثال به دیکسون (۱۹۲۴)، صفحه ۳۴۹). در بخش آتی شرایط (؟؟) را که به ناوردایی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم تحت گروه داده شده می‌پردازیم. و در بخش بعدی این شرایط را برای برخی از مثالها بررسی می‌کنیم. در بخش‌های بعدی این فصل در طی مثالهایی به بررسی روش یافتن عامترین معادله ناوردا تحت گروه داده شده خواهیم پرداخت که برای روشن شدن مباحث عمومی این فصل در بخش نهایی مثالهایی از صنعت هسته‌ای را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۲.۵ مدل بی‌نهایت کوچک y'' و $y'' = F(x,y,y')$

در این بخش معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\Big(x, y, \frac{dy}{dx}\Big), \tag{۱.۵}$$

را در نظر گرفته و بدنبال گروهِ یک—پارامتری، بشکل

$$x_1 = x + \varepsilon\xi(x,y) + O(\varepsilon^2), \qquad y_1 = y + \varepsilon\eta(x,y) + O(\varepsilon^2), \tag{۲.۵}$$

هستیم که معادله (۱.۵) را ناوردا می‌کند. در سرتاسر این فصل نماد

$$z = \frac{dy}{dx}, \tag{۳.۵}$$

را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

بر اساس نتایج فصل قبل داریم،

$$z_1 = z + \varepsilon\pi(x,y,z) + O(\varepsilon^2), \tag{۴.۵}$$

که $\pi(x,y,z)$ بصورت زیر تعریف شده است:

$$\pi = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \Big(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)z - \frac{\partial\xi}{\partial y}z^2. \tag{۵.۵}$$

بمنظور محاسبه مدل بی‌نهایت کوچک y'' بصورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{d^{2}y_{1}}{dx_{1}^{2}}&=\frac{d}{dx}\Big(\frac{dy_{1}}{dx_{1}}\Big)\frac{dx}{dx_{1}}\\&=\Big\{\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+\varepsilon\Big(\frac{\partial\pi}{\partial x}+\frac{\partial\pi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\pi}{\partial z}\frac{dz}{dx}\Big)\Big\}\Big\{1-\varepsilon\Big(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\Big)\Big\}+O(\varepsilon^{2}),\end{aligned}$$

و در نتیجه داریم:

$$\frac{d^{2}y_{1}}{dx_{1}^{2}}=\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+\varepsilon\Big\{\Big(\frac{\partial\pi}{\partial x}+\frac{\partial\pi}{\partial y}z+\frac{\partial\pi}{\partial z}\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\Big)-\Big(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}z\Big)\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\Big\}+O(\varepsilon^{2}), \qquad (6.5)$$

اگر (۱.۵) نسبت به (۲.۵) ناوردا باشد، آنگاه با استفاده از

$$F(x_{1},y_{1},z_{1})=F(x,y,z)+\varepsilon\Big(\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial y}+\pi\frac{\partial F}{\partial z}\Big)+O(\varepsilon^{2}),$$

و از (۱.۵) و (۶.۵) شرایط ناوردایی (۱.۵) نسبت به گروه (۲.۵)، یعنی

$$\Big(\frac{\partial\pi}{\partial x}+\frac{\partial\pi}{\partial y}z+\frac{\partial\pi}{\partial z}F\Big)-\Big(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}z\Big)F=\Big(\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial y}+\pi\frac{\partial F}{\partial z}\Big). \qquad (7.5)$$

نتیجه می‌شود و اگر F شامل توانی از z باشد، آنگاه با برابر قرار دادن ضرایب توانی z در (۷.۵) می‌توانیم، η و ξ را بدست آوریم. با استفاده از (۵.۵) می‌بینیم که معادله (۷.۵) به معادله

$$\begin{aligned}&\Big\{\frac{\partial^{2}\eta}{\partial x^{2}}+\Big(\frac{\partial\eta}{\partial y}-2\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)F-\xi\frac{\partial F}{\partial x}-\eta\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\Big\}\\&+\Big\{2\frac{\partial^{2}\eta}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^{2}\xi}{\partial x^{2}}-3F\frac{\partial\xi}{\partial y}-\Big(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)\frac{\partial F}{\partial z}\Big\}z\\&+\Big\{\frac{\partial^{2}\eta}{\partial y^{2}}-2\frac{\partial^{2}\xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\Big\}z^{2}-\frac{\partial^{2}\xi}{\partial y^{2}}z^{3}\\&=0. \end{aligned}\qquad (8.5)$$

تبدیل می‌شود. در بخش بعدی با مثالی به تشریح چگونگی محاسبه جوابهای (؟؟)، یعنی $\eta(x,y)$ و $\xi(x,y)$ می‌پردازیم.

۳.۵ مثالهایی از تعیین توابع $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$

۱.۳.۵ مثال. نشان دهید اگر $F(x,y,y')$ مستقل از y' باشد، آنگاه $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$ بشکل زیر هستند.

$$\xi(x,y)=\rho(x)y+\xi(x),\qquad \eta(x,y)=\rho'(x)y^{2}+\eta(x)y+\zeta(x). \qquad (9.5)$$

اگر $F(x,y,z)$ از z مستقل باشد، آنگاه (؟؟) به معادله

$$\begin{aligned}&\Big\{\frac{\partial^{2}\eta}{\partial x^{2}}+\Big(\frac{\partial\eta}{\partial y}-2\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)F-\xi\frac{\partial F}{\partial x}-\eta\frac{\partial F}{\partial y}\Big\}\\&+\Big\{2\frac{\partial^{2}\eta}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^{2}\xi}{\partial x^{2}}-3F\frac{\partial\xi}{\partial y}\Big\}z\\&+\Big\{\frac{\partial^{2}\eta}{\partial y^{2}}-2\frac{\partial^{2}\eta}{\partial x\partial y}\Big\}z^{2}-\frac{\partial^{2}\xi}{\partial y^{2}}z^{3}\\&=0,\end{aligned}\qquad (10.5)$$

تبدیل می‌شود. حال از ضرایب $z^۲$ و $z^۳$ داریم

$$\frac{\partial^۲\eta}{\partial y^۲}-۲\frac{\partial^۲\xi}{\partial x\partial y}=۰,\qquad \frac{\partial^۲\xi}{\partial y^۲}=۰,$$

و بسهولت (۹.۵) نتیجه می‌شود. همچنین با دقت به ضرایب z و $z^۰$ داریم:

$$\begin{aligned}&۳\rho(x)F=۳\rho''(x)y+[۲\eta'(x)-\xi'']\\&[\rho(x)y+\xi(x)]\frac{\partial F}{\partial x}+[\rho'(x)y^۲+\eta(x)y+\zeta(x)]\frac{\partial F}{\partial y}\\&=[\eta(x)-۲\xi'(x)]F+[\rho'''(x)y^۲+\eta''(x)y+\zeta''(x)],\end{aligned}\qquad (۱۱.۵)$$

پس یا $\rho(x)$ با صفر برابر بوده و $۲\eta'(x)=\xi''(x)$ و $F(x,y)$ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی

$$\xi(x)\frac{\partial F}{\partial x}+[\eta(x)y+\zeta(x)]\frac{\partial F}{\partial y}=[\eta(x)-۲\xi'(x)]F+[\eta''(x)y+\zeta''(x)]$$

است یا اینکه $\rho(x)$ مخالف صفر است که در این حالت $F(x,y)$ می‌بایست تابعی خطی از y باشد(مسائل ۱ و ۲ را ببینید).

۲.۳.۵ مثال. نشان دهید $y''=۰$ دقیقاً تحت ۸ گروه یک–پارامتری ناوردا است.

از (؟؟) با F برابر صفر، داریم،

$$\frac{\partial^۲\eta}{\partial x^۲}+\Big(۲\frac{\partial^۲\eta}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^۲\xi}{\partial x^۲}\Big)z+\Big(\frac{\partial^۲\eta}{\partial y^۲}-۲\frac{\partial^۲\xi}{\partial x\partial y}\Big)z^۲-\frac{\partial^۲\xi}{\partial y^۲}z^۳=۰,\qquad (۱۲.۵)$$

و همچنانکه در مثال قبلی نتیجه شد $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$ بایست بشکل (۹.۵) باشند. از ضرایب z و $z^۰$ در (۱۲.۵) و (۹.۵) نتیجه می‌گیریم:

$$\xi''(x)=۲\eta'(x),\qquad \rho''(x)=\eta''(x)=\zeta''(x)=۰,$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}&\rho(x)=C_۱x+C_۲,\qquad \xi(x)=C_۳x^۲+C_۴+C_۵,\\&\eta(x)=C_۳x+C_۶,\qquad \zeta(x)=C_۷x+C_۸,\end{aligned}$$

که $C_۱$، $C_۲$،...،$C_۸$ ثابتهای دلخواهند. هر کدام از این ثابتها گروهی یک–پارامتری که نسبت به معادله $y''=۰$ ناوردا است را بدست می‌دهد. بعنوان مثال به بررسی گروه تولید شده توسط $C_۳$ با فرض $C_۳=۱$ و صفر بودن ثابتهای دیگر، می‌پردازیم. از

$$\frac{dx_۱}{d\varepsilon}=x_۱^۲,\qquad \frac{dy_۱}{d\varepsilon}=x_۱y_۱,$$

و $x_۱=x$، $y_۱=y$ در $\varepsilon=۰$ به گروه یک–پارامتری با شکل عمومی بصورت:

$$x_۱=\frac{x}{(۱-\varepsilon x)},\qquad y_۱=\frac{y}{(۱-\varepsilon x)}.$$

دست می‌یابیم و داریم،

$$\frac{dy_۱}{dx_۱}=(۱-\varepsilon x)\frac{dy}{dx}+\varepsilon y,\qquad \frac{d^۲y_۱}{dx_۱^۲}=(۱-\varepsilon x)^۳\frac{d^۲y}{dx^۲},$$

بوضوح معادله $y''=۰$ تحت این گروه ناوردا است.

۳.۳.۵ مثال. نشان دهید معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=xy+\exp\Big(\frac{dy}{dx}\Big)$$

تحت هیچ گروه یک—پارامتری ناوردا نیست.

با فرض $F = xy + e^z$ می‌بینیم که معادله (؟؟) به

$$\Big\{\frac{\partial^۲\eta}{\partial x^۲} + xy\Big(\frac{\partial\eta}{\partial y} - ۲\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big) - y\xi - x\eta\Big\} + \Big\{۲\frac{\partial^۲\eta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^۲\xi}{\partial x^۲} - ۳xy\frac{\partial\xi}{\partial y}\Big\}z$$
$$+\Big\{\frac{\partial^۲\eta}{\partial y^۲} - ۲\frac{\partial^۲\xi}{\partial x\partial y}\Big\}z^۲ - \frac{\partial^۲\xi}{\partial y^۲}z^۳$$
$$= e^z\Big\{\Big(۲\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\Big) + \Big(۳\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)z - \frac{\partial\xi}{\partial y}z^۲\Big\}.$$

تبدیل می‌شود. از جملاتی که شامل e^z هستند، داریم

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = ۰, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = -\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

در نتیجه: $\xi(x,y) = C_۱x + C_۲$ و $\eta(x,y) = C_۱(y-x) + C_۳$، که $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ ثابتهای دلخواه هستند. از طرفی از ضرایب $z^۰$ در جملاتی که شامل e^z نیستند، داریم

$$-C_۱xy = y(C_۱x + C_۲) + [C_۱(y-x) + C_۳],$$

که آن بوضوح در صورتی برقرار است که، $C_۱ = C_۲ = C_۳ = ۰$. پس هیچ گروه یک—پارامتری که معادله را ناوردا کند، وجود ندارد.

۴.۳.۵ مثال. شکل کلی گروه یک—پارامتری را بدست آورید که معادله مرتبه دوم،

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} + p(x)y = ۰. \qquad (۱۳.۵)$$

نسبت به آن ناوردا باقی بماند.

مطابق مثال ۵.۱، و از $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$ داده شده در (۹.۵) و (؟؟) با فرض $F(x,y) = -p(x)y$، نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned}
&\rho''(x) + p(x)\rho(x) = ۰,\\
&۲\eta'(x) = \xi''(x), \qquad \eta''(x) + p'(x)\xi(x) + ۲p(x)\xi'(x) = ۰,\\
&\zeta''(x) + p(x)\zeta(x) = ۰,
\end{aligned} \qquad (۱۴.۵)$$

پس معادله دیفرانیسل مورد نظر تحت ۸ گروه یک—پارامتری ناوردا است. توجه کنید که به گروههای یک—پارامتری تولید شده توسط η و ξ در بخش ۳.۳ پرداخته‌ایم. گروهی که از ζ ناشی می‌شود، صرفاً ناوردایی (۱۳.۵) تحت جمع هر جواب (۱۳.۵) با y را منعکس می‌کند. برای این گروه مختصات متعارف مناسب بصورت

$$u(x,y) = \frac{y}{\rho(x)}, \qquad v(x,y) = \frac{\rho(x)}{y}\int_{x_۰}^{x}\frac{dt}{\rho(t)^۲},$$

است و داریم

$$\frac{du}{d(uv)} = \rho(x)\frac{dy}{dx} - \rho'(x)y.$$

پس با استفاده از (۱۳.۵) و ۱—(؟؟) بدست می‌آوریم که

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{du}{d(uv)}\Big) = \rho(x)\frac{d^۲y}{dx^۲} - \rho''(x)y = ۰,$$

و بنابراین داریم

$$u = C_۱uv + C_۲,$$

که $C_۱$ و $C_۲$ ثابتند. بسهولت از این معادله نتیجه می‌گیریم

$$y = C_۱\rho(x)\int_{x_۰}^{x}\frac{dt}{\rho(t)^۲} + C_۲\rho(x),$$

که این نتیجهٔ شناخته شده از جواب عمومی معادله (۱۳.۵) است.

همچنین اشاره به این نکته که در معادله ۲—(؟؟) قرار دادن ($\xi = ۰$ و $\eta(x) = ۱$) گروه

$$x_۱ = x, y_۱ = e^{\varepsilon}y,$$

که ناوردایی همه معادلات خطی همگن تحت امتداد دادنِ y را منعکس می‌کند، بدست می‌دهد، ارزشمند خواهد بود. در این حالت، مختصات متعارف مناسب بشکل

$$u(x, y) = x, \qquad v(x, y) = \log y$$

است و با تعریف $w(u)$ بصورت

$$w(u) = \frac{dv}{du},$$

معادله (۱۳.۵) به معادله دیفرانسیل ریکاتی

$$\frac{dw}{du} + w^۲ + p(u) = ۰.$$

تبدیل می‌شود (مرفی (۱۹۶۰)، صفحه ۱۵ را ببینید).

۴.۵ تعیین شکل کلی معادلات دیفرانسیلی که تحت گروه داده شده ناوردا هستند

با تعاریف و نمادهای بخش ۲.۵ برای $\xi(x, y)$ و $\eta(x, y)$ داده شده فرض کنید، دو ناوردای مستقل $A(x, y)$ و $B(x, y, z)$ از معادله مشخصه

$$\frac{dx}{d\tau} = \xi(x, y), \qquad \frac{dy}{d\tau} = \eta(x, y), \frac{dz}{d\tau} = \pi(x, y, z), \tag{۱۵.۵}$$

که $\pi(x, y, z)$ در (۵.۵) تعریف شده‌اند، را داریم. این واقعیت که معادله دیفرانسیل

$$\frac{dB}{dA} = \Phi(A, B), \tag{۱۶.۵}$$

که در آن Φ تابع دلخواه با آرگومانهای مشخص است، عام‌ترین معادله‌ای است که تحت این گروه ناوردا می‌باشد، اساسی‌ترین نتیجه تعیین شکل کلی معادلات ناوردا نسبت به گروه معین می‌باشد. بوضوح معادله (۱۶.۵) مرتبه دوم بوده و تحت گروه داده شده ناوردا است. بررسی اینکه معادله‌ای عام‌تر از معادلهٔ (۱۶.۵) و ناوردا نسبت به گروه داده شده نداریم، را در مسئله ۵ به خواننده واگذار می‌کنیم.

همچنین می‌بایست دقت کنیم که معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^۲B}{dA^۲} = \Psi(A, B, \frac{dB}{dA}), \tag{۱۷.۵}$$

که Ψ تابع دلخواه است، عامترین معادله مرتبه سوم ناوردا نسبت به گروه داده شده است.

۱.۴.۵ مثال. عامترین معادله دیفرانسیل ناوردا تحت گروه

$$x_۱ = f(x), \qquad y_۱ = g(x)y,$$

را بدست آورید و بعد از آن عامترین معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی تحت این گروه ناوردا را بدست آورید.

از مثال ۴.۳ بسهولت بدست می‌آوریم

$$A = s(x)y, \qquad B = s(x)[\xi(x)z - \eta(x)y], \tag{۱۸.۵}$$

که $s(x)$، $\eta(x)$ و $\xi(x)$ قبلاً تعریف شده‌اند. اکنون از معادله

$$\frac{dB}{dA} = \frac{\left\{\xi(x)\frac{d^2y}{dx^2} + (\xi'(x) - 2\eta(x))\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\eta(x)^2}{\xi(x)} - \eta'(x)\right)y\right\}}{\frac{dy}{dx} - \frac{\eta(x)}{\xi(x)}y} \tag{۱۹.۵}$$

و یکی کردن مخرج (۱۹.۵) با تابع دلخواه از (۱۶.۵)، معادله مرتبه دوم مورد نیاز را بصورت:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \Big(\frac{\xi'(x)}{\xi(x)} - 2\frac{\eta(x)}{\xi(x)}\Big)\frac{dy}{dx} + \Big(\frac{\eta(x)^2}{\xi(x)^2} - \frac{\eta'(x)}{\xi(x)}\Big)y = \frac{\Phi_1(A,B)}{s(x)\xi(x)^2}, \tag{۲۰.۵}$$

که Φ_1 تابعی دلخواه بوده و A و B در (۱۸.۵) تعریف شده‌اند، بدست می‌آوریم.

شکل کلی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن خطی ناوردا که تحت گروه داده شده با فرض $\Phi_1(A,B)$ بصورت:

$$\Phi_1(A,B) = \alpha A + \beta B, \tag{۲۱.۵}$$

که α و β ثابتند، بدست می‌آید. از (۱۸.۵)، (۲۰.۵) و (؟؟) می‌بینیم که معادلهٔ اخیر به معادله

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = 0,$$

که در آن $a(x)$ و (x) بصورت

$$a(x) = \frac{1}{\xi(x)}\{\xi'(x) - 2\eta(x) - \beta\},$$
$$b(x) = \frac{1}{\xi(x)^2}\{\eta(x)^2 - \xi(x)\eta'(x) - \alpha + \beta\eta(x)\},$$

تعریف شده‌اند، تبدیل می‌شود که با حذف $\eta(x)$ از دو معادله اخیر بدست می‌آوریم:

$$\frac{1}{4}(2\xi\xi'' - \xi'^2) + \xi^2\left(b(x) - \frac{1}{2}\frac{da}{dx} - \frac{a(x)^2}{4}\right) = \alpha - \frac{\beta^2}{4}.$$

بنابراین این نتیجه با نتیجه بدست آمده در فصل سوم سازگار است (مسئله ۸ از فصل ۳ قسمت i را ببینید).

۲.۴.۵ مثال. شکل کلی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ناوردا تحت گروه

$$\xi(x,y) = \xi(x)e^{ky}, \qquad \eta(x,y) = \eta(x)e^{ky},$$

که k ثابت است، را بیابید.

از مثال ۴.۴ می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\begin{aligned} A &= y + \log s(x),\\ B &= e^{-ky}\Big\{\Big(\xi(x)\frac{dy}{dx} - \eta(x)\Big)^{-1} - \frac{k}{s(x)^k}\int_{x_0}^{x}\frac{s(t)^k}{\xi(t)}dt\Big\}, \end{aligned} \tag{۲۲.۵}$$

که $s(x)$ همان تعریف قبل را دارد. با مشق‌گیری می‌توانیم نشان دهیم،

$$\frac{dB}{dA} = \frac{-\xi(x)^2e^{-ky}}{(\xi(x)dy/dx - \eta(x))^3}\Big\{\frac{d^2y}{dx^2} + k\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 + \Big(\frac{\xi'(x)}{\xi(x)} - k\frac{\eta(x)}{\xi(x)}\Big)\frac{dy}{dx} - \frac{\eta'(x)}{\xi(x)}\Big\} - kB$$

بنابراین معادله مورد نیاز بصورت،

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+k\Big(\frac{dy}{dx}\Big)+\Big(\frac{\xi'(x)}{\xi(x)}-k\frac{\eta(x)}{\xi(x)}\Big)\frac{dy}{dx}=\frac{\eta'(x)}{\xi(x)}+\frac{e^{ky}}{\xi(x)^{2}}\Big(\xi(x)\frac{dy}{dx}-\eta(x)\Big)^{3}\Phi_{1}(A,B) \tag{۲۳.۵}$$

که Φ_1 تابع دلخواه بوده و A و B در (۲۲.۵) تعریف شده‌اند، بدست می آید. معادله دیفرانسیل بشکل معادله (۲۳.۵) می‌تواند به معادله‌ای از مرتبه اول بشکل

$$\frac{dB}{dA}+kB+\Phi_{1}(A.B)=0.$$

تحویل شود.

۳.۴.۵ مثال. شکل کلی معادله دیفرانسیل بشکل:

$$\frac{d^{3}y}{dx^{3}}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0, \tag{۲۴.۵}$$

را که تحت گروه داده شده در مثال ۵.۵ ناوردا است را بیابید.

با نمادهای بکار رفته در مثال ۵.۵، از (۱۸.۵) و (۱۹.۵) داریم،

$$B\frac{dB}{dA}=s(x)\Big\{\xi(x)^{2}\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+(\xi(x)\xi'(x)-2\xi(x)\eta(x))\frac{dy}{dx}+(\eta(x)^{2}-\xi(x)\eta'(x))y\Big\}.$$

که با مشتق‌گیری از این معادله نسبت به A و با ضرب عبارت حاصل در B بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}B\Big\{B^{2}\frac{d^{2}B}{dA^{2}}+\Big(\frac{dB}{dA}\Big)^{2}\Big\}&=s(x)\Big\{\xi(x)^{3}\frac{d^{3}y}{dx^{3}}+3\xi(x)^{2}(\xi'(x)-\eta(x))\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\\&+\xi(x)(\xi'(x)^{2}+\xi(x)\xi''(x)+3\eta(x)^{2}-3\eta(x)\xi'(x)-3\xi(x)\eta'(x))\frac{dy}{dx}\\&+(3\xi(x)\eta(x)\eta'(x)-\xi(x)^{2}\eta''(x)-\xi(x)\xi'(x)\eta'(x)-\eta(x)^{3})y\Big\}.\end{aligned}$$

که در نتیجه عامترین معادله مرتبه سوم ناوردا تحت گروه داده شده با برابر قرار دادن طرف راست این عبارت و $\Psi_1(A,B,dB/dA)$ بدست می آید. شکل کلی معادله دیفرانسیل خطی از رابطه

$$\Psi_{1}(A,B,\frac{dA}{dB})=\alpha A+\beta B+\gamma B\frac{dB}{dA},$$

که α، γ و β ثابت هستند، بدست می آید. بمنظور بدست آوردن معادله (۲۴.۵)، با فرض $\eta(x)=\xi'(x)-\gamma/3$، به نتیجه

$$\begin{aligned}p(x)&=\frac{(\xi'^{2}-2\xi\xi'')}{\xi^{2}}-\frac{1}{\xi^{2}}\Big(\beta+\frac{\gamma^{2}}{3}\Big),\\q(x)&=\frac{(2\xi\xi'\xi''-\xi^{2}\xi'''-\xi'^{3})}{\xi^{3}}+\frac{\xi'}{\xi^{3}}\Big(\beta+\frac{\gamma^{2}}{3}\Big)-\frac{1}{\xi^{3}}\Big(\alpha+\frac{\beta\gamma}{3}+\frac{2\gamma^{3}}{27}\Big).\end{aligned}$$

دست می‌یابیم و بنابراین معادله مورد نظر بشکل:

$$\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}-q(x)=\frac{1}{\xi(x)^{3}}\Big(\alpha+\frac{\beta\gamma}{3}+\frac{2\gamma^{3}}{27}\Big).$$

بدست می آید که مطابق با نتایج بدست آمده در بخش ۳.۴ است.

۵.۵ کاربردها

در این بخش معادلات مرتبه دومی خاصی را که از مسائل گوناگون در صنایع هسته‌ای بوجود آمده‌اند را بررسی می‌کنیم. برای مشاهده کاربردهای بیشتر خواننده می‌بایست به کتاب بلومن و کول (۱۹۷۴)، (صفحه۱۱۶) مراجعه کند. بخاطر اهدافی که در سرتاسر کتاب داریم مسائل را با نقطه نظر نگرش گروهی بررسی می‌کنیم.

۱.۵.۵ مثال. بهینه کردن راکتور هسته‌ای

برای مسئله تعیین توزیع سوخت مناسب که نسبت توده بحرانی از هسته به توان راکتوری را کمینه می‌کند، معادله دیفرانسیل

$$y\Big(y''+\frac{\alpha y'}{x}\Big)-y'^{۲}+\beta y^{۳}=\circ, \qquad (۲۵.۵)$$

را که $y(x)$ نشان دهنده جریان گرمایی بی بُعد بوده و علامت پریم نشانگر مشتق نسبت به x و α و β ثابتهای معلومی هستند، را بدست می‌آوریم. این مسئله دارای دو حالت است: $\alpha=\circ$، متناظر با فرض هندسه صفحه‌ای و $\alpha=۱$ متناظر با هندسه استوانه‌ای.

برای $\alpha=\circ$، معادله (۲۵.۵) به معادله

$$yy''-y'^{۲}+\beta y^{۳}=\circ, \qquad (۲۶.۵)$$

تبدیل می‌شود و حل آن ابتدا با روش‌های استاندارد و سپس با نظریه گروهها می‌تواند آموزنده باشد. بعلت اینکه (۲۶.۵) صریحاً به x وابسته نیست، با قراردادن $z=y'$ در آن به روش معمول معادله دیفرانسیل مرتبه اول،

$$\frac{dz}{dy}-\frac{z}{y}=-\frac{\beta y^{۲}}{z}. \qquad (۲۷.۵)$$

را بدست می‌آوریم. این معادله را بعنوان نوعی از معادلهٔ برنولی می‌شناسیم و بنابراین با فرض، $w=z^{۲}$ به نتیجه

$$w=C_{۱}y^{۲}-۲\beta y^{۳},$$

که $C_{۱}$ ثابت انتگرال‌گیری است، می‌رسیم. با حل معادله

$$\frac{dy}{y(C_{۱}-۲\beta y)^{۱/۲}}=dx,$$

با روش مسقیم به جواب:

$$y(x)=\frac{C_{۱}}{\beta[۱+\cosh(\sqrt{C_{۱}}x+C_{۲})]}, \qquad (۲۸.۵)$$

که $C_{۲}$ ثابت بعدی انتگرال‌گیری و $C_{۱}$ بنابر فرض مثبت است، دست می‌یابیم. به یک روش دیگر برای بدست آوردن جواب عمومی از (۲۸.۵) می‌توان نگرش گروهی را بصورت زیر بکار برد. می‌توان دید که (۲۶.۵) تحت دو گروه یک–پارامتری

$$x_{۱}=x+\varepsilon, \quad y_{۱}=y, \qquad (۲۹.۵)$$

و

$$x_{۱}=e^{\varepsilon}x, \quad y_{۱}=e^{-۲\varepsilon}y. \qquad (۳۰.۵)$$

ناوردا است. گروه (۲۹.۵) صرفاً گزاره‌ای صوری است که بیان می‌کند که (۲۶.۵) بطور صریح به x وابسته نیست و چون y' ناوردایی از این گروه است با فرض $z=y'$ معادلهٔ (۲۷.۵) را بدست می‌آوریم. گروه (۳۰.۵) بدین معناست که (۲۷.۵) تحت گروه

$$y_{۱}=e^{-۲\varepsilon}y, \quad z_{۱}=e^{-۳\varepsilon}z,$$

ناوردا است، بنابراین متغیر $u^{*}=zy^{-۳/۲}$ را بعنوان متغیر مسقل جدید برمی‌گزینیم که در این صورت (۲۷.۵) به معادله دیفرانسیل مرتبه اول تفکیک–پذیر

$$\frac{du^{*}}{dy}=-\frac{(u^{*۲}+۲\beta)}{yu^{*}}.$$

تبدیل می‌شود که آن نیز بسهولت قابل حل بوده و دارای جوابی بشکل:

$$u^{*۲}=C_{۱}/y^{۲}-۲\beta,$$

است که بر اساس این جواب، جواب معادله اولیه دقیقاً مشخص می‌شود.

برای α ی مخالف صفر همچنان معادلهٔ (۲۶.۵) تحت گروه یک–پارامتری (۳۰.۵) ناوردا است و بنابراین متغیر مسقل $u=yx^{۲}$ را برمی‌گزینیم. با این تغییر متغیر، $t=\log x$ و $p=du/dt$، معادله (۲۵.۵) به معادله آبل از نوع دوم

$$p\frac{dp}{du}=۲(\alpha-۱)u-\beta u^{۲}-(\alpha-۱)p+\frac{p^{۲}}{u},$$

تبدیل می‌شود(مرفی (۱۹۶۰)، صفحه ۲۵). این معادله نیز با تغییر متغیر $p=qu$ می‌تواند به معادله نوع استاندارد

$$q\frac{dq}{du}=\frac{۲(\alpha-۱)}{u}-\beta-(\alpha-۱)\frac{q}{u}, \qquad (۳۱.۵)$$

که دوباره $C_{۱}$ و $C_{۲}$ ثابتهای انتگرال گیری هستند، تبدیل شود(معادله (۲۱.۱) را ببینید). که برای $\alpha=۱$ جواب نهایی زیر را برای $y(x)$ بدست دهد:

$$y(x)=\frac{۲C_{۱}}{\beta x^{۲}[۲+x^{\sqrt{C_{۱}}}e^{C_{۲}}+x^{-\sqrt{C_{۱}}}e^{-C_{۲}}]}, \qquad (۳۲.۵)$$

برای مقادیر دیگر α توجه می‌کنیم که برای بدست آوردن جواب (۳۰.۵)، هیچ راه آشکاری وجود ندارد.

دو مثال بعدی از انتقال بطور یکنواخت پایای گرما با هدایت کننده گرمایی غیر–خطی $k(T)$ و منبع غیرخطی $S(T)$، یعنی

$$\mathrm{div}[k(T)\mathrm{grad}(T)]+S(T)=۰, \qquad (۳۳.۵)$$

که T نشان دهندهٔ دماست، بوجود می آیند. این مسائل در زمینه پدیده‌های دمایی ناپایدار در میله‌ها و ورق‌ها با این نقطه نطر که انژی تولید شده توسط منبع گرمایی، نرخ میزان انرژی خارج شده از مرز، را افزایش دهد، رخ می‌دهند. بنابراین توزیع گرمایی پایدار وجود ندارد. جملهٔ مربوط به هدایت گرمایی جزیی و منبع بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود،

$$k(T)=k_{۰}(T/T_{۰})^{\gamma}, \qquad (۳۴.۵)$$

$$S(T)=S_{۰}(T/T_{۰})^{\delta}, \qquad S(T)=S_{۰}\exp(T/T_{۰}), \qquad (۳۵.۵)$$

که γ، δ، $k_{۰}$، $S_{۰}$ و $T_{۰}$ ثابتند.

۲.۵.۵ مثال. از (۳۳.۵)، (؟؟) و ۱–(؟؟) معادله دیفرانسیل زیر با متغیرهای بی‌بعد

$$y^{\gamma}\left(y''+\frac{\alpha y'}{x}\right)+\gamma y'^{۲}y^{\gamma-۱}+\beta y^{\delta}=۰, \qquad (۳۶.۵)$$

را که α و β ثابتها هستند را می‌توان نتیجه گرفت. دوباره $\alpha=۰$ متناظر با هندسه ورقه یا صفحه بوده و $\alpha=۱$ با هندسه استوانه‌ای یا میله‌ای متناظر است. ثابتهای α، γ و δ به واریته گستردهٔ رفتار فیزیکی وابسته است. تحلیل کاملی از (۳۶.۵) متضمن در نظر گرفتن حالتهای خاص است. در اینجا توجه خود را به نتایجی که می‌توانند بسهولت برای نگرش گروهی حاصل شوند، محدود می‌کنیم. برای هر مسئله کاربردی قبل از آنکه نظریه‌ای که در بخش‌های اولیه این فصل بیان شد را استفاده کنیم در ابتدا به آزمون گروههای ساده که معادله را ناوردا می‌کنند، می‌پردازیم. بعنوان مثالهایی از این بخش، این روش در مسائل ۹، ۱۰ و ۱۱ خلاصه شده است.

اگر بدنبال گروه سادهٔ امتدادی

$$x_{۱}=e^{\varepsilon}x, \qquad y_{۱}=e^{a\varepsilon}y, \qquad (۳۷.۵)$$

که معادله (۳۶.۵) را ناوردا می‌کند، باشیم آنگاه به

$$a=\frac{۲}{(۱+\gamma-\delta)}, \qquad (۳۸.۵)$$

باشرط $\delta+۱\neq\delta$، دست می‌یابیم. با فرض اینکه اینکه این حالت برقرار باشد آنگاه $u=yx^{-\alpha}$ را بعنوان متغیر جدید مسقل برمی‌گزینیم که در این صورت معادله (۳۶.۵) به معادله

$$u^{\gamma}\{x^{۲}u''+(\alpha+۲a)ux'+a(\alpha+a-۱)u\}+\gamma u^{\gamma-۱}(xu'+au)^{۲}+\beta u^{\delta}=۰,$$

تبدیل می‌شود. با تغییر متغیر $t=\log x$ و $p=du/dt$ این معادله بصورت

$$up\frac{dp}{du}+(\alpha+۲a+۲a\gamma-۱)pu+a(\alpha+a+\gamma a-۱)u^۲+\gamma p^۲+\beta u^{-۲/a}=۰ \tag{۳۹.۵}$$

تبدیل خواهد شد، که در حالت کلی یک معادله آبل از نوع دوم است و در حالات خاص می‌توان آنرا به معادله‌ای استاندارد تبدیل کرد. بعنوان مثال اگر $\delta=\gamma+۳$، آن معادله همگن خواهد بود و اگر $\alpha\neq ۱$ و $\delta=(۱+\gamma)(\alpha+۳)/(\alpha-۱)$، این معادله از نوع آبل است.

اگر $\delta=۱+\gamma$ آنگاه (۳۶.۵) به

$$y\Big(y''+\frac{\alpha y'}{x}\Big)+\gamma y'^۲+\beta y^۲=۰, \tag{۴۰.۵}$$

که تحت گروه

$$x_۱=x,\qquad y_۱=e^{\varepsilon}y. \tag{۴۱.۵}$$

ناورداست، تبدیل می‌شود. بنابراین $w=y/y'$ را بعنوان متغیر جدید انتخاب می‌کنیم (مثال ۵.۴ را ببینید) و در نتیجه (۴۰.۵) به معادله

$$\frac{dw}{dx}+\frac{\alpha}{x}w+(۱+\gamma)w^۲+\beta=۰, \tag{۴۲.۵}$$

تبدیل می‌شود که معادله ریکاتی است (مرفی (۱۹۶۰)، صفحه ۱۵). بوضوح $\alpha=۱$ یا $\gamma=-۱$ حالتهای خاصی است که می‌توانیم بسهولت معادله بالا را حل کنیم. جواب عمومی (۴۲.۵) یا (۴۰.۵) بصورت زیر نتیجه می‌شوند. [۱] متغیرهای $Y=y^{۱+\gamma}$ یا $y=Y^{(۱+\gamma)^{-۱}}$ را تعریف می‌کنیم، آنگاه معادله (۴۰.۵) به معادله

$$Y''+\frac{\alpha}{x}Y'+\beta(۱+\gamma)Y=۰.$$

تبدیل می‌شود و در ادامه بوسیله تبدیل

$$Y(x)=x^{(۱-\alpha)/۲}Z(x),$$

آن به صورت

$$Z''+\frac{Z'}{x}+\Big\{\beta(۱+\gamma)-\frac{(\alpha-۱)^۲}{۴x^۲}\Big\}Z=۰,$$

در می‌آید که با نام معادله بسل با جواب

$$Z(x)=C_۱J_\lambda\Big[x\sqrt{\beta(۱+\gamma)}\Big]+C_۲Y_\lambda\Big[x\sqrt{\beta(۱+\gamma)}\Big],$$

شناخته می‌شود که $\lambda=(\alpha-۱)/۲$ است و فرض می‌شود $\beta(۱+\gamma)$ مثبت است. بنابراین اگر $\delta=۱+\gamma$ باشد، آنگاه برای تمام مقادیر α، β و γ می‌تواند دارای جواب باشد.

بعنوان مثال نهایی معادله‌ای را که از (۳۳.۵) برای حالت هدایت گرمایی ثابت و بخش منبع نمایی، بوجود می‌آید را در نظر می‌گیریم.

۳.۵.۵ مثال. بخش منبع نمایی و هدایت ثابت

از (۳۳.۵)، (؟؟)(با فرض $\gamma=۰$) و ۲−(؟؟) و با متغیرهای بی‌بعد، معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+\frac{\alpha y'}{x}=\beta e^{y}. \tag{۴۳.۵}$$

را نتیجه می‌گیریم. برای مقدار $\alpha=۰$ این معادله می‌تواند بسهولت با تغییر متغیر استاندارد $z=dy/dx$ حل شود و اگر برای α ی مخالف صفر، بدنبال گروه یک−پارامتری بصورت

$$x_۱=e^{\varepsilon}x,\qquad y_۱=y+a\varepsilon. \tag{۴۴.۵}$$

[۱] نویسنده از «د.ک.کارلا» از «موسسه تکنولوژی، دهلی نو» به خاطر نشان دادن اینکه (۴۲.۵) دارای این جواب عمومی است، تشکر می‌کند.

باشیم که معادله (۴۳.۵) را ناوردا کند، آنگاه به $a=-۲$ دست می‌یابیم که با حذف ε از (؟؟)، $u=x^۲e^y$ را بعنوان ناوردای گروه بدست می‌آوریم. با قرار دادن u بعنوان متغیری جدید در (۴۳.۵) آن به معادله

$$x^۲(uu''-u'^۲)+\alpha xuu'+۲(۱-\alpha)u^۲+\beta u^۳,$$

تبدیل می‌شود که با تغییر متغیرهای $t=\log x$ و $p=du/dt$ به معادلهٔ

$$up\frac{dp}{du}=p^۲+(۱-\alpha)up-۲(۱-\alpha)u^۲+\beta u^۳, \qquad (۴۵.۵)$$

دست می‌یابیم. برای $\alpha=۱$ معادله (؟؟) همان معادله (۲۷.۵) است و بنابراین جواب آن بر اساس (۲۸.۵) بدست می‌آید. در حالی که برای $\alpha\neq۱$ معادله (؟؟) می‌تواند بعنوان معادله‌ای از نوع آبل از مرتبه دوم حل شود.

مثالهای این فصل بطور ساده چگونگی گروههایی که معادله دیفرانسیل را ناورد می‌کند، خواص آنها و همچنین نحوه تحویل معادلات به مرتبه اول که ممکن است از نوع استاندرد با حلی ساده باشد یا نباشد را توصیف می‌کردند.

