روشهای تقارنی در بررسی معادلات دیفرانسیل

راهنمای مقدماتی

اثر:

پیتر ا. هایدون

ترجمهٔ:

مهدی نجفی‌خواه،

مریم عبدالصمدی، الهه افتاده، پروانه احمدی،

نرگس پور رستمی، محبوبه سامانی‌پور[1]

[1] آخرین بروز رسانی: ۲ خرداد ۱۳۹۲

دیباچه

مشکلی که در حل معادلات دیفرانسیل وجود دارد، این است که زمانی که معادله ای را می شود حل کرد بندرت چرایی نحوه حل آنرا می‌پرسیم. مفهوم گروه تبدیلات یک-پارامتری که معادله دیفرانسیل را ناوردا می‌کند فهم همزمان اغلب تکنیک‌های حل را ممکن می‌سازد.

در این کتاب سعی شده تا دلیلی مختصر و جامع برای استفاده از گروههای یک-پارامتری در حل معادلات دیفرنسیل ارائه شود. روش ارائه بگونه‌ای است که رضایت ریاضیدانان کاربردی و مهندسانی که اصلی‌ترین نگرانیشان یافتن راه‌حلهای معادلات دیفرانسیل است را فراهم نماید. در اینجا فقط موضوعات اساسی لازم برای توانمند کردن خواننده در استفاده از روش گروهها در حل معادلات دیفرانسیل را مد نظر قرار داده‌ایم و عمداً همه نتایج شناخته شده را بخاطر اینکه منجر به ارائه دلایل غیر ضروری بیشتری می شود ارائه نکرده‌ایم. برای معادلات دیفرانسیل معمولی کتاب «معادلات دیفرانسیل از دید گروه ها» اثر «ل . د. دیکسون» هنوز به اندازه‌ی زیادی قابل مطالعه است و برای خواننده علاقه‌مند به دنبال کردن بیشتر موضوع، توصیه می شود. برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی کتاب «ج . و . بلومن« و «ج . د. کول» تحت عنوان «روشهای تقارنی در معادلات دیفرانسیل« و نیز کتاب «خواص گروهیِ معادلات دیفرانسیل« نوشته «ل . ب . اوزیانیکوف» شامل چندین کاربرد و مثال می‌باشند که در اینجا آنها را ارائه نکرده‌ایم.

دو فصل اول مقدماتی است. فصل اول مقدمه‌ای با مثالهای ساده در ارتباط با معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی است. در فصل دوم مفاهیم گروه یک-پارامتری و سریهای لی آورده شده است. همانگونه که روشهای معمولی حل معادلات دیفرانسیل نیاز به ابتکار خاصی دارند، روش گروهی نیز به آن نیازمند است. به منظور شروع برخی از آشنایی‌ها با روش گروهی، سعی کرده‌ایم که تجربیاتمان را در معادلات خطی بکار ببریم.

معمولا همه می‌دانند که هر معادله دیفرانسیل خطی برای $y(x)$ تحت تبدیل $x_1 = f(x)$ و $y_1 = g(x)y$ خطی باقی می‌ماند و فصل ۳ را به نتایج آن اختصاص داده‌ایم. در فصول ۴ و ۵ سعی کرده‌ایم نظریه معمولی برای روش گروهی را با نتایج بدست آمده در فصل ۳ مرتبط کنیم. از این نظر این کتاب متفاوت از بقیه کتابها می‌باشد و معتقدیم که شماری از نتایج بدست آمده بالاخص در فصل ۳ جدیدند.

دو فصل نهایی به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی اختصاص داده شده است. بخش اعظم این نظریه با ارجاع به انتشار وابسته به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی توضیح داده شده است. نظریه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی در فصل ۶ برای انتشار کلاسیک یا معادله انتقال حرارت و معادله فوکر-پلانک معرفی شده است، به معادلات غیر خطی در فصل ۷ می‌پردازیم. برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی رویکرد گروهی کارایی کمتری دارد چون برای مشکلات مقدار مرزی ناوردا می‌باشد. در این جا ما اساساً فقط ناوردا بودن معادله و دیدگاه گروهی را که به عنوان ابزار سیستماتیک برای استنباط راه حل معادلا ت دیفرانسیل با مشتقات جزیی داده شده است، را در نظر می‌گیریم.

این کتاب مرجع تدریس درسی در دوره کارشناسی ارشد در دانشگاه ولانگنگ به مدت چندین سال بوده است که تعداد زیادی مساله و مثال به آن افزوده‌ایم. علاوه بر این از مسائل انتهایِ هر فصل، بمنظور تفهیم آسان نتایج استاندارد برای معادلات دیفرانسیل که در متن ارائه شده‌اند، استفاده کرده‌ایم و در بعضی مواقع از این مسائل برای ارائه خلاصه تئوری‌هایی که پیشتر از این بنحوی کامل در متن توصیف شده‌اند استفاده نموده‌ایم.

چندین صفحه در خصوص پاسخ‌ها و نکات مربوط به مسائل در انتهای هر فصل و در انتهای کتاب آورده شده است که برای ایجاد متنی قابل استفاده برای دانشجویان فارغ-التحصیل و در حال فارغ-التحصیلی در رشته ریاضیات، علوم و مهندسی طراحی شده‌اند. در این گونه نظام‌ها معادلات دیفرانسیل

کماکان نقش اساسی بازی کرده و متن حاضر سعی می کند از فرضیات پایه‌ای که معادلات دیفرانسیل را بوجود می آورند برای حل آنها استفاده نماید. تئوری موجود حل معادلات دیفرانسیل بوسیله گروههای یک-پارامتری به هیچ عنوان کامل نیست و بسیاری از نواقص این موضوع در متن مشخص شده است. وقتی این روش کارایی دارد بسیار آسان بوده و بنابراین زمینه دانشی است که هر فردی در زمینه ریاضیات کاربردی باید داشته باشد. محدودیتهای (روش گروه) هر چه باشد کماکان این روش ایده بسیار جالبی جهت حل مسائل معادلات دیفرانسیل محسوب می‌شود. امیدواریم این کتاب مفید واقع شده و اطلاعات قبلی شما را کامل کند.

دانشگاه ولانگنگ،
۱۹۹۲

فهرست مطالب

فصل ۵ تقارنهای لی چند پارامتری

فصل ۶ حل معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از لی گروه‌های چند پارامتری

فصل ۷ روشهای مبتنی بر انتگرالهای اولیه

فصل ۸ چگونه تقارن های نقطه ای لی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را بیابیم

فصل ۹ روش‌هایی برای یافتن جوابهای دقیق معادلات با مشتقات جزئی

فصل ۱۰ دسته‌بندی جوابهای ناوردا

فصل ۱۱ تقارنهای گسسته

راهنمای جوابها و راه حل‌های جزئی برخی از مسائل

کتاب نامه

فصل ۱

آشنایی با تقارن

وقتی چیزی را می‌بینم، آن را می‌فهمم. (*ج.پ. استیوارت*) [۱]

بخش ۱.۱ تقارن اشیاء مسطحه

بررسی تقارن اشیاء ساده می‌تواند در تفهیم تقارن معادلات دیفرانسیل مفید باشد. به طور تقریبی، منظور از یک تقارن برای یک شی هندسی مفروض، تبدیلی است که آن شی را ظاهراً بدون تغییر می‌گذارد. برای نمونه، نتیجه دوران یک مثلث متوازی الاضلاع حول مرکزش و به طور پادساعتگرد را بررسی می‌کنیم. بعد از دوران $2\pi/3$ به نظر می‌آید که آن شبیه به خودش قبل از دوران است بنابراین این تبدیل یک تقارن مثلث مذکور می‌باشد.

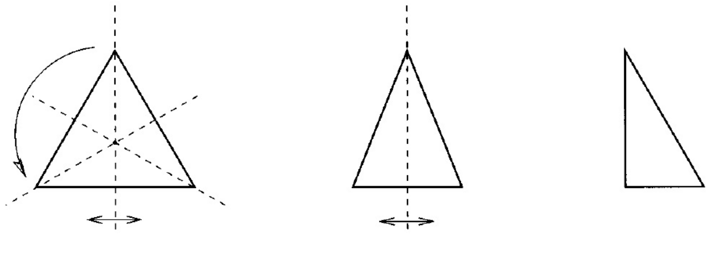
دوران‌های $4\pi/3$ و 2π هم تقارن مثلث متوازی الاضلاع هستند؛ در حقیقت، دوران 2π معادل با انجام ندادن هیچ کاری است! زیرا هر نقطه را به خودش می‌نگارد. این تبدیل که هر نقطه را به خودش می‌نگارد، تقارنی برای هر شی هندسی است که به آن اصطلاحا *تقارن بدیهی* می‌گویند.

معمولاً از تقارن برای دسته بندی اشیاء هندسی استفاده می‌شود. فرض کنید مثلث رسم شده در شکل ۱.۱ از یک ماده صلب با جهت غیر قابل تشخیص باشد. تقارن‌های مثلث‌ها به سرعت با آزمایش پیدا می‌شوند این مثلث متوازی الاضلاع دارای تقارن بدیهی، دوران‌های توصیف شده در بالا و انعکاس اطراف سه نیم‌ساز در شکل ۱۱.-(a) می‌باشد. بنابراین این مثلث متوازی الاضلاع دارای شش تقارن مجزا می‌باشد.

مثلث متساوی الساقین در شکل ۱۱.-(b) دارای دو تقارن است: (۱ انعکاس و (۲ تقارن بدیهی. نهایتاً مثلث با سه ضلع نامساوی در شکل ۱۱.-(c) تنها تقارن بدیهی دارد. محدودیت‌های معینی روی تقارن‌های اشیاء هندسی وجود دارد: اول آنکه هر *تقارنی باید دارای معکوسی یکتا باشد*، که خودش نیز تقارن است. ترکیب عمل تقارن و معکوسش روی هم اشیاء را بدون تغییر می‌گذارد. برای مثال فرض

---

[۱] Justice Potter Stewart: Jacoblellis v. Ohio, 378 U.S. 184, 197 [1964]



شکل ۱.۱: چند مثلث و تقارنهای مربوط به آنها

کنید Γ یک دوران از مثلث متوازی الاضلاع به اندازه $2\pi/3$ را نشان دهد پس Γ^{-1} (معکوس Γ) یک دوران به اندازه $4\pi/3$ است.

برای سادگی توجه خود را به تقارن‌هایی که هموار باشند معطوف می‌کنیم (این پیش فرض تکنیکی چندان محدودیتی ایجاد نمی کند و برای بررسی مثال‌های کاربردی تر و محسوس تر وضع شده است). اگر x موقعیت یک نقطه دلخواه از شیٍ را نشان دهد و اگر $\Gamma : x \mapsto \hat{x}(x)$ یک تقارن دلخواه باشد، آنگاه فرض می‌کنیم که تابع $\hat{x}$ به طور نامتناهی نسبت به x دیفرانسیل‌پذیر است. بعلاوه، از اینکه Γ^{-1} هم یک تقارن است، x هم نسبت به $\hat{x}$ به طور نامتناهی دیفرانسیل‌پذیر است. از این رو Γ یک C^∞−دیفئومورفیسم است؛ به عبارت دیگر، نگاشتی معکوس‌پذیر و هموار است که معکوسش هم هموار میباشد.

تقارن‌ها بایستی **حافظ ساختار** باشند؛ در واقع هر شیء هندسی معمولا دارای یک ساختار هندسی است که هویت آن را مشخص می‌نماید.

در مقایسه با مکانیک کلاسیک، ساختار چیزی مثل روابط بنیادی و معرف برای شیئ مشخص میباشد. بر این اساس، تقارنهای مثلث را به عنوان تقارنهای مثلثی ساخته شده از یک جسم صلب میشود بررسی نمود. تنها تبدیلاتی که یک مثلث صلب مفروض را باقی می‌گذارند، آن‌هایی هستند که حافظ فاصله‌ی میان هر دو نقطه واقع بر مثلث هستند. همانند انتقال‌ها، دوران‌ها و انعکاس‌ها. این تبدیلات تنها تقارن‌های ممکن میباشند، زیرا سایر تبدیلات توانایی نگهداری ساختار صلب را ندارند.

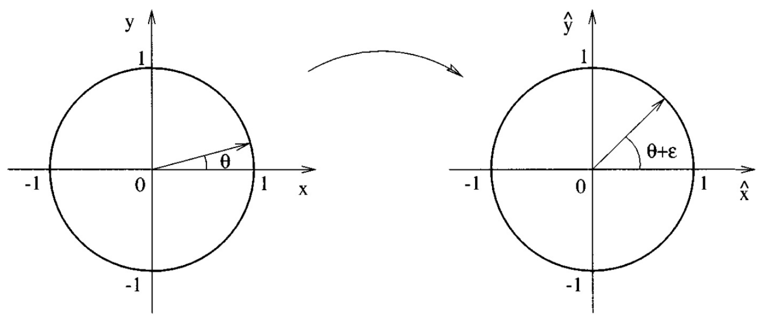
از طرفی، اگر مثلث‌ها از یک ماده لاستیکی ساخته شوند، مثل پاک‌کن، دسته‌ی تبدلات حافظ ساختار بزرگتر است و تقارن‌های جدیدی ممکن است پیدا شوند. برای مثال، یک مثلث با سه ضلع نامساوی را می‌توان کش داد به توی یک مثلث متوازی الاضلاع، آن گاه دوران $2\pi/3$ حول مرکز و نهایتاً کشیده شدن به صورت شکل اصلی‌اش. آشکارا، این تبدیل یک تقارن از مثلث صلب نیست؛ بنابراین، ساختار در نظر گرفته شده بر یک شی هندسی مفروض، میتواند تاثیر قابل توجهی بر مجموعه‌ی تقارن‌های آن اشیاء داشته باشد.

خلاصه اینکه، تقارن عبارت از تبدیلی است صادق در شرایط به شرح ذیل:

(S۱) باید تبدیل حافظ ساختار باشد.

(S۲) باید تبدیل، دیفئومورفیسم باشد.

(S۳) باید تبدیل شی مورد نظر را به خودش بنگارد [یک شیء مسطحه در صفحه (x,y) و تصویرش در صفحه $(\hat{x},\hat{y})$ غیر قابل مقایسه هستند.]



شکل ۲.۱: دوران در دایره واحد

از این پس، توجه خود را به تبدیلاتی که در شرط S۱ و S۲ صدق کند معطوف می‌کنیم. در این صورت، تبدیلی *تقارن* نامیده میشود که علاوه بر آنها در شرط S۳ نیز صدق کنند.

هر مثلث صلب مفروض، مجموعه ای متناهی از تقارن‌ها دارد. اشیاء زیادی دارای مجموعه نامتناهی از تقارن‌ها هستند. برای مثال دایره واحد صلب $x^2+y^2=1$ دارای تقارن زیر است:

$$\Gamma_\varepsilon : (x,y) \longmapsto (\hat{x},\hat{y}) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon)$$

برای هر $-\varepsilon \in (-x,x]$. در مختصات قطبی چنین است:

$$\Gamma_\varepsilon : (\cos\theta, \sin\theta) \longmapsto (\cos(\theta+\varepsilon), \sin(\theta+\varepsilon))$$

در شکل ۲.۱ نشان داده شده است. از این رو این تبدیل ، یک دوران به اندازه ε حول مرکز دایره است که حافظ ساختار است (دورانها صلب هستند) و هموار و معکوس‌پذیرند (معکوس یک دوران ε، دوران $-\varepsilon$ است) برای اثبات شرط تقارن (S۳) کافی است توجه کنیم که $\hat{x}^2+\hat{y}^2 = x^2+y^2$ و بنابراین

$$\hat{x}^2+\hat{y}^2 = 1 \qquad \text{وقتی که} \qquad x^2+y^2 = 1$$

دایره واحد تقارن‌های دیگری هم دارد، مانند انعکاس نسبت به هر خط گذرنده از مرکز. به راحتی می‌توان نشان داد که هر انعکاسی با انعکاس زیر هم ارز است:

$$\Gamma_\pi : (x,y) \longmapsto (-x,y) \qquad \text{با توجه به طرح کلی دورانها} \qquad \Gamma_\varepsilon$$

مجموعه نامتناهی از تقارن‌های Γ_ε یک مثال از یک گروه لی یک-پارامتری است. این دسته از تقارن‌ها بی‌اندازه مفیدند و کلیدی برای جواب‌های حقیقی از معادلات دیفرانسیل هستند. فرض کنید که یک شی که شامل زیر مجموعه از $\mathbb{R}^N$ است یک مجموعه نامتناهی از تقارن‌های زیر را داشته باشد:

$$\Gamma_\varepsilon : x^s \longmapsto \hat{x}^s(x^1,\cdots,x^s;\varepsilon) \qquad s=1,\cdots,N$$

که ε پارامتری حقیقی است و شرایط مورد نظر برقرارند:

L۱) Γ_0 تقارن بدیهی است: $\hat{x}^s = x^s$ وقتی $\varepsilon = 0$.

L۲) Γ_εیک تقارن به ازای هر ε در همسایگی ای از صفر است.

L۳) $\Gamma_\delta \Gamma_\varepsilon = \Gamma_{\delta+\varepsilon}$ برای هر δ و ε به اندازه کافی نزدیک صفر.

L۴) هر یک از توابع $\hat{x}^s$ را به صورت سری تیلور در ε (در همسایگی از $\varepsilon = 0$) می‌توان بسط داد:

$$\hat{x}^s(x^1, \cdots, x^s; \varepsilon) = x^s + \varepsilon \xi^s(x^1, \cdots, x^s) + o(\varepsilon^2) \qquad s = 1, \cdots, N$$

به این ترتیب، مجموعه‌ی تقارنهای Γ_ε یک گروه لی موضعی یک-پارامتری تشکیل میدهد. قسمت موضعی (که معمولاً از این پس حذف خواهیم کرد) از این حقیقت می‌آید که تنها نیاز است که شرایط در یک همسایگی از $\varepsilon = 0$ بررسی شوند. بعلاوه، ممکن است بزرگی اندازه همسایگی به $\hat{x}^s$، $s = 1, \cdots, N$ بستگی داشته باشد. از کلمه *گروه* به این دلیل استفاده نمودیم که تقارنهای Γ_ε در شرایط یک گروه صدق میکنند، فاصله از بین برود. بازاء ε های در همسایگی از صفر. بخصوص، شرط (L۲) تضمین می‌کند که $\Gamma_\varepsilon^{-1} = \Gamma_{-\varepsilon}$. شرایط (L۱) تا (L۴) تا اندازه ای محدودند، دلیل آن امکان استفاده بهتر از آنها در رابطه با حل معادلات دیفرانسیل و پرهیز از مشکلات احتمالی بعدی است.

تقارن‌های متعلق به یک گروه لی یک-پارامتری به طور پیوسته به پارامتری وابسته هستند. در حالی که خواهیم دید برخی تقارنهای اشیاء بخصوصی، ممکن است به طور نا پیوسته به پارامتری وابسته باشند؛ این *تقارن‌های گسسته* را نمی‌توان با یک-پارامتر پیوسته نشان داد. برای مثال، مجموعه‌ی تقارن‌های مثلث متوازی الاضلاع ساختار گروه دووجهی $\mathbb{D}_3$ دارد. در صورتیکه دو تقارن مثلث متساوی الساقین گروهی تولید میکنند که با $\mathbb{Z}_2$ ایزومورف است.

تقارن‌های گسسته به دلایل زیادی مفیدند، چنان که در پایان کتاب شرح آن خواهد آمد. اما، تا آنجا همه کوشش مان را بررسی *تقارنهای لی* معطوف میکنیم، چرا که محاسبه و همچنین استفاده از آنها راحتتر می‌باشد.

بیشتر اوقات تنها به خود توابع $\hat{x}^s$ توجه نموده، با آنها کار می‌کنیم، و در این بین توجه کمتری به ساختار گروهای منبعث از آنها داریم. بنابراین، به جهت آسانتر شدن کارها، بهتر است فرمولهایی چون

$$\Gamma_\varepsilon : (x^1, \cdots, x^N) \longmapsto (\hat{x}^1, \cdots, \hat{x}^N) = \cdots$$

را به صورت خلاصه $(\hat{x}^1, \cdots, \hat{x}^N) = \cdots$ بنویسیم. استفاده از اندیسهای بالا و یا پایین در بیان احکام مفید است، اما در مثالها تا آنجایی که امکان دارد از ذکر آنها اجتناب خواهد شد. مثلا، از متغیرهای $x, y, \cdots$ بجای $x^1, x^2, \cdots$ استفاده می‌کنیم.

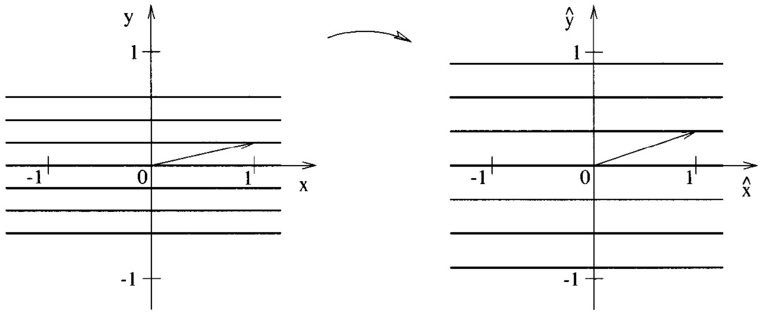
بخش ۲.۱ تقارنهای ساده‌ترین معادله دیفرانسیل معمولی

تقارن معادلات دیفرانسیل معمولی (یا به اختصار ODE) چیست؟ برای شروع پاسخ به این سؤال، ساده‌ترین معادله دیفرانسیل معمولی را بررسی می‌کنیم، یعنی

$$\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (۱.۱)$$

جواب این معادله دیفرانسیل معمولی، مجموعه خطوط $\{y(x) = c \,|\, c \in \mathbb{R}\}$ است، که صفحهٔ (x, y) را پر می‌کنند. معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۱) بطور هندسی به صورت مجموعه‌ی همه جوابهایش مشخص می‌شود؛ و بنابراین هر تقارن برای یک معادله دیفرانسیل معمولی مفروض، باید مجموعه جواب را به خودش بنگارد. به طور رسمی‌تر شرط تقارن (S۳) الزام می‌کند که مجموعه‌ی منحنی‌های جواب در صفحهٔ (x, y) باید از تصویرش در صفحهٔ $(\hat{x}, \hat{y})$ غیر قابل جدا نمودن باشد و بنابراین

$$\frac{d\hat{y}}{\hat{x}} = 0 \qquad \text{هر گاه} \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (۲.۱)$$



شکل ۳.۱: جوابهای (۱.۱) توسط یک تجانس (۵.۱) تبدیل شده اند.

یک تبدیل هموار مفروض تعریف شده بر صفحه در صورتی معکوس‌پذیر است که ژاکوبین آن غیر صفر باشد. بنابراین، شرط دیگر زیر اعمال می‌شود:

$$\hat{x}_x\hat{y}_y - \hat{x}_y\hat{y}_x \neq 0 \qquad (۳.۱)$$

(در سرتاسر کتاب اندیس پایین نشانگر مشتق جزئی است؛ مثلا $\hat{x}_x$ به معنی $\dfrac{\partial \hat{x}}{\partial x}$ می‌باشد) هر منحنی جواب مفروض به یک منحنی جواب (احتمالا متفاوت) نگاشته می‌شود؛ و بنابراین:

$$\hat{y}(x,c) = \hat{c}(c) \qquad \forall c \in \mathbb{R} \qquad (۴.۱)$$

که در اینجا x به عنوان تابعی از $\hat{x}$ و c در نظر گرفته شد است، که با معکوسگیری از $\hat{x} = \hat{x}(x,c)$ بدست می‌آید.

معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۱) تقارنهای زیادی دارد؛ یکی از آنها را در شکل ۳.۱ مشخص هستند. تقارنهای گسسته هم وجود دارند؛ مانند انعکاسهایی در محورهای x و y . تجانس به شکل زیر از جمله تقارنهای لی این معادله هستند:

$$(\hat{x},\hat{y}) = (x, e^{\varepsilon}y) \qquad \varepsilon \in \mathbb{R} \qquad (۵.۱)$$

[در شکل ۳.۱ تنها تأثیر (۵.۱) روی تنها تعداد کمی از منحنی‌های جواب نشان داده شده است. اگر همهٔ منحنی‌های جواب را بتوان نشان داد، آنگاه هر دو نیمه شکل یکسان می‌شدند.] بعلاوه، هر انتقال

$$(\hat{x},\hat{y}) = (x+\varepsilon_1, y+\varepsilon_2) \qquad \varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathbb{R} \qquad (۶.۱)$$

نیز یک تقارن است. مجموعه‌ی همه انتقالها به دو پارامتر ε_1 و ε_2 وابسته است. با صفر گرفتن ε_1، گروه لی یک-پارامتری از انتقالها در جهت y بدست می‌آید. به طور مشابه، گروه لی یک-پارامتری از انتقالهای در جهت x با صفر گرفتن ε_2 حاصل می‌شود. مجموعهٔ انتقالهای (۶.۱) یک گروه لی دو-پارامتری است که از آن به عنوان ترکیبی دو گروه لی یک-پارامتری از انتقالهای پارامتره شده بوسیله ε_1 و ε_2 حاصل می‌گردد. تقریبا تقارنهای متعلق به یک گروه لی $\mathbb{R}$–پارامتری را می توان به عنوان یک ترکیب از تقارن ها $\mathbb{R}$ گروه های لی یک-پارامتری به کار برد.

همهٔ گروههای لی یک-پارامتری مفید نیستند. برای مثال، انتقال (۶.۱) هر منحنی جواب $y = c$ را به منحنی $\hat{y} = c + \varepsilon_2$ می‌نگارد. روشن است که اگر $\varepsilon_2 = 0$، هر منحنی جواب با یک تقارن به خودش نگاشته می‌شود. زیرا انتقالها در جهت x نقاط متعلق به منحنی ثابت=y را در راستای همین خط حرکت

می‌دهند. تقارنهایی که هر منحنی جواب را به خودش می‌نگارد اصطلاحا *بدیهی* نامیده می‌شوند، حتی اگر نقاط متعلق به منحنی‌های جواب را حرکت دهند.

معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۱) بی‌نهایت ساده است و بنابراین همهٔ تقارنهایش را می‌توان یافت. با مشتق گیری از (۴.۱) نسبت به x بدست می‌آوریم:

$$\hat{y}_x(x,c)=0, \qquad \forall c\in\mathbb{R}.$$

بنابراین، با توجه به (۳.۱)، تقارنهای (۱.۱) به شکل

$$(\hat{x},\hat{y})=(f(x,y),g(y)), \qquad f_x\neq 0, \qquad g_y\neq 0, \tag{۷.۱}$$

هستند، که f و g توابعی هموار از متغیرهایشان فرض شده‌اند. معادله دیفرانسیل معمولی مورد نظر خانواده‌ای بسیار بزرگ از تقارنها دارد. (شگفت اینکه، هر معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اولی چنین است.)

با استفاده از جواب عمومی (۱.۱) معادله (۲.۱)، و با مشتقگیری از آن قادر به نتیجه‌گیری (۷.۱) هستیم. همچنین می توان این نتایج را مستقیما از (۲.۱) بدست آورد. روی منحنی های جواب، y تابعی از x است، و از اینرو $\hat{x}(x,y)$ و $\hat{y}(x,y)$ به عنوان توابعی از x بکار گرفته می شود. در نتیجه، با استفاده از قاعده زنجیره‌ای مشتق، از (۲.۱) نتیجه می‌شود که

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}}=\frac{\mathrm{D}_x\hat{y}}{\mathrm{D}_x\hat{x}}=0 \qquad \text{وقتی که} \qquad \frac{dy}{dx}=0$$

که D_x *مشتق کلی* نسبت به x است:

$$\mathrm{D}_x=\partial_x+y'\partial_y+y''\partial_{y'}+\cdots. \tag{۸.۱}$$

(در سرتاسر کتاب، از نماد ∂_x برای نشان دادن $\frac{\partial}{\partial x}$؛ از نماد y' برای نشان دادن $\frac{dy}{dx}$ هم و غیره). بنابراین (۸.۱) به تبدیل می‌شود

$$y'=0 \qquad \text{وقتی که} \qquad \frac{\hat{y}_x+y'\hat{y}_y}{\hat{x}_x+y'\hat{x}_y}=0$$

یعنی اینکه $\hat{y}_x/\hat{x}_x=0$. از اینرو (۷.۱) برقرار است. مزیت استفاده از شرط تقارن در فرم (۲.۱) این است که اطلاعات مربوط به تقارن‌ها را بدون دانستن جوابهای معادله دیفرانسیل مورد نظر می‌توان بدست آورد. این مشاهده یکی از نتایج اساسی در روند یافتن تقارنهای یک معادله دیفرانسیل مفروض است، بی آنکه جوابهای آن را بدانیم.

بخش ۳.۱ شرط تقارن برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

تقارنهای $y'=0$ به راحتی قابل تجسم هستند، چرا که منحنی‌های جواب آن خطوط موازی می‌باشند. اما در حالت کلی، یافتن تقارنهای یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول پیچیده‌تر از آن است که با دیدن تصویری از منحنی‌های جوابش مقدور باشد. با این وجود، شرط تقارن حکم می‌کند که هر تقارنی باید مجموعهٔ منحنی‌های جواب در صفحهٔ (x,y) را به یک مجموعه‌ای مشخص از منحنی‌های در صفحهٔ $(\hat{x},\hat{y})$ بنگارد. معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dy}{dx}=\omega(x,y). \tag{۹.۱}$$

(برای سادگی بیشتر در بحث، توجهمان را تنها به نواحی‌ای از صفحه محدود می‌کنیم که ω بر آنها تابعی هموار است؛ البته، چنین وضعیتی در بسیاری از مسایل عملی به وجود می آید.) شرط تقارن برای (۹.۱) عبارتست از

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}}=\omega(\hat{x},\hat{y}) \qquad \text{وقتی} \qquad \frac{dy}{dx}=\omega(x,y) \tag{۱۰.۱}$$

همچون قبل، y را به عنوان تابعی از x (و یک ثابت انتگرالگیری) بر مجموعه منحنی‌های جواب فرض می‌کنیم. پس (۱۰.۱) نتیجه می‌دهد که

$$\frac{dy}{dx}=(x,y) \qquad \text{وقتی} \qquad \frac{\mathrm{D}_x\hat{y}}{\mathrm{D}_x\hat{x}}=\frac{\hat{y}_x+y'\hat{y}_y}{\hat{x}_x+y'\hat{x}_y}=\omega(\hat{x},\hat{y})$$

بنابراین، شرط تقارن برای معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول (۹.۱) با معادله

$$\frac{\hat{y}_x+\omega(x,y)\hat{y}_y}{\hat{x}_x+\omega(x,y)\hat{x}_y}=\omega(\hat{x},\hat{y}), \tag{۱۱.۱}$$

که در هر دو، باید نگاشت ω دیفئومورفیسم باشد، هم ارز است. با حل (۱۱.۱) امکان یافتن همه و یا حد اقل برخی از تقارنهای معادله دیفرانسیل معمولی مفروض ممکن است. یک راه این است که *گمانه زنی* کنیم، یعنی، به جستجوی تقارنهای بخصوصی بگردیم.

۱.۱ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=y \tag{۱۲.۱}$$

شرط (۱۱.۱) حکم می‌کند که بایستی هر تقارن برای (۱۲.۱) در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (و یا به اختصار PDE) صدق کند:

$$\frac{\hat{y}_x+y\hat{y}_y}{\hat{x}_x+y\hat{x}_y}=\hat{y}.$$

بجای یافتن جواب عمومی این معادله با مشتقات جزئی، ترجیح می‌دهیم بررسی کنیم که این معادله بخصوص اساسا دارای تقارنهایی که ما گمانه زنی می‌کنیم، می‌باشد و یا خیر! برای مثال، آیا تقارنهایی وجود دارند که y را به خودش بنگارد؟ اگر چنین است، پس باید

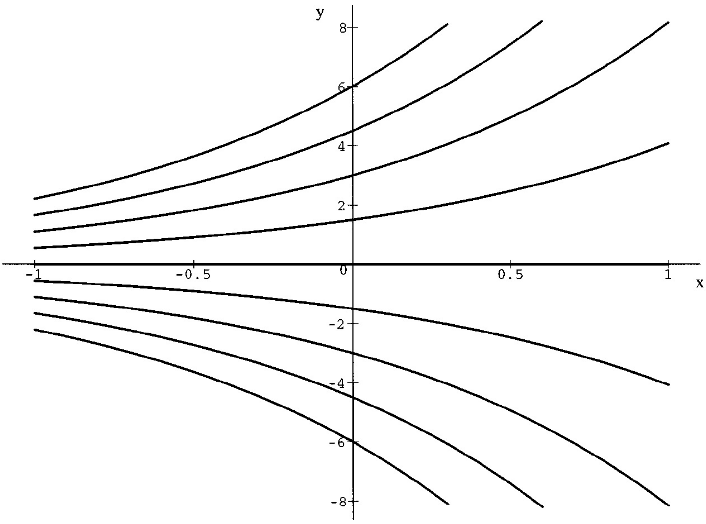
$$(\hat{x},\hat{y})=(\hat{x}(x,y),y),$$

و شرط (۱۱.۱) به معادله زیر تبدیل می‌گردد:

$$\frac{y}{\hat{x}_x+y\hat{x}_y}=y.$$

بنابراین (با توجه به (۳.۱))، داریم:

$$\hat{x}_x+y\hat{x}_y=1, \qquad \hat{x}_x\neq 0.$$



شکل ۴.۱: جوابهای $y' = y$

تقارنهای زیادی از این نوع وجود دارد؛ ساده‌ترین آنها، تقارنهای لی

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \varepsilon, y) \qquad \varepsilon \in \mathbb{R} \tag{۱۳.۱}$$

می‌باشند. پیشتر، دیدیم که انتقالهای در جهت x، تقارنهای بدیهی $y' = 0$ هستند: اما، آیا این موضوع در مورد معادله دیفرانسیل مفروض (۱۲.۱) نیز بدیهی است؟ جواب عمومی (۱۲.۱) را به راحتی می‌توان یافت؛ در واقع عبارت است از

$$y = c_1 e^x \qquad c_1 \in \mathbb{R}.$$

هر انتقال به شکل (۱۳.۱)، هر منحنی جواب با مقدار ثابت c_1 را به منحنی زیر می‌نگارد:

$$c_2 = c_1 e^{-\varepsilon} \qquad \text{که} \qquad \hat{y} = y = c_1 e^x = c_1 e^{\hat{x} - \varepsilon} = c_2 e^{\hat{x}}$$

بنابراین، انتقالهای در جهت x تقارنهای غیر بدیهی از (۱۲.۱) هستند، چرا که (اغلب) $c_1 \neq c_2$. (البته، $\varepsilon = 0$ لزوماً به تقارن بدیهی می‌انجامد). جالب اینکه، برخی از منحنی‌های جواب این معادله توسط هر انتقال به خودشان نگاشته می‌شوند، نظیر $y = 0$. منحنی‌های جوابی که توسط یک تقارن مفروض به خودشان نگاشته می‌شوند، *ناوردا* تحت تقارن مورد نظر نامیده می‌شود. همان طوری که در شکل ۴.۱ مشهود است، جواب $y = 0$، مجموعه منحنی‌های جواب $y = c_1 e^x$ را افراز می‌کند. هیچ تقارن انتقالی (۱۳.۱) قادر نیست که جوابهای با $c_1 > 0$ را به جوابهای با $c_1 < 0$ بنگارند. اگر چه این معادله دیفرانسیل معمولی بخصوص، تقارنهایی دارد که می‌تواند جوابهای در نیم صفحهٔ بالایی و پایینی را با هم تعوض کند.

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, -y);$$

نمونه‌ای از چنین تقارنهایی است. این تقارن، نمونه‌ای از یک تقارن *گسسته* است.

تا اینجا تنها به بررسی تقارن معادلات دیفرانسیل معمولی بسیار ساده پرداختیم؛ اما روش بالا در یافتن تقارنها چنان قوی هست که از آن برای یافتن تقریبا همه معادله دیفرانسیل معمولی بتوان استفاده نمود. در اینجا، به ذکر چند مثال پیچیده‌تر می‌پردازیم.

۲.۱ مثال . معادله ریکاتی

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{x}+\frac{y^2}{x^2} \qquad (۱۴.۱)$$

به نظر پیچیده می‌آید، اما جواب عمومی‌اش (چنانچه در فصل بعد خواهیم دید) کاملاً ساده است. تقارنهای این معادله دیفرانسیل معمولی شامل یک گروه لی یک-پارامتری از معکوسها است:

$$(\hat{x},\hat{y})=\left(\frac{x}{1-4x},\frac{y}{1-4x}\right) \qquad (۱۵.۱)$$

برای اثبات این موضوع، کافی است (۱۵.۱) را در شرط تقارن (۱۱.۱) قرار دهیم، و توجه کنیم که ω سمت راست معادله (۱۴.۱) می‌باشد. این انعکاسها، اولین مثال ما از یک گروه لی از تقارنها است که برای همهٔ ε های حقیقی خوشتعریف نیستند. (شعاع همگرایی سری تیلور حول $\varepsilon=0$، عبارتست از $\frac{1}{|x|}$).

۳.۱ مثال . معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^3+x^2y-y-x}{xy^2+x^3+y-x}, \qquad (۱۶.۱)$$

را در نظر بگیرید. مجموعه منحنی‌های جواب آن در شکل ۵.۱ نشان داده شده است؛ با توجه به آن، می‌توان حدس زد که احتمالاً دورانهای حول مبدأ تقارن هستند. بر عهده شما تا نشان دهید که دوران‌های

$$(\hat{x},\hat{y})=(x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon) \qquad (۱۷.۱)$$

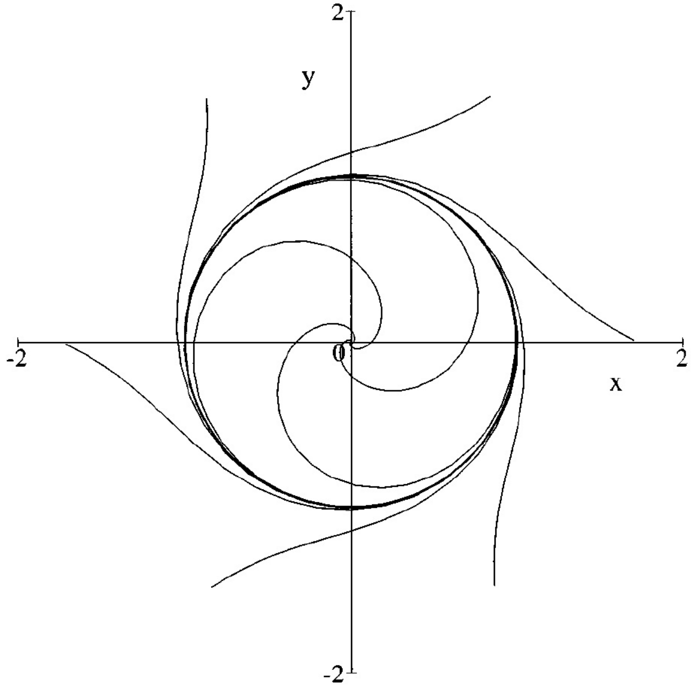
یک گروه لی یک-پارامتری از تقارنهای (۱۶.۱) را تشکیل می‌دهند.

بخش ۴.۱ حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول با استفاده از تقارنهای لی

عنوان این بخش از مشاهده حکم شگفت انگیز مشروح در ذیل بر گرفته شده است. فرض کنید که یک گروه لی یک-پارامتری غیر بدیهی از تقارنهای معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول (۹.۱) را بتوانیم بیابیم. در این صورت، از این گروه لی برای تعیین جواب عمومی آن معادله دیفرانسیل معمولی مفروض می‌توان استفاده نمود. این نتیجه، دلیلی بر سودمندی تقارنهای لی است؛ و در این بین تنها از تابع $\omega(x,y)$ استفاده می‌شود. ایده اصلی این مطلب را در ذیل تشریح می‌کنیم و جزئیات بیشتر را به فصل بعد موکول می‌کنیم.

ابتدا، فرض کنید که تقارنهای (۱۹.۱) شامل گروه لی انتقالهای در جهت y باشند:

$$(x,\hat{y})=(x,y+\varepsilon). \qquad (۱۸.۱)$$



شکل ۵.۱: جوابهای (۱۶.۱)

در این صورت، شرط تقارن (۱۱.۱) بصورت زیر در می‌آید:

$$\omega(x,y) = \omega(x, y+\varepsilon), \tag{۱۹.۱}$$

برای هر ε در همسایگی‌ای از صفر. با مشتقگیری از (۱۹.۱) نسبت به ε در $\varepsilon = 0$، نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$\omega_y(x,y) = 0.$$

بنابراین، کلی‌ترین معادله دیفرانسیل معمولی‌ای که تقارنهایش شامل گروه لی انتقالهای (۱۸.۱) باشد، بشکل زیر هستند:

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x).$$

این معادله دیفرانسیل معمولی را نیز می‌توان حل نمود: جواب عمومی آن عبارتست از:

$$y = \int \omega(x)dx + c. \tag{۲۰.۱}$$

(معادله دیفرانسیلی را حل شده می‌دانیم که پاسخ ارائه شده تنها به محاسبه یک سری انتگرال موکول شده باشد، جواب خصوصی متناظر با $c = 0$، تحت انتقال به جواب زیر

$$\hat{y} = \int \omega(x)dx + \varepsilon = \int (\hat{x})d\hat{x} + \varepsilon$$

نگاشته می‌شود، که جوابی خصوصی با $c = \varepsilon$ است. بنابراین، با استفاده از گروه لی یک-پارامتری موجود، می‌توان جواب عمومی یک معادله را از حرکت دادن یک جواب خصوصی آن بدست می‌آوریم.
در این مثال، گروه لی مورد نظر با ایجاد تغییر در ثابت انتگرال بر مجموعه منحنی‌های جواب عمل می‌کند.

پس آشکار شد که، هر معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اولی که دارای گروه لی از انتقالهای (۱۸.۱) باشد، به آسانی قابل حل است. آیا این روند برای هر معادله دیفرانسیل معمولی با گروه لی یک-پارامتری دیگر نیز درست است؟ معادله دیفرانسیل معمولی متقارن مدور (۱۶.۱) را در نظر بگیرید، که مجموعه جوابهای آن در شکل ۵.۱ نشان داده شده است. طبیعی است که این معادله دیفرانسیل معمولی را در مختصات قطعی (r,θ) با ضابطه

$$x = r\cos\theta \qquad x = r\sin\theta$$

باز نویسی کنیم. حاصل، معادله دیفرانسیل معمولی ساده

$$\frac{dr}{d\theta} = r(1-r^2) \tag{۲۱.۱}$$

است، که بلافاصله قابل حل است. از بازنویسی گروه لی یک-پارامتری از دوران‌های (۱۷.۱) در مختصات قطبی، نتیجه می‌شود:

$$(\hat{r},\hat{\theta}) = (r, \theta+\varepsilon).$$

در مختصات جدید تقارنهای دورانی انتقالهایی در θ می‌شوند. بنابراین، معادله دیفرانسیل معمولی به آسانی حل می‌شود.

ایده مشابه برای همهٔ گروههای لی یک-پارامتری کار می‌کند. در یک دستگاه مختصاتی مناسب، تقارنهایی که با ε به اندازه کافی نزدیک به صفر پارامتری می‌شوند با انتقالها (به جز در نقاط ثابت) هم ارز هستند. یک مسئله باقی می‌ماند: دستگاه مختصات مناسب چیست؟ برای مثال دستگاه مختصاتی اختصاصی برای معادله دیفرانسیل معمولی (۱۴.۱) واضح نیست.

این ثابت می‌کند که گروه لی خودش جوابی برای این مسئله دارد چنانچه در فصل بعد خواهیم دید.

تمرین‌ها

۱.۱ مجموعه جوابهای معادله دیفرانسیل معمولی $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ را مشخص کنید. چند نوع تقارن برای این را می‌توانید مشخص کنید؟

۲.۱ نشان دهید که تبدیل تعریف شده به صورت $(\hat{x},\hat{y})=(e^{x}x,y)$ یک تقارن برای $\frac{dy}{dx}=\frac{1-y^2}{x}$ است؛ که $\varepsilon\in\mathbb{R}$. این تقارنها را به طور هندسی توصیف کنید. اینها چگونه جوابهای معادله دیفرانسیل معمولی را تبدیل می‌کنند؟

۳.۱ نشان دهید که دوران‌های (۱۷.۱) تقارنهایی برای معادله دیفرانسیل معمولی (۱۶.۱) هستند.

۴.۱ مقدار α را طوری تعیین کنید که $(\hat{x},\hat{y})=(x+2\varepsilon,ye^{a\alpha})$ تقارنی برای $\frac{dy}{dx}=y^2e^{a\varepsilon}+y+e^{x}$ باشد، که $\varepsilon\in\mathbb{R}$ است.

۵.۱ نشان دهید که به ازای هر $\varepsilon\in\mathbb{R}$ ای $(\hat{x},\hat{y})=\left(x,y+\varepsilon\exp\{\int F(x)dx\}\right)$ یک تقارن برای معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه اول $\frac{dy}{dx}=F(x)y+G(x)$ است. ارتباط میان این تقارنها و قاعده اصی خطی بودن را توضیح دهید.

فصل ۲

تقارنهای لی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

سیلاب های های بزرگ از منابع کوچک منشاء می گیرند.

(ویلیام شکسپیر: همه چیزهای خوب، پایان خوش دارند)

بخش ۱.۲ عمل تقارنهای لی روی صفحه

تا کنون ما تنها تعداد کمی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول ویژه را به شکل زیر بررسی کردیم:

$$\frac{dy}{dx} = w(x,y) \tag{۱.۲}$$

هدف این فصل توسعه تکنیکهایی است که برای هر معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۲) قابل اجرا است. با یک آزمون بسته از روشی که تقارنها روی صفحه عمل می‌کنند شروع می‌کنیم. ایده‌های اصلی مشکل نیستند و می‌توان آنها را با کمک معادلات دیفرانسیل معمولی خیلی ساده ساخت. با این وجود این ایده‌ها عمومی هستند و در نهایت در این فصل ما از آن برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی که با روش‌های استاندارد حل نمی‌شوند استفاده خواهیم کرد.

فرض کنید که $y = f(x)$ جوابی از (۱.۲) است و یک تقارن ویژه این جواب را به منحنی $\hat{y} = \hat{f}(\hat{x})$ می‌نگارد. که جوابی از:

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = w(\hat{x},\hat{y}).$$

است. تابع $\hat{f}$ بصورت زیر بدست می‌آید. تقارن، منحنی $y = f(x)$ را به مجموعه نقاط $(\hat{x},\hat{y})$– تبدیل می‌کند که در آن

$$\hat{x} = \hat{x}(x, f(x)), \qquad \hat{y} = \hat{y}(x, f(x)). \tag{۲.۲}$$

که یک منحنی در صفحه $(\hat{x},\hat{y})$ است که در فرم پارامتری نوشته شده است. معادله اول از (۲.۲) را بگونه ای حل می کنیم که x به عنوان تابعی از $\hat{x}$ بدست آید و نتیجه آنرا در معادله دوم (۲.۲) جایگذاری می‌کنیم.

$$\tilde{f}(\hat{x}) = \hat{y}(x(\hat{x}), f(x(\hat{x}))). \qquad (۳.۲)$$

اگر تقارن به یک گروه لی یک پارامتری متعلق باشد، آنگاه $\tilde{f}$ یک تابع از $\hat{x}$ و پارامتر ε است.

۱.۲ مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \qquad (۴.۲)$$

عبارتست از:

$$y = cx^2 \qquad (۵.۲)$$

روی ربع $x > 0$ و $y > 0$ متمرکز می‌شویم بطوریکه هر منحنی جواب (۵.۲) متناظر با یک $c > 0$ ویژه است.