مسائل

۱. با استفاده از نمادگذاریهای مثال ۵.۱ نشان دهید اگر $\rho(x)$ ناصفر باشد، آنگاه

$$F(x,y)=G(x)y+H(x),$$

که در آن $H(x)$ و $G(x)$ بصورت زیر تعریف شده‌اند:

$$G(x)=\frac{\rho''(x)}{\rho(x)},\qquad H(x)=\frac{۲\eta'(x)-\xi''(x)}{۳\rho(x)},$$

و سپس نتیجه بگیرید، $\rho(x)$، $\eta(x)$ و $\xi(x)$ می‌بایست در رابطه

$$\eta(x)+\xi'(x)-۳\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}\xi(x)=C_۱\int_{x_۰}^{x}\frac{dt}{\rho(t)^۲}+C_۲,$$

که در آن $C_۱$ و $C_۲$ ثابتند، صدق کنند.

۲. اگر $\rho(x)$ برابر صفر بوده و $۲\eta(x)=\xi'(x)$، نشان دهید $F(x,y)$ بصورت

$$F(x,y)=\frac{(\xi(x)^{۱/۲})''}{\xi(x)^{۱/۲}}y+\frac{۱}{\xi(x)^{۱/۲}}\Big(\frac{\zeta(x)}{\xi(x)^{۱/۲}}\Big)'+\frac{۱}{\xi(x)^{۳/۲}}\Phi\Big(\frac{y}{\xi(x)^{۱/۲}}-\int_{x_۰}^{x}\frac{\zeta(t)}{\xi(t)^{۳/۲}}dt\Big),$$

که در آن Φ تابع دلخواه با آرگومانهای مشخص است، تعریف می‌شود.

۳. اگر $\rho(x)$ ناصفر و دلخواه باشد، نشان دهید معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+p(x)y^۲=۰,$$

حداکثر تحت شش گروه یک–پارامتری ناوردا باقی می‌ماند و در ادامه نشان دهید آن می‌تواند

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+\alpha x^my^۲=۰,$$

به معادله آبل از نوع دوم تقلیل یابد« مرفی (۱۹۶۰)، صفحه ۲۵».

۴. شکل عمومی معادله دیفرانسیل آبلی را که تحت گروههای یک–پارامتری مسائل ۵ و ۷ از فصل ۴ ناوردا باقی می‌مانند، را بیابید.

۵.   نشان دهید، معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبه دوم

$$F(x, y, y', y'') = ۰,$$

تحت گروه یک–پارامتری

$$x_۱ = x + \varepsilon\xi(x, y) + O(\varepsilon^۲), \quad y_۱ = y + \varepsilon\eta(x, y) + O(\varepsilon^۲),$$

ناوردا باقی می‌ماند، اگر و تنها اگر

$$L''F = ۰,$$

که L''، توسیع دوم L است که به صورت زیر تعریف شده است.

$$L'' = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \pi\frac{\partial}{\partial y'} + \sigma\frac{\partial}{\partial y''},$$

که در آن π و σ بترتیب مدلهای بی‌نهایت کوچک y' و y'' هستند و توسط (۵.۵) و (٦.۵) تعریف شده‌اند. « توجه کنید اگر $A(x, y)$، $B(x, y, y')$ و $C(x, y, y', y'')$ سه جواب مستقل از معادلات

$$\frac{dx}{d\tau} = \xi(x, y), \quad \frac{dy}{d\tau} = \eta(x, y), \quad \frac{dy'}{d\tau} = \pi(x, y, y'), \quad \frac{dy''}{d\tau} = \sigma(x, y, y', y''),$$

باشند، آنگاه عمومی‌ترین معادله ناوردا نسبت به گروه (٫) بفرم $\omega(A, B, C) = ۰$ یا $C = \Phi(A, B)$ است».

« برای بحث دقیق در مورد سه مسأله زیر خواننده می‌تواند به دیکسون (۱۹۲۴) صفحه ۳۵۸ مراجعه کند».

٦.   برای گروههای یک–پارامتری با عملگرهای

$$L_۱ = \xi_۱(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_۱(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad L_۲ = \xi_۲(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_۲(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

نشان دهید توسیع اول جابجاگر $(L_۱L_۲)$ با بسط اول آن یعنی، $(L_۱L_۲)'$ برابر است. (مسائل ۱۱ و ۱۲ از فصل ۴ را ببینید).

۷.   نشان دهید اگر معادله دیفرانسیل، $y'' = F(x, y, y')$ تحت دو گروه با عملگرهای $L_۱$ و $L_۲$ ناوردا باشد، آنگاه آن تحت گروه با عملگر $(L_۱L_۲)$ ناوردا باقی می‌ماند.

۸.   اگر $L_۱$ و $L_۲$ نسبت به معادله $y'' = F(x, y, y')$ ناوردا باشند آنگاه نشان دهید عملگری مانند $L_۳$ وجود دارد که معادله تحت عملگر

$$(L_۱L_۳) = aL_۱ + bL_۳,$$

برای برخی ثابتهای a و b، ناوردا باقی می‌ماند.

۹.   برای معادله مرتبه دوم

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = -\frac{\alpha}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{\gamma}{y}\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^۲ - f(y),$$

که در آن α و γ ثابتهایی با شرط $\gamma \neq -۱$ اند، نشان دهید برای همه توابع $f(y)$ تنها گروهی که نسبت به معادله (+) ناورداست بفرم زیر می‌باشد.

$$\xi(x, y) = g(x), \eta(x, y) = \Big\{\frac{۱}{۲}\Big[g'(x) - \frac{\alpha}{x}g(x)\Big] + A\Big\}\frac{y}{(۱+\gamma)} + \frac{h(x)}{y^\gamma},$$

که در آن A ثابتهای دلخواه و $g(x)$ و $h(x)$ توابعی از x هستند که با رابطه

$$\frac{\partial^۲\eta}{\partial x^۲} + \frac{\alpha}{x}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \Big\{\frac{\partial\eta}{\partial y} - ۲g'(x)\Big\}f(y) - \eta f'(y).$$

تعریف شده‌اند.

۱۰. اگر $f(y)=\eta y^{\delta-\gamma}$ باشید، نشان دهید اگر $\delta\neq -۱$، آنگاه تنها گروهی که نسبت به معادله $(+)$ ناورداست بشکل

$$\xi(x,y)=x,\qquad \eta(x,y)=\frac{۲y}{(۱+\gamma-\delta)}.$$

می‌باشد. اگر $\delta=\gamma+۱$ نشان دهید، معادله $(+)$ تحت گروه $(++)$ که $h(x)$ و $g(x)$ در معادلات زیر صدق می‌کنند، ناورداست.

$$g'''+۴\beta(۱+\gamma)g'+\alpha(۲-\alpha)\Big(\frac{g'}{x^۲}-\frac{g}{x^۳}\Big)=\circ, h''+\frac{\alpha}{x}h'+\beta(۱+\gamma)h=\circ.$$

۱۱. اگر $f(y)=\beta e^y$ و $\gamma=\circ$، نشان دهید برای $\alpha\neq ۱$ تنها گروه یک–پارامتری که معادله $(+)$ را ناوردا می‌کند گروه تعریف شده در $(++)$ است بطوریکه توابع $g(x)$ و $h(x)$ در معادلات زیر صدق می‌کنند.

$$g(x)=\frac{۲A}{(\alpha-۱)}x,\qquad h(x)=-\frac{۴A}{(\alpha-۱)},$$

که در آن A ثابت مسئله ۹ است. برای $\alpha=۱$ نشان دهید $g(x)$ و $h(x)$ می‌بایست بصورت زیر تعریف شوند.

$$g(x)=-۲Ax\log x+Bx,\qquad h(x)=۴A\log x+۲(۲A-B),$$

که در آن B ثابت دلخواه بعدی است.

۱۲. برای معادله دیفرانسیل (۵.۲۵) از مثال ۵.۸، نشان دهید:

(i) $y=۲(\alpha-۱)/\beta x^۲$ جواب خاص معادله است.

(ii) تبدیل $y=e^z$ معادله دیفرانسیل زیر را نتیجه می‌دهد.

$$Z''+\frac{\alpha}{x}Z'+\beta e^z=\circ.$$

۱۳. برای معادله دیفرانسیل (۵.۲۵) از مثال ۵.۹، نشان دهید:

(i) $y=Ax^B$ که در آن A و B از رابطه‌های

$$B=\frac{۲}{(۱+\gamma-\delta)},\qquad A=\Big(\frac{\beta}{B[۱-\alpha-(۱+\gamma)B]}\Big)^{۱/(۱+\gamma-\delta)}$$

تعیین می‌شوند، جواب خاص معادله مزبور را تامین می‌کند.

(ii) تبدیل $y=Z^{۱/(۱+\gamma)}$ معادله مذکور را به معادله دیفرانسیل زیر تبدیل می‌کند.

$$Z''+\frac{\alpha}{x}Z'+\beta(۱+\gamma)Z^{\delta/(۱+\gamma)}=\circ.$$

«توجه کنید اگر $\alpha=۲$، آنگاه این معادله، معادله ادمن–لنی با اندیس $\delta/(۱+\gamma)$ است که مقادیر خاص این اندیس حالتهای حل‌پذیری را نتیجه می‌دهد (مرفی (۱۹۶۰) صفحه ۳۸۷ را ببینید)».

۱۴. نشان دهید معادله انتشار کلاسیک

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

جواب‌های موج حرکتی بشکل

$$c(x,t) = A(x)\sin[wt - B(x)],$$

که در آنها w ثابت بوده و $A(x)$ و $B(x)$ در معادلات

$$A'' = AB'^2, \qquad AB'' + 2A'B' + k^2 A = 0,$$

که در آن نیز $k = (w/D)^{1/2}$، صدق می‌کنند، را می‌پذیرد و معادله دیفرانسیل

$$[(A^3A'')^{1/2}]' + k^2A^2 = 0,$$

تحت گروه یک—پارامتری

$$x_1 = x, \qquad A_1 = e^{\varepsilon}A,$$

ناوردا باقی می‌ماند و براین اساس معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$w'' + 6ww' + 4w^3 + 2k^2(w' + w^2)^{1/2} = 0,$$

که $w = A'/A$، را نتیجه می‌دهد.

۱۵. متغیر مختلط $Z(x)$ و متغیر $\Theta(x)$ را بصورت،

$$A(x) = \exp\Theta(x), \qquad Z(x) = \Theta(x) + iB(x),$$

تعریف کنید و نشان دهید معادله زوج $A(x)$ و $B(x)$ به معادله

$$Z'' + Z'^2 = -ik^2.$$

منجر می‌شود. بعداً متغیرهای $P = Z'$ و $q = p^2$ را تعریف کرده و معادله دیفرانسیل خطی

$$\frac{dq}{dz} + 2q = -2ik^2,$$

با $q(x)$ تعریف شده:

$$q = Ce^{-2Z} - ik^2,$$

که C ثابت دلخواه مختلط است، را نتیجه بگیرید. از این معادله با فرض

$$C = ik^2A_0^2e^{2iB_0},$$

که در آن A_0 و B_0 ثابتهای حقیقی دلخواهی را نشان می‌دهند، نتیجه بگیرید که $z = e^Z$ توسط

$$z = A_0e^{iB_0}\sin[k(1+i)(x - x_0)/2^{1/2}],$$

که در آن x_0 ثابت بعدی انتگرال‌گیری است، معلوم می‌شود. سپس نتیجه بگیرید که جواب عمومی برای $A(x)$ و $B(x)$ بصورت

$$A(x) = A_0(\sin^2 y + \sinh^2 y)^{1/2}, B(x) = B_0 + \tan^{-1}\left(\frac{\tanh y}{\tan y}\right),$$

می‌باشد که در آن y، $k(x - x_0)/2^{1/2}$ را نشان می‌دهد. در ادامه نشان دهید در این حالت $c(x,t)$ بصورت:

$$c(x,t) = \frac{A_0}{2}\{e^y\cos(wt - B_0 - y) - e^{-y}\cos(wt - B_0 + y)\}.$$

ساده می‌شود.

فصل ٦

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی

١.٦ مقدمه

عموماً برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی محاسبات در تعیین گروه یک—پارامتری که معادله را ناوردا می‌کند، نسبتاً طولانی است. بمنظور اینکه این محاسبات را در زمان کوتاهتری انجام دهیم در ابتدا رده محدودی از گروه تبدیلات یک—پارامتری که در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی قابل استفاده‌اند را بررسی می‌کنیم و به معادلات با مشتقات جزیی غیرخطی در فصل آینده خواهیم پرداخت. در حالت کلی برای متغیر وابسته سادهٔ C و متغیرهای مستقل x و t تبدیلاتی بشکل

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f(x,t,\varepsilon) = x + \varepsilon\xi(x,t) + O(\varepsilon^2) \\
t_1 &= g(x,t,\varepsilon) = t + \varepsilon\eta(x,t) + O(\varepsilon^2) \\
c_1 &= h(x,t,\varepsilon)c = c + \varepsilon\zeta(x,t)c + O(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{١.٦}
$$

که در آن f، g و h بطور صریح به C وابسته نیستند را مشخص می‌کنیم. اگر تبدیل (١.٦) معادله دیفرانسیل را ناوردا کند و اگر $c = \phi(x,t)$، آنگاه از $\phi(x_1,t_1)$ و با برابر قرار دادن جملات از مرتبه ε داریم،

$$
\xi(x,t)\frac{\partial c}{\partial x} + \eta(x,t)\frac{\partial c}{\partial t} = \zeta(x,t)c. \tag{٢.٦}
$$

که در آن $\xi(x,t)$، $\eta(x,t)$ و $\zeta(x,t)$ توابع معلوم می‌باشند. معادله (٢.٦) وقتی به عنوان معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه اول حل می شود، فرم تابعی از توابع دلخواه را به دست می‌دهد که توابع دلخواه به وسیله تعویض فرم تابع در جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی داده شده، تعیین می‌شوند. در حالت دو متغیر مستقل معادله نتیجه شده بصورت معادله دیفرانسیل معمولی است و برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی که بیش از دو متغیر مستقل دارد روند مورد نظر تعداد متغیرهای مستقل را به یکی کاهش می دهد.

در بخش آتی فرمول هایی برای مدل بی نهایت کوچک مشتقات جزیی $\partial c/\partial x$، $\partial c/\partial t$، $\partial^2 c/\partial x^2$، $\partial^2 c/\partial x\partial t$، و $\partial^2 c/\partial t^2$ را ارائه می کنیم. هر چند از دو مشتق جزیی آخر استفاده‌ای نخواهیم کرد ولی برای کامل بودن بحث در این جا آورده شده‌اند. برای بخش های باقی مانده از این فصل اصولاً گروه‌هایی به شکل (١.٦) و جواب های متناظر با آن را برای معادله انتشار به ویژه معادله انتشار کلاسیک، یعنی

$$
\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \tag{٣.٦}
$$

و معادله فوکر—پلانک که فرض می شود به شکل:

$$
\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(p(x)\frac{\partial c}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}(q(x)c), \tag{٤.٦}
$$

که در آن توابع $p(x)$ و $q(x)$ فقط تابعی از x هستند، است را در نظر می‌گیریم. برای تعیین گروه هایی که معادله را ناوردا می کنند دو نوع روش وجود دارد که آنها را کلاسیک و غیر کلاسیک می‌نامیم. نگرش کلاسیک مدل بی نهایت کوچک معادله با مشتقات جزیی

داده شده را برابر صفر قرار می دهد بدون این که از (۲.٦) استفاده کند. فرآیند غیر کلاسیک که به نظر کمی پیچیده تر است از (۲.٦) استفاده کرده و گروه های کلاسیک را بعنوان حالت خاصی از این حالت کلی می‌توان پنداشت. در اغلب موارد نتایج مورد نظر را از فرآیند کلاسیک به دست می آوریم. به هر حال در بخش نهایی درباره نگرش غیر کلاسیک با ارجاع به معادلهٔ (۳.٦) بحث خواهیم کرد. نتایج ارائه شده در این فصل (بویژه بخش‌های مذبور) را می توان در بلومن و کول (۱۹۷۴) صفحهٔ (۲۰٦) پیدا کرد. در بخش ٦.۵ برخی نتایج برای معادله (۳.٦) را ارائه می‌کنیم و در ادامه برای تابع دلخواه $p(x)$، عمومی‌ترین تابع $q(x)$ که گروه کلاسیکی برای ناوردا کردن معادله وجود داشته باشد را خواهیم یافت .

۲.٦ فرمولی برای مشتقات جزئی

برای گروه تبدیلات یک پارامتری فرض می کنیم که ژاکوبین

$$J=\frac{\partial(x_۱,t_۱)}{\partial(x,t)}=\frac{\partial x_۱}{\partial x}\frac{\partial t_۱}{\partial t}-\frac{\partial x_۱}{\partial t}\frac{\partial t_۱}{\partial x}, \tag{۵.٦}$$

ناصفر و متناهی است . از (۱.٦) و (۵.٦) داریم

$$J=۱+\varepsilon\Big(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big)+O(\varepsilon^۲). \tag{٦.٦}$$

اکنون برای مشتق جزئی $\partial c_۱/\partial x_۱$ داریم

$$\frac{\partial c_۱}{\partial x_۱}=\frac{\partial(c_۱,t_۱)}{\partial(x_۱,t_۱)}=\frac{۱}{J}\frac{\partial(c_۱,t_۱)}{\partial(x,t)}, \tag{۷.٦}$$

و با جایگذاری ۲−(۱.٦)، ۳−(۲.٦) و (٦.٦) در (۷.٦) بدست می آوریم

$$\frac{\partial c_۱}{\partial x_۱}=\frac{\partial c}{\partial x}+\varepsilon\Big\{\frac{\partial(\zeta c)}{\partial x}+\frac{\partial(c,\eta)}{\partial(x,t)}-\Big(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big)\frac{\partial c}{\partial x}\Big\}+O(\varepsilon^۲),$$

که بصورت

$$\frac{\partial c_۱}{\partial x_۱}=\frac{\partial c}{\partial x}+\varepsilon\Big\{c\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\Big(\zeta-\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial t}\Big\}+O(\varepsilon^۲), \tag{۸.٦}$$

ساده می‌شود. بطور مشابه از

$$\frac{\partial c_۱}{\partial t_۱}=-\frac{\partial(c_۱,x_۱)}{\partial(x_۱,t_۱)}=-\frac{۱}{J}\frac{\partial(c_۱,x_۱)}{\partial(x,t)}, \tag{۹.٦}$$

نتیجه زیر را بدست می آوریم:

$$\frac{\partial c_۱}{\partial t_۱}=\frac{\partial c}{\partial t}+\varepsilon\Big\{c\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\Big(\zeta-\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big)\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}\Big\}+O(\varepsilon^۲). \tag{۱۰.٦}$$

اگر $\pi_۱$ و $\pi_۲$ را بصورت

$$\begin{aligned}\pi_۱&=\Big\{c\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\Big(\zeta-\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial t}\Big\}\\ \pi_۲&=\Big\{c\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\Big(\zeta-\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big)\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}\Big\}\end{aligned} \tag{۱۱.٦}$$

تعریف کنیم، آن گاه (۸.٦) و (۱۰.٦) به معادلاتی بشکل

$$\frac{\partial c_۱}{\partial x_۱}=\frac{\partial c}{\partial x}+\varepsilon\pi_۱+O(\varepsilon^۲),\qquad \frac{\partial c_۱}{\partial t_۱}=\frac{\partial c}{\partial t}+\varepsilon\pi_۲+O(\varepsilon^۲). \tag{۱۲.٦}$$

تبدیل می‌شود. برای مشتق جزیی مرتبه دوم $\partial^۲c_۱/\partial x^۲$ داریم،

$$\frac{\partial^۲c_۱}{\partial {x_۱}^۲}=\frac{\partial(\frac{\partial c_۱}{\partial x_۱},t_۱)}{\partial(x_۱,t_۱)}=\frac{۱}{J}\frac{\partial(\frac{\partial c_۱}{\partial x_۱},t_۱)}{\partial(x,t)}.$$

از (۶.۶) و۱–(۱۲.۶) نتیجه

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\varepsilon\Big\{\frac{\partial \pi_1}{\partial x}+\frac{\partial(\partial c/\partial x,\eta)}{\partial(x,t)}-\Big(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\Big\}+O(\varepsilon^2),$$

را بدست می‌آوریم که با استفاده از ۱–(۱۱.۶) به

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}&+\varepsilon\Big\{c\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\Big(2\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Big)\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial c}{\partial t}\\&+\Big(\zeta-2\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial t}\Big\}+O(\varepsilon^2)\end{aligned}\qquad(۱۳.۶)$$

تبدیل می‌شود، بطور مشابه برای $\partial^2 c_1/\partial x_l\partial t_1$ و $\partial^2 c_1/\partial t_1^2$ از معادلات

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1\partial t_1}&=\frac{\partial(\frac{\partial c_1}{\partial t_1},t_1)}{\partial(x_1,t_1)}=\frac{1}{J}\frac{\partial(\frac{\partial c_1}{\partial t_1},t_1)}{\partial(x,t)},\\ \frac{\partial^2 c_1}{\partial t_1^2}&=\frac{\partial(\frac{\partial c_1}{\partial t_1},x_1)}{\partial(x_1,t_1)}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(\frac{\partial c_1}{\partial t_1},x_1)}{\partial(x,t)},\end{aligned}$$

به نتایج زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1\partial t_1}=\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial t}&+\varepsilon\Big\{c\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial t}+\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t}\Big)\frac{\partial c}{\partial x}+\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial x}\Big)\frac{\partial c}{\partial t}\\&-\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\Big(\zeta-\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big)\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial t}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}\Big\}+O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c_1}{\partial t_1^2}=\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}&+\varepsilon\Big\{c\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\frac{\partial c}{\partial x}+\Big(2\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\Big)\frac{\partial c}{\partial t}\\&-2\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial t}+\Big(\zeta-2\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big)\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}\Big\}+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

۳.۶ گروههای کلاسیک برای معادلات انتشار

در این بخش گروه کلاسیک معادله انتشار (۳.۶) را نتیجه می‌گیریم.
از (۱۰.۶) و (۱۳.۶) داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_1}{\partial t_1}-\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2}=\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}&+\varepsilon\Big\{c\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Big)+\Big(\zeta-\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\Big)\frac{\partial c}{\partial t}\\&+\Big(-2\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Big)\frac{\partial c}{\partial x}+\Big(2\frac{\partial\xi}{\partial x}-\zeta\Big)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial t}\Big\}+O(\varepsilon^2)\end{aligned}\qquad(۱۴.۶)$$

که با استفاده از (۷.۶) به این نتیجه می‌رسیم که معادله انتشار، تحت گروه تبدیلات بشکل (۱.۶) ناوردا است با این شرط که توابع $\xi(x,t)$، $\eta(x,t)$ و $\zeta(x,t)$ با رابطه

$$\begin{aligned}&c\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Big)+\Big(2\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\Big)\frac{\partial c}{\partial t}\\&\qquad+\Big(-2\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Big)\frac{\partial c}{\partial x}+2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial t}=0,\end{aligned}\qquad(۱۵.۶)$$

تعریف شده‌اند. در ادامه این فصل با استفاده از نگرش غیرکلاسیک، معادله (۱۵.٦) را بوسیله (۲.٦) ساده خواهیم کرد که آن در بخش نهایی از همین فصل صورت می‌پذیرد.

برای گروه کلاسیک ساده ضرایب c و مشتقات آنرا را برابر صفر قرار می‌دهیم. سپس از ضرایب $\partial^2 c/\partial x\partial t$ نتیجه می‌گیریم، $\eta = \eta(t)$، و از ضرایب $\partial c/\partial t$ داریم

$$\xi = \frac{\eta'(t)x}{2} + \rho(t), \qquad (16.6)$$

که علامت پریم مشتق نسبت به t را نشان می‌دهد و $\rho(t)$ تابع دلخواهی از t است. با برابر صفر قرار دادن $\frac{\partial c}{\partial x}$ و استفاده از (۱٦.٦) نتیجه می‌گیریم

$$\zeta = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\eta''(t)x^2}{4} + \rho'(t)x\Big) + \sigma(t), \qquad (17.6)$$

که $\sigma(t)$ تابع دلخواه بعدی از t است. از ضرایب c در معادله (۱۵.٦) و با استفاده از (۱۷.٦)، معادلهٔ

$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{\eta'''(t)x^2}{4} + \rho''(t)x\Big) + \sigma'(t) + \frac{\eta''(t)}{4} = 0,$$

را بدست می‌آوریم، و حال برای برقرار بودن عبارت بالا می‌بایست روابط

$$\eta'''(t) = 0, \qquad \rho''(t) = 0, \qquad \sigma'(t) = -\frac{\eta''(t)}{4}$$

برقرار باشند. اکنون از این معادلات گروه کلاسیک ساده برای معادله انتشار بصورت:

$$\begin{aligned} \xi(x,t) &= \kappa + \delta t + \beta x + \gamma x t, \\ \eta(x,t) &= \alpha + 2\beta t + \gamma t^2, \\ \zeta(x,t) &= -\gamma\Big(\frac{x^2}{4} + \frac{t}{2}\Big) - \frac{\delta x}{2} + \lambda, \end{aligned} \qquad (18.6)$$

نتیجه می‌شود که در آن α، β، γ، δ، λ و κ شش ثابت دلخواه هستند که این نتایج با نتایجی که در بلومن و کول (۱۹۷۴) بدست آمده است، قابل مقایسه می‌باشند. برخی از این ثابتها از جوابهای استاندارد یا حتی بدیهی (۳.٦) ناشی شده‌اند. روشهای بدست آودن شکل عمومی گروههای یک–پارامتری و جوابهای متجانس برای معادله انتشار که در کتاب «بلومن و کول (۱۹۷۴)» به آنها پرداخته شده است می‌تواند برای خواننده آموزنده باشد. می‌بایست به این نکته دقت داشته باشیم که ثابتهای κ، α و λ بترتیب از ناوردایی (۳.٦) تحت انتقال به اندازهٔ x و t و امتداد به اندازهٔ c بوجود آمده‌اند(مسئله ۱ را ببینید).

در مثالهای بخش بعدی به بررسی ثابتهای β، γ و δ خواهیم پرداخت.

۴.٦ مثالهایی ساده برای معادله انتشار

جواب متجانس کلاسیک عمومی (۳.٦) از (۲.٦) و (۱۸.٦)(با فرض اینکه ثابتها مخالف صفرند) بدست می آید. برای توصیف آنچه در بخش‌های قبلی گفته شد در نظر گرفتن جوابهایی که از یک ثابت مخالف صفر و مابقی مخالف صفر، بوجود می آید، مفید خواهد بود.

۱.۴.٦ مثال. $\beta = 1$، $\alpha = \gamma = \delta = \lambda = \kappa = 0$. در این حالت شکل عمومی گروه تبدیلات یک–پارامتری مورد نظر با حل معادله

$$\frac{dx_1}{d\varepsilon} = x_1, \qquad \frac{dt_1}{d\varepsilon} = 2t_1, \qquad \frac{dc_1}{d\varepsilon} = 0,$$

و در نظر گرفتن شرایط اولیه

$$x_1 = x, \qquad t_1 = t, \qquad c_1 = c, \qquad (19.6)$$

در $\varepsilon = ۰$، بدست می‌آید که در این حالت معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$x_۱ = e^{\varepsilon}x \quad t_۱ = e^{۲\varepsilon}t, \quad c_۱ = c,$$

درنتیجه ثابت β، ناوردایی (۳.۶) تحت امتداد همسانی روی x و t را منعکس می‌کند. بنابراین از (۲.۶) معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی

$$x\frac{\partial c}{\partial x} + ۲t\frac{\partial c}{\partial t} = ۰,$$

بدست می‌آید که حل آن به فرم تابعی منجر می‌شود که قبلاً در مسئله ۷ فصل ۱ آن را بررسی کرده‌ایم.

۲.۴.۶ مثال. $\delta = ۱$، $\alpha = \beta = \delta = \lambda = \kappa = ۰$. بمنظور نتیجه گرفتن شکل عمومی از گروه مورد نظر می‌بایست معادلات

$$\frac{dx_۱}{d\varepsilon} = t_۱, \quad \frac{dt_۱}{d\varepsilon} = ۰, \quad \frac{dc_۱}{d\varepsilon} = -\frac{x_۱}{۲}c_۱,$$

را با در نظر گرفتن شرایط اولیه (۱۹.۶) حل کنیم که در این صورت به جوابهای

$$x_۱ = x + \varepsilon t, \quad t_۱ = t, \quad c_۱ = c\exp\Big(-\frac{\varepsilon x}{۲} - \frac{\varepsilon^۲ t}{۴}\Big).$$

دست می‌یابیم. در ادامه با استفاده از (۲.۶) فرم تابعی جواب با حل معادله

$$t\frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{x}{۲}c,$$

بصورت

$$c(x,t) = e^{-x^۲/۴t}\phi(t), \qquad (۲۰.۶)$$

بدست می‌آید که در آن $\phi(t)$ تابع دلخواهی از t است. با جایگذاری (۲۰.۶) در (۳.۶) معادله دیفرانسیل معمولی

$$\phi'(t) + \frac{\phi(t)}{۲t} = ۰,$$

را نتیجه می‌گیریم که دارای جوابی بشکل

$$\phi(t) = \frac{\phi_۰}{\sqrt{t}},$$

است که $\phi_۰$ ثابتی دلخواه می‌باشد. از این معادله و (۲۰.۶) قابل مشاهده است که ثابت δ، از جواب بدست آمده مثال ۱.۲، ناشی شده است.

۳.۴.۶ مثال. $\gamma = ۱$، $\alpha = \beta = \delta = \lambda = \kappa = ۰$. در این حالت داریم:

$$\frac{dx_۱}{d\varepsilon} = x_۱t_۱, \quad \frac{dt_۱}{d\varepsilon} = t_۱^۲, \quad \frac{dc_۱}{d\varepsilon} = -\Big(\frac{x_۱^۲}{۴} + \frac{t_۱}{۲}\Big)c_۱, \qquad (۲۱.۶)$$

که دارای شرایط اولیه (۱۹.۶) می‌باشد. اکنون از (۲۱.۶) داریم،

$$t_۱ = \frac{t}{(۱ - \varepsilon t)}, \qquad (۲۲.۶)$$

و بنابراین ۱−(۲۱.۶) به معادله

$$\frac{dx_۱}{d\varepsilon} = \frac{x_۱ t}{(۱ - \varepsilon t)},$$

تبدیل می‌شود که دارای جوابی بشکل

$$x_۱ = \frac{x}{(۱-\varepsilon t)}. \qquad (۲۳.٦)$$

است و در ادامه با استفاده از (۲۲.٦) و (۲۳.٦) در ۳−(۲۱.٦) و حل معادله نتیجه شده، به جواب

$$c_۱ = c(۱-\varepsilon t)^{۱/۲}\exp\Big(\frac{-\varepsilon x^۲}{۴(۱-\varepsilon t)}\Big). \qquad (۲۴.٦)$$

دست می‌یابیم. بمنظور تعیین شکل تابعی از جوابهای متجانس متناظر بر اساس رابطه (۲.٦) داریم،

$$xt\frac{\partial c}{\partial x} + t^۲\frac{\partial c}{\partial t} = -\Big(\frac{x^۲}{۴}+\frac{t}{۲}\Big)c. \qquad (۲۵.٦)$$

که دارای جوابی بشکل

$$c(x,t) = \frac{e^{-x^۲/۴t}}{t^{۱/۲}}\phi(\frac{x}{t}), \qquad (۲٦.٦)$$

است که ϕ تابعی دلخواه با آرگومانهای مشخص است. با جایگذاری (۲۰.٦) در (۳.٦) و ساده کردن نتیجه می‌شود که:

$$\phi''(\frac{x}{t}) = ۰,$$

بنابراین ثابت γ منجر به جواب

$$c(x,t) = \frac{e^{-x^۲/۴t}}{t^{۱/۲}}\Big(\phi_۰ + \phi_۱\frac{x}{t}\Big),$$

می‌شود که جواب (؟؟) و در نتیجه جواب (۳.٦) که مشتق جواب منبع نسبت به x است، را دربر می‌گیرد. اگر چه هیچ گونه جواب جدیدی با تفکیک ثابتها در (۱۸.٦) بدست نیامد اما این مثالهای ساده یک روند پایه‌ای با جملاتی ساده را تشریح می‌کنند. بمنظور بدست آوردن نتایج غیربدیهی می‌بایست گروه (۱۸.٦) را در حالت کلی در نظر بگیریم که آن را در بخش بعدی با ارجاع به مسائل مقدار مرزی متحرک انجام می‌دهیم (مسائل ٦، ۷، ۸ و ۹ را ببینید).

۵.٦ مسائل مقدار مرزی متحرک

مسائلی که شامل معادله انتشار کلاسیک (۳.٦) بوده و دارای شرایط مرزی نامعلوم $x = X(t)$ هستند، در بسیاری از زمینه‌های مهم علمی، مهندسی و صنعت رخ می‌دهند (بعنوان مثال، هیل (۱۹۸۷) را ببینید). این مسائل در بسیاری از نظام‌ها پراکنده‌اند و بنابراین در نظر گرفتن همهٔ جزئیات در این فرصت مقدور نمی‌باشد. هدف این بخش شناساندن مرزهای متحرک $x = X(t)$ است که تحت گروه کلاسیک (۱۸.٦) ناوردا باقی می‌ماند. این مرزها با اغلب نتایج تحلیلی دقیق که برای هر مسئله‌ای در دسترس‌اند، مرتبط بوده و بنابراین یک راهنمای مفید برای حل مسائل دیگر از این دست معادلات را بوجود می‌آورند.

بطور کلی مسائل مرزی متحرک بشکل

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^۲ c}{\partial x^۲}, \qquad ۰ < x < X(t),\\ &c(X(t),t) = ۰, \qquad \frac{\partial c}{\partial x}(X(t),t) = -\dot{X}(t), \end{aligned} \qquad (۲۷.٦)$$

همراه با c یا $\frac{\partial c}{\partial x}$ (یا ترکیب خطی از این دو) می‌باشد که در $x = ۰$ تعیین شده و دارای داده‌های اولیه تعیین شده برای c و X می‌باشد. دقت می‌کنیم که نقطه مشتق نسبت به زمان را نشان می‌دهد و برای این مسئله شرط اولیه $c = ۰$ برقرار است. چنین مسئله‌ای غیرخطی هستند و جالب است بدانیم که خاصیت غیرخطی بودن این مسائل موجب می‌شود که این مسائل به مسائل مقدار مرزی ثابت تبدیل شوند. با فرض اینکه $X(t)$ و $\dot{X}(t)$ هیچ وقت صفر نمی‌شوند و داده‌های تعیین شده برای c یا $\frac{\partial c}{\partial x}$ در $x = ۰$ بطور صریح شامل c نیستند، می‌توانیم تبدیل

$$\rho = \frac{x}{X(t)}, \qquad \tau = X(t), \qquad (۲۸.٦)$$

را بسازیم که با $c(x,t=C(\rho,\tau))$ مسئله مقدار مرزی (۲۷.٦) به مسئله

$$\frac{\partial^2 C}{\partial\rho^2}=\frac{\partial C}{\partial\rho}(1,\tau)\Big\{\rho\frac{\partial C}{\partial\rho}-\tau\frac{\partial C}{\partial\tau}\Big\},\qquad 0<\rho<1,$$
$$C(1,\tau)=0,\qquad \frac{\partial C}{\partial\rho}(1,\tau)=-\tau\dot{\tau}. \tag{۲۹.٦}$$

تبدیل می‌شود. در نتیجه معادله (۲۷.٦) را به یک مسئله مقدار مرزی ثابت تبدیل کرده‌ایم. تنها مشکلی که در این زمینه وجود دارد این است که مسئله موجود غیرخطی است. بعنوان مثال، برای داده‌های تعیین شده $c(0,t)=c_0$ و $X(0)=a$ که c_0 و a ثابت بوده و با شرایط اولیه صفر معادله (۲۹.٦) بصورت

$$C(0,\tau)=c_0,\qquad \tau(0)=a. \tag{۳۰.٦}$$

تبدیل می‌شود که در این حالت برای آن جوابی بشکل $C=\phi(\rho)$ وجود دارد. بسهولت می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$\phi(\rho)=c_0\Big\{\int_\rho^1 e^{-b\sigma^2/2}d\sigma\Big\}\Big\{\int_0^1 e^{-b\sigma^2/2}d\sigma\Big\}^{-1}, \tag{۳۱.٦}$$

که $b=-\phi'(\rho)$ بوده و ریشهٔ

$$b=c_0e^{-b/2}\Big\{\int_0^1 e^{-b\sigma^2/2}d\sigma\Big\}^{-1}, \tag{۳۲.٦}$$

است و $X(t)$ (یا $\tau=t$) بصورت زیر تعریف شده است:

$$X(t)=(a^2+2bt)^{1/2}. \tag{۳۳.٦}$$

مشاهده می‌کنیم که (۳۳.٦)، مقدار مرزی متحرک معلوم $X(t)=(2bt)^{1/2}$ را بعنوان حالت خاص در بر می‌گیرد(هیل (۱۹۸۷) صفحه ۱۲ را ببینید). نوشته‌هایی در ارتباط با جواب عمومی معادله انتشار با مقدار مرزی متحرک بشکل (۳۳.٦) وجود دارند که مراجع مناسب آنرا می‌توان در هیل (۱۹۸۷) یافت. در اینجا بطور ساده مقادیر مرزی متحرک را که تحت گروه (۱۸.٦) ناوردا باقی می‌مانند را در نظر می‌گیریم(بلومن و کول (۱۹۷۴) را ببینید). کاربرد جوابهای متجانس نتیجه شده شامل بسطهای پیچیده از توابع ویژه است که در حوزه هدف ما قرار نمی‌گیرد.

زمانی که شکل تابعی از جواب $c(x,t)$ از (۲.٦) نتیجه می‌شود آنگاه می‌بایست دو جواب مستقل از دستگاه معادلات

$$\frac{dx}{ds}=\xi(x,t),\qquad \frac{dt}{ds}=\eta(x,t),\qquad \frac{dc}{ds}=\zeta(x,t)c. \tag{۳۴.٦}$$

را داشته باشیم. با فرض اینکه معادله

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\xi(x,t)}{\eta(x,t)}, \tag{۳۵.٦}$$

دارای جواب ثابت $w(x,t)=\text{constant}$ است، نتیجه می‌شود که w متغیر متجانس است. اکنون از معادله

$$\frac{dc}{dt}=\frac{\zeta(x,t)}{\eta(x,t)}c, \tag{۳٦.٦}$$

و با انتخاب $x=x(w,t)$ (با در نظر گرفتن w بعنوان ثابت) می‌توانیم نتیجه بگیریم که فرم تابعی جواب، بشکل

$$c(x,t)=\phi(w)\psi(w,t), \tag{۳۷.٦}$$

است که w در هر دو تابع ϕ و ψ، تابعی منظم از x و t می‌باشد.

با فرض اینکه مرز $x=X(t)$ تحت گروه (۱.٦) ناوردا باقی می‌ماند و رابطه $x_1=X(t_1)$ برقرار است، داریم:

$$\frac{dX}{dt}=\frac{\xi(x,t)}{\eta(x,t)}, \tag{۳۸.٦}$$

بطوریکه w بعنوان متغیر متجانس، مرزهای ناوردا از معادله

$$w(X(t),t) = w_{\circ}, \qquad (۳۹.٦)$$

را تعریف می‌کند که در این معادله $w_{\circ}$ ثابت دلخواه است. در حالت خاص برای گروه کلاسیک از ۱−(۱۸.٦)، ۲−(۱۸.٦) و (۳۸.٦) می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\frac{d}{dt}\Big\{\frac{X}{(\alpha + ۲\beta t + \gamma t^{۲})^{۱/۲}}\Big\} = \frac{\kappa + \delta t}{(\alpha + ۲\beta t + \gamma t^{۲})^{۳/۲}}. \qquad (۴۰.٦)$$

که برای حل معادله (۴۰.٦) چهار حالت جداگانه زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت (i) $\quad \beta^{۲} = \alpha\gamma$. در این حالت مقدار ناوردا بشکل

$$X(t) = At + B + w_{\circ}(\alpha + ۲\beta t + \gamma t^{۲})^{۱/۲}, \qquad (۴۱.٦)$$

است که در آن A و B ثابتهایی‌اند که بصورت

$$A = \Big(\frac{\kappa\gamma - \delta\beta}{\alpha\gamma - \beta^{۲}}\Big), \quad B = \Big(\frac{\kappa\beta - \delta\alpha}{\alpha\gamma - \beta^{۲}}\Big). \qquad (۴۲.٦)$$

تعریف شده‌اند. مشاهده می‌کنیم (۴۱.٦)، (۳۳.٦) را بعنوان حالت خاصی در بر می‌گیرد و چون آن شامل شش ثابت دلخواه α، β، γ، δ، κ و $w_{\circ}$ است آنرا می‌توان بعنوان عبارت تقریبی برای مقدار مرزی متحرک نامعلوم در نظر گرفت.

حالت (ii) $\quad \beta^{۲} = \alpha\gamma$ و $\delta = \circ$. در این حالت داریم:

$$X(t) = \frac{(\delta\beta - \kappa)}{۲(t+\beta)} + w_{\circ}(t+\beta) - \delta. \qquad (۴۳.٦)$$

حالت (iii) $\quad \alpha \neq \circ$، $\beta = \gamma = \circ$. در این حالت بدست می آوریم:

$$X(t) = \kappa t + \frac{\alpha t^{۲}}{۲} + w_{\circ}. \qquad (۴۴.٦)$$

حالت (iv) $\quad \alpha = \beta = \gamma = \circ$ و $\gamma \neq \circ$. برای این حالت، متغیر متجانس بطور ساده $w = t$ و مقادیر ناوردا بصورت $t = \text{constant}$ بدست می آید.

در بلومن و کول (۱۹۷۴) صفحهٔ (۲۳۵) مرزهای متحرک ارائه شده در بالا برای مسئله مقدار مرزی متحرک وارون استخراج شده است، به این معنا که گرمای وارد شده به مرز متحرک مشخص نیست اما ترجیحاً با شکل خاص مقدار مرزی متحرک مفروض سازگار است.

جوابهای نتیجه شده از معادله (۳.٦) متناظر با چهار حالت بالا را بطور مختصر در مسائل ٦، ۷، ۸ و ۹ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

٦.٦ معادله فوکر−پلانک

در این بخش گروههایی بشکل (۱.٦) که معادله فوکر−پلانک (۴.٦) را ناوردا می‌کنند، مورد بررسی قرار می‌دهیم. بلومن و کول (۱۹۷۴) صفحه (۲۸۵) تحلیلهای جزیی از مسئله مقدار مرزی برای حالت خاصی از (۴.٦) با $p(x)$ برابر با ثابت، ارائه می‌کنند. در

اینجا ابتدا شکل عمومی گروه برای تابع دلخواه $p(x)$ و $q(x)$ را بدست می‌آوریم و سپس این نتایج را برای توابع خاص $p(x)$ و $q(x)$ شرح می‌دهیم. در اینجا قرارداد می‌کنیم که توابع $I(x)$ و $J(x)$ بصورت

$$I(x)=\int^x \frac{dy}{p(y)^{۱/۲}}, \qquad J(x)=\frac{d}{dx}\Big(p(x)^{۱/۲}\Big)+\frac{q(x)}{p(x)^{۱/۲}}. \qquad (۴۵.۶)$$

تعریف شده‌اند که این توابع با در نظر گرفتن $p(x)\neq ۰$ در بازه مورد نظر خوش تعریف‌اند. می‌بایست دقت کنیم که در سرتاسر این فصل علامت پریم مشتق نسبت به آرگومان مشخص است.

از فرمولهای مشتقات جزیی تبدیل یافته (۸.۶)، (۱۰.۶) و (۱۳.۶) و استفاده از (۴.۶) با حذف $\partial^۲ c/\partial x^۲$ شرایط ناوردایی (۴.۶) به شرایط زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&c\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\Big(\zeta-\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big)\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}\\
&\quad=\Big(\zeta-۲\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{p'(x)}{p(x)}\xi\Big)\Big\{\frac{\partial c}{\partial t}-(p'(x)+q(x))\frac{\partial c}{\partial x}-q'(x)c\Big\}\\
&\quad+p(x)\Big\{c\frac{\partial^۲\zeta}{\partial x^۲}+\Big(۲\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial^۲\xi}{\partial x^۲}\Big)\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\partial^۲\eta}{\partial x^۲}\frac{\partial c}{\partial t}-۲\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^۲ c}{\partial x\partial t}\Big\}\\
&\quad+(p'(x)+q(x))\Big\{c\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\Big(\zeta-\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial t}\Big\}\\
&\quad+(p''(x)+q'(x))\xi\frac{\partial c}{\partial x}+c(\xi q''(x)+\zeta q'(x)).
\end{aligned} \qquad (۴۶.۶)$$

اکنون از ضرایب $\partial^۲ c/\partial x\partial t$ بسهولت بدست می‌آوریم: $\eta=\eta(t)$، بدین معنا که η تنها به متغیر t وابسته است و به یک روش ساده از ضریب $\partial/\partial t$، نتیجه می‌شود که ζ بصورت:

$$\xi(x,t)=\frac{\eta'(t)}{۲}p(x)^{۱/۲}I(x)+\rho(t)p(x)^{۱/۲}, \qquad (۴۷.۶)$$

می‌باشد که در آن $\rho(t)$ تابع دلخواه از t بوده و $I(x)$ انتگرال معلوم تعریف شده در (۴۵.۶) است و از ضریب $\partial c/\partial x$ در (۴۶.۶) بدست می‌آوریم:

$$\zeta(x,t)=-\frac{\eta''(t)}{۸}I^۲+-\frac{\rho'(t)}{۲}I-\frac{\eta'(t)}{۴}IJ-\frac{\rho(t)}{۲}J+\sigma(t), \qquad (۴۸.۶)$$

که $\sigma(t)$ تابع دلخواه بعدی از t را نشان می‌دهد و $J(x)$ در ۲−(۴۵.۶) تعریف شده است. با جایگذاری عبارات بالا برای ξ، η و ζ در معادله بدست آمده و صفر قرار دادن ضریب c در (۴۶.۶) معادلهٔ

$$\begin{aligned}
&\frac{\eta''(t)}{۸}I(x)^۲+\frac{\rho''(t)}{۲}I(x)-\frac{\eta''(t)}{۴}-\sigma'(t)\\
&=\frac{\eta'(t)}{۴}\Big\{\frac{p(x)^{۱/۲}}{۲}\phi'(x)I(x)+\phi(x)\Big\}+\frac{\rho(t)}{۴}p(x)^{۱/۲}\phi'(x).
\end{aligned} \qquad (۴۹.۶)$$

را بدست می‌آوریم که تابع $\phi(x)$ بصورت:

$$\phi(x)=۲p(x)^{۱/۲}J'(x)+J(x)^۲-۴q'(x). \qquad (۵۰.۶)$$

تعریف شده است. در تحلیل معادلهٔ (۴۹.۶) دو حالت مجزا برای بررسی وجود دارد.

حالت (i): $\rho(t)$ **ناصفراست** . در این حالت داریم:

$$\phi(x)=C_۱I(x)^۲+۲C_۲I(x)+C_۳, \qquad (۵۱.۶)$$

که در آن $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ ثابتهای دلخواهی را نشان می‌دهند و تابعهای $\eta(t)$، $\rho(t)$ و $\sigma(t)$ با حل معادلات زیر بدست آمده‌اند.

$$\begin{aligned}
&\eta'''(t)-۴C_۱\eta'(t)=۰,\\
&\rho''(t)-C_۱\rho(t)=\frac{۳C_۲}{۲}\eta'(t),\\
&\sigma'(t)=\frac{-\eta''(t)}{۴}-C_۳\frac{\eta'(t)}{۴}-C_۲\frac{\rho(t)}{۲}.
\end{aligned} \qquad (۵۲.۶)$$

حالت (ii): $\rho(t)$ **صفر است** . در این حالت داریم:

$$\frac{p(x)^{۱/۲}}{۲}\phi'(x)I(x)+\phi(x)=۲C_۱I(x)^۲+C_۳,$$

که با حل آن به جواب زیر دست می‌یابیم:

$$\phi(x)=C_۱I(x)^۲+C_۳+\frac{C_۴}{I(x)^۲}, \tag{۵۳.٦}$$

که در آن $C_۴$ ثابت دلخواه بعدی است. برای این حالت تابعهای $\eta(t)$ و $\sigma(t)$ با حل معادلات زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\eta'''(t)-۴C_۱\eta'(t)=۰,\\ &\sigma'(t)=-\frac{\eta''(t)}{۴}-C_۳\frac{\eta'(t)}{۴}.\end{aligned} \tag{۵۴.٦}$$

در هر دو حالت برای $p(x)$، کلی‌ترین $q(x)$ با این شرط که معادلهٔ (۴.٦) تحت گروه تبدیلات یک—پارامتری کلاسیک ناوردا بماند، بوسیلهٔ حل معادله

$$۲p(x)^{۱/۲}J'(x)+J(x)^۲-۴q'(x)=f(I), \tag{۵۵.٦}$$

بدست می آید که برای حالت (i)، $f(I)$ بصورت:

$$f(I)=C_۱I^۲+۲C_۲I+C_۳, \tag{۵٦.٦}$$

و برای حالت (ii) بصورت:

$$f(I)=C_۱I^۲+C_۳+\frac{C_۴}{I^۲}. \tag{۵۷.٦}$$

بدست می آید. در ادامه به حل معادلهٔ (۵۵.٦) با فرض I بعنوان یک متغیر مستقل که $I(x)$ بوسیله ۱—(۴۵.٦) تعریف شده است، می‌پردازیم. از (۵۵.٦) داریم:

$$۲\frac{dJ}{dI}+J^۲-\frac{۴}{p^{۱/۲}}\frac{dq}{dI}=f(I), \tag{۵۸.٦}$$

و با استفاده از

$$J=\frac{d}{dI}(\log p^{۱/۲})+\frac{q}{p^{۱/۲}},$$

معادله (۵۸.٦) بصورت معادله ریکاتی:

$$۲\frac{du}{dI}+u^۲=f(I), \tag{۵۹.٦}$$

ساده می شود که در آن u بصورت:

$$u=\frac{d}{dI}(\log p^{۱/۲})-\frac{q}{p^{۱/۲}}. \tag{٦۰.٦}$$

تعریف شده است. اکنون با فرض اینکه $u=\psi(I)$ جواب معادله ریکاتی (۵۹.٦) است آنگاه بر اساس (٦۰.٦) برای تابع $p(x)$ داده شده تابع $q(x)$ را با این شرط که معادله (۴.٦) تحت گروه کلاسیک ناوردا بماند، را بصورت

$$q(x)=\frac{p'(x)}{۲}-p(x)^{۱/۲}\psi(I),\qquad I(x)=\int^x\frac{dy}{p(y)^{۱/۲}}, \tag{٦۱.٦}$$

نتیجه می‌گیریم و همان طور که قابل مشاهده است، $\psi(I)$ در حالت کلی آن شامل چهار ثابت دلخواه است.

بوضوح با $f(I)$ تعریف شده در (۵٦.٦) یا (۵۷.٦) معادله (۵۹.٦) برای مقدارهای خاص $C_۰$، $C_۲$، $C_۳$ و $C_۴$ دارای چند جواب ساده خاص می‌باشد که بمنظور مشاهده جوابهای معادله ریکاتی خواننده را به مرفی (۱۹٦۰) صفحهٔ ۱۵ ارجاع می‌دهیم.

در اینجا جواب عمومی معادله (۵۹.٦) یعنی: جوابهای معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم

$$zw''(z)+(c-z)w'(z)-aw(z)=0, \tag{۶۲.۶}$$

با جملاتی بر حسب تابعهای ابر هندسی ارائه می‌کنیم، که a و c ثابت هستند (مرفی (۱۹۶۰) صفحهٔ ۳۳۱ را ببینید). اگر c ناصحیح باشد، آنگاه (۶۲.۶) جوابهای مستقل خطی

$$\begin{aligned} w_1(z)&={}_1F_1(a,c;z),\\ w_2(z)&=z^{1-c}{}_1F_1(1+a-c,2-c;z), \end{aligned} \tag{۶۳.۶}$$

را دارد که ${}_1F_1(a,c;z)$ بصورت:

$${}_1F_1=(a,c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k z^k}{(c)_k k!}, \tag{۶۴.۶}$$

بوده و نماد $(a)_k$، بصورت:

$$\begin{aligned} &(a)_0=1,\\ &(a)_k=a(a+1)(a+2)...(a+k-1)\qquad (1\le k). \end{aligned} \tag{۶۵.۶}$$

تعریف شده است. مشاهده می‌کنیم که اگر a صحیح منفی باشد آنگاه سریهای (۶۴.۶) به عبارت چند جمله‌ای تقلیل می‌یابد.

بمنظور تقلیل (۵۹.٦) به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم، تبدیل زیر را مورد استفاده قرار می‌دهیم:

$$u(I)=\frac{2}{v(I)}\frac{dv}{dI}, \tag{۶۶.۶}$$

و در اینصورت معادله (۵۹.٦)، به معادلهٔ

$$\frac{d^2v}{dI^2}-\frac{f(I)}{4}v=0. \tag{۶۷.۶}$$

تبدیل می‌شود. برای حل این معادله دو حالت مجزا را بصورت زیر در نظر می‌گیریم.

حالت (i): $\rho(t)$ **ناصفر بوده و** $f(I)$ **در** (۵۶.٦) تعریف شده است. در این حالت فرض می‌کنیم که

$$z=\frac{C_1^{1/2}}{2}\Big(I+\frac{C_2}{C_1}\Big)^2,\qquad v(I)=e^{-z/2}w(z), \tag{۶۸.۶}$$

و (۶۷.۶) به

$$zw''(z)+\Big(\frac{1}{2}-z\Big)w'(z)-aw(z)=0, \tag{۶۹.۶}$$

تبدیل می‌شود که ثابت a بصورت

$$a=\frac{1}{4}+\frac{(C_1C_3-C_2^2)}{8C_1^{3/2}}. \tag{۷۰.۶}$$

تعریف شده است.

حالت (ii): $\rho(t)$ **صفر و** $f(I)$ **در** (۵۷.٦) تعریف شده است. در این حالت فرض می‌کنیم:

$$z=\frac{C_1^{1/2}}{2}I^2,\qquad v(I)=z^m e^{-z/2}w(z), \tag{۷۱.۶}$$

و اینکه معادله (٦٧.٦) بشکل:

$$zw''(z)+\Big(\frac{۱}{۲}+۲m-z\Big)w'(z)-aw(z)=۰, \tag{۷۲.٦}$$

می‌باشد که در آن ثابتهای a و m بصورت:

$$a=\frac{۱}{۴}+\frac{C_۳}{۸C_۱^{۱/۲}}+m, \qquad m=\frac{۱}{۴}\Big(۱-(۱+C_۴)^{۱/۲}\Big). \tag{۷۳.٦}$$

تعریف شده‌اند. توجه می‌کنیم وقتی $C_۴$ صفر است جواب این حالت بر جواب حالت (i) که ثابت $C_۲$ صفر است، منطبق می‌شود.

بعنوان توضیح ساده‌ای برای حالت (i) در نظر گرفته شده در ثابتهای $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ را با شرط $a=-۱/۲$ در نظر می‌گیریم. برای حالت (i) از (٦٦.٦)، (٦٧.٦) و (٦٨.٦) داریم:

$$u(I)=(۲C_۱^{۱/۲}z)^{۱/۲}\Big(\frac{۲}{w(z)}\frac{dw}{dz}-۱\Big), \tag{۷۴.٦}$$

و وقتی $a=-۱/۲$، جوابهای مستقل خطی (٦۹.٦) از (؟؟) بدست آمده‌اند، که بصورت:

$$\begin{aligned} w_۱^* &= e^z-z^{۱/۲}\int^x\frac{e^y}{y^{۱/۲}}dy,\\ w_۲^*(z) &= z^{۱/۲} \end{aligned} \tag{۷۵.٦}$$

می‌باشند. از (۷۴.٦) و (؟؟) برای حالت (i) با $a=-۱/۲$ نتیجه می‌گیریم که جواب معادله ریکاتی (۵۹.٦) به

$$u(I)=(۲C_۱^{۱/۲})^{۱/۲}\Big\{\frac{(۱-z)\Big(C_۵-\int^z\frac{e^y}{y^{۱/۲}}dy\Big)-z^{۱/۲}e^z}{z^{۱/۲}\Big(C_۵-\int^z\frac{e^y}{y^{۱/۲}}dy\Big)+e^z}\Big\}, \tag{۷٦.٦}$$

تبدیل می‌شود که $C_۵$ ثابت دلخواه بعدی است و Z تابعی از I تعریف شده بوسیله ۱—(٦۸.٦) است. در بخش بعدی حالتهای خاص دیگری از (۴.٦) را بررسی می‌کنیم.

۷.٦ مثالهایی برای معادله فوکر—پلانک

۱.۷.٦ مثال. $p(x)=۱$، $q(x)$ دلخواه است.

در این حالت از (۴۵.٦) داریم:

$$I(x)=x, \qquad J(x)=q(x),$$

که از (۵۰.٦) بدست می آوریم:

$$\phi(x)=q(x)^۲-۲q'(x).$$

که در این حالت معادله (۴۹.٦) به معادلهٔ

$$\begin{aligned} \frac{\eta'''(t)}{۸}x^۲ \quad &+ \quad \frac{\rho''(t)}{۲}x-\frac{\eta''(t)}{۴}-\sigma'(t)\\ &= \quad \frac{\eta'(t)}{۲}\Big\{\frac{x}{۲}\phi'(x)+\phi(x)\Big\}+\frac{\rho(t)}{۴}\phi'(x). \end{aligned}$$

تبدیل می‌شود. دو حالت مجزای زیر را بطور مختصر مورد بررسی قرار می‌دهیم:

حالت (i): $\rho(t)$ ناصفر است. در این حالت $q(x)$ بایست در معادله ریکاتی

$$q(x)^2 - 2q'(x) = C_1 x^2 + 2C_2 x + C_3,$$

صدق کند و $\eta(t)$، $\rho(t)$ و $\sigma(t)$ از معادله (؟؟) بدست آمده‌اند.

حالت (ii) $\rho(t)$ صفر است. در این حالت داریم:

$$\frac{x}{2}\phi'(x) + \phi(x) = 2C_1 x^2 + C_3,$$

بااین خصوصیت که:

$$q(x)^2 - 2q'(x) = C_1 x^2 + C_3 + \frac{C_4}{x^2},$$

برقرار است و $\eta(t)$ و $\sigma(t)$ از (۵۴.۶) بدست آمده‌اند.

«بحث کامل و کاربرد این مثال را می‌توان در بلومن و کول (۱۹۷۴) صفحه ۲۵۸ یافت».

۲.۷.۶ مثال. $p(x) = 1$، $q(x) = bx$ که b ثابت است.
در این حالت از حالت (i) از مثال قبلی داریم:

$$C_1 = b^2, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -2b,$$

و توابع $\eta(t)$، $\rho(t)$ و $\sigma(t)$ از معادلات:

$$\begin{aligned}
&\eta'''(t) - 4b^2\eta'(t) = 0,\\
&\rho''(t) - b^2\rho(t) = 0,\\
&\sigma'(t) = -\frac{\eta''(t)}{4} + b\frac{\eta'(t)}{2}.
\end{aligned}$$

تعیین می‌شوند. از این معادلات بسهولت نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\eta(t) &= \alpha + \beta e^{2bt} + \gamma e^{-2bt},\\
\rho(t) &= \delta e^{bt} + \kappa e^{-bt},\\
\sigma(t) &= \gamma b e^{-2bt} + \lambda,
\end{aligned}$$

که α، β، δ، γ، κ و λ شش ثابت دلخواه هستند. و در نتیجه با استفاده از (۴۷.۶) و (۴۸.۶) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\xi(x,t) &= bx(\beta e^{2bt} - \gamma e^{-2bt}) + (\delta e^{bt} + \kappa e^{-bt}),\\
\eta(x,t) &= \alpha + \beta e^{2bt} + \gamma e^{-2bt}\\
\zeta(x,t) &= \lambda + b\gamma e^{-2bt} - b\delta x e^{bt} - b^2 x^2 \beta e^{2bt}.
\end{aligned}$$

بعنوان یک توضیح ساده، حالت $\beta = 1$ و باقی ثابتها برابر صفر را در نظر بگیرید. شکل عمومی گروههای یک–پارامتری با حل معادلهٔ

$$\frac{dx_1}{d\varepsilon} = bx_1 e^{2bt_1}, \quad \frac{dt_1}{d\varepsilon} = e^{2bt_1}, \quad \frac{dc_1}{d\varepsilon} = -b^2 x_1^2 e^{2bt_1} c_1,$$

که با شرایط اولیه (۱۹.۶) بدست می‌آید. و در نتیجه به گروه

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{x}{(1 - 2\varepsilon b e^{2bt})^{1/2}}, \quad t_1 = t - \frac{1}{2b}\log(1 - 2\varepsilon b e^{2bt}),\\
c_1 &= c\exp\Big\{ - \frac{\varepsilon b^2 x^2 e^{2bt}}{(1 - 2\varepsilon b e^{2bt})}\Big\}.
\end{aligned}$$

دست می‌یابیم و بنابراین معادلهٔ با مشتقات جزیی (۲.۶) به معادله

$$bx\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial t}=-b^{۲}x^{۲}c,$$

تبدیل می‌شود که دارای متغیر متجانس w بصورت $w=xe^{-bt}$ بوده و فرم تابعی جواب بصورت:

$$c(x,t)=e^{-x^{۲}/۲}\phi(xe^{-bt}).$$

می‌باشد سپس با جایگذاری این فرم تابعی در (۴.۶) با $p(x)=۱$ و $q(x)=bx$ بطور ساده بدست می آوریم:

$$\phi''(w)=۰.$$

و در نتیجه داریم:

$$c(x,t)=e^{-bx^{۲}/۲}(\phi_{۰}+\phi_{۱}xe^{-bt}),$$

که در آن $\phi_{۰}$ و $\phi_{۱}$ ثابتهای دلخواهی را نشان می‌دهند. انواع جوابهای عمومی این مثال را در مسئله ۱۲ بررسی می‌کنیم.

۳.۷.۶ مثال. معادله دیفرانسیل

$$\frac{\partial c}{\partial t}=a\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}(xc)+b\frac{\partial}{\partial x}(xc),$$

که a و b ثابتهای دلخواهی را نشان می‌دهند.

در این حالت نتایج زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
&p(x)=ax,\qquad q(x)=a+bx,\\
&I(x)=۲\left(\frac{x}{a}\right)^{۱/۲},\qquad J(x)=b\left(\frac{x}{a}\right)^{۱/۲}+\frac{۳}{۲}\left(\frac{a}{x}\right)^{۱/۲},\\
&\phi(x)=\frac{b^{۲}}{a}x+\frac{۳}{۴}\frac{a}{x}.
\end{aligned}$$

که با استفاده از این نتایج، و با استفاده از (۴۹.۶) بدست می آوریم: $\rho(t)$ صفر بوده و $\eta(t)$ و $\sigma(t)$ از معادلات

$$\begin{aligned}
&\eta'''(t)-b^{۲}\eta'(t)=۰,\\
&\sigma'(t)=-\frac{\eta''(t)}{۴}.
\end{aligned}$$

تعیین می‌شوند. در نتیجه نتایج زیر را بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
\xi(x,t)&=bx(\beta e^{bt}-\gamma e^{-bt}),\\
\eta(x,t)&=\alpha+\beta e^{bt}+\gamma e^{-bt},\\
\zeta(x,t)&=\lambda-b(\beta e^{bt}-\gamma e^{-bt})-\frac{b^{۲}}{a}x\beta e^{bt},
\end{aligned}$$

که در آن α، β، γ و λ چهار ثابت دلخواه‌اند. انواع جوابهای مختلف از این مثال در مسئله ۱۳ جمع‌بندی شده‌اند.

۴.۷.۶ مثال. معادله

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}(x^{۲}c)+b\frac{\partial}{\partial x}(xc),$$

که b دوباره ثابتی دلخواه است را در نظر بگیرید.

در این حالت داریم:

$$\begin{aligned}
&p(x)=x^{۲},\qquad q(x)=(b+۲)x,\\
&I(x)=\log x,\qquad J(x)=(b+۳),\qquad \phi(x)=(b+۱)^{۲},
\end{aligned}$$

که در اینصورت معادله (۴۹.۶) به معادله

$$\frac{\eta'''(t)}{8}(\log x)^2+\frac{\rho''(t)}{2}\log x-\frac{\eta''(t)}{4}-\sigma'(t)=\frac{\eta'(t)}{4}(b+1)^2.$$

تبدیل می‌شود. بنابراین بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
&\eta(t)=\alpha+2\beta t+\gamma t^2,\\
&\rho(t)=\kappa+\delta t,\\
&\sigma(t)=-\frac{1}{2}(\gamma+\beta(b+1)^2)t-\frac{\gamma}{4}(b+1)^2t^2+\lambda,
\end{aligned}$$

که در آن α، β، γ، δ، κ و λ شش ثابت دلخواه هستند. از (۴۷.۶) و (۴۸.۶) به توابع

$$\begin{aligned}
&\xi(x,t)=(\beta+\gamma t)x\log x+(\kappa+\delta t)x,\\
&\eta(x,t)=\alpha+2\beta t+\gamma t^2,\\
&\zeta(x,t)=-\frac{\gamma}{4}(\log x)^2-\frac{1}{2}\{\delta+(b+3)(\beta+\gamma t)\}\log x\\
&\qquad-\frac{(b+1)^2}{4}(\alpha+2\beta t+\gamma t^2)-\frac{1}{2}(\beta+\gamma t)-\frac{1}{2}(b+3)(\kappa+\delta t)+\lambda,
\end{aligned}$$

دست می‌یابم. انواع جوابهای این مثال نیز در مسئله ۱۴ بررسی خواهند شد.

۸.۶ گروههای غیر–کلاسیک برای معادله انتشار

در این بخش به بررسی معادله انتشار (۳.۶) براساس (۲.۶) و با شرط اینکه طرف چپ (۱۵.۶) تنها به واسطه c و $\partial c/\partial x$ به c وابسته می‌باشد، می‌پردازیم. در این حالت ابتدا ضرایب c و $\partial c/\partial x$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم، سپس دو معادله برای تعیین گروه‌های غیرکلاسیک براساس (۳.۶) را بدست می آوریم. برای گروه یک پارامتری (۲.۶)، $A(x,t)$ و $B(x,t)$ را بصورت

$$A(x,t)=\frac{\zeta(x,t)}{\eta(x,t)},\qquad B(x,t)=\frac{\xi(x,t)}{\eta(x,t)},\tag{۷۷.۶}$$

تعریف می‌کنیم، در این صورت معادله (۲.۶) به معادله

$$\frac{\partial c}{\partial t}=Ac-B\frac{\partial c}{\partial x}.\tag{۷۸.۶}$$

تبدیل می‌شود . در ادامه با مشتق گیری جزئی از معادله (۷۸.۶) نسبت به x و سپس با استفاده از (۳.۶)، بسهولت معادله زیر را بدست می آوریم:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial t}=\Big(\frac{\partial A}{\partial x}-AB\Big)c+\Big(A-\frac{\partial B}{\partial x}+B^2\Big)\frac{\partial c}{\partial x}.\tag{۷۹.۶}$$

که با جایگذاری (۷۸.۶) و (۷۹.۶) در (۱۵.۶) و صفر قرار دادن ضرایب c و $\partial c/\partial x$ بطور قابل توجهی معادلات نتیجه شده بصورت:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-2A\frac{\partial B}{\partial x},\\
&\frac{\partial B}{\partial t}=\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}-2B\frac{\partial B}{\partial x}-2\frac{\partial A}{\partial x}.
\end{aligned}\tag{۸۰.۶}$$

ساده می‌شوند و این معادلات گروه غیرکلاسیک را تعین می‌کند. اگر چه معادلات فوق غیرخطی بوده و به وضوح پیچیده‌تر از مسئله اولیه‌اند، ولی مشاهده می‌کنیم که هر جواب خاص از آن می‌تواند معادله انتشار را به معادله دیفرانسیل معمولی تحویل کند.

اگر در تعریف فرض کنیم $B=۲\partial\phi/\partial x$، آنگاه با حل ۲−(؟؟) نسبت به x و t و صرف‌نظر از تابع دلخواه از t داریم،

$$A=\frac{\partial^۲\Phi}{\partial x^۲}-۲\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)^۲-\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \qquad (۸۱.٦)$$

که با جایگذاری این عبارت ها برای A و B در ۱−(۲.٦) یک معادله برای تعیین Φ، بصورت:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^۲\Phi}{\partial t^۲}+\frac{\partial^۴\Phi}{\partial x^۴}-۲\frac{\partial^۳\Phi}{\partial t\partial x^۲}-۴\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^۳\Phi}{\partial x^۳}-۸\Big(\frac{\partial^۲\Phi}{\partial x^۲}\Big)^۲+۴\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial^۲\Phi}{\partial x^۲}\\&+۸\frac{\partial^۲\Phi}{\partial x^۲}+\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)^۲+۴\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^۲\Phi}{\partial x\partial t}=۰.\end{aligned} \qquad (۸۲.٦)$$

بدست می آید که بوضوح حل این معادله پیچیده است. گروه کلاسیک را می‌توان حالت خاصی از گروه کلاسیک با $\Phi_{xxx}=۰$ در نظر گرفت که در این صورت $\zeta(x,t)$ صفر بوده و آنگاه نتیجه می شود:

$$A(x,t)=۰,\qquad B(x,t)=-\frac{۱}{h}\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad (۸۳.٦)$$

که $h(x,t)$ جوابی از آن را نشان می‌دهد و بر این اساس جواب نتیجه شده، یعنی $c(x,t)$، در معادلهٔ

$$\frac{\partial c}{\partial x}=h.$$

صدق می‌کند.

۱.۸.٦ مثال. اگر $\Phi(x,t)=\alpha\log x$ آنگاه از (؟؟)، بدست می آوریم: $\alpha=-۱/۲$ یا $\alpha=-۳/۲$: حال به بررسی این دو حالت می‌پردازیم:

(i) در حالت $\alpha=-۱/۲$، داریم:

$$A(x,t)=۰,\qquad B(x,t)=-\frac{۱}{x},$$

بدین صورت که معادله (۷۸.٦) به معادلهٔ

$$\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{۱}{x}\frac{\partial c}{\partial x}=۰,$$

تبدیل می‌شود که دارای جواب عمومی به شکل زیر است:

$$c(x,t)=\phi(w),\qquad w=\frac{x^۲}{۲}+t.$$

با جایگذاری این فرم تابعی در (۳.٦)، به معادله

$$\phi''(w)=۰,$$

دست می‌یابیم و در نتیجه داریم:

$$c(x,t)=\phi_۰\Big(\frac{x^۲}{۲}+t\Big)+\phi_۱,$$

که در آن $\phi_۰$ و $\phi_۱$ ثابتهای دلخواهی را نشان می‌دهند.

(ii) در حالت $\alpha=-۳/۲$، داریم:

$$A(x,t)=-\frac{۳}{x^۲},\qquad B(x,t)=-\frac{۳}{x},$$

بدین صورت که معادلهٔ (۷۸.٦) به معادله

$$\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{۳}{x}\frac{\partial c}{\partial x}=-\frac{۳}{x^۲}c.$$

تبدیل می‌شود. این معادله دارای جواب عمومی بشکل:

$$c(x,t)=x\phi(w),\qquad w=\frac{x^{۲}}{۲}+۳t,$$

است که از آن نتیجه می‌گیریم:

$$c(x,t)=\phi_{۰}x\Big(\frac{x^{۲}}{۲}+۳t\Big)+\phi_{۱}x,$$

که در آن $\phi_{۰}$ و $\phi_{۱}$ ثابتهای دلخواهی را نشان می‌دهند.

مسائل

۱. برای معادله انتشار، نشان دهید گروه یک–پارامتری که از ثابتهای α، κ و λ در (۱۸.٦) بوجود می آید(یعنی، با $\beta=\gamma=\delta=۰$)، آن را به معادلهٔ

$$x_{۱}=x+\kappa\varepsilon,\qquad t_{۱}=t+\alpha\varepsilon,\qquad c_{۱}=e^{\lambda\varepsilon}c$$

تبدیل می‌کند و فرم تابعی جواب (۳.٦) بصورت

$$c(x,t)=e^{\lambda x/\kappa}\phi(\alpha x-\kappa t).$$

می‌باشد و سپس معادله دیفرانسیل معمولی برای ϕ و رابطه این نتایج را با مسئله ۱۴ از فصل ۵ بیابید.

۲. برای معادله انتشار با ثابتهای $\alpha=\gamma=\kappa=\lambda=۰$ و β و δ ناصفر در (۱۸.٦)، نشان دهید که شکل عمومی گروه یک–پارامتری به

$$\begin{aligned}x_{۱}&=xe^{\beta\varepsilon}+t\frac{\delta}{\beta}e^{\beta\varepsilon}(e^{\beta\varepsilon}-۱),\qquad t_{۱}=e^{۲\beta\varepsilon}t,\\ c_{۱}&=c\exp\Big\{-\frac{\delta}{۲\beta^{۲}}\Big[(\beta x-\delta t)(e^{\beta\varepsilon}-۱)+\frac{\delta}{۲}t(e^{۲\beta\varepsilon}-۱)\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

تبدیل می‌شود. همچنین نشان دهید فرم تابعی جواب بصورت

$$c(x,t)=\exp\Big(\frac{\delta^{۲}t}{۴\beta^{۲}}-\frac{\delta x}{۲\beta}\Big)\phi\Big(\delta t^{۱/۲}-\frac{\beta x}{t^{۱/۲}}\Big),$$

بوده و سپس معادله دیفرانسیل معمولی برای ϕ بیابید.

۳. با فرض $c(x,t)=\phi(y)\psi(t)$ که در آن $y=(x/X(t))^{۲}$، را نشان می‌دهد، از معادله انتشار (۳.٦) معادلهٔ

$$\frac{X(t)^{۲}}{۴}\frac{\dot{\psi}(t)}{\psi(t)}=\frac{۱}{\psi(y)}\Big\{y\phi''(y)+\frac{\phi'(y)}{۲}(۱+yX(t)\dot{X}(t))\Big\}.$$

را نتیجه گرفته و سپس نشان دهید اگر $X(t)$ را بصورت:

$$X(t)=(\alpha+۲\beta t)^{۱/۲},$$

که در آن α و β ثابتهای دلخواهی‌اند، تعریف کنیم، آنگاه معادله (۳.٦) دارای جوابی بشکل

$$c(x,t)=X(t)^{۴\alpha/\beta}\phi(y),$$

است که $\phi(y)$ در معادله

$$y\phi''(y)+\Big(\frac{۱}{۲}+\frac{\beta y}{۲}\Big)\phi'(y)-a\phi(y)=۰,$$

صدق می‌کند که در آن a ثابت دلخواه است و با یک تغییر متغیر ساده روی متغیر مستقل نشان دهید که این معادله به معادله ابرهندسی تلاقی تبدیل می‌شود.

۴. با فرض $c(x,t)=\phi(x,t\psi(\rho,\tau))$، که تعاریف زیر در آن برقرار هستند:

$$\rho=\frac{x}{X(t)},\qquad \frac{d\tau}{dt}=\frac{۱}{X(t)^{۲}},\qquad X(t)=(\alpha+۲\beta t+\gamma t^{۲})^{۱/۲},$$
$$\phi(x,t)=\frac{۱}{X(t)^{۱/۲}}\exp\Big\{-\frac{x^{۲}\dot{X}(t)}{۴X(t)}\Big\},$$

ثابت کنید، معادله انتشار (۳.٦)، بصورت

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial\rho^{۲}}-\frac{\delta^{۲}\rho^{۲}}{۴}\psi$$

تبدیل می‌شود که در آن داریم: $\delta=(\beta^{۲}-\alpha\gamma)^{۱/۲}$.

۵. با فرض $c(x,t)=\phi(x,t)\psi(\rho,\tau)$، که ρ، τ و X در معادله (/) از مسئله قبلی تعریف شده‌اند و $\phi(x,t)$ بصورت

$$\phi(x,t)=\frac{۱}{X(t)^{v+۱}}\exp\Big\{-\frac{x^{۲}\dot{X}(t)}{۴X(t)}\Big\},$$

می‌باشد، نشان دهید که معادله انتشار چندبعدی،

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial^{۲}c}{\partial x^{۲}}+\frac{(۲v+۱)}{x}\frac{\partial c}{\partial x},$$

به معادلهٔ

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial\rho^{۲}}+\frac{(۲v+۱)}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}-\frac{\delta^{۲}\rho^{۲}}{۴}\psi,$$

که δ در مسئله قبلی تعریف شده است، تبدیل می‌شود.

٦. با فرض $\alpha\gamma\neq=\beta^{۲}$ و $\beta^{۲}>\alpha\gamma$، نشان دهید با توجه به روابط (۱۸.٦) معادلهٔ (۳۷.٦) به معادله

$$c(x,t)=\frac{\phi(w)}{(\alpha+۲\beta t+\gamma t^{۲})^{۱/۴}}\Big[\frac{\beta+\gamma t-(\beta^{۲}-\alpha\gamma)^{۱/۲}}{\beta=\gamma t+(\beta^{۲}-\alpha\gamma)^{۱/۲}}\Big]^{\mu}$$
$$\text{times}\exp\Big\{-\frac{t}{۴}(A^{۲}+\gamma w^{۲})+\frac{aw}{۲}(\alpha=۲\beta t+\gamma t^{۲})^{۱/۲}\Big\},$$

تبدیل می‌شود که A در ۲−(۴۲.٦) تعریف شده و μ بصورت:

$$w=\frac{x-(At+B)}{(\alpha+۲\beta t+\gamma t^{۲})^{۱/۲}},$$
$$\mu=\frac{۱}{۲(\beta^{۲}-\alpha\gamma)^{۱/۲}}\Big\{\lambda+\frac{\beta}{۲}+\frac{۱}{۴\gamma}[\delta^{۲}+A^{۲}(\alpha\gamma-\beta^{۲})]\Big\},$$

است که در آن B در ۲−(۴۲.٦) داده شده است. و در ادامه با تغییر متغیر (//) برای معادله انتشار (۳.٦) معادله دیفرانسیل زیر

$$\phi''(w)+\beta w\phi'(w)+(Dw^{۲}+E)\phi(w)=۰,$$

که در آن D و E بصورت:

$$D=\frac{\alpha\gamma}{۴},\qquad E=\frac{۱}{۴\gamma}[A^{۲}(\beta^{۲}-\alpha\gamma)-\delta^{۲}]-\lambda.$$

تعریف شده‌اند، را نتیجه بگیرید. اگر در داخل کروشه $\beta^{۲}<\alpha\gamma$ برقرار باشد، در این صورت داریم

$$\exp\Big\{(\alpha\gamma-\beta^{۲})^{-۱/۲}\Big(\lambda+\frac{\beta}{۲}+\frac{۱}{۴\gamma}[\delta^{۲}+A^{۲}(\alpha\gamma-\beta^{۲})]\Big)\tan^{-۱}\Big(\frac{(\alpha\gamma-\beta^{۲})^{۱/۲}}{(\beta^{۲}+\gamma t)}\Big)\Big\}$$

« معادله $\phi(w)$ با جملات تابع ابرهندسی تلاقی می‌تواند بیان شود (بلومن و کول (۱۹۷۴)، صفحه ۲۱۵ را ببینید)».