مجموعه جوابها در این ناحیه با تقارن گسسته زیر به خودش نگاشته می‌شود:

$$(\hat{x},\hat{y}) = \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right). \qquad (۶.۲)$$

مخصوصاً، منحنی جواب متناظر با $c = c_1$ به منحنی زیر نگاشته می‌شود:

$$(\hat{x},\hat{y}) = \left(\frac{1}{c_1 x}, \frac{1}{c_1 x^2}\right).$$

بنابراین $x = \frac{1}{(c_1\hat{x})}$ و بنابراین منحنی جواب $y = c_1x^2$ به:

$$\hat{y} = c_1\hat{x}^2.$$

نگاشته می‌شود. معادله دیفرانسیل معمولی (۴.۲) تقارنهای دیگری هم دارد، شامل گروه لی یک پارامتری از تجانس ها بصورت

$$(\hat{x},\hat{y}) = (e^{\varepsilon}x, c^{\varepsilon}y). \qquad (۷.۲)$$

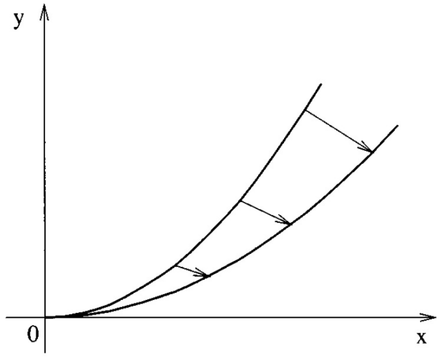
هر تقارن از این شکل منحنی جواب $y = c_1x^2$ را به منحنی:

$$(\hat{x},\hat{y}) = (e^{\varepsilon}x, c_1e^{-\varepsilon}x^2).$$

می‌نگارد. با حل نسبت به x بدست می‌آوریم $x = e^{-\varepsilon}\hat{x}$ و بنابراین جواب تبدیل یافته عبارتست از:

$$\hat{y} = c_1e^{-3\varepsilon}\hat{x}^2.$$

صفحهٔ (x,y) و صفحهٔ $(\hat{x},\hat{y})$ شامل مجموعه منحنی‌های جواب مشابهی هستند. بجای استفاده از دو صفحه همسان، بهتر است آنها را با هم ادغام کنیم. آنگاه از این تقارن به عنوان یک نگاشت از صفحهٔ



شکل ۱.۲: عمل یک تقارن (۷.۲) روی یک جواب از (۴.۲)

(x,y) به خودش تلقی می‌شود که به آن عمل تقارن روی صفحهٔ (x,y) می‌گویند. بخصوص نقطه با مختصات (x,y) به نقطه‌ای که مختصاتش:

$$(\hat{x},\hat{y})=(\hat{x}(x,y),\hat{y}(x,y)).$$

است نگاشته می شود. منحنی جواب $y=f(x)$ مجموعه‌ای از نقاط با مختصات $(x,f(x))$ است. آن به مجموعه از نقاط با مختصات $(\hat{x},\tilde{f}(\hat{x}))$ نگاشته می‌شود. که منحنی جواب $y=\tilde{f}(x)$ است بنابراین اگر $\tilde{f}=f$، منحنی $y=f(x)$ تحت این تقارن ناوردا است . یک تقارن بدیهی است اگر عمل آن هر منحنی جواب را ناوردا باقی گذارد.

تذکر: ممکن است که لازم باشد روی زیر مجموعه‌ای از صفحه متمرکز شویم ، اگر معادله دیفرانسیل معمولی یا تقارن روی تمام صفحه خوش تعریف نباشد.

۲.۲ مثال. در مثال قبل تقارنهای گوناگونی از معادله دیفرانسیل معمولی زیر بررسی شد:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x},\qquad x>0\qquad,\qquad y>0.$$

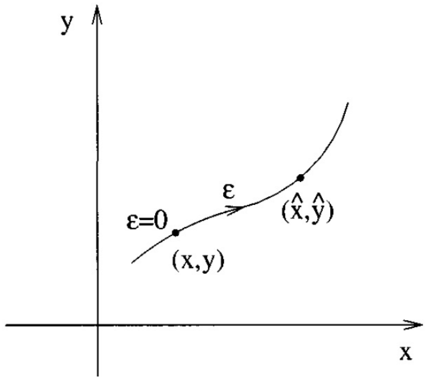
دانستیم که تقارنهای به شکل (۷.۲) منحنی جواب $y=c_1x^2$ را به منحنی $\hat{y}=c_1e^{-3\varepsilon}\hat{x}^2$ در صفحهٔ $(\hat{x},\hat{y})$ می‌نگارند. بنابراین عمل یک تقارن (۷.۲) روی ربع $x>0$ و $y>0$ جواب $y=c_1x^2$ را به جواب $y=c_1e^{-3\varepsilon}x^2$ می‌نگارد چنانچه در شکل ۱.۲ نشان داده شده است. تقارن گسسته (۷.۲) هر منحنی جواب $y=c_1x^2$ را به خودش می‌نگارد و از اینرو (۶.۲) یک تقارن بدیهی است.

مطالعه‌ی عمل یک گروه لی یک پارامتری از تقارنها روی نقاطی در صفحه مفید است. مدار یک گروه گذرنده از (x,y)، مجموعه نقاطی است که (x,y) را بتوان با یک انتخاب از ε نگاشت. مختصات نقاط روی مدار گذرنده از (x,y)، عبارتست از:

$$(\hat{x},\hat{y})=(\hat{x}(x,y;\varepsilon),\hat{y}(x,y;\varepsilon)),\tag{۸.۲}$$

که در آن:

$$(\hat{x}(x,y;o),\hat{y}(x,y;o))=(x,y).\tag{۹.۲}$$



شکل ۲.۲: قسمتی از یک مدار یک بعدی

مدار گذرنده از یک نقطه یک منحنی هموار است چنانچه در شکل ۲.۲ نشان داده شده است. اگر چه همچنین ممکن است یک یا چند نقطه ناوردا باشد. هر کدام از آنها با تقارنهای لی به خودشان نگاشته می‌شوند. هر نقطه ناوردا یک مدار صفر بعدی از گروه لی است.

۳.۲ مثال. تقارنهای لی از معادله دیفرانسیل معمولی (۱۶.۱) شامل دورانهای زیر است:

$$(\hat{x},\hat{y}) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon).$$

که در مختصات قطبی بصورت زیر در می‌آیند:

$$(\hat{r},\hat{\theta}) = (r,\theta+\varepsilon).$$

مدار گذرنده از هر نقطه $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ دایره $r=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ است در صورتیکه $(0,0)$ به خودش نگاشته می‌شود و بنابراین یک نقطه ناوردا است.

عمل یک گروه لی هر نقطه روی یک مدار را به یک نقطه روی همان مدار می‌نگارد. به عبارت دیگر، هر مدار تحت عمل گروه لی ناوردا است.

اکنون مدار گذرنده از یک نقطه‌ای که غیر ناوردا مثل (x,y) را نظر می گیریم. بردار مماس به مدار در نقطه $(\hat{x},\hat{y})$ عبارتست از $(\xi(\hat{x},\hat{y}),\eta(\hat{x},\hat{y}))$ که در آن:

$$\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} = \xi(\hat{x},\hat{y}) \qquad , \qquad \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} = \eta(\hat{x},\hat{y}). \tag{۱۰.۲}$$

بویژه، بردار مماس در (x,y) برابر است با:

$$(\xi(x,y),\eta(x,y)) = \left(\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}, \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right) \tag{۱۱.۲}$$

بنابراین برای مرتبه اول در ε ، سری تیلور برای عمل گروه لی عبارتست از:

$$\hat{x} = x+\varepsilon\xi(x,y)+o(\varepsilon^2), \qquad \hat{y} = y+\varepsilon\eta(x,y)+o(\varepsilon^2). \tag{۱۲.۲}$$

یک نقطه ناوردا با هر تقارن لی به خودش نگاشته می‌شود. بنابراین، از (۱۲.۲) نقطه (x,y) ناوردا است اگر بردار مماس، صفر باشد. که هست:

$$\xi(x,y)=\eta(x,y)=0. \qquad (۱۳.۲)$$

در حقیقت این شرط لازم، کافی نیز هست، که می‌توان آنرا مکرراً با مشتقگیری از (۱۲.۲) نسبت به ε و قرار دادن صفر بجای ε اثبات کرد. مجموعه بردارهای مماس برای یک گروه لی خاص مثالی از یک میدان برداری هموار است، زیرا بردارهای مماس به طور هموار با (x,y) تغییر پیدا می‌کند.

درک (۱.۲) به عنوان توصیفی از یک جریان پیوسته از ذرات روی صفحه مفید است. در این قیاس، ε زمان و بردار مماس در یک نقطه به عنوان ، سرعتی از ذره در این نقطه است؛ مدار مسیر گذرنده از ذره است نقاط ناوردا نقاط ثابت این جریان هستند.

اگر یک مدار از هر منحنی C به طور متقاطع در یک نقطه عبور کند آنگاه تقارنهای لی وجود دارند که (x,y) را به نقاطی که روی C نیستند می‌نگارند. بنابراین یک منحنی ناورداست اگر و فقط اگر هیچ مداری از آن نگذرد. (واژه اگر بر جا می‌ماند زیر هر مدار ناورداست). به عبارت دیگر c یک منحنی ناورداست اگر و تنها اگر مماس به C در هر نقطه (x,y) با بردار مماس $(\xi(x,y),\eta(x,y))$ موازی باشد. این شرط را می‌توان به طور ریاضی با معرفی مشخصه بیان کرد:

$$Q(x,y,y')=\eta(x,y)-y'\xi(x,y). \qquad (۱۴.۲)$$

اگر C منحنی $y=y(x)$ باشد، مماس به C در $(x,y(x))$ در امتداد $(1,y'(x))$ است که این موازی با $(\xi(x,y),\eta(x,y))$ است اگر و تنها اگر:

$$Q(x,y,y')=0 \qquad \text{روی } c \qquad (۱۵.۲)$$

این نتیجه ما را قادر می‌سازد که جوابهای ناوردای (۱.۲) را مشخص کنیم همانطور که می بینیم. روی همه جوابهای (۱.۲) مشخصه هم ارز است با:

$$\bar{Q}(x,y)=Q(x,y,w(x,y))=\eta(x,y)-w(x,y)\xi(x,y). \qquad (۱۶.۲)$$

[$\bar{Q}(x,y)$ را مشخصه کاهش یافته می‌گوییم]. یک منحنی جواب $y=f(x)$ ناورداست اگر و تنها اگر:

$$y=f(x) \qquad \text{وقتی} \qquad \bar{Q}(x,y)=0 \qquad (۱۷.۲)$$

تقارنهای لی بدیهی هستند اگر و فقط اگر $\bar{Q}(x,y)$ به طور یکسان برابر صفر باشد، که هست:

$$\eta(x,y)\equiv w(x,y)\xi(x,y). \qquad (۱۸.۲)$$

اگر $\bar{Q}_y\neq 0$ آنگاه تعیین منحنی های $y=f(x)$ که در (۱۷.۲) صدق می‌کند ممکن است. هر چنین منحنی یک جواب ناوردا از (۱.۲) است که بعداً نشان داده خواهد شد. بنابراین از (۱۷.۲) می‌توان برای یافتن همه جوابهایی که تحت یک گروه لی غیر بدیهی مفروض ناوردا هستند استفاده کرد. بدون نیاز به انتگرال گیری.

۴.۲ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی :

$$\frac{dy}{dx}=y \qquad (۱۹.۲)$$

تقارنهای مقیاسی به شکل زیر دارد:

$$(\hat{x},\hat{y})=(x,e^{\varepsilon}y). \qquad (۲۰.۲)$$

بردار مماس در (x,y) با مشتق گیری (۲۰.۲) نسبت به ε در $\varepsilon = 0$ بدست می آید:

$$(\xi(x,y),\eta(x,y)) = (0,y). \qquad (۲۱.۲)$$

از (۱۳.۲)، هر نقطه روی خط $y = 0$ تحت عمل تقارنهای لی (۲۰.۲) ناورداست. روی جوابهای (۱۹.۲) مشخصه بصورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\bar{Q}(x,y) = \eta(x,y) - y\xi(x,y) = y.$$

بنابراین این گروه لی به طور غیر بدیهی روی جوابهای (۱۹.۲) عمل می‌کند. از (۱۷.۲) تنها جواب ناوردا عبارتست از $y = 0$، که به طور کلی از نقاط ناوردا ساخته می‌شود. یک گروه لی یک پارامتری دیگری از تقارنهای (۱۹.۲) در اینجا آورده شده است:

$$(\hat{x},\hat{y}) = (e^{\varepsilon}x, exp\{(e^{\varepsilon}-1)x\}y). \qquad (۲۲.۲)$$

بردار مماس در (x,y) عبارتست از:

$$(\xi(x,y),\eta(x,y)) = (x,xy). \qquad (۲۳.۲)$$

هر نقطه روی خط $x = 0$ ناورداست. بعلاوه:

$$\bar{Q}(x,y) = \eta(x,y) - y\xi(x,y) = 0,$$

بنابراین تقارنهای لی (۲۲.۲) به طور بدیهی روی جوابهای (۱۹.۲) عمل می‌کنند.

۵.۲ مثال. معادله ریکاتی:

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \qquad (x \neq 0) \qquad (۲۴.۲)$$

یک گروه لی از تقارنهای مقیاسی بصورت زیر دارد:

$$(\hat{x},\hat{y}) = (e^{\varepsilon}x, e^{-2\varepsilon}y).$$

میدان برداری مماس عبارتست از:

$$(\xi(x,y),\eta(x,y)) = (x,-2y).$$

و بنابراین مشخصه کاهش یافته بصورت زیر هست:

$$\bar{Q}(x,y) = \frac{1}{x^2} - x^2y^2.$$

لذا تقارنهای لی غیر بدیهی هستند و دو جواب ناوردا بصورت زیر وجود دارد:

$$y = \pm x^{-2}$$

بیشتر روشهای تقارنی بجای حود تقارنها از بردارهای مماس استفاده می‌کنند ، اگر چه تقارنهای لی را می‌توان از بردارهای مماس بوسیله انتگرال گیری از جفت معادلات دیفرانسیل معمولی (۱۰.۲) با پیروی از شرایط اولیه (۹.۲) بازسازی کرد. بنابراین (بطور موضعی) یک رابطه یک به یک میان هر گروه لی یک پارامتری و میدان برداری مماسش وجود دارد.

۶.۲ مثال. تقارنهای لی متناظر با میدان برداری مماس (۲۱.۲) هم به همین طریق بازسازی می‌شوند. با جایگذاری کردن (۲۱.۲) بتوی (۱۰.۲) بدست می‌آوریم:

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = 0 \qquad \frac{d\hat{y}}{dx} = \hat{y}$$

که جواب عمومی‌اش عبارتست از:

$$\hat{x}(x, y; \varepsilon) = A(x, y), \qquad \hat{y}(x, y; \varepsilon) = B(x, y)e^x.$$

آنگاه با قرار دادن $\varepsilon = 0$ و با استفاده از شرط اولیه (۹.۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, e^{\varepsilon} y)$$

مطابق با (۲۰.۲) است.

بخش ۲.۲ مختصات کانونی

در بخش ۴.۱ فهمیدیم که هر معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۲) که تقارنهایش شامل تبدیلات:

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \varepsilon) \qquad (۲۵.۲)$$

هستند را مستقیما می‌توان با انتگرال گیری بدست آورد. عموماً اگر یک معادله دیفرانسیل معمولی تقارنهای لی که با تبدیلات (تحت یک تغییر مختصاتی) هم ارز هستند داشته باشد، معادله دیفرانسیل معمولی را می‌توان با بازنویسی آن برحسب از مختصات جدید حل کرد. چگونه می‌توان این مختصات را پیدا کرد؟

همه‌ی مدارهای تقارنهای (۲۵.۲) بردار مماس یکسان در هر نقطه :

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = (0.1). \qquad (۲۶.۲)$$

دارند. [مدارهای (۲۵.۲) خطوطی از ثابت x هستند] برای هر گروه لی یک پارامتری از تقارنهای مفروض قادر به معرفی مختصات بصورت زیر خواهیم بود :

$$(r, s) = (r(x, y), s(x, y))$$

بطوریکه:

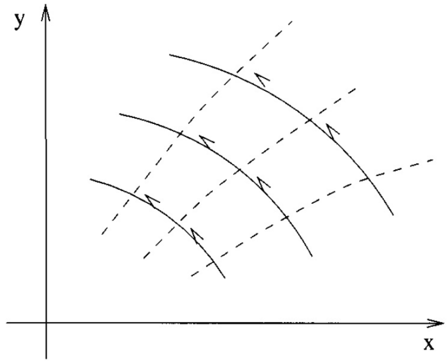
$$(\hat{r}, \hat{s}) \equiv (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r, s + \varepsilon) \qquad (۲۷.۲)$$

اگر این امکان پذیر باشد آنگاه، در مختصات جدید بردار مماس در نقطه (r, s) عبارتست از $(0, 1)$ که هست:

$$\frac{d\hat{r}}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \frac{d\hat{s}}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 1$$

منحنی‌هایی از ثابت $r(-1)$ و $s(\cdots)$. برخی از برداری مماس نشان داده شده‌اند. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای و (۱۰.۲) بدست می‌آوریم:

$$\xi(x, y)r_x + \eta(x, y)r_y = 0, \qquad \xi(x, y)s_x + \eta(x, y)s_y = 1. \qquad (۲۸.۲)$$



شکل ۳.۲: منحنی‌های با r ثابت (—) و با s ثابت (- - -). چند بردار مماس نشان داده شده است.

تغییر مختصات باید در همسایگی (x,y) معکوس پذیر باشد. بنابراین شرط ناتباهیده‌ی زیر را اعمال می‌کنیم:

$$r_x s_y - r_y s_x \neq 0, \qquad (۲۹.۲)$$

این شرط تأمین می‌کند که اگر یک منحنی از ثابت s و یک منحنی از ثابت r در یک نقطه تقاطع داشته باشند. آنها در یک نقطه دیگر بطور متقاطع عبور می‌کنند، همانطور که در شکل ۳.۲ نشان داده شده است. به هر جفت دلخواه از توابع $r(x,y)$ و $s(x,y)$ که در (۲۸.۲) و (۲۹.۲) صدق کنند، یک جفت از مختصات کانونی می‌گویند.

به کمک تعریف بردار مماس در هر نقطه غیر ناوردا با منحنی از ثابت r که از آن نقطه می‌گذرد، موازی است. بنابراین منحنی از ثابت r بطور موضعی با مدار گذرنده از آن نقطه منطبق می‌شود: مدار تحت گروه لی ناورداست. بنابراین گاهی اوقات به r به عنوان یک مختص کانونی ناوردا اطلاق می‌شود. منحنی‌هایی از ثابت s ناوردا نیستند زیرا آنها از مدارهای یک بعدی بطور متقاطع عبور می‌کند. ممکن است مختصات کانونی در یک نقطه تعریف نشود چون معادله
مشخصه برای s در (۲۸.۲) :

$$\xi(x,y) = \eta(x,y) = 0$$

هیچ جوابی ندارد. اگر چه مختصات کانونی همسایگی هایی از هر نقطه‌ی غیر ناوردا پیدا می‌شود. به عبارت دیگر همیشه امکان دارد نرمال سازی بردارهای مماس (بطور موضعی) اثبات کند که آنها غیر صفر هستند.

مختصات کانونی تعریف شده با (۲۸.۲) یکتا نیستند. در واقع، اگر (r,s) در (۲۸.۲) صدق کند آنگاه رابطه زیر برای توابع هموار دلخواه F و G برقرار است:

$$(\bar{r},\bar{s}) = (F(r), s + G(r)). \qquad (۳۰.۲)$$

ناتباهیدگی محدودیت $F'(r) \neq 0$ را اعمال می‌کند اما هنوزآزادی زیادی وجود دارد. قصد داریم که معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۲) را برحسب مختصات کانونی بازنویسی کنیم. این مستلزم تفاوتی است. بنابراین آن روشی برای استفاده از آزادی بالا در ساختن r و s با امکان مشابه است. برای مثال، یافتن

تقارنهای لی با η خطی در y و ξ مستقل از y کاملاً رایج است. برای این تقارنها، $\xi(x) \neq 0$. مختصات استاندارد با r خطی در y و s مستقل از y وجود دارد. هر جا امکان دارد سعی می‌کنیم که از یک جواب ناتباهیده ساده از (۲۸.۲) استفاده کنیم.

مختصات کانونی را می‌توان از (۲۸.۲) با استفاده از روش مشخصه‌ها بدست آورد معادلات مشخصه عبارتند از:

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} = ds. \tag{۳۱.۲}$$

یک انتگرال اولیه از یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول مفروض:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{۳۲.۲}$$

یک تابع غیر ثابت $\varphi(x,y)$ است که مقدارش روی هر جواب $y = y(x)$ از معادله دیفرانسیل معمولی (۳۲.۲) ثابت است. بنابراین:

$$\varphi_x + f(x,y)\varphi_y = 0, \qquad \varphi_y \neq 0. \tag{۳۳.۲}$$

جواب عمومی از (۳۲.۲) عبارتست از:

$$\varphi(x,y) = c \tag{۳۴.۲}$$

فرض کنید که $\xi(x,y) \neq 0$ (۲۸.۲) و (۳۳.۲) را مقایسه کنید می‌بینیم که مختص کانونی ناوردای r یک انتگرال اولیه از معادله زیر است:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)} \tag{۳۵.۲}$$

بنابراین $r = \varphi(x,y)$ با حل (۳۵.۲) بدست می‌آید. تقریباً بیشتر اوقات یک جواب $s(x,y)$ از (۲۸.۲) را می‌توان با یک کنکاش یافت. در غیر اینصورت می‌توانیم از $r(x,y)$ برای نوشتن y بعنوان یک تابع از r و x استفاده کرد. سپس مختص $s(r,x)$ از (۳.۲)بدست می‌آید با انتگرال گیری:

$$s(r,x) = \left(\int \frac{dx}{\xi(x,y(r,x))}\right)\Big|_{r=r(x,y)} \tag{۳۶.۲}$$

اگر r بعنوان یک ثابت عمل کند،اینجا انتگرال با معنی خواهد بود .

بطور مشابه اگر $\xi(x,y) = 0$ و $\eta(x,y) \neq 0$ آنگاه:

$$r = x, \qquad s = \left(\int \frac{dy}{\eta(r,y)}\right)\Big|_{r=0} \tag{۳۷.۲}$$

مختصات کانونی هستند.

۷.۲ مثال. تقارنهای لی زیر را که مقیاسی هستند در نظر بگیرید:

$$(\hat{x},\hat{y}) = (e^{\varepsilon}x, e^{k\varepsilon}y), \qquad k > 0, \tag{۳۸.۲}$$

بردار مماس

$$(\xi(x,y),\eta(x,y)) = (x,ky)$$

است و بنابراین r یک انتگرال اولیه از:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ky}{x}$$

است. جواب عمومی این معادله دیفرانسیل معمولی، $y = cx^k$ است. بنابراین $r = x^{-k}y$ را انتخاب می‌کنیم. همچنین، ξ غیر صفر و از y مستقل است. آن آسانترین انتخاب s است برای اینکه تنها تابعی از x باشد. پس داریم:

$$(r,s) = (x^{-k}y, \ln|x|) \tag{۳۹.۲}$$

این مختصات کانونی را نمی‌توان روی تمام صفحهٔ استفاده کرد. $s = \ln(x)$ روی خط $x = 0$ جور در نمی‌آید. مختصات کانونی زیر مناسب برای استفاده حول $x = 0$ است. به جز روی خط $y = 0$:

$$(r,s) = (x^k y^{-1}, k^{-1}\ln|y|) \tag{۴۰.۲}$$

مختصات کانونی در نقطه ناوردای $(0,0)$ وجود ندارد.

مثال بالا یک مشکل جزئی با مختصات کانونی را مشخص می‌سازد. آنها را در یک نقطه ناوردا نمی‌توان تعریف کرد ولذا لازم است که از چندین قطعه مختصاتی برای پوشاندن همه نقاط غیر ناوردا استفاده کرد.

۸.۲ مثال. گروه لی یک پارامتری از معکوس های:

$$(\hat{x},\hat{y}) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right) \tag{۴۱.۲}$$

میدان برداری مماس زیر را دارد:

$$(\xi(x,y),\eta(x,y)) = (x^2, xy). \tag{۴۲.۲}$$

روش مذکور بالا به مختصات کانونی ساده زیر منجر می‌شود:

$$(r,s) = \left(\frac{y}{x}, -\frac{1}{x}\right), \qquad x \neq 0 \tag{۴۳.۲}$$

هر نقطه روی خط $x = 0$ ناورداست. بنابراین مختصات کانونی را نمی‌توان تعریف کرد.

عمومی‌ترین استفاده مختصات کانونی، برای بدست آوردن جوابهای معادلات دیفرانسیل معمولی است. اگر چه ترکیب‌های زیادی از تقارنهای لی، وقتی از مختصات کانونی استفاده شود منتقل می‌شوند. برای مثال، همانطور که در ادامه می آید بازسازی تقارنهای لی را آسان می سازد. ابتدا x و y در سطح مختصات کانونی می‌نویسیم:

$$x = f(r,s), \qquad y = g(r,s).$$

بنابراین از (۲۷.۲):

$$\begin{aligned} \hat{x} &= f(\hat{r},\hat{s}) = f(r(x,y), s(x,y)+\varepsilon), \\ \hat{y} &= g(\hat{r},\hat{s}) = g(r(x,y), s(x,y)+\varepsilon). \end{aligned} \tag{۴۴.۲}$$

۹.۲ مثال . بردار مماس (۴۲.۲) را در نظر می گیریم مختصات کانونی (۴۳.۲) معکوس شده بصورت زیر است:

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{s}, -\frac{r}{s}\right).$$

بنابراین (۴۴.۲) نتیجه می‌دهد:

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(-\frac{1}{s+\varepsilon}, -\frac{r}{s+\varepsilon}\right) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right),$$

همانطور که انتظار داشتیم.

بخش ۳.۲ چگونگی حل معادلات دیفرانسیل معمولی با تقارنهای لی

فرض کنید که توانایی این را داشته باشیم که تقارنهای لی غیر بدیهی را از یک معادله دیفرانسیل معمولی مفروض (۱.۲) بیابیم یادآوری می‌کنیم که تقارنهای لی غیر بدیهی هستند اگر و تنها اگر:

$$\eta(x, y) \equiv w(x, y)\xi(x, y) \qquad (۴۵.۲)$$

(دلیل این محدودیت بعداً بحث خواهد شد.)
سپس معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۲) را می‌توان با بازنویسی آن بر حسب مختصات کانونی با انتگرال گیری کاهش داد. در ادامه داریم:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + (x, y)s_y}{r_x + w(x, y)r_y} \qquad (۴۶.۲)$$

اکنون سمت راست (۴۶.۲) را می‌توان به عنوان یک تابع از r و s نوشت یعنی یک تغییر کلی از متغیرها $(x, y) \mapsto (r, s)$ و معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل یافته برای توابع Ω به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r, s) \qquad (۴۷.۲)$$

چون (r, s) مختصات کانونی هستند و بنابراین معادله دیفرانسیل معمولی تحت گروهی از تبدیلات در امتداد s ناوردا هستند:

$$(\hat{r}, \hat{s}) = (r, s+\varepsilon).$$

بنابراین از ۱.۴ S، معادله دیفرانسیل معمولی (۴۷.۲) به شکل زیر است:

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r) \qquad (۴۸.۲)$$

حال مسئله به یک انتگرال گیری کاهش پیدا کرد. جواب عمومی از (۴۸.۲) عبارتست از:

$$s - \int \Omega(r)dr = c,$$

که در آن c یک ثابت دلخواه است. بنابراین جواب عمومی از معادله دیفرانسیل معمولی اصلی (۱.۲):

$$s(x,y)-\int^{r(x,y)}\Omega(r)dr=c \qquad (۴۹.۲)$$

است. این روش بسیار ساده می‌تواند برای هر معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۲) با یک گروه لی یک پارامتری غیر بدیهی شناخته شده از تقارنها فراهم شود. البته ابتدا باید یک مختصات کانونی با حل معادلات دیفرانسیل معمولی (۳۵.۲) مشخص شود. اصطلاحاً حل (۳۵.۲) نسبت به حل (۱.۲) بسیار آسانتر است. مثال پایین تاثیر این روش را در بحث با معادلات دیفرانسیل معمولی که جوابهایشان آشکار نیست.

۱۰.۲ مثال. هم اکنون جوابهای معادله ریکاتی را پیدا می‌کنیم:

$$y'=xy^2-\frac{2y}{x}-\frac{1}{x^3}, \qquad (x\neq 0). \qquad (۵۰.۲)$$

آن تحت تقارنهای لی زیر ناوردا است:

$$(\hat{x},\hat{y})=(e^{\varepsilon}x,e^{-2\varepsilon}y),$$

اکنون جوابهای (۵۰.۲) را کامل می‌کنیم. از (۳۹.۲) مختصات کانونی مناسب عبارتند از:

$$(r,s)=(x^2y,\ln|x|).$$

سپس (۵۰.۲) بصورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\frac{ds}{dr}=\frac{1}{r^2-1}.$$

که یک انتگرال گیری مستقیم است. و (بعد از نوشتن r و s بر حسب x و y) جواب عمومی (۵۰.۲) را بصورت زیر بدست می آوریم:

$$y=\frac{c+x^2}{x^2(c-x^2)} \qquad (۵۱.۲)$$

منحنی جواب ناوردای $y=x^{-2}$ را می‌توان به عنوان حدی از (۵۱.۲)وقتی c به بی نهایت میل می کند در نظر گرفت. جواب ناوردای دیگر با قرار دادن $c=0$ در (۵۱.۲) بدست می‌آید.

۱۱.۲ مثال. در مثال ۱.۱.۲ دانستیم که معادله دیفرانسیل معمولی :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{x}+\frac{y^2}{x^3}$$

تقارنهای لی به شکل زیر دارد:

$$(\hat{x},\hat{y})=\left(\frac{x}{1-\varepsilon x},\frac{y}{1-\varepsilon x}\right).$$

مختصات کانونی برای این معکوس‌ها با (۴۳.۲) بدست می‌آید آنها معادله دیفرانسیل معمولی را به صورت زیر کاهش می دهند:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{1+r^2}.$$

جواب عمومی آن عبارتست از:

$$s = \tan^{-1}(r) + c,$$

که با معادله زیر هم ارز است:

$$y = -x\tan(\frac{1}{x} + c).$$

۱۲.۲ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی :

$$y' = \frac{y - 4xy^2 - 16x^3}{y^3 + 4x^2y + x} \tag{۵۲.۲}$$

تقارنهای لی دارد که میدان برداری مماس آن عبارتست از:

$$(\xi(x,y), \eta(x,y)) = (-y, 4x)$$

(یک روش برای مشتق گیری این میدان برداری مستقیما از معادله دیفرانسیل معمولی ، اعمال شرط ۴.۲ است) معادله مشخصه برای r عبارتست از:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y},$$

و بنابراین می‌توانیم قرار دهیم: $r = \sqrt{4x^2+y^2}$. اکنون ناحیه‌ی $y > 0$ را در نظر می گیریم: در اینجا $y(r,x) = \sqrt{r^2-4x^2}$ و بنابراین یک مختصات کانونی دوم عبارتست از:

$$\begin{aligned} s &= -\int^x \frac{dx}{\sqrt{r^2-4x^2}} \\ &= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{2x}{r}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cot^{-1}\left(\frac{2x}{y}\right), \qquad s \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

در این ناحیه، معادله دیفرانسیل معمولی (۵۲.۲) به معادله زیر کاهش می یابد:

$$\frac{ds}{dr} = -r$$

[کاهش به انتگرالگیری نواحی دیگر از صفحه (x,y) بطور مشابه است] با برگشت به متغیرهای اصلی جواب عمومی (۵۲.۲) بدست می‌آید:

$$y\cot(4x^2+y^2+c) + 2x\sin(4x^2+y^2+c) = 0.$$

چرا آن برای مستثنی کردن گروههای لی یک پارامتری که عمل آن روی مجموعه جوابها بدیهی است لازم است؟

در اصل هیچ مشکلی در تعریف مختصات کانونی در روش معمولی وجود ندارد. فرض کنید که (r,s) مختصات کانونی برای یک گروه لی یک پارامتری بدیهی از تقارنهای یک معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۲) مفروض باشد. جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی را بصورت زیر بنویسید:

$$\varphi(r,s)=c.$$

هر جواب تحت عمل تقارنهای لی ناورداست و بنابراین:

$$\varphi(r,s+\varepsilon)=\varphi(r,s),$$

برای همه ε هایی که به اندازه کافی به صفر نزدیکند. از اینرو φ مستقل از s و r است بدون خلل به کلیت، جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$r=c.$$

بنابراین تنها نیاز داریم مختص کانونی ناوردای r را بیابیم که یک انتگرال اولیه از معادله زیر است:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)} \tag{۵۳.۲}$$

تقارنهای لی (۱.۲) بدیهی هستند اگر و فقط اگر:

$$\eta(x,y)\equiv w(x,y)\xi(x,y),$$

و بنابراین (۵۳.۲) به معادله دیفرانسیل معمولی اصلی (۱.۲) کاهش می یابد. هدف ما حل این معادله دیفرانسیل معمولی است بنابراین تقارنهای بدیهی غیر مفید هستند.

بخش ۴.۲ شرط تقارن خطی

چگونه تقارن های (۱.۲) را می‌توان یافت؟ یکی از روشها استفاده از شرط تقارن (۱۰.۱) است که هم ارز با شرط زیر است:

$$\frac{\hat{y}_x+w(x,y)\hat{y}_y}{\hat{x}_x+w(x,y)\hat{x}_y}=(\hat{x},\hat{y}) \tag{۵۴.۲}$$

بطور کلی این یک معادله دیفرانسیل جزئی غیر خطی پیچیده با دو مجهول $\hat{x}$ و $\hat{y}$ است اگر چه تقارن لی از شرط ساده‌تر روی میدان برداری مماس می‌توان مشتق گرفت (به عنوان یادآوری، بردارهای مماسی که یافتیم توسط تقارن لی قابل محاسبه‌اند). با تعریفی که داشتیم: تقارن لی (۱.۲) به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x+\varepsilon\xi(x,y)+O(\varepsilon^2)\\ \hat{y} &= y+\varepsilon\eta(x,y)+O(\varepsilon^1)\end{aligned} \tag{۵۵.۲}$$

به طوری که ξ و η توابع هموار هستند برای سادگی در نمادگذاری از نوشتن معتبرهای مستقل (x,y) برای ξ و η صرفنظر می‌کنیم.

رابطه (۵۵.۲) را در (۵۴.۲) جایگذاری می‌کنیم داریم:

$$\frac{w(x,y)+\varepsilon\{\eta_x, w(x,y)\eta_y\}+O(\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\{\xi_x+w(x,y)\xi_y\}+O(\varepsilon^2)} = w(x+\varepsilon\xi+O(\varepsilon^2), y+\varepsilon\eta+O(\varepsilon^2)). \quad (۵۶.۲)$$

حال طرفین رابطه (۵۰.۲) را با استفاده از سری تیلور حول $\varepsilon = 0$ بسط می‌دهیم فرض کنید هر سری همگراست:

$$w+\varepsilon\{\eta_x+(\eta-\xi_x)w-\xi_x w^2\}+o(\varepsilon^2) = w+\varepsilon\{\xi w_x+\eta w_y\}+o(\varepsilon^2),$$

در این جا w مختصر $w(x,y)$ می‌باشد.

این شرط الزاماً باید در $\varepsilon = 0$ صدق کند که متناظر با تقارن بدیهی $(\hat{x},\hat{y}) = (x,y)$ است.

شرط $o(\varepsilon)$ هم ارز با شرط تقارن خطی است:

$$\eta_x+(\eta_x-\xi_x)w-\xi_x w^2 = \xi w_x+\eta w_y. \quad (۵۷.۲)$$

مانند رابطه (۵۴.۲) که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با دو متغیر وابسته است که نامتناهی جواب مستقل تابعی دارد. با وجود این (۵۷.۲) خطی و ساده تر از (۵۴.۲) است. بدست آوردن جواب های (۵۷.۲) با استفاده از حدس علمی ساده‌تر از یافتن جواب مستقیم (۵۴.۲) است.

شرط تقارن خطی را می‌توان بر حسب تابع مشخصه کاهش یافته بازنویسی کرد:

$$\bar{Q} = \eta - w\xi,$$

که به شرح زیر است:

$$\bar{Q}_x + w\bar{Q}_y = w_y\bar{Q}. \quad (۵۸.۲)$$

هر جواب (۵۸.۲) در تعداد نامتناهی گروه لی متناظر است. اگر $\bar{Q}$ در شرط (۵۸.۲) صدق کند. آنگاه:

$$(\xi,\eta) = (\xi.\bar{Q}+w\xi)$$

برای هر تابع ξ یک میدان برداری مماسی از گروه یک پارامتری است.

همه تقارن های بدیهی متناظر با جواب $\bar{Q} = 0$ از (۵۸.۲) هستند. در اصل، تقارن‌های غیر خطی از رابطه (۵۸.۲) با استفاده از روش مشخصه ها بدست می آیند.

معادلات مشخصه عبارتند از:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{w(x,y)} = \frac{d\bar{Q}}{w_y(x,y)\xi} \quad (۵۹.۲)$$

معادله اولیه (۵۹.۲) هم ارز معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۲) است بنابراین معادله دیفرانسیل اولیه بدون داشتن جواب عمومی (۱.۲) نمی‌تواند جواب‌های غیر صفر (۵۸.۲) را بدهد(توجه: اگر (ξ,η) جواب غیر صفر (۵۷.۲) باشد بنابراین $(k\xi,k\eta)$ به ازاء ی k ثابت غیر صفرجواب‌های ما هستند).

بنابراین به ما اجازه می‌دهد که ε را با $k^{-1}\varepsilon$ تعویض کنیم بدون اینکه مدارهای گروه لی تغییری کند. بنابراین تقارن های لی مشابه صرفنظر از مقدار k بهبود پیدا می‌کند.

منظور از اینکه می‌توان ε را تغییر داد این است که $\bar{Q}$ را می‌توان در مقدار ثابت غیر صفری بدون تاثیر مدار ضرب کرد.

برای حل (۲۷.۲) نیاز به اختصاص حدس علمی مناسب داریم بدان معنی که یک سری شرط‌هایی را روی ξ و η قرار دهیم. مثال زیر ایده کلی را بیان می‌کند.

۱۳.۲ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{xy} + 1 \qquad (۶۰.۲)$$

در این جا تابع $w(x,y)$ ساده است پس اجازه دهید از حد سیات علمی که ما را کمتر محدود می‌کند استفاده کنیم. بسیاری از تقارنهای لی دارای میدانهای برداری مماسی به شکل زیر هستند:

$$\xi = \alpha(x) \qquad \eta = \beta(x)y + \gamma(x)$$

برای بعضی توابع α، β و γ آیا (۶۰.۲) تقارن‌های این چنینی دارد؟ اگر شرط خطی تقارن بصورت زیر باشد:

$$\beta' y + \gamma' + (\beta - \alpha')\left(\frac{1-y^2}{xy} + 1\right) = \alpha\left(\frac{y^2-1}{x^2 y}\right) - (\beta y + \gamma)\left(\frac{1+y^2}{xy^2}\right) \qquad (۶۱.۲)$$

است.

اگر چه (۶۱.۲) معادله واحد است، می‌توان آن را به یک دستگاه بالا معین معادلات با مقایسه روابط که حاصلضربی از توان‌های y هستند، تفکیک کرد. رابطهٔ y^{-2} می‌دهد:

$$\gamma = 0,$$

و رابطهٔ y^{-1} به شکل زیر است:

$$\frac{\beta - \alpha'}{x} = -\frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta}{x},$$

روابطی که مستقل از y هستند، می‌دهند:

$$\beta = \alpha',$$

و از این رو:

$$\alpha' + \frac{\alpha}{x} = 0.$$

این معادله دیفرانسیل معمولی به سادگی حل می‌شوند، جواب عمومی آن:

$$\alpha = c_1 x^{-1},$$

است و بنابراین:

$$\beta = -c_1 x^{-2}$$

روابط باقیمانده در شرط تقارن خطی محدودیت‌های بیشتری ایجاد نمی‌کند پس هر میدان برداری مماس به شکل:

$$(\xi,\eta) = (c_1 x^{-1}, c_1 x^{-2} y)$$

در شرط تقارن خطی صادق است.

برای پیدا کردن میدان برداری مماس، ما به آسانی می‌توانیم بدیهی بودن آن را بررسی کنیم. اگر نباشد شاید برای حل معادله دیفرانسیل معمولی بتوان از آن استفاده کرد.

به طور کلی مشکل محاسبه با حدس های علمی افزایش می‌یابد. اگر $w(x,y)$ پیچیده باشد استفاده از محدودیت‌های حدس های علمی برای اداره کردن محاسبات ایده خوبی است اگر این راه موفقیت آمیز نبود. آنگاه شاید محاسبات کامپیوتری برای گزینش نهایی حدسیات علمی عمومی طبقه بندی شود.

۱۴.۲ مثال. برخی تقارنهای عمومی، شامل انتقالها مقیاس و دو ران ها را می‌توان با حدس علمی یافت:

$$\xi = c_1x + c_2y + c_3 \qquad \eta = c_4x + c_5y + c_6 \tag{۶۲.۲}$$

به طور کلی، (۶۲.۲) دارای محدودیت‌های زیادی نسبت به حدسیات علمی استفاده شده در مثال قبل است که توابع دلخواه ندارد. خواننده را به بررسی (۶۲.۲) هنگامی که شرط تقارن خطی برای معادله دیفرانسیل معمولی (۵۲.۲) صادق است، دعوت می‌کنیم مشروط بر این که:

$$c_1 = c_3 = c_5 = c_6 = 0 \qquad c_4 = -4c_2$$

(استفاده از سیستم‌های نرم افزار جبری کامپیوتر جایز است اگر جه برای این مثال ضروری نیست.)

امروزه بسته‌ها نرم افزار جبری کامپیوتر معتبر مهمی وجود دارد که تلاش برای پیدا کردن و استفاده از تقارن ها را کاهش می‌دهد. برای مثال، بسته‌های نرم افزار معادله دیفرانسیل معمولی با *Maplev* (و در آن ۵) برنامه‌ای به نام *symgen* داشته که استفاده کننده تلاش برای یافتن جواب‌های (۵۷.۲) با حدس علمی می‌کند. با این حال، برای برخی معادلات دیفرانسیل معمولی تلاش برای پیدا کردن تقارنهای غیر بدیهی، ولو اینکه تقارنهای نامحدودی موجود باشد، بی ثمر است.

که این مانع برای استفاده از تقارنهای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول (تقارنهای مرتبه‌های بالاتر PDE ها، اگر چه به روش سیستماتیکی قابل پیدا کردن هستند).

این بخش را با اثبات حکم از پیش آمده به پایان می رسانیم که هر منحنی $y = f(x)$ که در:

$$y = f(x) \qquad \bar{Q}_y \neq 0 \quad \text{هنگامی‌که} \quad \bar{Q} = 0 \tag{۶۳.۲}$$

جواب (۱.۲) است. با دیفرانسیل گرفتن از (۶۳.۲) نسبت به x داریم:

$$y = f(x) \quad \text{هنگامی‌که} \quad \bar{Q}_x + f'(x)\bar{Q}_y = 0 \tag{۶۴.۲}$$

حال (۵۸.۲) و (۶۴.۲) را با هم مقایسه کنید و (۶۳.۲) را در محاسبات وارد کنید که داریم:

$$f'(x) = w(x, f(x)),$$

که به نتیجه دلخواه خود رسیدیم.

بخش ۵.۲ تقارنها و روش‌های استاندارد

مختصات کانونی با یک گروه لی مرتبط هستند. ولذا همه‌ی معادلات دیفرانسیل معمولی منطبق با یک گروه تقارنی یک پارامتری را می‌توان با استفاده از مختصات کانونی که توسط مولد گروه تعریف می‌شود، به یک انتگرالگیری کاهش داد که روشهایی برای همه دسته های معادله دیفرانسیل معمولی ارائه می‌کند، که بعضی از آنها روشی‌های استاندارد پنداشته می‌شوند.

۱۵.۲ مثال. هر معادله دیفرانسیل معمولی به شکل

$$\frac{dY}{dX} = F(\frac{Y}{X}) \tag{۶۵.۲}$$

گروه لی یک پارامتری از تقارنهای مقیاسی زیر را می پذیرد:

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^{\varepsilon}x.e^{\varepsilon}y).$$

روشی استاندارد برای حل این نوع معادله دیفرانسیل معمولی معرفی متغیرهای جدید است:

$$r = \frac{y}{x}, \qquad s = \ln|x|,$$

اینها مختصات کانونی هستند (برای $x \neq 0$).دو احتمال وجود دارد، اگر $F(r) = r$، تقارنها بدیهی هستند و جواب عمومی(۶۵.۲) $r = c$ است پس $y = cx$.
در غیر اینصورت (۶۵.۲) می‌شود معادل با: $\frac{ds}{dr} = \frac{1}{F(r)-r}$، است. پس جواب عمومی (۶۵.۲) می‌شود:

$$\ln|X| = \int^{\frac{y}{x}} \frac{dr}{F(r)-r} + c.$$

۱۶.۲ مثال. معادله‌ی خطی عمومی:

$$y' + F(x)y = 6(x) \qquad (۶۶.۲)$$

مفروض است، معادله‌ی دیفرانسیل معمولی همگن $u' + F(x)u = 0$ تفکیک پذیر است؛ یک جواب غیر صفر بصورت زیر هست:

$$u = u_0(x)exp\{-\int F(x)dx\}$$

اصل انطباق خطی بیان می‌دارد که اگر $y = y(x)$ جوابی از (۶۶.۲) باشد، آنگاه برای هر $\varepsilon \in \mathbb{R}$، $y = y(x) + \varepsilon u_0(x)$ نیز هست. این اصل معادل آن است که بگوییم (۶۶.۲) تقارنهای لی دارد:

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \varepsilon u_0(x))$$

میدان برداری مماسی بصورت زیر هست:

$$(\varepsilon, h) = (o, u_0(x))$$

پس بعضی از مختصات کانونی ، $(r,s) = (x, \frac{y}{u_0(x)})$ هستند و در این مختصات (۶۶.۲) معادل با $\frac{ds}{dr} = \frac{G(r)}{u_0(r)}$است. در نتیجه ما جواب عمومی (۶۶.۲) که مشهور است را بدست می‌آوریم :

$$\frac{v}{u_0(x)} \int^x \frac{G(r)}{u_0(r)}\, dr = c.$$

بطور مشابه، تقریباً همه‌ی روش‌های استانداردی که از تغییر متغیر استفاده می‌کنند، موارد خاصی از تکنیک قوی فوق می‌باشند. راه متفاوت دیگر استفاده از فاکتور انتگرال گیری برای حل معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۲) است:

$$dy - wdx = 0 \qquad (۶۷.۲)$$

هدف یافتن یک تابع $\mu(x,y)$ است که جواب عمومی (۶۷.۲) بشکل انتگرال خطی زیر نوشته شود:

$$\varphi(x,y) = \int \mu(dy - wdx) = c.$$

در نتیجه:

$$\varphi_x = -w\mu, \qquad \varphi_y = \mu,$$

که منجر به شرط زیر می شود:

$$\mu_x + (w\mu)_y = 0, \tag{۶۸.۲}$$

در مقایسه (۶۸.۲) با (۵۸.۲) در می‌یابیم که $\mu(x,y) = \frac{1}{Q(x,y)}$ یک فاکتور انتگرال گیری است و Q هم متحد صفر نیست. بنابراین اگر (ε, n) یک میدان برداری برای گروه لی تک پارامتری غیر بدیهی از تقارنهای (۱.۲) باشد، جواب عمومی (۱.۲):

$$\int \frac{dy - wdx}{\eta - w\xi} = c \tag{۶۹.۲}$$

می‌باشد.

روش فاکتور انتگرالی کاملاً هم ارز روش مختصات کانونی است. برای دیدن این ادعا، (۴۶.۲) و (۴۸.۲) را اینطور قرار می‌دهیم:

$$w = -\frac{s_x - \Omega(r)r_x}{s_y - \Omega(r)r_y} \tag{۷۰.۲}$$

از (۲۸.۲):

$$\xi\{s_x - \Omega(r)r_x\} + \eta\{s_y\Omega(r)r_y\} = 1.$$

بنابراین:

$$s_x - \Omega(r)r_x = -\frac{w}{\eta - w\xi}, \qquad s_y - \Omega(r)r_y = \frac{1}{\eta - w\xi},$$

و بنابراین (۶۹.۲) معادل است با:

$$\int ds - \Omega(r)dr = \int \{s_x - \Omega(r)r_x\}dx + \{s_y - \Omega(r)r_y\}dy = c.$$

روش فاکتور انتگرال روش مفیدی است مخصوصاً اگر محاسبه‌ی مختصات کانونی سخت باشد. مانند مثال زیر:

۱۷.۲ مثال. معادله‌ی $y' = \frac{y^3+y-3x^2y}{3xy^2+x-x^3}$ به راحتی با هیچ روش استانداردی حل نمی‌شود ولی تحت گروه تقارن با میدان بردارهای مماس زیر ثابت است:

$$(\varepsilon, \eta) = (y^3 + y - 3x^2y, x^3 - x - 3xy^2).$$

معادله‌ی مشخصه برای $r(x,y)$ هست:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - x - 3xy^2}{y^3 + y - 3x^2y} \tag{۷۱.۲}$$

که به نظر به اندازه‌ی حل (۷۱.۲) مشکل می آید. حالا از (۶۹.۲) استفاده می‌کنیم که می‌دهد (بعد از فاکتورگیری):

$$\int \frac{(x^3-x-3xy^2)dy+(y^3+y-3x^2y)dx}{(y^2+x^2)(y^2+(x+1)^2)(y^2+(x-1)^2)}=c,$$

که انتگرال آن می‌شود:

$$\frac{1}{2}+tg^{-1}\left(\frac{y}{x+1}\right)+\frac{1}{2}+tg^{-1}\left(\frac{y}{x-1}\right)-tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=c$$

با استفاده از تعاریف مثلثات می‌توان آنرا بصورت زیر ساده‌تر کرد:

$$\frac{(y^2+x^2)^2+y^2-x^2}{xy}=c_1.$$

ما دو روش حل متفاوت برای انتخاب کردن داریم. اگر یکی از آنها با مشکل مواجه شد، دیگری شاید موفق شود. مشکل اینجاست که ابتدا می‌بایست یک گروه تقارن غیر بدیهی پیدا شود که کار ساده‌ای نیست.

راه دیگر آنست که همه‌ی معادلات دیفرانسیل معمولی را برای گروه لی داده شده دسته بندی کنیم. کار ساده است:

I) یک گروه تقارن انتخاب کنید و از مولد آن برای مشخص کردن مختصات کانونی $r(x,y)$ و $s(x,y)$استفاده نمایید.

II) از (۷۰.۲) عمومی ترین معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول ناوردا تحت این گروه هستند:

$$y'=-\frac{s_x(x,y)-\Omega\{(r(x,y))\}r_x(x,y)}{s_y(x,y)-\Omega\{(r(x,y))\}r_y(x,y)}, \qquad (۷۲.۲)$$

که Ω یک تابع هموار دلخواه است .

در این روش، کتابچه‌ای از انواع معادلات می‌توان تهیه کرد. این کتابچه به چند دلیل نمی‌تواند کامل شود. بی‌نهایت گروههای تقارنی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول وجود دارد، برای همین تکمیل کردن آن نیاز به بی‌نهایت ورودی دارد. به علاوه بر اساس ساختار مختصات کانونی است. دیده‌ایم که اینکار همیشه ساده نیست. با این حال اگر بعضی از تقارنها که بیشترین استفاده را دارند بشناسیم کمک خوبی است.

۱۸.۲ مثال. گروه دورانهای حول مبداء، میدان بردارهای زیر را دارد:

$$(\varepsilon,\eta)=(-y,x)$$

مختصات کانونی معمول برای این گروه لی، مختصات خطی است:

$$(r,s)=\left(\sqrt{x^2+y^2},tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

بنابراین، از (۷۲.۲) عمومی ترین معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول ناوردا تحت گروه دوران:

$$y'=\frac{y+x\Omega\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x-y\Omega'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)},$$

است که Ω در آن یک تابع دلخواه هموار است.

بخش ۶.۲ مولد بینهایت کوچک

تا بحال ما توجه خود را به معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول از فرم (۲.۱) معطوف کرده‌ایم؛ این ما را قادر می سازد تا بحث های زیادی در رابطه با ایده‌های هندسی کنیم که مبنای روش‌های تقارن هستند. ما باید این ایده‌ها را به معادلات دیفرانسیل با مراتب بالاتر و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بسط دهیم که بعد از این دیگر نمی‌توان هر چیز مهم را فقط با تصویری دو بعدی نشان داد، در عوض ما روشی کوتاه ارائه می‌کنیم که با استفاده از آن با معادلات دیفرانسیل از هر مرتبه دلخواهی و با هر تعداد متغیر مستقل یا وابسته ای مواجه خواهیم شد.

فرض می‌شود که معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول یک گروه تقارن یک پارامتری دارد که بردار مماسی آن در (x,y) ، (ε,η) است، پس عملگر دیفرانسیل جزئی:

$$X=\varepsilon(x,y)\partial_x+\eta(x,y)\partial_y \qquad (۷۳.۲)$$

مولد بینهایت کوچک گروه لی نامیده می‌شود. ما تا کنون با این عملگر مواجه شده‌ایم؛ معادلات (۲۸.۲) که در مختصات کانونی تعریف می شود را می‌توان این طور بازنویسی کرد:

$$X_r=O \qquad X_s=1 \qquad (۷۴.۲)$$

مولد بی‌نهایت کوچک چگونه از تغییر مختصات متأثر می‌شود؟ برای پی بردن به آن، فرض کنیم (u,v)، مختصات جدید هستند و $F(u,v)$ تابعی هموار و دلخواه است. در نتیجه با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای:

$$\begin{aligned} XF(u,v) &= XF(u(x,y),v(x,y)) \\ &= \xi\{u_xF_u+v_xF_v\}+\eta\{u_yF_u+v_yF_u\} \\ &= (X_u)F_u+(X_v)F_v \end{aligned}$$

از طرفی $F(u,v)$ دلخواه است و در نتیجه بر حسب مختصات جدید، مولد بی‌نهایت کوچک هست:

$$X=(X_u)\partial_u+(X_v)\partial_v \qquad (۷۵.۲)$$

بخصوص، اگر $(u,v)=(r,s)$، آنگاه (۷۴.۲) می‌دهد:

$$X=(X_r)\partial_r+(X_s)\partial_s=\partial_s \qquad (۷۶.۲)$$

در مختصات کانونی، بردار مماسی $(0,1)$ است و بنابراین (۷۶.۲)، مطابق بر تعریف ما از مولد بسیار کوچک است. در حقیقت X بیانگر میدان بردار مماسی در کل دستگاههای مختصاتی است. اگر $\{\partial_x,\partial_y\}$ را پایه‌ی فضای میدانهای برداری روی صفحه باشد، X بردار مماسی در (x,y) است.

مولد بینهایت کوچک روش مستقل-مختصاتی فراهم می‌کند که تأثیر عمل تقارنهای لی بر توابع را مشخص می‌دارد. فرض کنید $G(r,s)$ تابعی هموار است و:

$$F(x,y)=G(r(x,y),s(x,y))$$

بر هر نقطه‌ی ناوردا (x,y)، در نظر بگیرید. تقارنهای لی $F(x,y)$ را بر $F(\hat{x},\hat{y})=G(\hat{r},\hat{s})=G(r,s+\varepsilon)$ می نگارد، با استفاده‌ی از قضیه تیلور و (۷۶.۲) داریم:

$$F(\hat{x},\hat{y})=\sum_{j=0}^{\alpha}\frac{\varepsilon^j\partial^jG}{j!\partial s^j}(r,s)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^j}{j!}X^jG(r,s).$$

حالا دوباره از (x,y) برای مختصات استفاده می‌کنیم که می‌دهد:

$$F(\hat{x},\hat{y}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} X^j F(x,y) \qquad (۷۷.۲)$$

اگر بسط سمت راست (۷۷.۲)همگرا باشد، سری لی F حول (x,y) خوانده می‌شود. تا کنون فرض کرده‌ایم که (x,y) نقطه‌ای ناوردا نیست، ولی (۷۷.۲) هم در همه‌ی نقاط ناوردا برقرار است. دلیل این، آنست که بر هر نقطه‌ی ناوردای $X=O$ سری لی فقط عبارت $j=o$ را دارد که $F(x,y)$ است.

شکل مختصر برای سری لی (۷۷.۲) هست:

$$F(\hat{x},\hat{y}) = e^X F(x,y), \qquad (۷۸.۲)$$

این نکته به فرم سری لی توصیه می‌شود. بویژه تقارنهای لی، می‌توانند به این شکل بازنویسی گردند:

$$\hat{x} = e^{\varepsilon x} x, \qquad \hat{y} = e^{\varepsilon x} y, \qquad (۷۹.۲)$$

بنابراین (۷۸.۲) معادل است با :

$$F(e^{\varepsilon X} x, e^{\varepsilon X} y) = e^{\varepsilon^X} F(x,y) \qquad (۸۰.۲)$$

هر چیزی در این بخش برای تعداد دلخواه از متغیر ها قابل تعمیم است. فرض کنیم Lمتغیر ، $z^1,\cdots,z^L$ را داشته باشیم و بنابراین تقارنهای لی هستند:

$$\hat{z}^s(z^1,\cdots,z^L;\varepsilon) = z^s + \varepsilon \xi^s(z^1,\cdots,z^L) + O(\varepsilon^2) \qquad s=1,\cdots,L \qquad (۸۱.۲)$$

آنوقت مولد بینهایت کوچک گروه تک پارامتری لی هست:

$$X = \xi^s(z^1,\cdots,z^L)\frac{\partial}{\partial z^s} \qquad (۸۲.۲)$$

(از قاعده‌ی جمع استفاده شده: اگر از یک اندیس دوبار استفاده شود، می‌بایست همه‌ی اندیس‌های آن نشان را جمع کرد) تقارنهای لی را می‌توان از سری لی بازسازی کرد:

$$\hat{z}^s = e^{\varepsilon x} z^s \qquad s=1,\cdots,L \qquad (۸۳.۲)$$

به طور عمومی‌تر، اگر F تابعی هموار باشد:

$$F(e^{\varepsilon x} z^1,\cdots,e^{\varepsilon X} z^L) = e^{\varepsilon X} F(z^1,\cdots,z^L) \qquad (۸۴.۲)$$

این نتایج عمومی مفید بودن خود را در بررسی معادلات دیفرانسیل با مراتب بالاتر اثبات می کند.

مطالعه بیشتر

می‌توان فصل اول Olver (1993) را مطالعه کرد تا با هندسه‌ی معادلات دیفرانسیل و گروه‌های تقارن بیشتر آشنا شد. Ibragimev (1994) شامل دسته بندی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول که تقارنهای لی معروف دارند می‌شود.

تمرین‌ها

۱.۲ برای هر کدام از گروه‌های لی تک پارامتری زیر، مولد بینهایت کوچک را محاسبه نمایید.

a) $(\hat{x},\hat{y})=(x+\varepsilon, y+\varepsilon)$

b) $(\hat{x},\hat{y})=\left(\dfrac{x}{1-\varepsilon y}, \dfrac{y}{1-\varepsilon x}\right)$

c) $(\hat{x},\hat{y})=(x, e^{\varepsilon x}y)$

حالا برای هر کدام از مولدها، یک جفت مختصات کانونی بیابید.

۲.۲ گروه‌های لی مناسب تک پارامتری برای هر کدام از مولدهای بی نهایت کوچک زیر بسازید:

a) $X=\partial_x+y\partial_y$

b) $X=(1+x^2)\partial_x+xy\partial_y$

c) $X=2xy\partial_x+(y^2-x^2)\partial_y$

۳.۲ نشان دهید $(\hat{x},\hat{y})=(e^{\varepsilon}x, e^{\alpha\varepsilon}y)$ یک تقارن $y'=\frac{2y}{x}$ برای هر α و ε است. همه نقاط ناوردا تحت این تقارنها را هم بیابید. آیا برای هر α تقارنها بدیهی‌اند؟

۴.۲ (۶۰.۲) را با استفاده از تقارنهای بدست آمده در مثال (۱۳.۲) حل کنید؟

۵.۲ نشان دهید که $X=x\partial x+3y\partial y$ تقارنهای لی معادله‌ی $y'=\frac{3y}{x}+\frac{x^5}{2y+x^3}$ را تولید می‌کند. از نتیجه برای حل معادله‌ی دیفرانسیل استفاده کنید.

۶.۲ معادله‌ی دیفرانسیل معمولی $y'=e^{-x}y^2+y+e^x$ مولد تقارنی دارد طوریکه ξ و η توابع خطی‌ای از x و y باشند. این مولد را پیدا کنید و از آن برای حل معادله استفاده کنید.

۷.۲ تمرین قبل را برای معادله‌ی $y'=\frac{y+y^3}{x+(x+1)y^2}$ تکرار کنید.

۸.۲ عمومی‌ترین معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول که تقارنهای لی $(\hat{x},\hat{y})=(e^{\varepsilon}x, e^{\alpha\varepsilon}y)$ دارد کدام است؟ (α را ثابت فرض نمایید).

۹.۲ فرض کنید که Q_1 و Q_2 دیفرانسیل معمولی مشخصه‌های کاهش یافته‌ی مستقل خطی از تقارنهای معادله‌ی $y'=w(x,y)$ هستند. نشان دهید جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل معمولی $\bar{Q}_1=c\bar{Q}_2$ است که c یک ثابت دلخواه است.

۱۰.۲ از سری‌های لی (۷۷.۲) استفاده کنید تا نشان دهید (۷۹.۲) برای هر کدام از مولدهای بینهایت کوچک زیر برقرار است:

a) $X=x\partial_x-y\partial_y$

b) $X=x^2\partial_x+xy\partial_y$

c) $X=-y\partial_x+x\partial_y$

فصل ۳

چگونگی بدست آوردن تقارنهای نقطه ای لی برای معادلات دیفرانسیل معمولی

خوب شکار!

(رودیارد کیپلینگ: کتاب جنگل)

بخش ۱.۳ شرط تقارن

تا بحال ما بسیاری از ایده‌های اساسی در روش‌های تقارن معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول آشنا شده‌ایم. این ایده‌ها را می‌توان بسط داد و برای معادلات دیفرانسیل با مراتب بالاتر بکار برد:

$$y^{(n)} = w(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \qquad y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}. \tag{۱.۳}$$

فرض شده که w (بطور موضعی) یک تابع هموار از هر طرف است.

ما شرایط تقارن را توضیح می‌دهیم و به بررسی بعضی از پیامدهای آن می‌پردازیم. (بیان جزئیات شرایط تقارن به پایان فصل موکول می‌شود). تقارن (۱.۳) یک دیفئومورفیسم است که مجموعه جواب‌هایی از معادله دیفرانسیل معمولی را به خودش می نگارد.

هر دیفئومورفیسم:

$$\Gamma : (x, y) \longmapsto (\hat{x}, \hat{y}), \tag{۲.۳}$$

منحنی های مسطح هموار را به منحنی های مسطح هموار می نگارد.

این عمل Γ روی صفحه یک عمل روی مشتقات $y^{(k)}$ القا می کند ،بطوریکه نگاشت:

$$\Gamma : (x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \longmapsto (\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \cdots, \hat{y}^{(n)}). \tag{۳.۳}$$

به طوری که:

$$\hat{y}^k = \frac{d^k\hat{y}}{d^k\hat{x}}, \qquad k = 1, \cdots, n \tag{۴.۳}$$

این نگاشت را n امین پرولانگشین Γ می‌گویند.
توابع $\hat{y}^{(k)}$ را به صورت بازگشتی محاسبه می‌کنند (با استفاده از قانون زنجیری) که به شرح زیر است:

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{d\hat{y}^{(k-1)}}{d\hat{x}} = \frac{D_x\hat{y}^{(k-1)}}{D_x\hat{x}} \qquad \hat{y}^{(0)} \equiv \hat{y}. \tag{۵.۳}$$

در این جا D_x مشتق کامل نسبت به x است:

$$D_x = \partial_x + y'\partial_y + y''\partial y' + \cdots . \tag{۶.۳}$$

شرط تقارن برای (۳.۱) معادله دیفرانسیل معمولی به صورت:

$$\hat{y}^{(n)} = w(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \cdots, \hat{y}^{(n-1)}) \qquad \text{به طوری که (۳.۱) برقرار باشد} \tag{۷.۳}$$

جایی که توابع $\hat{y}^{(k)}$ توسط (۵.۳) داده شده باشد.
تقریبا برای همه معادلات دیفرانسیل معمولی، شرط تقارن (۷.۳) به صورت غیر خطی می‌باشد.
تقارن‌های لی به وسیله خطی کردن (۷.۳)(حول $\varepsilon = 0$) بدست می آیند. هیچکدام از این خطی سازی ها برای تقارنهای گسسته امکان پذیر نیست و پیدا کردن آنها بسیار مشکل است به هر صورت معمولاً آسان است پی بردن به اینکه آیا یک دیفئومورفیسم داده شده تقارن معادله دیفرانسیل معمولی بخصوصی است یا نه.

۱.۳ مثال. نشان می دهیم که تبدیل:

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right). \tag{۸.۳}$$

یک تقارن از معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم است:

$$y'' = 0, \qquad x > 0. \tag{۹.۳}$$

از (۵.۳) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \hat{y}' &= \frac{D_x(y/x)}{D_x(1/x)} = y - xy', \\ \hat{y}'' &= \frac{D_x(y - xy')}{D_x(1/x)} = x^3y''. \end{aligned}$$

بنابراین شرط تقارن:

$$y'' = 0 \qquad \text{به طوری که} \qquad \hat{y}'' = 0,$$

صادق است. این تقارن وارون خودش است و متعلق به گروه گسسته از مرتبه دوم است.

جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی :

$$y = c_1 x + c_2. \qquad (۱۰.۳)$$

توسط (۸.۳) به جواب نگاشته می‌شود:

$$\hat{y} = \frac{y}{x} = c_1 + \frac{c_2}{x} = c_1 + c_2\hat{x}.$$

از این رو این تقارن روی مجموعه منحنی های جواب با تعویض ثابت‌های انتگرال c_1 و c_2 عمل می‌کند.
شرایط تقارن خطی برای تقارن لی بوسیله روش مشابه‌ای که برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول استفاده می‌کردیم، نتیجه گیری شده است. تقارن‌های بدیهی متناظر با $\varepsilon = 0$ است، تمام نقاط را بدون تغییر باقی می‌گذارند.
بنابراین برای ε به اندازه کافی نزدیک به صفر تقارن‌های لی امتداد یافته به فرم زیر است:

$$\begin{array}{rcl} \hat{x} &=& x + \varepsilon\xi + O(\varepsilon^2), \\ \hat{y} &=& y + \varepsilon\eta + O(\varepsilon^2), \\ \hat{y}^{(k)} &=& y^{(k)} + \varepsilon\eta^{(k)} + O(\varepsilon^2), \qquad k \geq 1. \end{array} \qquad (۱۱.۳)$$

تذکر: اندیس بالای $\eta^{(k)}$ به معنی مشتق η نیست.
ما (۱۱.۳) را در شرط تقارن (۷.۳) قرار می‌دهیم؛ عبارات $O(\varepsilon)$ شرط تقارن خطی زیر را می دهند:

$$\eta^{(n)} = \xi w_x + \eta w_x + \eta^{(1)} w'_y + \cdots + \eta^{(n-1)} w_y^{(n-1)}. \qquad (۱۲.۳)$$

بطوریکه (۱.۳) برقرار باشد. توابع $\eta^{(k)}$ به طور بازگشتی از (۵.۳) محاسبه می‌شوند به شرح زیر برای $k = 1$ محاسبه کرده‌ایم:

$$\begin{array}{rcl} \hat{y}^{(1)} &=& \dfrac{D_x\hat{y}}{D_x\hat{x}} = \dfrac{y' + \varepsilon D_x\eta + O(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon D_x\xi + O(\varepsilon^2)} \\ &=& y' + \varepsilon(D_x\eta - y' D_x\xi) + O(\varepsilon^2). \end{array} \qquad (۱۳.۳)$$

بنابراین از (۱.۳) داریم:

$$\eta^{(1)} = D_x\eta - y' D_x\xi. \qquad (۱۴.۳)$$

به طور مشابه:

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{y^{(k)} + \varepsilon D_x\eta^{(k-1)} + O(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon D_x\xi + O(\varepsilon^2)},$$

بنابراین:

$$\eta^{(k)}(x, y, y', \cdots, y^{(k)}) = D_x\eta^{(k-1)} - y^{(k)} D_x\xi. \qquad (۱۵.۳)$$

توابع ξ و η و $\eta^{(k)}$ را می‌توان برحسب مشخصه $Q = \eta - y'\xi$ نوشت که به شرح زیر است:

$$\begin{array}{rcl} \xi &=& -Q_{y'}, \\ \eta &=& Q - y' Q_{y'}, \\ \eta^{(k)} &=& D_x^k Q - y^{(k+1)} Q_{y'}, \qquad (k \geq 1). \end{array} \qquad (۱۶.۳)$$

[نتیجه گیری (۱۶.۳) را به عنوان تمرین به خواننده واگذاری می کنیم.]
این نتیجه برای اهداف محاسباتی مناسب است و به سرعت به تقارن‌ها بجز تقارنهای نقطه ای تعمیم می یابد. (رجوع به فصل ۷).
برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول سمت راست شرط تقارن خطی معادله (۱۲.۳)، X_ε است که X مولد بی‌نهایت کوچک است:

$$(\xi,\eta)=\left(\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon},\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon}\right)|_{\varepsilon=0}.$$

برای مواجه شدن با عمل تقارن‌های لی روی مشتقات از مرتبهٔ n ام یا کمتر به معرفی مولدهای بی‌نهایت کوچک پرولانگ یافته می‌پردازیم:

$$X^{(n)}=\xi\partial_x+\eta\partial_y+\eta^{(1)}\partial_{y'}+\cdots+\eta^{(n)}\partial_{y^{(n)}}. \qquad (۱۷.۳)$$

ضریب $\partial_{y^{(k)}}$ در بسط $\hat{y}^{(k)}$، عبارت $O(\varepsilon)$ است و بنابراین $X^{(n)}$ متناظر با بردار مماس در فضای متغیرهای $(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ است.
ما می‌توانیم از مولدهای بی‌نهایت کوچک پرولانگ یافته برای نوشتن شرط تقارن خطی (۱۲.۳) در فرم فشرده زیر استفاده کنیم.

$$X^{(n)}\left(y^{(n)}-w(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}\right)=0$$ به طوری که در شرط (۱.۳) صدق کند (۱۸.۳)

بخش ۲.۳ معادلات مبین برای تقارن های نقطه‌ای لی

همه تقارن‌هایی که تا کنون دیدیم فرم دیفئومورفیسم زیر است:

$$(\hat{x},\hat{y})=(\hat{x}(x,y),\hat{y}(x,y)). \qquad (۱۹.۳)$$

این نوع از دیفئومورفیسم‌ها را تبدیلات نقطه‌ای گویند هر تبدیل نقطه‌ای که تقارن هم هست را تقارن نقطه‌ای می‌گویند از این به بعد ما توجه خود را به تقارن های نقطه‌ای معطوف می‌کنیم. نمونه‌هایی دیگر تقارن ها را در فصل ۷ بررسی می‌کنیم.
برای یافتن تقارن های نقطه‌ای لی از معادلات دیفرانسیل معمولی (۱.۳) ها ابتدا به محاسبه $\eta^{(k)}$، $k=1,\cdots,n$ می‌پردازیم. توابع ξ و η وابسته به x و y و بنابراین (۱۴.۳) و (۱۵.۳) نتایج زیر را می‌دهد:

$$\eta^{(1)} = \eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-\xi_y y'^2, \qquad (۲۰.۳)$$

$$\begin{aligned}\eta^{(2)} &= \eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})y'+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})y'^2-\xi_{yy}y'^3\\ &\quad+\{\eta_y-2\xi_x-3\xi_y y'\}y'',\end{aligned} \qquad (۲۱.۳)$$

$$\begin{aligned}\eta^{(3)} &= \eta_{xxx}+(3\eta_{xxy}-\xi_{xxx})y'+3(\eta_{xxy}-\xi_{xxy})y'^2+(\eta_{yyy}-3\xi_{xyy})y'^3\\ &\quad-\xi_{yyy}y'^4+3\{\eta_{xy}-\xi_{xx}+(\eta_{yy}-3\xi_{xy})y'\\ &\quad-2\xi_{yy}y'^2\}y''-3\xi_y y''^2+\{\eta_x-3\xi_x-4\xi_y y'\}y'''.\end{aligned} \qquad (۲۲.۳)$$

تعداد عبارات $\eta^{(k)}$ بطور نمایی با k افزایش می یابد. بنابراین نرم‌افزار جبری کامپیوتر برای مطالعه معادلات دیفرانسیل معمولی مراتبه بالا پیشنهاد می‌گردد. اگر چه روش پایه ای برای یافتن تقارن‌های نقطه‌ای لی، مطالعه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه پایین است.

قبل از استفاده از نرم افزار جبری کامپیوتر ابتدا بایستی به این روش مسلط شد و نیاز به تمرین می‌باشد. ما معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم به شکل:

$$y'' = w(x,y,y'), \qquad (۲۳.۳)$$

را در نظر می گیریم.

شرط تقارن خطی را با جایگزین کردن رابطه (۲۰.۳) و (۲۱.۳) در رابطهٔ (۱۲.۳) بدست می‌آوریم و y'' را با $w(x,y,y')$ تعویض می‌کنیم. که به ما رابطه زیر را می‌دهد:

$$\begin{aligned} \eta_{w_y} + (2\eta_{xy} + \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} + 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + \{\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y'\}w &= \\ = \quad \xi w_x + \eta_y + \{\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2\}w'_y. & \end{aligned} \qquad (۲۴.۳)$$

اگر چه (۲۴.۳) ظاهری پیچیده دارد براحتی قابل حل است اما هر دو ξ و η مستقل از y' است. بنابراین (۲۴.۳) قابل تجزیه به سیستم معادله با مشتقات جزئی ها است که معادلات برای تقارن‌های نقطه‌ای لی هستند.

مثال های زیر راه کار را به ما نشان می‌دهد.

۲.۳ مثال. ساده‌ترین معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم را بررسی می‌کنیم:

$$y'' = 0 \qquad (۲۵.۳)$$

شرط تقارن خطی برای این معادله دیفرانسیل معمولی به شرح زیر است:

$$y'' = 0 \qquad \text{به طوری که} \qquad \eta^{(2)} = 0,$$

که:

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 = 0,$$

به طوری که ξ و η مستقل از y' هستند. شرط تقارن خطی به دستگاه معادلات مبین زیر تفکیک می‌شود:

$$\begin{aligned} \eta_{xx} &= 0, & 2\eta_{xy} - \xi_{xx} &= 0, \\ \xi_{yy} &= 0, & \eta_{yy} - 2\xi_{xy} &= 0. \end{aligned} \qquad (۲۶.۳)$$

برای توابع دلخواه A و B جواب عمومی ازقسمت آخر (۲۶.۳) به صورت زیر است:

$$\xi(x,y) = A(x)y + B(x).$$

سومین معادله (۲۶.۳) رابطه زیر را می‌دهد:

$$\eta(x,y) = A'(x)y^2 + C(x)y + D(x).$$

به طوری که C و D توابع دلخواه هستندمعادلات باقی مانده (۲۶.۳):

$$\begin{aligned} A'''(x)y^2 + C''(x)y + D''(x) &= 0, \\ 3A''(x)y + 2C'(x) - B''(x) &= 0. \end{aligned} \qquad (۲۷.۳)$$

با یکسان سازی توانهای y در (۲۷.۳) در دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی برای توابع مجهول A,B,C,D داریم:

$$A''(x)=0,\quad C''(x)=0,\quad D''(x)=0,\quad B''(x)=2C'(x).$$

این معادلات دیفرانسیل معمولی براحتی قابل حل هستند که به نتایج زیر منجر می شوند. برای هر گروه لی یک پارامتری از تقارن‌ها از (۲۵.۳) توابع ξ و η به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned}\xi(x,y) &= c_1+c_3x+c_5y+c_7x^2+c_8xy,\\ \eta(x,y) &= c_2+c_4y+c_6x+c_7xy+c_8y^2,\end{aligned}$$

که (به طور معمول) $c_1,\cdots,c_8$ مقادیر ثابت هستند. بنابراین عمومی ترین مولدهای بی‌نهایت کوچک:

$$X=\sum_{i=1}^{8}c_iX_i,$$

هستند، که

$$\begin{array}{llll} X_1=\partial_x, & X_2=\partial_y, & X_3=x\partial_x, & X_4=y\partial_y,\\ X_5=y\partial_x, & X_6=x\partial_y, & X_7=x^2\partial_x+xy\partial_y, & X_8=xy\partial x+y^2\partial y. \end{array} \qquad (۲۸.۳)$$

۳.۳ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی زیر:

$$y''=\frac{y'^2}{y}-y^2. \qquad (۲۹.۳)$$

از مطالعات میکرو ارگانیسم شنا بدست آمده است. شرط تقارن خطی:

$$\begin{aligned}&\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})y'+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})y'^2\\ &\quad-\xi_{yy}y'^3+\{\eta_y-2\xi_x-3\xi_yy'\}\left(\frac{y'^2}{y}-y^2\right)=\\ &=\eta\left(-\frac{y'^2}{y^2}-2y\right)+\{\eta_x-(\eta_y-\xi_x)y'-\xi_yy'^2\}\left(\frac{2y'}{y}\right).\end{aligned} \qquad (۳۰.۳)$$

با مقایسه توانهای y'، معادلات مبین را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\xi_{yy}+\frac{1}{y}\xi &= 0,\\ \eta_{yy}-2\xi_{xy}-\frac{1}{y}\eta_y+\frac{1}{y^2}\eta &= 0,\\ 2\eta_{xy}-\xi_{xx}+3y^2\xi_y-\frac{2}{y}\eta_x &= 0,\\ \eta_{xx}-y^2(\eta_y-2\xi_x)+2y\eta &= 0.\end{aligned} \qquad (۳۱.۳)$$

با انتگرال گیری از معادله اول (۳۱.۳) داریم:

$$\xi = A(x)\ln|y| + B(x) \tag{۳۲.۳}$$

پس از آن از دومین معادله (۳۱.۳) داریم:

$$\eta = A'(x)y(\ln|y|)^2 + C(x)y\ln|y| + D(x)y \tag{۳۳.۳}$$

در این جا D, A, B, C توابع مجهول هستند که توسط باقی معادلات (۳۱.۳) تعیین می‌شوند. رابطه (۳۲.۳) و (۳۳.۳) را در سومین معادله مبین (۳۱.۳) قرار می‌دهیم رابطه زیر بدست می‌آید:

$$3A''(x)\ln|y| + 3A(x)y + 2C'(x) = B''(x) = 0$$

بنابراین:

$$A(x) = 0, \qquad B''(x) - 2C'(x). \tag{۳۴.۳}$$

اکنون (۳۲.۳) و (۳۳.۳) را در آخرین معادله از معادلات مبین (۳۱.۳) قرار می‌دهیم.
تصور کنید $A = 0$ باشد، که منجر می‌شود به:

$$C(x)y^2\ln|y| + C''(x)y\ln|y| + (2B'(x) - C(x) + D(x))y^2 + D''(x)y = 0,$$

که به دستگاه زیر تفکیک می‌شود:

$$C(x) = 0, D(x) = -2B'(x), D''(x) = 0$$

با وارد کردن (۳۴.۳) در محاسبات خواهیم داشت:

$$B(x) = c_1 + c_2x, D(x) = -c_2$$

که c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه هستند. از این رو جواب عمومی شرط تقارن خطی به صورت زیر است:

$$\xi = c_1 + c_2x, \qquad \eta = -2c_2y \tag{۳۵.۳}$$

هر مولد بی‌نهایت کوچک به شکل:

$$X = c_1X_1 + c_2X_2$$

است که:

$$X_1 = \partial x, \qquad X_2 = x\partial x - 2y\partial y \tag{۳۶.۳}$$

L را مجموعه همهٔ مولدهای بی‌نهایت کوچک گروه لی یک پارامتری از تقارنهای نقطه‌ای، معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه $n \geq 2$ در نظر می‌گیریم. شرط تقارن خطی در ξ و η خطی است و از این رو:

$$X_1, X_2 \in L \Rightarrow c_1X_1 + c_2X_2 \in L \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

بنابراین L یک فضای برداری است. بعد R از این فضای برداری تعداد ثابت‌های دلخواه است که در جواب عمومی شرط تقارن خطی پدیدار شده است.

همانطور که در مثال بالا گفته شد هر $X \in L$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{i=1}^{R} c_i X_i \qquad c_i \in \mathbb{R} \tag{۳۷.۳}$$

که $\{X_1, \cdots, X_R\}$ یک پایه برای L است. مجموعه تقارن‌های نقطه‌ای توسط همهٔ $X \in L$ تولید می‌شوند که به تشکیل گروه لی (موضعی) R− پارامتری می دهند.

آن‌ها را گروه تولید شده توسط L می‌نامیم. برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم R ، صفر، یک، دو ،سه و یا هشت است. R هشت است اگر وتنها اگر معادلات دیفرانسیل معمولی خطی باشد یا بوسیله تبدیلات نقطه ای خطی شدنی باشد. هر معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه $n \geq 3$، $R < n+4$ دارد.

اگر معادله دیفرانسیل معمولی خطی باشد (یا قابل خطی شدن) باشد آن گاه $R \in \{n+1, n+2, n+4\}$ است.

ما این نتایج را ثابت نمی کنیم را ثابت کنیم اما آنها تست مهمی را برای ما فراهم می‌کند. اگر جواب عمومی بدست آمده از شرط تقارن خطی ما را نقض کند با خطایی مواجه می‌شویم. برای بیشتر معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم که کاربردی هستند w کثیر جمله‌ای در y' است که به سادگی می‌توان شرایط تقارن خطی را به معادلات مبین تفکیک کرد. این کار با مطالعه همهٔ روابط مختلف که توسط مضرب توانهای خاص y' هستند امکان پذیر است. برای کلیه w ها، تفکیک آنها با جمع کردن تمامی روابط که نسبت به y' مستقل هستند قابل دستیابی است.

روش مشابه برای معادلات دیفرانسیل معمولی مراتب بالاتر هم به کار می‌آید. معمولاً، بهترین کار تنها؛ محاسبه آن معادلات مبین است که بالاترین مضربی از توانهای $y^{(n-1)}$ هستند. که این بعضی اطلاعات راجع به ξ و η را به ما می‌دهد. با نگاه کردن به بالاترین توان $y^{(n-1)}$ به یافته‌های بیشتری دست پیدا می‌کنیم.

مثال زیر روش را به ما نشان می‌دهد.

۴.۳ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی زیر در مطالعه شارها در لایه نازک با مرزهای آزاد رخ می‌دهد:

$$y''' = y^{-3} \tag{۳۸.۳}$$

شرط تقارن خطی برای این معادله دیفرانسیل معمولی به صورت زیر است:

$$\eta^{(3)} = -3y^{-4}\eta \qquad \text{به طوری که (۳۸.۳) برقرار باشد} \tag{۳۹.۳}$$

از (۲۲.۳) می‌بینیم (۳۹.۳) در y'' درجه دوم است. روابط شامل y''^2 را می‌دهد:

$$-3\xi_y = 0$$

بنابراین برای تعیین توابع A:

$$\xi = A(x) \tag{۴۰.۳}$$

رابطه (۴۰.۳) را محاسبه می‌کنیم رابطه (۳۹.۳) که ضریب y'' را دارد به شکل زیر بدست می آید:

$$\eta_{xy} - A''(x) + \eta_{yy}y' = 0$$

با مساوی قرار دادن توانهای y' در بالا به ما رابطه زیر را می‌دهد:

$$\eta = (A'(x) + c_1)y + B(x) \tag{۴۱.۳}$$

هنگامی که B یک تابع است c_1 یک ثابت است. رابطه مذکور در شرط تقارن خطی کاهش می یابد به:

$$A''''(x)y + B'''(x) + 2A'''(x)y' + (c_1 - 2A'(x))y^{-3} = -3\{(A'(x) + c_1)y + B(x)\}y^{-1}$$

بنابراین:

$$A = -4C_1x + C_2 \qquad B = 0$$

و L دو بعدی است با پایه:

$$X_1 = -4x\partial x - 3y\partial y, \qquad X_2 = \partial x.$$

سرانجام از پایه هم ارز استفاده می‌کنیم:

$$X_1 = \partial x, \qquad X_2 = x\partial x + \frac{3}{4}y\partial y \tag{۴۲.۳}$$

که بعضی جواب‌های دقیق رابطه (۳۸.۳) را نتیجه می دهد.
در مثال بالا، عاملی که باعث مستقل بودن w از y'' است محدودیت‌های شدیدی است که بر روی ξ و η واقع می‌شود است. این نتیجه به صورت زیر تعمیم داده می‌شود:

$$y^{(n)} = w(x, y, y', \cdots, y^{(n-2)}) \qquad n \geq 3 \tag{۴۳.۳}$$

شرط تقارن خطی ξ و η را به شکل زیر در می‌آورد:

$$\xi = A(x), \qquad \eta = (\frac{1}{2}(n-1)A'(x) + c_1)y + B(x) \tag{۴۴.۳}$$

در این جا A و B توابع‌اند و c_1 ثابت می‌باشد.

بخش ۳.۳ معادلات دیفرانسیل معمولی خطی

معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با مرتبه $n \geq 2$ به طور شگفت آوری در تحلیل تقارن (آنالیز تقارن) پایدارند، و لو اینکه هیچ نقصانی در تقارنهای نقطه‌ای لی نیست (یادآوری: معادلات دیفرانسیل معمولی خطی $R = \dim(L) \geq n+1$)
مسئله این است که بدون داشتن جواب‌های عمومی یافتن تقارن‌های نقطه‌ای لی در بیشتر مواقع امکان پذیر نیست.
برای فهم بیشتر به بررسی معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دوم زیر می‌پردازیم:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y \tag{۴۵.۳}$$

به طوری که $p(x)$ و $q(x)$ داده شده است.
شرط تقارن خطی منجر به نتیجه زیر می‌شود:

$$\xi = A(x)y + B(x) \qquad \eta = \{A'(x) + p(x)A(x)\}y^2 + C(x)y + D(x)$$

که:

$$\begin{aligned} A''+(pA)'-qA &= 0,\\ B''+(pB)' &= 2C',\\ C''-pC' &= 2qB'+q'B,\\ D''-pD'-qD &= 0. \end{aligned}$$

معادله برای D ، معادله دیفرانسیل معمولی اصلی است و A در معادله دیفرانسیل معمولی الحاقی صادق است. فرض کنید جواب عمومی:

$$y=k_1y_1(x)+k_2y_2(x)$$

باشد.
که k_1 و k_2 ثابت‌های دلخواه هستند پس جواب عمومی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی برای A,B,C,D به صورت:

$$\begin{aligned} A &= \exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big)(c_4y_1+c_5y_2),\\ B &= \exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big)(c_6y_1^2+2c_7y_1y_2+c_8y_2^2),\\ C &= c_1+\exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big)(c_6y_1y_1'+c_7(y_1'y_2+y_1y_2')+c_8y_2y_2'),\\ D &= c_2y_1+c_3y_2. \end{aligned}$$

از این رو فضای برداری، مولدهای بینهایت کوچک، ۸ بعدی است و دارای پایه:

$$\begin{aligned} X_1 &= y\partial_y,\\ X_2 &= y_1\partial_y,\\ X_3 &= y_2\partial_y,\\ X_4 &= \exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big)(y_1y\partial_x+y_1'y^2\partial_y),\\ X_5 &= \exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big)(y_2y\partial_x+y_2'y^2\partial_y),\\ X_6 &= \exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big)(y_1^2\partial_x+y_1y_1'y\partial_y),\\ X_7 &= \exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big)(2y_1y_2\partial_x+(y_1'y_2+y_1y_2')y\partial_y),\\ X_8 &= \exp\Big(\int p(x)\,dx\Big)(y_2^2\partial_x+y_2y_2'y\partial_y). \end{aligned}$$

هر مولد به جز X_1 وابسته به جواب‌های معادله دیفرانسیل معمولی اصلی است بنابراین معمولاً نمی‌توان شرط تقارن خطی را کامل حل کرد.
هر معادله دیفرانسیل معمولی خطی همگن از مرتبه $n\geq 3$ دارای مولدهای بی‌نهایت کوچک به شکل زیر است:

$$X_1=y,\partial_y,\qquad X_2=y_1,\qquad \partial_y,\qquad \cdots,\qquad X_{n+1}=y_n\partial y,$$

که $\{y_1,\cdots,y_n\}$ مجموعه‌ای از جوابهای مستقل تابعی معادله دیفرانسیل معمولی است. بعضی از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی بیش از یک مولد بی‌نهایت کوچک دارد. سایر معادلات دیفرانسیل معمولی خطی بیش از ۳ مولد بی‌نهایت کوچک دارند و می‌تواند با تبدیلات نقطه ای انتقال به معادله دیفرانسیل معمولی ، $y^{(n)}=0$ نگاشته شود. ۳ مولد بی‌نهایت کوچک دیگر برای:

$$y^{(n)}=0, \qquad X_{n+2}=\partial_x, \qquad X_{n+3}=x\partial_x, \qquad X_{n+4}=x^2\partial_x+(n-1)xy\partial_y,$$

هستند.

بخش ۴.۳ اثبات شرط تقارن

در ابتدای این بخش، شرط تقارن بیان خواهد شد و اندکی هم سعی بر اثبات آن می‌گردد.

دیدیم که چگونه شرط تقارن خطی ما را قادر به یافتن تقارنهای لی به شکل سیستماتیک می‌کند، اجازه دهید کمی راجع به منشأ شرط تقارن فکر کنیم، دیفئومورفیسم زیر را در نظر بگیرید:

$$\Gamma:(x,y)\longmapsto(\hat{x},\hat{y}), \qquad (۴۶.۳)$$

که به منحنی جواب $y=f(x)$ را به منحنی جدید $\hat{y}=\tilde{f}(\hat{x})$ می نگارد.

تابع $f(x)$ در رابطه زیر برقرار است:

$$f^{(n)}(x)=w(x,f(x),f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)), \qquad (۴۷.۳)$$

زیرا $y=f(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۳) است. به وضوح Γ یک تقارن است اگر منحنی جدید جواب معادله دیفرانسیل معمولی است. بدان معنی که:

$$\tilde{f}^{(n)}(\hat{x})=(\hat{x},\tilde{f}(\hat{x}),\tilde{f}'(\hat{x}),\cdots,\tilde{f}^{(n-1)}(\hat{x})). \qquad (۴۸.۳)$$

ما به سختی جواب‌های عمومی معادله دیفرانسیل معمولی را می دانیم بنابراین استفاده از (۴۸.۳) برای آزمودن عملی نیست. با اینحال، هر شرط تقارن خطی باید به ما بگوید آیا (۴۸.۳) برای هر جواب $y=f(x)$ صادق است یا خیر؟

با کار کردن در مبنای اقلیدسی $n+2$ بعدی با متغیرهای $(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ به آن دست می‌یابیم. که به آن فضای جت مرتبه n می‌گویند معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۳) رویه هایپر S در J^n را تعریف می‌کند. برای مثال معادله دیفرانسیل معمولی ، $y'=w(x,y)$ به عنوان نماینده یک سطح در J' است به طوری که فضایی است که مختصات آن (x,y,y') است.

هر منحنی هموار $y=f(x)$ در صفحه، در J^n با منحنی هموار منحصر به فرد نمایش داده می‌شود:

$$(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=(x,f(x),f'(x),\cdots,f^{(n)}(x)). \qquad (۴۹.۳)$$

منحنی (۴۹.۳) را بالا بر $y=f(x)$ گویند. عبارت منحنی بالا بر مورد استفاده قرار می‌گیرد. مختصات بالا بر (x,y)، منحنی اصلی در صفحه را مشخص می‌کند.

تناظر بین منحنی‌های هموار روی صفحه و بالا برهایشان بدان معنی است که هر سطح نگاشت هموار (۴۶.۳) بین منحنی های روی صفحه را می تواند به فضای جت $J^{(n)}$ توسعه یابد.

$$\Gamma:(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\longmapsto(\hat{x},\hat{y},\hat{y}',\cdots,\hat{x}^{(n)}), \qquad (۵۰.۳)$$

که با توجه به تعریف بالا بر:

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{d^k\hat{y}}{d\hat{x}^k}, \qquad k = 1, \cdots, n. \tag{۵۱.۳}$$

بسط عمل Γ به همه مشتقات مرتبه n ام یا کمتر از آن پرولانگ (امتداددهی) مرتبه n ام است.
از رابطه (۴۷.۳) اگر $y = f(x)$ جوابی از معادله دیفرانسیل معمولی باشد پس بالابر (۴۹.۳) را در داخل S می‌برد.
برای عکس آن هر منحنی بالا بر که در S است یک جواب معادله دیفرانسیل معمولی است. امتداد دهی مرتبه n ام Γ، S را به سطح جدید $\tilde{S}$ می‌نگارد که به فرم زیر است:

$$\hat{y}^{(n)} = \tilde{w}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \cdots, \hat{y}^{(n-1)}). \tag{۵۲.۳}$$

به طور کلی، اگر Γ جواب $y = f(x)$ را به منحنی $\hat{y} = \tilde{f}(\hat{x})$ بنگارد آنگاه S بالا بر منحنی جدید در $\tilde{S}$ قرار می گیرید که به شکل زیر است:

$$\tilde{f}^{(n)}(\hat{x}) = \tilde{w}(\hat{x}, \tilde{f}(\hat{x}), \tilde{f}'(\hat{x}), \cdots, \tilde{f}^{(n-1)}(\hat{x})). \tag{۵۳.۳}$$

بنابراین (۴۸.۳) برقرار است اگر و تنها اگر $\tilde{w} = w$ روی بالابر $y = f(x)$.
تا کنون ما به بررسی منحنی جواب‌های منفرد پرداختیم.
شرط هم ارزی برای مجموعه همه جواب‌های منحنی $\tilde{w} = w$ روی S است به طوری که (۵۴.۳) برقرار باشد:

$$\hat{y}^{(n)} = w(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \cdots, \hat{y}^{(n-1)}) \qquad \text{هنگامی که (۱.۳) برقرار باشد} \tag{۵۴.۳}$$

بنابراین S با عمل پرولانگ یافته از هر تقارنی به خودش نگاشته می‌شود. به عبارت دیگر S تحت هر تقارنی ناودا است. البته از قضایای ثابت شده انتظار می‌رود که تقارن یک دیفئومورفیسم است که هر شی را بدون تغییر باقی می‌گذارد.
توجه: بحث بالا نشان می‌دهد که نیاز به احتیاط در تعریف تقارن است. همهٔ دیفئومورفیسم‌ها که از فضای S به خودشان نگاشته می‌شوند تقارن نیستند. شرط دیگر (۵۱.۳) بیان میدارد که دیفئومورفیسم هر بالا بری را به بالا بری می‌نگارد.(در نهایت آن‌هایی که بالابرش در S هستند) این شرط نیاز هست که تقارن ها ساختار جواب‌های معادلات دیفرانسیل را حفظ می کنند.