۷. با فرض $\beta^{۲} = \alpha\gamma$ و $\gamma \neq ۰$، بر اساس معادلات (۱۸.٦) و (۳٦.٦) فرم تابعی را نتیجه بگیرید

$$c(x,t) = \frac{\phi(w)}{(t+\beta)^{۱/۲}} \exp\Big\{\frac{L^{۲}}{۱۲(t+\beta)^{۳}} + \frac{M}{(t+\beta)} - \frac{Lw}{۲(t+\beta)} - \frac{w^{۲}(t+\beta)}{۴}\Big\},$$

که در آن w، L و M بصورت:

$$w = \Big\{x + \delta + \Big(\frac{\kappa - \delta\beta}{۲}\Big)\frac{۱}{(t+\beta)}\Big\}\frac{۱}{(t+\beta)},$$

$$L = \frac{۱}{۲}(\kappa - \delta\beta), \qquad M = -\frac{۱}{۴}(\delta^{۲} + ۲\beta + ۴\lambda).$$

تعریف شده‌اند. سپس بر اساس معادلات (۳.٦) و (///)، نشان دهید $\phi(w)$ در معادلهٔ

$$\phi''(w) - (Lw - M)\phi(w) = ۰.$$

صدق می‌کند.

« جوابهای این معادله را می‌توان با جملاتی بر حسب توابع پوچ نشان داد (بلومن و کول (۱۹۷۴) صفحه ۲۱۷) را ببینید».

۸. اگر $\beta = \gamma = ۰$ و $\alpha = ۰$، نشان دهید از (۱۸.٦) نتیجه می‌شود که (۳۷.٦) به معادلهٔ

$$c(x,t) = \phi(w)\exp\Big\{-\frac{\delta^{۲}t^{۳}}{۱۲} - \frac{\delta\kappa t^{۲}}{۴} + \lambda t - \frac{\delta}{۲}wt\Big\},$$

که w بصورت

$$w = x - \frac{\delta t^{۲}}{۲} - \kappa t.$$

تعریف شده است، تبدیل می‌شود. از (////) و (۳.٦) نتیجه بگیرید $\phi(w)$ در

$$\phi''(w) + \kappa\phi'(w) + \Big(\frac{\delta w}{۲} - \lambda\Big)\phi(w) = ۰.$$

صدق می‌کند.

«این معادله نیز دارای جوابهای قابل بیان با جملاتی بر حسب توابع پوچ است (بلومن و کول (۱۹۷۴)، صفحه ۲۱۸ را ببینید)».

۹. اگر $\alpha = \beta = \gamma = ۰$ و $\delta \neq ۰$، بر اساس (۱۸.٦) نشان دهید که «جواب منبع» یعنی،

$$c(x,t) = \frac{\phi_{۰}}{(t+\kappa)^{۱/۲}} \exp\Big\{-\frac{(x - ۲\lambda)^{۲}}{۴(t+\kappa)}\Big\},$$

را نتیجه بگیرید که در آن $\phi_{۰}$ ثابت دلخواه می‌باشد.

۱۰. نشان دهید معادلهٔ

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big\{p(x)\frac{\partial c}{\partial x}\Big\},$$

با تبدیل

$$c(x,t) = \alpha(x)C(y,t), \qquad y = \beta(x),$$

به معادلهٔ

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^{۲} C}{\partial y^{۲}},$$

تبدیل می‌شود، اگر و تنها اگر $p(x)$ بشکل:

$$p(x) = (C_{۱}x + C_{۲})^{۴/۳}$$

که در آن $C_{۱}$ و $C_{۲}$ نماینده ثابت‌های دلخواهی‌اند، تعریف شود.

۱۱. از مثال ۶.۵ مشاهده می‌شود متغیر متجانس برای گروه کلاسیک

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^۲ c}{\partial x^۲} + b\frac{\partial}{\partial x}(xc),$$

بوسیله حل معادله

$$\frac{d}{dt}\Big\{\frac{x}{(\alpha+\beta e^{۲bt}+\gamma e^{-۲bt})^{۱/۲}}\Big\} = \frac{(\delta e^{bt}+\kappa e^{-bt})}{(\alpha+\beta e^{۲bt}+\gamma e^{-۲bt})^{۳/۲}},$$

که α، β، γ، δ و κ در همان مثال تعریف شده‌اند، بدست می آید. با انجام تبدیل

$$\rho = e^{۲bt},$$

نشان دهید که معادله $(+)$ را با در نظر گرفتن جهار حالت متفاوتی که برای حل معادله انتشار کلاسیک بکار بردیم، می‌توان حل کرد و در هر یک از حالات متغیر متجانس را بدست آورید.

۱۲. با رجوع به مثال ۶.۵ انواع حالتهای زیر را که در آن $c(x,t)$ بصورت:

$$c(x,t) = \phi(w)\psi(w,t).$$

تعریف شده و همچنین در آن داریم: $\eta \to ۰$ وقتی که $t \to ۰$، را بررسی کنید.

(i) $\beta = ۰,\quad \alpha = -\gamma = ۱$،

$$w = \frac{x\tau+\delta^*+\kappa^*}{(\tau^۲-۱)^{۱/۲}} - \delta^*(\tau^۲-۱)^{۱/۲},$$
$$\psi(w,\tau) = \tau(\tau^۲-۱)^{\lambda^*/۲}\exp\Big\{b\delta^*\Big(w(\tau^۲-۱)^{۱/۲}+\frac{\delta^*\tau^۲}{۲}\Big)\Big\}$$
$$\phi''(w)+bw\phi'(w)-b\lambda^*\phi(w) = ۰.$$

(ii) $\gamma = ۰,\quad \beta = -\alpha = ۱$،

$$w = \frac{x+(\delta^*+\kappa^*)\tau}{(\tau^۲-۱)^{۱/۲}} + \kappa^*\frac{(\tau^۲-۱)^{۱/۲}}{\tau},$$
$$\psi(w,t) = \Big(\frac{\tau^۲-۱}{\tau^۲}\Big)^{\lambda^*}\exp\Big\{-\frac{b}{۲}\Big[(w^۲+(\delta^*+۲\kappa^*)^۲)\tau^۲-۲(\delta^*+۲\kappa^*)w\tau(\tau^۲-۱)^{۱/۲}\Big]\Big\},$$
$$\phi''(w)-bw\phi'(w)-(۲\lambda^*+۱)\phi(w) = ۰.$$

(iii) $\alpha = ۰,\quad \beta = -\gamma = ۱$،

$$w = \frac{\tau x+\delta^*+\kappa^*\tau^۲}{(\tau^۴-۱)^{۱/۲}}.$$
$$\psi(w,t) = \frac{\tau}{(\tau^۴-۱)^{۱/۴}}\Big|\frac{\tau^۲-۱}{\tau^۲+۱}\Big|^{\lambda^*}\exp\Big\{-\frac{b}{۲}\Big[(w^۲+{\kappa^*}^۲)\tau^۲-۲\kappa^* w(\tau^۴-۱)^{۱/۲}\Big]\Big\},$$
$$\phi''(w)-b(۴\lambda^*+bw^۲)\phi(w) = ۰.$$

(iv) $\beta=\gamma=-\alpha/۲=۱$،

$$w=\frac{\tau x+۲\delta^*}{(\tau^۲-۱)}+\frac{(\delta^*+\kappa^*)}{(\tau^۲-۱)},$$
$$\psi(w,t)=\frac{\tau}{(\tau^۲-۱)^{۱/۲}}+\exp\Big\{-\frac{\lambda^*}{(\tau^۲-۱)}+b\Big(\frac{\tau^۲w^۲}{۲}\frac{(\delta^*+\kappa^*)w}{(\tau^۲-۱)}-\frac{(\delta^*+\kappa^*)^۲}{٦(\tau^۲-۱)^۳}\Big)\Big\},$$
$$\phi''(w)-۲b\phi'(w)-b\{(۱+۲\lambda^*)+۴(\delta^*+\kappa^*)bw-bw^۲\}\phi(w)=۰.$$

(v) $\beta=۱,\quad \gamma=\mu^۲,\quad \alpha=-(۱+\mu^۲)$،

$$w=\frac{\tau x+\delta^*+\gamma_۱(\tau^۲-\gamma_۲)}{[(\tau^۲-۱)(\tau^۲-\mu^۲)]^{۱/۲}}$$
$$\psi(w,t)=\Big|\frac{\tau^۲-۱}{\tau^۲+\mu^۲}\Big|^{\lambda^*}\Big|\frac{\tau^{۲(۱-\mu^۲)}(\tau^۲-۱)\mu^۲}{\tau^۲-\mu^۲}\Big|^v$$
$$\exp\Big\{-\frac{b}{۲}\Big[(w^۲+\gamma_۱^۲)\tau^۲-۲w\gamma_۱[(\tau^۲-۱)(\tau-\mu^۲)]^{۱/۲}\Big]\Big\}$$
$$\phi''(w)-(۱+u^۲)bw\phi'(w)-b\{(۱+۲\lambda^*)(۱+\mu^۲)-۲b\mu^۲w^۲\}\phi(w)=۰$$
$$\gamma_۱=\frac{۲(۲\kappa^*+(۱+\mu^۲)\delta^*)}{(۱-\mu^۲)^۲},\gamma_۲=\frac{(۱+\mu^۲)}{۲},v=\frac{۱}{۲(۱-\mu^۲)}$$

در هر حالت τ بصورت

$$\tau=e^{bt},$$

بوده و ثابتهای δ^*، κ^* و λ^* را بطور مناسب براساس ثابتهای δ، κ و λ تعریف می‌کنیم. درنتیجه نیازی نیست که در هر حالت آنها همان ثابتهای قبلی باشند.

۱۳. با ارجاع به مثال ٦.٦، با توجه به اینکه $C(x,t)$ بصورت:

$$c(x,t)=\phi()w\psi(w,t).$$

تعریف شده است، جوابهایی زیر را در هر یک از حالات بررسی کنید.

(i) $w=\frac{x\tau}{(\tau-۱)},\quad \psi(w,t)=\tau(\tau-۱)^{\lambda^*}$،

$$aw\phi''(w)+(۲a+bw)\phi'(w)-b\lambda^*\phi(w)=۰.$$

(ii) $w=\frac{x}{(\tau-۱)},\quad \psi(w,t)=\frac{(\tau-۱)^{\lambda^*-۱}}{(\tau)^{\lambda^*}}\exp\Big\{-\frac{b\tau w}{a}\Big\}$،

$$aw\phi''(w)+(۲a-bw)\phi'(w)-b(\lambda^*+۱)\phi(w)=۰.$$

(iii) $w=\frac{x\tau}{(\tau^۲-۱)},\quad \psi(w,t)=\frac{(\tau-۱)^{\lambda^*-۱}}{(\tau+۱)^{\lambda^*+۱}}\exp\Big\{-\frac{b\tau^۲x}{a(\tau^۲-۱)}\Big\}$،

$$aw\phi''(w)+۲a\phi'(w)-\Big(۲b\lambda^*+\frac{b^۲}{a}w\Big)\phi(w)=۰.$$

(iv) $w=\frac{x\tau}{(\tau-1)^2},\quad \psi(w,t)=\frac{\tau}{(\tau-1)^2}\exp\Big\{-\frac{b\tau^2x}{a(\tau^2-1)}+\frac{\lambda^*}{(\tau-1)}\Big\}$،

$$aw\phi''(w)+2(a-bw)\phi'(w)-\Big(\lambda^*-2+\frac{bw}{a}\Big)\phi(w)=0.$$

(v) $w=\frac{x\tau}{(\tau-1)(\mu\tau-1)}$،

$$\psi(w,t)=\frac{\tau}{(\tau-1)(\mu\tau-1)}\Big|\frac{\tau-1}{\mu\tau-1}\Big|^{\lambda^*}\exp\Big\{-\frac{b\mu\tau w}{a}\Big\},$$
$$aw\phi''(w)+[2a-(1+\mu)w]\phi'(w)+\Big\{(1-\lambda^*)+\mu(1+\lambda^*)-\frac{b\mu}{a}w\Big\}\phi(w)=0.$$

در هر حالت τ بصورت:

$$\tau=e^{bt},$$

تعریف شده است که در آن λ^* ثابت دلخواه است.

۱۴. با ارجاع به مثال ٦.٦، جوابهایی از نوع زیر را در هر حالت بررسی کنید، در حالی که $C(x,t)$ بصورت:

$$c(x,t)=\phi(w)\psi(w,t),$$

تعریف شده است.

(i) $\alpha=\beta=0,\quad \gamma=1$،

$$w=\frac{\delta+\log x}{t}+\frac{\kappa}{2t^2},$$
$$\psi(w,t)=\frac{1}{t^{1/2}}\exp\Big\{\frac{\kappa^2}{48t^3}-\frac{\lambda}{t}-\frac{(b+1)^2}{4}t-\frac{w^2t}{4}-\Big[\frac{\kappa}{t}+2(b+3)t\Big]\Big\},$$
$$\phi''(w)-\Big\{\lambda+\frac{(b+3)}{4}\kappa+\frac{\kappa w}{2}\Big\}\phi(w)=0.$$

(ii) $\alpha=\gamma=0,\quad \beta=1/2$،

$$w=\frac{2\kappa+\log x}{t^{1/2}}-2\delta t^{1/2},$$
$$\psi(w,t)=t^{\lambda}\exp\Big\{-\Big[\delta^2+(b+3)\delta+\frac{(b+1)^2}{4}\Big]t-\frac{wt^{1/2}}{2}(2\delta+b+3)\Big\},$$
$$\phi''(w)-\frac{w}{2}\phi'(w)-\lambda\phi(w)=0.$$

(iii) $\gamma=\beta=0,\quad \alpha=1$،

$$w=\log x-\kappa t-\frac{\delta t^2}{2},$$
$$\psi(w,t)=\exp\Big\{-\Big[\lambda+\frac{(b+3)}{2}\kappa+\frac{(b+3)^2}{4}\Big]t-\frac{\delta}{4}(\kappa+b+3)t^2-\frac{\delta^2t^3}{12}-\frac{\delta wt}{2}\Big\},$$
$$\phi''(w)+(b+3+\kappa)\phi'(w)\Big\{\lambda+\frac{(b+3)}{2}\kappa+\frac{(b+3)^2}{4}+\frac{\delta w}{2}\Big\}\phi(w)=0.$$

$\alpha=\mu^{۲},\quad \beta=\circ,\quad \gamma=۱$ (iv)،

$$w=\frac{\delta+۲\kappa t+\log x}{t^{۲}+\mu^{۲}},\qquad P(t)=\exp\Big\{\frac{۱}{۴}\tan^{-۱}\Big(\frac{t}{\mu}\Big)\Big\},$$
$$\psi(w,t)=\frac{P(t)^{\lambda}}{(t^{۲}+\mu^{۲})^{۱/۴}}\exp\Big\{-\frac{۱}{۴}[(b+۱)^{۲}+\kappa^{۲}-۲(b+۳)\kappa+w^{۲}]t$$
$$-\frac{w}{۲}(b+۳-\kappa)(t^{۲}+\mu^{۲})^{۱/۲}\Big\},$$
$$\phi''(w)+(\frac{\mu^{۲}w^{۲}}{۴}-\lambda)\phi(w)=\circ.$$

۱۵. نشان دهید، مسأله مقدار مرزی

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\Big\{p(x)\frac{\partial c}{\partial x}\Big\}+\frac{\partial}{\partial x}\{q(x)c\}\qquad (t>\circ,-\infty<x<\infty),$$
$$c(x,\circ)=c_{\circ}\delta(x-x_{\circ}),$$
$$c(x,t),\frac{\partial c}{\partial x}(x,t)\to\infty,$$

که $c_{\circ}$ و $x_{\circ}$ ثابتهای دلخواهی‌اند، توسط گروه (۱.٦) که توابع $\xi(x,t)$، $\eta(x,t)$ و $\zeta(x,t)$ در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند،

$$\xi(x_{\circ},\circ)=\circ,\eta(x_{\circ},\circ)=\circ,\zeta(x_{\circ},\circ)=-\frac{\partial\xi}{\partial x}(x_{\circ},\circ).$$

ناوردا باقی می‌ماند. سپس با فرض $I_{\circ}=I(x_{\circ})$، نشان دهید توابع $\eta(t)$، $\rho(t)$، و $\sigma(t)$ در (۴۷.٦) و (۴۸.٦) در روابط

$$\eta(\circ)=\circ,\qquad \rho=-\frac{\eta'(\circ)}{۲}I_{\circ},$$
$$\sigma(\circ)=\frac{\eta''(\circ)}{۸}I_{\circ}^{۲}+\frac{\rho'(\circ)}{۲}I_{\circ}-\frac{\eta'(\circ)}{۲}.$$

صدق می‌کنند.

۱٦. برای حالت (i) از بخش ٦.٦ نشان دهید گروهی که مسأله مقدار مرزی در سوال قبلی را ناوردا می‌کند، بشکل

$$\xi(x,t)=۲p(x)^{۱/۲}\sinh(\beta t),\qquad \eta(x,t)=\circ.$$
$$\zeta(x,t)=\beta I_{\circ}+(C_{۲}/\beta)(۱-\cosh(\beta t))-\beta I\cosh(\beta t)-J\sinh(\beta t),$$

است که در آن داریم: $\beta^{۲}=C_{۱}$. سپس نشان دهید جواب آن بشکل

$$c(x,t)=\frac{\phi(t)v(I)}{p(x)^{۱/۲}}\exp\Big\{-\frac{\beta I^{۲}}{۴}+\frac{[\eta^{۲}I_{\circ}+C_{۲}(۱-\cosh(\beta t))]I}{۲\beta\sinh(\beta t)}\Big\},$$

است که در آن $\phi(t)$ یک تابع دلخواه می‌باشد و بر اساس معادله دیفرانسیل با مشقات جزیی داده شده جواب زیر را نتیجه بگیرید:

$$c(x,t)=\frac{\phi_{\circ}v(I)e^{-\alpha t}}{[p(x)\sinh(\beta t)]^{۱/۲}}\exp\Big\{-\Big[\Big(\beta I+\frac{C_{۲}}{\beta}\Big)^{۲}+\Big(\beta I_{\circ}+\frac{C_{۲}}{\beta}\Big)^{۲}\Big]\frac{\coth(\beta t)}{۴\beta}+\Big(\beta I+\frac{C_{۲}}{\beta}\Big)$$
$$\Big(\beta I_{\circ}+\frac{C_{۲}}{\beta}\Big)\frac{۱}{۲\beta\sinh(\beta t)}\Big\},$$

که در آن $\alpha=(C_{۱}C_{۳}-C_{۲}^{۲})/۴C$ و $\phi_{\circ}$ تابع دلخواهی است و در ادامه با فرض $t\to\circ$ نشان دهید:

$$c(x,t)\frac{\phi_{\circ}v(I)e^{-\alpha t}}{[p(x)\beta t]^{۱/۲}}\exp\Big\{-\frac{(I-I_{\circ})^{۲}}{۴t}\Big\},$$

و برای $I(x)$ داده شده بررسی کنید که ثابت $\phi_{\circ}$ از شرایط

$$\int_{-\infty}^{\infty}c(x,t)dx=c_{\circ}.$$

بدست می آید.

۱۷. برای قسمت (ii) در مثال ٦.٦ نشان دهید توابع $\eta(t)$ و $\sigma(t)$ بصورت:

$$\eta(t) = \sinh^{۲}(\beta t),$$
$$\sigma(t) = \frac{\beta^{۲}}{۴} I_{۰}^{۲} - \frac{\beta}{۴}\sinh(۲\beta t) - \frac{C_{۳}}{۴}\sinh^{۲}(\beta t),$$

می‌باشند که در آن داریم: $\beta^{۲} = C_{۱}$. در ادامه از (٢.٦) نتیجه بگیرید فرم تابعی از جواب مسأله مقدار مرزی مساله ۱۵ بصورت

$$c(x,t) \sim \frac{\phi(w) v(I) e^{-\gamma t}}{[p(x)\sinh(\beta t)]^{۱/۲}} \exp\Big\{-\frac{\beta}{۴}(I^{۲} + I_{۰}^{۲})\coth(\beta t)\Big\},$$

است که در آن $w = I(x)/\sinh(bt)$ متغیر مجانس بوده، $\gamma = C_{۳}/۴$ است و $\phi(w)$ در معادلهٔ

$$\phi''(w) - \Big(\frac{\beta^{۲} I_{۰}^{۲}}{۴} + \frac{C_{۴}}{۴w^{۲}}\Big)\phi(w) = ۰.$$

صدق می‌کند. با فرض ω و Φ بصورت:

$$\omega = \beta I_{۰} w/۲, \qquad \phi(w) = w^{۱/۲}\Phi(\omega),$$

نشان دهید:

$$\omega^{۲}\Phi''(\omega) + \omega\Phi'(\omega) - (\omega^{۲} + n^{۲})\Phi(\omega) = ۰,$$

که در آن داریم: $n = (۱ + C_{۴})^{۱/۲}/۲$. سپس براساس نتایج مسئله قبل نشان دهید جواب $\phi(w)$ با شرط $t \to ۰$ خوش رفتار بوده و با شرطهای: $C_{۲} = C_{۴} = ۰$ این تابع بشکل

$$\phi(w) = \frac{\Phi_{۰} w^{۱/۲}}{۲}[I_n(\omega) + I_{-n}(\omega)],$$

در می‌آید که در آن $\phi_{۰}$ ثابت بوده و I_n تابع اصلاح شده بسل از نوع اول است. و در ادامه ثابت کنید با میل کردن $t \to ۰$ می‌توان به نتیجهٔ

$$c(x,t)\frac{\Phi_{۰} v(I) e^{-\gamma t}}{\beta[p(x)\pi I_{۰} t]^{۱/۲}} \exp\Big\{-\frac{(I - I_{۰})^{۲}}{۴t}\Big\}.$$

دست یافت.

۱۸. برای مسأله مقدار مرزی ۱۵ با معادلات زیر،

(i) $\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^{۲} c}{\partial x^{۲}} + b\frac{\partial}{\partial t}(xc)$،

(ii) $\frac{\partial c}{\partial t} = a\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}(xc) + b\frac{\partial}{\partial x}(xc)$،

(iii) $\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}(x^{۲} c) + b\frac{\partial}{\partial x}(xc)$،

که در آن a و b ثابت‌های دلخواه هستند، بترتیب درستی جوابهای زیر را نشان دهید.

(i) $c(x,t) = c_{۰}\Big\{\frac{b}{۲\pi(۱ - e^{-۲bt})}\Big\}^{۱/۲} \exp\Big\{-\frac{b(x - x_{۰} e^{-bt})}{۲(۱ - e^{۲bt})}\Big\}$،

(ii) $c(x,t) = c_{۰}\frac{\gamma(t)}{۲}\Big(\frac{m(t)}{x}\Big)^{۱/۲} I_{۰}(۲\gamma(t)(x m(t))^{۱/۲}) \exp\{-\gamma(t)(x + m(t))\}$، که در این دو جواب $m(t)$ و $\gamma(t)$ بصورت

$$m(t) = x_{۰} e^{-bt}, \qquad \gamma(t) = \frac{b}{a(۱ - e^{-bt})},$$

تعریف شده‌اند.

(iii) $c(x,t) = \frac{۱}{۴(\pi t)^{۱/۲}|x|} \exp\Big\{-\frac{[\log|x/x_{۰}| + (b+۱)t]^{۲}}{۴t}\Big\}$،

۱۹. بر اساس روابط (۱.۶)، گروههای یک—پارامتری که معادلات زیر را ناوردا می‌کنند، بدست آورید.

(i) $\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}\{(۱-x^{۲})^{۲}c\}$،

(ii) $\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x^{m+۱}}{۴}\frac{\partial c}{\partial x}\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{mx^{m}}{۴}c\right\}$،
که m ثابت دلخواه می‌باشد.

۲۰. گروههای کلاسیک و جوابهای این معادلات را بدست آورید.

(i) معادله موج: $\frac{\partial^{۲}c}{\partial t^{۲}}=\frac{\partial^{۲}c}{\partial x^{۲}}$،

(ii) معادله تلگرافچی: $\sigma\frac{\partial^{۲}c}{\partial t^{۲}}+\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial^{۲}c}{\partial x^{۲}}$،
که σ ثابت است.

(iii) معادله انتشار قردادی: $\frac{\partial c}{\partial t}+\delta\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\partial^{۲}c}{\partial x^{۲}}$،
که δ ثابت است.

(iv) معادله کلین—گوردون: $\frac{\partial^{۲}c}{\partial t^{۲}}=\frac{\partial^{۲}c}{\partial x^{۲}}+\lambda c$،
که λ ثابت است.

(v) معادله تریکومی: $\frac{\partial^{۲}c}{\partial t^{۲}}=t\frac{\partial^{۲}c}{\partial x^{۲}}$،

(vi) معادله بارنبلت: $\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial^{۲}c}{\partial x^{۲}}+\alpha\frac{\partial^{۳}c}{\partial x^{۲}\partial t}$،
که α ثابت است.

۲۱. گروههای کلاسیک و جوابهای معادلات زیر را بدست آورید:

(i) معادله لاپلاسین: $\frac{\partial^{۲}c}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}c}{\partial y^{۲}}=\circ$،

(ii) معادله هلمولتز: $\frac{\partial^{۲}c}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}c}{\partial y^{۲}}+\lambda c=\circ$،
که λ ثابت است.

۲۲. فرض می‌شود، مولفه نرمال تنش $\sigma(x,z)$ برای خاک در معادله نفوذ:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z}=\alpha z\frac{\partial^{۲}\sigma}{\partial x^{۲}},$$

با z مثبت عمود به سمت پایین و α ثابت، صدق می‌کند. برای نیم—فضای دو بعدی پایینی با بار متمرکز P در مبدأ، می‌بایست شرایط زیر برقرار باشد.

$$\sigma(x,\circ)=P\delta(x),\qquad \sigma(x,z)\to\circ asx,z\to\infty$$

که در آن $\delta(x)$ تابع دلتای دیراک معمولی می‌باشد. بر این اساس نشان دهید: جواب مناسب این معادله، بشکل:

$$\sigma(x,z)=\frac{P}{z(۲\pi\alpha)^{۱/۲}}\exp\Big(-\frac{x^{۲}}{۲\alpha z^{۲}}\Big)$$

است.

فصل ۷

معادلات دیفرانسیل جزیی غیرخطی

۱.۷ مقدمه

در این فصل به بررسی شکل کلی گروه‌های یک—پارامتری که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی نسبت به آنها ناوردا می‌باشند، می‌پردازیم. برای متغیر ساده وابسته c و دو متغیر مستقل x و t گروه یک—پارامتری بشکل:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x,t,c,\varepsilon) = x + \varepsilon\xi(x,t,c) + O(\varepsilon^2), \\ t_1 &= g(x,t,c,\varepsilon) = t + \varepsilon\eta(x,t,c) + O(\varepsilon^2), \\ c_1 &= h(x,t,c,\varepsilon^2) = c + \varepsilon\zeta(x,t,c) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{۱.۷}$$

را تعریف خواهیم کرد که توابع معلوم $\xi(x,t,c)$، $\eta(x,t,c)$ و $\zeta(x,t,c)$ متغیرهای متجانس بوده و فرم تابعی از جواب با حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی

$$\xi(x,t,c)\frac{\partial c}{\partial x} + \eta(x,t,c)\frac{\partial c}{\partial t} = \zeta(x,t,c). \tag{۲.۷}$$

بدست می آید.

در بخش بعدی فرمولی برای مدل بی‌نهایت کوچک از مشتقات جزیی مرتبه اول و دوم $c(x,t)$ را ارائه می‌کنیم. دوباره برای کامل بودن بحث فرمولهایی برای $\partial^2 c/\partial x\partial t$ $\partial^2 c/\partial t^2$ را بدون اینکه هرگونه استفاده‌ای از آنها بکنیم، می آوریم. در ادامه در بخش‌های بعد گروههای کلاسیک برای معادله انتشار غیرخطی یعنی،

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial x}\Big(D(c)\frac{\partial c}{\partial x}\Big), \tag{۳.۷}$$

رانتیجه می‌گیریم که $D(c)$ تابعی دلخواه از c را نشان می‌دهد. معادله (۳.۷) خوش تعریف است و در آن توان $D(c) = c^m$ بسیار قابل توجه می‌باشد. نتایج بخش ۷.۳ را می‌توان در «اوزجانیکوف (۱۹۶۷)» و «بلومن و کول (۱۹۷۴) صفحهٔ (۲۹۵)» یافت. در بخش ۷.۴ بطور مختصر نگرش غیرکلاسیک را برای معادله انتشار غیرخطی (۳.۷) بررسی خواهیم کرد. اگر چه هیچ گونه نتیجه جدیدی را در این بخش ارائه نمی‌کنیم، لیکن معادلات ارائه شده برای خواننده که علاقمند به تعقیب موضوع است، خلاصه بندی می‌شود. در بخش ۷.۵ دو نتیجه را برای معادله (۳.۷) ارائه می‌کنیم که هر چند بطور مستقیم با روش گروهی مرتبط نیست اما شامل تبدیلات مهمی برای معادله انتشار غیرخطی است. نتیجه اول نشان می‌دهد که هر معادلهٔ بشکل (۳.۷) می‌تواند بوسیلهٔ دنباله‌ای از تبدیلات به معادله‌ای بشکل

$$D(x)\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{c^2}\frac{\partial c}{\partial x}\Big), \tag{۴.۷}$$

تقلیل یابد که در نتیجه انتشار با توان کمترین $D(c) = c^{-2}$ نقش مهمی را ایفا می‌کند. دومین نتیجه عامترین معادله انتشار غیرخطی و ناهمگن با انتشار $D(x,c)$ داده شده این است که آن می‌تواند به معادله انتشار خطی کلاسیک (۳.۶) تقلیل یابد که آن بوسیله معادله (۵۴.۷) صورت می‌پذیرد. دو بخش نهایی از این فصل در ارتباط با جوابهای متجانس برای (۶۰.۷)، (؟؟) و (۶۹.۷) است.

۲.۷ فرمولی برای مشتقات جزیی

در این بخش مدل بی‌نهایت کوچک برای مشتقات جزیی $\partial c/\partial x$، $\partial c/\partial t$، $\partial^{۲} c/\partial x^{۲}$، $\partial^{۲} c/\partial x\partial t$ و $\partial^{۲} c/\partial t^{۲}$ را نتیجه می‌گیریم و دوباره قرارداد می‌کنیم که زیراندیس مشتق جزیی نسبت به x و t و c را بعنوان سه متغیر مستقل نشان می‌دهد. بعنوان مثال داریم:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_x + \xi_c \frac{\partial c}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_t + \xi_c \frac{\partial c}{\partial t}.$$

پس مستقیماً با استفاده از روابط (؟؟) یا از تعریف کردن یک گروهی یک–پارامتری داریم:

$$\begin{aligned} x &= x_{۱} - \varepsilon \xi(x_{۱}, t_{۱}, c_{۱}) + O(\varepsilon^{۲}), \\ t &= t_{۱} - \varepsilon \eta(x_{۱}, t_{۱}, c_{۱}) + O(\varepsilon^{۲}), \end{aligned}$$

که در نتیجه با در نظر گرفتن جملات بر حسب ε بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_{۱}} &= ۱ - \varepsilon\Big(\xi_x + \xi_c \frac{\partial c}{\partial x}\Big) + O(\varepsilon^{۲}), \qquad \frac{\partial x}{\partial t_{۱}} = -\varepsilon\Big(\xi_t + \xi_c \frac{\partial c}{\partial t}\Big) + O(\varepsilon^{۲}), \\ \frac{\partial t}{\partial x_{۱}} &= -\varepsilon\Big(\eta_x + \eta_c \frac{\partial c}{\partial x}\Big) + O(\varepsilon^{۲}), \qquad \frac{\partial t}{\partial t_{۱}} = ۱ - \varepsilon\Big(\eta_t + \eta_c \frac{\partial c}{\partial t}\Big) + O(\varepsilon^{۲}), \end{aligned} \tag{۵.۷}$$

اولاً برای $\partial c/\partial x$ داریم:

$$\frac{\partial c_{۱}}{\partial x_{۱}} = \frac{\partial c_{۱}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_{۱}} + \frac{\partial c_{۱}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_{۱}},$$

و با استفاده از (؟؟) و (؟؟) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{۱}}{\partial x_{۱}} = &\Big\{\frac{\partial c}{\partial x} + \Big(\zeta_x + \zeta_c \frac{\partial c}{\partial x}\Big)\Big\}\Big\{۱ - \varepsilon\Big(\xi_x + \xi_c \frac{\partial c}{\partial x}\Big)\Big\} \\ &+ \Big\{\frac{\partial c}{\partial t} + \varepsilon\Big(\zeta_t + \zeta_c \frac{\partial c}{\partial t}\Big)\Big\}\Big\{-\varepsilon\Big(\eta_x + \eta_c \frac{\partial c}{\partial x}\Big)\Big\} + O(\varepsilon^{۲}), \end{aligned}$$

که بصورت:

$$\frac{\partial c_{۱}}{\partial x_{۱}} = \frac{\partial c}{\partial x} + \varepsilon\Big\{\zeta_x + (\zeta_c - \zeta_x)\frac{\partial c}{\partial x} - \eta_x \frac{\partial c}{\partial t} - \xi_c \Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^{۲} - \eta_c \frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}\Big\} + O(\varepsilon^{۲}) \tag{۶.۷}$$

ساده می‌شود. بطور مشابه برای $\partial c/\partial t$ داریم:

$$\frac{\partial c_{۱}}{\partial t_{۱}} = \frac{\partial c_{۱}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_{۱}} + \frac{\partial c_{۱}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t_{۱}},$$

که با استفاده از روابط (؟؟) و (؟؟) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{۱}}{\partial t_{۱}} = &\Big\{\frac{\partial c}{\partial x} + \varepsilon\Big(\zeta + \zeta_c \frac{\partial c}{\partial x}\Big)\Big\}\Big\{-\varepsilon\Big(\xi_t + \xi_c \frac{\partial c}{\partial t}\Big)\Big\} \\ &+ \Big\{\frac{\partial c}{\partial t} + \varepsilon\Big(\zeta_t + \zeta_c \frac{\partial c}{\partial t}\Big)\Big\}\Big\{۱ - \varepsilon\Big(\eta + \eta \frac{\partial c}{\partial t}\Big)\Big\} + O(\varepsilon^{۲}), \end{aligned}$$

که به معادلهٔ

$$\frac{\partial c}{\partial t_{۱}} = \frac{\partial c}{\partial t} + \varepsilon\Big\{\zeta_t + (\zeta_c - \eta_t)\frac{\partial c}{\partial t}\Big\}\xi_t \frac{\partial c}{\partial x} - \eta\Big(\frac{\partial c}{\partial t}\Big)^{۲} - \xi_c \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial t} + O(\varepsilon^{۲}), \tag{۷.۷}$$

تبدیل می‌شود. اگر برای راحتی کار $\pi_{۱}$ و $\pi_{۲}$ را بصورت:

$$\begin{aligned} \pi_{۱} &= \zeta_x + (\zeta_c - \zeta_x)\frac{\partial c}{\partial x} - \eta_x \frac{\partial c}{\partial t} - \xi\Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^{۲} - \eta_c \frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}, \\ \pi_{۲} &= \zeta_t + (\zeta_c - \eta_t)\frac{\partial c}{\partial t} - \xi_t \frac{\partial c}{\partial x} - \eta\Big(\frac{\partial c}{\partial t}\Big)^{۲} - \xi_c \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial t}, \end{aligned} \tag{۸.۷}$$

تعریف کنیم، آنگاه بطور ساده داریم:

$$\frac{\partial c_1}{\partial x_1}=\frac{\partial c}{\partial x}+\varepsilon\pi_1+O(\varepsilon^2),\qquad \frac{\partial c_1}{\partial t_1}=\frac{\partial c}{\partial t}+\varepsilon\pi_2+O(\varepsilon^2). \tag{۹.۷}$$

همان طور که از روابط (؟؟) مشخص است بطور معادله آن را می‌توان بصورت:

$$\begin{aligned}\pi_1&=\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial t},\\ \pi_2&=\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial t}.\end{aligned} \tag{۱۰.۷}$$

بیان کرد که در اینصورت برای مدل بی‌نهایت کوچک $\partial^2c/\partial x^2$ داریم:

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial c_1}{\partial x_1}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial c_1}{\partial x_1}\Big)\frac{\partial x}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial c_1}{\partial x_1}\Big)\frac{\partial t}{\partial x_1}$$

که با استفاده از (؟؟) و (۹.۷) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2}=&\Big\{\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\varepsilon\Big(\pi_1x+\pi_1c\frac{\partial c}{\partial x}\Big)\Big\}\Big\{1-\varepsilon\Big(\xi_x+\xi_c\frac{\partial c}{\partial x}\Big)\Big\}\\ &+\Big\{\frac{\partial^2 c}{\partial t\partial x}+\varepsilon\Big(\pi_{1t}+\pi_{2c}\frac{\partial c}{\partial t}\Big)\Big\}\Big\{-\varepsilon\Big(\eta_x+\eta_c\frac{\partial c}{\partial x}\Big)\Big\}+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

که بطور ساده نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2}=&\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\varepsilon\Big\{\pi_1x+\pi_{1c}\frac{\partial c}{\partial x}-\Big(\xi_x+\xi_c\frac{\partial c}{\partial x}\Big)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\\ &-\Big(\eta_x+\eta_c\frac{\partial c}{\partial x}\Big)\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial t}\Big\}+O(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{۱۱.۷}$$

در نتیجه از معادله اول (؟؟) داریم:

$$\begin{aligned}\pi_{1x}=&\zeta_{xx}+(\zeta_{xx}-\xi_x x)\frac{\partial c}{\partial x}-\eta_{xx}\frac{\partial c}{\partial t}-\eta_{xc}\frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}\\ &+(\zeta_c-\xi_x)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-\eta_x\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial t}-2\xi_c\frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-\eta_c\frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial^2 c}{\partial t\partial x}-\eta_c\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-\eta_c\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial t},\\ \pi_{1c}=&\zeta_{xc}+(\zeta_{cc}-\xi_{xc})\frac{\partial c}{\partial x}-\eta_{xc}\frac{\partial c}{\partial t}-\xi_{cc}\Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^2-\eta_{cc}\frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}.\end{aligned} \tag{۱۲.۷}$$

و در ادامه با استفاده از از (۱۱.۷) یا (؟؟) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2}=&\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\varepsilon\Big\{\zeta_{xx}+2(\zeta_{xc}-\xi_{xx})\frac{\partial c}{\partial x}-\eta_{xx}\frac{\partial c}{\partial t}\\ &+(\zeta_{cc}-2\xi_{xc})\Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^2-2\eta_{xc}\frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}-\xi_{cc}\Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^3-\eta_{cc}\frac{\partial c}{\partial t}\Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^2\\ &+\Big[(\xi_c-2\xi_x)-3\xi_c\frac{\partial c}{\partial x}-\eta_c\frac{\partial c}{\partial t}\Big]\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-2\Big(\eta_x+\eta_c\frac{\partial c}{\partial x}\Big)\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial t}\Big\}+O(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{۱۳.۷}$$

بطور مشابه برای $\partial^2c/\partial x\partial t$ داریم:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x_1\partial t_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial c_1}{\partial t_1}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial c_1}{\partial t_1}\Big)\frac{\partial x}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial c_1}{\partial t_1}\Big)\frac{\partial t}{\partial x_1},$$

که با استفاده از (؟؟) و ۲–(۹.۷) بدست می آوریم:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x_1\partial t_1}=\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial t}+\varepsilon\Big\{\frac{\partial\pi_2}{\partial x}-\Big(\xi_x+\xi_c\frac{\partial c}{\partial x}\Big)\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial t}-\Big(\eta_x+\eta_c\frac{\partial c}{\partial x}\Big)\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}\Big\}+O(\varepsilon^2) \tag{۱۴.۷}$$

به روش دیگر با استفاده از ۱ −(۹.۷) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial^۲ c_۱}{\partial x_۱ \partial t_۱} = \frac{\partial^۲ c}{\partial x \partial t} + \varepsilon \Big\{ \frac{\partial \pi_۱}{\partial t} - \Big(\xi_t + \xi_c \frac{\partial c}{\partial t} \Big) \frac{\partial^۲ c}{\partial x^۲} - \Big(\eta_t + \eta_c \frac{\partial c}{\partial t} \Big) \frac{\partial^۲ c}{\partial x \partial t} \Big\} + O(\varepsilon^۲), \qquad (۱۵.۷)$$

و عبارات بدست آمده برای (؟؟) و (۱۵.۷)، را می‌توان با استفاده از عبارات (؟؟) به همان ترتیب بدست آورد. با استفاده از (؟؟) و یا استفاده از (؟؟) یا (۱۵.۷) می‌توانیم نتایج زیر را بدست آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^۲ c_۱}{\partial x_۱ \partial t_۱} = \frac{\partial^۲ c}{\partial x \partial t} &+ \varepsilon \Big\{ \zeta_{xt} + (\zeta_{ct} - \xi_{xt}) \frac{\partial c}{\partial x} + (\zeta_{cx} - \eta_{tx}) \frac{\partial c}{\partial x} + (\zeta_{cx} - \eta_{tx}) \frac{\partial c}{\partial t} \\ &- \xi_{ct} \Big(\frac{\partial c}{\partial x} \Big)^۲ + (\zeta_{cc} - \xi_{cx} - \eta_{ct}) \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial t} - \eta_{cx} \Big(\frac{\partial c}{\partial t} \Big)^۲ \\ &- \xi_{cc} \Big(\frac{\partial c}{\partial x} \Big)^۲ \frac{\partial c}{\partial t} - \eta_{cc} (\frac{\partial c}{\partial t})^۲ \frac{\partial c}{\partial x} - (\xi_t + \xi_c \frac{\partial c}{\partial t}) \frac{\partial^۲ c}{\partial x^۲} \\ &+ \Big(\zeta_c - -\xi_x - \eta_t - ۲ \xi_c \frac{\partial c}{\partial x} - ۲ \eta_c \frac{\partial c}{\partial t} \frac{\partial^۲ c}{\partial x \partial t} - \Big(\eta_x + \eta_c \frac{\partial c}{\partial x} \Big) \frac{\partial^۲ c}{\partial t^۲} \Big\} + O(\varepsilon^۲). \qquad (۱۶.۷) \end{aligned}$$

به همین ترتیب می‌توانیم از:

$$\frac{\partial^۲ c_۱}{\partial t_۱^۲} = \frac{\partial^۲ c}{\partial t^۲} + \varepsilon \Big\{ \frac{\partial \pi_۲}{\partial t} - \Big(\xi_t + \xi_t \frac{\partial c}{\partial t} \Big) \frac{\partial^۲ c}{\partial x \partial t} - \Big(\eta_t + \eta_c \frac{\partial c}{\partial t} \Big) \frac{\partial^۲ c}{\partial t^۲} \Big\} + O(\varepsilon^۲)$$

نتایج زیر را نتیجه بگیریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^۲ c_۱}{\partial t_۱^۲} = \frac{\partial^۲ c}{\partial t^۲} &+ \varepsilon \Big\{ \zeta_{tt} + (۲ \zeta_{tc} - \eta_{tt}) \frac{\partial c}{\partial t} - \xi_{tt} \frac{\partial c}{\partial x} \\ &+ (\zeta_{cc} - ۲ \eta_{tc}) \Big(\frac{\partial c}{\partial t} \Big)^۲ - ۲ \xi_{tc} \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial t} - \eta_{cc} \Big(\frac{\partial c}{\partial t} \Big)^۳ - \xi_{cc} \frac{\partial c}{\partial x} (\frac{\partial c}{\partial t})^۲ \\ &+ \Big[(\zeta_c - ۲ \eta_t) - ۳ \eta_c \frac{\partial c}{\partial t} - \xi_c \frac{\partial c}{\partial x} \Big] \frac{\partial^۲ c}{\partial t^۲} - ۲ \Big(\xi_t + \xi_c \frac{\partial c}{\partial t} \Big) \frac{\partial^۲ c}{\partial x \partial t} \Big\} + O(\varepsilon^۲). \qquad (۱۷.۷) \end{aligned}$$

(۱۸.۷)

همچنین قابل مشاهده است که می‌توانیم معادله (؟؟) را براساس (؟؟) با انجام تعویض x و t و ξ و η نتیجه بگیریم.