ملاحظات و تفسیرهای دیگر

به طور کلی شرط تقارن خطی برای یافتن تقارنهای گسسته نقطه‌ای از معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه $n \geq 2$ قابل استفاده است.
توابع $\hat{y}^{(k)}$ توسط فرمول امتداد دهی (۵.۳) تعریف می‌شوند.
هم چنین شرط تقارن خطی، معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی را تا حدی می‌توان ساده کرد زیرا $\hat{x}$ و $\hat{y}$ مستقل از $y', y'', \cdots, y^{(n-1)}$ است. که شرط تقارن خطی در سیستم معادله با مشتقات جزئی غیر خطی غیر منفرد تفکیک می کند. اگر چه این سیستم‌ها (دستگاه‌ها) معمولاً به سختی حل می‌شوند. روش ساده‌تر بدست آوردن تقارنهای گسسته است که در فصل ۲ مورد بحث قرار گرفت.
جبر های لی، مولدهای تقارن برای معادلات دیفرانسیل معمولی موضوعی با محدودیت‌های مختلف است (که بعضی از آن در (۲.۳) ذکر شد). محدودیت‌های کافی برای طبقه‌بندی کلیه جبر های لی مولدهای تقارن نقطه‌ای ساخته شده اعمال گردیده است.

کتاب اولور (۱۹۹۵) برای مطالعه بیشتر و جزئیات و ارجاع پیشنهاد می‌گردد.
نتیجه (۴۴.۳) محاسبه مولدهای تقارن برای کلاس‌های بزرگی از معادلات دیفرانسیل معمولی را ساده کرده است.
بسیار شبیه نتایجی است که در بلومن و کومی (۱۹۸۹) مورد بحث قرار گرفته است.
اثبات شرط تقارن در (۴.۳) بر پایه عمل تقارن روی منحنی جواب خصوصی است.
به طور کلی بالا بر برای مشتق فرمول‌های پرولانگ مورد استفاده قرار می‌گیرد.
بعضی نویسندگان با مشتق از فرمول مشابه از ایده نقاط مماسی بین جفت منحنی‌ها (زوج منحنی‌ها) استفاده می‌کند. برای مقایسه این دو دیدگاه می‌توان سوول و راسلتون (۱۹۹۴) را ملاحظه فرمائید.

تمرین‌ها

۱.۳ نشان دهید ξ و η و $\eta^{(k)}$ در (۱۶.۳) برقرار هستند.

۲.۳ روابط (۲۱.۳) و (۲۲.۳) فرمول پرولانگ (۱۵.۳) نتیجه گرفته و $\eta^{(4)}$ را نمایش دهید.

۳.۳ X^4 را برای مولدهای زیر محاسبه کند:

a) $X=\partial_y$

b) $X=y\partial_x+\alpha y\partial_y$ α ثابت است

c) $X=xy\partial_x+y^2\partial_y$

d) $X=-y\partial_x+x\partial_y$

۴.۳ معادلات مبین برای مولدهای $y''=y'^4+\alpha y'^2$ که α ثابت است را حل و بنویسید. بعد L برای بیشترین مقدار α چیست؟ برای کدام α بعد L بزرگتر است؟

۵.۳ مولدهای بی‌نهایت کوچک معادله دیفرانسیل معمولی زیر را بیابید:

$$y''=7y'-6y$$

توجه داشته باشید در این مثال $\dim(L)<2$ است هم چنین معادله دیفرانسیل معمولی ما خطی است؟

۶.۳ حل مجموعه بالا معین از معادله با مشتقات جزئی ها برای ξ و η همواره به راحتی امکان پذیر نیست برای مثال اگر معادله دیفرانسیل معمولی تقارن گسسته $(\hat{x},\hat{y})=(x,y)$ را داشته باشد و $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$ در معادلات دیفرانسیل جزئی صدق کند کدام یک از آنها مفصل است.

معادلات مبین برای معادله دیفرانسیل، $y''=(1-y')^3$ را نوشته و جواب عمومی معادلات را محاسبه کنید. (راهنمایی: به دنبال تغییر متغیر مناسب باشید.)

۷.۳ گاهی اوقات طبقه بندی خانواده‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب تقارنشان موثر است. فرض کنید معادله دیفرانسیل معمولی به صورت زیر داشته باشیم:

$$y''=f(y),\qquad f''(y)\neq 0$$

هر معادله دیفرانسیل معمولی که تقارن آن توسط $X_1=\partial x$ تولید شده باشد. از شرط تقارن خطی برای یافتن همه توابع $f(x)$ که تقارنهای نقطه ای لی دیگری هستند استفاده کنید.

(این مثال مسئله ای از طبقه بندی گروه است. برای مثال‌های بلومن و کومی (۱۹۸۹) را ملاحظه فرمائید).

فصل ۴

استفاده از گروه لی یک پارامتری

شما روش های من را می دانید، آنها را بکار بگیرید.

(سر آرتور کانن دویل: تحصیل در اسکارلت)

بخش ۱.۴ کاهش مرتبه بوسیله بکاربردن مختصات کانونی

اکنون که بطور اصولی قادر به یافتن تقارنهای لی هستیم چگونه باید آنها را به کار گیریم؟ برای حل کردن یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول، آنرا برحسب مختصات کانونی می نویسیم. معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه بالاتر نیز از مختصات کانونی استفاده می نمایند.

از این پس دیفرانسیل گیری نسبت به r بوسیله یک نقطه (.) نمایش داده می شود؛ برای مثال $\dot{s}$ نمایش دهنده ds/dr می‌باشد.

فرض کنید X مولد بی نهایت کوچکی از یک گروه لی یک پارامتری از تقارنهای معادله دیفرانسیل معمولی

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \quad n \geq 2 \tag{۱.۴}$$

باشد و(r,s) مختصات کانونی برای گروه تولید شده به وسیله X باشد، بنابراین

$$X = \partial_s. \tag{۲.۴}$$

اگر معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۴) برحسب مختصات کانونی نوشته شود برای Ω دلخواه به شکل

$$s^{(n)} = \Omega(r, s, \dot{s}, \cdots, s^{(n-1)}), \quad s^{(k)} = \frac{d^k s}{dr^k} \tag{۳.۴}$$

می‌باشد. اما معادله دیفرانسیل معمولی (۳.۴) تحت گروه لی انتقال نسبت به s ناورداست، لذا شرط تقارن $\Omega_s = 0$ را نتیجه می‌دهد . بنابراین

$$s^{(n)} = \Omega(r, \dot{s}, \cdots, s^{(n-1)}). \tag{۴.۴}$$

با نوشتن معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۴) بر حسب مختصات کانونی، آنرا به معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه $n-1$ به ازای $v=\dot{s}$ کاهش می‌دهیم:

$$v^{(n-1)}=\Omega(r,v,\cdots,v^{(n-2)}),\quad v^{(k)}=\frac{d^{k+1}s}{dr^{k+1}}. \tag{۵.۴}$$

فرض کنید جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته بصورت

$$v=f(r;c_1,\cdots,c_{n-1})$$

باشد. آنگاه جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۴) ،

$$s(x,y)=\int^{r(x,y)}f(r;c_1,\cdots,c_{n-1})dr+c_n$$

می‌باشد.

در حالت کلی تر اگر v تابع دلخواهی از $\dot{s}$ و r باشد، به قسمی که $v_{\dot{s}}(r,\dot{s})\neq 0$ باشد، معادله دیفرانسیل معمولی (۴.۴) به یک معادله دیفرانسیل معمولی به شکل

$$v^{(n-1)}=\tilde{\Omega}(r,v,\cdots,v^{(n-2)}),\quad v^{(k)}=\frac{d^kv}{dr^k} \tag{۶.۴}$$

کاهش می‌یابد. یکبار دیگر جواب عمومی (۶.۴) بدست می‌آید، رابطه $\dot{s}=\dot{s}(r,v)$ جواب عمومی (۱.۴) را می‌دهد:

$$s(x,y)=\int^{r(x,y)}\dot{s}(r,v(r;c_1,\cdots,c_{n-1}))dr+c_n. \tag{۷.۴}$$

بطور خلاصه : اگر یک گروه لی یک پارامتری از تقارنها را داشته باشیم، قادر به حل (۱.۴) بوسیله حل یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه پایین تر از طریق انتگرال گیری هستیم. این مطلب اکنون ما را برای داشتن روشی تکنیکی برای استخراج تقارنهای نقطه‌ای لی ترغیب می‌نماید.

۱.۴ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی

$$y''=(\frac{3}{x}-2x)y'+4y \tag{۸.۴}$$

را در نظر بگیرید . هنوز جوابی برای (۴.۸) نداریم و تنها یک مولد بی نهایت کوچک یعنی $X=y\partial_y$ موجود است. مختص‌های کانونی ساده‌تر عبارتند از:

$$r=x,\quad s=\ln|y|$$

که به

$$\frac{ds}{dr}=\frac{y'}{y},\quad \frac{d^2s}{dr^2}=\frac{y''}{y}-\frac{y'^2}{y^2}$$

امتداد داده می شوند. بنابراین معادله دیفرانسیل معمولی (۸.۴) به معادله ریکاتی

$$\frac{dv}{dr}=(\frac{3}{r}-2r)v+4-v^2,\quad v=\frac{ds}{dr}=\frac{y'}{y} \tag{۹.۴}$$

کاهش می‌یابد. این کاهش روشی استاندارد است که با بدست آوردن جواب معادله کاهش یافته، جواب عمومی اصلی معادله دیفرانسیل معمولی بدست می‌آید.

معادله ریکاتی (۹.۴) یک جواب ساده را دارا می‌باشد:

$$v = -2r. \tag{۱۰.۴}$$

سپس جوابهای باقیمانده به شکل

$$v = -2r + w^{-1}, \tag{۱۱.۴}$$

می باشند، بطوریکه w در معادله دیفرانسیل معمولی خطی

$$\frac{dw}{dr} = 1 - (\frac{3}{r} + 2r)w$$

صدق می‌کند. بنابراین

$$w = \frac{c_1}{r^3}e^{-r^2} + \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r^3}. \tag{۱۲.۴}$$

از جواب نمایی (۱۰.۴) نتیجه می‌شود:

$$\ln|y| = s = -r^2 + c_2 = -x^2 + c_2.$$

به طریق مشابه ، از جواب عمومی (۱۱.۴) بدست می‌آید:

$$\ln|y| = \ln|c_1 e^{-x^2} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)| + c_2.$$

از ترکیب این نتایج در تعریف ثابت‌های دلخواه جدید، جواب عمومی (۴.۸) بصورت

$$y = \tilde{c_1}e^{-x^2} + \tilde{c}_2(x^2 - 1) \tag{۱۳.۴}$$

می‌باشد. در مثال فوق، مناسب تر بود که $v = \dot{s}$ در نظر بگیریم. بطور معمول این انتخاب مناسبی برای v نمی‌باشد، همانگونه که در مثال ذیل نشان داده شده است.

۲.۴ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم غیر خطی

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + (y - \frac{1}{y})y' \tag{۱۴.۴}$$

یک گروه لی یک پارامتری از تقارنها با مولد بی نهایت کوچک $X = \partial_x$ باشد. این انتقال‌ها، تنها تقارنهای نقطه ای لی (۴.۱۴) می‌باشند. مختص‌های کانونی ساده تر بدیهی هستند:

$$(r, s) = (y, x)$$

اگر v را طوری برگزینیم که برابر با $\dot{s} = (y')^{-1}$ باشد، معادله دیفرانسیل معمولی (۴.۱۴) به

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{y''}{y'^3} = -\frac{v}{r} + (\frac{1}{r} - r)v^2$$

کاهش می‌یابد. معادله فوق یک معادله برنولی است که آنرا بوسیله دوباره نویسی برحسب یک معادله خطی برای v^{-1} می توان حل نمود.
به وضوح، ساده تر است که از ابتدا

$$v = y' \quad , \quad \text{یعنی} \quad v = (\dot{s})^{-1},$$

انتخاب نماییم. با انتخاب فوق برای v ، معادله دیفرانسیل معمولی (۴.۱۴) بطور مستقیم به معادله دیفرانسیل معمولی خطی

$$\frac{dv}{dr} = \frac{y''}{y'} = \frac{v}{r} + r - \frac{1}{r} \qquad (۴.۱۵)$$

کاهش می‌یابد. جواب عمومی (۴.۱۵)

$$v = r^2 - 2c_1 r + 1$$

می‌باشد (عامل ۲ - قبل از ثابت دلخواه c_1 برای سهولت قرار گرفته است). بنابراین

$$s = \int \frac{1}{v(r)} = \int \frac{dr}{r^2 - 2c_1 r + 1}.$$

با یک انتگرال گیری (ساده)، جواب عمومی (۴.۱۴) را بدست می‌آوریم:

$$y = \begin{cases} c_1 - \sqrt{c_1^2 - 1}\tanh(\sqrt{c_1^2 - 1}(x + c_2)), & c_1^2 > 1; \\ c_1 - (x + c_2)^{-1}, & c_1^2 = 1; \\ c_1 + \sqrt{1 - c_1^2}\tan(\sqrt{1 - c_1^2}(x + c_2)), & c_1^2 < 1. \end{cases} \qquad (۴.۱۶)$$

در هر یک از مثال‌های قبل، برای یافتن $\dot{s}$ بعنوان تابعی از r می توانیم معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته را حل نماییم. این عمل معمول نمی‌باشد. شناخت یک گروه یک پارامتری از تقارنها ما را قادر می سازد تا مرتبه معادله دیفرانسیل معمولی را کاهش دهیم ، اما ضمانتی برای اینکه معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته به سادگی قابل حل باشد وجود ندارد! به هر حال ، فرض کنید بیش از یک مولد بی نهایت کوچک را بشناسیم یعنی $R = \dim(\mathcal{L}) \geq 2$. آیا می‌توان از تقارنهای لی مذکور برای کاهش مرتبه معادله دیفرانسیل معمولی بوسیله R استفاده نمود یا اگر $n \leqslant R$ باشد آنرا بطور کامل حل کرد؟ برای پاسخ به این پرسش، باید درباره تقارنها بیشتر بدانیم، همانگونه که در مثال بعد نشان داده شده است:

۳.۴ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی

$$y''' = \frac{1}{y^3}, \quad x > 0 \qquad (۴.۱۷)$$

که تقارنهای نقطه‌ای لی آن بوسیله

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x + \frac{3}{4}y\partial_y$$

تولید می‌شوند را در نظر بگیرید. گروه تولید شده توسط X_1 شامل انتقال‌ها می‌باشد، در حالیکه X_2 تقارنهای مقیاسی را تولید می‌کند. در ابتدا معادله دیفرانسیل معمولی (۴.۱۷) را با استفاده از X_1 کاهش می‌دهیم؛ از مختصات کانونی $(r_1, s_1) = (y, x)$ ،

$$\frac{d^2v_1}{dr_1^2} = \frac{1}{r_1{}^3v_1{}^2} - \frac{1}{v_1}(\frac{dv_1}{dr_1})^2 \quad , \quad \text{که} \quad v_1 = (\dot{s})^{-1} = y' \qquad (۴.۱۸)$$

بدست می‌آید.

تنها تقارنهای نقطه‌ای لی معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته (۴.۱۸) مقیاس‌ها هستند که بوسیله

$$\tilde{X}_2 = \frac{3}{4}r_1\partial_{r_1} - \frac{1}{4}v_1\partial_{v_1} \qquad (۴.۱۹)$$

تولید می‌شوند.

این تقارنها ازمعادله دیفرانسیل معمولی اولیه (۴.۱۷) به ارث می رسند و از گروه لی یک پارامتری بکار نرفته که بوسیله X_2 تولید شده است بدست می‌آیند. برای آنکه دریابیم چگونه این گروه روی مجموعه متغیرهای کاهش یافته $(r_1, v_1) = (y, y')$ عمل می کند، لازم است X_2 را امتداد دهیم:

$$X_2^{(1)} = x\partial_x + \frac{3}{4}y\partial_y - \frac{1}{4}y'\partial_{y'}.$$

مولد کاهش یافته $\tilde{X}_2$ توسط متمرکز شدن به عباراتی در $X_2^{(1)}$ که روی (r_1, v_1) عمل می‌کنند بدست می‌آید. در این مثال، $\tilde{X}_2$ مستقل از $s_1 = x$ می‌باشد، لذا تقارنهای نقطه‌ای معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته را تولید می‌کند. این تقارنها بار دیگر ما را قادر به کاهش مرتبه می کنند. اگر از

$$r_2 = r_1{}^{1/3}v_1 \quad , \quad v_2 = r_1{}^{4/3}\frac{dv_1}{dr_1}$$

استفاده نماییم ، معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته،

$$\frac{dv_2}{dr_2} = \frac{3 - 4r_2^2v_2 - 3r_2v_2^2}{r_2^2(r_2 + 3v_2)} \qquad (۴.۲۰)$$

می‌باشد. تقارنهای (۴.۲۰) شناخته شده نمی‌باشند، لذا نمی توانیم عملیات بیشتری انجام دهیم. با وجود این، در استفاده از هر دو تقارن لی رابطه (۴.۱۷) به کاهش مرتبه به دو موفق بودیم. شگفت انگیز است که کلید این موفقیت ابتدا بکار بردن X_1 است. اگر از هر مولد بی نهایت کوچک دیگری در ابتدا استفاده نماییم، معادله دیفرانسیل معمولی حاصل شده تقارنهای بکار نرفته را جانشین نمی‌کند. برای مثال، اگر ابتدا از X_2 استفاده نماییم، معادله دیفرانسیل معمولی (۴.۱۷) به

$$\frac{d^2v}{dr^2} = \frac{16 - 5r^3v}{r^3(3r - 4v)^2} + \frac{4(\frac{dv}{dr})^2 - 9(\frac{dv}{dr})}{3r - 4v} \qquad (۴.۲۱)$$

که در آن

$$r = x^{-3/4}y \quad , \quad v = x^{1/4}y'$$

است، کاهش می‌یابد. معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته (۴.۲۱) دارای تقارنهای نقطه‌ای لی نمی‌باشد.

در بخش بعدی، بطور کامل به بررسی مجموعه مولدهای بی نهایت کوچک می پردازیم. این امر ما را قادر خواهد ساخت که دریابیم، اگر تقارنهای دیگر بوسیله معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته به ارث برسند، چه تقارنهایی باید در ابتدا بکار گرفته شوند.

بخش ۲.۴ تقارنهای تغییراتی

اگر یک معادله دیفرانسیل معمولی از یک مسئله تغییراتی بدست آمده باشد، این امکان وجود دارد که یک گروه لی یک پارامتری از تقارنهای نقطه ای را برای کاهش تا دو مرتبه بکار ببریم. برای شروع، یک مسئله تغییراتی را در نظر بگیرید:

$$\delta W = 0; \qquad (۲۲.۴)$$

در اینجا ، عمل W ، به شکل

$$W = \int L(x,y,y')dx, \qquad (۲۳.۴)$$

می‌باشد که $L(x,y,y')$ یک لاگرانژین است. این مسئله تغییراتی منجر به معادله اولر - لاگرانژ

$$L_y - D_x(L_{y'}) = 0 \qquad (۲۴.۴)$$

می‌شود.

فرض کنید یک تبدیل نقطه ای ، W را به

$$\hat{W} = \int L(\hat{x},\hat{y},\hat{y}')d\hat{x} \qquad (۲۵.۴)$$

بنگارد، بطوریکه

$$\hat{W} = W. \qquad (۲۶.۴)$$

چنین تبدیلی را یک تقارن تغییراتی می‌نامیم. معادله اولر - لاگرانژ برای مسئله تبدیل یافته،

$$\hat{L}_{\hat{y}} - D_{\hat{x}}(\hat{L}_{\hat{y}'}) = 0, \quad \text{که} \quad \hat{L} = L(\hat{x},\hat{y},\hat{y}')$$

می‌باشد و بنابراین تقارن تغییراتی نیز یک تقارن نقطه ای معادله اولر - لاگرانژ است. اگر بتوانیم تقارنهای نقطه‌ای لی معادله اولر - لاگرانژ را بیابیم، معمولاً بررسی اینکه کدام یک از تقارنها، تقارنهای تغییراتی نیز می‌باشند ساده است.

فرض کنید $X = \xi\partial_x + \eta\partial_y$ مولد یک گروه لی یک پارامتری از تقارنهای نقطه‌ای معادله اولر - لاگرانژ (۴.۲۴) باشد. پس $\hat{W}$ بصورت توانی از ε می تواند بسط داده شود :

$$\hat{W} = \int \{L(x,y,y') + \varepsilon X^{(1)}L + O(\varepsilon^2))(1 + \varepsilon(D_x\xi) + O(\varepsilon^2)\}dx.$$

عبارات مرتبه اول را با یکدیگر جمع نمایید، اگر

$$X^{(1)}L + (D_x\xi)L = 0 \qquad (۲۷.۴)$$

باشد، $\hat{W} = W$ است. بویژه، اگر $L_y = 0$ باشد، $X = \partial_y$ تقارنهای تغییراتی را تولید می کند. نتیجه حاصل شده از این شرط این است که معادله اولر - لاگرانژ،

$$D_x(L_{y'}) = 0,$$

می‌باشد و بنابراین

$$L_{y'}(x,y') = c_1. \qquad (۲۸.۴)$$

معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته (۴.۲۸) تقارنهای لی تولید شده بوسیله $X = \partial_y$ را حفظ می‌کند، لذا کاهش بیشتر مرتبه امکان پذیر است. این امر به سادگی انجام می‌پذیرد، از (۴.۲۸) برای نوشتن

$$y' = F(x;c_1)$$

استفاده نمایید (برای تابعی مثل F) و سپس انتگرال گیری کنید:

$$y = \int F(x;c_1)dx + c_2.$$

روش فوق را برای تقارنهای نقطه‌ای لی تغییراتی دیگر نیز می‌توان استفاده کرد. یک مولد خاص X که در رابطه (۴.۲۷) صدق می‌کند باید مسئله تغییراتی را برحسب مختصات کانونی باز نویسی نماید. سپس $X = \partial_s$ تقارنهای تغییراتی

$$\delta W = \delta \int \tilde{L}(r,s,\dot{s})dr = 0, \qquad (۲۹.۴)$$

را تولید می‌کند که با استفاده از تغییر متغیر در انتگرال داریم:

$$\tilde{L}(r,s,\dot{s}) = \frac{L}{D_x r}. \qquad (۳۰.۴)$$

با بازنویسی شرط (۴.۲۷) بر حسب مختصات کانونی، $\tilde{L}_s = 0$ بدست می‌آید. بنابراین معادله اولر - لاگرانژ

$$\tilde{L}_s - D_r(\tilde{L}_{\dot{s}}) = 0,$$

به

$$\tilde{L}_{\dot{s}}(r,\dot{s}) = c_1 \qquad (۳۱.۴)$$

کاهش می‌یابد.
با بکارگیری (۴.۳۱) برای نوشتن $\dot{s}$ بعنوان تابعی از r و c_1 و سپس انتگرال گیری برای یافتن s ، حل کامل می‌گردد.

۴.۴ مثال. یکی از مسائل اساسی مکانیک کلاسیک، محاسبه حرکت شی‌ای است که بوسیله دستگاه بقا بیان می‌شود. اصل همیلتونین بیان می‌کند که لاگرانژین،

$$L = T - U,$$

می‌باشد که T انرژی جنبشی شی و U انرژی پتانسیل می‌باشد. چنین سیستم‌های ساده‌ای به شکل

$$L = \frac{1}{2}y'^2 - U(y) \qquad (۳۲.۴)$$

هستند. در اینجا $y(x)$ موقعیت شی در زمان x را نشان می‌دهد. معادله اولر - لاگرانژ بصورت ذیل است:

$$G(y) = \frac{dv}{dy}, \quad \text{که} \quad y'' = -G(y). \tag{۳۳.۴}$$

هر معادله دیفرانسیل معمولی (۴.۳۳) دارای تقارنهای لی با مولد $X = \partial_x$ تولید می باشد. در واقع برای اغلب توابع G، این تقارنها تنها تقارنهای لی هستند . تقارنهای مذکور تغییراتی هستند ، زیرا

$$X^{(1)}L + (D_x\xi)L = L_x = 0.$$

با استفاده از مختصات کانونی $(r, s) = (y, x)$ ، مسئله تغییراتی با (۴.۲۹) هم ارز می‌شود، که

$$\tilde{L}(r, \dot{s}) = \frac{L}{D_x r} = \frac{y'}{2} - \frac{U(y)}{y'} = \frac{1}{2\dot{s}} - U(r)\dot{s}.$$

با بکارگیری (۴.۳۱)، اولین انتگرال بصورت ذیل بدست می‌آید:

$$\tilde{L}_{\dot{s}} = -\frac{1}{2\dot{s}^2} - U(r) = c_1.$$

به متغیرهای اولیه باز می‌گردیم،

$$\frac{1}{2}y'^2 + U(y) = -c_1, \tag{۳۴.۴}$$

و بنابراین

$$x = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{-2(U(y) + c_1)}} + c_2 \tag{۳۵.۴}$$

می باشد. معادلات دیفرانسیل معمولی به فرم (۴.۳۳) معمولاً توسط روش استانداردی از ضرب طرفین بوسیله y' و سپس انتگرال گیری برای یافتن معادله دیفرانسیل معمولی جدایی پذیر (۴.۳۴) حل می‌شوند. این روش چیزی بیشتر از استخراج یک گروه لی خاص از تقارنهای تغییراتی نمی‌باشد. برای رده‌های دیگر مسئله تغییراتی ، روش حل ممکن است بدیهی نباشد. با این حال اگر تقارنهای تغییراتی موجود باشند می‌توان آنها را یافت و بطور سیستماتیکی استفاده نمود.

۵.۴ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی

$$y'' = \frac{y'}{x} + \frac{3y^2}{2x^3}, \tag{۳۶.۴}$$

که از مسئله تغییراتی که لاگرانژین آن

$$L(x, y, y') = \frac{y'^2}{2x} + \frac{y^3}{2x^4} \tag{۳۷.۴}$$

می‌باشد بدست می‌آید را در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیل معمولی فوق تقارنهای مقیاسی‌ای با مولد

$$X = x\partial_x + y\partial_y;$$

دارد. این معادله دیفرانسیل معمولی تقارن نقطه‌ای لی دیگری ندارد. اگرچه تقارنهایی که بوسیله X تولید می‌شوند تغییراتی هستند، زیرا

$$X^{(1)}L+(D_x\xi)L=xL_x+yL_y+L=0$$

است. با استفاده از مختصات کانونی

$$(r,s)=(\frac{y}{x},\ln|x|),$$

لاگرانژین تبدیل یافته به فرم:

$$\tilde{L}=\frac{L}{D_xr}=\frac{y'^2+(\frac{y}{x})^3}{2(y'-\frac{y}{x})}=\frac{1}{2\dot{s}}+r+\frac{1}{2}(r^3+r^2)\dot{s}$$

می‌باشد. بنابراین معادله اولر - لاگرانژ به

$$-\frac{1}{2\dot{s}^2}+\frac{1}{2}(r^3+r^2)=c_1,$$

کاهش می‌یابد و لذا جواب عمومی بصورت ذیل می‌باشد:

$$\ln|x|=\pm\int^{\frac{y}{x}}\frac{dr}{\sqrt{r^3+r^2-2c_1}}. \tag{۳۸.۴}$$

مفاهیم مشابه به مسائل تغییراتی مرتبه بالاتر انتقال می‌یابد. لاگرانژین

$$L=L(x,y,y',\cdots,y^{(p)}), \tag{۳۹.۴}$$

را در نظر بگیرید، معادله اولر - لاگرانژ

$$L_y-D_x(L_{y'})+D_x^2(L_{y''})-\cdots+(-1)^pD_x^p(L_{y^{(p)}})=0 \tag{۴۰.۴}$$

می‌باشد. بعنوان مثال با استدلالی مشابه برای $p=1$ ، اگر

$$X^{(p)}L+(D_x\xi)L=0 \tag{۴۱.۴}$$

باشد، تقارنهای نقطه‌ای لی معادله اولر - لاگرانژ، تقارنهای تغییراتی می‌شوند.

فرض کنید $X=\partial_y$ باشد. (در صورت لزوم، ابتدا مسئله را در مختصات کانونی بازنویسی نمایید) سپس از (۴.۴۱) مستدل می‌شود که $L_y=0$ است و بنابراین معادله اولر - لاگرانژ به

$$L_{y'}-D_x(L_{y''})+\cdots+(-1)^{p-1}D_x^{p-1}(L_{y(p)})=c_1 \tag{۴۲.۴}$$

کاهش می‌یابد. معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته مذکور دارای تقارنهای نقطه‌ای لی‌ای می‌باشد که بوسیله X تولید می‌شوند و بنابراین مجدداً می‌تواند به

$$\tilde{L}_v-D_r(\bar{L}_{\dot{v}})+\cdots+(-1)^{p-1}D_r^{p-1}(\bar{L}_{v^{(p-1)}})=0, \tag{۴۳.۴}$$

کاهش یابد که

$$(r,v)=(x,y'),$$
$$\bar{L}(r,v,\cdots,v^{(p-1)})=L-c_1v,$$

و

$$D_r=\partial_r+\dot{v}\partial_v+\ddot{v}\partial_{\dot{v}}+\cdots$$

می‌باشد. به وضوح، رابطه (۴.۴۳) معادله اولر - لاگرانژ برای مسئله تغییراتی کاهش یافته

$$\delta\int\bar{L}dr=0$$

است. اگر این مسئله را بتوان حل نمود (با کمک تقارنهای تغییراتی این امکان وجود دارد)، آنگاه جواب مسئله اولیه بوسیله انتگرال گیری

$$y=\int^x v(r;c_1,\cdots,c_{2p-1})dr+c_{2p}$$

بدست می‌آید.

بخش ۳.۴ جوابهای ناوردا

بسیاری از معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از تقارنهای نقطه‌ای لی خود، بطور کامل نمی‌توانند حل شوند. با این حال، این امر امکان پذیر است که جوابهایی که تحت گروه تولید شده بوسیله یک X خاص ناوردا هستند را بدست آوریم. بنابر (۲.۱۵)، هر منحنی C که روی صفحه (x,y) که تحت گروه تولید شده بوسیله X ناورداست، در

$$Q(x,y,y')=\eta-y'\xi=0 \qquad (۴.۴۴)$$

روی C صدق می‌کند. بویژه لازم است که معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول (۴.۴۴) را حل نماییم و بررسی کنیم که کدامیک از این جوابها(البته اگر جوابی داشته باشد) در معادله دیفرانسیل معمولی مفروض صدق می‌کنند.

۶.۴ مثال. معادله بلاسوس[۱]

$$y'''=-yy'', \qquad (۴.۴۵)$$

دارای تقارنهای انتقال و مقیاس می‌باشد که بوسیله

$$X_1=\partial_x \quad , \quad X_2=x\partial_x-y\partial_y \qquad (۴.۴۶)$$

تولید شده‌اند.

این تقارنها قادرند معادله بلاسوس را به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول که جوابش مجهول است کاهش دهند. لذا تنها احتمال برای یافتن جوابهای دقیق این است که به دنبال جوابهای ناوردا

[۱] Blasius

باشیم. برای $X = X_1$ ، شرط منحنی ناوردا (۴.۴۴) به $y' = 0$ کاهش می‌یابد. لذا هر منحنی که تحت X_1 ناورداست به شکل

$$y = c. \tag{۴.۴۷}$$

می‌باشد. تمام منحنی‌هایی که بدین شکل هستند جوابهای معادله بلاسوس می‌باشند.

اکنون جوابهایی که تحت $X = X_2$ ناوردا هستند را تعیین می‌کنیم. شرط منحنی ناوردا

$$Q = -y - xy' = 0.$$

می‌باشد. بنابراین منحنی‌های ناوردا

$$y = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

می‌باشند. اگر

$$y = 0 \quad \text{یا} \quad y = \frac{3}{x} \tag{۴.۴۸}$$

باشد، معادله بلاسوس صادق است. تنها جوابی که تحت X_1 و X_2 ناورداست، منحنی $y = 0$ می‌باشد.

آیا جوابهای ناوردای دیگری وجود دارند؟ هنوز تمامی گروههای یک پارامتری ممکن را در نظر نگرفته‌ایم. این امر به سادگی انجام می‌پذیرد، زیرا هر گروه لی یک پارامتری باقیمانده بوسیله $X = kX_1 + X_2$ برای هر k مخالف صفر تولید می‌شود. شرط ناوردایی منحنی

$$Q = -y - (x+k)y' = 0,$$

است که به جوابهای ناوردا

$$y = 0, \quad y = \frac{3}{x+k} \tag{۴.۴۹}$$

منتهی می‌گردد.

جوابهای فوق با در نظر گرفتن عمل گروه تولید شده بوسیله X_1 بر روی هریک از جوابهای ناوردا (۴.۴۸) بدست می‌آیند. تقارنهای تولید شده بوسیله X_1

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \varepsilon, y), \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \tag{۴.۵۰}$$

هستند. عمل (۴.۵۰) را بر روی جواب ناوردا $y = 3/x$ در نظر بگیرید. این جواب بصورت

$$\hat{y} = \frac{3}{\hat{x} - 3}; \tag{۴.۵۱}$$

می‌تواند بازنویسی شود که تحت

$$\begin{aligned} X_2 &= (X_2\hat{x})\partial_{\hat{x}} + (X_2\hat{y})\partial_{\hat{y}} \\ &= x\partial_{\hat{x}} - y\partial_{\hat{y}} \\ &= (\hat{x} - 3)\partial_{\hat{x}} - \hat{y}\partial_{\hat{y}}. \end{aligned}$$

ناورداست. اکنون به معرفی یک نمادگذاری سودمند می‌پردازیم؛ اگر

$$X_i = \xi_i(x,y)\partial_x + \eta_i(x,y)\partial_y$$

باشد، فرض کنید

$$\hat{X}_i = \xi_i(\hat{x},\hat{y})\partial_{\hat{x}} + \eta_i(\hat{x},\hat{y})\partial_{\hat{y}}. \qquad (۵۲.۴)$$

بنابراین (۴.۵۱) تحت

$$X_2 = \hat{X}_2 - \varepsilon \hat{X}_1,$$

ناورداست. با برداشتن علامت هشتک، $y = \frac{3}{x}$ به

$$y = \frac{3}{x-\varepsilon}, \qquad (۵۳.۴)$$

نگاشته می‌شود که تحت $X_2 - \varepsilon X_1$ ناوردا می‌باشد. محاسبه مشابه نشان می‌دهد که $y = 0$ به خودش توسط عمل گروه تولید شده بوسیله X_1 نگاشته می‌شود.

مختصات کانونی ناوردا $r(x,y)$ در

$$\xi D_x r + Q r_y = \xi r_x + \eta r_y = 0,$$

صدق می‌کند. لذا هر جواب ناوردایی که در آن $\xi \neq 0$ باشد به شکل $r(x,y) = c$ است. پس ممکن است جوابهای ناوردا$y = f(x)$ نیز موجود باشند، به قسمی که

$$\xi(x, f(x)) = \eta(x, f(x)) = 0 \qquad (۵۴.۴)$$

باشد.

در بیان کلی اینها به آسانی توسط حل $\xi(x,y) = 0$ یا $\eta(x,y) = 0$ بدست می‌آیند. سپس بررسی می کنیم که جواب در معادله دیفرانسیل معمولی (۴.۴۵) صدق نماید.

روش دیگری برای یافتن جوابهای ناوردایی که در آنها ξ ناصفر است، موجود می‌باشد که بویژه در حالتی که حل نمودن رابطه (۴.۴۴) ساده نباشد سودمند است. برای تقارنهای نقطه‌ای لی، ξ و η فقط توابعی از x وy می‌باشند. بنابراین اگر

$$y' = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}, \qquad (۵۵.۴)$$

روی منحنی‌های ناوردا که برای آنها $\xi(x,y) \neq 0$، (۴.۴۴) برقرار است. مشتقات بالاتر بوسیله فرمول امتداددهی معمولی محاسبه می‌شوند. هنگامیکه نتایج در معادله دیفرانسیل معمولی جایگذاری می شوند، یک معادله جبری که تمامی منحنی‌های جواب ناوردا را تعریف می‌کند بدست می‌آید. مثال بعد روش کلی را شرح می‌دهد:

۷.۴ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی

$$y''' = \frac{1}{y^3}, \quad x > 0, \qquad (۵۶.۴)$$

را بخاطر بیاورید که $\mathcal{L}$ بوسیله

$$X_1 = \partial_x \quad , \quad X_2 = x\partial_x + \frac{3}{4} y \partial_y$$

تولید شده است.
برخلاف مثال قبل، جوابهایی که تحت گروه تولید شده بوسیله X_1 ناوردا باشند وجود ندارند. شرط منحنی ناوردا برای $X = X_2$

$$Q = \frac{3}{4}y - xy' = 0$$

می‌باشد.
لذا، روی هر منحنی ناوردا

$$y' = \frac{3y}{4x} \qquad (۵۷.۴)$$

می‌باشد. اکنون از(۴.۵۷) برای محاسبه y'' و y''' روی منحنی‌های ناوردا استفاده می‌نماییم. ابتدا از (۴.۵۷) نسبت به x مشتق می گیریم:

$$y'' = \frac{3y'}{4x} - \frac{3y}{4x^2}.$$

سپس برای تعیین y'' بعنوان تابعی از x و y از رابطه (۴.۵۷) استفاده می‌کنیم:

$$y'' = \frac{9y}{16x^2} - \frac{3y}{4x^2} = -\frac{3y}{16x^2},$$

بطور مشابه

$$y''' = -\frac{3y'}{16x^2} + \frac{3y}{8x^3} = \frac{15y}{64x^3}, \qquad (۵۸.۴)$$

روی هر منحنی ناوردا می‌باشد.
با مقایسه (۴.۵۸) با (۴.۵۶) مشاهده می‌کنیم که منحنی‌های جواب ناوردا،

$$y = \pm(\frac{64}{15})^{1/4} x^{3/4} \qquad (۵۹.۴)$$

می‌باشند. همانند مثال قبل، یک خانواده کامل از جوابهای ناوردا وجود دارد که از عمل گروه تولید شده بوسیله X_1 روی جوابهایی که تحت X_2 ناوردا هستند به وجود می‌آیند. بویژه

$$y = \pm(\frac{64}{15})^{1/4} (x-\varepsilon)^{3/4} \qquad (۶۰.۴)$$

است که تحت $X_2 - \varepsilon X_1$ ناوردا می‌باشد.

مطالعه بیشتر

بلومن و کومی (1989) و اولور (1993) تقارنهای تغییراتی را با جزئیات بیشتر شرح داده‌اند. این تقارنها در زمینه معادله با مشتقات جزئی حائز اهمیت می باشند، که (بوسیله قضیهٔ نوتر) برای استنتاج کردن قانون بقا می توانند بکار گرفته شوند .
برخی از جوابهای ناوردا معادله دیفرانسیل معمولی دارای خواص توپولوژیکی خاصی می‌باشند که آنها را از جوابهای نزدیک به جواب مورد نظر متمایز می‌سازند. بخش ۳.۶ از بلومن و کومی (1989) شامل تعداد زیادی مثال از یک چنین جوابهایی می‌باشد.

تمرین‌ها

۱.۴ مولدهای تقارن نقطه‌ای لی برای معادله دیفرانسیل معمولی $y'' = y'/y^2$ را محاسبه نمایید. مختصات کانونی متناظر با $X_1 = \partial_x$ را برای کاهش این معادله دیفرانسیل معمولی به یک معادله مرتبه اول ساده بکار برید و در نتیجه معادله دیفرانسیل معمولی اصلی را حل کنید. اکنون سعی کنید معادله را با استفاده از مولد تقارن دیگری حل نمایید. چه اتفاقی رخ می دهد؟

۲.۴ معادله دیفرانسیل معمولی $y'' = (3y'^2)/(2y) + 2y^3$ تقارنهای لی (در میان دیگر تقارنها) دارد که بوسیله $X = \partial_x$ تولید شده است. این تقارنها را برای کاهش معادله دیفرانسیل معمولی به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول که توسط روش استاندارد قابل حل است بکار ببرید. سپس معادله اصلی را حل نمایید.

۳.۴ معادله دیفرانسیل معمولی $y'' = 0$ معادله اولر - لاگرانژ برای مسئله تغییراتی که لاگرانژین آن $L = y'^2/2$ است می‌باشد. از (3.28) برای یافتن 3 مولد مستقل خطی تقارنهای تغییراتی این مساله استفاده کنید.

۴.۴ معادله اولر - لاگرانژ را برای مسئله تغییراتی با لاگرانژین

$$L = \frac{1}{2}y'^2 - \frac{y^2}{8x^2} + \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{2y^2}$$

بدست بیاورید. نشان دهید تقارنهای مقیاسی معادله اولر - لاگرانژ ، تقارنهای تغییراتی می باشند و بنابراین جواب عمومی مساله تغییراتی را بیابید.

۵.۴ نشان دهید که $X = xy\partial_x + y^2\partial_y$ تقارنهای نقطه‌ای لی $y' = (y^3)/((x+1)y^2 - x^2)$ که جوابهای آن تحت این تقارنها ناوردا هستند را تولید می‌کند.

۶.۴ کلید جوابهای (۱.۱۶) که تحت تقارنهای دوران تولید شده بوسیله $X = -y\partial_x + x\partial_y$ ناوردا هستند را بیابید. از شکل (۱.۵) برای شرح دادن مفهوم توپولوژیکی این نتیجه استفاده نمایید.

۷.۴ جواب ناوردا - گروهی نابدیهی معادله توماس - فرمی $y'' = x^{-1/2}y^{3/2}$ را بیابید.

۸.۴ معادله پوازون-بولزمن[۲]

$$y'' = \frac{-k}{x}y' - \delta e^y, \quad k \neq 0, \quad \delta \in \{-1, 1\}$$

تقارنهای نقطه‌ای لی دارد که بوسیله $X = x\partial_x - 2\partial_y$ تولید می‌شود. این معادله دیفرانسیل معمولی از مساله تغییراتی با لاگرانژین

$$L = \frac{x^k y'^2}{2} - \delta x^k e^y$$

بدست می‌آید. مقدار k را برای X ای که تقارنهای تغییراتی را تولید می‌کند بیابید و معادله دیفرانسیل معمولی را در این حالت حل نمایید. برای همه k های ناصفر دیگر، کلیه جوابهایی که تحت گروه تولید شده بوسیله X ناوردا هستند را بیابید.

[۲] Poisson-Boltzman

۹.۴ خانواده مسائل تغییراتی با لاگرانژینی به شکل

$$L = \frac{x^2 y'^2}{2} - \frac{x^2 y^k}{k}, \quad k \neq 0$$

را در نظر بگیرید. مقدار k را برای تقارنهای تغییراتی موجود بیابید و بنابراین معادله اولر - لاگرانژ را در هر حالت محاسبه نمایید.

فصل ۵

تقارنهای لی چند پارامتری

چون نمی توانستم تحمل کنم، جبرا فریاد براوردم، و با علاقه به X زل زدم: و نمی دانم چرا هرگز فکر نمی کردم.

(ج.ک. چسترتون: همدردی واقعی)

بخش ۱.۵ ناورداهای دیفرانسیلی و کاهش مرتبه

یک مولد منحصر بفرد تقارنهای نقطه ای لی ما را قادر می‌سازد تا مرتبه معادله دیفرانسیل معمولی را یکبار دیگر کاهش دهیم. همچنین مثالی از یک کاهش دوگانه مرتبه را با بکارگیری دو تقارن نقطه ای لی دیده ایم. در واقع می‌توان یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n که دارای $R \leq n$ تقارن نقطه ای لی است را به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه $n-R$ (یا به معادله ای جبری در حالت $n=R$) کاهش داد. این بخش شرح می‌دهد که چگونه چنین کاهش‌هایی به دست می‌آیند. اگرX تقارنهای نقطه ای لی معادله دیفرانسیل معمولی

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \qquad n \geq 2 \tag{۱.۵}$$

را تولید کند آنگاه بر حسب مختصات کانونی (r,s)، معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۵) به

$$v^{(n-1)} = \Omega(r, v, \cdots, v^{(n-2)}), \tag{۲.۵}$$

کاهش می‌یابد. که $v = v(r, \dot{s})$ تابعی دلخواه است بطوریکه $v_{\dot{s}} \neq 0$. معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته(۲.۵) شامل کلیه توابعی است که تحت عمل (امتداد یافته) گروهی که توسط $X = \partial_s$ تولید شده، ناوردا باشند. چنین توابعی**ناورداهای دیفرانسیلی** نامیده می‌شوند.

تابع غیر ثابت $I(x, y, y', ..., y^{(k)})$ یک ناوردای دیفرانسیلی مرتبهk گروه تولید شده توسطX است هر گاه

$$X^{(k)} I = 0 \tag{۳.۵}$$

در مختصات کانونی، $X^{(k)} = \partial_s$ است. بنابراین هر ناوردای دیفرانسیلی مرتبه k برای تابعی مانند F به شکل $I = F(r, \dot{s}, ..., s^{(k)})$ یا بطور معادل به شکل زیر است:

$$I = F(r, v, \cdots, v^{(k-1)}) \qquad (۴.۵)$$

مختصات کانونی ناوردای $r(x,y)$ تنها ناوردای دیفرانسیلی مرتبه صفر(در حد وابستگی تابعی) می‌باشد. کلیه ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه اول توابعی از $r(x,y)$ و$v(x,y,y')$ می‌باشند. بعلاوه همه ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه دو یا بیشتر توابعی از r و v و مشتقات v نسبت به r می‌باشند. از اینرو r و v **ناورداهای دیفرانسیلی اساسی** نامیده می‌شوند.

اغلب می‌توان یک زوج مناسب از ناورداهای دیفرانسیلی اساسی یافت، بدون اینکه لازم باشد s را مشخص کنیم. از (۳.۵) نتیجه می‌شود هر ناوردای دیفرانسیلی مرتبه k در

$$\xi I_x + \eta I_y + \cdots + \eta^{(k)} I_{y(k)} = 0,$$

صدق می‌کند. بنابراین (از روش مشخصه‌ها) I یک انتگرال اولیه

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \cdots = \frac{dy^{(k)}}{\eta^{(k)}} \qquad (۵.۵)$$

است. بخصوص r انتگرال اولیه

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$$

و v انتگرال اولیه

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy'}{\eta^{(1)}}$$

می‌باشد. همانطور که در مثال زیر نشان داده شده ،گاهی اوقات لازم است v را توسط r بدست آوریم.

۱.۵ مثال. ناورداهای دیفرانسیلی اساسی گروه دورانها که توسط

$$X = -y\partial_x + x\partial_y \qquad (۶.۵)$$

تولید می‌شود را بیابید. $X_r = 0$ و $X^{(1)}v = 0$ است. بنابراین $r(x,y)$ انتگرال اولیه

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$$

می‌باشد که یک جواب $r = (x^2+y^2)^{1/2}$ است. به طور مشابهً، $v(x,y,y')$ انتگرال اولیه

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{1+y'^2} \qquad (۷.۵)$$

می‌باشد. فرض کنیم ناحیه به $x > 0$ محدود شده باشد که

$$\frac{dy}{x} = \frac{dy}{(r^2-y^2)^{1/2}}.$$

در اینصورت انتگرال های اولیه (۷.۵) به فرم زیر هستند

$$I = F\Big(r, \arctan(y') - \arcsin\Big(\frac{y}{r}\Big)\Big) = F\Big(r, \arctan(y') - \arctan\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big).$$

یک انتخاب مناسب برای v عبارت است از

$$v = \tan\Big(\arctan(y') - \arctan\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big) = \frac{xy' - y}{x + yy'}.$$

اثبات اینکه $v = r\dot{s}$ که $s = \arctan(\frac{y}{x})$ به خواننده واگذار می‌شود.

معادله دیفرانسیل معمولی ای که بیش از یک مولد تقارن نقطه ای لی دارد می‌تواند بر حسب ناورداهای دیفرانسیلی هر مولد نوشته شود. در نتیجه معادله دیفرانسیل معمولی مذکور می‌تواند بر حسب توابعی که تحت همه مولدهای تقارنی‌اش ناورداست نوشته شود. فرض کنید $\{X_1, ..., X_R\}$ پایه ای برای $\mathcal{L}$ باشد. ناورداهای دیفرانسیلی اساسی گروه تولید شده توسط $\mathcal{L}$، جوابهای دستگاه زیر هستند:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1^{(1)} & \dots & \eta_1^{(R)} \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2^{(1)} & \dots & \eta_1^{(R)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_R & \eta_R & \eta_R^{(1)} & \dots & \eta_R^{(R)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ \vdots \\ I_{y^{(R)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{۸.۵}$$

این دستگاه دو جواب مستقل تابعی دارد (مشروط بر اینکه ماتریس طرف چپ تساوی دارای رتبه R باشد.) که این جوابها با بکارگیری روش حذفی گوسی و روش مشخصه‌ها بدست می‌آیند. یک جواب مستقل از $y^{(R)}$ است و با r_R نمایش داده شده است. از نماد v_R برای نمایش دادن جواب دیگر که بطور غیر بدیهی به $y^{(R)}$ وابسته است استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه $\frac{dv_R}{dr_R}$ به $y^{(R+1)}$ وابسته است و لذا، معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۵) به ازای تابع دلخواه Ω به

$$v_R^{(n-R)} = \Omega(r_R, v_R, ..., v_R^{(n-R-1)}), \qquad v_R^{(k)} := \frac{d^k v_R}{dr_R^k},$$

کاهش می‌یابد. بنابراین یک گروه تقارنی R پارامتری ما را قادر می‌سازد تا مرتبه معادله دیفرانسیل معمولی را توسط R کاهش دهیم.

۲.۵ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی

$$y^{(iv)} = \frac{2}{y}(1 - y')y''' \tag{۹.۵}$$

یک گروه لی سه پارامتری از تقارنهای نقطه ای دارد که توسط

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x + y\partial_y, \qquad X_3 = x^2\partial_x + 2xy\partial_y \tag{۱۰.۵}$$

تولید شده است. ناورداهای دیفرانسیلی اساسی با حل دستگاه زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & -y'' & -2y''' \\ x^2 & 2xy & 2y & 2(y' - xy'') & -4xy''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ I_{y''} \\ I_{y'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

نخست مسئله را با استفاده از روش حذفی گاوس ساده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & -y'' & -2y''' \\ 0 & 0 & y & y' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ I_{y''} \\ I_{y'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (۱۱.۵)$$

سپس هر معادله از (۱۱.۵) را به منظور مشخص کردن ناورداهای دیفرانسیلی، همانطور که در ذیل آمده است، بکار می‌گیریم. معادله سوم، $yI'_y + y'I''_y = 0$ نتیجه می‌دهد:

$$I = I(x, y, 2yy'' - y'^2, y''').$$

با جایگذاری این نتیجه در معادله دوم داریم:

$$I = I(x, 2yy'' - y'^2, y^2y''').$$

سرانجام، معادله اول از (۱۱.۵) نتیجه می‌دهد:

$$I = I(2yy'' - y'^2, y^2y''').$$

بنابراین ناورداهای دیفرانسیلی اساسی ،گروه تولید شده توسط (۱۰.۵) بصورت زیر هستند:

$$r_3 = 2yy'' - y'^2, \qquad v_3 = y^2y'''. \qquad (۱۲.۵)$$

با یافتن ناورداهای دیفرانسیلی اساسی اکنون می‌توانیم ناورداهای دیفرانسیلی مراتب بالاتر را محاسبه کنیم. مثلاً

$$\frac{dv_3}{dr_3} = \frac{D_x v_3}{D_x r_3} = \frac{yy^{(iv)}}{2y'''} + y'.$$

بنابراین معادله دیفرانسیل معمولی (۹.۵) با

$$\frac{dv_3}{dr_3} = 1$$

معادل می‌باشد که جواب عمومی‌آن بصورت زیر است

$$v_3 = r_3 + c_1$$

این معادله جبری با معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سه

$$y''' = \frac{2yy'' - y'^2 + c_1}{y^2}$$

که تحت گروه لی سه پارامتری تولید شده توسط $\mathcal{L}$ ناورداست، معادل است.

ناورداهای دیفرانسیلی اساسی برای ساختن معادلات دیفرانسیل معمولی‌ای که تقارنهای نقطه ای لی آنها مفروض است، بکارگرفته می‌شوند. اگر (r_R, v_R) ناورداهای دیفرانسیلی اساسی گروه لی R بعدی G

باشند آنگاه هر معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۵) از مرتبه $R \geq n$ که G گروه تقارنی آن است می‌تواند به شکل زیر، به ازای تابع دلخواه F نوشته شود:

$$v_r^{(n-R)} = F\left(r_R, v_R, \cdots, v_R^{n-1-R}\right) \qquad (۱۳.۵)$$

با بازنویسی (۱۳.۵) بر حسب $x, y, \cdots, y^{(n)}$ خانواده ای از معادلات دیفرانسیل معمولی که تقارنهای مطلوب را دارند بدست می‌آیند. توجه کنید که ممکن است بعضی از این معادلات دیفرانسیل معمولی تقارنهای دیگری نیز داشته باشند.

۳.۵ مثال. ناورداهای دیفرانسیلی اساسی گروه سه پارامتری تولید شده توسط

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_y, \qquad X_3 = x\partial_x + y\partial_y \qquad (۱۴.۵)$$

عبارتند از

$$r_3 = y', \qquad v_3 = \frac{y'''}{y''^2}.$$

ازاینرو عمومی‌ترین معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سه با این تقارن‌ها$v_3 = F(r_3)$ است که

$$y''' = y''^2 F(y')$$

را نتیجه می‌دهد. عمومی‌ترین معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه۴ با این تقارن‌ها عبارتست از

$$y^{(iv)} = \frac{2y'''^2}{y''} + y''^3 F\left(y', \frac{y'''}{y''^2}\right)$$

که با $\frac{dv_3}{dr_3} = F(r_3, v_3)$ هم ارز است.

تذکر: این روش برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه $R \geq n$ صادق است. ممکن است معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه $R < n$ وجود داشته باشند که تقارن‌های آنها شامل اعضای G باشند. برای مثال تقارن‌های $y'' = 0$ شامل آنهایی است که توسط (۱۴.۵) تولید شده اند.

بخش ۲.۵ جبرلی مولدهای تقارن نقطه ای

فرض کنید تقارن‌های نقطه ای لی معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۵) با بعد Rتوسط $\mathcal{L}$ تولید شده باشند. با بازنویسی (۱.۵) بر حسب ناورداهای دیفرانسیلی اساسی (r_R, v_R)، یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه $n - R$ بدست می‌آید. اگر بتوان معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته را حل نمود (مانند مثال ۵.۲) فقط با معادله

$$v_R = F(r_R; c_1, \cdots, c_{n-R})$$

مواجه خواهیم شد که با معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه Rای که گروه تقارن‌های R پارامتری آن توسط $\mathcal{L}$ تولید شده است، هم ارز می‌باشد. اما آیا راهی وجود دارد که از این تقارن‌ها برای یافتن حل کامل معادله دیفرانسیل معمولی مذکور استفاده شود؟ برای پاسخ به این سوال لازم است در مورد ساختار $\mathcal{L}$ بیشتر بدانیم.

فرض کنید $X_1, X_2 \in \mathcal{L}$ باشد بطوریکه

$$X_i = \xi_i(x,y)\partial_x + \eta_i(x,y)\partial_y, \qquad i = 1,2 \tag{۱۵.۵}$$

حاصلضرب X_1X_2 یک عملگر دیفرانسیلی جزئی مرتبه دو است:

$$X_1X_2 = \xi_1\xi_2\partial_x^2 + (\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2)\partial_x\partial_y + \eta_1\eta_2\partial_y^2 + (X_1\xi_2)\partial_x + (X_1\eta_2)\partial_y.$$

X_2X_1 نیز از مرتبه دو و همانند X_1X_2 دارای جملات مرتبه دو است. بنابراین **جابجاگر** X_1 و X_2،

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 \tag{۱۶.۵}$$

یک عملگر مرتبه یک است. بخصوص

$$[X_1, X_2] = (X_1\xi_2 - X_2\xi_1)\partial_x + (X_1\eta_2 - X_2\eta_1)\partial_y. \tag{۱۷.۵}$$

این جابجاگر خواص کاربردی زیادی دارد که برخی از این خواص از تعریف آن آشکار است. جابجاگر پادمتقارن است. یعنی

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1] \tag{۱۸.۵}$$

و در اتحاد**ژاکوبی** صدق می‌کند:

$$[X_1,[X_2,X_3]] + [X_2,[X_3,X_1]] + [X_3,[X_1,X_2]] = 0. \tag{۱۹.۵}$$

همچنین **دوخطی** است (یعنی نسبت به هر مولفه خطی است):

$$\begin{aligned} [c_1X_1 + c_2X_2, X_3] &= c_1[X_1,X_3] + c_2[X_2,X_3] \\ [X_1, c_2X_2 + c_3X_3] &= c_2[X_1,X_2] + c_3[X_1,X_3] \end{aligned} \tag{۲۰.۵}$$

(در اینجا نیز مثل همیشه c_i نمایانگر یک ثابت دلخواه است).
هر مولد X_i تحت تغییر مختصات از (x,y) به (u,v) مطابق قاعده زنجیره ای تغییر می‌یابد. برای پی بردن به اینکه این تبدیل چگونه روی جابجاگر اثر می‌کند، فرض کنیم

$$X_3 = [X_1, X_2] \tag{۲۱.۵}$$

عجالتاً برای نشان دادن X_i که بر حسب (u,v) نوشته شده از نماد $\check{X}_i$ استفاده می‌کنیم:

$$\check{X}_i = (X_iu)\partial_u + (X_iv)\partial_v.$$

فرض کنیم $F(u,v)$ تابعی دلخواه باشد آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} [\check{X}_1, \check{X}_2]F &= \check{X}_1\Big\{(X_2u)F_u + (X_2v)F_v\Big\} - \check{X}_2\Big\{(X_1u)F_u + (X_2v)F_v\Big\} \\ &= (X_1X_2u)F_u + (X_1X_2v)F_v - (X_1X_2u)F_u(X_1X_2v)F_v \\ &= ([X_1,X_2]u)F_u + ([X_1,X_2]v)F_v \\ &= (X_3u)F_u + (X_3v)F_v. \end{aligned}$$

اما F دلخواه است بنابراین:

$$[\check{X}_1, \check{X}_2] = (X_3 u)\partial_u + (X_3 v)\partial_v = \check{X}_3. \qquad (۲۲.۵)$$

لذا جابجاگر X_1 و X_2 لزوماً مستقل از دستگاه مختصاتی است که در آن محاسبه می‌شود. از این پس نیازی به متمایز کردن X_i و $\check{X}_i$ نیست و برای نمایش دادن مولدها (در هر دستگاه مختصات) مجدداً از X_i استفاده می کنیم.

تاکنون جابجاگر مولدهایی که روی صفحه عمل می‌کنند را بررسی کرده ایم. جابجاگر مولدهای امتداد یافته

$$X_i^{(k)} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta^{(1)}\partial_{y'} + \cdots, \eta^{(k)}\partial_{y^{(k)}}$$

به طور مشابه تعریف می‌شوند:

$$[X_1^{(k)}, X_2^{(k)}] = X_1^{(k)} X_2^{(k)} - X_2^{(k)} X_1^{(k)}.$$

اکنون نشان می‌دهیم اگر $[X_1, X_2] = X_3$ باشد آنگاه:

$$[X_1^{(k)}, X_2^{(k)}] = X_3^{(k)} \qquad (۲۳.۵)$$

فرض کنید

$$X_1 = \partial_y, \qquad X_2 = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y. \qquad (۲۴.۵)$$

با این فرض به کلیت موضوع خللی وارد نمی‌شود. زیرا نشان داده ایم که تغییر متغیر به مختصات کانونی X_1 در این حالت تاثیری بر جابجاگر نمی‌گذارد. از (۲۴.۵) داریم:

$$X_3 = [X_1, X_2] = \xi_y\partial_x + \eta_y\partial_y.$$

بنابراین فرمول امتداد یافته نتیجه می‌دهد:

$$X_3^{(1)} = \xi_y\partial_x + \eta_y\partial_y + (D_x\eta_y - y' D_x\xi_y)\partial'_y$$

زیرا ∂_y و D_x جابجا می‌شوند. یعنی:

$$D_x\partial_y = \partial_x\partial_y + y'\partial_y^2 + \cdots = \partial_y D_x$$

جمله آخر $X_3^{(1)}$ می‌تواند بصورت $\eta_y^{(1)}\partial'_y$ نوشته شود که:

$$\eta^{(1)} = D_x\eta - y' D_x\xi.$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} X_3^{(1)} &= \xi_y\partial_x + \eta_y\partial_y + \eta_y^{(1)}\partial_{y'} \\ &= [\partial_y, \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta^{(1)}\partial_{y'}] \\ &= [X_1^{(1)}, X_2^{(1)}]. \end{aligned}$$

لذا نتیجه (۲۳.۵) برای $k=1$ برقرار است. برای $k>1$ نیز نتیجه ای مشابه بدست می‌آید. ملاحظه می‌کنیم که:

$$D_x\eta_y^{(k-1)} - y^{(k)}D_x\xi_y = \partial_y(D_x\eta^{(k-1)} - y^{(k)}D_x\xi) = \eta_y^{(k)}$$

علاوه بر این، رابطه (۲۳.۵) در هر دستگاه مختصاتی برقرار است زیرا برای یک دستگاه برقرار است. تا کنون از این موضوع که X_1 و X_2 تقارن‌های نقطه ای لی معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۵) را تولید می‌کنند استفاده نکرده ایم. در واقع آنچه که تا کنون مطرح کرده ایم، برای همه عملگرهای دیفرانسیلی جزئی مرتبه اول به شکل (۱۵.۵) قابل اعمال هستند. اما هر مولد در $\mathcal{L}$ در شرط تقارن خطی نیز صدق می‌کند:

$$X_i^{(n)}(y^{(n)}-\omega) = \eta_i^{(n)} - X_i^{(n)}\omega = 0 \qquad ; \qquad y^{(n)} = \omega$$

برای $n\geq 2$، فرمول امتداد دهی نشان می‌دهد که $\eta_i^{(n)}$ نسبت به بالاترین مرتبه مشتق یعنی $y^{(n)}$ خطی است در حالیکه ω و در نتیجه $X_i^{(n)}\omega$ مستقل از بالاترین مرتبه مشتق است. لذا شرط تقارن خطی برقرار است اگر و فقط اگر:

$$X_i^{(n)}(y^{(n)}-\omega) = \lambda_i(y^{(n)}-\omega) \qquad (۲۵.۵)$$

که در آن

$$\lambda_i(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) = \frac{\partial\eta_i^{(n)}}{\partial y^{(n)}}.$$

این نوع مشخص سازی شرط تقارن خطی منجر به این نتیجه مهم می‌شود که: اگر X_1 و X_2 تقارن های نقطه ای لی را تولید کنند آنگاه $X=[X_1,X_2]$ نیز چنین است. این نتیجه همانطور که در زیر آمده است براحتی بدست می‌آید. برای اختصار فرض کنیم $\Delta = y^{(n)}-\omega$. در اینصورت از (۲۳.۵) و (۲۵.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
X^{(n)}\Delta &= [X_1^{(n)},X_2^{(n)}]\Delta\\
&= X_1^{(n)}(\lambda_2\Delta) - X_2^{(n)}(\lambda_1\Delta)\\
&= (X_1^{(n)}\lambda_2 - X_2^{(n)}\lambda_1)\Delta
\end{aligned}$$

از اینرو $X^{(n)}\Delta=0$ است هر گاه $\Delta=0$ و درنتیجه X مولد تقارنهای نقطه ای لی است.(نتیجه مشابهی برای $n=1$ نیز برقرار است. اما بحث فوق نیازمند اندکی تغییرات است زیرا $\eta_i^{(n)}$ نسبت به y' از مرتبه دو است.)

برای $n\geq 2$ مجموعه $\mathcal{L}$ یک فضای برداری متناهی البعد است. از آنجا که برای $\mathcal{L}$ پایه ای مانند $X_1,\cdots,X_R$ انتخاب کرده ایم هر مولد تقارنهای نقطه ای لی می‌تواند بصورت ترکیب خطی از مولدها در این پایه نوشته شود. جابجاگر مذکور دوخطی است بنابراین کافی است جابجاگرهای مولدهای پایه را در نظر بگیریم. تاکنون نشان داده ایم که $\mathcal{L}$ تحت جابجاگر بسته است. یعنی

$$X_i,X_j\in\mathcal{L} \;\Rightarrow\; [X_i,X_j]\in\mathcal{L}.$$

بنابراین جابجاگر هر دو مولد در این پایه، ترکیبی خطی از مولدهای پایه مذکور است:

$$[X_i,X_j] = c_{ij}^k X_k. \qquad (۲۶.۵)$$

(یادآوری می کنیم که اندیسهایی که دوبار تکرار شده اند را جمع می کنیم.) ثابت‌های c_{ij}^k، **ثابت‌های ساختاری** نامیده می‌شوند. اگر $[X_i, X_j] = 0$ باشد آنگاه مولدهای X_i و X_j، **تعویض پذیر** نامیده می‌شوند. بخصوص هر مولد نسبت به خودش خاصیت تعویض پذیری دارد.

۴.۵ مثال. فضای برداری مولدهای تقارنهای نقطه ای لی $y''' = y^{-3}$، دوبعدی است و توسط

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x + \frac{3}{4}y\partial_y \tag{۲۷.۵}$$

تولید شده است. بنابراین جابجاگر X_1 و X_2 بصورت زیر می‌باشد:

$$[X_1, X_2] = (X_1(x) - X_2(1))\,\partial_x + \left(X_1(\frac{3}{4}y) - X_2(0)\right)\partial_y = \partial_x = X_1.$$

جابجاگرهای باقیمانده بدون نیاز به محاسبات بیشتر بدست می‌آیند. هر مولد با خودش جابجا می‌شود. بنابراین

$$[X_1, X_1] = 0, \qquad [X_2, X_2] = 0.$$

بعلاوه جابجاگر پادمتقارن است و از اینرو داریم:

$$[X_2, X_1] = -[X_1, X_2] = -X_1.$$

با خلاصه کردن این نتایج تنها ثابت‌های ساختاری ناصفر برای پایه (۲۷.۵) عبارتند از

$$c_{12}^1 = 1, \qquad c_{21}^1 = -1. \tag{۲۸.۵}$$

وجود این جابجاگر به عنوان «عمل ضرب» تعریف شده روی $\mathcal{L}$، به این معنی است که $\mathcal{L}$ نه تنها یک فضای برداری است بلکه یک **جبرلی** است. مطابق تعریف، یک جبرلی فضایی برداری است که تحت ضرب $[.,.]$، که دوخطی و پادمتقارن است و در اتحاد ژاکوبی صدق می‌کند بسته است. دو شرط اخیر محدودیت‌هایی روی ثابت‌های ساختاری اعمال می‌کنند. جابجاگر پادمتقارن است اگر

$$[X_j, X_i] = -[X_i, X_j], \qquad \forall \;\; i, j \tag{۲۹.۵}$$

که این ایجاب می‌کند:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \qquad \forall \;\; i, j, k \tag{۳۰.۵}$$

یک نتیجه این خاصیت این است که کافی است جابجاگرهای مولدهای پایه ای با خاصیت $i < j$ را محاسبه کنیم. اتحاد ژاکوبی

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0, \qquad \forall \;\; i, j, k \tag{۳۱.۵}$$

برقرار است اگر و فقط اگر

$$c_{ij}^q c_{kq}^l + c_{jk}^q c_{iq}^l + c_{ki}^q c_{jq}^l = 0, \qquad \forall \;\; i, j, k, l \tag{۳۲.۵}$$

جبرهای لی در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات کاربردی و فیزیک ظاهر می‌شوند. معمولاً علاقه مندیم که چگونگی عمل یک گروه لی چند پارامتری که خطی بودن آن نسبت به اتحاد ژاکوبی، جبرلی مولد گروه را نتیجه می‌دهد، ببینیم. جبرلی‌ها همچنین می‌توانند بدون نیاز به رجوع به گروه لی که روی آن تعریف شده‌اند وجود داشته باشند. یک جبرلی بطور مجرد توسط ثابت‌های ساختاری اش ساخته می‌شود. اما این امر ممکن است به شکلهای متفاوت (خطی سازی‌های متفاوت) همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، صورت گیرد.

۵.۵ مثال. شاید شناخته شده‌ترین جبرلی، فضای برداری شامل بردارهای $x \in \mathbb{R}^3$ تحت عمل ضرب دکارتی که حکم جابجاگر را دارد باشد:

$$[x_1, x_2] = x_1 \times x_2$$

(حاصلضرب خارجی دوخطی و پادمتقارن است. خواننده می‌تواند درستی اتحاد ژاکوبی را بررسی کند.) با در نظر گرفتن پایه دکارتی استاندارد برای $\mathbb{R}^3$:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

حاصلضرب خارجی روابط غیربدیهی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$x_1 \times x_2 = x_3, \quad x_1 \times x_3 = -x_2, \quad x_2 \times x_3 = x_1$$

تنها ثابت‌های ساختاری غیرصفر عبارتند از:

$$c_{12}^3 = c_{23}^1 = c_{31}^2 = 1, \quad c_{21}^3 = c_{32}^1 = c_{13}^2 = -1; \qquad (۳۳.۵)$$

توجه کنید که ثابت‌های ساختاری با جایگشت دوری (۱۲۳) اندیسها بدون تغییر باقی می‌مانند. جبرلی مجردی که در برخی پایه‌ها ثابت‌های ساختاری (۲۳.۵) را دارد $\mathfrak{so}(3)$ نامیده می‌شود. گروه لی تولید شده توسط $\mathfrak{so}(3)$، **گروه متعامد خاص** $SO(3)$ است که مثالی ساده از آن، گروه دورانها در $\mathbb{R}^3$ می‌باشد. جبرلی $\mathfrak{so}(3)$ همچنین می‌تواند بر حسب مولدهای تبدیلات نقطه ای لی در صفحه مشخص شود:

$$X_1 = y\partial_x - x\partial_y, \quad X_2 = \frac{1}{2}(1 + x^2 - y^2)\partial_x + xy\partial_y,$$
$$X_3 = xy\partial_x + \frac{1}{2}(1 - x^2 + y^2)\partial_y \qquad (۳۴.۵)$$

بررسی اینکه این پایه ثابت‌های ساختاری (۳۳.۵) را نتیجه می‌دهد به عهده خواننده است.

از نتایج اخیرنتیجه می‌شود که ثابت‌های ساختاری تحت امتداددهی و یا تغییر مختصات بدون تغییر می‌مانند. اما قطعاً به پایه انتخابی برای $\mathcal{L}$ بستگی خواهند داشت و تلاش برای انتخاب پایه‌ای با ثابت‌های ساختاری غیر صفر در حد امکان کمتر، مفید خواهد بود. اگر کلیه مولدها در یک پایه جابجا شوند(یعنی هر ثابت ساختاری صفر باشد)، جبرلی**آبلی** است.

۶.۵ مثال. معمولترین جبرلی دو بعدی با پایه $\{X_1, X_2\}$ را درنظر بگیرید. جابجاگر X_1 و X_2 بصورت زیر است:

$$[X_1, X_2] = c_{12}^1 X_1 + c_{12}^2 X_2. \qquad (۳۵.۵)$$

این جبرلی آبلی است اگر و فقط اگر $c_{12}^1 = c_{12}^2 = 0$ باشد. در غیر اینصورت پایه‌ای مانند $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$ وجود دارد بطوریکه

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = \tilde{X}_1. \qquad (۳۶.۵)$$

برای یافتن این پایه توجه داشته باشید که جابجاگر هر دو مولد لزوماً مضرب طرف راست رابطه (۳۵.۵) است. لذا فرض کنید

$$\tilde{X}_1 = c_{12}^1 X_1 + c_{12}^2 X_2$$

اگر $c_{12}^1 \neq 0$، آنگاه X_2 بطور خطی مستقل از $\tilde{X}_1$ است و

$$[\tilde{X}_1, X_2] = c_{12}^1[X_1, X_2] = c_{12}^1\tilde{X}_1.$$

با ضرب مجدد در یک مقدار ثابت با انتخاب

$$\tilde{X}_2 = \frac{1}{c_{12}^1}X_2$$

(۳۶.۵) را بدست می‌آوریم. ً به طور مشابه اگر، اما جبرلی آبلی نباشد می‌توانیم (۳۶.۵) را با انتخاب زیر بدست آوریم:

$$\tilde{X}_2 = \frac{-1}{c_{12}^2}X_1.$$

بنابراین هر جبرلی دو بعدی یا آبلی است یا می‌تواند بر اساس پایه‌ای که تنها ثابت‌های ساختاری آن بصورت زیر هستند بیان شود:

$$c_{12}^1 = 1, \qquad c_{21}^1 = -1. \tag{۳۷.۵}$$

فضاهای برداری معمولی از زیرفضاها و به طور مشابه جبرهای لی از زیرجبرها ساخته می‌شوند. روشی که بواسطه این دو به هم مرتبط می‌شوند، ثابت‌های ساختاری را مشخص می‌کند. برای راحتی فرض کنیم $[\mathcal{M}, \mathcal{N}]$ نشاندهنده مجموعه کلیه جابجاگرهای مولدهای عضو $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ و مولدهای عضو $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}$ باشد یعنی:

$$[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \left\{[X_i, X_j] \quad : \quad X_i \in \mathcal{M}, X_j \in \mathcal{N}\right\} \tag{۳۸.۵}$$

زیرفضای $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ یک **زیرجبر** است اگر تحت جابجاگر

$$[\mathcal{M}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M} \tag{۳۹.۵}$$

بسته باشد. به عبارت دیگر، هر زیرجبر یک جبرلی، خود یک جبرلی است. زیرجبر $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$، **ایده آل** $\mathcal{L}$ است اگر

$$[\mathcal{M}, \mathcal{L}] \subset \mathcal{M}. \tag{۴۰.۵}$$

بوضوح $\{0\}$ و $\mathcal{L}$ زیرجبر هستند. علاوه براین، ایده‌آلهای $\mathcal{L}$ هستند. هر ایده‌آل دیگر بجز $\{0\}$ و $\mathcal{L}$، **ایده‌آل سره** نامیده می‌شود. اگر یک جبرلی غیر آبلی باشد و هیچ ایده آل سره‌ای نداشته باشد **ساده** نامیده می‌شود. هر زیرفضای یک بعدی از $\mathcal{L}$ یک زیرجبر است (اما لزوماً ایده آل نیست) زیرا هر مولد با خودش جابجا می‌شود. تقریباً همه جبرلی‌های با بعد $R \geq 2$، حداقل دارای یک زیرجبر دو بعدی می‌باشند. یک استثنا جبرلی ساده $\mathfrak{so}(3)$ است.

۷.۵ مثال. یک جبرلی سه بعدی با پایه زیر را در نظر بگیرید:

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x, \qquad X_3 = x^2\partial_x \tag{۴۱.۵}$$

جابجاگرهای غیربدیهی $[X_i, X_j]$ که $i < j$ است عبارتند از:

$$[X_1, X_2] = X_1, \qquad [X_1, X_3] = 2X_2, \qquad [X_2, X_3] = X_3 \tag{۴۲.۵}$$

این جبرلی مجرد با جابجاگرهای (۴۲.۵)، $\mathfrak{sl}(2)$ نامیده می‌شود و گروه خطی خاص $\mathrm{SL}(2)$ را تولید می‌کند. زیرفضای تولید شده توسط X_1 و X_2 یک زیرجبر دو بعدی است. $\mathrm{Span}\{X_2, X_3\}$ نیز همینطور است. اما $\mathrm{Span}\{X_1, X_3\}$ یک زیرجبر نیست زیرا $[X_1, X_3]$ در این زیرفضا قرار نمی‌گیرد. اگر چه $\mathfrak{sl}(2)$ دارای زیرجبرهای غیربدیهی است اما ایده‌آلی غیر از صفر و خودش ندارد. لذا ساده است.

فرض کنیم جبرلی دلخواه $\mathcal{L}$ داده شده است. یک ایده‌آل که همواره می‌تواند ساخته شود**زیرجبر مشتق** $\mathcal{L}^{(1)}$ است که شامل کلیه جابجاگرهای اعضای $\mathcal{L}$ می‌باشد:

$$\mathcal{L}^{(1)} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}] \tag{۴۳.۵}$$

بوضوح، $[\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}]$ زیر مجموعه‌ای از $\mathcal{L}^{(1)}$ است که دلیلی بر ایده‌آل بودن $\mathcal{L}^{(1)}$ است.

اگر $\mathcal{L}^{(1)} \neq \mathcal{L}$ باشد می‌توان با یافتن زیرجبر مشتق $\mathcal{L}^{(1)}$، یعنی $\mathcal{L}^{(2)}$ ادامه داد:

$$\mathcal{L}^{(2)} = [\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(1)}] \tag{۴۴.۵}$$

این روند را می‌توانیم با فرض

$$\mathcal{L}^{(k)} = [\mathcal{L}^{(k-1)}, \mathcal{L}^{(k-1)}] \tag{۴۵.۵}$$

تا زمانیکه دیگر زیرجبر جدیدی بوجود نیاید ادامه دهیم. اگر زیرجبرهای مشتق شده به ازای k ایی به $\mathcal{L}^{(k)} = \{0\}$ ختم شوند، آنگاه $\mathcal{L}$ را**حل پذیر** گوییم. بطور معادل یک جبرلی R بعدی حل پذیر است اگر یک زنجیره از زیرجبرهای

$$\{0\} = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{L}_R = \mathcal{L} \tag{۴۶.۵}$$

موجود باشد که در آن $\dim(\mathcal{L}_k) = k$ بطوریکه $\mathcal{L}_{k-1}$، به ازای هر k ،ایده آلی از $\mathcal{L}_k$ باشد. هر جبرلی آبلی حل پذیر است درحالیکه جبرلی‌های ساده حل پذیر نیستند. دیده ایم که هر جبرلی دو بعدی غیرآبلی دارای یک پایه است بطوریکه $[X_1, X_2] = X_1$ و از اینرو حل پذیر است. به ازای هر $R \geq 3$ جبرهای لی‌ای موجودند که حل پذیر نمی‌باشند.

جبرلی R بعدی حل پذیری را درنظر بگیرید. برای راحتی پایه را بصورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$X_k \in \mathcal{L}_k, \qquad X_k \notin \mathcal{L}_{k-1}, \qquad k = 1, \cdots, R \tag{۴۷.۵}$$

و از اینرو:

$$\mathcal{L}_k = \mathrm{Span}\{X_1, \cdots, X_k\}$$

هر پایه تعریف شده توسط (۴۷.۵) را یک**پایه کانونی** می‌گوییم. بطور معادل یک پایه کانونی است هر گاه ثابت‌های ساختاری در رابطه زیر صدق کنند:

$$c_{ij}^k = 0, \qquad \forall \quad i < j \leq k. \tag{۴۸.۵}$$

۸.۵ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه۴ زیر:

$$y^{(iv)} = y'''^{4/3} \tag{۴۹.۵}$$

دارای جبرلی ۵ بعدی $\mathcal{L}$ می‌باشد که دارای پایه زیر است:

$$X_1 = \partial_y, \qquad X_2 = x\partial_y, \qquad X_3 = x^2\partial_y, \\ X_4 = \partial_x, \qquad X_5 = x\partial_x \tag{۵۰.۵}$$

جابجاگرهای غیر صفر $[X_i, X_j]$ که $i < j$ است عبارتند از:

$$[X_2, X_4] = -X_1, \qquad [X_2, X_5] = -X_2, \qquad [X_3, X_4] = -2X_2, \\ ,[X_3, X_5] = -2X_3, \qquad [X_4, X_5] = X_4 \tag{۵۱.۵}$$

بنابراین $\mathcal{L}$ دارای جبرلی مشتق زیر است:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathrm{Span}\{X_1, X_2, X_3, X_4\}. \tag{۵۲.۵}$$

نظر به اینکه $\mathcal{L}^{(1)} \neq \mathcal{L}$ می‌توانیم با محاسبه $\mathcal{L}^{(2)}$ ادامه دهیم. از (۵۱.۵) داریم که جابجاگرهای غیر صفر اعضای $\mathcal{L}^{(1)}$ عبارتند از:

$$[X_2, X_4] = -X_1, \qquad [X_3, X_4] = -2X_2$$

بنابراین:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathrm{Span}\{X_1, X_2\} \tag{۵۳.۵}$$

در آخر چون X_1 و X_2 جابجا می‌شوند بنابراین دنباله با

$$\mathcal{L}^{(3)} = \{0\} \tag{۵۴.۵}$$

پایان می‌پذیرد. لذا $\mathcal{L}$ حل پذیر است. توجه کنید که پایه (۵۰.۵) کانونی است.

بخش ۳.۵ انتگرال گیری گام به گام از معادلات دیفرانسیل معمولی

اکنون به مسئله انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه R که دارای جبرلی R بعدی $\mathcal{L}$ است برمی‌گردیم. این معادله دیفرانسیل معمولی می‌تواند بر حسب ناورداهای دیفرانسیلی اساسی به ازای تابع دلخواه F بصورت زیر نوشته شود:

$$v_R = F(r_R) \tag{۵۵.۵}$$

هدف، حل معادله دیفرانسیل معمولی مورد نظر با استفاده از یک‌یک مولدهای تقارنی است.(توجه کنید از این پس بطور صریح به مرتبه امتداددهی مولدها اشاره نخواهیم کرد مگر اینکه دلیل مناسبی برای آن داشته باشیم. اما در عوض قرارداد می‌کنیم که مولدها به اندازه کافی برای توصیف عمل گروه خطی شده روی همه متغیرها، امتداد داده شده اند.)

فرض کنید مولدهای $X_1, \cdots, X_{R-1}$ زیرجبری از $\mathcal{L}$ تولید کنند. همچنین فرض کنید (r_{R-1}, v_{R-1})، ناورداهای دیفرانسیلی اساسی این زیرجبر باشد. اگر مولد باقیمانده X_R، روی (r_{R-1}, v_{R-1}) به عنوان مولد تبدیلات نقطه‌ای عمل کند، مختصات کانونی

$$(r_R, s_R) = (r_R(r_{R-1}, v_{R-1}), s_R(r_{R-1}, v_{R-1}))$$

در هر نقطه غیر ناوردا وجود دارد که بر حسب آن $X_R = \partial_{s_R}$ می‌باشد.(اکنون می‌دانیم r_R و s_R می‌توانند به روش معمولی یافت شوند.) در اینصورت v_R تنها تابعی از r_R و $\dot{s}_R := ds_R/dr_R$ است. در نتیجه (۵.۵۵) می‌تواند معکوس شود تا بازای تابعی مانند G

$$\dot{s_R} = G(r_R)$$

بدست آید. از اینرو بدست می‌آوریم:

$$s_R(r_{R-1}, v_{R-1}) = \int^{r_R(r_{R-1}, v_{R-1})} G(r_R) dr_R + c$$

که تحت گروه تولید شده توسط $X_1, \cdots, X_{R-1}$ ناورداست. اگر این معادله را بتوان بر حسب v_{R-1} به عنوان تابعی از r_{R-1} حل کرد، مسئله‌ای به شکل (۵.۵۵) حاصل می‌شود با این تفاوت که $R-1$ جایگزین R شده است. مشروط بر اینکه بتوانیم این روش را به اندازه کافی به دفعات تکرار کنیم به جواب عمومی‌معادله دیفرانسیل معمولی مورد نظر دست یافته ایم.

توجه کنید که در این بخش برای یافتن جواب عمومی‌یک معادله دیفرانسیل معمولی متمرکز می‌شویم. جوابهایی که تحت یک گروه تک پارامتری ناوردا هستند با روش‌های توضیح داده شده در انتهای فصل ۴ می‌توانند مشاهده شوند. اگر چه ممکن است تعداد زیادی جوابهای ناوردا موجود باشد، همانطور که در فصل ۱۰ توضیح داده شده می‌توان برای طبقه بندی آنها از جبرلی استفاده کرد. این امر بطور قابل ملاحظه‌ای تلاش‌های لازم برای یافتن همه جوابهای ناوردا را کاهش می‌دهد. بوضوح X_R روی (r_{R-1}, v_{R-1}) به عنوان مولد یک تبدیل نقطه‌ای عمل می‌کند هر گاه تحدید X_R به متغیرهای (r_{R-1}, v_{R-1}) بازای توابع دلخواه α و β که حداقل یکی از آنها غیرصفر است به شکل زیر باشد:

$$X_R = \alpha(r_{R-1}, v_{R-1})\partial_{r_{R-1}} + \beta(r_{R-1}, v_{R-1})\partial_{v_{R-1}}$$

بنابراین لازم است:

$$X_R r_{R-1} = \alpha(r_{R-1}, v_{R-1}), \qquad X_R v_{R-1} = \beta(r_{R-1}, v_{R-1})$$

ناورداهای دیفرانسیلی r_{R-1} و v_{R-1} در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$X_i r_{R-1} = 0, \qquad X_i v_{R-1} = 0, \qquad \forall \;\; i = 1, \cdots, R-1$$

و از اینرو:

$$[X_i, X_R] r_{R-1} = X_i \alpha(r_{R-1}, v_{R-1}) = 0, \qquad \forall \;\; i = 1, \cdots, R-1$$

که می‌توان این عبارت را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$c_{iR}^k X_k r_{R-1} = 0, \qquad \forall \;\; i = 1, \cdots, R-1$$

که این کار منجر به شرط زیر می‌شود:

$$c_{iR}^R = \alpha(r_{R-1}, v_{R-1}) = 0, \qquad \forall \;\; i = 1, \cdots, R-1$$

با بحث مشابهی $[X_i, X_R] v_{R-1} = 0$ منجر به نتیجه زیر می‌شود:

$$c_{iR}^R = \beta(r_{R-1}, v_{R-1}) = 0, \qquad \forall \;\; i = 1, \cdots, R-1$$

لذا از آنجا که حداقل یکی از توابع α و β غیرصفر هستند داریم:

$$c_{iR}^R = 0, \qquad \forall \;\; i = 1, \cdots, R-1.$$

$\mathrm{Span}\{X_1, \cdots, X_{R-1}\}$ یک زیرجبر است اگر:

$$c_{ij}^R = 0, \qquad \forall \;\; 1 \le i < j \le R-1$$

بنابراین X_R به عنوان یک مولد تبدیل نقطه‌ای روی (r_{R-1}, v_{R-1}) عمل می‌کند اگر و فقط اگر

$$c_{ij}^R = 0, \qquad \forall \;\; 1 \le i < j \le R-1 \tag{۵۶.۵}$$

این شرط ما را قادر می‌سازد تا مرتبه را یک بار کاهش دهیم. به طور مشابه کاهش دوم مرتبه امکانپذیر خواهد بود هر گاه:

$$c_{ij}^{R-1} = 0, \qquad \forall \;\; 1 \le i < j \le R-1 \tag{۵۷.۵}$$

با ادامه دادن با روشی مشابه هر مولد X_k می‌تواند یک انتگرال نتیجه دهد هرگاه:

$$c_{ij}^k = 0, \qquad \forall \;\; 1 \le i < j \le k \tag{۵۸.۵}$$

این شرط (در هر پایه کانونی) برقرار است اگر و فقط اگر $\mathcal{L}$ یک جبرلی حل پذیر باشد.
تاکنون توجه خود را به جبرهای لی با $R \le n$ محدود کردیم اما چنانچه $R > n$ باشد روش بالا قابل انجام است مشروط بر اینکه $\mathcal{L}$ یک زیرجبر حل پذیر n بعدی داشته باشد. در فصل بعد این روش را بکار خواهیم گرفت و در مورد اینکه اگر $\mathcal{L}$ زیرجبرحل پذیر به اندازه کافی بزرگ نداشته باشد، چه باید بکنیم بحث خواهیم کرد.

مطالعه بیشتر

ناورداهای دیفرانسیلی تنها برای کاهش مرتبه مورد استفاده نیستند بلکه برای ساختن مدلهایی که تقارن‌ها را نتیجه داده اند نیز استفاده می‌شوند. اولور (1995) شامل توصیف واضحی از جزئیات ناورداهای دیفرانسیلی و برخی از کاربردهای آنها می‌باشد. جبرلی‌ها بطور وسیعی در ریاضیات و فیزیک نظری بکار برده می‌شوند. ساتینگر و ویور (1986) دستورالعمل سرراستی دارند. برای مقایسه بیشتر روش من فوش و ساتینگر را پیشنهاد می‌کنم.

تمرین‌ها

۱.۵ معمولترین معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه۳ که تقارن‌های آن شامل گروهی است که توسط مولدهای $X = x\partial_x + \alpha y\partial_y$ تولید شده است(α مقداری ثابت است)، چیست؟

۲.۵ مجموعه ناورداهای دیفرانسیلی اساسی را برای
(الف) گروه تولید شده توسط $X_1 = xy\partial_x + y^2\partial_y$،
(ب) گروه تولید شده توسط $X_2 = x\partial_x + y_y^\partial$،
(ج) گروه تولید شده توسط X_1 و X_2،
بدست آورید. اکنون عمومی‌ترین معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۳ را بیابید که تقارن‌های آن شامل گروهی است که توسط X_1 و X_2 تولید شده است.

۳.۵ عمومی‌ترین معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۲ را بیابید که تقارن‌های آن شامل گروهی است که توسط (۳۴.۵) تولید شده است.

۴.۵ نشان دهید پایه (۳۴.۵) ثابت‌های ساختاری $\mathfrak{so}(3)$ (رابطه (۳۳.۵)) را دارد.

۵.۵ نشان دهید هیچ جبرلی سه بعدی با جابجاگرهای

$$[X_1, X_2] = X_1, \qquad [X_1, X_3] = -X_3, \qquad [X_2, X_3] = X_2$$

میان مولدهای پایه‌ای آن وجود ندارد.

۶.۵ فضای برداری دو بعدی تولید شده توسط مولدهای $X_1 = x\partial_x + \alpha y\partial_y$ و $X_2 = -y\partial_x + x\partial_y$ را بیابید. به ازای چه مقداری از α این فضای برداری جبرلی است؟ برای هر α دیگر که در $\mathbb{R}$ است کوچکترین جبرلی $\mathcal{L}(\alpha)$ که شامل X_1 و X_2 است را بیابید. نشان دهید $\mathcal{L}(\alpha)$ دارای زیرجبر $\mathfrak{sl}(2)$ است و بعد بزرگترین زیرجبر حل پذیر را بیابید.

۷.۵ نشان دهید اگر I یک ناوردای دیفرانسیلی گروه‌های تولید شده توسط X_1 و X_2 باشد، ناوردای دیفرانسیلی گروهی که توسط $[X_1, X_2]$ تولید شده نیز می‌باشد. ناوردای دیفرانسیلی با کمترین مرتبه که در بین گروه‌های تولید شده توسط $X_1 = \partial_y$ و $X_2 = 2xy\partial_x + y^2\partial_y$ مشترک است را بیابید.

فصل ۶

حل معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از لی گروه‌های چند پارامتری

کم کم فوت و فن کار بدست می آید.

(ازوپ: حکایات)

بخش ۱.۶ روش مقدماتی: استفاده از حل پذیری

اینک یک روش اصولی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با یک (زیر)جبرلی حل پذیر به حد کافی بزرگ داریم:

۱. شرط تقارن خطی را برای مشخص کردن تقارنهای نقطه‌ای لی اعمال کنید.

۲. جابجاگرهای مولدهای پایه‌ای را محاسبه و در نتیجه مجموعه زیرجبرهای مشتق شده را بیابید.

۳. یک زیرجبر حل پذیر به حد کافی بزرگ بیابید، پایه کانونی را انتخاب کنید و ناورداهای دیفرانسیلی اساسی را محاسبه کنید.

۴. معادله دیفرانسیل معمولی را برحسب ناورداهای دیفرانسیلی بازنویسی کنید. سپس هر یک از مولدها را برای انتگرال‌گیری به روشی که در فصل ۵ توصیف شد بکار گیرید.

هدف این بخش این است که نشان دهیم این روش در عمل چگونه است. در ادامه در حالیکه قبلاً یک پایه کانونی برای مولدها یافته‌ایم، روی مرحله (۴) متمرکز می‌شویم.