۳.۷ گروههای غیرکلاسیک برای انتشار غیرخطی

اکنون با بازنویسی (؟؟) بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(c) \frac{\partial^۲ c}{\partial x^۲} + D'(C) \Big(\frac{\partial c}{\partial x} \Big)^۲, \qquad (۱۹.۷)$$

که علامت پریم مشتق نسبت به آرگومان مشخص را نشان می‌دهد. اکنون با استفاده از عبارتهای:

$$\begin{aligned} &D(c_۱) = D(C) + \varepsilon \zeta D'(c) + O(\varepsilon^۲), \\ &D'(c_۱) D'(c) + \varepsilon \zeta D''(c) + O(\varepsilon^۲), \end{aligned}$$

بااستفاده از (۶.۷)، (۷.۷) و (؟؟) به این نتیجه می‌رسیم که معادلهٔ (۱۹.۷) با توابع

$$\begin{aligned} \zeta_t + (\zeta_c - \eta_t) \frac{\partial c}{\partial t} - \xi_t \frac{\partial c}{\partial x} - \eta_c \Big(\frac{\partial c}{\partial t} \Big)^۲ - \xi_c \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial t} \\ = D(c) \Big\{ \zeta_{xx} + (۲ \zeta_{xc} - \xi_{xx}) \frac{\partial c}{\partial x} - \eta_{xx} \frac{\partial c}{\partial t} \\ + (\zeta_{cc} - ۲ \xi_{xc}) \Big(\frac{\partial c}{\partial x} \Big)^۲ - ۲ \eta_{xc} \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial t} - \xi_{cc} \Big(\frac{\partial c}{\partial x} \Big)^۳ \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\eta_{cc}\Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^{2}\frac{\partial c}{\partial t}2\Big(\eta_x+\eta_c\frac{\partial c}{\partial x}\Big)\frac{\partial^{2} c}{\partial x\partial t}\Big\}\\
&+2D'(c)\Big\{\zeta_x+(\zeta_c-\xi_x)\frac{\partial c}{\partial x}-\eta_x\frac{\partial c}{\partial t}-\xi_c\Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^{2}-\eta_c\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial t}\Big\}\frac{\partial c}{\partial x}\\
&+D''(c)\zeta\Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^{2}+\Big\{\frac{\partial c}{\partial t}-D'(c)\Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^{2}\Big\}\Big\{\zeta_c-2\xi_x+\zeta\frac{D'(c)}{D(c)}-3\xi_c\frac{\partial c}{\partial x}-\eta_c\frac{\partial c}{\partial t}\Big\} \qquad (۲۰.۷)
\end{aligned}
$$

تحت گروه (؟؟) ناوردا است که دو آکولاد در جمله آخر از حذف $\partial^{2}c/\partial x^{2}$ بوسیله معادله (۱۹.۷) ناشی شده است. سپس با صفر قرار دادن ضرایب مشتق‌های جزیی در (؟؟) معادلات زیر را بدست می آوریم:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2} c}{\partial x\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}, \qquad \eta_c=0,\\
&\frac{\partial^{2} c}{\partial x\partial t}, \qquad \eta_x=0,\\
&\Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^{3}, \qquad D(c)\xi_{cc}+D'(c)\eta_c=0,\\
&\Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^{2}\frac{\partial c}{\partial t}, \qquad D(c)\eta_{cc}+D'(c)\eta_c=0,\\
&\Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^{2}, \qquad \Big[\zeta_c-2\xi_x+\zeta\frac{D'(c)}{D(c)}\Big]_c=0,\\
&\Big(\frac{\partial c}{\partial t}\Big), \qquad \eta_c-\eta_c=0,\\
&\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial t}, \qquad \xi_c+D(c)\eta_{xc}+D'(c)\eta_x=0,\\
&\frac{\partial c}{\partial x}, \qquad \xi_t-D(c)\xi_{xx}+2D(c)\zeta_{xc}+2D'(c)\xi(x)=0, \qquad (۲۱.۷)\\
&\frac{\partial c}{\partial t}, \qquad \eta_t-D(c)\eta_{xx}-2\xi_x+\zeta\frac{D'(c)}{D(c)}=0, \qquad (۲۲.۷)\\
&c^{\circ}, \zeta_t-D(c)\zeta_{xx}=0. \qquad (۲۳.۷)
\end{aligned}
$$

که از هفت معادله اول بالا بسهولت می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$
\xi=\xi(x,t), \qquad \eta=\eta(t), \qquad (۲۴.۷)
$$

$$
\zeta_c+\zeta\frac{D'(c)}{D(c)}=\phi(x,t), \qquad (۲۵.۷)
$$

که ϕ تابع دلخواهی از x و t را نشان می‌دهد. در ادامه با استفاده از (؟؟) و (؟؟) می‌توانیم نتیجه بگیریم،

$$
\zeta_c=\eta'(t)-2\frac{\partial \xi}{\partial x}+\phi(x,t),
$$

و بنابراین $\zeta_{cc}=0$. از (؟؟) بدست می آوریم:

$$
\zeta=\Big(\frac{D(c)}{D'(c)}\Big)\Big(2\frac{\partial \xi}{\partial x}-\eta'(t)\Big), \qquad (۲۶.۷)
$$

پس در نتیجه داریم:

$$
2\frac{\partial \xi}{\partial x}=\eta'(t), \qquad (۲۷.۷)
$$

یا اینکه ثابت انتشار $D(c)$ دارای خصوصیت زیر است:

$$
\Big(\frac{D(c)}{D'(c)}\Big)=0,
$$

یعنی اینکه

$$
D(c)=\alpha(c+\beta)^{m}, \qquad (۲۸.۷)
$$

که α، β و m ثابتهای دلخواهی هستند. اکنون اگر (؟؟) برقرار باشد، آنگاه از (؟؟) و (٢٦.٧) بسهولت می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\begin{aligned}\xi(x,t,c) &= \frac{\gamma}{2}x+\kappa,\\ \eta(x,t,c) &= \delta+\gamma t,\\ \zeta(x,t,c) &= 0,\end{aligned} \tag{٢٩.٧}$$

که α، δ، κ و λ ثابتهای دلخواه هستند. توجه می‌کنیم، گروه (؟؟) برای همهٔ توابع $D(c)$ قابل استفاده است.

به روش دیگر اگر $D(c)$ بشکل (٢٨.٧) باشد، آنگاه از (٢٦.٧) داریم:

$$\zeta=\frac{1}{m}(c+\beta)\Big(2\frac{\partial\xi}{\partial x}-\eta'(t)\Big), \tag{٣٠.٧}$$

که با جایگذاری این عبارتها در (؟؟) به نتیجه زیر دست می‌یابیم:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=-D(c)\Big(3+\frac{4}{m}\Big)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \tag{٣١.٧}$$

که با جایگذاری (٣٠.٧) در (؟؟) و استغاده از (٣١.٧) آن به معادلهٔ

$$\eta''(t)=-8D(c)\Big(1+\frac{1}{m}\Big)\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}. \tag{٣٢.٧}$$

تبدیل می‌شود، براساس روابط (٣١.٧) و (٣٢.٧) به این نتیجه می‌رسیم که دو حالت قابل بررسی وجود دارد بدین معنا که برای تمامی ثابتهای m داریم:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\eta''(t)=0,$$

که در حالت $m=-4/3$ داریم:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}=\eta''(t)=0,$$

بنابراین برای تمامی m ها داریم،

$$\begin{aligned}\xi(x,t,c) &= \kappa+\lambda x,\\ \eta(x,t,c) &= \delta+\gamma t,\\ \zeta(x,t,c) &= \frac{1}{m}(c+\beta)(2\lambda-\gamma),\end{aligned} \tag{٣٣.٧}$$

که در اینصورت برای $m=-4/3$ داریم:

$$\begin{aligned}\xi(x,t,c) &= \kappa+\lambda x+\mu x^2,\\ \eta(x,t,c) &= \delta+\gamma t,\\ \zeta(x,t,c) &= -\frac{3}{4}(c+\beta)(4\mu x+2\lambda-\gamma),\end{aligned} \tag{٣۴.٧}$$

که γ، δ، κ، λ و μ ثابتهای دلخواه هستند. معالات دیفرانسیل نتیجه شده متناظر با (؟؟)، (؟؟) و (؟؟) در مسائل ١، ٢ و ٣ ارائه شده‌اند.

١.٣.٧ مثال. جواب تولیدی از معادله انتشار غیرخطی (٣.٧) را با ثابت پخش با کم‌ترین توان را بدست آورید.

در این جا می‌بایست معادلهٔ

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(c^m\frac{\partial c}{\partial x}\Big), \tag{٣۵.٧}$$

را با این شرط که $c(x,t)$ در بی‌نهایت صفر می‌شود را حل کنیم بگونه‌ای که آن در شرایط اولیه،

$$c(x,0)=c_0\delta(x), \tag{۳۶.۷}$$

صدق می‌کند، که در آن c_0 و m ثابتهای دلخواهی را نشان می‌دهند و $\delta(x)$ تابع دلتای دیراک معمولی است. با توجه به خاصیت مقدماتی تابع دلتا، یعنی،

$$\delta(\lambda x)=\lambda^1\delta(x),$$

برای هر ثابت ناصفر λ به این نتیجه می‌رسیم که (۳۵.۷) و (۳۶.۷) تحت گروه یک—پارامتری

$$x_1=e^{\varepsilon}x, \quad t_1=e^{(m+2)\varepsilon}t, \quad c_1=e^{-\varepsilon}c,$$

ناوردا است، یعنی داریم:

$$\xi(x,t,c)=x, \quad \eta(x,t,c)=(m+2)t, \quad \zeta(x,t,c)=-c, \tag{۳۷.۷}$$

این معادله با انتخاب $\beta=\delta=\kappa=0$، $\lambda=1$ و $\gamma=(m+2)$ با معادله (؟؟) هم‌ارز است. توجه می‌کنیم که در حالت $D(c)$ ارائه شده در (۲۸.۷) با β ی مخالف صفر هیچ گروه ساده‌ای وجود ندارد که (۳۶.۷) را ناوردا کند.

با استفاده از (۲.۷) و (۳۷.۷) به این نتیجه می‌رسیم که متغیر متجانس و فرم تابعی از جواب با حل معادلهٔ

$$x\frac{\partial c}{\partial x}+(m+2)t\frac{\partial c}{\partial t}=-c,$$

که در آن داریم: $n=(m+2)^{-1}$ بدست می آید. که در اینصورت به فرم تابعی،

$$c(x,t)=\frac{\phi(w)}{t^n}, w=\frac{x}{t^n}, \tag{۳۸.۷}$$

دست می‌یابیم که با جایگذاری (۳۸.۷) در (۳۵.۷) بدست می آوریم،

$$\frac{d}{dw}\{\phi^m(w)\phi'(w)+nw\phi(w)\}=0,$$

و بدین دلیل که $\phi(w)$ در بی‌نهایت صفر می‌شود، نتیجه می گیریم، ثابت انتگرال‌گیری صفر است و بدست می آوریم:

$$\phi^{m-1}(w)\phi'(w)+nw=0,$$

و سپس با حل آن به جواب:

$$\phi(w)=\left\{C-\frac{mw^2}{2(m+2)}\right\}^{1/m}, \tag{۳۹.۷}$$

که C ثابت دلخواهی را نشان می‌دهد، می‌رسیم. با انتخاب C بصورت:

$$C=\frac{mw_1^2}{2(m+2)}, \tag{۴۰.۷}$$

فرض می‌کنیم که $\phi(w)$ برای $|w|>|w_1|$ صفر بوده و شرایط:

$$\int_{-\infty}^{\infty}c(x,0)dx=c_0,$$

به

$$\int_{-w_1}^{w_1}\left(\frac{m}{2(m+2)}\right)^{1/m}(w_1^2-w^2)^{1/m}dw=c_0.$$

تبدیل می‌شود. بنابراین با تعریف $w = w_۱ \sin\theta$ و استفاده از:

$$\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} (\cos\theta)^{۲/m+۱} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(۱+\frac{۱}{m})}{\Gamma(\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{m})},$$

که $\Gamma(x)$ تابع گامای معمولی است، می‌توانیم بسهولت، ثابت c در (۳۹.۷) را بصورت:

$$C = \Big\{\frac{m}{۲(۲+m)}\Big(\frac{c_\circ\Gamma(\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{m})}{\sqrt{\Gamma}(۱+\frac{۱}{m})}\Big)^{۷.۴\circ}\Big\}^{\frac{m}{(۲+m)}}. \tag{۴۱.۷}$$

نتیجه بگیریم. بنابراین روی هم رفته از (۳۸.۷) و (۳۹.۷) جواب تولیدی از (۳۵.۷) را بصورت:

$$\begin{aligned} c(x,t) &= \frac{۱}{t^n}\Big\{C - \frac{mx^۲}{۲(m+۲)t^{۲n}}\Big\}^{۱/m}, \qquad |w| < |w_۱|, \\ c(x,t) &= \circ, \qquad |w| > |w_۱|, \end{aligned} \tag{۴۲.۷}$$

داریم که در آن $n = (m+۲)^{-۱}$، $w = x/t^{۱/n}$، c در (۴۱.۷) و $w_۱$ با استفاده از (۴۰.۷) تعریف شده‌اند.

۴.۷ گروههای غیرکلاسیک برای انتشار غیرخطی

اگر چه هیچ گروه کلاسیک شناخته شده‌ای از (۳.۷) نداریم، در اینجا برای توضیح نگرش غیرکلاسیک برای عبارات غیرخطی، معادلاتی را استخراج می‌کنیم. با تعریف $A(x,t,c)$ و $B(x,t,c)$ بصورت:

$$A(x,t,c) = \frac{\zeta(x,t,c)}{\eta(x,t,c)}. \qquad B(x,t,c) = \frac{\xi(x,t,c)}{\eta(x,t,c)} \tag{۴۳.۷}$$

از (۲.۷) داریم،

$$\frac{\partial c}{\partial t} = A - B\frac{\partial c}{\partial x}. \tag{۴۴.۷}$$

که با مشتق گیری جزیی از (۴۴.۷) نسبت به x و استفاده از (۱۹.۷) و (۴۴.۷) بترتیب برای حذف $\partial^۲ c/\partial x^۲$ و $\partial c/\partial t$ بطور ساده نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial^۲ c}{\partial t\partial x} = \Big(A_x - \frac{AB}{D(c)}\Big) + \Big(A_c - B_x + \frac{B^۲}{D(c)}\Big)\frac{\partial c}{\partial x} + \Big(B\frac{D'(c)}{D(c)} - B_c\Big)\Big(\frac{\partial c}{\partial x}\Big)^۲, \tag{۴۵.۷}$$

یادآوری می‌کنیم که زیراندیس مشتق جزیی نسبت به سه متغیر مستقل x، t و c را نشان می‌دهد. با انتخاب

$$\theta = \frac{\partial c}{\partial x}, \tag{۴۶.۷}$$

و جایگذاری (۴۴.۷) و (۴۵.۷) در (؟؟) عبارتهای درجه سوم زیر را برای θ بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} &\zeta_t + (\zeta_c - \eta_t)(A - B\theta) - \xi_t\theta - \eta_c(A^۲ - ۲AB\theta + B^۲\theta^۲) - \xi_c\theta(A - B\theta) \\ &= D(c)\{\zeta_{xx} + (۲\zeta_{xc} - \xi_{xx})\theta - \eta_{xx}(A - B\theta) + (\zeta_{cc} - ۲\xi_{xc})\theta^۲ \\ &-۲\eta_{xc}\theta(A - B\theta) - \xi_{cc}\theta^۳ - \eta_{cc}\theta^۲(A - B\theta)\} \\ &-۲D(c)(\eta_x + \eta_c\theta)\Big\{\Big(A_x - \frac{AB}{D(c)}\Big) + \Big(A_c - B_x + \frac{B^۲}{D(c)}\Big)\theta\Big(B\frac{D'(c)}{D(c)} - B_c\Big)\theta^۲\Big\} \\ &+۲D'(c)\theta\{\zeta_x + (\zeta_c - \xi_x)\theta - \eta_x(A - B\theta) - \xi_c\theta^۲ - \eta_c\theta^۲ - \eta_c\theta(A - B\theta)\} \\ &+\Big\{\zeta - ۲\xi_x - ۳\xi_c\theta - \eta_c(A - b\theta) + \zeta\frac{D'(c)}{D(c)}\Big\}(A - B\theta - D'(c)\theta^۲) \\ &+D''(c)\zeta\theta^۲, \end{aligned} \tag{۴۷.۷}$$

با صفر قرار دادن ضرایب $\theta^۳$ ، $\theta^۲$ ، θ و θ° معادلات زیر را برای تعیین $A(x,t,c)$ و $B(x,t,c)$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\theta^۳, \quad D(c)_{cc} - D'(c)B_c = \circ,\\
&\theta^۲, \Big[۲B_x - A_c - A\frac{D'(c)}{D(c)}\Big]_c - \frac{۲BB_c}{D(c)} = \circ,\\
&\theta, \quad B_t + ۲[D(c)A_x]_c - ۲AB_c = D(c)_{xx} - ۲BB_x + AB\frac{D'(c)}{D(c)},\\
&\theta^\circ, \quad A_t = D(c)A_{xx} - ۲AB_x + A^۲\frac{D'(c)}{D(c)}.
\end{aligned} \tag{۴۸.۷}$$

مشاهده می‌کنیم که با انتخاب $D(c) = ۱$ ، $A = a(x,t)c$ و $B = b(x,t)$ این معادلات (؟؟) دقیقاً به معادلات (؟؟) برای تابعهای $a(x,t)$ و $b(x,t)$ تقلیل می‌یابند. معادلات (؟؟) را برای توضیح و استفاده در بدست آوردن جوابهای خاص بکار می‌گیریم.

۵.۷ تبدیلات برای معادلات انتشار غیرخطی

کلی‌ترین تبدیل معلوم برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی بطوری که معادله برگر

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}, \tag{۴۹.۷}$$

با تبدیل

$$u = -\frac{۲D}{c}, \frac{\partial c}{\partial x}, \tag{۵۰.۷}$$

(۴۹.۷) را با فرض D ثابت، به معادله انتشار کلاسیک تقلیل می‌دهد. در این بخش نتایج مهمی برای معادله انتشار (۳.۷) را ارائه می‌کنیم.

(i) نتیجه اول این است که هر معادله انتشار غیرخطی بشکل (۳.۷) می‌تواند به معادله زیر تبدیل شود.

$$D(c)\frac{\partial v}{\partial t} = v^۲\frac{\partial^۲ v}{\partial c^۲}, \tag{۵۱.۷}$$

که $v(c,t)$ لزوماً به معادله (۳.۷) وابسته است. بمنظور بررسی همین نتیجه $u(x,t)$ را بصورت

$$u(x,t) = D(c)\frac{\partial c}{\partial x}, \tag{۵۲.۷}$$

تعریف می‌کنیم. با ضرب (۳.۷) به $D(c)$ و مشتق گیری جزیی نسبت به x از معادله نتیجه شده، به

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(D(c)\frac{\partial u}{\partial x}\Big). \tag{۵۳.۷}$$

دست می‌یابیم. اکنون $v(x,t)$ را بگونه‌ای تعریف می‌کنیم که (۵۳.۷) به معادله

$$\frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(D(c)\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial c}\Big),$$

تبدیل شود. که با استفاده از (۳.۷) و (۵۲.۷) بصورت معادله (۵۱.۷) ساده می شود. توجه می کنیم که هم ارزی (۴.۷) و (۵۱.۷) را می‌توان بسهولت مشاهده کرد.

(ii) نتیجه دوم این است که عامترین معادله انتشار غیر خطی و غیر همگن با ثابت پخش $D(x,c)$ می تواند به معادله انتشار کلاسیک (۳.٦) بشکل

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big\{\Big(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma c+\delta}\Big)^۲\frac{\partial c}{\partial x}\Big\}, \tag{۵۴.۷}$$

که α، β، γ و δ ثابتهای دلخواه هستند، تبدیل شود. بمنظور بررسی این نتیجه که (۵۴.۷) می‌تواند به معادله انتشار کلاسیک تقلیل یابد. بدون اینکه به کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود معادله

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\Big(\frac{x}{c}\Big)^{2}\frac{\partial c}{\partial x}\Big\}. \tag{۵۵.۷}$$

را به جای (۵۵.۷) با متغیرهای (x,t) و همچنین معادله

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial c}\Big\{\Big(\frac{c}{w}\Big)^{2}\frac{\partial w}{\partial c}\Big\}, \tag{۵۶.۷}$$

را برای $w(c,t)$ در نظر می‌گیریم. با تعریف تبدیل

$$w(c,t)=\frac{c}{v(c,t)}, \tag{۵۷.۷}$$

نشان می‌دهیم که (۵۶.۷) به

$$\frac{\partial v}{\partial t}=v^{2}\frac{\partial^{2}v}{\partial c^{2}}. \tag{۵۸.۷}$$

تبدیل می‌شود. این همان معادله (۵۱.۷) با $D(c)$ واحد است و بنابراین با تعریف x با شرط

$$v(c,t)u(x,t)\frac{\partial c}{\partial x}, \tag{۵۹.۷}$$

نتیجه می‌گیریم که معادله (۵۸.۷) و معادله انتشار کلاسیک (۳.۶) برای $c(x,t)$، معادل هم هستند.

۶.۷ جواب متجانس معادله انتشار غیرخطی

در این بخش دو مثال از حل معادله انتشار غیرخطی با ثابت پخش با کمترین توان c^{-2} و c^{-1} را ارائه می‌کنیم.

۱.۶.۷ مثال. نشان دهید معادله انتشار غیرخطی

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial c}{\partial x}\Big), \tag{۶۰.۷}$$

جوابی بشکل $c=\phi(x/t^{1/2})$ را با عبارتهای پارامتری

$$w=C_{2}\Big\{e^{-u^{2}}/4+\frac{u}{4}\Big(\int_{0}^{u}e^{-\tau^{2}/4}d\tau+C_{1}\Big)\Big\},$$
$$\frac{1}{\phi}=\frac{C_{2}}{2}\Big(\int_{0}^{u}e^{-\tau^{2}/4}d\tau+C_{1}\Big),$$

که در آن $w=x/t^{1/2}$ بوده و C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی هستند، را می‌پذیرد.
از $c=\phi(x/t^{1/2})$ و (۶۰.۷) می‌توانیم نتیجه بگیریم،

$$\Big(\frac{\phi'}{\phi^{2}}\Big)'+\frac{w}{2}\phi'=0,$$

که علامت پریم مشتق نسبت به w را نشان می‌دهد. با جایگذاری $w=\phi^{-1}$ نتیجه می‌شود

$$\psi''+\psi'=0 \tag{۶۱.۷}$$

و چون این معادله تحت گروه یک–پارامتری

$$w_{1}=e^{\varepsilon}w,\qquad \psi_{1}=e^{\varepsilon}\psi,$$

ناوردا است، متغیر جدید $q=\psi/w$ را با خاصیت: $\psi=wq$ تعریف می‌کنیم و بدست می آوریم:

$$w^{۲}q''+۲wq'+\frac{۱}{۲q^{۲}}(wq'+q)=۰.$$

که این معادله از نوع معادله اویلر بوده و بنابراین با تعریف تبدیل:

$$y=\log w,\qquad p=w\frac{dq}{dw}=\frac{dq}{dy},$$

بدست می آوریم:

$$p\frac{dp}{dq}+\frac{۱}{۲q}+\Big(۱+\frac{۱}{۲q^{۲}}\Big)p=۰,$$

که این معادله‌ای از نوع معادله آبل از مرتبه دوم با جواب منفرد $p=-q$ است. این معادله را به روش زیر حل می‌کنیم. ابتدا قرار می‌دهیم $Y=p+q$ یا $p=Y-q$ که بدست می‌دهد

$$\frac{dY}{dq}+\frac{۱}{۲q^{۲}}+\frac{۱}{۲q(Y-q)}=۰,$$

و سپس با تعریف $X=q^{-۱}$ با این خاصیت که

$$\frac{dY}{dX}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲(XY-۱)},$$

بدست می آوریم:

$$\frac{dX}{dY}=۲-\frac{۲}{XY}.$$

بعد با جایگذاری $X=۲Y+u$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{du}{dY}=-\frac{۲}{Y(۲Y+u)},$$

یا

$$\frac{dY}{du}+\frac{uY}{۲}=-Y^{۲},$$

که حداقل، حل آنرا بعنوان معادله از نوع برنولی استاندارد، یعنی

$$\frac{dv}{du}-\frac{uv}{۲}=۱,$$

بوسیله تبدیل $v=Y^{-۱}$ می‌دانیم و در نتیجه داریم:

$$v=e^{u^{۲}/۴}\Big(\int_{۰}^{u}e^{-\tau^{۲}/۴}d\tau+C_{۱}\Big).$$

اکنون با تعریف

$$f(u)=e^{-u^{۲}/۴}\Big(\int_{۰}^{u}e^{-\tau^{۲}/۴}d\tau+C_{۱}\Big)^{-۱},$$

از $v=Y^{-۱}=(p+q)^{-۱}$ داریم:

$$w\frac{dq}{dw}+q=f(u),$$

پس با توجه به $\psi = wq$، داریم:

$$\frac{d\psi}{dw} = f(u), \tag{۶۲.۷}$$

سپس از $u = X - ۲Y = q^{-۱} - ۲(p+q)$ بدست می آوریم:

$$u = \frac{w}{\psi} - ۲\frac{d\psi}{dw}. \tag{۶۳.۷}$$

اما با مشتق گیری از این معادله و استفاده از (۶۱.۷) نتیجه می‌شود:

$$\frac{du}{dw} = \frac{۱}{\psi}. \tag{۶۴.۷}$$

اکنون از (۶۲.۷) و (۶۳.۷) داریم:

$$\frac{w}{\phi} = u + ۲f(u),$$

که با استفاده از (۶۴.۷) معادله تفکیک–پذیر

$$w\frac{du}{dw} = u + ۲f(u),$$

حاصل می‌شود. بنابراین

$$\frac{۱/۲\Big(\int_۰^u e^{-\tau^۲/۴}d\tau + C_۱\Big)}{\{u/۲(\int_۰^u e^{-\tau^۲/۴}d\tau + C_۱)\}} = \frac{dw}{w},$$

که از این معادله می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$w = C_۲\Big\{e^{-u^۲/۴} + \frac{u}{۲}\Big(\int_۰^u e^{-\tau^۲/۴}d\tau + C_۱\Big)\Big\}.$$

نهایتاً از این معادله، $\psi = \phi^{-۱}$ و (۶۴.۷) داریم:

$$\frac{۱}{\phi} = \frac{dw}{du} = \frac{C_۲}{۲}\Big(\int_۰^u e^{-\tau^۲/۴}d\tau + C_۱\Big),$$

که با نمایش پارمتری داده شده سازگار است.

۲.۶.۷ مثال. حل معادله انتشار غیرخطی

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{۱}{c}\frac{\partial c}{\partial x}\Big), \tag{۶۵.۷}$$

را که جوابی بشکل $c = \phi(x/t^{۱/۲})$ دارد را نتیجه بگیرید.

از فرم جواب و معادله (؟؟) داریم:

$$\Big(\frac{\phi'}{\phi}\Big)' + \frac{w}{۲}\phi' = ۰,$$

که دوباره $w = x/t^{۱/۲}$ بوده و علامت پریم مشتق نسبت به w را نشان می‌دهد. با انتخاب متغیر $\psi = \log\phi$ بدست می آوریم:

$$\psi'' + \frac{w}{۲}e^{\psi}\psi' = ۰, \tag{۶۶.۷}$$

و این معادله تحت گروه یک–پارامتری

$$w_۱ = e^{\varepsilon}w, \qquad \psi_۱ = \psi - ۲\varepsilon,$$

ناوردا است. در نتیجه متغیر جدید $q=\psi+2\log w$ را تعریف می‌کنیم و داریم

$$w^2q''+2+(wq'-2)\frac{e^q}{2}=0.$$

که با انتخاب تبدیل

$$y=\log w \qquad p=w\frac{dq}{dw}=\frac{dq}{dy},$$

می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$p\frac{dp}{dq}+(p-2)\Big(\frac{e^q}{2}-1\Big)=0.$$

این معادله تفکیک—پذیر است و می‌توانیم بسهولت با حل آن به جواب

$$(p-2)^2e^{(p-2)}=Ce^{q-e^q/2},$$

دست یابیم که در آن c ثابت است. توجه کنید که طبیعت غیرصریح بودن حل در فرایندهای بعدی نیز ظاهر می‌شود.

در ادامه نگرش متفاوتی از حل نتیجه شده را برای معادله انتشار غیرخطی با ثابت پخش با کمترین توان را ارائه می‌کنیم. با فرض $c=\phi(x/t^{1/2})$ می‌توانیم از (۳۵.۷) نتیجه بگیریم:

$$(\phi^m\phi')'+\frac{w}{2}\phi'=0, \tag{۶۷.۷}$$

بطوریکه با قرار دادن $u=\phi'$، این معادله به معادله

$$\frac{d}{d\phi}(\phi^m u)+\frac{w}{2}=0,$$

تبدیل می‌شود و با مشتق گیری از این معادله نسبت به ϕ بدست می آوریم:

$$\frac{d^2}{d\phi^2}(\phi^m u)+\frac{1}{2u}=0.$$

و چون این معادله تحت گروه تبدیلات یک—پارامتری

$$\phi_1=e^{\varepsilon}\phi, \qquad u_1=e^{(1-m/2)\varepsilon}u,$$

ناوردا است، با انتخاب $v=u\phi^{m/2}-1$ بعنوان متغیر جدید نتیجه می‌شود:

$$\phi^2\frac{d^2v}{d\phi^2}+(m+2)\phi\frac{dv}{d\phi}+\frac{m(m+2)}{4}v+\frac{1}{2v}=0. \tag{۶۸.۷}$$

حالت خاص معادله (۶۸.۷) متناظر با مثال بالا را می‌توان بسهولت کرد.

(i) $m=-2$: در این حالت (۶۸.۷) به

$$\phi^2\frac{d^2v}{d\phi^2}+\frac{1}{2v}=0,$$

تبدیل می‌شود که با استفاده از تغیر متغیرهای

$$v=\phi V, \qquad \phi=\frac{1}{\Phi},$$

نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^2V}{d\Phi^2}+\frac{1}{2V}=0.$$

با ضرب در $dVd\Phi$ و حل معادله حاصل بدست می آوریم:

$$\left(\frac{dV}{d\Phi}\right)^{۲} + \log V = C_{۱},$$

بگونه‌ای که

$$\Phi = \int^{v/\phi} \frac{dV}{\sqrt{C_{۱} - \log V}} + C_{۲},$$

که در آن $C_{۱}$ و $C_{۲}$ ثابتهای دلخواهی را نشان می‌دهند. بنابراین می‌توانیم دوباره با استفاده از تبدیل بالا، نتیجه بگیریم:

$$\frac{۱}{\phi} = \int^{\phi'/\phi^{۳}} \frac{dV}{\sqrt{C_{۱} - \log V}} + C_{۲}$$

که می‌تواند با تغیر متغیر $\Psi = \phi^{-۲}$ حل شود. در واقع در اینصورت داریم:

$$\int^{-\Psi'/۲} \frac{dV}{\sqrt{C_{۱} - \log V}} - C_{۲}$$

بنابراین برای برخی از توابع $f_{۱}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\Psi' = f_{۱}(\Psi^{۱/۲} - C_{۲}),$$

که نهایتاً نتیجه می‌دهد:

$$w + C_{۳} = \int^{-\phi^{۲}} \frac{d\Psi}{f_{۱}(\Psi^{۱/۲} - C_{۲})},$$

که $C_{۳}$ ثابت سوم انتگرال‌گیری است. یادآور می‌شویم بدلیل اینکه می‌باید (۶۷.۷) برقرار باشد (و نه فقط مشتقات آن)، فقط ثابتهای $C_{۱}$، $C_{۲}$ و $C_{۳}$ دلخواهند.

(ii) $m = -۱$: در این حالت (۶۷.۷) به

$$\phi^{۲}\frac{d^{۲}v}{d\phi^{۲}} + \phi\frac{dv}{d\phi} - \frac{v}{۴} + \frac{۱}{۲v} = ۰,$$

تبدیل می‌شود و بنابراین $\Phi = \log\phi$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^{۲}v}{d\phi^{۲}} - \frac{v}{۴} + \frac{۱}{۲v} = ۰,$$

که با انتگرال‌گیری:

$$\left(\frac{dv}{d\phi}\right)^{۲} - \frac{v^{۲}}{۴} + \log v = C_{۱},$$

بدست می آید که در آن داریم:

$$\log\phi = \int^{\phi'/\phi^{۳/۲}} \frac{dv}{\sqrt{C_{۱} + v^{۲}/۴ - \log v}} + C_{۲},$$

که مانند حالت (i) می‌توانیم با انتخاب متغیر $\Psi = \phi^{-۱/۲}$ برای برخی از توابع $f_{۲}$، داشته باشیم:

$$\Psi' = f_{۲}(C_{۲} + ۲\log\Psi),$$

که نهایتاً نتیجه می‌دهد:

$$w + C_{۳} = \int^{\phi^{-۱/۲}} \frac{d\Psi}{f_{۲}(C_{۲} + ۲\log\Psi)}.$$

در هر دو حالت (i) و (ii) ریشه دوم مثبت را در انتگرال اول قرار داه‌ایم. بهمین ترتیب می‌توانستیم ریشه منفی را قرار دهیم. بایست دقت کنیم که برای مسائل خاص می‌باید این محاسبات را با دقت بالا انجام داده و امتحان کرد. بنابراین هر چند، برای $m = -۲$ و $m = -۱$ معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی را همراه با حل کاملی از آنها داریم، جوابهای نتیجه شده با هیچ روش مستقیمی بدست نمی‌یابد.

۷.۷ معادله انتشار غیرخطی مرتبه بالا

برخی از مسائل مهم، مانند شار فشاری رویه‌ای تحت نفوذ فیلم مایع نازک و انتشار ناخالص در شبه‌هادی‌ها، از معادله مرتبه چهارم

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\Big(c^m\frac{\partial^۳ c}{\partial x^۳}\Big)=\circ,\qquad (m>\circ). \tag{۶۹.۷}$$

بوجود می آید.

۱.۷.۷ مثال. نشان دهید (۶۹.۷)جواب تفکیک‌پذیر بشکل

$$c(x,t)=\Big(\frac{x^۴}{m\lambda(t+t_\circ)}\Big)^{۱/m},$$

دارد که $t_\circ$ و λ ثابتهایی با شرط

$$\lambda=\frac{۴}{m}\Big(\frac{۴}{m}-۱\Big)\Big(\frac{۴}{m}-۲\Big)\Big(\frac{۴}{m}+۱\Big),$$

برای $m\neq ۲,۴$، هستند.

اگر بدنبال جوابی از (۶۹.۷) بشکل

$$c(x,t)=A(x)B(t),$$

باشیم. آنگاه بسهولت معادله

$$\frac{B'(t)}{B(t)^{m+۱}}+\frac{۱}{A(x)}(A(x)^mA'''(x))'=\circ,$$

نتیجه می‌شود که در آن علامت پریم مشتق نسبت به آرگومانهای مشخصی را نشان می‌دهد. بنابراین داریم:

$$\frac{B'(t)}{B(t)^{m+۱}}=-\frac{۱}{A(x)}(A(x)^mA'''(x))'=\lambda_\circ, \tag{۷۰.۷}$$

که $\lambda_\circ$ ثابت است. از معادله اول نتیجه می‌شود:

$$\frac{B(t)^{-m}}{-m}=\lambda_\circ(t+t_\circ),$$

که $t_\circ$ ثابت است، که می‌تواند با تغییر آرایش به

$$B(t)=\Big(\frac{-۱}{\lambda_\circ m(t+t_\circ)}\Big)^{۱/m}$$

تبدیل شود. با فرض اینکه $A(x)$ جوابی بشکل:

$$A(x)=\alpha x^\beta,$$

دارد، قسمت دوم از (۷۰.۷) بصورت:

$$\alpha^m\beta(\beta-۱)(\beta-۲)[(m+۱)\beta-۳]x^{m\beta-۴}=-\lambda_\circ.$$

ساده می‌شود. بنابراین داریم: $\beta=۴/m$ و $\alpha^m=-\lambda_\circ/\lambda$ که λ در بالا تعریف شده است. بدین ترتیب $A(x)$ به

$$A(x)=(\frac{-\lambda x^۴}{\lambda})^{۱/m},$$

تبدیل می‌شود که براساس آن می‌توانیم عبارت داده شده را برای $c(x,t)$ نتیجه بگیریم.

۲.۷.۷ مثال. نشان دهید که جواب تولیدی از (٦٩.٧) بشکل

$$c(x,t)=\frac{۱}{t^{۱/(m+۴)}}\phi\Big(\frac{x}{t^{۱/(m+۴)}}\Big), \qquad (۷۱.۷)$$

است. که $\phi(w)$ در خارج از بازه $(-w_۱,w_۱)$ صفر بوده و تابعی فرد است و در معادلات

$$\begin{aligned}&(m+۴)\phi^{m-۱}\phi''=w,\\&\phi(w_۱)=\phi'(w_۱)=۰,\end{aligned} \qquad (۷۲.۷)$$

صدق می‌کند که $w_۱$ براساس عبارت

$$\int_{-w_۱}^{w_۱}\phi(w)dw=c_۰,$$

تعیین می‌شود و $c_۰$ ثابت اولیه تولیدی است. سپس برای حالت $m=۱$ ثابت کنید که آن جوابی بشکل:

$$\phi(w)=\frac{(w_۱^۲-w^۲)^۲}{۱۲۰},$$

دارد که در آن $w_۱$ بصورت $w_۱=(۲۲۵c_۰/۲)^{۱/۵}$ است.

معادله (٦٩.٧) و شرایط اولیه

$$c(x,۰)=c_۰\delta(x),$$

تحت گروه تبدیلات یک–پارامتری

$$x_۱=e^{\varepsilon}x,\qquad t_۱=e^{(m+۴)\varepsilon}t,\qquad c_۱=e^{-\varepsilon}c,$$

ناوردا باقی می‌ماند که براساس آن می‌توانیم شکل تابعی (۷۱.۷) را نتیجه بگیریم. با جایگذاری (٦٩.٧) در (۷۱.۷) بدست می‌آوریم:

$$(m+۴)(\phi^m\phi''')'=(w\phi)',$$

که در آن داریم: $w=/t^{۱/(m+۴)}$. این معادله می‌تواند بسهولت بصورت

$$(m+۴)\phi^m\phi'''-w\phi=C_۱,$$

که $C_۱$ ثابت است، حل شود. اما چون $\phi(w)$ فرد است داریم، $\phi'(۰)=\phi''(۰)=۰$ و بنابراین $C_۱$ صفر است و می‌توانیم معادله داده شده را برای $\phi(w)$ نتیجه بگیریم.

در حالت $m=۱$، این معادله بصورت

$$\phi'''(w)=\frac{w}{۵},$$

ساده می‌شود که البته با حل آن به جواب

$$\phi(w)=\frac{w^۴}{۱۲۰}+C_۲w^۲+C_۳w+C_۴.$$

دست می‌یابیم. در واقع از فرد بودن $\phi(w)$، $C_۳$ صفر است و جواب مناسب در شرط$\phi(w)=\phi'(w_۱)=۰$ داده شده صدق می‌کند چنین جوابی حاصل شده است. از شرایط

$$\int_{-\infty}^{\infty}c(x,t)dx=\int_{-w_۱}w_۱\phi(w)dw=c_۰$$

و از عبارت داده شده برای $\phi(w)$ بسهولت نتیجه می‌گیریم: $w_۱=(۲۲۵c_۰/۲)^{۱/۵}$.

۳.۷.۷ مثال. نشان دهید معادله (؟؟) تحت گروه یک–پارامتری

$$w_۱ = e^{\varepsilon} w, \qquad \phi_۱ = e^{۴\varepsilon/m}\phi,$$

ناوردا است و در نتیجه می‌تواند به یک معادله مرتبه دوم تقلیل یابد.
اگر بدنبال گروهی بشکل

$$w_۱ = e^{\varepsilon} w, \phi_۱ = e^{\alpha\varepsilon}\phi,$$

باشیم که معادله (؟؟) را ناوردا کند آنگاه داریم:

$$(m-۱)\alpha + \alpha - ۳ = ۱,$$

یا $\alpha = ۴/m$. بنابراین $u(w) = \phi(w) w^{\gamma} u(w)$ را بعنوان متغیر جدید برمی‌گزینیم که در اینصورت داریم:

$$\phi(w) = w^{\gamma} u(w)$$

که در آن γ نشان دهنده $۴/m$ است. اکنون از عبارت

$$\phi''' = w^{\gamma} u''' + ۳\gamma w^{\gamma-۱} u'' + ۳\gamma(\gamma-۱) w^{\gamma-۲} u' + \gamma(\gamma-۱)(\gamma-۲) w^{\gamma-۳} u,$$

به این نتیجه می‌رسیم که معادله (؟؟) به

$$(m+۴) u^{m-۱} [w^۳ u''' + ۳\gamma w^۲ u'' + ۳\gamma(\gamma-۱) w^{u'} + \gamma(\gamma-۱)(\gamma-۲) u] = ۱,$$

تبدیل می‌شود که معادله‌ای از نوع آبل بوده و بنابراین می‌تواند با تبدیل

$$y = \log w$$

و با استفاده از روابط

$$\frac{d}{dy} = w\frac{d}{dw}, \qquad \frac{d^۲}{dy^۲} = w^۲ \frac{d^۲}{dw^۲} + w\frac{d}{dw},$$
$$\frac{d^۳}{dy^۳} = w^۳ \frac{d^۳}{dw^۳} + ۳w^۲ \frac{d^۲}{dw^۲} + w\frac{d}{dw},$$

ساده شود. پس در نتیجه داریم:

$$(m+۴) u^{m-۱} \Big\{ \frac{d^۳ u}{dy^۳} + ۳(\gamma-۱)\frac{d^۲ u}{dy^۲} + (۳\gamma^۲ - ۶\gamma + ۲)\frac{du}{dy}$$
$$+ \gamma(\gamma-۱)(\gamma-۲)(\gamma-۳) u \Big\} = ۱,$$

که این معادله نیز با تغییر متغیر $p = du/dy$ و استفاده از

$$\frac{d^۲ u}{dy^۲} = p\frac{dp}{du}, \qquad \frac{d^۳ u}{dy^۳} = p\frac{d}{du}\Big(p\frac{dp}{du}\Big).$$

می‌تواند به یک معادله مرتبه اول کاهش یابد که نهایتاً عبارات زیر را بدست می آوریم:

$$p\frac{d^۲ p}{du^۲} + \Big(\frac{dp}{du}\Big)^۲ + ۳(\gamma-۱)\frac{dp}{du} + (۳\gamma^۲ - ۶\gamma + ۲)$$
$$+ \gamma(\gamma-۱)(\gamma-۲)\frac{u}{p} = \frac{۱}{(m+۴) p u^{m-۱}},$$

با توجه به اینکه معادله مرتبه دوم ظاهر شده پیچیده‌تر از معادله مرتبه سوم اولیه (؟؟) است و حتی مقدار خاص $\gamma = ۴/m$ نیز نمی‌تواند آنرا به حالت حل‌پذیر تبدیل کند.

مسائل

۱. برای معادله انتشار غیرخطی (۳.۷) نشان دهید متغیر متجانس و فرم تابعی جواب، متناظر با گروه

$$\xi(x,t,c) = x+\kappa, \quad \eta(x,t,c) = ۲(t+\delta), \quad \zeta(x,t,c) = ۰,$$

بترتیب عبارتند از،

$$w = \frac{x+\kappa}{(t+\delta)^{۱/۲}}, \quad c = \phi(w).$$

و سپس نشان دهید، معادله دیفرانسیل معمولی نتیجه شده بصورت

$$D(\phi)\phi''(w) + D'(\phi)\phi'(w)^{۲} + \frac{w}{۲}\phi'(w) = ۰.$$

است.

۲. برای معادله انتشار غیرخطی با فرض،

$$D(c) = \alpha(c+\beta)^m,$$

نشان دهید متغیر متجانس و فرم تابعی جواب، متناظر با گروه:

$$\xi(x,t,c) = (۱+\lambda)x+\kappa, \quad \eta(x,t,c) = ۲(t+\delta), \zeta(x,t,c) = \frac{۲\lambda}{m}(c+\beta),$$

بترتیب بصورت:

$$w = \frac{(x+\frac{\kappa}{(۱+\lambda)})}{(t+\delta)^{\frac{۱+\lambda}{۲}}}, c = (t+\delta)^{\lambda/m}\phi(w) - \eta.$$

تعریف می‌شوند و در ادامه نشان دهید معادله دیفرانسیل معمولی بدست آمده بشکل:

$$\phi(w)^m\phi''(w) + m\phi(w)^{m-۱}\phi'(w)^{۲} + \frac{(۱+\lambda)}{۲\alpha}w\phi'(w) - \frac{\lambda}{\alpha m}\phi(w) = ۰.$$

است و این معادله با در نظر گرفتن اینکه معادله بالا تحت گروه تبدیلات یک—پارامتری

$$w_۱ = e^{\varepsilon}w, \quad \phi_۱ = e^{۲\varepsilon/m}\phi.$$

ناوردا است، می‌تواند به معادله‌ای از مرتبه اول تقلیل یابد.

۳. برای معادله دیفرانسیل غیرخطی با فرض،

$$D(c) == \alpha(c+\beta)^{-۴/۳},$$

و در نظر گرفتن حالت خاصی از گروه

$$\xi(x,t,c) = \mu x^{۲} + (۱+\lambda)x+\kappa, \quad \eta(x,t,c) = ۲(t+\delta), \zeta(x,t,c) = -\frac{۳}{۲}(c+\beta)(۲\mu x+\lambda),$$

با ثابتهای λ، κ و μ که در رابطه

$$(\lambda+۱)^{۲} = ۴\mu\kappa.$$

صدق می‌کنند، نشان دهید، متغیر متجانس و شکل تابعی از جواب بصورت:

$$w=(t+\delta)^{-۱/۲}\exp\Big\{\frac{-۲}{(۲\mu x+\lambda+۱)}\Big\}, c=-\beta+\phi(w)\Big(x+\frac{(\lambda+۱)}{۲\mu}\Big)^{-۳}\exp\Big\{\frac{-۳}{(۲\mu x+\lambda+۱)}\Big\}.$$

می‌باشد و معادله دیفرانسیل معمولی نتیجه شده بشکل زیر است:

$$\phi''(w)-\frac{۴\phi'(w)^۲}{۳\phi(w)}-\frac{۳\phi(w)}{۴w^۲}+\frac{\mu^۲}{۲\alpha}w\phi(w)^{۴/۳}\phi'(w)=۰,$$

که با در نظر گرفتن ناوردایی آن نسبت به گروه

$$w_۱=e^{\varepsilon},\quad \phi_۱=e^{-۳\varepsilon/۲}\phi.$$

می‌تواند به معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه اول تقلیل یابد.

۴. نشان دهید با بکار بردن نگرش غیرکلاسیک برای معادله

$$F(x)\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\frac{۱}{c^۲}\frac{\partial c}{\partial x}\Big\},$$

به چهار معادله زیر برای گروه یک–پارامتری (؟؟) دست می‌یابیم.

$$B_{cc}+۲\frac{B_c}{c}=۰,$$
$$\Big[۲B_x-A_c+\frac{۲A}{c}\Big]_c+c^۲[F(x)-۳]BB_c=۰,$$
$$F(x)[B_t+(AB)_c]+F'(x)B^۲+\Big\{۲\Big(\frac{A_x}{c^۲}\Big)_c-۳AB_c-BA_c\Big\}=\frac{B_{xx}}{c^۲}-۲BB_x-۲\frac{AB}{c},$$
$$F(x)[A_t+AA_c]+F'(x)AB-AA_C=\frac{}{A}_{xx}c^۲-۲AB_x-۲\frac{A^۲}{c},$$

که در آنها $A(x,t,c)$ و $B(x,t,c)$ در (۴۳.۷) تعریف شده‌اند و زیراندیس، مشتق جزیی نسبت به متغیرهای x، t و c را نشان می‌دهد.

۵. معادله انتشار محورتقارنی غیرخطی با معادله انتقال گرما در ناحیه استوانه‌ای و کروی می‌تواند به معادله بشکل

$$\frac{\partial^۲c}{\partial x^۲}+\frac{k}{x}\frac{\partial c}{\partial x}=f(c)\frac{\partial c}{\partial t},$$

که برای حالت استوانه‌ای و کروی بترتیب داریم: $k=۱$ و $k=۲$، تبدیل شود. با در نظر گرفتن ناوردایی کلاسیک (٫) تحت گروه یک–پارامتری

$$x_۱=x+\varepsilon\xi(x)+O(\varepsilon^۲), t_۱=t+\varepsilon\eta(t)+O(\varepsilon^۲), c_۱=c+\varepsilon\zeta(x,c)+O(\varepsilon^۲),$$

نشان دهید برای هر دو مقدار k گروهی وجود دارد و اگر $f(c)$ ثابت بوده یا آن بشکل

$$f(c)=\alpha(c+\beta)^m,$$

که α، β و m ثابتهای دلخواهی‌اند، باشد، آنگاه برای هر دو مقدار k، نشان دهید:

$$\xi(x),\quad \eta(t)=(m\gamma+۲)t+\delta,\quad \zeta(x,c)=\gamma c+\lambda,$$

که γ، δ و λ ثابتهای دلخواه‌اند. برای حالت خاص $k=۱$، نشان دهید، گروه عمومی تر از (٫٫) که با تابع

$$f(c)=\alpha(c+\beta)^{-۱},$$

تولید می‌شود، وجود دارد و بعنوان مثال نتیجه بگیرید معادله (٫) نسبت به گروهی بشکل:

$$\xi(x)=\frac{x}{۲}[\log x+(۱+\gamma)], \eta(t)=۲t+\delta, \zeta(x,c)=(\log x+\gamma)(c+\beta),$$

که دوباره γ و δ ثابتهای دلخواه بعدی‌اند، ناوردا است.

۶. برای گروه داده شده در مسئله قبل، متغیر متجانس، فرم تابعی از جواب‌ها و معادله دیفرانسیل نتیجه شده را بدست آورید.

۷. ملاحظه می‌کنید که معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{k}{x}\frac{\partial c}{\partial x}=c^m\frac{\partial c}{\partial t},$$

تحت گروه

$$x_1=e^{\varepsilon}x,\qquad t_1=e^{(2+mn)\varepsilon}t,\qquad c_1=e^{n\varepsilon}c.$$

ناوردا باقی می‌ماند. از این گروه برای بدست آوردن جواب (///) برای حالتهای $k=1$ و $k=2$، استفاده کنید، و نشان دهید برای این مقادیر داده شده از k، بترتیب داریم: $n=-2$ و $n=-3$.

«در واقع با مختصات دکارتی (X,Y,Z) شرایط اولیه مناسب برای $k=1$، شرایط

$$c(X,Y,0)=c_0\delta(X)\delta(Y),$$

و برای $k=2$، شرایط

$$c(X,Y,Z,0)=c_0\delta(X)\delta(Y)\delta(Z),$$

خواهد بود، که بطور معمول c_0 ثابت خاص نیروی مبدأ است».

۸. نشان دهید معادله

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}=\alpha e^{\beta\varepsilon}\frac{\partial c}{\partial t},$$

تحت گروه

$$\begin{aligned}
x_1&=x+\varepsilon\xi_1(x,y)+O(\varepsilon^2),\\
y_1&=y+\varepsilon\xi_2(x,y)+O(\varepsilon^2),\\
t_1&=t+\varepsilon(\gamma t+\delta)+O(\varepsilon^2),\\
c_1&=c+\frac{\varepsilon}{\beta}\Big(\gamma-\frac{\partial\xi_1}{\partial x}-\frac{\partial\xi_2}{\partial y}\Big)+O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

که توسط $\xi_(x,y)$ و $\xi_2(x,y)$ای که در معادله کوشی—ریمان یعنی،

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial x}=\frac{\partial\xi_2}{\partial y},\qquad \frac{\partial\xi_1}{\partial y}=-\frac{\partial\xi_2}{\partial x},$$

که α، β، γ و δ ثابتهای دلخواه‌اند، صدق می‌کنند، تولید شده است، ناوردا است.

۹. برای $\delta=0$ و $\xi_1(x,y)$ و $\xi_2(x,y)$ تعریف شده بصورت،

$$\xi_1(x,y)=x^2-y^2,\qquad \xi_2(x,y)=2xy,$$

متغیر متجانس و شکل تابعی زیر را نتیجه بگیرید.

$$\begin{aligned}
w&=\frac{(x^2+y^2)}{y},\qquad \tau=t\exp\Big\{\frac{\gamma x}{(x^2+y^2)}\Big\},\\
c(x,y,t)&=\phi(w,\tau)-\frac{2}{\beta}\log y-\frac{\gamma x}{\beta(x^2+y^2)}.
\end{aligned}$$

و سپس با استفاده از $(+)$ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی زیر را

$$\frac{\partial}{\partial w}\Big(w^{۲}\frac{\partial\phi}{\partial w}\Big)+\frac{\gamma^{۲}\tau}{w^{۲}}\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\tau\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\Big)=\alpha\frac{\partial\phi}{\partial\tau}e^{\beta\alpha}-\frac{۲}{\beta}.$$

برای $\phi(w,\tau)$، بدست آورید.

.۱۰ برای $\delta=۰$ و $\xi_{۱}(x,y)$ و $\xi_{۲}(x,y)$ تعریف شده بصورت،

$$\xi_{۱}(x,y)=e^{nx}\cos ny,\qquad \xi_{۲}=(x,y)=e^{n\varepsilon}\sin ny,$$

متغیر متجانس و شکل تابعی زیر را نتیجه بگیرید.

$$w=e^{-nx}\sin ny,\tau=t\exp\Big(\frac{\gamma}{n}e^{-nx}\cos ny\Big),$$
$$c(x,y,t)=\phi(w,\tau)-\frac{\gamma}{n\beta}e^{-nx}\cos ny-\frac{۲}{\beta}\log(\sin ny).$$

و سپس با استفاده از $(+)$، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی:

$$\frac{\partial^{۲}\phi}{\partial w^{۲}}+\frac{\gamma^{۲}\tau}{n^{۲}}\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\tau\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\Big)=\frac{\alpha}{(nw)^{۲}}\frac{\partial\phi}{\partial\tau}e^{\beta\varepsilon}-\frac{۲}{\beta w^{۲}}.$$

را برای $\phi(w,\tau)$، بدست آورید.

.۱۱ نشان دهید جواب معادله برگر، یعنی،

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=D\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}},$$
$$u(x,۰)=u_{۰}\delta(x),$$
$$u(x,t)\to ۰\qquad as\qquad x\to\infty,$$

که $u_{۰}$ ثابت است، تحت گروه یک–پارامتری،

$$x_{۱}=e^{\varepsilon}x,t_{۱}=e^{۲\varepsilon}t,u_{۱}=e^{-\varepsilon}u.$$

ناوردا باقی می‌ماند و سپس نتیجه بگیرید:

$$u(x,t)=t^{-۱/۲}\phi(xt^{-۱/۲}),$$

و در نتیجه داریم:

$$\phi(w)=\frac{-۲De^{-w^{۲}/۴D}}{C+\int_{-\infty}^{w}e^{-\lambda^{۲}/۴D}d\lambda},$$

که $w=xt^{-۱/۲}$ و C ثابت است. براساس شرایط اولیه C را بصورت:

$$C=-\frac{(\pi D)^{۱/۲}e^{u_{۰}/۴D}}{\sinh(u_{۰}/۴D)}.$$

بدست آورید.

۱۲. نشان دهید گروه کلاسیک معادله موج غیرخطی،

$$\frac{\partial^۲ c}{\partial t^۲} = f(c)^۲ \frac{\partial^۲ c}{\partial x^۲}$$

که $f(c)$ ثابت نیست، در هر یک از حالتهای زیر همان گروه داده شده است.

(i) $f(c)$ دلخواه،

$$\begin{aligned} \xi(x,t,c) &= \gamma x + \delta, \\ \eta(x,t,c) &= \gamma t + \kappa, \\ \zeta(x,t,c) &= ۰. \end{aligned}$$

(ii) $f(c) = \alpha(c+\eta)^m$،

$$\begin{aligned} \xi(x,t,c) &= \gamma x + \delta + \lambda m x, \\ \eta(x,t,c) &= \gamma t + \kappa, \\ \zeta(x,t,c) &= \lambda(c+\beta) \end{aligned}$$

(iii) $f(c) = \alpha(c+\beta)^۲$

$$\begin{aligned} \xi(x,t,c) &= \gamma x + \delta + ۲\lambda x, \\ \eta(x,t,c) &= \gamma t + \kappa, \\ \zeta(x,t,c) &= (\lambda + \mu x)(c+\beta). \end{aligned}$$

در هر یک از حالتها متغیر متجانس، فرم تابعی جواب و معادله دیفرانسیل نتیجه شده را بدست آورید.

۱۳. جواب اساسی معادله موج غیرخطی (++) از مسأله قبلی در شرایط اولیهٔ

$$c(x,۰) = ۰, \qquad \frac{\partial c}{\partial t}(x,۰) - \delta(x).$$

صدق می‌کند. نشان دهید، برای همه سرعتهای موج $f(c)$ جواب اساسی تحت گروه یک–پارامتری

$$x_۱ = e^{\varepsilon} x, \qquad t_۱ = e^{\varepsilon} t, \qquad c_۱ = c,$$

ناوردا باقی می‌ماند و بشکل:

$$c(x,t) = \phi(xt^{-۱}).$$

است. از (++) نتیجه بگیرید ϕ در معادله مرتبه اول،

$$w^۲ \phi''(w) + ۲ w \phi'(w) = f(\phi)^۲ \phi''(w),$$

که $w = xt^{-۱}$، صدق می‌کند.

۱۴. برای حالت خطی $f(c) = f_{\circ}$ که $f_{\circ}$ ثابت است، نتیجه بگیرید $\phi'(w)$ بصورت،

$$\phi'(w) = \frac{C_{۱}}{(f_{\circ}^{۲} - w^{۲})},$$

است که در آن $C_{۱}$ ثابت دلخواه است. سپس نشان دهید:

$$c(x, t) = \frac{C_{۱}}{۲f_{\circ}} \log\left|\frac{x + f_{\circ}t}{x - f_{\circ}t}\right| + C_{۲},$$

که $C_{۲}$ ثابت دلخواه بعدی است. این جواب در نقطه $x = f_{\circ}t$ نامتناهی مگر اینکه $C_{۱} = \circ$ باشد، که در این حالت $c(x, t) = C_{۲}$ بوده و جواب مناسب بصورت زیر است:

$|x| < f_{\circ}t$، $c(x, t) = (۲f_{\circ})^{-۱}$ و در نقاط دیگر صفر.

۱۵. برای حالت $f(c) = c$، نشان دهید معادله دیفرانسیل معمولی مسئله ۱۳ تحت گروه یک–پارامتری

$$w_{۱} = e^{\varepsilon}w, \qquad \phi_{۱} = e^{\varepsilon}\phi.$$

ناوردا باقی می‌ماند. سپس با فرض،

$$\psi = \frac{\phi}{w}, \qquad \tau = \log w, \qquad p = \frac{d\psi}{d\tau},$$

معادله آبل از نوع دوم،

$$p\frac{dp}{d\psi} + p\frac{(۳ - \psi^{۲})}{(۱ - \psi^{۲})} + \frac{۲\psi}{(۱ - \psi^{۲})} = \circ.$$

را نتیجه بگیرید.

۱۶. گروههای کلاسیک و جوابهای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی زیر را بدست آورید:

(i) معادله برگر غیرخطی،

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}}.$$

(ii) معادله کورتوگ–دریس،

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^{۳} u}{\partial x^{۳}}.$$

۱۷. نشان دهید معادله انتشار غیرخطی با قاعدهٔ توان انتشار

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(c^{m}\frac{\partial c}{\partial x}\Big),$$

تحت گروه یک–پارامتری،

$$x_{۱} = e^{\varepsilon}x, \qquad t_{۱} = e^{\alpha\varepsilon}t, \qquad c_{۱} = e^{\beta\varepsilon}c,$$

که در آن داریم: $\alpha + m\beta = ۲$، ناوردا باقی می‌ماند. در ادامه جوابی بشکلِ

$$c(x, t) = t^{\beta/\alpha}\phi\Big(\frac{x}{t^{۱/\alpha}}\Big).$$

دارد.

۱۸. جواب متجانس معادلهٔ انتشار غیرخطی که در مثال ۷.۱ داده شده است، در حالت $\alpha = m + ۲$ و $\beta = -۱$ بشکل

$$c(x,t) = \frac{۱}{t^{۱/(m+۲)}}\Big(C - \frac{mx^۲}{۲(m+۲)t^{۲/(m+۲)}}\Big)^{۱/m}$$

بدست می‌آید که C ثابت است. بر این اساس نشان دهید اگر C را به سمت صفر میل دهیم، آنگاه این جواب به

$$c(x,t) = \Big(-\frac{mx^۲}{۲(m+۲)t}\Big)^{۱/m},$$

تبدیل می‌شود که جواب متجانس دیگر این معادله است که از حالت $\alpha = ۲$ و $\beta = ۰$ ناشی می‌شود. قابل مشاهده است که با انتقال t این جواب با «جواب زمان انتظار»، یعنی،

$$c(x,t) = \Big(\frac{mx^۲}{۲(m+۲)(t_۰ - t)}\Big)^{۱/m},$$

متناظر است. که در آن داریم: $t_۰$ ثابت دلخواه است.

ثابت کنید «جواب زمان انتظار» را با تکنیک «تفکیک متغیرها» نیز می‌توان بدست آورد.

۱۹. نشان دهید:

$$۲\phi\phi'' - \phi'^۲ + \frac{۱}{۶}(w_۱^۲ - w^۲) = ۰,$$

جوابی مناسب برای معادلهٔ (؟؟) در حالت خاص $m = ۲$ است.

۲۰. نشان دهید معادلهٔ

$$\frac{\partial c}{\partial t} = (-۱)^n \frac{\partial}{\partial x}\Big(c^m \frac{\partial^{۲n+۱} c}{\partial x^{۲n+۱}}\Big),$$

جوابی بشکل:

$$c(x,t) = \Big(\frac{x^{۲(n+۱)}}{\lambda m[t_۰ + (-۱)^{n+۱} t]}\Big)^{۱/m},$$

دارد که در آن داریم: $t_۰$ و λ ثابت بوده و براساس شرط

$$\lambda = \frac{۲(n+۱)}{m}\Big(\frac{۲(n+۱)}{m} - ۱\Big)\Big(\frac{۲(n+۱)}{m} - ۲\Big)...\Big(\frac{۲(n+۱)}{m} - ۲n\Big)\Big(\frac{۲(n+۱)}{m} + ۱\Big),$$

تعیین می‌شود که مقادیر m و n برای هر λ ی دلخواه مخالف صفر، هستند.

۲۱. نشان دهید جواب متجانس معادله مسئله قبل بشکل زیر است:

$$c(x,t) = \frac{۱}{t^k}\phi\Big(\frac{x}{t^k}\Big),$$

که در آن $k = (m + ۲n + ۲)^{-۱}$ می‌باشد.

سپس با فرض $w = x/t^k$، نتیجه بگیرید:

$$\phi^{m-۱}\frac{d^{۲n+۱}\phi}{dw^{۲n+۱}} = (-۱)^{n+۱} kw,$$

که در آن $\phi(w)$ تابعی زوج می‌باشد که در خارج از بازه $(-w_۱, w_۱)$ صفر است و با شرط

$$\phi(w_۱) = \phi'(w_۱) = \phi''(w_۱) = ... = \phi^n(w_۱) = ۰,$$

که $w_۱$ بر اساس رابطهٔ

$$\int_{-w_۱}^{w_۱} \phi(w)dw = c_۰,$$

تعیین می‌شود، مشخص شده است که بطور معمول $c_۰$ ثابت اولیه نیروی مبدأ است.

۲۲. برای حالت خاص $m=1$، نشان دهید جواب منبع متجانس مناسب بصورت زیر است:

$$c(x,t)=\frac{1}{t^{1/(2n+3)}}\phi\Big(\frac{x}{t^{1/(2n+3)}}\Big),$$

که در آن $\phi(w)$ بشکل:

$$\phi(w)=\frac{({w_1}^2-w^2)^{n+1}}{(2n+3)!},$$

بوده و w_1 از فرمول

$$w_1=\Big(\frac{(2n+3)!\Gamma(n+5/2)c_0}{\sqrt{\pi}(n+1)!}\Big)^{1/(2n+3)}.$$

تعیین می‌شود.

۲۳. برای معادله کورتیگ—دریس در مسئله ۱۶ نشان دهید:

(i) معادله تحت گروه یک—پارامتری

$$x_1=e^{\varepsilon}x,\qquad t_1=e^{3\varepsilon}t,\qquad u_1=e^{-2\varepsilon}u,$$

ناوردا باقی می‌ماند و جواب متجانس نتیجه شده،

$$u(x,t)=t^{-2/3}\phi(x/t^{1/3}),$$

در معادله

$$\phi'''=\phi\phi'-(w\phi'+2\phi)/3,$$

که $w=x/t^{1/3}$ می‌باشد، صدق می‌کند.

(ii) معادله تحت گروه یک—پارامتری

$$x_1=x+\varepsilon t,\qquad t_1=t,\qquad u_1=u+\varepsilon,$$

ناوردا است و جواب نتیجه شده آن بصورت:

$$u(x,t)=(x-x_0)/t,$$

که x_0 ثابت است، می‌باشد.

راهنمایی و حل برخی از مسائل

در ادامه این کتاب به حل و راهنمایی برخی از مسائلی که در پایان هر فصل آمده است می‌پردازیم. به طور قاطع می‌توان گفت که در این مسائل جزئیات و نکاتی در ارتباط با بحث‌های اساسی وجود دارد که خواننده می‌بایست بعد از آن که به حل آنها پرداخت به خوبی فرا گیرد. این مسائل به گونه‌ای طرح شده‌اند که یا نیازمند اطلاعات کمی برای حل هستند یا بوسیله گام های ساده در متن درسی ، مثالهای داخل متن، مسائل قبل‌تر از آن، به طور کافی توضیح داده شده‌اند. در مجموع مسائل و جوابهای بسیاری از آنها بمنظور خلاصه بندی نتایج پراکنده در متن، ارائه شده است. و عموماً برخی از مسائل مشکلند و اکثریت دانشجویان برای حل آنها نیاز به مطالعه و رجوع به متن درسی را دارند.

فصل اول

.۱

(i) $\beta=-\alpha/2$ ، $\alpha=-2$، $\beta=1$، $x_1=e^{-2\varepsilon}x$ و $y_1=e^{\varepsilon}y$ را قرار می‌دهیم. بنابراین، $u(x_1,y_1)={y_1}^2x_1=y^2x=u(x,y)$ و

$$\frac{du}{dx}=2xy\frac{dy}{dx}+y^2=2xy\Big(\frac{A}{x^{\frac{3}{2}}}+By^3\Big)+y^2$$

که از آن $\frac{du}{dx}=\frac{2(Au^{1/2}+Bu^2)+u}{x}$ که معادله‌ای تفکیک‌پذیر است، بدست می آید.

(ii) $3\beta=4\alpha$، فرض می کنیم α، $\beta=4$ ، $x_1=e^{3\varepsilon}x$ و $y_1=e^{4\varepsilon}y$. بنابراین، ناوردای $u(x_1,y_1)=y_1^3x_1^{-4}=y^3x^{-4}=u(x,y)$ و معادله تفکیک‌پذیر $\frac{du}{dx}=\frac{3y^2}{x^4}\frac{dy}{dx}-\frac{4y^3}{x^5}=-\frac{u}{x}\left(\frac{2-u}{1-2u}\right)$، بدست می آیند.

(iii) $\alpha=-n\beta$، فرض می‌کنیم $\alpha=-n$، $\beta=1$، $x_1=e^{-n\varepsilon}x$ و $y_1=e^{\varepsilon}y$. بنابراین، ناوردای $u(x_1,y_1)=y_1^nx_1=y^nx=u(x,y)$ و معادله $\frac{du}{dx}=xny^{n-1}\frac{dy}{dx}+y^n=\frac{u}{x}(\frac{A-B+u}{A+u})$، که آن نیز یک معادله‌ای نفکیک‌پذیر است، حاصل می‌شود.

.۲ $\varepsilon=0$ و $-\varepsilon$ به ترتیب تبدیلات همانی و وارون را مشخص می‌کنند. بعلاوه اگر $x_2=x_1+\delta$ و $y_2=e^{-2\delta}y_1$ آنگاه $x_2=x+\delta+\varepsilon x$ و $y_2=e^{-2\delta+\varepsilon}y$ یعنی حاصلضرب با $\delta+\varepsilon$ مشخص می‌شود. با ناوردای $u(x_1,y_1)=logy_1+2x_1=logx+2xu(x,y)$ و تبدیل معادله به $\frac{du}{dx}=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+2=\frac{2u}{(u-1)}$ می‌توان آن را حل کرد.

.۳ با ناوردای $u(x_1,y_1)=y_1-x_1=y-x=u(x,y)$ بدست می آوریم که:$\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}-1=\frac{A^2}{u^2}-1$ که می‌تواند با قرار دادن $u=A\sin\theta$ به صورزیر حل شود.

$$dx=\frac{u^2du}{(A^2-u^2)}=A\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}d\theta=A(\cos\theta+\sec\theta)d\theta.$$

۴. با استفاده از (۱۰.۱) بدست می آوریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho'(x-x_0)}{\rho(x)} - \frac{\rho(x-x_0)}{\rho(x)^2}\rho'(x) = \Big(\frac{\rho(x-x_0)}{\rho(x)}\Big)^2 - \frac{\rho(x-2x_0)}{\rho(x)},$$
$$= y(x)^2 - y(x)y(x-x_0).$$

۵. با تغییر متغیر (۱۳.۱) داریم:

$$\frac{e^x}{f(t)} - \frac{e^x}{f(t)^2}f'(t)t = \frac{e^x}{f(t)} - \frac{e^x}{f(t)}\frac{t}{f(\lambda t)}.$$

۶. از اینکه $y = xw$ و (۱۳.۱) نتیجه می‌شود که: $xw\Big(x\frac{dw}{dx} + w\Big) = \frac{3x(1-x)}{(1+x)} + 2xw + \frac{(5+3x)xw^2}{(1+x)^4}$.

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{2}{(1+x)^2}; \quad xw\frac{dw}{dx} = xw\frac{dw}{ds}\frac{ds}{dx} = -(\frac{1-s}{1+s})\frac{w}{2}\frac{dw}{ds}(1+s)^2.$$

۷.

$$\xi = x/t^1/2, \quad c(x,t) = \phi(\xi), \quad \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\xi\phi'(\xi)}{2t}, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\frac{\phi''(\xi)}{t};$$
$$\phi''(\xi) + \frac{\xi}{2}\phi'(\xi) = 0; \quad \frac{\phi''(\xi)}{\phi'(\xi)} + \frac{\xi}{2} = 0; \quad log\phi'(\xi) + \frac{\xi^2}{4} = logA;$$
$$\phi'(\xi) = Ae^{-\xi^2/4}.$$

۸. جوابی مشابه با مسئله قبل دارد.

۹. $D(c) = c$ نتیجه می‌دهد که: $\phi(\xi)\phi''(\xi) + \phi'(\xi)^2 + \xi\phi'(\xi)/2 = 0;$ حال با تغییر متغییر $\phi = \xi^2\psi$ که ψ ناروردای گروه است.

$$\xi^2\psi(\xi^2\psi'' + 4\xi\psi' + 2\psi) + (\xi^2\psi' + 2\xi\psi)^2 + \xi(\xi^2\psi' + 2\xi\psi)/2 = 0.$$

را بدست می‌آوریم. با تقسیم بر ξ^2 و بدست‌آوردن معادله از نوع اویلر و سپس استفاده از

$$\xi\psi' = \frac{d\psi}{dy}, \quad \xi^2\psi'' = \frac{d^2\psi}{dy^2} - \frac{d\psi}{dy}, \quad \frac{d^2\psi}{dy^2} = p\frac{dp}{d\psi}.$$

که در آن $p = -2\psi$، معادله بصورت $\xi\psi' + 2\psi = 0$ یا $\xi^2\psi = constant$ در می آید.

۱۰. $q = p\psi$ و $q\frac{dq}{d\psi} = p\psi\Big(\psi\frac{dp}{d\psi} + p\Big) = \psi\Big(\psi p\frac{dp}{d\psi} + p^2\Big)$. حال از معادله دیفرانسیل برای p استفاده کنید.

۱۱. $\frac{\partial z}{\partial t} = Be^{Bc}\frac{\partial c}{\partial t} = zAB\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{B}\frac{\partial z}{\partial x}) = Az\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

۱۲. برای رسیدن به جواب مسئله بایست دقت کنید که $\frac{\partial z}{\partial t}=t^{(m-n)/n}m\phi(\xi)-\xi\phi'(\xi)/n, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=t^{(m-2)/n}\phi''(\xi)$. از $m+n=2$ می‌توان نتیجه گرفت که: $t^{(m-n)/n}=t^{2(m-1)/n}$. که از تغییر متغیر $\phi=\xi^2\psi$ معادله $nA\xi^2\psi(\xi^2\psi''+4\xi psi'+2\psi)+\xi(\xi^2\psi'+2\xi\psi)-m\xi^2\psi=0,$ یا $nA\psi(\frac{d^2\psi}{dy^2}+3\frac{d\psi}{dy}+2\psi)+(\frac{d\psi}{dy}+2\psi)-m\psi=0$ بدست می آید.

۱۳.

$$\begin{aligned}
&c(x,t)=f(x)+g(t), \frac{\partial c}{\partial t}=g'(t), \frac{\partial c}{\partial x}=f'(x)\\
&e^{-Bg(t)}g'(t)=A(e^{Bf(x)}f'(x))'=constant=\lambda\\
&e^{-Bg(t)}=B\lambda(t_0-t); e^{Bf(x)}f'(x)=\frac{\lambda}{A}(x-x_0); e^{Bf(x)}=\frac{B\lambda}{2A}[(x-x_0)^2+C]
\end{aligned}$$

بنابراین،

$$e^{Bc}=\Big\{\frac{B\lambda}{2A}[(x-x_0)^2+C]\Big\}\frac{1}{B\lambda(t_0-t)}$$

۱۴.

(i) از اینکه $\varepsilon-$ وارون را مشخص می‌کند، به ویژه $x=x_1-\varepsilon t, t=t_1$ بعد از آن:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial c_1}{\partial t_1}=\frac{\partial c_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1}+\frac{\partial c_1}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial c_1}{\partial},\\
&\frac{\partial c_1}{\partial x_1}=\frac{\partial c_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1}+\frac{\partial c_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_1}=\frac{\partial c_1}{\partial x},\\
&\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial c_1}{\partial x_1})\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial c_1}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial c_1}{\partial x_1})=\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

حال از $c_1=ec$ که در آن e نشان دهنده $\exp(-\varepsilon x/2-\varepsilon^2 t/4)$ ارزیابی:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial c_1}{\partial t_1}-\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2}=\frac{\partial c_1}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial c_1}{\partial x}-\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2}\\
&=e(\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\varepsilon^2}{4}c)-\varepsilon e\Big(\frac{\varepsilon c}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{2}c\Big)-e\Big(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\varepsilon^2}{4}c\Big)\\
&e\Big(\frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\Big).
\end{aligned}$$

(ii) همان قدم‌های قسمت اول را دنبال کنید.