۱.۶ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - y^2, \qquad y > 0, \tag{۱.۶}$$

که تقارنهای نقطه ای لی آن توسط

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x - 2y\partial_y. \tag{۲.۶}$$

تولید شده است را به یاد آورید. گروه تولید شده توسط X_1 دارای ناورداهای دیفرانسیلی اساسی زیر است:

$$r_1 = y, \qquad v_1 = y',$$

و ناورداهای دیفرانسیلی اساسی گروه تولید شده توسط X_1, X_2 عبارتند از:

$$r_2 = \frac{y'}{y^{3/2}}, \qquad v_2 = \frac{y''}{y^2}.$$

از اینرومعادله دیفرانسیل معمولی (۱.۶) به معادله جبری زیر کاهش می‌یابد:

$$v_2 = r_2^2 - 1 \tag{۳.۶}$$

جبرلی مذکور حل پذیر است و (۲.۶) یک پایه کانونی است لذا X_2 تبدیلات نقطه‌ای با متغیرهای (r_1, v_1) را تولید می‌کند. صریحاً

$$X_2 r_1 = -2y = -2r_1, \qquad X_2^{(1)} v_1 = -3y' = -3v_1,$$

و در نتیجه تحدید X_2 به (r_1, v_1) عبارتست از

$$X_2 = -2r_1\partial_{r_1} - 3v_1\partial_{v_1}.$$

مختصات کانونی ناوردای $r_2 = v_1/r_1^{3/2}$ را انتخاب می‌کنیم. برای راحتی فرض کنید $s_2 = -\frac{1}{2}\ln(r_1)$ در اینصورت

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \frac{ds_2}{dx} \div \frac{dr_2}{dx} = \frac{r_2}{3r_2^2 - 2v_2}.$$

بنابراین از (۳.۶) نتیجه می‌شود که‌معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته با

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \frac{r_2}{r_2^2 + 2}.$$

که انتگرال‌گیری از آن ساده است معادل است. با یک انتگرال‌گیری سرراست خواهیم داشت:

$$s_2 = \frac{1}{2}\ln(r_2^2 + 2) + c.$$

پس از بازنویسی این جواب بر حسب (r_1, v_1) معادله جبری زیر بدست می‌آید:

$$v_1 = \pm r_1(4c_1^2 - 2r_1)^{1/2}, \tag{۴.۶}$$

که در آن c_1 یک ثابت مثبت دلخواه است. با کامل شدن یک مرحله از این روند، عملی مشابه را این بار با بکارگیری مولد X_1 برای حل (۴.۶) تکرار می‌کنیم. بر اساس مختصات کانونی $(r_1, s_1) = (y, x)$ خواهیم داشت

$$\frac{ds_1}{dr_1} = \frac{1}{y'} = \frac{\pm 1}{r_1(4c_1^2 - 2r_1)^{1/2}}.$$

بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی مذکور عبارتست از

$$s_1 = c_2 \pm c_1^{-1}\cosh^{-1}\Big(c_1\sqrt{\frac{2}{r_1}}\Big)$$

که با برگرداندن آن به متغیرهای اصلی خواهیم داشت

$$y = 2c_1^2\operatorname{sech}^2(c_1(x-c_2)). \qquad (۵.۶)$$

۲.۶ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۳

$$y''' = \frac{y''^2}{y'(1+y')}, \qquad (۶.۶)$$

که تقارنهای نقطه‌ای آن توسط

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_y, \qquad X_3 = x\partial_x + y\partial_y \qquad (۷.۶)$$

تولید شده است را در نظر بگیرید. ناورداهای دیفرانسیلی اساسی برای هر زیرجبر $\mathcal{L}_k$ متعلق به یک زنجیر حل پذیر عبارتند از

$$\mathcal{L}_1 = \operatorname{Span}\{X_1\} \quad \text{برای} \quad r_1 = y, \quad v_1 = y' \qquad (۸.۶)$$
$$\mathcal{L}_2 = \operatorname{Span}\{X_1, X_2\}; \quad \text{برای} \quad r_2 = y', \quad v_2 = y'' \qquad (۹.۶)$$
$$\mathcal{L}_3 = \operatorname{Span}\{X_1, X_2, X_3\} \quad \text{برای} \quad r_3 = y, \quad v_1 = y'''/y''^2.$$

لذامعادله دیفرانسیل معمولی (۶.۶) با معادله جبری

$$v_3 = \frac{1}{r_3(1+r_3)} \qquad (۱۰.۶)$$

معادل است. برای یافتن تحدید X_3 به ناورداهای دیفرانسیلی (r_2, v_2)، توجه کنید که

$$X_3^{(1)} r_2 = 0, \qquad X_3^{(2)} v_2 = -y'' = -v_2;$$

از اینرو مولد محدود شده عبارت است از

$$X_3 = -v_2\partial_{v_2}.$$

فرض کنید

$$s_3 = -\ln|v_2| = -\ln|y''|;$$

دراینصورت (۹.۶) هم ارزمعادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول زیر است

$$\frac{ds_3}{dr_3} = -v_3 = \frac{-1}{r_3(1+r_3)}.$$

با نوشتن جواب این معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب r_2 و v_2 خواهیم داشت

$$v_2 = \frac{c_1 r_2}{1 + r_2} \tag{۶.۱۱}$$

در مرحله بعد پی‌خواهیم برد که تحدید X_2 به متغیرهای (r_1, v_1) بصورت زیر است

$$X_2 = \partial_{r_1}$$

در اینصورت $s_2 = r_1$ مختصات کانونی مناسبی است. مشروط بر اینکه $c_1 \neq 0$ باشد معادله جبری (۶.۱۰) با

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \frac{r_2}{v_2} = \frac{1}{c_1}(1 + r_2)$$

که جواب آن برحسب r_1 و v_1 عبارتست از

$$r_1 = c_2 + \frac{1}{2c_1}(1 + v_1)^2. \tag{۶.۱۲}$$

معادل است. در آخر با انتخاب $s_1 = x$ بدست می‌آوریم

$$\frac{ds_1}{dr_1} = \frac{1}{v_1} = \frac{1}{-1 \pm \sqrt{2c_1(r_1 - c_2)}}$$

پس از انجام انتگرال‌گیری و جایگزینی r_1 و v_1 به ترتیب با x و y جواب عمومی(۶.۶) را در فرم بسته زیر بدست می‌آوریم:

$$x = c_3 + \frac{1}{c_1}\left(\ln|-1 \pm \sqrt{2c_1(y - c_2)}| \pm \sqrt{2c_1(y - c_1)}\right) \tag{۶.۱۳}$$

با داشتن یک پایه مفروض برای یک زیرجبر حل پذیر n بعدی، وجود چندین ترتیب متفاوت از مولدها، که هر کدام از آنها یک پایه کانونی است، امری عادی است. در اصل اینکه چه پایه کانونی انتخاب می‌شود حائز اهمیت نیست ولی در عمل برخی انتخابها ممکن است انتگرال گیریها را دشوار یا حتی غیر قابل حل سازد. بنظر می‌رسد تنها راه رفع این مشکل همانطور که مثال بعد نشان میدهد،آزمایش کردن پایه‌های کانونی متفاوت است. اینک روند حل معادلات دیفرانسیل معمولی ملموس‌تر شده است لذا در ادامه بیشتر جزئیات محاسبات حذف خواهد شد(تکمیل جزئیات به خواننده واگذار می‌شود.)

۶.۳ مثال. در مثال قبل توانستیم پایه کانونی

$$X_1 = \partial_y, \qquad X_2 = \partial_x, \qquad X_3 = x\partial_x + y\partial_y \tag{۶.۱۴}$$

را برگزینیم که مولدهای جابجا شونده ∂_x و ∂_y را از فرم مرتب آن، (۶.۷)، متمایز می‌کند. مجموعه ناورداهای دیفرانسیلی اساسی (۶.۸) تقریباً بدون تغییر می‌مانند با این تفاوت که در این حالت $r_1 = x$ می‌باشد. از اینرو محاسبات بدون تغییر می‌مانند تا آنجا که (۶.۱۰) که اکنون به

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{c_1}\left(1 + \frac{1}{r_2}\right)$$

کاهش یافته است ظاهر می‌شود و انتگرال‌گیری نتیجه می‌دهد:

$$r_1 = c_2 + \frac{1}{c_1}\left(\ln|v_1| + v_1\right) \tag{۱۵.۶}$$

و این ما را با این موضوع روبرو می‌کند که: برای بدست آوردن v_1 بصورت تابعی از r_1، نمی‌توانیم از (۱۴.۶) استفاده کنیم. بنابراین چنین انتخابی برای پایه کانونی، تعیین جواب عمومی (۶.۶) را بسیار دشوار می‌سازد.

مثالهای بالا مثالهایی ساده اند زیرا یافتن یک پایه کانونی بطوریکه v_k را بتوان در هر مرحله بصورت تابعی از r_k نوشت، آسان است. اگر چنین پایه ای یافت نشود، امکان یافتن جواب عمومی بصورت پارامتری وجود خواهد داشت. فرض کنید

$$r = f(v) \tag{۱۶.۶}$$

همچنین فرض کنید $\dot{s} = \frac{ds}{dr}$ می‌تواند بر حسب r و v نوشته شود. در این صورت داریم

$$s = g(v) := \int \dot{s}(r,v)|_{r=f(v)} \frac{df(v)}{dv} dv + c \tag{۱۷.۶}$$

اگر (۱۶.۶) و (۱۵.۶) به گونه‌ای باشند که امکان نوشتن پارامتر v به صورت تابعی از r و s فراهم باشد، آنگاه v می تواند حذف شود. این شیوه که ضمنی سازی نام دارد چنانچه $f(v)$ و $g(v)$ ، چند جمله‌ایهای گویا باشند همواره قابل انجام است. با این وجود در مورد همه‌معادلات دیفرانسیل معمولی مجاز به ضمنی سازی نیستیم. چنانچه v حذف نشود بایستی جواب در شکل پارامتری باقی بماند.

۴.۶ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی

$$y'' = \frac{y'^3}{y'^3 - 2} \tag{۱۸.۶}$$

که جبرلی مولدهای تقارن نقطه‌ای لی آن توسط

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_y$$

تولید شده است را در نظر بگیرید. با بکارگیری ناورداهای دیفرانسیلی اساسی

$$(r_1, v_1) = (y, y'), \qquad (r_2, v_2) = (y', y'')$$

و مختصات کانونی $s_2 = r_1$، بدست می‌آوریم:

$$r_1 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{2}{v_1} + c_1. \tag{۱۹.۶}$$

فرض کنید $s_1 = x$ باشد در اینصورت

$$\dot{s_1} = \frac{ds_1}{dr_1} = \frac{1}{v_1}$$

آنگاه از (۱۶.۶) خواهیم داشت

$$s_1 = v_1 + \frac{1}{v_1^2} + c_2 \tag{۲۰.۶}$$

یک روش ساده برای حذف پارامتر v_1 از (۱۸.۶) وجود دارد. ابتدا هر معادله را بصورت چند جمله‌ای بر حسب v_1 می‌نویسیم:

$$v_1^3-2(r_1-c_1)v_1+4=0$$
$$v_1^3-(s_1-c_2)v_1^2+1=0$$

حال از یکی از معادلات بیشترین توان v_1 را حذف می کنیم:

$$v_1^3-2(r_1-c_1)v_1+4=0$$
$$(s_1-c_2)v_1^2-2(r_1-c_1)v_1+3=0$$

معادله با مرتبه کمتر(که در توان مناسبی از v_1 ضرب شده است) را برای حذف بیشترین توان v_1 از معادله دیگر بکار می‌گیریم

$$2(r_1-c_1)v_1^2-\left\{2(r_1-c_1)(s_1-c_2)+3\right\}v_1+4(s_1-c_2)=0$$
$$(s_1-c_2)v_1^2-2(r_1-c_1)v_1+3=0$$

این عمل را تا یافتن v_1 ادامه می دهیم. در این مثال انجام عمل حذف تنها یک بار دیگر لازم است تا به معادله‌ای خطی برای v_1 که جواب آن عبارتست از

$$\frac{6(r_1-c_1)-4(s_1-c_2)^2}{4(r_1-c_1)^2-2(r_1-c_1)(s_1-c_2)^2-3(s_1-c_2)} \qquad (۲۱.۶\ )$$

دست یابیم. (مشروط بر اینکه مخرج غیر صفر باشد). جواب عمومی‌معادله دیفرانسیل معمولی مذکور با جایگذاری (۲۰.۶) در

$$(s_1-c_2)v_1^2-2(r_1-c_1)v_1+3=0$$

و قرار دادن (y,x) بجای (r_1,s_1) بدست می‌آید. روشی دیگر برای یافتن جواب، استفاده مکرر از الگوریتم حذف تا زمان حذف v_1 از یکی از معادلات می‌باشد. این الگوریتم برای هر جواب پارامتری که در آن r و s هر دو چند جمله‌ایهای گویا بر حسب یک پارامتر (که لزوماً v نیست) باشند، قابل اجراست.

بخش ۲.۶   تقارنهای جدید بدست‌آمده در روند کاهش

تا کنون فرض کرده‌ایم که جبرلی ما یک زیرجبر حل پذیر به حد کافی بزرگ دارد که ما را قادر می سازد تامعادله دیفرانسیل معمولی را بطور کامل حل کنیم. ادامه این فصل به مبحث‌معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه n که بزرگترین زیرجبرهای حلپذیر آنها از بعد $n-1$ یا کمتر است اختصاص دارد. فرض کنیم $\left\{X_1,\cdots,X_S\right\}$ یک پایه کانونی برای چنین زیرجبری باشد.معادله دیفرانسیل معمولی اصلی بر حسب ناورداهای دیفرانسیلی (r_S,v_S) از این زیرجبر با یک‌معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه $n-S$ هم ارز است. جواب عمومی‌معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته، معادله‌ای جبری به صورت زیر است:

$$v_S=F(r_S;c_1,\cdots,c_{n-S}) \qquad (۲۲.۶\ )$$

چنانچه بتوان این جواب را مشخص کرد،(با استفاده از تقارنهای‌معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته)،مشکل برطرف می‌شود زیرا (۲۱.۶) با یک‌معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه S که شامل تقارنهای تولید شده توسط $\{X_1,\cdots,X_S\}$ می‌باشد، هم ارز است. اگر چنانچه (۲۱.۶) یافت نشود چه باید کرد؟

هر زیرجبر $\mathcal{L}_k=\mathrm{Span}\{X_1,\cdots,X_k\}$ در یک زنجیر حلپذیر را می‌توان برای کاهش معادله دیفرانسیل معمولی اصلی به یک‌معادله دیفرانسیل معمولی هم ارز از مرتبه $n-k$ بر حسب ناورداهای دیفرانسیلی اساسی (r_k,v_k) بکار برد. بنابراین یک دنباله واسطه ازمعادلات دیفرانسیل معمولی ی کاهش یافته وجود دارد. تا کنون از کل $\mathcal{L}_S$ برای دستیابی به بیشترین کاهش مرتبه استفاده کرده‌ایم. اما اگر معادله دیفرانسیل معمولی حداکثر کاهش یافته، قابل حل نباشد قابل استفاده نخواهد بود. اما ممکن است که یکی ازمعادلات دیفرانسیل معمولی ی واسطه، تقارنهای نقطه‌ای جدیدی علاوه بر آنهایی که ازمعادله دیفرانسیل معمولی اصلی به ارث می‌برد داشته باشد. با داشتن تعداد کافی از تقارنهای جدید دستیابی به جواب عمومی معادله واسطه به شکل زیر ممکن خواهد بود:

$$v_k=F(r_k;c_1,\cdots,c_{n-k})$$

سپس $\mathcal{L}_k$ و تقارنهای موجود برای کامل کردن جواب بکار گرفته می‌شوند.

۵.۶ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سه

$$y'''=\frac{2y''^2}{y'}+\frac{y''}{x}+\frac{y'^2}{x} \qquad (۲۳.۶)$$

یک جبر لی آبلی دو بعدی تولید شده توسط

$$X_1=\partial_y, \qquad X_2=x\partial_x$$

دارد. ناورداهای دیفرانسیلی اساسی عبارتند از:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_1=\mathrm{Span}\{X_1\}; && \text{برای} && r_1=x, && v_1=y' \\ &\mathcal{L}_2=\mathrm{Span}\{X_1,X_2\} && \text{برای} && r_2=xy', && v_2=x^2y''. \end{aligned} \qquad (۲۴.۶)$$

بنابراین‌معادله دیفرانسیل معمولی (۲۲.۶) با

$$\frac{dv_2}{dr_2}=\frac{2v_2^2+3r_2v_2+r_2^3}{r_2(v_2+r_2)} \qquad (۲۵.۶)$$

که تقارنهای آن نامعلومند هم ارز است. اما (۲۲.۶) بامعادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دو

$$\frac{d^2v_1}{dr_1^2}=\frac{2}{v_1}\Big(\frac{dv_1}{dr_1}\Big)^2+\frac{1}{r_1}\Big(\frac{dv_1}{dr_1}+v_1^2\Big), \qquad (۲۶.۶)$$

نیز که دارای یک جبرلی هشت بعدی از مولدهای تقارن نقطه‌ای می‌باشد هم ارز است. تقارنهایی که توسط X_2 تولید شده‌اند ازمعادله دیفرانسیل معمولی اصلی (۲۲.۶) به ارث رسیده اند در حالیکه بقیه تقارنها جدید هستند. بجای آزمایش کل جبرلی ترجیحاً می‌توانیم روی زیرجبر دو بعدی $\tilde{\mathcal{L}}_2$ که توسط

$$\tilde{X}_1=v_1^2\partial_{v_1}, \qquad \tilde{X}_2=r_1\partial_{r_1}-v_1\partial_{v_1} \qquad (۲۷.۶)$$

تولید شده است متمرکز شویم. توجه کنید که $\tilde{X}_2$ تحدید مولد X_2 به (r_1, v_1) است. پایه (۲۶.۶) کانونی است زیرا

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = \tilde{X}_1$$

از این رومعادله دیفرانسیل معمولی (۲۵.۶) می‌تواند با بکارگیری ناورداهای دیفرانسیلی

$$\tilde{\mathcal{L}}_1 = \mathrm{Span}\{\tilde{X}_1\}; \qquad \text{برای} \qquad \tilde{r}_1 = r_1, \qquad \tilde{v}_1 = \frac{1}{v_1^2}\frac{dv_1}{dr_1} \tag{۲۸.۶}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_2 \qquad \text{برای} \qquad \tilde{r}_2 = \frac{1}{v_1^2}\frac{dv_1}{dr_1}, \tilde{v}_2 = \frac{r_1}{v_1^2}\frac{d^2v_1}{dr_1^2} - \frac{2r_1}{v_1^3}\Big(\frac{dv_1}{dr_1}\Big)^2$$

به انتگرال گیری کاهش یابد. با حذف جزئیات به جواب عمومی (۲۵.۶) می‌رسیم:

$$v_1 = \frac{2c_1}{(c_1r_1+1)^2 + c_2} \tag{۲۹.۶}$$

در نهایت مختصات کانونی $(r_1, s_1) = (x, y)$ برای کامل کردن جواب (۲۲.۶) که عبارت است از:

$$y = \begin{cases} c_3 + 2\tilde{c}_2 \tan^{-1}\Big(\tilde{c}_2(c_1x+1)\Big) & c_2 = (\tilde{c}_2)^{-2} > 0 \\ c_3 - \dfrac{2}{(c_1x+1)} & c_2 = 0 \\ c_3 + (\tilde{c}_2)^{-1} \ln\Big|\dfrac{c_1x+1-\tilde{c}_2}{c_1x+1+\tilde{c}_2}\Big| & c_2 = -\tilde{c}_2^2 < 0 \end{cases} \tag{۳۰.۶}$$

بکار گرفته می‌شود.
این مثال نشان می‌دهد که اگر چنانچه‌معادله دیفرانسیل معمولی بطور کامل کاهش یافته قابل حل نباشد، محاسبه تقارنهای نقطه‌ای‌معادله دیفرانسیل معمولی واسطه ارزشمند خواهد بود.

بخش ۳.۶ انتگرال‌گیری معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه۳ دارای جبرلی $\mathfrak{sl}(2)$

جبرلی سه بعدی $\mathfrak{sl}(2)$ حلپذیر نیست و روشهای فوق برای‌معادلات دیفرانسیل معمولی ی مرتبه۳ با این جبرلی کارساز نیستند. یکی از ساده ترین روشهای مشخص کردن $\mathfrak{sl}(2)$ به عنوان مجموعه ای از مولدهای تقارنهای نقطه‌ای لی عبارت است از:

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x, \qquad X_3 = x^2\partial_x \tag{۳۱.۶}$$

ناورداهای دیفرانسیلی اساسی برای گروه لی تولید شده توسط (۳۰.۶) عبارتند از

$$r_\alpha = y, \qquad v_\alpha = \frac{2y'y''' - 3y''^2}{2y'^4} \tag{۳۲.۶}$$

از این رو هرمعادله دیفرانسیل معمولی مرتبه۳ که تقارنهای نقطه‌ای لی آن توسط (۳۰.۶) تولید شده است (بازای تابع دلخواه F) بصورت زیر است:

$$v_\alpha = F(r_\alpha) \tag{۳۳.۶}$$

با استفاده از یک زیرگروه حلپذیر که توسط X_1 و X_2 تولید شده است می‌توان با روشهای معمول (۳۲.۶) را به یک‌معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه۱ کاهش داد.معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته معادله ریکاتی

$$z=\frac{y''}{y'^2}, \qquad \text{که} \qquad \frac{dz}{dy}+\frac{1}{2}z^2=F(y) \tag{۳۴.۶}$$

است که با معرفی تابع زیر قابل خطی شدن است:

$$\psi(y)=\sqrt{y'}$$

در اینصورت داریم $z=2\psi'(y)/\psi(y)$ که $\psi(y)$ در معادله شرودینگر

$$\frac{d^2\psi}{dy^2}-\frac{1}{2}F(y)\psi=0 \tag{۳۵.۶}$$

صدق می‌کند. فرض کنید $\psi(y)$ یک جواب غیر صفر دلخواه (۳۴.۶) باشد. اگر $\phi(y)$ یک جواب غیر صفر بطور خطی مستقل از $\psi(y)$ باشد، رونسکین

$$W=\psi(y)\phi'(y)-\phi(y)\psi'(y)$$

یک ثابت غیر صفر است. توجه کنید که

$$\frac{d}{dy}\Big(\frac{\phi(y)}{\psi(y)}\Big)=\frac{W}{\psi^2}=W\frac{dx}{dy}$$

و از این رو

$$W_x=\frac{\phi(y)}{\psi(y)}+c$$

برای راحتی ϕ را در یک عدد ثابت ضرب می‌کنیم تا $W=1$ حاصل شود. این عمل جواب راتغییر نمی‌دهد. علاوه بر این می‌توان c را برابر صفر قرار داد. (با تعریف مجدد ϕ در صورت لزوم.) بنابراین جواب عمومی‌معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سه (۳۲.۶) عبارتست از:

$$x=\frac{\phi(y)}{\psi(y)} \tag{۳۶.۶}$$

این جواب به چهار ثابت دلخواه بستگی ندارد بلکه به سه ثابت وابسته است زیرا ϕ برای تضمین اینکه $W=1$ باشد نرمال شده است. $\mathfrak{sl}(2)$ روی صفحه (x,y) تنها توسط مجموعه مولدهای (۳۰.۶) تولید نمی‌شود بلکه این مجموعه یکی از سه مشخص کننده متمایزی است که تحت هیچ تبدیل نقطه‌ای به یکدیگر نگاشته نمی‌شوند. دو مجموعه مولد دیگر عبارتند از

$$X_1=\partial_x, \qquad X_2=x\partial_x-y\partial_y, \qquad X_3=x^2\partial_x-2xy\partial_y \tag{۳۷.۶}$$

$$X_1=\partial_x, \qquad X_2=x\partial_x-y\partial_y, \qquad X_3=x^2\partial_x-(2xy+1)\partial_y \tag{۳۸.۶}$$

هر یک از این سه مولد، نماینده یک کلاس هم ارزی از مولدهایی است که می‌توانند تحت یک تبدیل نقطه‌ای مختلط به یکدیگر نگاشته شوند.

برای هرمعادله دیفرانسیل معمولی دیگر که مولدهایش تحت یک تبدیل نقطه‌ای به (۳۰.۶) نگاشته شوند، استراتژی حل واضح است. به این ترتیب که: تبدیل را انجام داده و معادله شرودینگر را (در صورت امکان) حل کنید و سپس جواب تبدیل یافته را مجدداً بر حسب متغیرهای اولیه بازنویسی کنید. جالب توجه است که استراتژی مشابهی برای‌معادلات دیفرانسیل معمولی یی که مولدهای آنها هم ارز با یکی از دو مولد دیگر است وجود دارد. تنها تفاوتی که وجود دارد این است که تبدیل مورد نیاز در اینجا، تبدیل نقطه‌ای نیست.

امتداد مرتبه اول مجموعه مولدهای (۳۰.۶) عبارتست از:

$$X_1=\partial_x,\qquad X_2=x\partial_x-y'\partial_{y'},\qquad X_3=x^2\partial_x-2xy'\partial_{y'}.$$

فرض کنیم $p=y'$ باشد آنگاه مولدهای امتداد یافته عبارتند از:

$$X_1=\partial_x,\qquad X_2=x\partial_x-p\partial_p,\qquad X_3=x^2\partial_x-2xp\partial_p \tag{۳۹.۶}$$

که دومین حالت مشخص سازی (۳۶.۶) می‌باشد(با جایگذاری p بجای y). معمول ترین‌معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سه با تقارنهای تولید شده توسط (۳۸.۶) عبارت است از:

$$v_\beta=G(r_\beta) \tag{۴۰.۶}$$

که ناورداهای دیفرانسیلی اساسی آن عبارتند از:

$$r_\beta=v_\alpha=\frac{2pp''-3p'^2}{2p^4},\qquad v_\beta=\frac{dv_\alpha}{dr_\alpha}=\frac{p^2p'''-6pp'p''+6p'^3}{p^6} \tag{۴۱.۶}$$

بنابراین داریم:

$$\int\frac{dv_\alpha}{G(v_\alpha)}=r_\alpha+c=y+c \tag{۴۲.۶}$$

هدف ما مشخص کردن $p=y'$ بصورت تابعی از x است. بنابراین می‌توان c را برابر با مقدار مناسبی قرار داد بدون اینکه تاثیری روی نتیجه داشته باشد. مشروط بر اینکه (۴۱.۶) به منظور دستیابی به عبارت:

$$v_\alpha=F(r_\alpha)$$

قابل حل باشد می‌توان مسئله را به مسئله‌ای که پیشتر مورد بحث قرار گرفت کاهش داد. به محض اینکه جواب

$$x=\frac{\phi(y)}{\psi(y)} \tag{۴۳.۶}$$

پیدا شد رسیدن به

$$p=\frac{dy}{dx}=(\psi(y))^2 \tag{۴۴.۶}$$

آسان است.(۴۲.۶) و (۴۳.۶) با همدیگر یک جواب پارامتری برای‌معادله دیفرانسیل معمولی (۳۹.۶) تشکیل می‌دهند.

۶.۶ مثال. به منظور توضیح دادن روش، جواب‌معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه۴

$$\tilde{y}^{(iv)} = \frac{2}{\tilde{y}}(1-\tilde{y}')\tilde{y}''' \qquad (۴۵.۶)$$

را کامل خواهیم کرد. (در اینجا $\tilde{y}$ بجای y استفاده می‌شود تا از بوجود آمدن ابهام جلوگیری شود.) در مثال (۵.۲) این‌معادله دیفرانسیل معمولی را به

$$\tilde{y}''' = \frac{2\tilde{y}\tilde{y}'' - \tilde{y}'^2 + c_1}{\tilde{y}^2} \qquad (۴۶.۶)$$

کاهش دادیم که دارای مولدهای تقارن نقطه‌ای لی زیر است:

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x - \tilde{y}\partial_{\tilde{y}}, \qquad X_3 = x^2\partial_x - 2x\tilde{y}\partial_{\tilde{y}} \qquad (۴۷.۶)$$

فرض کنیم $p = \frac{1}{\tilde{y}}$ باشد. دراینصورت مولدهای (۶.۴۶) با (۶.۳۶) هم ارزند.معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته (۴۵.۶) با

$$v_\beta = 2r_\beta - c_1$$

هم ارز است. بنابراین داریم:

$$v_\alpha = F(r_\alpha) := \frac{1}{2} + \exp\left\{2(r_\alpha + c)\right\}.$$

مناسب تر است که قرار دهیم: $c = \frac{1}{2}(\ln 2 + \pi i)$ بنابراین معادله شرودینگر عبارتست از:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + (e^{2y} - \frac{1}{4}c_1)\psi = 0$$

که با معادله بسل

$$t^2\frac{d^2\psi}{dt^2} + t\frac{d\psi}{dt} + (t^2 - \nu^2)\psi = 0, \qquad t = e^y, \qquad \nu = \frac{1}{2}\sqrt{c_1} \qquad (۴۸.۶)$$

هم ارز می‌باشد. لذا از (۴۲.۶) و (۴۳.۶) جواب عمومی‌معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه۳ (۴۵.۶) عبارتست از:

$$x = \frac{c_2 J_\nu(t) + c_3 Y_\nu(t)}{c_4 J_\nu(t) + c_5 Y_\nu(t)}, \qquad p = (c_4 J_\nu(t) + c_5 Y_\nu(t))^2, \qquad (۴۹.۶)$$

که $J_\nu(t)$ و $Y_\nu(t)$ توابع بسل هستند و همچنین c_1 و c_2 طوری انتخاب شده اند که

$$W = \frac{2}{\pi}(c_3 c_4 - c_2 c_5) = 1.$$

در پایان جواب (۴۴.۶) را از اتحاد $\tilde{y} = p^{-1}$ بدست می‌آوریم.

سومین مجموعه مولد،(۳۷.۶)، به همان ترتیب که دومین مجموعه به اولین مجموعه وابسته بود، به دومین مجموعه وابسته می‌باشد. با استداددهی مولدهای (۳۸.۶) بدست می‌آوریم

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x - p\partial_p - 2p'\partial_{p'}, \qquad X_3 = x^2\partial_x - 2xp\partial_p - (4xp' + 2p)\partial_{p'}$$

که با

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x - p\partial_p - q\partial_q, \qquad X_3 = x^2\partial_x - 2xp\partial_p - (2xq+1)\partial_q$$

معادل است و در آن

$$q(x) = \frac{p'(x)}{2p(x)}. \tag{۵۰.۶}$$

بنابراین تحدید دومین مجموعه مولد امتداد داده شده به توابعی از x و q عبارت است از:

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x - q\partial_q, \qquad X_3 = x^2\partial_x - (2xq+1)\partial_q \tag{۵۱.۶}$$

که با سومین مجموعه مولد هم ارز است. ناورداهای دیفرانسیلی اساسی (۵۰.۶) عبارتند از:

$$\begin{aligned} r_\gamma &= \frac{v_\beta}{r_\beta^{3/2}} = \frac{q'' - 6qq' + 4q^3}{\sqrt{2}(q'-q^2)^{3/2}}, \\ v_\gamma &= \frac{2v_\beta}{r_\beta^2}\frac{dv_\beta}{dr_\beta} = \frac{q''' - 12qq'' + 18q'^2}{(q'-q^2)^2} - 24 \end{aligned} \tag{۵۲.۶}$$

از اینرومعادله دیفرانسیل معمولی مرتبه۳ که تقارنهای نقطه‌ای لی آن توسط (۵۰.۶) تولید شده اند، یعنی:

$$v_\gamma = H(r_\gamma)$$

با

$$\frac{2v_\beta}{r_\beta^2}\frac{dv_\beta}{dr_\beta} = H\Big(\frac{v_\beta}{r_\beta^{3/2}}\Big) \tag{۵۳.۶}$$

هم ارز است. این‌معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۱ دارای تقارنهای مقیاسی (که توسط $X = 2r_\beta\partial_{r_\beta} + 3v_\beta\partial_{v_\beta}$ تولید شده) می‌باشد و این ما را قادر می‌سازد تا معادله دیفرانسیل معمولی مذکور را با انتگرال گیری کاهش دهیم:

$$r_\beta = c\exp\Big\{\int \frac{2r_\gamma dr_\gamma}{H(r_\gamma) - 3r_\gamma^2}\Big\} \tag{۵۴.۶}$$

فرض کنید (۵۳.۶) را به منظور بدست آوردن r_γ بر حسب r_β بتوان بازنویسی نمود. در اینصورت این مسئله به مسئله یافتن جواب عمومی‌معادله دیفرانسیل معمولی ای که تقارنهای نقطه‌ای لی آن متعلق به مجموعه مولد دوم است، کاهش می‌یابد. یعنی:

$$v_\beta = G(r_\beta) := r_\beta^{3/2} r_\gamma(r_\beta) \tag{۵۵.۶}$$

اکنون با توجه به (۴۲.۶) و (۴۳.۶) میدانیم که جواب عمومی (۵۴.۶) به شکل

$$x = \frac{\phi(y)}{\psi(y)}, \qquad P = \frac{dy}{dx} = (\psi(y))^2$$

است. بنابراین

$$q = \frac{p'(x)}{2p(x)} = \psi(y)\psi'(y)$$

لذا جواب پارامتری‌معادله دیفرانسیل معمولی عمومی‌ای که تقارنهای آن در مجموعه مولد سوم است عبارتست از:

$$x = \frac{\phi(y)}{\psi(y)}, \qquad q = \psi(y)\psi'(y) \tag{۵۶.۶}$$

جالب توجه است که هر سه مجموعه مولد مشخص کننده، با امتداددهی به یکدیگر مرتبط می‌شوند. بنابراین (در اصل) همه به معادله شرودینگر کاهش می‌یابند. اما این روش نیازمند این است که انتگرال گیری ها در هر مرحله تحت کنترل باشند.

مطالعه بیشتر

روش انتگرال‌گیری مکرر که در بخش ۱.۶ مطرح شد در نوشته‌های متفاوتی ارائه شده است. استفانی (۱۹۸۹) چندین نمونه متفاوت شامل الگوریتم لی برای ساختن انتگرالهای خطی در هر مرحله را بیان کرده است.

در بیشتر این کتابها مسئله وجود جوابها در فرم بسته در نظر گرفته شده است. کاکس، لیتل و اوشین (۱۹۹۲) شامل مقدمه‌ای آسان برای ضمنی سازی و مسائل متفاوت مرتبط می‌باشد.

بخش ۶.۳ بر اساس مقاله‌ای است که توسط اولور و کلارکسون (۱۹۹۶) ارائه شده است و بطور اخص روی معادله چزی متمرکز شده است. این مقاله بطور واضحی ارزش روش تقارنی در مواجهه با مسائل تحلیلی دشوار را نشان می‌دهد.

تمرین‌ها

۱.۶ جواب عمومی $y'' = y'(1-y')/y$ که تقارنهای نقطه ای آن توسط $X_1 = \partial_x, X_2 = x\partial_x + y\partial_y$ تولید شده است را بیابید.

۲.۶ معادله دیفرانسیل معمولی $y'' = yy'/x^3 - y^2x^4$ را حل کنید.

۳.۶ از (۲۸.۶) مشتق بگیرید.

۴.۶ معادله دیفرانسیل معمولی $y'' = 1/(xy^2)$ را حل کنید.

۵.۶ معادله دیفرانسیل معمولی $y'' = y'^2/y - y^2/(x^3y')$ دارای یک جبرلی دو بعدی که توسط $X_1 = x\partial_x$ و $X_2 = y\partial_y$ تولید شده است می‌باشد. این مولدها را به منظور حل این‌معادله دیفرانسیل معمولی بصورت مناسبی بکار گیرید.

۶.۶ معادله دیفرانسیل معمولی $y''' = 3y''^2/(2y') + (y^2/2+1)y'^3$ که دارای جبرلی $\mathfrak{sl}(2)$ است و توسط $X_1 = \partial_x$، $X_2 = x\partial_x$ و $X_3 = x^2\partial_x$ تولید شده است را حل کنید.

۷.۶ مولدهای تقارنی $X_1 = \partial_x$ و $X_2 = x\partial_x + y\partial_y$ را برای یافتن جواب عمومی $y'' = (y'-1)/y$ در شکل پارامتری آن بکار گیرید. حال پارامتر را حذف نمایید تا جوابی به شکل $F(x; c_1, c_2)$ بدست آید.

فصل ۷

روشهای مبتنی بر انتگرالهای اولیه

بت بزرگ از بت کوچک پرسید، عمیق ترین پرسشها: چگونه انسان پایین می رود، چطور پاهایش را از زمین آویزان می کند؟

(دیک اسمیتز و یان پلینکر: الفبای زوپ)

بخش ۱.۷ انتگرالهای اولیه حاصل از تقارنها

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم که دارای جبرلی $\mathfrak{so}(3)$ می‌باشند، با استفاده از یک زیرجبر حل پذیر دو بعدی قابل حل نمی‌باشند.(بازای هیچ زیرجبر موجود). اما این معادلات دیفرانسیل معمولی با روشی متفاوت می‌توانند حل شوند. در این بخش روشی آسان جهت استفاده از تقارنهای نقطه‌ای لی به منظور یافتن انتگرالهای اولیه یک معادله دیفرانسیل معمولی می‌یابیم. این روش مبتنی بر حالتی است که بعد جبرلی از مرتبه معادله دیفرانسیل معمولی بیشتر باشد. (یادآوری :$\mathfrak{so}(3)$ سه بعدی است.) جالب توجه است که این روش ما را قادر می‌سازد تا برخی از معادلات دیفرانسیل معمولی را بدون اینکه مجبور به انجام هیچگونه انتگرال‌گیری باشیم، حل نماییم.

انتگرال اولیه معادله دیفرانسیل معمولی

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \qquad (۱.۷)$$

تابع غیر ثابت

$$\phi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \qquad (۲.۷)$$

که روی جوابهای معادله دیفرانسیل معمولی ثابت است، می‌باشد. از این رو

$$D_x\phi = 0 \qquad \text{زمانیکه (۱.۷) برقرار باشد} \qquad (۳.۷)$$

شکل مرتب‌تر معادلات مبین بصورت

$$\bar{D}\phi = 0, \qquad \phi_{y^{(n-1)}} \neq 0 \qquad (۴.۷)$$

است که

$$\bar{D} = \partial_x + y'\partial_y + \cdots + y^{(n-1)}\partial_{y^{(n-2)}} + \omega\partial_{y^{(n-1)}}. \qquad (۵.۷)$$

تا کنون ما بطور کلی تقارنهای نقطه‌ای لی را توسط مولدهای بی نهایت کوچک آنها مشخص کرده‌ایم اما در سراسر این فصل کار کردن با مشخصه $Q = \eta - y'\xi$ بسیار راحت‌تر خواهد بود. شرط تقارن خطی بر حسب Q بصورت زیر بیان می شود:

$$\bar{D}^n Q - \omega_{y^{(n-1)}}\bar{D}^{n-1}Q - \cdots - \omega_{y'}\bar{D}Q - \omega_y Q = 0 \qquad (۶.۷)$$

برای بدست آوردن این نتیجه اتحادهای

$$\eta^k = D_x^k Q + y^{(k+1)}\xi, \qquad k = 0, \cdots, n \qquad (۷.۷)$$

را در شرط تقارن خطی (۱۲.۳) جایگذاری می کنیم در این صورت بدست می‌آوریم:

$$D_x^n Q - \omega_{y^{(n-1)}} D_x^{n-1} Q - \cdots - \omega_{y'} D_x Q - \omega_y Q \qquad (۸.۷)$$
$$+\xi D_x(y^{(n)} - \omega) = 0 \qquad \text{وقتی} \qquad y^{(n)} = \omega$$

جملاتی که در ξ ضرب شده اند حذف می‌شوند زیرا هر جواب معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۷) یک جواب معادله

$$D_x^k(y^n - \omega) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \qquad (۹.۷)$$

است. اکنون جملات به شکل $\bar{D}^k Q$ را در هر مشتق گیری جدا می‌کنیم. برای مثال:

$$D_x Q = \bar{D}Q + HQ$$

که در آن:

$$H = (y^n - \omega)\partial_{y^{(n-1)}} \qquad (۱۰.۷)$$

به طور مشابه داریم:

$$D_x^2 = \bar{D}^2 Q + H(\bar{D}Q) + D_x(HQ)$$

و در حالتی کلی تر داریم:

$$D_x^k = \bar{D}^k Q + \sum_{j=0}^{k-1} D_x^{k-1-j}(H(\bar{D}^j Q)) \qquad (۱۱.۷)$$

با استفاده از (۹.۷)، رابطه (۱۱.۷) بازای هر تابع $Q(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ نتیجه می‌دهد:

$$D_x^k Q|_{y^{(n)}=\omega} = \bar{D}^k Q, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

و بنابراین (۸.۷) با (۱۱.۷) هم ارز است.

فرض کنید مولدهای بینهایت کوچک $X_1, \cdots, X_R$ یک پایه برای جبرلی مولدهای تقارن نقطه‌ای معادله دیفرانسیل معمولی مفروض (۱.۷) بسازند. در اینصورت مشخصه‌های متناظر $Q_1, \cdots, Q_R$

یک پایه برای مجموعه همه جوابهای (۶.۷) که تنها به (x,y,y') بستگی دارند و نسبت به y' خطی هستند، می‌سازند. سایر جوابهای (۶.۷) در بخش بعد مورد بحث قرار خواهند گرفت.

در اینجا توجه خود را به معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۲

$$y''=\omega(x,y,y') \tag{۱۲.۷}$$

که جبرلی $\mathcal{L}$ آنها دارای بعد $R>2$ می‌باشد، معطوف می‌کنیم. تابع $\varphi(x,y,y')$ یگ انتگرال اولیه (۱۲.۷) است اگر

$$\bar{D}\varphi=0, \qquad \varphi_{y'}\neq 0 \tag{۱۳.۷}$$

که در آن

$$\bar{D}=\partial_x+y'\partial_y+\omega\partial_{y'} \tag{۱۴.۷}$$

چنانچه بتوانیم دو انتگرال اولیه مستقل تابعی مانند φ^1 و φ^2 بیابیم، به جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی در شکل پارامتری

$$\varphi^1(x,y,y')=c_1, \qquad \varphi^2(x,y,y')=c_2 \tag{۱۵.۷}$$

دست خواهیم یافت. در اینجا y' به عنوان پارامتری عمل می‌کند که در صورت نوشتن جواب عمومی به فرم بسته آن، ملزم به حذف می‌باشد.

فرض کنیم $\{X_1,\cdots,X_R\}$ پایه‌ای مفروض برای $\mathcal{L}$ باشد. برای نمایش مشخصه متناظر با X_i از Q_i استفاده می‌کنیم. فرض کنید:

$$W_{ij}=Q_i\bar{D}Q_j-Q_j\bar{D}Q_i, \qquad 1\leq i<j\leq R \tag{۱۶.۷}$$

در اینصورت شرط تقارن خطی (۶.۷) عبارت است از:

$$\bar{D}^2Q_i-\omega_{y'}\bar{D}Q_i-\omega_yQ_i=0 \tag{۱۷.۷}$$

و از این رو

$$\bar{D}W_{ij}=Q_i\bar{D}^2Q_j-Q_j\bar{D}^2Q_i=\omega_{y'}W_{ij} \tag{۱۸.۷}$$

نسبت هر دو مقدار غیر صفر W_{ij} یک مقدار ثابت و در غیر اینصورت یک انتگرال اولیه است. زیرا (۱۸.۷) نتیجه می‌دهد:

$$\bar{D}\left(\frac{W_{ij}}{W_{kl}}\right)=0$$

انتگرالهای اولیه زمانیکه $W_{ij}=0$ است نیز بوجود می‌آیند زیرا در اینصورت:

$$\bar{D}\left(\frac{Q_j}{Q_i}\right)=0$$

(کسر Q_j/Q_i یک مقدار ثابت نیست بلکه یک انتگرال اولیه است زیرا X_i و X_j مسقل خطی می باشند). با حاصل شدن این نتایج محاسبه انتگرالهای اولیه سرراست است.

تذکر: برای برخی توابع ω از رابطه (۱۸.۷) یک انتگرال اولیه دیگر نیز می‌تواند بدست آید. برای مثال اگر $\omega_{y'}=0$ باشد آنگاه هر مقدار غیر ثابت W_{ij} یک انتگرال اولیه است.

۱.۷ مثال. جبرلی $\mathfrak{so}(3)$ توسط مولدهای تقارن

$$X_1 = y\partial_x - x\partial_y, \qquad X_2 = \frac{1}{2}(1+x^2-y^2)\partial_x + xy\partial_y, \qquad (۱۹.۷)$$
$$X_3 = xy\partial_x + \frac{1}{2}(1-x^2+y^2)\partial_y$$

مشخص می‌شود. این مولدها دارای مشخصه‌های

$$Q_1 = -x - yy', \qquad Q_2 = xy - \frac{1}{2}(1+x^2-y^2)y', \qquad (۲۰.۷)$$
$$Q_3 = \frac{1}{2}(1-x^2+y^2) - xyy'$$

می‌باشند. می‌خواهیم روش فوق را برای حل معادله دیفرانسیل معمولی

$$y'' = \frac{2(xy'-y)(1+y'^2)}{1+x^2+y^2} \qquad (۲۱.۷)$$

که تقارنهای نقطه‌ای لی آن توسط (۱۹.۷) تولید شده‌اند، بکار گیریم. ابتدا عملگر

$$\bar{D} = \partial_x + y'\partial_y + \omega\partial_{y'} \qquad \text{که} \qquad \omega = \frac{2(xy'-y)(1+y'^2)}{1+x^2+y^2}$$

را برای هر مشخصه به ترتیب اعمال می‌کنیم که در اینصورت نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{D}Q_1 &= -(1+y'^2) - y\omega, \\ \bar{D}Q_2 &= y(1+y'^2) + \frac{1}{2}(y^2-x^2-1)\omega, \\ \bar{D}Q_3 &= -x(1+y'^2) - xy\omega. \end{aligned} \qquad (۲۲.۷)$$

اکنون هر W_{ij} را با جایگذاری طرف راست رابطه (۲۱.۷) برای ω محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \frac{1}{2}(1+y'^2)\{2x(xy'-y) - y'(1+x^2+y^2)\}, \\ W_{13} &= \frac{1}{2}(1+y'^2)\{2x(xy'-y) + 1 + x^2 + y^2\}, \\ W_{23} &= (1+y'^2)(xy'-y) \end{aligned} \qquad (۲۳.۷)$$

بنابراین انتگرالهای اولیه مستقل تابعی (۲۱.۷) عبارتند از:

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \frac{W_{12}}{W_{23}} = x - \frac{y'(1+x^2+y^2)}{2(xy'-y)} \\ \varphi^2 &= \frac{W_{13}}{W_{23}} = y + \frac{1+x^2+y^2}{2(xy'-y)} \end{aligned} \qquad (۲۴.۷)$$

با حذف y' از (۱۵.۷) جواب عمومی زیر را بدست می‌آوریم:

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = 1 + c_1^2 + c_2^2 \qquad (۲۵.۷)$$

(**تذکر:** جوابهایی به شکل $y=cx$ نیز موجودند که در آن W_{12} صفر است.)
هر معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۲ که دارای جبرلی $\mathfrak{so}(3)$ است می‌تواند به این روش حل شود.

برای روشن شدن اینکه روش بالا چطور نتیجه می‌شود و چگونه تعمیم می‌یابد، معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه۳

$$y''' = \omega(x,y,y',y'') \qquad (۲۶.۷)$$

را در نظر بگیرید. شرط تقارن خطی بصورت زیر است :

$$\bar{D}^3Q - \omega_{y''}\bar{D}^2Q - \omega_{y'}\bar{D}Q - \omega_y Q = 0 \qquad (۲۷.۷)$$

که در اینجا

$$\bar{D} = \partial_x + y'\partial_y + y''\partial_{y'} + \omega\partial_{y''} \qquad (۲۸.۷)$$

جوابهای معادلات زیر، انتگرالهای اولیه می باشند

$$\bar{D}\varphi = 0, \qquad \varphi_{y''} \neq 0.$$

فرض کنیم $R \geq 4$. چهار تابع مشخصه مستقل تابعی $Q_1,\cdots,Q_4$ که در شرط (۲۷.۷) صدق می‌کنند را در نظر بگیرید. رتبه ماتریس

$$Q_{1234} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ \bar{D}Q_1 & \bar{D}Q_2 & \bar{D}Q_3 & \bar{D}Q_4 \\ \bar{D}^2Q_1 & \bar{D}^2Q_2 & \bar{D}^2Q_3 & \bar{D}^2Q_4 \\ \bar{D}^3Q_1 & \bar{D}^3Q_2 & \bar{D}^3Q_3 & \bar{D}^3Q_4 \end{bmatrix}$$

۳ یا کمتر است زیرا (۲۷.۷) این امکان را فراهم می‌کند که چهار سطر Q_{1234} را بصورت ترکیب خطی دیگر سطرها بنویسیم. فرض کنید:

$$Q_{ijk} = \begin{bmatrix} Q_i & Q_j & Q_k \\ \bar{D}Q_i & \bar{D}Q_j & \bar{D}Q_k \\ \bar{D}^2Q_i & \bar{D}^2Q_j & \bar{D}^2Q_k \end{bmatrix}$$

و فرض کنید:

$$W_{ijk} = det(Q_{ijk})$$

توجه کنید که داریم:

$$\bar{D}W_{ijk} = \omega_{y''}W_{ijk} \qquad (۲۹.۷)$$

اگر چنانچه رتبهQ_{1234} سه باشد در اینصورت بدون کاسته شدن از کلیت موضوع می‌توان فرض کرد فضای ستونی Q_{1234} توسط سه ستون اول تولید شده است.(در صورت لزوم با نامگذاری دوباره Q_i ها) در اینصورت توابع μ_i موجودند بطوریکه

$$Q_{123}\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_4 \\ \bar{D}Q_4 \\ \bar{D}^2Q_4 \end{bmatrix} \qquad (۳۰.۷)$$

و نیز

$$\mu_1\bar{D}^3Q_1+\mu_2\bar{D}^3Q_2+\mu_3\bar{D}^3Q_3=\bar{D}^3Q_4 \qquad (۳۱.۷)$$

با اعمال عملگر $\bar{D}$ برای (۳۰.۷) و سپس با استفاده از (۳۰.۷) و (۳۱.۷) بدست می‌آوریم:

$$Q_{123}\begin{bmatrix}\bar{D}\mu_1\\ \bar{D}\mu_2\\ \bar{D}\mu_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (۳۲.۷)$$

فرض کرده‌ایم که Q_{123} نامنفرد است بنابراین داریم:

$$\bar{D}\mu_i=0,\qquad i=1,2,3 \qquad (۳۳.۷)$$

از این رو توابع μ_i انتگرالهای اولیه یا ثابتها هستند. برای روشن شدن این موضوع (۳۰.۷) را با روش کرامر حل می‌کنیم:

$$\mu_1=\frac{W_{423}}{W_{123}},\qquad \mu_2=\frac{W_{143}}{W_{123}},\qquad \mu_3=\frac{W_{124}}{W_{123}} \qquad (۳۴.۷)$$

اگر (۳۴.۷) تنها دو انتگرال اولیه مستقل تابعی را نتیجه دهد بررسی اینکه آیا انتگرال اولیه دیگری از رابطه (۲۹.۷) قابل دستیابی است یا خیر، مفید خواهد بود.