۱۵. دقیقاً همان روند مثال ۱.۳ را دنبال کنید.

فصل دوم

(۱.) بامشتقگیری نسبت به ε،

$$\frac{\partial(dr_1/d\varepsilon,\theta_1)}{\partial(r,\theta)}+\frac{\partial(r_1,d\theta_1/d\varepsilon)}{\partial(r,\theta)}=-\frac{r}{r_1^2}\frac{dr_1}{d\varepsilon},$$

را داریم و حالا با ضرب آن در $\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(r_۱,\theta_۱)} = \frac{r_۱}{r}$ نتایج مورد نظر بدست می‌آید. این معادله می‌تواند بصورت،

$$\frac{\partial}{\partial r_۱}\Big(r_۱\frac{dr_۱}{d\varepsilon}\Big) + \frac{\partial}{d\theta_۱}\Big(r_۱\frac{d\theta_۱}{d\varepsilon}\Big) = ۰,$$

نوشته شود که از آن نتیجه می‌شود $\phi(r_۱,\theta_۱,\varepsilon)$ ای با خواص مطلوب مسئله وجود دارد. اگر ϕ از ε مستقل باشد آنگاه

$$\frac{d}{d\varepsilon}\phi(r_۱,\theta_۱) = \frac{\partial\phi}{\partial r_۱}\frac{dr_۱}{d\varepsilon} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta_۱}\frac{d\theta_۱}{d\varepsilon} = ۰$$

و بنابراین ϕ ناوردای معادله مورد نظر است.

.۲

(i) $\frac{dr_۱}{d\varepsilon} = -\frac{(Ar_۱^۲+B)}{r_۱}$، $\frac{d\theta_۱}{d\varepsilon} = ۲A\theta_۱$ که با حل هر کدام و استفاده از $r_۱ = r$ و $\theta_۱ = \theta$ برای حالتی که $\varepsilon = ۰$ است نتیجه می‌دهد که،

$$\frac{\log(Ar_۱^۲+B)}{۲A} = -\varepsilon + \frac{\log(Ar^۲+B)}{۲A}, \qquad \log\theta_۱ = ۲A\varepsilon + \log\theta,$$

که از آن نتایج مطلوب مسئله حاصل می‌شود.

(ii) $\frac{dr_۱}{d\varepsilon} = -Ar_۱$، $\frac{d\theta_۱}{d\varepsilon} = ۲A\theta_۱ + ۲B\log r_۱ + B$ که با حل معادله اول $r_۱ = e^{-A\varepsilon}r$ بدست می‌آید و بنابراین با قرار دادن این جواب در معادله دوم آن بصورت $\frac{d\theta_۱}{d\varepsilon} = ۲A\theta_۱ + ۲B\log r + B(۱-۲A\varepsilon)$ تبدیل می‌شود که می‌توان آنرا بصورت $\frac{d}{d\varepsilon}(e^{-۲A\varepsilon}\theta_۱) = ۲B\log re^{-۲A\varepsilon} + \frac{d}{d\varepsilon}(B\varepsilon e^{-۲A\varepsilon})$ دوباره نویسی کرد که با حل آن جواب $\theta_۱ e^{-۲A\varepsilon}B(\varepsilon - (\log r)/A)e^{-۲A\varepsilon} + constant$ حاصل می شود که با بکار بردن آن می‌توانیم نتایج مطلوب این قسمت از مسئله را نیز بدست آوریم.

روش دیگر $r_۱ = e^{-A\varepsilon}r$ و $\phi(r_۱,\theta_۱) = \phi(r,\theta)$ را برای رسیدن به عبارتی برای $\theta_۱$ بکار می‌بندیم.

(iii) $\frac{dr_۱}{d\varepsilon} = -\frac{A}{۴r_۱}(۱+\cos^۲\theta_۱ - \sin^۲\theta_۱)$، $\frac{d\theta_۱}{d\varepsilon} = ۰$، که از دومی بلافاصله $\theta_۱ = \theta$ بدست می‌آید که براساس آن $\frac{r_۱^۲}{۲} = -\frac{A}{۲}\varepsilon\cos^۲\theta + \frac{r^۲}{۲}$ حاصل می‌شود که نتایج مورد نظر مسئله را تامین می‌کند.

.۳ توجه کنید که $x = (e^{\varepsilon x_۱}-۱)/\varepsilon$، $y = e^{-\varepsilon x_۱}y_۱$. علاوه بر آن

$$\frac{dx_۱}{d\varepsilon} = \frac{x}{\varepsilon(۱+\varepsilon x)} - \frac{\log(۱+\varepsilon x)}{\varepsilon^۲} = \frac{(۱-\varepsilon x_۱ - e^{-\varepsilon x_۱})}{\varepsilon^۲},$$

$$\frac{dy_۱}{d\varepsilon} = xy = \frac{(۱-e^{-\varepsilon x_۱})}{\varepsilon}y_۱,$$

و چون ε بطور ضمنی در طرف دوم معادله بالا ظاهر شده است، بنابراین دستگاه خود–گردان نیست و بنابراین هیچ گروه تبدیلات یک–پارامتری را نمی‌تواند تولید کند، در مجموع ε– تابع وارون را مشخص نمی‌کند.

.۴

(ii)

$$\begin{aligned}
&L(\phi,\psi) = \xi(\phi,\psi)_x + \eta(\phi,\psi)_y\\
&= \xi(\phi_x,\psi) + \xi(\phi,\psi_x) + \eta(\phi_y,\psi) + \eta(\phi,\psi_y)\\
&= (\xi\phi_x + \eta\phi_y,\psi) + (\phi,\xi\psi_x + \eta\psi_y)\\
&-\phi_x(\xi,\psi) - \phi_y(\eta,\psi) - \psi_x(\phi,\xi) - \psi_y(\phi,\eta)
\end{aligned}$$

$$= (L(\phi), \psi) + (\phi, L(\psi)) - \phi_x(\xi_x\psi_y - \xi_y\psi_x)$$
$$= \phi_y(\eta_x\psi_y - \eta_y\psi_x) - \psi_x(\phi_x\xi_y - \phi_y\xi_x) - \psi_y(\phi_x\eta_y - \phi_y\eta_x)$$
$$= (L(\phi), \psi) + (\psi, L(\psi)) - (\xi_x + \eta_y)(\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x)$$
$$(L(\phi), \psi) + (\phi, L(\psi)) - w(\phi, \psi),$$

و بدین صورت می‌توان نتایج مطلوب را بدست آورد.

۵.

(ii)

$$P(\chi_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\phi_k, \psi_{n-1-k})$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \{(L(\phi_k), \psi_{n-1-k}) + (\phi_k, L(\psi_{n-1-k}))\}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \{((k+1)\phi_{k+1}, \psi_{n-1-k}) + (\phi_k, (n-k)\psi_{n-k})\}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \{(j\phi_j, \psi_{n-j}) + (\phi_j, (n-j)\psi_{n-j})\} + n(\phi_0, \psi_n),$$

که عبارت اخیر با قرار دادن $j = k + 1$ در مجموع اول و بطور ساده با تغییر k با j در سری دوم بدست آمده است. بنابراین،

$$P(\chi_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n} n(\phi_j, \psi_{n-j}) = n\chi_n,$$

که نتایج مطلوب مسئله را بدست می‌دهد.

۶.

(i) قرار می‌دهیم: $\rho = \varepsilon w + \frac{\varepsilon^2}{2!}P(w) + \frac{\varepsilon^3}{3!}P^2(w) + \frac{\varepsilon^4}{4!}P^3(w) + \dots$ سپس از چند جمله اول $\log(1+\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}\rho^j$ استفاده می‌کنیم که بر اساس آن داریم،

$$\log(x_1, y_1) = \log(1+\rho) = \rho - \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} + \dots$$

و با فرض $\rho^2 < 1$ و چند جمله اول عبارت بالا، نتایج مطلوب مسئله بدست می آید.

(ii) بطور مشابه با استفاده از چند جمله اول عبارت $(1+\rho)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{p^j}$،

$$(1+\rho)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{p^j}(x_1, y_1)^{-1} = (1+\rho)^{-1} = 1 - \rho + \rho^2 - \rho^3 + \rho^4 = \dots$$

که با فرض $|\rho| < 1$ چند جمله اول نتیجه خواسته مسئله بدست می آید.

۷. جزئیات حل آن مشابه مسئله ۴ است.

۸. جزئیات حل آن مشابه مسئله ۵ است.

فصل سوم

۱. از $\frac{dy_1}{dx_1}+p(x_1)y_1=q(x_1)y_1^n$ ، $x_1=f(x)$ و $g(x)y$ داریم،

$$\Big\{\frac{g(x)dy+g'(x)ydx}{f'(x)dx}\Big\}+p(f)g(x)y=q(f)g(x)^n y^n,$$

که به معادله

$$\frac{dy}{dx}+\Big\{\frac{g'(x)}{g(x)}+p(f)f'(x)\Big\}y=q(f)g(x)^{n-1}f'(x)y^n,$$

تبدیل می‌شود، که از آن،

$$p(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}+p(f)f'(x),\qquad q(x)=q(f)g(x)^{n-1}f'(x),$$

نتیجه می‌شود. بنابراین اگر بخواهیم بطور دقیق آنرا مانند بخش ۳۰۲ بنویسیم آنگاه از ۲–(۷.۳)

$$\xi'+\xi\Big\{\frac{q'}{q}-(n-1)p\Big\}=(1-n)C_1,$$

بدست می آید که دارای عامل انتگرالگیری $q(x)/s(x)^{n-1}$ بوده و نتایج مطلوب مسئله را بدست می‌دهد.

۲. بمنظور یافتن $u(x,y)$ می‌بایست معادله

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{\eta(x_1)y_1}{\xi(x_1)}=\frac{(C_1-p(x_1)\xi(x_1))y_1}{\xi(x_1)}$$

که به معادله

$$\frac{dy_1}{y_1}=\frac{C_1q(x_1)s(x_1)^{1-n}dx_1}{\Big\{(1-n)C_1\int_{x_0}^{x_1}s(t)^{1-n}q(t)dt+C_2\Big\}}-p(x_1)dx_1,$$

تبدیل می‌شود« (؟؟eq:2.8) را ببینید.» و با حل آن جواب،

$$\log y_1=\frac{1}{(1-n)}\log\Big\{(1-n)C_1\int_{x_0}^{x_1}s(t)^{1-n}q(t)dt+C_2\Big\}$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}p(t)dt=constant$$

حاصل می شود و عبارت مورد نیاز برای $u(x,y)$ بلافاصله از این معادله نتیجه می‌شود. برای یافتن $v(x,y)$ می بایست معادله $\frac{dx_1}{\xi(x_1)}=d\varepsilon$ یا $\frac{dx_1}{d\varepsilon}=\xi(x_1)$ را که قابل تبدیل به معادله

$$\frac{q(x_1)s(x_1)^{1-n}dx_1}{\Big\{(1-n)C_1\int_{x_0}^{x_1}s(t)^{1-n}q(t)dt+C_2\Big\}}=d\varepsilon,$$

بوده و با استفاده از $x_1=x$ برای حالتی که $\varepsilon=0$ است جواب

$$\frac{1}{(1-n)C_1}\log\Big\{(1-n)C_1\int_{x_0}^{x_1}s(t)^{1-n}q(t)dt+C_2\Big\}$$
$$=\varepsilon+\frac{1}{(1-n)C_1}\log\Big\{(1-n)C_1\int_{x_0}^{x}s(t)^{1-n}q(t)dt+C_2\Big\}$$

با فرض اینکه C_1 نا—صفر است، برای آن بدست می‌آید. برای نتیجه گرفتن معادله دیفرانسیل بر حسب مختصات متعارف (u,v) به صورت زیر عمل می‌کنیم،

$$\frac{du}{dv}=\frac{du/dx}{dv/dx}=\frac{\frac{s(x)(dy/dx+p(x)y)}{\Delta^{1/(1-n)}-\frac{s(x)yC_1s(x)^{1-n}q(x)}{\Delta^{1/(1-n)+1}}}}{\frac{s(x)^{1-n}q(x)}{\Delta}},$$

که بطور قرداری Δ نماینده $\left\{(1-n)C_1\int_{x_0}^{x}s(t)^{1-n}q(t)dt+C_2\right\}$ است. با استفاده از معادله دیفرانسیل داده شده، داریم

$$\frac{du}{dv}=\frac{q(x)y^{n-1}u-C_1\frac{uq(x)s(x)^{1-n}}{\Delta}}{\frac{s(x)^{1-n}q(x)}{\Delta}},$$

که به معادله $\frac{du}{dv}=u(s(x)y)^{n-1}\Delta-C_1u$ تبدیل می‌شود. بنابراین

$$\frac{du}{dv}=u\Big\{\frac{\Delta}{(s(x)y)^{1-n}}-C_1\Big\}=u\Big(\frac{1}{u^{n-1}}-C_1\Big)=u(u^{n-1}-C_1).c$$

و $dv=\frac{du}{u(u^{n-1}-C_1)}=\frac{1}{C_1}\Big\{\frac{u^{n-2}}{(u^{n-1}-C_1)}-\frac{1}{u}\Big\}du$، که با حل آن به $C_1v=\frac{\log(u^{n-1}-C_1)}{(n-1)}-\log u+constant,$ دست می‌یابیم که از آن $(n-1)C_1v=\log(1-C_1u^{1-n})+constant$ و براساس عبارت اخیر نتایج مطلوب مسئله بدست می‌ایند.

۳. مانند مسئله دوم ولی بصورت ساده‌تر از آن حل می‌شود.

۴. از $\frac{dy_1}{dx_1}+p(x_1)y_1=q(x_1)+r(x_1)y_1^2$،

$$p(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}+p(f)f'(x),\qquad q(x)=q(f)\frac{f'(x)}{g(x)},r(x)=r(f)g(x)f'(x)$$

را می‌توانیم نتیجه بگیریم، با توجه به (۷.۳) و معادله

$$\xi r'+r\xi'+r\eta=0$$

که در بخش ۳.۲ بدست آوردیم. بنابراین با حذف η از ۱—(۷.۳) داریم،

$$\xi'+\xi\Big(\frac{r'}{r}-p\Big)-C_1$$

و

$$\xi'+\xi\Big(\frac{r'}{r}-p\Big)-C_1$$

که با جمع این دو معادله عبارت $2\xi'+\xi\Big(\frac{q'}{q}+\frac{r'}{r}\Big)=0$ بدست می‌آید، یا $\xi^2qr=constant$ و با کم کردن این دو از هم داریم $\xi\Big(\frac{q'}{q}-\frac{r'}{r}+2p\Big)=2C_1$ و این عبارتها در صورتی که C_1 صفر بوده و $\frac{q'}{q}-\frac{r'}{r}+2p=0$ برقرار باشد، سازگارند و از آنجا نتایج مطلوب مسئله حاصل می‌شوند.

۵. مشابه مسئله ۴ حل می‌شود.

۶. مشابه مسئله ۴ حل می‌شود.

۷. مشابه مسئله ۴ حل می‌شود.

.۸

(i)

$$\frac{dy}{dx}=e\Big\{\frac{dy^*}{dx}-\frac{a(x)}{۲}y^*\Big\},$$
$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=e\Big\{\frac{d^۲y^*}{dx^۲}-a(x)\frac{dy^*}{dx}-[\frac{۱}{۲}\frac{da}{dx}-\frac{a(x)^۲}{۴}]y^*\Big\}$$

که e، نماینده $\exp\Big(-\frac{۱}{۲}\int_{x_۰}^x a(t)dt\Big)$ است. که کم کردن این عبارت از معادله داده شده، نتایج مطلوب مسئله را بدست می‌دهد.

(ii)

$$\frac{dy}{dx}=e\frac{dy}{dx^*},\frac{d^۲y}{dx^۲}e^۲\frac{d^۲y}{dx^{*۲}}-a(x)e\frac{dy}{dx^*}$$

که در اینجا e نماینده $\exp\Big(-\int_{x_۰}^x a(t)dt\Big)$، بوده و با $q(x)=q(f)g^۳$ برابر است. که نتایج مطلوب مسئله بسرعت از فرمولهای مورد نظر بدست می آیند.

.۹ حلی سرراست مطبق با مسئله ۸ دارد.

.۱۰ از $\frac{d^۲y_۱}{dx_۱^۲}+p(x_۱)y_۱=q(x_۱)$، معادله ناورداست اگر علاوه بر (۱۶.۳) داشته باشیم که $q(x)=g(f)g^۳$ که از آن نتیجه می‌شود که $q(x)=[q(x)+\varepsilon\xi q'(x)](۱+۳\varepsilon\eta)$، بنابراین با استفاده از ۱—(۱۷.۳) $\frac{q'}{q}=-\frac{۳}{۲}\frac{\xi'}{\xi}$ یا $\xi q'+۳\eta q=۰$، بدست می آید و نتایج مطلوب مسئله با حل آن بدست می آید. برای قسمت دوم داریم،

$$\frac{du}{dv}=\frac{du/dx}{dv/dx}=\frac{\xi^{-۱/۲}dy/dx-\xi^{-۳/۲}\xi'y/۲}{\xi^{-۱}}=\xi^{۱/۲}\frac{dy}{dx}-\frac{\xi'}{۲\xi^{۱/۲}}y,$$

بنابراین،

$$\frac{d^۲u}{dv^۲}=\frac{d}{dv}\Big(\frac{du}{dv}\Big)=\frac{d}{dx}\Big(\frac{du}{dv}\Big)/\frac{dv}{dx}$$
$$=\xi^۲\Big\{\xi^{۱/۲}\frac{d^۲y}{dx^۲}-\Big(\frac{\xi''}{۲\xi^{۱/۲}}-\frac{\xi'^۲}{۴\xi^{۳/۲}}\Big)y\Big\}$$
$$\xi^{۳/۲}\frac{d^۲y}{dx^۲}-\frac{۱}{۴\xi^{۱/۲}}(۲\xi\xi''-\xi'^۲)y$$

و معادله به

$$\frac{d^۲u}{dv^۲}=\xi^{۳/۲}\{q_۰\xi^{-۳/۲}-p(x)y\}-\frac{۱}{۴\xi^{۱/۲}}(۲\xi\xi''-\xi'^۲)y,$$

تبدیل می‌شود. یعنی $\frac{d^۲u}{dv^۲}+\Big\{\frac{۱}{۴}(۲\xi\xi''-\xi'^۲)+p\xi^۲+p\xi^۲\Big\}u=q_۰$ و بلافاصله مانند بخش ۳.۳، معادلات ارائه شده نتیجه می‌شوند.

.۲۱ مستقیماً از ۱—(؟؟) و ۲—(؟؟) داریم،

$$q-p'/۲$$
$$=\frac{g'''}{g}+\frac{۳g'^۳}{g^۳}-۴\frac{g'g''}{g^۲}+p(f)gg'+q(f)g^۳$$
$$-\frac{۱}{۲}\Big\{۲\frac{g'''}{g}-۸\frac{g'g''}{g^۲}+۶\frac{g'^۳}{g^۳}+۲p(f)gg'+\frac{dp}{df}(f)g^۳\Big\}$$
$$\Big\{g(f)-\frac{۱}{۲}\frac{dp}{df}(f)\Big\}g^۳$$

برای قسمت دوم، اگر Δ، $q-p'/۲$ را نشان می‌دهد آنگاه از $\Delta(x)=\Delta(f)g(x)^۳$، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $۳\eta\Delta+\xi\Delta=۰$، بنابراین بنابراین، $\eta=\xi'$، $\xi^۳\Delta=constant$ را می‌دهد که برای حل مسئله به آن نیازمندیم.

فصل چهارم

۱. $\mu=(\xi M+\eta N)^{-1}$، عامل انتگرالگیری معادله است، اگر

$$\Big(\frac{M}{(\xi M+\eta N)}\Big)_y=\Big(\frac{N}{(\xi M+\eta N)}\Big)_x,$$

یعنی اگر، $(\xi M+\eta N)(M_y-N_x)=M(\xi M+\eta N)_y-(\xi M+\eta N)_x$.
حال اگر در معادله (۴.۴) قرار دهیم $F=-M/N$، این معادله به معادله

$$\xi(MN_x-NM_x)+\eta(MN_y-NM_y)=\eta_x N^{۲}-(\eta_y-\xi_x)MN-\xi_y M^{۲},$$

تبدیل می‌شود که می توان نشان داد همان شرایط عامل انتگرالگیری بودن است.

۲. μ عامل انتگرالگیری برای هر دو معادله اگر

$$(\mu M)_y=(\mu N)_x \qquad (\mu N)_y=-(\mu M)x$$

بنابراین، $M\mu_x-M\mu_y=\mu(M_y-N_x)$ و $M\mu_x+N\mu_y=-\mu(M_x+N_y)$. با تعریف $R=\sqrt{M^{۲}+N^{۲}}$ و $\Theta=\tan^{-۱}(M/N)$ و استفاده از معادله بالا، عبارتهای مناسب برای μ_x و μ_y، یعنی،

$$\mu_x=\mu[\Theta_y-(\log R)_x], \qquad \mu_y=-[\Theta_x+(\log R)_y]$$

بدست می آید و با بدست آوردن عبارتی برای μ_{xy}، معادله مورد نیاز مسئله بدست می آید.

۵. مانند مثال ۴.۳ به حل معادله‌ای با مشتقات جزیی از مرتبه اول نیازمندیم، و بنابراین بایست معادلات

$$\frac{dx}{d\tau}=\xi(x), \qquad \frac{dy}{d\tau}=\eta(x)y+\zeta(x), \qquad \frac{dF}{d\tau}$$
$$=(\eta'(x)y+\zeta'(x))+(\eta(x)-\xi'(x)F,)$$

را حل کنیم، در نتیجه می بایست معادله

$$\frac{dy}{dx}-\frac{\eta}{\xi}=\frac{\zeta}{\xi}, \qquad \frac{dF}{dx}+\frac{(\xi'-\eta)}{\xi}F=\frac{\eta' y+\zeta'}{\xi}.$$

را حل کنیم. که این معادلات بترتیب دارای عامل‌های انتگرال‌گیری $s(x)$ و $\xi s(x)$ هستند که $s(x)$ در (۲۲.۴) تعریف شده است. بنابراین،

$$ys(x)-\int x_{\circ}^{x}s(t)\frac{\zeta(t)}{\xi(t)}dt=constant=A$$
$$\frac{d}{dx}\{\xi sF\}=\eta'\Big(A+\int_{x_\circ}^{x}s(t)\frac{\zeta(t)}{\xi(t)}dt\Big)+\zeta' s,$$

و با حل انتگرال به روش جز به جز،

$$\xi sF=\eta\Big(A+\int_{x_\circ}^{x}s(t)\frac{\zeta(t)}{\xi(t)}dt\Big)-\int_{x_\circ}^{x}s(t)\frac{\zeta(t)}{\xi(t)}\eta(t)dt+$$
$$\zeta s-\int -x_{\circ}{}^{x}\zeta(t)\frac{ds}{dt}+constant.$$

را بدست می‌آوریم. از تعریف (۲۲.۴) برای $s(x)$ انتگرال حذف شده و

$$F(x,y)=\frac{\eta(x)}{\xi(x)}y+\frac{\zeta(x)}{\xi(x)}+\frac{\Phi\Big(ys(x)-\int_{x_\circ}^{x}s(t)\frac{\zeta(t)}{\xi(t)}dt\Big)}{\xi(x)s(x)}$$

از آن بدست می‌آید که شکل عمومی $F(x,y)$ است.

۷. از (۱۸.۴)—(۱۵.۴) و مسئله قبلی داریم $s(x)y=A$. در مجموع می‌بایست معادله

$$y\frac{dW}{dy}+W=\frac{(n-1)y^{-n}}{\eta(x)}$$

را که با استفاده از $y=A/s$ به معادله

$$\frac{dW}{dx}+\frac{\eta(x)}{\xi(x)}W+\frac{(n-1)}{A^n}\frac{s(x)^n}{\xi(x)}$$

تبدیل می‌شود، را حل کنیم. بنابراین داریم،

$$\frac{W}{s}=\frac{(n-1)}{A^n}\int_{x_0}^{x}\frac{s(t)^{n-1}}{\xi(t)}dt+\frac{\Phi(A)}{A^n}.$$

اما $W=\frac{w}{\xi(x)y^{n-1}}=\frac{(F-y\eta(x)/\eta(x))^{-1}}{\xi(x)y^{n-1}}$، که با استفاده از آن برای بدست آوردن فرم مختصاتی مناسب مسئله داریم،

$$\begin{aligned}\frac{du}{dv}&=\frac{du/dx}{dv/dx}=\frac{s(x)\left(\frac{dy}{dx}-\frac{\eta(x)}{\xi(x)}y\right)}{\left\{\frac{1}{\xi(x)y^{n-1}}+\frac{(1-n)}{u^n}s(x)\left(\frac{dy}{dx}-\frac{\eta(x)}{\xi(x)}y\right)\int_{x_0}^{x}\frac{s(t)^{n-1}}{\xi(t)}dt\right\}}\\
&=\left\{\frac{(1-n)}{u^n}\int_{x_0}^{x}\frac{s(t)^{n-1}}{\xi(t)}dt+\frac{1}{\xi(x)y^{n-1}s(x)}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{\eta(x)}{\xi(x)}y\right)^{-1}\right\}^{-1}\\
&=\left\{\frac{(1-n)}{u^n}\int_{x_0}^{x}\frac{s(t)^{n-1}}{\xi(t)}dt+\frac{1}{\xi(x)y^{n-1}s(x)}\frac{\xi(x)}{ys(x)^{n-1}}\right.\\
&\left.\left\{(n-1)\int_{x_0}^{x}\frac{s(t)^{n-1}}{\xi(t)}dt+\Phi(u)\right\}\right\}^{-1}\\
&=\left\{\frac{\Phi(u)}{u^n}\right\}^{-1}=\frac{u^n}{\Phi(u)}\end{aligned}$$

۸. مانند مسئله (i)۸ از فصل ۳ حل می‌شود.

۹. در (۶.۴) فرض می‌کنیم، $F(x,y)=q(x)-p(x)y+r(x)y^2$، بنابراین،

$$\xi(q'-p'y+r'y^2)+(\eta y+\zeta)(2ry-p)=(\eta'y+\zeta')+(\eta-\xi')(q-py+ry^2)$$

و سه معادله داده شده با محاسبه ضرایب y^2، y و y^0 نتیجه می‌شوند. برای قسمت دوم از

$$\eta=-\left(\xi'+\frac{r'}{r}\xi\right),\qquad \zeta=\frac{-\xi''}{2r}+\frac{\xi'}{2r}\left(p-\frac{r'}{r}\right)+\frac{\xi}{2r}\left(p'-\frac{r''}{r}+\frac{r'^2}{r^2}\right),$$

برای حذف η و ξ از معادله سوم استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم معادله‌ای که برای $\zeta(x)$ بدست آورده‌ایم در انتگرال اولی که داده شده است، صدق می‌کند.

فصل پنجم

۱. اگر $\rho(x)$ نا—صفر باشد آنگاه از (۶.۴) داریم،

$$\begin{aligned}&(\rho y+\xi)(G'y+H')+G(\rho'y^2+\eta y+\zeta)\\&=(\eta-2\xi')(Gy+H)+(\rho'''y^2+\eta''y+\zeta'')\end{aligned}$$

بطور قابل ملاحظه ضرایب $y^۲$ کاملاً برابرند. حال از ضرایب y،

$$\xi G' + \rho H' + G\eta = -(\eta - ۲\xi')G + \eta'',$$

بدست می آید که با بکار بردن عبارات داده شده برای G و H می‌تواند بصورت،

$$\{p^۲(\xi'' + \eta') - ۳\rho\rho'\xi' - ۳(\rho\rho'' - \rho'^۲)\xi\}' = ۰.$$

دوباره نوشته شود، با تقسیم آن بر ρ و علاوه بر آن یافتن جواب آن، می‌توان نتایج مورد نظر مسئله را نتیجه گرفت.

۲. اگر $\rho(x)$ صفر و $\eta = \xi/۲$ باشد، آنگاه بایست ۲$-$(؟؟) را بعنوان معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی حل کنیم، بنابراین،

$$\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \Big(\frac{\xi' y}{۲} + \zeta\Big)\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-۳\xi'}{۲}F + \Big(\frac{\xi'''}{۲}y + \zeta''\Big).$$

از

$$\frac{dy}{d\tau} = \Big(\frac{\xi' y}{۲} + \zeta\Big), \qquad \frac{dF}{d\tau} = \frac{-۳\xi'}{۲}F + \Big(\frac{\xi''''}{۲}y + zeta''\Big)$$

داریم،

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\xi' y}{۲\xi} = \frac{\zeta}{\xi}. \qquad \frac{dF}{dx} + \frac{۳\xi'}{۲\xi}F = \Big(\frac{\xi''''}{۲\xi}y + \frac{\zeta''}{\xi}\Big).$$

که $\xi^{۱/۲}$ عامل انتگرال‌گیری معادله اول است که با استفاده از آن،

$$\frac{y}{\xi^{۱/۲}} - \int_{x_۰}^{x}\frac{\zeta(t)}{\xi(t)^{۳/۲}}dt = constant = A$$

نتیجه می‌شود و بهمین ترتیب $\xi^{۳/۲}$ عامل انتگرال‌گیری معادله دوم است و داریم،

$$\frac{d}{dx}(\xi^{۳/۲}F) = \frac{\xi\xi'''}{۲}\Big(A + \int_{x_۰}^{x}\frac{\zeta(t)}{\xi(t)^{۳/۲}}dt\Big) + \xi^{۱/۲}\zeta'',$$

و با انتگرال گیری به روش جز به جز،

$$\begin{aligned}
&\xi^{۳/۲}F = \frac{۱}{۲}\Big(\xi\xi'' - \frac{\xi'^۲}{۲}\Big) + \Big(A + \int_{x_۰}^{x}\frac{\zeta}{\xi(t)^{۳/۲}}dt\Big)\\
&\frac{۱}{۲}\int_{x_۰}^{x}\Big(\xi(t)\xi''(t) - \frac{\xi'(t)^۲}{۲}\Big)\frac{\zeta(t)}{\xi(t)^{۳/۲}}dt\\
&+\xi^{۱/۲}\zeta'\int_{x_۰}^{x}\zeta'(t)\frac{\xi'(t)}{۲\xi(t)^{۱/۲}}dt + constnat.
\end{aligned}$$

نتیجه می‌شود، بویژه با ترکیب دو انتگرال با هم،

$$-\frac{۱}{۲} = \int_{x_۰}^{x}\frac{d}{dt}\Big\{\zeta(t)\frac{\xi'(t)}{\xi(t)^{۱/۲}}\Big\}dt = -\frac{\zeta(x)\zeta'(x)}{۲\xi(x)^{۱/۲}} + constant,$$

بدست می آید در آخر،

$$F = \frac{۱}{۲}\Big(\frac{\xi'}{\xi^{۱/۲}}\Big)\frac{y}{\xi^{۱/۲}} + \frac{۱}{\xi^{۱/۲}}\Big(\frac{\zeta}{\xi^{۱/۲}}\Big)' + B,$$

که در آن B ثابت است، حاصل می‌شود. نتایج مورد نظر مسئله فوراً از $B = \Phi(A)$ بدست می آیند.

۳. در این حالت $F=-p(x)y^{۲}$ و با اصطلاحات مثال ۵.۱ داریم که ρ صفر، $\xi''=۲\eta'$ و معادله ۲−(؟؟) به

$$\xi p'y^{۲}+(\eta y+\zeta)۲py=(\eta-۲\xi')py^{۲}-(\xi''y+\zeta'')$$

تبدیل می‌شود که از آن می‌توان

$$\zeta''=۰,\qquad \eta''=-۲p\zeta,\qquad \xi p'+(\eta+۲\xi')p=۰,$$

را از ضرایب y، $y^{۲}$ و $y^{۰}$ نتیجه گرفت. حل دو معادله اول بوضوح به چهار ثابت برای نشان دادن $\zeta(x)$ و $\eta(x)$ نیاز دارد. در حل معادله $\xi''=۲\eta'$ به دو ثابت دیگر نیز نیاز خواهیم داشت، پس در مجموع شش ثابت وجود دارند. بایست دقت کنیم که $\zeta(x)$ و $\eta(x)$ باید سازگار باشند، به این معنا که معادله $\xi p'+(\eta+۲\xi')p=۰$ توسط تعدادی از گروههای یک−پارامتری بایست تقلیل یابد. برای قسمت دوم، معادله داده شده تحت گروه تبدیلات:

$$x_{۱}=e^{\varepsilon}x,\qquad y_{۱}=e^{-(m+۲)\varepsilon}y,$$

ناوردا است که تابع $u=yx^{(m+۲)}$ ناوردای گروه است. از این رو قرار می‌دهیم $y=x^{-(m+۲)}u$، بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=x^{-(m+۲)}\frac{du}{dx}-(m+۲)x^{-(m+۳)}u,\\ \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}&=x^{-(m+۲)}\frac{d^{۲}u}{dx^{۲}}-۲(m+۲)x^{-(m+۳)}\frac{du}{dx}+(m+۲)(m+۳)x^{-(m+۴)}u\end{aligned}$$

و معادله داده شده به معادلهٔ

$$x^{۲}\frac{d^{۲}u}{dx^{۲}}-(m+۲)x\frac{du}{dx}+(m+۲)(m+۳)u+\alpha u^{۲}=۰,$$

تبدیل می‌شود. که نوعی از معادله اویلر است، بنابراین با قرار دادن $t=\log x$ و

$$x\frac{du}{dx}=\frac{du}{dt},\qquad x^{۲}\frac{d^{۲}u}{dx^{۲}}=\frac{d^{۲}u}{dt^{۲}}-\frac{du}{dt}$$

داریم

$$\frac{d^{۲}u}{dt^{۲}}=-(۲m+۵)\frac{du}{dt}+(m+۲)(m+۳)u+\alpha u^{۲}=۰.$$

و نهایتاً $p=\frac{du}{dt}$ و $p\frac{dp}{du}=\frac{d^{۲}u}{dt^{۲}}$ معادلهٔ آبل از نوع دوم

$$p\frac{dp}{du}=(۲m+۵)p+(m+۲)(m+۳)u+\alpha u^{۲}=۰$$

را نتیجه می‌دهد.

۴. برای گروه تبدیلات مسئله ۵ از فصل ۴ داریم،

$$A=ys(x)-\int_{x_{۰}}^{x}s(t)\frac{\zeta(t)}{\xi(t)}dt,\qquad B=s(x)(\xi(x)z-\eta(x)y-\zeta(x)),$$

که $s(x)$ در معادله (۲۲.۴) تعریف شده است. و حال معادله مرتبه دوم از

$$\frac{dB}{dA}=\frac{dB/dx}{dA/dx}=\Phi(A,B)$$

حاصل می‌شود، که می‌توان نشان داد که به معادله

$$\frac{\left\{\xi^{۲}\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}+\xi(\xi-۲\eta)\frac{dy}{dx}+(\eta^{۲}-\xi\eta')y+(\eta\zeta-\xi\zeta')\right\}}{\left\{\xi\frac{dy}{dx}-\eta y-\zeta\right\}}=\Phi(A,B)$$

یا

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+\Big(\frac{\xi'}{\xi}-\frac{۲\eta}{\xi}\Big)\frac{dy}{dx}+\Big(\frac{\eta^۲}{\xi^۲}-\frac{\eta'}{\xi}\Big)y+\Big(\frac{\eta\zeta}{\xi^۲}-\frac{\zeta'}{\xi}\Big)=frac\Phi_۱(A,B)s\xi^۲$$

تبدیل می‌شود.که نتیجه مطلوب مسئله است.

برای گروه تبدیلات مسئله ۷ از فصل ۴ داریم،

$$A=s(x)y,\qquad B=\frac{۱}{s(x)[\xi(x)z-\eta(x)y]y^{n-۱}}-\frac{(n-۱)}{s(x)^ny^n}\int_{x_\circ}^x\frac{s(t)^{n-۱}}{\xi(t)}dt$$

که $s(x)$ بطور دقیق صریحاً در قسمت اول همین مسئله تعریف شده است. بطور معمول معادله دیفرانسیل مرتبه دوم از

$$\frac{dB}{dA}=\frac{dB/dx}{dA/dx}=\Phi(A,B)$$

حاصل می‌شود. حال مختصات متعارف (u,v) مسئله ۷ از فصل ۴ را بکار می‌بندیم، یعنی

$$v(x,y)=\frac{۱}{y^{y^{n-۱}}s(x)^{n-۱}}\int_{x_\circ}^x\frac{s(t)^{n-۱}}{\xi(t)}dt,$$

آنگاه داریم

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dA}&=\frac{\Big\{\frac{۱}{\xi y^{n-۱}}+\frac{(۱-n)}{A^n}s\Big(\frac{dy}{dx}-\frac{\eta}{\xi}y\Big)\int)x_\circ{}^x\frac{s(t)^{n-۱}}{\xi(t)}dt\Big\}}{s\Big(\frac{dy}{dx}-\frac{\eta}{\xi}y\Big)}\\&=\Big\{\frac{(۱-n)}{A}v+\frac{۱}{sy^{n-۱}(\xi z-\eta y)}\Big\}\\&=\Big\{\frac{(۱-n)}{A}v+B+\frac{(n-۱)}{A}v\Big\}\\&=B.\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از $B=\frac{۱}{s(\xi z-\eta y)y^{n-۱}}-\frac{(n-۱)}{A}v$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dA}&=\frac{-\xi[\xi y''+(\xi'-\eta)y'-\eta'y]}{s^۲(\xi y'-\eta y)^۳y^{n-۱}}+\frac{\eta}{s^۲(\xi y'-\eta y)^۲y^{n-۱}}\\&-\frac{(n-۱)\xi y'}{s^۲(\xi y'-\eta y)^۲y^n}-\frac{(n-۱)}{A}B+\frac{۱}{A^۲}\Big(\frac{A}{s(\xi y'-\eta y)^{n-۱}}-A\Big)\\&=\Phi(A,B)\end{aligned}$$

که به معادله

$$\frac{\xi[\xi y''+(\xi'-\eta)y'-\eta'y]}{s^۲(\xi y'-\eta y)^۳y^{n-۱}}+\frac{(n-۲)\xi y'}{s^۲(\xi y'-\eta y)^۲y^n}=\Phi_۱(A,B),$$

تبدیل می‌شود و این معادله بصورت

$$\xi\frac{d^۲y}{dx^۲}+(\xi'-\eta)\frac{dy}{dx}-\eta'y+\frac{(n-۲)}{y}\Big(\xi\frac{dy}{dx}-\eta y\Big)\frac{dy}{dx}=\frac{\Phi_۱(A,B)}{\xi}s^۲\Big(\xi\frac{dy}{dx}-\eta y\Big)^۳y^n-۱$$

ساده می‌شود. توجه کنید که اگر $n=۱$ با استفاده از

$$-\frac{۱}{y}\Big(\xi\frac{dy}{dx}-\eta y\Big)\frac{dy}{dx}=\frac{-۱}{\eta y}\Big(\xi\frac{dy}{dx}-\eta y\Big)^۲-\frac{\eta}{\xi}\Big(\xi\frac{dy}{dx}-\eta y\Big)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم کلی به

$$\xi\frac{d^۲y}{dx^۲}+(\xi'-۲\eta)\frac{dy}{dx}+\Big(\frac{\eta^۲}{\xi}-\eta'\Big)y=\frac{۱}{s\xi}\Big\{\frac{\Phi_۱(A,B)}{B^۳}+\frac{۱}{AB^۲}\Big\}$$

تبدیل می‌شود که با معادله (۵.۲۰) از مثال ۵.۵ سازگار است.