تا اینجا فرض کرده‌ایم که رتبه $Q_{1234}=3$ است بنابراین حداقل یکی از دترمینانهای W_{ijk} غیرصفر است. اگر رتبه $Q_{1234}=3$ دو باشد می‌توانیم بحث بالا را برای هر ماتریس Q_{ijk} که دارای رتبه ۲ است بکار گیریم. فرض کنیم $Q_{123}=2$ باشد همچنین فضای ستونی Q_{123} توسط دو ستون اول تولید شده باشد فرض کنیم:

$$Q_{ij}=\begin{bmatrix}Q_i & Q_j\\ \bar{D}Q_i & \bar{D}Q_j\end{bmatrix}$$

و همچنین

$$W_{ij}=\det(Q_{ij})=Q_i\bar{D}Q_j-Q_j\bar{D}Q_i$$

با تکرار این روند که منجر به رسیدن به روابط (۳۳.۷) و (۳۴.۷) می شود، داریم:

$$\bar{D}\left(\frac{W_{13}}{W_{12}}\right)=0,\qquad \bar{D}\left(\frac{W_{23}}{W_{12}}\right)=0 \qquad (۳۵.۷)$$

از این رو نسبتهای W_{ijk}، انتگرالهای اولیه یا ثابتها هستند.

بطور خلاصه استراتژی یافتن انتگرالهای اولیه برای معادله دیفرانسیل معمولی های مرتبه سه (با چهار مولد تقارنی) به این صورت است که اگر رتبه $Q_{1234}=3$ باشد، نسبتهای W_{ijk} را محاسبه کنید.(نیازی به درنظر گرفتن نسبت دترمینانهای هیچ یک از Q_{ijk} ها که برای آنها $W_{ijk}=0$ است، نمی‌باشد چرا که این موارد مشمول در نسبتهای محاسبه شده می‌باشند.) اگر این کار تنها دو انتگرال اولیه نتیجه دهد تحقیق کنید که آیا انتگرال اولیه دیگری از (۲۹.۷) نتیجه می‌شود یا خیر. اگر رتبه $Q_{1234}=2$ باشد در اینصورت باید نسبتهای هر دترمینان غیرصفر W_{ijk} محاسبه شود.

تعمیم روش فوق به‌معادله دیفرانسیل معمولی های مرتبه بالاتر واضح است. یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n که دارای $R \geq n+1$ مولد تقارن نقطه ای لی است را در نظر بگیرید. با محاسبه

$$\nu = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_R \\ \bar{D}Q_1 & \bar{D}Q_2 & \dots & \bar{D}Q_R \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{D}^{n-1}Q_1 & \bar{D}^{n-1}Q_2 & \dots & \bar{D}^{n-1}Q_R \end{bmatrix} \tag{۳۶.۷}$$

شروع کنید. سپس دترمینانهای $\nu\times\nu$ ماتریسهای به شکل

$$Q_{i_1,\cdots,i_\nu} = \begin{bmatrix} Q_{i_1} & Q_{i_2} & \dots & Q_{i_\nu} \\ \bar{D}Q_{i_1} & \bar{D}Q_{i_2} & \dots & \bar{D}Q_{i_\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{D}^{\nu-1}Q_{i_1} & \bar{D}^{\nu-1}Q_{i_2} & \dots & \bar{D}^{\nu-1}Q_{i_\nu} \end{bmatrix} \tag{۳۷.۷}$$

را محاسبه کنید. نسبت دترمینانهای غیر صفر، انتگرالهای اولیه یا مقادیر ثابت هستند. اگر $\nu = n$ باشد و این روش تنها $n-1$ انتگرال اولیه را نتیجه دهد تلاش کنید تا یک انتگرال اولیه دیگر بصورت

$$W_{i_1,\cdots,i_\nu} = \det(Q_{i_1,\cdots,i_\nu}) \qquad \text{که} \qquad \bar{D}W_{i_1,\cdots,i_\nu} = \omega_{y^{(n-1)}} W_{i_1,\cdots,i_\nu} \tag{۳۸.۷}$$

بدست آورید.

در مورد تقارنهای نقطه‌ای، هر Q_i تابعی از x و y و y' می‌باشد. بنابراین:

$$\partial_{y^{(n-1)}}(\bar{D}^k Q_i) = 0 \qquad k = 1,\cdots,n-3$$

کلیه انتگرالهای اولیه شامل $y^{(n-1)}$ هستند از این رو می‌توانیم انتگرالهای اولیه را اگر $\nu \in \{n-1,n\}$ باشد با روش فوق بدست آوریم. معمولاً $\nu = n$ است اما اگر کل جبر لی مورد استفاده قرار نگیرد ممکن است حالات دیگری رخ دهد.

۲.۷ مثال . برای تشریح روشی که در بالا مطرح شد معادله دیفرانسیل معمولی

$$y''' = \frac{(3y'-1)y''^2}{y'^2} \tag{۳۹.۷}$$

را در نظر بگیرید که دارای یک جبرلی ۴ بعدی تولید شده توسط

$$X_1 = \partial_y, \qquad X_2 = \partial_x, \qquad X_3 = x\partial_x + y\partial_y, \qquad X_4 = y\partial_x \tag{۴۰.۷}$$

می‌باشد. بنابراین

$$\nu = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -y' & y-xy' & -yy' \\ 0 & -y'' & -xy'' & -yy''-y'^2 \\ 0 & -\omega & -x\omega-y'' & -y\omega-3y'y'' \end{bmatrix} = 3 \qquad y''\neq 0 \quad \text{اگر}$$

(طبق معمول، ω نمایش طرف راست معادله دیفرانسیل معمولی می باشد.) اکنون دترمینانهای W_{ijk} را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} W_{123} &= y''^2, \\ W_{124} &= 3yy''^2 - y'^2\omega = y''^2, \\ W_{134} &= (3xy' - y)y''^2 - y'^2y'' - xy'^2\omega = (x-y)y''^2 - y'^2y'', \\ W_{234} &= -3yy'y''^2 + y'^3y'' + yy'^2\omega = -yy''^2 + y'^3y''. \end{aligned}$$

از آنجاییکه $W_{123} = W_{124}$ است تنها دو منحنی انتگرال زیر بدست می‌آیند:

$$\varphi^1 = x - y - \frac{y'^2}{y''}, \qquad \varphi^2 = -y + \frac{y'^3}{y''} \tag{۴۱.۷}$$

اما رابطه

$$\bar{D}W_{ijk} = \omega_{y''}W_{ijk} = \frac{2(3y'-1)y''}{y'^2}W_{ijk}$$

با شرط $W_{ijk} = W_{123}$ منجر به سومین انتگرال اولیه (مستقل تابعی) زیر می‌شود:

$$\varphi^3 = 2\ln|y''| - 6\ln|y'| - \frac{2}{y'} \tag{۴۲.۷}$$

با حذف y' و y'' از معادلات $\varphi^i = c_i$ جواب عمومی

$$x = y + c_1 - (y + c_2)(\frac{1}{2}c_3 + \ln|y + c_2|) \tag{۴۳.۷}$$

را بدست می‌آوریم.

بکارگیری این روش نسبتاً آسان است بخصوص با کمک یک سیستم حسابگر جبری. این روش برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه۲ که جبرلی آنها$\mathfrak{so}(3)$ است بکار می رود. برای سایرمعادلات دیفرانسیل معمولی نیز این امر یک میانبر برای دستیابی به جواب عمومی را فراهم می‌کند. این روش برای هر مجموعه به اندازه کافی بزرگ از جوابهای مستقل خطی

$$\bar{D}^nQ - \omega_{y^{(n-1)}}\bar{D}^{n-1}Q - \cdots - \omega_{y'}\bar{D}Q - \omega_yQ = 0 \tag{۴۴.۷}$$

می تواند بکارگرفته شود. شرط تقارن خطی (۴۴.۷) شامل تعداد نامتناهی جواب می‌باشد که اکثراً مشخصه‌های تقارنهای نقطه ای لی نیستند ولی به تقارنهای مراتب بالاتر مربوط می‌شوند.

بخش ۲.۷ تقارنهای برخوردی و تقارنهای دینامیکی

تا کنون تنها به دنبال تقارنهایی بوده‌ایم که تبدیلات نقطه‌ای بودند. یعنی دیفیومورفیسمهایی در صفحه. هر مولد یک گروه لی تک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای، دارای مشخصه $Q(x,y,y')$ است که نسبت به y' خطی است. توابع ξ و η و $\eta^{(1)}$، بر حسب Q و مشتقات اول آن بصورت زیر قابل بیان هستند:

$$\xi = -Q_{y'}, \qquad \eta = Q - y'Q_{y'}, \qquad \eta^{(1)} = Q_x + y'Q_y \tag{۴۵.۷}$$

یک**تبدیل برخوردی** دیفیومورفیسمی از متغیرهای x و y و y' می‌باشد که با قوانین امتداددهی معمول، قابل گسترش به مشتقات می‌باشد:

$$\hat{y}^{(k+1)} = \frac{d\hat{y}^{(k)}}{d\hat{x}}, \qquad k = 0, 1, \cdots \tag{۴۶.۷}$$

بنابراین دیفیومورفیسم

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y'}) = (\hat{x}(x, y, y'), \hat{y}(x, y, y'), \hat{y'}(x, y, y')) \tag{۴۷.۷}$$

یک تبدیل برخوردی است اگر (۴۶.۷) بازای $k = 0$ برقرار باشد. یعنی اگر داشته باشیم:

$$\hat{y}'(x, y, y') = \frac{\hat{y}_x + y'\hat{y}_y + y''\hat{y}_{y'}}{\hat{x}_x + y'\hat{x}_y + y''\hat{x}_{y'}} \tag{۴۸.۷}$$

نظر به اینکه $\hat{y}'$ لزوماً باید مستقل از y'' باشد هر تبدیل برخوردی به شکل (۴۷.۷) در شرط برخوردی

$$\hat{y}_{y'} = \hat{y}'\hat{x}_{y'} \tag{۴۹.۷}$$

صدق می‌کند. در نتیجه (۴۸.۷) رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\hat{y}_x + y'\hat{y}_y = \hat{y}'(\hat{x}_x + y'\hat{x}_y) \tag{۵۰.۷}$$

گروههای لی تک پارامتری از تبدیلات برخوردی با بسط دادن حول عضو همانی بصورت زیر ساخته می‌شوند:

$$\begin{array}{rcl} \hat{x} &=& x + \varepsilon\xi(x, y, y') + O(\varepsilon^2) \\ \hat{y} &=& y + \varepsilon\eta(x, y, y') + O(\varepsilon^2) \\ \hat{y}' &=& y' + \varepsilon\eta^{(1)}(x, y, y') + O(\varepsilon^2) \\ \hat{y}^{(k)} &=& y^{(k)} + \varepsilon\eta^{(k)}(x, y, y', \cdots, y^{(k)}) + O(\varepsilon^2) \end{array} \tag{۵۱.۷}$$

درست مانند تبدیلات نقطه‌ای لی، هر $\eta^{(k)}$ به مشتقات مرتبه k یا کمتر بستگی دارد. اما ξ و η در اینجا ممکن است به x و y و y' وابسته باشند و در نتیجه لزومی ندارد $Q(x, y, y') = \eta - y'\xi$ نسبت به y' خطی باشد. قوانین امتداددهی مشابه قوانین تبدیلات نقطه‌ای لی می‌باشند:

$$\eta^{(k)} = D_x^k Q + y^{(k+1)}\xi \tag{۵۲.۷}$$

بخصوص داریم:

$$\eta^{(1)} = Q_x + y'Q_y + y''(Q_{y'} + \xi)$$

بنابراین $\eta^{(k)}$ مستقل ازy'' است اگر و فقط اگر $\xi = -Q_{y'}$. از این رو روابط (۴۵.۷) نه تنها برای تبدیلاتی که نقطه‌ای هستند برقرار است، بلکه برای کلیه تبدیلات برخوردی لی نیز برقرار است.

یک**تقارن برخوردی لی**، یک گروه لی تک پارامتری از تبدیلات برخوردی است که مشخصه آنها در شرط تقارن (۴۴.۷) صدق می‌کند. هر تقارن نقطه‌ای لی یک تقارن برخوردی لی است. معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه ۲ دارای یک مجموعه نامتناهی از تقارنهای برخوردی لی هستند.(دقیقاً مانند معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه یک که تقارنهای نقطه ای لی نامتناهی دارند.) اما عموماً امکان یافتن هیچکدام از آنها وجود ندارد. اما تقارنهای برخوردی لی یک معادله دیفرانسیل معمولی مفروض از مرتبه $n \geq 3$ می‌توانند با تفکیک شرط تقارن و با استفاده از این واقعیت که Q مستقل از y''، ...، $y^{(n-1)}$ است، می توان پیدا کرد. این در واقع مشابه روشی است که برای یافتن تقارنهای نقطه‌ای لی استفاده می‌شود.

۳.۷ مثال. در فصل ۳ نشان داده شد که ساده ترین معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۳

$$y''' = 0 \tag{۵۳.۷}$$

دارای یک جبرلی ۷ بعدی از مولدهای تقارن نقطه‌ای لی است. مشخصه متناظر با هر یک از چنین تقارنهایی ترکیب خطی

$$\begin{aligned} &Q_1 = 1, \qquad Q_2 = x, \qquad Q_3 = x^2, \qquad Q_4 = y, \\ &Q_5 = -y', \qquad Q_6 = -xy', \qquad Q_7 = 2xy - x^2y' \end{aligned} \tag{۵۴.۷}$$

است. اما معادله دیفرانسیل معمولی (۵۳.۷) دارای تقارنهای برخوردی لی غیر نقطه‌ای است که باجایگذاری $Q = Q(x, y, y')$ در (۴۴.۷) بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; &(Q_{xxx} + 3y'Q_{xxy}3y'^2Q_{xyy} + y'^3Q_{yyy}) \\ &+3y''(Q_{xxy'} + 2y'Q_{xyy'} + y'^2Q_{yyy'} + Q_{xy} + y'Q_{yy}) \\ &+3y''^2(Q_{xy'y'} + y'Q_{yy'y'} + Q_{yy'}) + y''^3(Q_{y'y'y'}) \end{aligned} \tag{۵۵.۷}$$

از آنجاییکه Q مستقل از y'' است، هر مجموعه از جملات که درون پرانتز ها هستند صفر خواهند شد. اگر بازای توابع دلخواه A, B, C داشته باشیم:

$$Q = A(x, y)y'^2 + B(x, y)y' + C(x, y)$$

در اینصورت جملات y''^3 صفر خواهند شد و جملات y''^2 نتیجه می‌دهند:

$$(2A_x + B_y) + 4y'(A_y) = 0$$

از برابر قرار دادن توانهای y' بازای توابع دلخواه α و β بدست می‌آوریم:

$$A = \alpha(x), \qquad B = -2\alpha'(x)y + \beta(x)$$

با ادامه دادن این روش سرانجام جواب عمومی (۵۵.۷) که به ده ثابت دلخواه بستگی دارد را بدست می آوریم. غیر از هفت مشخصه‌ای که در (۵۴.۷) ذکر شد سه مشخصه دیگر متناظر با تقارنهای برخوردی غیر نقطه‌ای موجودند:

$$Q_8 = -y'^2, \qquad Q_9 = 2yy' - xy'^2, \qquad Q_{10} = (2y - xy')^2. \tag{۵۶.۷}$$

مولدهای بینهایت کوچک این تقارنهای برخوردی غیر نقطه‌ای عبارتند از:

$$\begin{aligned} &X_8 = 2y'\partial_x + y'^2\partial_y, \qquad X_9 = 2(xy' - y)\partial_x + xy'^2\partial_y + y'^2\partial_{y'}, \\ &X_{10} = 2x(2y - xy')\partial_x + (4y^2 - x^2y'^2)\partial_y + 2y'(2y - xy')\partial_{y'} \end{aligned} \tag{۵۷.۷}$$

پس از بدست آوردن مجموعه همه $Q(x, y, y')$ های متناظر با تقارنهای برخوردی معادله دیفرانسیل معمولی مفروض، با روشی که در بخش ۱.۷ مختصراً شرح داده شد می‌توان انتگرالهای اولیه را مشخص نمود(در صورتیکه تقارنهای کافی وجود داشته باشند.)

۴.۷ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۳ زیر را در نظر بگیرید:

$$y''' = x(x-1)y''^3 - 2xy''^2 + y'' \tag{۵۸.۷}$$

که مولدهای تقارن برخوردی لی آن دارای مشخصه‌های

$$Q_1 = 1, \qquad Q_2 = x, \qquad Q_3 = e^{y'}, \qquad Q_4 = (xy' - y - x)e^{y'}, \qquad Q_5 = e^{y - xy' + y' + x} \tag{۵۹.۷}$$

هستند. دو مولد تقارن نقطه‌ای لی موجودند که مشخصه‌های آنها Q_1 و Q_2 می‌باشند. اما اینها برای حل معادله دیفرانسیل معمولی مذکور کافی نیستند.(اگر (۵۸.۷) را بر حسب ناورداهای دیفرانسیلی $(r_2, v_2) = (x, y'')$ بنویسیم معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته عبارت است از

$$v'^2 = r_2(r_2 - 1)v_2^3 - 2r_2 v_2^2 + v_2,$$

که جواب آن مشخص نیست.) با این حال امکان حل معادله دیفرانسیل معمولی (۵۸.۷) با بکارگیری تقارنهای برخوردی به منظور ساختن انتگرالهای اولیه وجود دارد. روش ذکر شده در بخش ۱.۷ به پیدایش سه انتگرال اولیه مستقل تابعی زیر منجر میشود.

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \frac{W_{124}}{W_{123}} = xy' - y - \frac{1}{(x-1)y'' - 1}, \\ \varphi^2 &= \frac{W_{125}}{W_{123}} = (1 - x + \frac{1}{y''})e^{y - xy' + x}, \\ \varphi^3 &= \frac{W_{134}}{W_{123}} = (1 + \frac{y''}{(x-1)y'' - 1})e^{y'} \end{aligned} \tag{۶۰.۷}$$

در اینجا حذف y'' کار آسانی است در حالیکه برای y' چنین نیست. بنابراین جواب لزوماً در شکل پارامتری آن باقی می‌ماند.

تبدیلات نقطه‌ای و برخوردی تبدیلات هندسی هستند که بدون ارجاع دادن به معادله دیفرانسیل معمولی خوشتعریفند. تبدیلات نقطه‌ای دیفیومورفیسم هایی روی صفحه‌اند درحالیکه تبدیلات برخوردی تبدیلاتی روی فضای جت J^1 (که در شرط برخوردی صدق می کند) می‌باشند. هر دو دسته از تبدیلات، با امتداددهی قابل گسترش به فضاهای جت بالاتر هستند. این نتیجه می‌دهد که هیچ دسته دیگری از دیفیومورفیسم ها روی هیچ فضای جتی از مرتبه متناهی J^k که $k > 1$ وجود ندارد که در فرمول امتداد دهی روی کل J^k صدق کند. اما این به این معنی نیست که هر تقارن یک معادله دیفرانسیل معمولی ، تقارن برخوردی است. ما تنها با عمل دیفیومورفیسم های روی زیر مجموعه S از J^n که توسط معادله دیفرانسیل معمولی $y^{(n)} = \omega$ تعریف شده‌اند سروکار داریم. بنابراین تا زمانیکه شرایط امتداد دهی روی S برقرار است نیازی به برقراری این شرایط روی کل J^n نیست. هر مولد Xای که مشخصه Q متناظرش در شرط تقارن خطی (۴۴.۷) صدق کند، مولد**تقارنهای دینامیکی**(تقارنهای درونی) گفته می‌شود. اگر Q به هر یک از مشتقات $y^{(k)}$ که $k > 1$ بستگی داشته باشد در اینصورت تقارنهای دینامیکی تقارنهای برخوردی نیستند.

توجه کنید که $X = \xi D_x$ تقارنهای دینامیکی را برای هر ξ تولید می‌کند زیرا مشخصه متناظر با X، $Q = 0$ است (بدون توجه به ξ). این یک جواب بدیهی برای شرط تقارن خطی است. چون همه جوابها ناوردا هستند لذا این تقارنها قابل استفاده نیستند. دو مولد تقارن دینامیکی X_1 و X_2 **هم ارز** گفته می‌شوند هر گاه بازای تابع دلخواه ξ

$$X_1 - X_2 = \xi D_x \qquad \text{وقتی} \qquad y^{(n)} = \omega$$

مولدهای هم ارز مشخصه‌های یکسان داشته باشند. از اینرو بدون اینکه از کلیت موضوع کاسته شود می‌توانیم توجه خود را به تقارنهای دینامیکی که مولدهای آنها فاقد جمله ∂_x است، معطوف کنیم. این

مولدها که به جوابهای $y^{(n)}=\omega$ محدود شده‌اند به صورت

$$X=Q\partial_y+\bar{D}Q\partial_{y'}+\cdots+\bar{D}^{(n-1)}Q\partial_{y^{(n-1)}} \tag{۶۱.۷}$$

هستند. از این پس می‌توان فرض کرد که مولدهای تقارنهای دینامیکی بصورت (۷.۶۱) هستند.
اگر $Q=Q_0$ یک جواب شرط تقارن خطی

$$\bar{D}^nQ-\omega_{y^{(n-1)}}\bar{D}^{n-1}Q-\cdots-\omega_{y'}\bar{D}Q-\omega_yQ=0 \tag{۶۲.۷}$$

باشد آنگاه $Q=\varphi Q_0$ نیز بازای هر انتگرال اولیه φ یک جواب است. یک مجموعه شامل n انتگرال اولیه مستقل تابعی $\varphi^1,\cdots,\varphi^n$ را در نظر بگیرید. می‌توان یک مجموعه مولد $X_1,\cdots,X_n$ یافت بطوریکه

$$X_i\varphi^j=\delta_i^j$$

که در اینجا δ_i^j دلتای کرونکر می‌باشد. اگر $Q_1,\cdots,Q_n$ مشخصه‌های متناظر با این مولدها باشند آنگاه جواب عمومی (۶۲.۷) عبارتست از

$$Q=F^i(\varphi^1,\cdots,\varphi^n)Q_i \tag{۶۳.۷}$$

که $F^1,\cdots,F^n$ توابع دلخواه از انتگرالهای اولیه هستند. اگر $(x,\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$ را به عنوان مختصات بکار گیریم مولدهای X_i به

$$X_i=\partial_{\varphi^i}$$

که انتقالها هستند کاهش می‌یابند. بنابراین (با تقریب هم ارزی) هر مولد تقارن دینامیکی به شکل زیر است:

$$X=F^i=(\varphi^1,\cdots,phi^n)\partial_{\varphi^i} \tag{۶۴.۷}$$

در نتیجه تقارنهای دینامیکی معادلات دیفرانسیل معمولی می توانند به عنوان تبدیلاتی از مجموعه انتگرالهای اولیه در نظر گرفته شوند.

بطور معمول نمی‌توان کلیه تقارنهای دینامیکی را بدون حل اولیه معادله دیفرانسیل معمولی بدست آورد اما درست مانند تقارنهای برخوردی، می توان تقارنهای دینامیکی که به $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ بستگی دارند را با روش خاصی بدست اورد. به عنوان مثال ،اغلب بدست آوردن مشخصه‌هایی که مستقل از $y^{(n-1)}$ هستند مفید خواهد بود. اگر تقارنهای دینامیکی به تعداد کافی یافت شوند روش بخش ۱.۷ ما را قادر خواهد ساخت تا انتگرالهای اولیه را بسازیم.

۵.۷ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۴

$$y''''=\frac{y'''+y'''^2}{y''} \tag{۶۵.۷}$$

که شامل یک جبرلی ۴بعدی از مولدهای تقارن نقطه‌ای است را در نظر بگیرید. اگر چه این معادله دیفرانسیل معمولی را می‌توان با بکارگیری ناورداهای دیفرانسیلی حل کرد اما تلاش برای بکارگیری روش بخش ۱.۷ آموزنده است. شش مشخصه مستقل خطی متناظر با تقارنهای دینامیکی که به y''' وابسته اند موجودند:

$$Q_1=1,\qquad Q_2=y',\qquad Q_3=x, \tag{۶۶.۷}$$
$$Q_4=3y-xy',\qquad Q_5=y'',\qquad Q_6=xy''-\frac{1}{2}x^2.$$

(این مشخصه ها با برابر قرار دادن توانهای y''' در شرط تقارن خطی بدست آمده اند). اگر چه $v=4$ است اما تنها سه انتگرال اولیه موجودند که می‌توان آنها را با گرفتن نسبت دترمینانهای W_{ijk} بدست آورد. این انتگرالهای اولیه عبارتند از:

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \frac{1+y'''}{y''}, \\ \varphi^2 &= y'''+x\varphi^1-y'(\varphi^1)^2, \\ \varphi^3 &= y''-xy'''\frac{1}{2}x^2\varphi^1+(xy'-y)(\varphi^1)^2 \end{aligned} \tag{۶۷.۷}$$

ابتدا بنظر می رسد از رابطه

$$\bar{D}W_{ijkl}=\omega_{y'''}W_{ijkl}=\frac{1+2y'''}{y''}W_{ijkl} \tag{۶۸.۷}$$

انتگرال اولیه دیگری بدست نمی‌آید اما این اختیار را داریم که هر یک از انتگرالهای اولیه معلوم را در (۶۸.۷) جایگذاری کنیم. بطور مثال می‌توان (۶۸.۷) را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\bar{D}W_{ijkl}=(\varphi^1+\frac{y'''}{y''})W_{ijkl}=\bar{D}(\varphi^1x+\ln|y''|)W_{ijkl}$$

با جایگذاری $W_{1234}=(y'''+y'''^2)$ در رابطه فوق انتگرال اولیه

$$\varphi^4=\ln|\frac{y'''+y'''^2}{y''}|-\varphi^1x \tag{۶۹.۷}$$

بدست می آید. جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی در شکل بسته آن با حذف y' و y'' و y''' بدست می‌آید:

$$y=\frac{1}{2c_1}x^2+c_2x+c_3+c_4e^{c_1x} \tag{۷۰.۷}$$

بخش ۳.۷ فاکتورهای انتگرال گیری

روشی که در بخش ۱.۷ به آن اشاره شد، روشی مفید است زیرا جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل معمولی مفروض را بدون نیاز به انتگرال گیری بدست می‌دهد. علاوه بر این به وجود یک زیرجبر حل پذیر nبعدی بستگی ندارد و از ساختار جبری مستقیماً استفاده نمی‌شود. اما این روش به علت نیاز به حداقل $n+1$ مولد تقارن، محدود می‌شود.

برخی از معادلات دیفرانسیل معمولی که براحتی حل می شوند فاقد تقارنهای نقطه‌ای می‌باشند اما انتگرال اولیه مشخصی مانند φ^1 دارند. اگر معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته $\varphi^1=c_1$ دارای تقارنهای قابل تشخیص باشد یا انتگرالهای اولیه مشخص داشته باشد در اینصورت امکان کاهش مرتبه بیشتر وجود دارد.

۶.۷ مثال . یک دسته معادلات دیفرانسیل معمولی بصورت

$$y''=\frac{y'^2}{y}+f(x)yy'+f'(x)y^2 \tag{۷۱.۷}$$

را در نظر بگیرید. این معادلات دیفرانسیل معمولی دارای تقارنهای نقطه‌ای لی نیستند مگر اینکه مقادیر ثابت $k_1,\cdots,k_4$ موجود باشند(که همگی صفر نیستند) بطوریکه

$$(k_1x+k_2)f'(x)+(k_3x+k_4)f(x)=0$$

با این وجود هر معادله دیفرانسیل معمولی (۷۱.۷) همانطور که در ادامه خواهید دید می تواند به یک انتگرال کاهش یابد. ضرب (۷۱.۷) در y^{-1} و یک بار انتگرال‌گیری نتیجه می‌دهد:

$$\varphi^1\equiv\frac{y'}{y}-f(x)y=c_1 \tag{۷۲.۷}$$

معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول (۷۲.۷) بر حسب y یک معادله برنولی است و با

$$(\frac{1}{y})'+\frac{c_1}{y}=-f(x)$$

هم ارز است که این معادله به کمک یک فاکتور انتگرال قابل حل است.(با بکارگیری تقارنهایی که با انطباق خطی مرتبط هستند). بنابراین جواب عمومی (۷۱.۷) عبارتست از

$$y=\frac{e^{c_1x}}{c_2-\int f(x)e^{c_1x}dx} \tag{۷۳.۷}$$

مرحله کلیدی حل مثال فوق ضرب معادله دیفرانسیل معمولی مذکور در y^{-1} بود. این روش به هر معادله دیفرانسیل معمولی دلخواه همانطور که در زیر می آید تعمیم می‌یابد. یک تابع (غیرصفر) Λ یک **فاکتور انتگرال** معادله دیفرانسیل معمولی (۱.۷) است اگر بازای توابع دلخواه $\chi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ داشته باشیم:

$$(y^{(n)}-\omega)\Lambda=D_x\chi \tag{۷۴.۷}$$

بنابراین χ یک انتگرال اولیه است. در واقع هر انتگرال اولیه φ در

$$D_x\varphi=\bar{D}\varphi+(y^{(n)}-\omega)\varphi_{y^{(n-1)}}=(y^{(n)}-\omega)\varphi_{y^{(n-1)}} \tag{۷۵.۷}$$

صدق می‌کند. بنابراین هر فاکتور انتگرال (۱.۷) بازای یک انتگرال اولیه φ بصورت زیر است:

$$\Lambda(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})\equiv\varphi_{y^{(n-1)}} \tag{۷۶.۷}$$

فاکتورهای انتگرال می‌توانند بصورت اصولی همانند روشی که تقارنها از (۶۲.۷) بدست آمدند مشخص شوند. اتحادهایی که در زیر می آیند مفید خواهند بود:

$$\bar{D}\partial_{y^{(k)}}=\partial_{y^{(k)}}\bar{D}-\partial_{y^{(k-1)}}-\omega_{y^{(k)}}\partial_{y^{(n-1)}},\qquad k=0,\cdots,n-1 \tag{۷۷.۷}$$

در اینجا قرارداد می‌کنیم $\partial_{y^{(-1)}}\equiv 0$ و $y=y^{(0)}$ باشد. معادله (۷۶.۷) نتیجه می‌دهد:

$$\varphi_{y^{(n-1)}}=\Lambda \tag{۷۸.۷}$$

اکنون عملگر $\bar{D}$ را بر $\varphi_{y^{(n-1)}}$ اثر می‌دهیم. با استفاده از اتحاد (۷۷.۷) با شرط $k=n-1$ و قرار دادن $D\varphi=0$ بدست می‌آوریم:

$$\varphi_{y^{(n-2)}}=-(\bar{D}\varphi_{y^{(n-1)}}+\omega_{y^{(n-1)}}\varphi_{y^{(n-1)}}) \tag{۷۹.۷}$$

به طور مشابه اعمال $\bar{D}$ به ترتیب برای هر مشتق جزئی φ_y نتیجه می‌دهد

$$\varphi_{y^{(k-1)}} = -(\bar{D}\varphi_{y^{(k)}} + \omega_{y^{(k)}}\varphi_{y^{(n-1)}}), \qquad k = 0, \cdots, n-1 \tag{۸۰.۷}$$

بخصوص معادله $k = 0$ عبارتست از:

$$0 = -(\bar{D}\varphi_y + \omega_y\varphi_{y^{(n-1)}}) \tag{۸۱.۷}$$

بنابراین دنباله پایان می‌پذیرد. علاوه براین رابطه $\bar{D}\varphi = 0$ نتیجه می‌دهد:

$$\varphi_x = -y'\varphi_y + y''\varphi_{y'} - \cdots - y^{(n-1)}\varphi_{y^{(n-2)}} - \omega\varphi_{y^{(n-1)}} \tag{۸۲.۷}$$

بنابراین امکان استفاده از (۷۸.۷) به منظور نوشتن هر مشتق جزئی φ بر حسب Λ و مشتقاتش فراهم می‌شود و (۸۱.۷) نتیجه می‌دهد:

$$\bar{D}^n\Lambda + \bar{D}^{n-1}(\omega_{y^{(n-1)}}\Lambda) - \bar{D}^{n-2}(\omega_{y^{(n-2)}}\Lambda) + \cdots + (-1)^{n-1}\omega_y\Lambda = 0 \tag{۸۳.۷}$$

توجه کنید که دو جمله اول علامت یکسان دارند در حالیکه جملات بعدی دارای علامتهای متفاوتند. معادله (۸۳.۷) یک **الحاق** شرط تقارن خطی (۶۲.۷) می‌باشد و لذا جوابهای آن**تقارنهای الحاقی** نامیده شده اند. این نامگذاری نسبتاً گمراه کننده است زیرا این جوابها نه تقارنها هستند و نه مولدهای تقارنها. در عوض می‌توانیم هر جواب غیر صفر Λ از معادله (۸۳.۷) را یک **هم-مشخصه** بنامیم. به لحاظ ساختاری هر عامل انتگرال یک هم-مشخصه است اما عکس این موضوع همانطور که در زیر نشان داده می‌شود درست نیست. هم-مشخصه ها نیز با استراتژی مشابه آنچه برای یافتن مشخصه‌های تقارنهای دینامیکی اعمال می‌شد بدست می‌آیند. یعنی با فرض اینکه Λ بصورت خاص است. برای مثال می‌توانیم بطور اصولی به دنبال یافتن کلیه جوابهای (۸۳.۷) باشیم که مستقل از $y^{(n-1)}$ هستند. پس از یافتن جوابهای Λ^i دانستن اینکه آیا هرکدام از آنها عامل انتگرال هستند یا خیر کار آسانی است. ابتدا بصورت بازگشتی معادلات

$$\begin{aligned} P^i_{n-1} &= \Lambda^i, \\ P^i_{k-1} &= -\bar{D}P^i_k - \omega_{y^{(k)}}\Lambda^i, \qquad k = n-1, n-2, \cdots, 1, \end{aligned} \tag{۸۴.۷}$$

را محاسبه می کنیم. از (۷۸.۷) و (۸۰.۷) و (۸۲.۷) می‌بینیم که Λ^i یک عامل انتگرال است. اگر بازای تابعی مانند φ^i داشته باشیم:

$$\begin{aligned} P^i_k &= \varphi^i_{y^{(k)}}, \qquad k = 0, \cdots, n-1 \\ \omega P^i_{n-1} &+ \sum_{k=0}^{n-2} y^{(k+1)}P^i_k = \varphi^i_x \end{aligned} \tag{۸۵.۷}$$

شرایط انتگرال پذیری $\varphi^i_{y^{(j)}y^{(k)}} = \varphi^i_{y^{(k)}y^{(j)}}$ و $\varphi^i_{y^{(k)}x} = \varphi^i_{xy^{(k)}}$ نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^i_k}{\partial y^{(j)}} &= \frac{\partial P^i_j}{\partial y^{(k)}}, \qquad 0 \le j < k \le n-1, \\ \frac{\partial P^i_j}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial y^{(j)}}\left(\omega P^i_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} y^{(k+1)}P^i_k\right), \qquad 0 \le j \le n-1 \end{aligned}$$

شاید تعجب‌آور باشد که این شرایط برقرار هستند اگر و فقط اگر

$$\frac{\partial P^i_{n-1}}{\partial y^{(j)}} = \frac{\partial P^i_j}{\partial y^{(n-1)}}, \qquad 0 \le j \le n-2 \tag{۸۶.۷}$$

(مشتق گیری از این نتیجه به عنوان تمرین واگذار می‌شود). بنابراین Λ^i یک عامل انتگرال است اگر و فقط اگر شرایط انتگرال پذیری (۸۶.۷) برقرار باشد. بخصوص φ^i به عنوان انتگرال خط از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\varphi^i &= \int \varphi^i_x dx + \varphi^i_y dy + \varphi^i_{y'} dy' + \cdots + \varphi^i_{y^{(n-1)}} dy^{(n-1)} \\ &= \int P^i_0(dy - y'dx) + P^i_1(dy' - y''dx) + \cdots + P^i_{n-1}(dy^{(n-1)} - \omega dx) \end{aligned} \tag{۸۷.۷}$$

۷.۷ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه۳

$$y''' = 3yy' \tag{۸۸.۷}$$

دارای یک گروه لی دو پارامتری از تقارنهای نقطه‌ای با مولدهای زیر است:

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x - 2y\partial_y$$

اینها تنها تقارنهای برخوردی لی هستند. اعمال روش ناورداهای دیفرانسیلی به معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

$$\frac{dv_2}{dr_2} = \frac{2r_2(3-2v_2)}{2v_2 - 3r_2}, \qquad (r_2, v_2) = (y^{-3/2}y', y^{-2}y'')$$

منجر می‌شود که بنظر دشوار می‌آید. معادله (۸۳.۷) برای مقادیر عامل انتگرال نتیجه می‌دهد:

$$\bar{D}^3\Lambda - \bar{D}(3y\Lambda) + 3y'\Lambda = 0 \tag{۸۹.۷}$$

درست همانند تقارنهای برخوردی جوابهای به شکل $\Lambda = \Lambda(x, y, y')$ را با مساوی قرار دادن توانهای y'' در (۸۹.۷) و از طریق نتایج بدست امده از مجموعه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بدست می آوریم:

$$\Lambda^1 = 1, \qquad \Lambda^2 = y, \qquad \Lambda^3 = y'^2 - y^3$$

از (۸۴.۷) بدست می‌آوریم:

$$\begin{array}{lll} P^1_2 = 1, & P^1_1 = 0, & P^1_0 = -3y; \\ P^2_2 = y, & P^2_1 = -y', & P^2_0 = y'' - 3y^2; \\ P^3_2 = y'^2 - y^3, & P^3_1 = 3y^2y' - 2y'y'', & P^3_0 = 2y''^2 - 3y^2y'' - 3yy'^2 + 3y^4. \end{array}$$

شرایط انتگرال پذیری (۸۶.۷) بازای $i = 1, 2$ برقرار است بنابراین Λ^1 و Λ^2 عاملهای انتگرال هستند اما

$$\frac{\partial P^3_2}{\partial y'} - \frac{\partial P^3_1}{\partial y''} = 4y' \neq 0$$

لذا Λ^3 یک عامل انتگرال نیست و ما دو انتگرال اولیه زیر را بدست آورده‌ایم

$$\varphi^1 = \int (dy''-3yy'dx)-3y(dy-y'dx) = y''-\frac{3}{2}y^2; \qquad (۹۰.۷)$$

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= \int y(dy''-3yy'dx)-y'(dy'-y''dx)+(y''-3y^2)(dy-y'dx)\\ &= yy''-\frac{1}{2}y'^2-y^3. \qquad (۹۱.۷)\end{aligned}$$

ما هنوز به اندازه کافی انتگرالهای اولیه برای توصیف جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی در دست نداریم ، اما ترکیب معادلات $\varphi^i = c, i = 1,2$ به معادله دیفرانسیل معمولی جداشدنی مرتبه اول زیر می‌انجامد:

$$y'^2 = y^3+2c_1y-2c_2$$

از اینرو جواب عمومی (۸۸.۷) عبارتست از:

$$x = c_3 \pm \int \frac{dy}{\sqrt{y^3+2c_1y-2c_2}} \qquad (۹۲.۷)$$

روش دیگر برای تولید انتگرالهای اولیه ادغام هم-مشخصه ها و تقارنها می باشد. برای مثال فرض کنید Λ یک هم-مشخصه برای معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم

$$y'' = \omega(x,y,y')$$

باشد. طبق معمول فرض کنید:

$$P_1 = \Lambda, \qquad P_0 = -(\bar{D}P_1+\omega_{y'}\Lambda)$$

و توجه کنید که $\bar{D}P_0+\omega_y\Lambda = 0$. اکنون فرض کنید Q مشخصه یک تقارن غیر بدیهی معادله دیفرانسیل معمولی مذکور باشد. فرض کنید

$$\varphi = P_0Q+P_1\bar{D}Q$$

در اینصورت φ یک مقدار ثابت یا یک انتگرال اولیه است زیرا

$$\begin{aligned}\bar{D}\varphi &= (\bar{D}P_0)Q+(P_0+\bar{D}P_1)\bar{D}Q+P_1\bar{D}^2Q\\ &= (\bar{D}P_0+\omega_yP_1)Q+(P_0+\bar{D}P_1+\omega_{y'}P_1)\bar{D}Q\\ &= 0\end{aligned}$$

نتیجه مشابهی برای معادلات دیفرانسیل معمولی به فرم $y^{(n)} = \omega$ برقرار است. یک هم-مشخصه Λ و یک مشخصه Q را در نظر بگیرید. تابع

$$\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} P_k\bar{D}^kQ \qquad (۹۳.۷)$$

یک مقدار ثابت یا یک انتگرال اولیه است این نتیجه به برقراری شرایط انتگرال‌پذیری (۸۶.۷) بستگی ندارد. اگر تقارنهای مختلف داشته باشیم در اینصورت هر مشخصه را می‌توان در (۹۳.۷) جایگذاری کرد. بنابراین یک مشخصه می‌تواند چند انتگرال اولیه مستقل تابعی را نتیجه دهد.

بخش ۴.۷ دستگاه هایی ازمعادلات دیفرانسیل معمولی

ایده های فوق را می‌توان به دستگاه های معادله دیفرانسیل معمولی تعمیم داد. برای راحتی می‌توانیم روی دستگاه‌هایی شامل n معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول متمرکز شویم:

$$y'_k = \omega_k(x, y_1, \cdots, y_n), \qquad k = 1, \cdots, n \tag{۹۴.۷}$$

برای هر دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی که می تواند بصورت یک دستگاه مرتبه اول معادل نوشته شود، انجام این کار به کلیت مسئله خللی وارد نمی‌کند. نتایج اصلی برای تقارنها و عاملهای انتگرال با همان روشی که برای یک معادله دیفرانسیل معمولی اعمال می شد بدست می‌آیند. بنابراین این نتایج را بدون توجیه جزئیات بیان می‌کنیم. خواننده بایستی قادر به استنتاج باشد.

تبدلات نقطه‌ای لی روی متغیرهای $x, y_1, \cdots, y_n$ توسط مولدهای بینهایت کوچک به صورت زیر تولید شده‌اند:

$$X = \xi(x, y_1, \cdots, y_n)\partial_x + \eta_k(x, y_1, \cdots, y_n)\partial_{y_k} \tag{۹۵.۷}$$

(در اینجا علامت جمع معمولی بکار میرود). مشخصه گروه لی تک پارامتری تولید شده توسط X عبارتست از $Q = (Q_1, \cdots, Q_n)$ که

$$Q_k = \eta_k - y'_k\xi, \qquad k = 1, \cdots, n$$

برای یافتن تقارنهای نقطه‌ای لی دستگاه (۹۴.۷) مولد بینهایت کوچک X را به مشتقات اول بصورت زیر امتداد می‌دهیم:

$$X^{(1)} = \xi\partial_x + \eta_k\partial_{y_k} + \eta_k^{(1)}\partial_{y'_k}$$

که

$$\eta_k^{(1)} = D_x\eta_k - y'_k D_x\xi = D_x Q_k + y''_k\xi, \qquad k = 1, \cdots, n \tag{۹۶.۷}$$

در اینصورت شرط تقارن خطی عبارتست از:

$$X^{(1)}(y'_k - \omega_k) = 0, \qquad k = 1, \cdots, n \qquad \text{زمانیکه (۹۴.۷) برقرار باشد} \tag{۹۷.۷}$$

این شرط می‌تواند بر حسب مشخصه کاهش یافته $\bar{Q} = (\bar{Q}_1, \cdots, \bar{Q}_n)$ که مولفه‌هایش عبارتند از:

$$\bar{Q}_k(x, y_1, \cdots, y_k) \equiv \eta_k - \omega_k\xi, \qquad k = 1, \cdots, n$$

نیز نوشته شود. با اندکی تلاش می‌توان نشان داد که شرط تقارن خطی نتیجه زیر را می‌دهد:

$$\bar{D}\bar{Q}_k - \frac{\partial\omega_k}{\partial y_j}\bar{Q}_j = 0, \qquad k = 1, \cdots, n \tag{۹۸.۷}$$

که در آن

$$\bar{D} = \partial_x + \omega_i\partial_{y_i}$$

یک جواب تحت یک گروه لی تک پارامتری از تقارنها ناورداست اگر مشخصه کاهش یافته روی جواب صفر باشد. گروه تقارن بدیهی است اگر همه جوابها ناوردا باشد یعنی اگر بازای $k = 1,\cdots,n$ داشته باشیم $Q \equiv 0$. بنابراین یک لی گروه تک پارامتری از تقارنها بدیهی است اگر و فقط اگر مولد بینهایت کوچک آن بازای تابع ξ بصورت

$$X = \xi\bar{D}$$

باشد. هر مولد تقارن (۹۵.۷) می تواند به مولفه‌های غیربدیهی و بدیهی خود همانطور که در زیر آمده تجزیه شود:

$$X = \xi\bar{D} + \bar{Q}_k\partial_{y_k}$$

بنابراین تفاوت میان دو مولد با $\bar{Q}$ یکسان، مولد تقارن بدیهی آن است. اکنون فرض کنید تقارنهای بدیهی را با قرار دادن $\xi = 0$ حذف کنیم و تنها مولدهایی را که بصورت

$$X = \bar{Q}_k\partial_{y_k} \qquad (۹۹.۷)$$

هستند در نظر بگیریم. هر معادله دیفرانسیل معمولی $y^{(n)} = \omega$ (بصورتهای مختلف) می‌تواند توسط یک دستگاه هم ارز شامل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول نمایش داده شود. (در اینجا هم ارز به این معنی است که جواب عمومی یکسان دارند). اکنون نشان می‌دهیم بین تقارنهای دینامیکی غیربدیهی و تقارنهای نقطه ای لی (۹۹.۷) متناظر با هر دستگاه مرتبه اول، یک تناظر یک به یک وجود دارد.