« توجه کنید که بجای B در مثال مورد نظر در اینجا $B^{-۱}$ استفاده شده است. »

فصل ششم

۱. در این حالت از (۱۸.٦) داریم،

$$\xi(x,t)=\kappa, \quad \eta(x,t)=\alpha, \quad \zeta(x,t)=\lambda,$$

بنابراین می‌بایست معادله،

$$\frac{dx_1}{d\varepsilon}=\kappa, \quad \frac{dt_1}{d\varepsilon}=\alpha, \quad \frac{dc_1}{d\varepsilon}=\lambda c_1,$$

با شرایط اولیه

$$x_1=x, \quad t_1=t, \quad c_1=c,$$

در حالتی که ε صفر است را حل کنیم که در این صورت نتایج داده شده براحتی بدست می آیند. شکل تابعی جواب با حل معادله

$$\kappa\frac{\partial c}{\partial x}+\alpha\frac{\partial c}{\partial t}=\lambda c,$$

بدست می آید. و ازمعادله مشخصهٔ

$$\frac{dx}{d\tau}=\kappa, \quad \frac{dt}{d\tau}=\alpha, \quad \frac{dc}{d\tau}=\lambda c,$$

نتیجه می‌شود که

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\kappa}{\alpha}, \quad \frac{dc}{dx}=\frac{\lambda}{\kappa}c,$$

و بنابراین

$$\alpha x-\kappa t=constant, \quad \log c=\frac{\lambda}{\kappa}x+constant,$$

که از نتیجه اخیر فرم تابعی جواب نتیجه می‌شود، با کم کردن این معادله از معادله انتشار (۱۸.٦) معادله دیفرانسیل با ضرایب صحیح،

$$(\alpha\kappa)^2\phi''+(2\alpha\lambda+\kappa^2)\kappa\phi'+\lambda^2\phi=$$

با نمادهای بکار رفته در مسئله ۱۴ از فصل ۵، بدست می آید. علاوه بر آن $A(x)$ و (x) دارای جوابهای خصوصی بشکل زیرند.

$$A(x)=A_0e^{-nx}, \quad B(x)=nx$$

که A_0 و B_0 ثابت بوده و $n=k/2^{1/2}$.

۲. در این حالت از (۱۸.٦) داریم

$$\xi(x,t)=\beta x+\delta t, \quad \eta(x,t)=2\beta t, \zeta(x,t)=-\delta x/2,$$

از آن $t_1=e^{2\beta\varepsilon}t$ بسرعت نتیجه می‌شود، سپس

$$\frac{dx_1}{d\varepsilon}=\beta x_1+\delta t_1=\beta x_1+\delta e^{2\beta\varepsilon}t$$

و بنابراین

$$\frac{d}{d\varepsilon}(e^{-\beta\varepsilon}x_1)=\delta e^{\beta\varepsilon}t$$

که با حل آن

$$e^{-\beta\varepsilon}x_۱=\frac{\delta}{\beta}e^{\beta\varepsilon}t+x-\frac{\delta}{\beta}t,$$

حاصل می‌شود که نتایج خواسته شدهٔ مسئله از روی آن بدست می‌آید. علاوه بر آن داریم

$$\frac{dc_۱}{d\varepsilon}=-\frac{\delta x}{۲}=-\frac{\delta c_۱}{۲}\Big\{xe^{\beta\varepsilon}+\frac{t\delta}{\beta}(e^{۲\beta\varepsilon}-e\beta\varepsilon)\Big\}$$

که دارای جوابی بصورت

$$\log c_۱=-\frac{\delta}{۲}\Big\{\frac{xe^{\beta\varepsilon}}{\beta}+\frac{t\delta}{\beta^۲}\Big(\frac{e^{۲\beta\varepsilon}}{۲}-e^{\beta\varepsilon}\Big)\Big\}+\frac{\delta}{۲}\Big\{\frac{x}{\eta}+\frac{t\delta}{\beta^۲}\Big(\frac{۱}{۲}\Big)\Big\}+\log c,$$

و این با تغییر آرایش می‌تواند، نتایج مطلوب مسئله را بدست دهد. بمنظور یافتن شکل تابعی جواب می‌بایست معادلات

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\beta x+\delta t}{۲\beta t},\qquad \frac{dc}{dt}=\frac{-\delta x}{۴\beta t}c$$

را حل کنیم. در ابتدا قرار می‌دهیم $v=x/t$، بنابراین $x=vt$ و

$$\frac{dx}{dt}=t\frac{dv}{dt}+v=\frac{v}{۲}+\frac{\delta}{۲\beta},$$

به معادله

$$\frac{d}{dt}=(t^{۱/۲}v)=\frac{\delta}{۲\beta t^{۱/۲}},$$

تبدیل می‌شود که با حل آن،

$$t^{۱/۲}v=\frac{\delta}{\beta}t^{۱/۲}+A$$

بدست می آید که A ثابت است. بنابراین، معادله دوم، معادله

$$\frac{dc}{dt}=-\frac{\delta}{۴\beta}\Big(\frac{\delta}{\beta}+\frac{A}{t^{۱/۲}}\Big)c,$$

را بدست می‌دهد. که تفکیک—پذیر بوده و دارای جواب،

$$\log c=\frac{\delta}{۴\beta}\Big(\frac{\delta}{\beta}t+۲At^{۱/۲}\Big)+B$$

که در آن B ثابت است، می‌باشد و شکل تابعی جواب با قرار دادن B بعنوان تابعی دلخواه از A بدست می‌آید. با تعریف w بصورت

$$w=\delta t^{۱/۲}-\beta xt^{-۱/۲}$$

معادله دیفرانسیل برای $\phi(w)$ می‌تواند به معادله،

$$۲\beta^۲\phi''(w)+w\phi''(w)=۰.$$

تبدیل شود.

۳. از $\frac{\partial c}{\partial t}=\dot\psi(t)\phi(y)-۲y\frac{\dot X(t)}{X(t)}\psi(t)\phi'(y)$ و $\frac{\partial^۲ c}{\partial x^۲}=\frac{\psi(t)}{X(t)^۲}=\{۴y\phi''(y)+۲\phi''(y)+۲\phi'(y)\}$، نتیجه می‌گیریم که معادله داده شده بوسیله $X(t)\dot X(t)=\beta$ که در آن β ثابت است. بعلاوه اگر a ثابت دیگری را نشان دهد آنگاه داریم،

$$\frac{\dot\psi(t)}{\psi(t)}=\frac{۴a}{(\alpha+۲\beta t)}$$

که حل آن به

$$\log\psi(t)=\frac{۴a}{۲\beta}\log(\alpha+۲\beta t)+constant,$$

بنابراین $\psi(t)=\psi_۰X(t)^{۴\alpha/\beta}$ که در آن $\psi_۰$ ثابت است. معادله داده شده برای $\phi(y)$ فوراً نتیجه می‌شود و با قرار دادن $y=-۲z/\beta$ معادله داده شده ابرهندسی تغییر می‌یابد.

۱۰. داریم،

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\alpha(x)\frac{\partial C}{\partial t},\qquad \frac{\partial c}{\partial x}=\alpha(x)\beta'(x)\frac{\partial C}{\partial y}+\alpha'(x)C,$$
$$\frac{\partial^۲ c}{\partial x^۲}=\alpha(x)\beta'(x)^۲\frac{\partial^۲ C}{\partial y^۲}+(۲\alpha'(x)\beta'(x)+\alpha(x)\beta''(x))\frac{\partial C}{\partial y}+\alpha''(x)C,$$

و از معادله

$$\frac{\partial c}{\partial t}=p(x)\frac{\partial^۲ c}{\partial x^۲}+p'(x)\frac{\partial c}{\partial x}$$

معادلات،

$$p(x)\alpha''(x)+p'(x)\alpha'(x)=۰,$$
$$p(x)(۲\alpha'(x)\beta'(x)+\alpha(x)\beta''(x))+p'(x)\alpha(x)\beta'(x)=۰,$$

و $p(x)\beta'(x)^۲=۱$ نتیجه می‌شوند. حل دو معادله اول به جواب

$$p(x)\alpha'(x)=A,\qquad p(x)\beta'(x)\alpha(x)^۲=B,$$

که در آن A و B ثابتهای دلخواهی هستند. بنابراین،

$$\alpha'(x)=A\beta'(x)^۲,\qquad \alpha(x)^۲=B\beta'(x),$$

بطوریکه $\alpha'(x)=A\alpha^۴/B^۲$ که حل آن به جواب

$$-\frac{۱}{۳\alpha(x)^۳}=\frac{A}{B^۲}x-\frac{C}{۳},$$

که در آن C ثابت دلخواه دیگری است. بنابراین داریم

$$\alpha(x)=(C-۳Ax/B^۲)^{-۱/۳}.$$

نهایتاً، از

$$p(x)=\frac{A}{\alpha'(x)}=\frac{\beta^۲}{\alpha(x)^۴}=\Big(C-\frac{۳Ax}{B^۲}\Big)^{۴/۳},$$

می‌توانیم با اختیار ثابتهای $C_۱$ و $C_۲$ نتایج مطلوب مسئله و

$$C_۱=-۳AB^{-۱/۲},C_۲=B^{۳/۲}C.$$

را بدست آوریم.

۱۵. اولاً نتیجه می‌شود که $\xi(x,۰)=\eta(x,۰)=۰$ بطوریکه $x=x_۰$ در زمان $t=۰$، تحت گروه تبدیلات (۱.۶) ناوردا باقی می‌ماند. ثانیاً از شرایط اولیه

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)c(x,۰)dx=c_۰\phi(x_۰),$$

نتیجه می‌شود که برای هر تابع آزمون $\phi(x)$، شرایط

$$\zeta(x_۰,۰)=-\frac{\partial\xi}{\partial x}(x_۰,۰)$$

برقرار است. بنابراین از

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x_۱)c_۱(x_۱,۰)dx_۱=c_۰\phi(x_۰),$$

و با استفاده از (۱.٦) می‌توانیم نتیجه بگیریم که،

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi\Big(x+\varepsilon\xi(x,۰)\Big)\Big(۱+\varepsilon\zeta(x,۰)\Big)\Big(۱+\varepsilon\frac{\partial\xi}{\partial x}(x,۰)\Big)c(x,۰)dx=c_۰\phi(x_۰),$$

به معادله،

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\phi(x)+\varepsilon\xi(x,۰)\phi'(x)\Big)\Big(۱+\varepsilon(\zeta(x,۰)+\frac{\partial\xi}{\partial x}(x,۰))\Big)c(x,۰)dx=c_۰\phi(x_۰).$$

تبدیل می‌شود. بنابراین با توجه به $c(x,۰)=c_۰\delta(x-x_۰)$ می توان مشاهده کرد که این معادله، معادله

$$\Big(\phi(x_۰)+\varepsilon\xi(x_۰,۰)\phi'(x_۰)\Big)\Big(۱+(\varepsilon(\zeta(x_۰),۰)+\frac{\partial\xi}{\partial x}(x_۰,۰))\Big)c_۰=c_۰\phi(x_۰)$$

را نتیجه می‌دهد. و با دقت به $\xi(x,۰)$ نتایج مطلوب مسأله بدست می آیند. مقادیر اولیه‌ای که برای $\eta(t)$، $\rho(t)$ و $\sigma(t)$ داده شده‌اند از این شرایط و (۴۷.٦) و (؟؟) بدست می آیند.

۱٦. برای حالت (i)، $\rho(t)$ نا—صفر بوده و $f(I)$ در (٥٦.٦) تعریف شده است.با حل معادله (؟؟) به این نتیجه می‌رسیم که توابع $\eta(t)$، $\rho(t)$ و $\sigma(t)$ که در شرایط مسأ له قبل صدق می‌کنند دارای سه ثابتند. و هر ثابت با گروهی از تبدیلات که نسبت به مسأله مقدار مرزی ناوردا هستند، متناظرند و هر کدام از این سه گروه را برای تعیین کردن $c(x,t)$ می‌توانیم بکار گیریم. و برای سادگی کار،

$$\eta(t)=۰,\qquad \rho(t)=۲\sinh(\beta t),\qquad \sigma(t)=\beta I_۰+(C_۲/\beta)(۱-\cosh(\beta t))$$

را بر می‌گزینیم و این انتخاب به عبارتهای داده شده برای $\eta(x,t)$، $\xi(x,t)$ و $\zeta(x,t)$ منجر می‌شود. با حل (۲.٦) به

$$c(x,t)=\frac{\phi(t)v(I)}{p(x)^{۱/۲}}\exp\Big\{-\frac{\beta I^۲}{۴}\coth(\beta t)+\frac{[\beta^۲I_۰+C_۲(I-\cosh(\beta t))]}{۲\beta\sinh(\beta t}\Big\},$$

که در آن $\phi(t)$ تابع دلخواهی از t است، دست می‌یابیم و برای نتیجه گرفتن این نتایج بایست از

$$J=-۲\frac{d}{dI}\Big\{\log\Big(\frac{v(I)}{p(x)^{۱/۲}}\Big)\Big\},$$

که از ۲—(۴۵.٦)، (٦۰.٦) و (٦٦.٦) بدست آمده است استفاده کنیم. با نوشتن به (۴.٦) به شکل

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{۱}{p(x)^{۱/۲}}\frac{\partial}{\partial I}\Big\{p(x)^{۱/۲}c\frac{\partial}{\partial I}\Big[\log\Big(\frac{p(x)^{۱/۲}c}{v(I)}\Big)\Big]-p(x)^{۱/۲}c\frac{v'(I)}{v(I)}\Big\},$$

به معادله دیفرانسیلی از مرتبه اول برای $\phi(t)$ که با حل آن می‌توان به نتایج مورد نظر مسأله دست یافت، می‌رسیم. برای قسمت آخر بایست فرض می‌کنیم که $I(x)\to\infty$ وقتی که $x\to\infty$، بطوریکه داریم،

$$\lim_{x\to ۰}\int_{-\infty}^{\infty}c(x,t)dx=\frac{۲\phi_۰v(I_۰)\pi^{۱/۲}}{\eta^{۱/۲}}=c_۰,$$

که کاملاً $\phi_۰$ و $c(x,t)$ را تعیین می‌کند.

۱۷. برای حالت (ii)، $\rho(t)$ صفر بوده و $f(I)$ در (٥۷.٦) تعریف شده است. داریم،

$$\eta(۰)=۰,\qquad \eta'(۰)=۰,\qquad \sigma(۰)=\frac{\eta''(۰)}{۸}I_۰^۲,$$

و از (٥۴.٦)

$$\eta(t)=\sinh^۲(\beta t),\qquad \sigma(t)=\frac{(\beta I_۰)^۲}{۴}-\frac{\beta}{۴}\sinh(۲\beta t)-\frac{C_۳}{۴}\sinh^۲(\beta t).$$

را بدست می‌آوریم. بنابراین از (٥۴.٦)، (٥٦.٦) و معادله دیفرانسیل جزیی (٥٦.٦) شکل تابعی داده شده

.۱۸

(i) در این حالت داریم، $p(x)=۱$، $q(x)=bx$ و از (??eq:6.45) بدست می آوریم، $I(x)=x$، $J(x)=bx$، که (??eq:6.60)، $u=-bx=-bI$ بدست می‌دهد. بنابراین از (??eq:6.66) با صرف نظر از ثابت اضافه شده، داریم، $v(I)=\exp(-bI^۲/۴)$ و از (??eq:6.59)، $C_۱=b^۲$، $C_۲=۰$ و $C_۳=-۲b$ را بدست می آوریم. اکنون عبارت داده شده، از نتایج بدست آمده در مسئله ۱٦ نتیجه می‌شوند.

(ii) در این حالت داریم $p(x)=ax$، $q(x)=a+bx$ و از (۴۵.٦) بدست می آوریم،

$$I(x)=۲\Big(\frac{x}{a}\Big)^{۱/۲},\qquad J(x)=\frac{۳}{۲}\Big(\frac{a}{x}\Big)^{۱/۲}+b\Big(\frac{x}{a}\Big)^{۱/۲},$$

بگونه‌ای تابع $\phi(x)$ تعریف شده با (۵۰.٦) به صورت

$$\phi(x)=\frac{۳a}{۴x}+\frac{b^۲x}{a}=\frac{b^۲}{۴}I^۲+\frac{۳}{I^۲},$$

تبدیل می‌شود و بنابراین با نمادگذاری حالت (ii) داریم: $C_۱=b^۲/۴$، $C_۳=۰$ و $C_۴=۳$. از (۵۹.٦)، (٦۰.٦) و (٦۰.٦) نتیجه می‌گیریم، که با صرف نظر از ثابت اضافه شده، داریم،

$$v(I)=I^{-۱/۲}\exp(-bI^۲/۸).$$

حال با میل دادن t در مسأله ۱۷ بسمت صفر، داریم،

$$\int_{-\infty}^{\infty}c(x,t)dx=\frac{-۲\Phi_۰v(I_۰)}{b(\pi I_۰ta)^{۱/۲}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{(|x|^{۱/۲}-|x_۰|^{۱/۲})^۲}{at}\Big\}\frac{dx}{|x|^{۱/۲}},$$

که در این حالت، انتگرال سمت راست به صورت

$$۲\int_{۰}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{(x^{۱/۲}-|x_۰|^{۱/۲})^۲}{at}\Big\}\frac{dx}{x^{۱/۲}}=۴(at)^{۱/۲}\int_{-(|x_۰|/at)^{۱/۲}}^{\infty}e^{-y^۲}dy,$$

تبدیل می‌شود، از میل دادن t بسمت صفر می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\int_{-\infty}^{i}nftyc(x,t)dx=\frac{-۸\Phi_۰v(I_۰)}{I_۰^{۱/۲}}=c_۰.$$

اکنون نتایج مطلوب، با در نظر گرفتن $n=۱$ از جواب مسأله ۱۷ بدست می آید.

(iii) در این حالت داریم $p(x)=x^۲$، $q(x)=(b+۲)x$، $I(x)=\log|x|$، $J(x)=(b+۳)$ و $\phi(x)=(b+۱)^۲$ بطوریکه با نمادگذاری حالت (i) داریم، $C_۱=C_۲=۰$ و $C_۳=(b+۱)^۲$. از $u=-(b+۱)$، با صرف نظر از ثابت اضافه شده، داریم،

$$v(I)=\exp\{-(b+۱)I/۲\}$$

و نتایج مطلوب از مسئله ۱٦ بدست می آید.

.۲۰

(i)

$$\xi(x,t)=f(x+t)-g(x-t),\eta(x,t)=f(x+t)+g(x-t),\zeta(x,t,c)=\lambda c+F(x+t)+G(x-t),$$

که f، g، F و G تابعهای دلخواه و λ ثابت است.

(ii) با لحاظ کردن تبدیل

$$c(x,t)=e^{-t/۲\sigma}C(x,t),$$

معادله تلگرافچی به معادله

$$\sigma\frac{\partial^۲ C}{\partial t^۲}=\frac{\partial^۲ C}{\partial x^۲}+\frac{C}{۴\sigma},$$

که با قرار دادن $t^*=\sigma^{۱/۲}t$، می‌توان دید که همان معادله کلین—گوردون است، تبدیل می‌شود.

(iii) با لحاظ کردن تبدیل،

$$x^*=x-\delta t,\qquad t^*=t,\qquad c(x,t)=C(x^*,t^*)$$

معادله انتشار داده شده به معادله انتشار کلاسیک،

$$\frac{\partial C}{\partial t^*}=\frac{\partial^۲ C}{\partial x^{*۲}}.$$

تبدیل می‌شود.

(iv)

$$\xi(x,t)=\alpha x+\beta,\eta(x,t)=\alpha t+\gamma,\zeta(x,t,c)=\delta c+f(x,t),$$

که α، β، γ و δ همگی ثابتند و $f(x,t)$ جوابی از «معادله کلین—گوردون» است.

(iv)

$$\xi(x,t)=۹\alpha x^۲+۴\alpha t^۳+۶\beta x+\gamma,\eta(x,t)=۱۲\alpha xt+۴\beta t,\zeta(x,t,c)=-(۳\alpha x+\delta)c+f(x,t),$$

که α، β، γ و δ همگی ثابتند و $f(x,t)$ جوابی از «معادله تریکومی» است.

.۲۱

(i)

$$\xi(x,y)=u(x,y),\qquad \eta(x,y)=v(x,y),\qquad \zeta(x,y)=w(x,y),$$

که u، v و w در معادله لاپلاسین صدق می‌کند و u و v اغتشاشات هارمونیکی هستند، یعنی،

$$frac\partial u\partial x=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(ii)

$$\xi(x,y)=\alpha y+\beta,\eta(x,y)=-\alpha x+\gamma,\zeta(x,y,c)=\delta c+f(x,y),$$

که α، β، γ و δ همگی ثابتند و $f(x,y)$ جوابی از «معادله هلمولتز» است.

فصل هفتم

۱. بایست معادله مشخصهٔ

$$\frac{dx}{d\tau}=x+\kappa,\qquad \frac{dt}{d\tau}=2(t+\delta),\qquad \frac{dc}{d\tau}=0,$$

با شرط،

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x+\kappa}{2(t+\delta)},\qquad \frac{dc}{dt}=0,$$

حل کنیم و بنابراین

$$\frac{x+\kappa}{(t+\delta)^{1/2}}=constant,\qquad c=constant,$$

و فرم تابعی داده شده با در نظر گرفتن یکی از ثابتها بعنوان تابع دلخواه بدست می‌آید. از

$$\frac{\partial c}{\partial t}=-\frac{w\phi'(w)}{2(t+\delta)},\qquad \frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\phi'(w)}{(t+\delta)^{1/2}},$$

و (۳.۷) معادله دیفرانسیل داده شده، بدست می‌آید.

۳. بایست با فرض $4\mu\kappa=(1+\lambda)^2$، دو حل برای معادلات

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\mu x^2+(\lambda+1)x+\kappa}{2(t+\delta)}=\frac{[2\mu x+(\lambda+1)]^2}{8\mu(t+\delta)},\frac{dc}{dt}=-\frac{-3(c+\beta)(2\mu x+\lambda)}{2[\mu x^2+(\lambda+1)x+\kappa]}=\frac{-6\mu(c+\beta)(2\mu x+\lambda)}{[2\mu x+(\lambda+1)]^2},$$

در نظر بگیریم. با حل این معادلاتِ تفکیک پذیر، بدست می‌آوریم:

$$-\frac{1}{[2\mu x+(\lambda+1)]}=\frac{1}{4}\log(t+\delta)+constant,\log(c+\beta)=-3\Big\{\frac{1}{[2\mu x+(\lambda+1)]}+\log[2\mu x+(\lambda+1)]\Big\}+constant,$$

که از حل آنها فرم تابعی داده شده سریعاً نتیجه می‌شود. در ادامه حل مسائله، عبارتهای اختصاری زیر را بکار می‌گیریم.

$$e=\exp\Big\{\frac{1}{(2\mu x+\lambda+1)}\Big\},\qquad b=2\mu x+(\lambda+1).$$

داریم،

$$\frac{\partial c}{\partial t}=-\frac{w\phi'(w)(2\mu)^3}{2(t+\delta)(be)^3}=-\frac{4\mu^3}{b^3}w^3e\phi'(w),\alpha(c+\beta)^{-4/3}\frac{\partial c}{\partial x}=-3\alpha\frac{\partial}{\partial x}(c+\beta)^{-1/3}=-\frac{3\alpha}{2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\{\phi^{-1/3}be\}=-\frac{3\alpha}{2\mu}\Big\{-\frac{be}{3}\phi^{-4/3}\phi'\frac{4\mu w}{b^2}$$

و از عبارات بالا می‌توان نتیجه گرفت،

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\alpha(c+\beta)^{-4/3}\frac{\partial c}{\partial x}\Big\}=\frac{6\alpha\mu e}{b^3}\Big\{\frac{4}{3}w(\phi^{-4/3}\phi'w)'-\phi^{-1/3}-\frac{4}{3}w\phi^{-4/3}\phi'\Big\},$$

بطوریکه داریم،

$$\frac{4}{3}\phi^{-4/3}w^2\phi''-\frac{16}{9}\phi^{-7/3}w^2\phi'^2-\phi^{-1/3}+\frac{2\mu^2}{3\alpha}w^3\phi'=0,$$

و حال معادله خواسته شده بدست می‌آید. با قرار دادن $\phi=w^{-3/2}u$ داریم،

$$\phi'=w^{-3/2}u'-\frac{3}{2}w^{-5/2}u,\qquad \phi''=w^{-3/2}u''-3w^{-5/2}u'+\frac{15}{4}w^{-7}2u,$$

و بنابراین،

$$w^2u''-3wu'+\frac{15}{4}u-\frac{4}{3u}\Big(w^2u'^2-3wuu'+\frac{9}{4}u^2\Big)-\frac{3}{4}u+\frac{\mu^2}{2\alpha}\Big(wu'-\frac{3}{2}u\Big)u^{4/3}=0.$$

بطور معمول با فرض $v=\log w$ و $p=du/dv$ بدست می‌آوریم،

$$p\frac{dp}{du}-\frac{4}{3u}p^2+\frac{\mu^2}{2\alpha}\Big(p-\frac{3u}{2}\Big)u^{4/3}=0.$$

۱۱. ناوردایی تحت گروه داده شده و فرم تابعی را می‌توان با روندی سرراست بدست آورد. از فرم تابعی و معادله برگر بدست می آوریم،

$$D\phi'' = \phi\phi' - (w\phi)'/۲,$$

که جواب زیر را بدست می‌دهد:

$$D\phi' = \frac{\phi^۲}{۲} - \frac{w\phi}{۲} + constant,$$

اما ثابت انتگرال‌گیری معادله بدلیل اینکه ϕ و ϕ' در بینهایت صفر می‌شوند، برابر صفر است. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$\Big(\frac{۱}{\phi}\Big)' - \frac{w}{۲D}\Big(\frac{۱}{\phi}\Big) = \frac{-۱}{۲D},$$

و بنابراین

$$\frac{e^{-w^۲/۴D}}{\phi} = -\frac{(C + \int_{-\infty}^{w} e^{-\lambda^۲/۴D} d\lambda)}{۲D},$$

که C ثابت جواب است، بنابراین عبارت داده شده برای $\phi(w)$ نتیجه می‌شود. حال بایست،

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(w)dw = u_۰,$$

که از عبارت داده شده برای $\phi(w)$ بدست می آوریم،

$$\Big[\log(C + \int_{-\infty}^{w} e^{-\lambda^۲/۴D} d\lambda)\Big]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{u_۰}{۲D},$$

و با استفاده از

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^۲/۴D} d\lambda = ۲D^{۱/۲} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲} dx = ۲(\pi D)^{۱/۲},$$

بدست می آوریم:

$$۱ + \frac{۲(\pi D)^{۱/۲}}{C} = e^{-u_۰/۲D},$$

یا

$$C = \frac{۲(\pi D)^{۱/۲}}{e^{-u_۰/۲D} - ۱} = \frac{-۲(\pi D)^{۱/۲} e^{u_۰/۴D}}{(e^{u_۰/۴D} - e^{-u_۰/۴D})},$$

که نتایج مطلوب مسأله بدست می آید.

۱۳. از $c(x,t) = \phi(x,t)$ داریم،

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\phi'(w)\frac{x}{t^۲}, \qquad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\phi'(w)}{t}, \frac{\partial^۲ c}{\partial t^۲} = \frac{\phi''(w)w^۲ + ۲\phi'(w)w}{t^۲}, \qquad \frac{\partial^۲ c}{\partial x^۲} = \frac{\phi''(w)}{t^۲},$$

و در نتیجه معادله دیفرانسیل داده شده براحتی بدست می آید.

۱۴. اگر $f(c_\circ)=f_\circ$ آنگاه داریم،

$$\frac{\phi''(w)}{\phi'(w)}=\frac{۲w}{(f_\circ^۲-w^۲)},$$

بطوریکه،

$$\log\phi'(w)=-\log(f_\circ^۲-w^۲)+\log C_۱,$$

و نتیجه خواسته شده می‌تواند نتیجه شود. با حل معادله

$$\phi'(w)=\frac{C_۱}{۲f_\circ}\Big\{\frac{۱}{(f_\circ+w)}+\frac{۱}{(f_\circ-w)}\Big\},$$

به جواب

$$\phi(w)=\frac{C_۱}{۲f_\circ}\log\Big|\frac{f_\circ+w}{f_\circ-w}\Big|+C_۲.$$

می‌رسیم.

۱۵. اگر $f(c)=c$ داریم،

$$(w^۲-\phi^۲)\phi''+۲w\phi'=\circ,$$

که بوضوح تحت گروه داده شده ناوردا است، بنابراین از $\phi=w\psi$ و

$$\phi'=w\psi'+\psi,\qquad \phi''=w\psi''+۲\psi',$$

داریم

$$(۱-\psi^۲)(w^۲\psi''+۲w\psi')+۲(w\psi'+\psi)=\circ,$$

بطوریکه،

$$(۱-\psi^۲)(\frac{d^۲u}{d\tau^۲}+\frac{d\psi}{d\tau})+۲(\frac{d\psi}{d\tau}+\psi)=\circ$$

و معادله داده شده با استفاده از $p=d\psi/d\tau$ بدست می آید.

۱۶.

(i)

$$p=\frac{d\psi}{d\tau}\xi(x,t,u)=\alpha xt+\beta x+\gamma t+\delta,\eta(x,t,u)=\alpha t^۲+۲\beta t+\kappa,\zeta(x,t,u)=-(\alpha t+\beta)u+(\alpha x+\gamma),$$

که α، β، γ، δ و κ ثابتهای دلخواه‌اند.

(ii)

$$\xi(x,t,u)=\alpha x+\beta t+\gamma,\eta(x,t,u)=۳\alpha t+\delta,\zeta(x,t,u)=-۲\alpha u+\beta,$$

که α، β، γ و δ ثابتهای دلخواه‌اند.

۲۳. از روابط $x = x_1 - \varepsilon t_1$ و $t = t_1$ و

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t_1},$$

می‌توانیم نتیجه بگیریم،

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

بطوریکه

$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} - \frac{\partial u_1}{\partial t_1} - u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - (u+\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x},$$

و بنابراین معادله تحت گروه داده شده ناوردا است. شکل ابعی جواب با حل معادله

$$t\frac{\partial u}{\partial x} = 1,$$

که $u(x,t) = x/t + \psi(t)$، که ψ تابع دلخواهی از t است. با این تغییر متغیر روی معادله، بدست می آوریم،

$$\psi'(t) + \psi(t)/t = 0,$$

و بنابراین $t\psi(t) = constant$ و جواب داده شده بسرعت نتیجه می‌شود.

فصل ۸

خلاصه‌ای از زمینه‌های تحقیقاتی

اگرچه زمینه‌های تحقیقاتی که در ادامه به آنها اشاره می‌شود، در طول کتاب در بخش‌های متفاوت به آنها پرداخته شده است و مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند، این خلاصه به مسیرهای قابل تحقیق و امکان‌پذیر برای آنها اشاره دارد و بر موضوعاتی تمرکز می‌کند، که تحقیقات در ارتباط با آنها می‌تواند مفید و مورد ثمر واقع شود، که برای خواننده علاقه‌مند به این موضوع مورد تأکید بوده و توصیه می‌شود.

معادلات دیفرانسیل معمولی

(i) معادله دیفرانسیل آبل از نوع دوم «صفحات و بحثهای مربوطه».

(ii) مسئله اساس لی «صفحات ».

(iii) معادلات دیفرانسیلی—تفاضلی «صفحات »

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

(iv) انشار غیرخطی با $D(c)=c^{-۴/۳}$ «صفحات »

(v) گروههای کلاسیک برای معادلات مهم «بحثهای مربوطه»

(vi) کاربرد نگرش کلاسیک برای مسئله مقدار مرزی متحرک «صفحات »

(vii) گروههای غیرکلاسیک برای معادله انتشار و معادلات دیگر«صفحات »

(i) در آنالیز معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزیی می‌بینیم که نگرش گروهی منجر به یک توقف در معادلات دیفرانسیل آبل از نوع دوم می‌شود، که دارای شکل استاندارد، بصورت:

$$y\frac{dy}{dx}+a(x)+b(x)y=۰,$$

بوده و حل آن با تکنیک‌های سطح بالا برای ردهٔ خاصی از توابع $a(x)$ و $b(x)$ بسیار مطلوب است. در اینجا می‌بایست در نظر داشته باشیم هرچند گروههای ناوردای توصیه شده این معادلات را به معادلات مرتبه اول تحویل می‌نمایند، ولی خود آنها نیز باعث پیچیدگی‌های خاصی می‌شوند. مثالهای آخر فصل ۵ مثالهای خوبی در این زمینه است، بعنوان مثال معادله (؟؟) را با $\alpha=۰$ در نظر بگیرید، یعنی،

$$y''=\beta e^{y}$$

اگر این معادله را با تغییر متغیر $z=y'$ حل کنیم دوباره با انجام تغییر متغیر $w=\exp(-y/۲)$ به جواب عمومی

$$y(x)=-۲\log\Big(\sqrt{\frac{۲\beta}{C_۱}}\sinh\frac{(\sqrt{C_۱}x+C_۲)}{۲}\Big),$$

دست می‌یابیم که در آن $C_۱$ و $C_۲$ ثابتهای دلخواه هستند که از ابتدا این فرض را داریم که $C_۱$ مثبت است. به هر حال اگر برای $\alpha = ۰$ همان استراتژی مثال ۱۰—۵ را بکار گیریم آنگاه با استفاده از (؟؟) معادله آبل از نوع دوم

$$up\frac{dp}{du} = p^۲ + up - ۲u^۲ + \beta u^۳,$$

را بدست می آوریم که در حالت کلی از انواع استاندرد قابل حل نیست ولی می‌توانیم آن را براساس جواب عمومی بالا حل کنیم. پس همان گونه که مشاهده کردید آنگونه که تصور می‌شود حل معادله آبل از این نوع وحشت‌آور و ترس‌انگیز نیست.

(ii) می‌دانیم که معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول $y' = F(x, y)$ تحت تعداد نامتناهی گروه یک—پارامتری ناوردا است. اگر از این معادله نسبت به x مشتق بگیریم معادله از مرتبه دوم بصورت:

$$y'' = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y', \qquad y'' = \frac{\partial F}{\partial x} + F\frac{\partial F}{\partial y},$$

را بدست می آوریم که تحت هشت گروه یک—پارامتری ناوردا است که بطور سیستماتیک قابل محاسبه است. این سوال پیش می آید که آیا می‌توان گروهی برای یکی یا هردوی این معادلات مرتبه دوم مورد استفاده قرار داد تا بتوان با حل آن به معادله اصلی مرتبه اول $y' = F(x, y)$ دست یافت.

(iii) در مقاله‌ی تحقیقاتی اخیر(بخش ۳۸ از ژورنال IMA در ارتباط با ریاضیات کاربردی (۱۹۸۷) صفحه ۱۳۴—۱۲۹) آقای «شیگرو میدا» روش متجانس را برای حل معادله دیفرانسیل—تفاضلی بکار برده است. همانگونه که در فصل اول به آن پرداختیم، توسعه نگرش گروهی در ارتباط با معادلات دیفرانسیل—تفاضلی مطلوب است.

(iv) در فصل ۷ نشان دادیم که معادله انتشار غیرخطی (۳.۷) با ضریب انتشار $D(c) = (c+\eta)^{-۴/۳}$ رده وسیعی از گروههای یک—پارامتری را می‌پذیرد. بعلاوه مسئله ۱۰ از فصل ٦ نشان می‌دهد که اندیس ۴/۳ برای معادله انتشار با ضریب انتشار ناهمگن بحرانی است. با ترکیب این نتایج می‌بایست انتظار داشته باشیم که معادله

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big\{\Big(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma c + \delta}\Big)^{۴/۳}\frac{\partial c}{\partial x}\Big\}$$

نقش ویژه‌ای در تئوری انتشار غیرخطی ایفا کند. در حالی که تحقیق وسیعی در ارتباط با معادله متناظر با اندیس ۲ (یعنی معادله (۵۴.۷)) صورت گرفته است، ولی تحقیق کمی در مورد معادله بالا انجام شده است.

(v) در حالت کلی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی هنوز هم جای کار بسیاری وجود دارد اما یافتن مثالهای جالبی که ارزش تحلیل داشته باشند، سخت نیست. در موارد بسیاری گروههای کلاسیکی که معادله را ناوردا می‌کنند شناخته شده‌اند، اما فرمهای تابعی و معادلات دیفرانسیل معمولی نتیجه شده می‌بایست مورد کنکاش بیشتری قرار گیرند(برای نمونه مسائل ۲۰ و ۲۱ فصل ٦ و مسئله ١٦ از فصل ۷ را ببینید).

در سرتاسر این کتاب فقط معادلات با یک متغیر وابسته را مورد بحث قرار دادیم اما معادلات زیادی در ریاضیات کاربردی وجود دارد که بیش از یک متغیر وابسته دارند. برای نمونه می‌توان به زوج معادلات انتشار—عکس‌العمل، همانند:

$$\frac{\partial c_۱}{\partial t} = D_۱\frac{\partial^۲ c_۱}{\partial x^۲} - kc_۱ + k_۲c_۲, \qquad \frac{\partial c_۲}{\partial t} = D_۲\frac{\partial^۲ c_۲}{\partial x^۲} + k_۱c_۱ - k_۲c_۲,$$

اشاره کرد که در آن $D_۱$، $D_۲$، $k_۱$ و $k_۲$ همگی ثابتهای مثبت می‌باشند. قطعاً مطالعه کاربردهای ناوردایی کلاسیک برای این چنین سیستمهایی ارزشمند خواهد بود.

(vi) در حالی که بطور مختصر به ارتباط نگرش گروهی با مسائل مقدار مرزی متحرک اشاره کردیم، بهیچ وجه موضوع و زمینه‌ای که بعنوان یکی از زمینه‌های امیدوار کننده و غنی برای مطالعه بوسیله روش گروهها است و بعلاوه احتمال دارد که تنها روش دست یافتن به حل تحلیلی برای این چنین مسائلی باشد، را مورد استفاده قرار ندادیم. بویژه مسائل مقدار مرزی متحرک عمدتاً با شرایطی در مرز متحرک $x = X(t)$ همچون

$$c(X(t), t) = ۰, \qquad \frac{\partial c}{\partial x}(X(t), t) = -\dot{X}(t),$$

مشخص می‌شوند که در آن $c(x,t)$ غلظت یا دما را نشان می‌دهد و یافتن رده‌های کلی از گروههایی که این معادلات را ناوردا می‌کنند مد نظر ما می‌باشد. برای بررسی جزئیات و یافتن مراجع بیشتر خواننده را به «هیل (۱۹۸۷)» ارجاع می‌دهیم.

(vii) کار کمی در ارتباط با معادلات دیفرانسیل با مشقات جزیی ناوردای غیرکلاسیک انجام گرفته است. برای نمونه گروههای غیرکلاسیک برای معادله انتشار بوسیله سیستم (؟؟) تعیین می‌شود، یعنی

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial^{۲} A}{\partial x^{۲}}-۲A\frac{\partial B}{\partial x},\qquad \frac{\partial B}{\partial t}=\frac{\partial^{۲} B}{\partial x^{۲}}-۲B\frac{\partial B}{\partial x}-۲\frac{\partial A}{\partial x},$$

که بنظر می‌آید مستلزم توجه بیشتری باشد. بعلاوه تعداد معادلات مهم زیاد دیگری نیز همچون معادله غیرخطی برگر و معادله کورتوگ—دوریس وجود دارند:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}},\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^{۳} u}{\partial x^{۳}},$$

که گروههای غیرکلاسیک خاص و جوابهای نتیجه شده از آنها ممکن است با پدیده‌های فیزیکی جدید و مهمی متناظر باشد.