تابع غیر ثابت $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$ انتگرال اولیه (۹۴.۷) است هرگاه

$$\bar{D}\varphi = 0 \qquad (۱۰۰.۷)$$

جواب عمومی (۹۴.۷) به n ثابت دلخواه بستگی دارد و بنابراین n انتگرال اولیه مستقل تابعی $\varphi^1, \cdots, \varphi^n$ وجود دارد. جواب عمومی عبارتست از:

$$\varphi^k = c_k, \qquad k = 1,\cdots,n$$

بنابراین دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (۹۴.۷) با

$$\frac{d\varphi^k}{dx} = 0, \qquad k = 1,\cdots,n \qquad (۱۰۱.۷)$$

هم ارز است. با فرض اینکه تغییر متغیرهای وابسته از y_k به φ^k یک دیفیومورفیسم است تقارنهای نقطه‌ای لی (۹۴.۷) با تقارنهای نقطه‌ای لی دستگاه هم ارز آن (۱۰۱.۷) متناظر است. تحت این تغییر متغیرها مولد(۹۹.۷) عبارتست از :(از قاعده زنجیره‌ای)

$$F^i = \bar{Q}_k\varphi^i_{y_k} \qquad \text{که} \qquad X = F^i(x, \varphi^1, \cdots, \varphi^n)\partial_{\varphi^i} \qquad (۱۰۲.۷)$$

قاعده زنجیره‌ای همچنین نتیجه می‌دهد:

$$\bar{D} = \partial_x$$

بنابراین شرط تقارن خطی برای (۱۰۱.۷) عبارتست از:

$$\bar{D}F^i = F^i_x = 0, \qquad i = 1,\cdots,n$$

در نتیجه مولد تقارن نقطه‌ای لی (۱۰۲.۷) بازای توابع دلخواه $F^1, \cdots, F^n$ به شکل زیر است:

$$X = F^i(\varphi^1, \cdots, \varphi^n)\partial_{\varphi^i} \qquad (۱۰۳.۷)$$

اگر (۹۴.۷) با معادله دیفرانسیل معمولی $y^{(n)} = \omega$ هم ارز باشد آن معادله دیفرانسیل معمولی جواب عمومی مشابهی و در نتیجه مجموعه انتگرالهای اولیه یکسانی خواهد داشت. با مقایسه (۱۰۳.۷) و (۶۴.۷) مشاهده می کنیم که تقارنهای نقطه ای لی دستگاه (۹۴.۷) با تقارنهای دینامیکی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n هم ارز با آن، یکسان است. برای هر دستگاه مرتبه یک از معادله دیفرانسیل معمولی ها تعداد بینهایت تقارن نقطه‌ای لی وجود دارد اما عموماً بدون حل اولیه دستگاه نمی‌توان آنها را یافت. نوعی از گمانه لازم است. عموماً مشخصه‌های کاهش یافته که مستقل از یک متغیر هستند (یانسبت به یک متغیر خطی اند) را می‌یابند. می‌توان متناوباً یک گمانه بخصوص برای $(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ را در (۹۷.۷) جایگذاری کرد. برای برخی از تبدیلات نقطه‌ای عمومی‌تر (مثلاً انتقالها، دورانها و مقیاسها) و نسبت به هر متغیر خطی هستند.

زمانیکه یک مولد تقارن غیربدیهی را بدست آوریم امکان کاهش مسئلهٔ حل (۹۴.۷) به حل $n-1$ عدد معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول و سپس انجام آخرین انتگرال گیری وجود دارد. برای انجام این کار مختصات کانونی $(s, r_1, \cdots, r_n)$ را معرفی می‌کنیم بطوریکه

$$Xr_k = 0, \qquad k = 1, \cdots, n, \qquad Xs = 1$$

در اینصورت $X = \partial_x$ و بنابراین دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی ها بازای توابع Ω_k با

$$\frac{dr_k}{ds} = \Omega_k(r_1, \cdots, r_n), \qquad k = 1, \cdots, n \qquad (۱۰۴.۷)$$

هم ارز است. اگر این توابع همگی صفر باشند آنگاه (۱۰۴.۷) قابل حل خواهد بود. در غیر اینصورت فرض کنید(بدون کاسته شدن از کلیت) که $\Omega_1 \neq 0$ باشد آنگاه (۱۰۴.۷) تعداد $n-1$ معادله دیفرانسیل معمولی را نتیجه می‌دهد که تنها شامل ناورداهای دیفرانسیلی r_k هستند.

$$\frac{dr_k}{dr_1} = \frac{\Omega_k}{\Omega_1}, \qquad k = 2, \cdots, n \qquad (۱۰۵.۷)$$

اگر جواب (۱۰۵.۷)، $(r_2, \cdots, r_n)$ را بر حسب r_1 نتیجه دهد معادله دیفرانسیل معمولی باقیمانده در (۱۰۴.۷) با انتگرال‌گیری زیر قابل حل می‌باشد:

$$s = \int \frac{dr_1}{\Omega_1(r_1, r_2(r_1), \cdots, r_n(r_1))} + c_n \qquad (۱۰۶.۷)$$

اگر جواب (۱۰۵.۷) پارامتری باشد، s با بازنویسی انتگرال موجود در رابطه (۱۰۶.۷) بر حسب این پارامتر بدست می‌آید.

روش فوق کاربر را ملزم به یافتن ناورداهای دیفرانسیلی گروه تک پارامتری مفروض می‌کند. در عمل همواره این کار ممکن نیست زیرا معادلات مشخصه

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy_1}{\eta_1} = \cdots = \frac{dy_n}{\eta_n} = ds \qquad (۱۰۷.۷)$$

ممکن است برای حل دشوار باشند. این روش برای معادلات دیفرانسیل معمولی که دارای مولدهای تقارن به شکل نسبتاً راحت تر هستند بسیار موفق است.

مولدهای تقارن نقطه‌ای لی یک دستگاه مفروض از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول، یک جبرلی با بعد نامتناهی تشکیل می‌دهند. از آنجاییکه جابجاگر دو مولد نیز یک مولد است قادر خواهیم شد مولدهای جدیدی از مولدهای معلوم بسازیم. معمولاً این روند به سرعت پایان می‌یابد و یک زیرجبر متناهی البعد $\mathcal{L}$ بدست می‌آید. اگر $\mathcal{L}$ دارای یک زیرجبر حل پذیر با بعد $R \le n$ باشد، دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی های (۹۴.۷) می‌تواند به $n-R$ معادله دیفرانسیل معمولی شامل ناورداهای دیفرانسیلی و R انتگرال کاهش یابد. این روند مشابه روندی است که برای یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه یک بکار می‌رود.

دستگاههای معادله دیفرانسیل معمولی همچنین می‌توانند با بکارگیری عامل های انتگرال به منظور ساختن انتگرالهای اولیه نیز حل شوند. اگر $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$ انتگرال اولیه دستگاه (۹۴.۷) باشد آنگاه $\bar{D}\varphi = 0$ و از اینرو:

$$D_x\varphi = (y_k' - \omega_k)\varphi_{y_k} \tag{۱۰۸.۷}$$

$\mathbf{\Lambda} = (\Lambda^1, \cdots, \Lambda^n)$ را یک عامل انتگرال دستگاه (۹۴.۷) می‌نامیم اگر:

$$(y_k' - \omega_k)\Lambda^k = D_x\varphi$$

بازای توابع غیر ثابت $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$ برقرار باشد. بنابراین مولفه‌های هر عامل انتگرال در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\varphi_{y_k} = \Lambda^k, \qquad k = 1, \cdots, n \tag{۱۰۹.۷}$$

با اعمال $\bar{D}$ روی (۱۰۹.۷) و قرار دادن $\bar{D}\varphi = 0$ بدست می‌آوریم:

$$\bar{D}\Lambda^k + \frac{\partial \omega_i}{\partial y_k}\Lambda^i = 0, \qquad k = 1, \cdots, n \tag{۱۱۰.۷}$$

هر جواب غیرصفر Λ از (۱۱۰.۷) یک**هم-مشخصه** نامیده می‌شود. یک هم-مشخصه یک عامل انتگرال است اگر و فقط اگر در شرایط انتگرال‌پذیری

$$\frac{\partial \Lambda^k}{\partial y_j} = \frac{\partial \Lambda^j}{\partial y_k}, \qquad 1 \le j < k \le n \tag{۱۱۱.۷}$$

صدق کند. یک عامل انتگرال را در نظر بگیرید. رابطه (۱۰۸.۷) را برای بازسازی انتگرال اولیه متناظر بصورت زیر بکار می‌گیریم:

$$\varphi = \int \Lambda^k(dy_k - \omega_k dx) \tag{۱۱۲.۷}$$

روش دیگر برای ساختن انتگرالهای اولیه ترکیب مشخصه‌ها و هم-مشخصه‌ها، دقیقاً همانطور که برای یک معادله دیفرانسیل معمولی انجام دادیم می‌باشد. از (۹۸.۷) و (۱۱۰.۷) در می‌یابیم که

$$\bar{D}(\bar{Q}_k\Lambda^k) = 0 \tag{۱۱۳.۷}$$

از اینرو $\varphi = \bar{Q}_k\Lambda^k$ یک مقدار ثابت یا یک انتگرال اولیه است.

۸.۷ مثال. دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر را در نظر بگیرید:

$$y_1' = \frac{xy_1 + y_2^2}{y_1y_2 - x^2}, \qquad y_2' = \frac{xy_2 + y_1^2}{y_1y_2 - x^2} \tag{۱۱۴.۷}$$

این دستگاه دارای تقارنهای تولید شده مقیاس، توسط

$$X = x\partial_x + y_1\partial_{y_1} + y_2\partial_{y_2}$$

می‌باشد. این تنها مولد بینهایت کوچک است که ضرایب آن نسبت به y_1 و y_2 خطی‌اند. معادلات مشخصه (۱۰۷.۷) جهت بدست آوردن مختصات کانونی زیر براحتی حل می‌شوند:

$$(s, r_1, r_2) = (\ln|x|, y_1/x, y_2/x)$$

بنابراین دستگاه (۱۱۴.۷) با دستگاه زیر هم ارز است:

$$\frac{dr_1}{ds} = \frac{2r_1 + r_2^2 - r_1^2 r_2}{r_1r_2 - 1}, \qquad \frac{dr_2}{ds} = \frac{2r_2 + r_1^2 - r_1 r_2^2}{r_1r_2 - 1}.$$

همانطور که انتظار داشتیم این روند به تولید یک معادله دیفرانسیل معمولی که مستقل از s است منتهی شد:

$$\frac{dr_2}{dr_1} = \frac{2r_2 + r_1^2 - r_1 r_2^2}{2r_1 + r_2^2 - r_1^2 r_2}$$

اما این معادله دیفرانسیل معمولی تقارنهای مشخصی ندارد و برای حل آسان بنظر نمی‌رسد.

دستگاه (۱۱۴.۷) دارای دو هم-مشخصه مستقل خطی است که مولفه‌های آنها توابع خطی نسبت به y_1 و y_2 می‌باشند و عبارتند از:

$$\mathbf{\Lambda}_1 = (y_1, -x), \qquad \mathbf{\Lambda}_2 = (-x, y_2),$$

که هر یک در شرایط انتگرال پذیری (۱۱۱.۷) صدق می‌کنند و (۱۱۲.۷) ما را قادر می‌سازد تا انتگرالهای اولیه زیر را بسازیم:

$$\varphi^1 = \frac{1}{2}y_1^2 - xy_2, \qquad \varphi^2 = \frac{1}{2}y_2^2 - xy_1. \tag{۱۱۵.۷}$$

بنابراین جواب عمومی دستگاه (۱۱۴.۷) عبارتست از:

$$\begin{aligned} &y_1^4 - 4c_1y_1^2 - 8x^3y_1 - 8c_2x^2 + 4c_1^2 = 0,\\ &y_2^4 - 4c_2y_2^2 - 8x^3y_2 - 8c_1x^2 + 4c_2^2 = 0. \end{aligned} \tag{۱۱۶.۷}$$

مطالعه بیشتر

تقارنهای دینامیکی با جزئیات بیشتر در کتاب استفانی (۱۹۸۹) مورد بحث قرار گرفته‌اند و این کتاب شامل مثالهای متفاوتی از فیزیک کلاسیک می‌باشد.

روش عامل انتگرال‌گیری که در بخش ۷.۳ مطرح شد، تغییر یافته روشی است که در کتاب آنکو و بلومن (۱۹۹۸) توصیف شده است. این نویسندگان همچنین مسئله ساختن قانون بقا برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را مورد توجه قرار داده اند.

تمرین‌ها

۱.۷ سه انتگرال اولیه مستقل تابعی معادله دیفرانسیل معمولی

$$y''' = \frac{6y'y''}{y} - \frac{6y'^3}{y^2}$$

را با استفاده از تقارنهای تولید شده توسط

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = y^2\partial_y, \qquad X_3 = xy^2\partial_y, \qquad X_4 = x\partial_x - 2y\partial_y$$

بیابید. انتگرالهای اولیه را برای تشخیص جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی بکار گیرید.

۲.۷ کلیه مشخصه‌های تقارنهای برخوردی معادله دیفرانسیل معمولی

$$y''' = 3y''^2/(2y') + 2y'^3$$

را بیابید و از آنها برای ساختن انتگرالهای اولیه استفاده کنید.

۳.۷ کلیه مشخصه‌های تقارنهای برخوردی معادله دیفرانسیل معمولی

$$y''' = x(x-1)y''^3 - 2xy''^2 + y''$$

را بیابید و از آنها برای ساختن انتگرالهای اولیه (۶۰.۷) استفاده کنید.

۴.۷ یک مولد بینهایت کوچک تقارنهای برخوردی لی را در نظر بگیرید. می‌توان با حل

$$\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} = \xi(\hat{x},\hat{y},\hat{y}'), \qquad \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} = \eta(\hat{x},\hat{y},\hat{y}'), \qquad \frac{d\hat{y}'}{d\varepsilon} = \eta^{(1)}(\hat{x},\hat{y},\hat{y}')$$

تقارنهای برخوردی لی متناهی را بازسازی کرد. با توجه به شرایط

$$(\hat{x},\hat{y},\hat{y}') = (x,y,y') \qquad \text{زمانیکه} \qquad \varepsilon = 0$$

تقارنهای برخوردی متناهی متناظر با هر مشخصه در (۵۶.۷) را بیابید.

۵.۷ تقارنهای دینامیکی (۶۶.۷) را برای بدست آوردن انتگرالهای اولیه (۶۷.۷) بکار گیرید.

۶.۷ نشان دهید شرط انتگرال پذیری (۸۶.۷) برای اطمینان از اینکه کلیه شرایط انتگرال‌پذیری برقرار است کافی است. (راهنمایی: فرض کنید

$$J_j^k = \frac{\partial P_k^i}{\partial y^{(j)}} - \frac{\partial P_j^i}{\partial y^{(k)}}$$

و $\bar{D}$ را برای شرط $J_j^k = 0$ اعمال کنید).

۷.۷ کلیه مشخصه‌ها و هم-مشخصه‌های وابسته به (x,y,y') را برای معادله دیفرانسیل معمولی

$$y''' = (2y'-1)y'' + y'^2$$

بیابید. بنابراین این معادله دیفرانسیل معمولی به معادله ریکاتی مرتبه یک

$$v' - v^2 = c_1e^x$$

کاهش می‌یابد. (جوابهای این معادله می‌تواند بر حسب توابع بسل به این صورت نوشته شود: ابتدا $v = -z'/z$ را در معادله ریکاتی خطی جایگذاری کنید سپس یک متغیر مستقل جدید $t = e^{-x/2}$ را معرفی کنید تا معادله بسل بدست آید) اکنون جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۳ اولیه را بدست آورید.

۸.۷ نشان دهید اگر φ توسط (۹۳.۷) تعریف شود آنگاه $\bar{D}\varphi = 0$.

۹.۷ از انتگرالهای اولیه (۴۱.۷) و (۴۲.۷) برای ساختن مولدهای $X_i = \partial_{\varphi^i}$ استفاده کنید. (باید به این موضوع برسید که X_3 یک تقارن دینامیکی است. مشخصه متناظر با هر مولد تقارن نقطه‌ای (۴۰.۷) را به شکل (۶۳.۷) بنویسید. نتایج خود را برای توضیح اینکه چرا انتگرال اولیه (۴۲.۷) با استفاده از نسبتهای دترمینان W_{ijk} نمی‌تواند یافت شود، بکار گیرید.)

فصل ۸

چگونه تقارن های نقطه ای لی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را بیابیم

با اینکه بسیار لذت بردم، افکارش تماماً نمادگذاری بود ... ؟

(لوئیس کارول: چهار معما)

بخش ۱.۸ معادلات دیفرانسیل جزئی عددی با دو متغیر وابسته

تقارن های نقطه‌ای معادله با مشتقات جزئی (معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی)، اغلب مشابه روش معادله دیفرانسیل معمولی (معادلات دیفرانسیل معمولی) تعریف می‌شوند. برای سادگی، اجازه دهید بحث را با در نظر گرفتن معادلات با مشتقات جزئی ای با یک متغیر وابسته u و دو متغیر مستقل x و t شروع نمائیم. یک تبدیل نقطه‌ای، یک دیفئومورفیسم

$$\Gamma : (x,t,u) \mapsto (\hat{x}(x,t,u), \hat{t}(x,t,u), \hat{u}(x,t,u)) \qquad (۱.۸)$$

می‌باشد .

این تبدیل سطح $u = u(x,t)$ را به سطح ذیل (که بوسیله x و t پارامتری شده است) می‌نگارد:

$$\hat{x} = \hat{x}(x,t,u(x,t)), \quad \hat{t} = \hat{t}(x,t,u(x,t)), \quad \hat{u} = \hat{u}(x,t,u(x,t)). \qquad (۲.۸)$$

برای محاسبه امتداد تبدیل مفروض، باید از رابطه (2.8) نسبت به هریک از پارامترهای x و t دیفرانسیل گیری نماییم. برای انجام این عمل ، مشتقات کلی ذیل را معرفی می نمائیم :

$$\begin{aligned} D_x &= \partial_x + u_x\partial_u + u_{xx}\partial_{u_x} + u_{xt}\partial_{u_t} + \cdots \\ D_t &= \partial_t + u_t\partial_u + u_{xt}\partial_{u_x} + u_{tt}\partial_{u_t} + \cdots . \end{aligned} \qquad (۳.۸)$$

مشتقات کلی، متغیر وابسته u و مشتقاتش را بعنوان تابعی از متغیرهای مستقل مورد بحث قرار می‌دهد.

دو معادله اول (2.8) را(بطور موضعی) می‌توان معکوس کرد تا x و t را بر حسب $\hat{x}$ و $\hat{t}$ بدست آورد، مشروط بر اینکه ژاکوبین ناصفر باشد، یعنی:

$$u = u(x,t) \qquad \text{هنگامی که} \quad \mathcal{J} \equiv \begin{vmatrix} D_x\hat{x} & D_x\hat{t} \\ D_t\hat{x} & D_t\hat{t} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{۴.۸}$$

اگر رابطه (۴.۸) برقرار باشد، آنگاه آخرین معادله (۲.۸) را بصورت

$$\hat{u} = \hat{u}(\hat{x},\hat{t}) \tag{۵.۸}$$

می‌توانیم دوباره نویسی نماییم.

با بکاربردن قاعده زنجیری برای (۵.۸) ، بدست می آوریم :

$$\begin{bmatrix} D_x\hat{u} \\ D_t\hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x\hat{x} & D_x\hat{t} \\ D_t\hat{x} & D_t\hat{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{\hat{x}} \\ \hat{u}_{\hat{t}} \end{bmatrix}$$

و بنابراین (بنابر قاعده کرامر)

$$\hat{u}_{\hat{x}} = \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{vmatrix} D_x\hat{u} & D_x\hat{t} \\ D_t\hat{u} & D_t\hat{t} \end{vmatrix}, \qquad \hat{u}_{\hat{t}} = \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{vmatrix} D_x\hat{x} & D_x\hat{u} \\ D_t\hat{x} & D_t\hat{u} \end{vmatrix}. \tag{۶.۸}$$

امتدادهای مرتبه بالاتر با تکرار استدلال فوق بطور بازگشتی بدست می‌آیند. اگر $\hat{u}_J$ مشتق دلخواهی از $\hat{u}$ نسبت به $\hat{x}$ و $\hat{t}$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \hat{u}_{J\hat{x}} \equiv \frac{\partial \hat{u}_J}{\partial \hat{x}} &= \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{vmatrix} D_x\hat{u}_J & D_x\hat{t} \\ D_t\hat{u}_J & D_t\hat{t} \end{vmatrix}, \\ \hat{u}_{J\hat{t}} \equiv \frac{\partial \hat{u}_J}{\partial \hat{t}} &= \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{vmatrix} D_x\hat{x} & D_x\hat{u}_J \\ D_t\hat{x} & D_t\hat{u}_J \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{۷.۸}$$

برای مثال، تبدیل مشتقات مرتبه دوم بصورت ذیل امتداد می‌یابد:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} &= \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{vmatrix} D_x\hat{u}_{\hat{x}} & D_x\hat{t} \\ D_t\hat{u}_{\hat{x}} & D_t\hat{t} \end{vmatrix}, \\ \hat{u}_{\hat{t}\hat{t}} &= \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{vmatrix} D_x\hat{x} & D_x\hat{u}_{\hat{t}} \\ D_t\hat{x} & D_t\hat{u}_{\hat{t}} \end{vmatrix}, \\ \hat{u}_{\hat{x}\hat{t}} &= \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{vmatrix} D_x\hat{u}_{\hat{t}} & D_x\hat{t} \\ D_t\hat{u}_{\hat{t}} & D_t\hat{t} \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{vmatrix} D_x\hat{x} & D_x\hat{u}_{\hat{x}} \\ D_t\hat{x} & D_t\hat{u}_{\hat{x}} \end{vmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{۸.۸}$$

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم تقارنهای نقطه‌ای یک معادله با مشتقات جزئی مرتبه n ام را تعریف نمائیم:

$$\Delta(x,t,u,u_x,u_t,\cdots) = 0 \quad . \tag{۹.۸}$$

برای سادگی، توجهمان را به معادلات با مشتقات جزئی ای به شکل

$$\Delta = u_\sigma - \omega(x,t,u,u_x,u_t,\cdots) = 0 \quad , \tag{۱۰.۸}$$

که u_σ یکی ا ز مشتقات مرتبه n ام u می‌باشد و ω مستقل از u_σ است معطوف می‌نمائیم.(در حالت کلی تر، u_σ می تواند از مرتبه $k<n$ باشد، مشروط به اینکه ω وابسته به u_σ یا هر مشتقی از u_σ نباشد) .
تبدیل نقطه‌ای Γ یک تقارن نقطه‌ای از (9.8) می‌باشد اگر

$$\Delta(\hat{x},\hat{t},\hat{u},\hat{u}_{\hat{x}},\hat{u}_{\hat{t}},\cdots)=0 \quad \text{هنگامیکه (۹.۸) برقرار باشد.} \qquad (۱۱.۸)$$

به نوعی، شرط تقارن (۱۱.۸) در نهایت پیچیده می‌باشد، لذا نباید تلاش کنیم که آنرا بطور مستقیم حل نمائیم، مگر اینکه بررسی این مطلب که آیا تبدیل نقطه‌ای مفروض یک تقارن ویژه از معادله با مشتقات جزئی است یا خیر کاملاً ساده باشد.

۱.۸ مثال. در اینجا شرط تقارن را برای اینکه نشان دهیم

$$(\hat{x},\hat{t},\hat{u})=(\frac{x}{2t},\frac{-1}{4t},2(ut-x)) \qquad (۱۲.۸)$$

یک تقارن نقطه ای از معادله برگر

$$u_t+uu_x=u_{xx} \qquad (۱۳.۸)$$

است، بکار می‌بریم. ژاکوبین تبدیل نقطه‌ای (۱۲.۸)

$$\mathcal{J}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2t} & 0 \\ \frac{-x}{2t^2} & \frac{1}{4t^2} \end{vmatrix}=\frac{1}{8t^3},$$

می باشد و بنابراین

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{\hat{x}} &= 8t^3\begin{vmatrix} 2(tu_x-1) & 0 \\ 2(tu_t+u) & \frac{1}{4t^2} \end{vmatrix}=4t(tu_x-1),\\
\hat{u}_{\hat{t}} &= 8t^3\begin{vmatrix} \frac{1}{2t} & 2(tu_x-1) \\ \frac{-x}{2t^2} & 2(tu_t+u) \end{vmatrix}=8t(t^2u_t+xtu_x+tu-x),\\
\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} &= 8t^3\begin{vmatrix} 4t^2u_{xx} & 0 \\ 4(t^2u_{xt}+2tu_x-1) & \frac{1}{4t^2} \end{vmatrix}=8t^3u_{xx},
\end{aligned}$$

می باشد. توجه نمائید که

$$\hat{u}_{\hat{t}}+\hat{u}\hat{u}_{\hat{x}}=8t^3(u_t+uu_x),$$

و بنابراین تبدیل نقطه ای در شرط تقارن

$$\hat{u}_{\hat{t}}+\hat{u}\hat{u}_{\hat{x}}=\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}}, \quad \text{هنگامیکه} \quad u_t+uu_x=u_{xx}$$

صدق می‌کند. در بیان کلی تر، ما شناخت اولیه از اینکه چه فرم از تقارنهای نقطه‌ای باید اتخاذ شود نداریم. اگرچه بطور معمول این امکان وجود دارد که یک جستجوی سیستماتیکی برای گروههای لی یک پارامتری از تقارنهای نقطه‌ای انجام دهیم. روش اتخاذ شده اساساً شبیه روش معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. ما بدنبال تقارنهای نقطه‌ای بفرم ذیل هستیم:

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= x+\varepsilon\xi(x,t,u)+O(\varepsilon^2),\\
\hat{t} &= t+\varepsilon\tau(x,t,u)+O(\varepsilon^2),\\
\hat{u} &= u+\varepsilon\eta(x,t,u)+O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \qquad (۱۴.۸)$$

تنها مشابه تبدیلات نقطه ای لی صفحه ، هر گروه لی یک پارامتری (موضعی) از تبدیلات ، بوسیله نماگیری از مولد بی نهایت کوچکش که به فرم

$$X = \xi\partial_x + \tau\partial_t + \eta\partial_u, \qquad (۱۵.۸)$$

می‌باشد بدست می‌آید. بطور مشابه ، $(\hat{x},\hat{t},\hat{u})$ را بوسیله حل

$$\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} = \xi(\hat{x},\hat{t},\hat{u}) \quad ,\frac{d\hat{t}}{d\varepsilon} = \tau(\hat{x},\hat{t},\hat{u}) \quad ,\frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} = \eta(\hat{x},\hat{t},\hat{u})$$

می توانیم بدست بیاوریم . تحت شرایط اولیه داریم:

$$(\hat{x},\hat{t},\hat{u})|_{\varepsilon=o} = (x,t,u).$$

سطح $u = u(x,t)$ به خودش بوسیله گروه تبدیلات تولید شده بوسیله X نگاشته می‌شود، اگر

$$u = u(x,t) \quad \text{هنگامیکه} \quad X = (u - u(x,t)) = 0 \quad . \qquad (۱۶.۸)$$

باشد. این شرط را به سادگی با بکار بردن مشخصه گروه می توان بیان نمود، که

$$Q = \eta - \xi u_x - \tau u_t. \qquad (۱۷.۸)$$

می‌باشد. بنابر (۱۶.۸)، سطح $u = u(x,t)$ ناورداست، مشروط بر اینکه

$$u = u(x,t) \quad \text{هنگامیکه} \quad Q = 0. \qquad (۱۸.۸)$$

باشد. معادله (۱۸.۸) شرط ناوردایی سطح نامیده می‌شود. این شرط مرکز برخی از تکنیک‌های اصلی برای یافتن جوابهای دقیق معادلات با مشتقات جزئی می‌باشد.

امتداد تبدیل نقطه‌ای (۱۴.۸) به مشتقات مرتبه اول بصورت ذیل است:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\hat{x}} &= u_x + \varepsilon\eta^x(x,t,u,u_x,u_t) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{u}_{\hat{t}} &= u_t + \varepsilon\eta^t(x,t,u,u_x,u_t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \qquad (۱۹.۸)$$

که، بنابر(۶.۸)،

$$\begin{aligned} \eta^x(x,t,u,u_x,u_t) &= D_x\eta - u_x D_x\xi - u_t D_x\tau, \\ \eta^t(x,t,u,u_x,u_t) &= D_t\eta - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau. \end{aligned} \qquad (۲۰.۸)$$

این تبدیل بطور بازگشتی به مشتقات مرتبه بالاتر امتداد داده می‌شود، برای این منظور از(۷.۸) استفاده نمایید. فرض کنید

$$\hat{u}_J = u_J + \varepsilon\eta^J + O(\varepsilon^2), \qquad (۲۱.۸)$$

باشد که برای تعدادی از j_2, j_1ها:

$$u_J \equiv \frac{\partial^{j_1+j_2}u}{\partial x^{j_1}\partial t^{j_2}}, \quad \hat{u}_J \equiv \frac{\partial^{j_1+j_2}\hat{u}}{\partial\hat{x}^{j_1}\partial\hat{t}^{j_2}}.$$

آنگاه از (۷.۸) بدست می‌آید:

$$\hat{u}_{J\hat{x}} = u_{Jx} + \varepsilon\eta^{Jx} + O(\varepsilon^2), \qquad \hat{u}_{J\hat{t}} = u_{Jt} + \varepsilon\eta^{Jt} + O(\varepsilon^2), \qquad (۲۲.۸)$$

به قسمی که

$$\begin{aligned} \eta^{Jx} &= D_x\eta^J - u_{Jx}D_x\xi - u_{Jt}D_x\tau, \\ \eta^{Jt} &= D_t\eta^J - u_{Jx}D_t\xi - u_{Jt}D_t\tau, \end{aligned}$$ (۲۳.۸)

می‌باشد. همچنین، توابع η^J را می‌توانیم بر حسب مشخصه بیان نماییم. برای مثال

$$\eta^x = D_xQ + \xi u_{xx} + \tau u_{xt}, \qquad \eta^t = D_tQ + \xi u_{xt} + \tau u_{tt}.$$ (۲۴.۸)

عبارات مرتبه بالاتر بوسیله استقرا روی j_2, j_1 بدست می‌آیند:

$$\eta^J = D_JQ + \xi D_Ju_x + \tau D_Ju_t,$$ (۲۵.۸)

که

$$D_J \equiv D_x^{j_1}D_t^{j_2}$$ (۲۶.۸)

می‌باشد. مولد بی نهایت کوچک به مشتقات با افزودن تمامی عباراتی به فرم $\eta^J\partial_{u_J}$ به مشتقات تا مرتبه دلخواه امتداد داده می‌شود. برای مثال،

$$X^{(1)} = \xi\partial_x + \tau\partial_t + \eta\partial_u + \eta^x\partial_{u_x} + \eta^t\partial_{u_t} = X + \eta^x\partial_{u_x} + \eta^t\partial_{u_t},$$ (۲۷.۸)

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \eta^{xx}\partial_{u_{xx}} + \eta^{xt}\partial_{u_{xt}} + \eta^{tt}\partial_{u_{tt}}.$$ (۲۸.۸)

از هم اکنون، قرارداد می‌نماییم که مولد به تعداد دفعاتی که برای بیان عمل گروه لازم باشد روی تمامی متغیرها امتداد داده می‌شود(معمولاً نباید بطور دقیق به مرتبه امتداددهی اشاره نماییم). برای یافتن تقارنهای لی نقطه‌ای، به عبارات دقیقی برای رابطه (۲۳.۸) احتیاج داریم. تعدادی از این عبارات در اینجا موجودند:

$$\eta^x = \eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \tau_xu_t - \xi_uu_x^2 - \tau_uu_xu_t,$$ (۲۹.۸)

$$\eta^t = \eta_t - \xi_tu_x + (\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_uu_xu_t - \tau_uu_t^2,$$ (۳۰.۸)

$$\begin{aligned} \eta^{xx} = {} & \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 \\ & -2\tau_{xu}u_xu_t - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2u_t + (\eta_u - 2\xi_x)u_{xx} \\ & -2\tau_xu_{xt} - 3\xi_uu_xu_{xx} - \tau_uu_tu_{xx} - 2\tau_uu_xu_{xt}, \end{aligned}$$ (۳۱.۸)

$$\begin{aligned} \eta^{xt} = {} & \eta_{xt} + (\eta_{tu} - \xi_{xt})u_x + (\eta_{xu} - \tau_{xt})u_t - \xi_{tu}u_x^2 \\ & +(\eta_{uu} - \xi_{xu} - \tau_{tu})u_xu_t - \tau_{xu}u_t^2 - \xi_{uu}u_x^2u_t - \tau_{uu}u_xu_t^2 \\ & -\xi_tu_{xx} - \xi_uu_tu_{xx} + (\eta_u - \xi_x - \tau_t)u_{xt} - 2\xi_uu_xu_{xt} \\ & -2\tau_uu_tu_{xt} - \tau_xu_{tt} - \tau_uu_xu_{tt}, \end{aligned}$$ (۳۲.۸)

$$\begin{aligned} \eta^{tt} = {} & \eta_{tt} - \xi_{tt}u_x + (2\eta_{tu} - \tau_{tt})u_t - 2\xi_{tu}u_xu_t \\ & +(\eta_{uu} - 2\tau_{tu})u_t^2 - \xi_{uu}u_xu_t^2 - \tau_{uu}u_t^3 - 2\xi_tu_{xt} \\ & -2\xi_uu_tu_{xt} + (\eta_u - 2\tau_t)u_{tt} - \xi_uu_xu_{tt} - 3\tau_uu_tu_{tt}. \end{aligned}$$ (۳۳.۸)

تقارنهای نقطه‌ای لی بوسیله دیفرانسیل گیری از شرط تقارن (۸.۱۱) نسبت به ε در $\varepsilon = 0$ بدست می‌آیند. شرط تقارن خطی شده را بصورت ذیل بدست می‌آوریم:

$$X\Delta = 0 \quad \text{هنگامیکه} \quad \Delta = 0.$$ (۳۴.۸)

با استفاده از روابط (۱۰.۸) قادر به حذف u_σ از (۳۴.۸) هستیم. سپس عبارتهای باقیمانده را (مطابق وابستگی‌هایشان به مشتقات u) تفکیک می‌کنیم تا یک دستگاه خطی از معادلات مبین برای η, τ, ξ بدست آید. فضای برداری $\mathcal{L}$ از تمامی مولدهای تقارن نقطه‌ای لی معادله با مشتقات جزئی مفروض، یک جبر لی می‌باشد، اگرچه ممکن است متناهی البعد نباشد.

۲.۸ مثال. برای روشن شدن بهتر این تکنیک، معادله با مشتقات جزئی ذیل را در نظر بگیرید:

$$u_t = u_x^2. \tag{۳۵.۸}$$

شرط تقارن خطی بصورت

$$\eta^t = 2u_x\eta^x \quad \text{هنگامیکه (۸.۳۵) برقرار باشد} \tag{۳۶.۸}$$

می‌باشد. بااستفاده از شرط فوق و با حذف u_t، از رابطه (۳۵.۸) داریم

$$\begin{aligned}\eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t)u_x^2 - \xi_u u_x^3 - \tau_u u_x^4 &= \\ = \quad 2u_x(\eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - (\xi_u + \tau_x)u_x^2 - \tau_u u_x^3)\end{aligned}$$

پس از برابر قرار دادن عبارتهایی که بصورت حاصلضربی از توان های دلخواهی از u_x هستند، دستگاهی معادلات مبین زیر را بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}\tau_u &= 0, &(۳۷.۸)\\ \xi_u + 2\tau_x &= 0, &(۳۸.۸)\\ \eta_u + \tau_t - 2\xi_x &= 0, &(۳۹.۸)\\ \xi_t + 2\eta_x &= 0, &(۴۰.۸)\\ \eta_t &= 0. &(۴۱.۸)\end{aligned}$$

(در ابتدا عبارات فوق بر حسب عبارات u_x^4 مرتب شده‌اند، آنگاه بر حسب عبارات $u_x^3, \cdots$). با حل (۳۷.۸) آغاز می‌نماییم تا عبارت:

$$\tau = A(x,t),$$

را بدست آوریم که در آن A (در حال حاضر) تابعی دلخواه است. بنابراین جواب عمومی (۳۸.۸) به فرم:

$$\xi = -2A_x u + B(x,t),$$

است و از (۳۹.۸)عبارت:

$$\eta = -2A_{xx}u^2 + (2B_x - A_t)u + C(x,t),$$

به ازای توابع دلخواه B و C. بدست می آوریم. با جایگذاری نتایج فوق در (۴۰.۸) و (۴۱.۸)، داریم:

$$\begin{aligned}-4A_{xxx}u^2 + 4(B_{xx} - A_{xt})u + B_t + 2C_x &= 0, &(۴۲.۸)\\ -2A_{xxt}u^2 + (2B_{xt} - A_{tt})u + C_t &= 0. &(۴۳.۸)\end{aligned}$$

توابع B,A و C مستقل از u می‌باشند، بنابراین روابط (۴۲.۸) و (۴۳.۸) می‌توانند با برابر قرار دادن توانهایی از u، بصورت ذیل تجزیه شوند:

$$C_t = 0, \quad (۴۴.۸)$$
$$B_t+2C_x = 0, \quad (۴۵.۸)$$
$$2B_{xt}-A_{tt} = 0, \quad (۴۶.۸)$$
$$B_{xx}-A_{xt} = 0, \quad (۴۷.۸)$$
$$A_{xxt} = 0, \quad (۴۸.۸)$$
$$A_{xxx} = 0, \quad (۴۹.۸)$$

با بکار بردن هر یک از روابط (۴۴.۸) ، (۴۵.۸) و (۴۶.۸) بترتیب روابط زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} C &= \alpha(x), \\ B &= -2\alpha'(x)t+\beta(x), \\ A &= 2\alpha''(x)t^2+\gamma(x)t+\delta(x). \end{aligned} \quad (۵۰.۸)$$

در اینجا $\delta,\gamma,\beta,\alpha$ توابعی از x هستند که با جایگذاری (۵۰.۸) در (۴۷.۸) ، (۴۸.۸) و (۴۹.۸) مشخص می‌شوند، سپس توانهایی از t را یکی قرار دهید و معادلات دیفرانسیل معمولی ای حاصل راحل نمایید. تا در نهایت به جواب عمومی

$$\begin{aligned} \xi &= -4c_1tx-2c_2t+c_4(\frac{1}{2}x^2-2tu)+c_6x+c_7-4c_8xu-2c_9u, \\ \tau &= -4c_1t^2+c_4xt+c_5t+c_8x^2+c_9x+c_{10}, \\ \eta &= c_1x^2+c_2x+c_3+c_4xu-c_5u+2c_6u-4c_8u^2, \end{aligned} \quad (۵۱.۸)$$

برسید. ده ثابت دلخواه در روابط فوق موجودند که نشاندهنده این مطلب است که جبر لی، ده بعدی می‌باشد.

همانطور که مشاهده نمودیم، تقارنهای نقطه‌ای لی معادلات با مشتقات جزئی و معادله دیفرانسیل معمولی ها اساساً توسط روشی مشابه بدست می‌آیند. اما،معادلات با مشتقات جزئی شامل چندین متغیر مستقل می‌باشند، لذا محاسبات طولانی می‌باشند. در ادامه فصل، صرفاً محاسبه را خلاصه می‌نمائیم و اطلاعات کافی را برای آنکه خواننده بتواند به اجرای جزئیات بپردازد ارائه می‌دهیم.

در مثال قبل ابتدا معادلات مبین را با استفاده از عبارات ضرب شده توسط u_x^k قبل از عباراتی که توسط u_x^{k-1} ضرب شده‌اندحل نمودیم. اطلاعات بدست آمده در هر مرحله برای ساده سازی معادله بعدی استفاده می‌شوند. این روش بسیار موثری است که به معادلات با مشتقات جزئیی مرتبه بالاتر (برای آنهایی که معادلات مبین بیشتری ممکن است داشته باشند) بصورت ذیل قابل تعمیم می‌باشد:

ابتدا شرط تقارن خطی را بنویسید، اما همه η^J را بسط ندهید. در عوض عباراتی که در شرط تقارن خطی شده توسط توان بالاتری از مشتقات مرتبه بالاتر u ضرب شده‌اند را یکی در نظر بگیرید. از این عبارات تعدادی از معادلات مبین بدست می‌آیند که اکنون باید به حل آنها بپردازیم. آنگاه نتایج حاصل را برای ساده سازی باقی عبارات در شرط تقارن خطی بکار می‌گیریم. حال عباراتی را که بصورت حاصلضربی توسط توان باقیمانده مرتبه بالاتر از مشتقات باقیمانده بالاتر هستند را بنویسید و معادلات مبین حاصل شده را حل نمایید. این فرآیند را ادامه می‌دهیم تا شرط تقارن خطی شده کاملاً برقرار گردد.

این روش عموماً خوب عمل می‌نماید، اما گاهی اوقات توسط تغییر مرتبه در عبارات استفاده شده، می‌توان سریعتر به نتیجه رسید.

۳.۸ مثال. شرط تقارن خطی شده برای معادله برگر،

$$u_t + uu_x = u_{xx}, \qquad (۵۲.۸)$$

بصورت

$$\eta^t + u\eta^x + u_x\eta = \eta^{xx} \quad \text{هنگامیکه (۵۲.۸) برقرار باشد} \qquad (۵۳.۸)$$

می‌باشد. بجای u_{xx} از سمت چپ فرمول (۵۲.۸) استفاده می کنیم، عبارات مشتق مرتبه بالاتر در (۵۳.۸) دارای عامل u_{xt} می‌باشند. با نوشتن عبارات مذکور ، شروع می کنیم:

$$0 = -2\tau_x u_{xt} - 2\tau_u u_x u_{xt}.$$

این مطلب منجر می‌شود به:

$$\tau_x = \tau_u = 0$$

که بسیاری از عبارات را از شرط تقارن خطی شده حذف می‌نماید. عبارات باقیمانده

$$\begin{aligned}\eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t + u(\eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \xi_u u_x^2) + u_x\eta = \\ = \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - \xi_{uu}u_x^3 + (\eta_u - 2\xi_x - 3\xi_u u_x)(u_t + uu_x)\end{aligned}$$

هستند. بویژه، عبارات ضرب شده توسط u_t بصورت ذیل هستند:

$$(\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t = (\eta_u - 2\xi_x - 3\xi_u u_x)u_t.$$

لذا دو معادله مبین حاصل می‌شود:

$$\xi_u = 0, \quad \xi_x = \frac{1}{2}\tau'(t).$$

بنابراین برای تابعی مانند α،

$$\xi = \frac{1}{2}\tau'(t)x + \alpha(t),$$

می‌باشد. باقی عبارات در شرط تقارن خطی شده α و τ ، را تا ۵ ثابت دلخواه معین می‌کنند. جبر لی مولدهای تقارن نقطه‌ای توسط

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_t, \quad X_3 = t\partial_x + \partial_u,$$
$$X_4 = x\partial_x + 2t\partial_t - u\partial_u, \quad X_5 = xt\partial_x + t^2\partial_t + (x - ut)\partial_u.$$

تولید می‌شوند.

تذکر: در محاسبات فوق، بهتر است عباراتی که مضارب u_t هستند را نسبت به آنهایی که مضارب توانی از u_x هستند در اولویت می‌دهیم. این مطلب برای معادلات پیچشی کهمعادلات با مشتقات جزئی به فرم

$$u_t = F(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \cdots)$$

می‌باشند معمول می‌باشد. (F تنها شامل مشتقاتی از u نسبت به x می‌باشند، نه به t) برای معادله برگر، F دارای یک عبارت متناسب با u_{xx} می‌باشد، لذا برای u_t طبیعی می‌باشد که به عبارات u_x نسبت دهیم.

اگر یک معادله با مشتقات جزئی، خطی و همگن باشد، در اینصورت معادله با مشتقات جزئی مفروض دارای یک جبر لی نامتناهی البعد از مولدهای تقارن نقطه‌ای می‌باشد. قاعده ترکیب خطی بیان می‌کند که اگر $u(x,t)$ و $U(x,t)$ جوابهای معادله با مشتقات جزئی باشد، آنگاه (برای هر ε)

$$\hat{u} = u + \varepsilon U(x,t).$$

بنابراین

$$X_U = U(x,t)\partial_u \qquad (۵۴.۸)$$

یک مولد تقارنی برای هر جواب $U(x,t)$ می‌باشد. معادله با مشتقات جزئی دارای تعداد بسیاری جواب مستقل خطی نامتناهی می‌باشد، بنابراین جبر لی از بعد نامتناهی می‌باشد. به طور مشابه اگر u درمعادله با مشتقات جزئی خطی همگن صدق نماید و $U(x,t)$ هر جوابی از معادله با مشتقات جزئی همگن مرتبط باشد، آنگاه رابطه (۵۴.۸) یک مولد تقارنی می‌باشد. فرض کنید یک معادله با مشتقات جزئی غیر خطی مفروض دارای مولدهای تقارنی نقطه‌ای باشد که وابسته به جوابهای دلخواه معادله همگن خطی باشد. آنگاه با مقایسه مولدهای تقارنی دو معادله، می‌توان یک معادله با مشتقات جزئی اولیه را خطی نمود. هدف ساختن یک تبدیل نقطه‌ای می‌باشد که معادله با مشتقات جزئی غیر خطی را به معادله خطی می‌نگارد. (یا یک معادله همگن مرتبط). مثال ذیل چگونگی انجام این عمل را شرح می‌دهد.

۴.۸ مثال. جبر لی مولدهای تقارن نقطه‌ای معادله توماس

$$u_{xt} = u_x u_t - 1 \qquad (۵۵.۸)$$

توسط

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_t, \qquad X_3 = \partial_u, \\ X_4 = x\partial_x - t\partial_t, \qquad \left\{X_V = V(x,t)e^u\partial_u : V_{xt} = V\right\}, \end{gathered} \qquad (۵۶.۸)$$

تولید می‌شود. در حقیقت جبر لی معادله توماس وابسته به جوابهای

$$v_{xt} = v \qquad (۵۷.۸)$$

می‌باشد که مبین این مطلب است که می‌توانیم معادله توماس را به (۵۷.۸) تبدیل نمائیم. جبر لی مولدهای تقارن نقطه‌ای (۵۷.۸) توسط

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_t, \qquad X_3 = v\partial_v, \\ X_4 = x\partial_x - t\partial_t, \qquad \left\{X_V = V(x,t)\partial_v : V_{xt} = V\right\}, \end{gathered} \qquad (۵۸.۸)$$

تولید می‌شود. به منظور یافتن یک تبدیل نقطه‌ای که یکی را به دیگری می‌نگارد، به مقایسه جبرهای لی (۵۶.۸) و (۵۸.۸) می‌پردازیم. هر دو جبر لی فوق دارای عمل مشابه روی t,x می‌باشند که مبین این مطلب می‌باشد که این متغیرها توسط تبدیل نقطه‌ای تغییر نمی‌یابند. لذا تغییر متغیرهای $v = f(u)$ را که (۸.۵۶) را به (۸.۵۸) می‌نگارد، در نظر می‌گیریم. فرمول معمول تغییر متغیرهابرای مولدهای بی نهایت کوچک به

$$v = e^{-u} \qquad (۵۹.۸)$$

منتهی می‌شود. خواننده می‌تواند بررسی نماید که این تبدیل در واقع معادله توماس را خطی می‌نماید.

اگر جبر لی مولدهای تقارن نقطه‌ای یک معادله با مشتقات جزئی مفروض متناهی البعدی باشد، معادله با مشتقات جزئی توسط تبدیل نقطه‌ای نمی‌تواند خطی گردد. مولدهای تقارن نقطه‌ای یک معادله با مشتقات جزئی تبدیل نیافته توسط قانون زنجیری به معادلات با مشتقات جزئی تبدیل یافته نگاشته می‌شوند (وبرعکس)، بنابراین بعد جبر لی توسط تبدیل نقطه‌ای دلخواه تغییر نمی‌یابد. اگر چه، برخی از معادلات با مشتقات جزئی با جبر های لی متناهی می‌توانند بوسیله تبدیلات غیر نقطه‌ای خطی گردند.

بخش ۲.۸   شرط تقارن خطی شده برای معادلات با مشتقات جزئی عمومی

تمام مطالبی که در بخش قبل بیان شد به معادلات با مشتقات جزئی با M متغیر وابسته $u=(u^1,\cdots,u^M)$ وN متغیر مستقل $x=(x^1,\cdots,x^N)$ تعمیم داده می‌شود. برای کوتاه سازی نمادگذاری باید از $u^{(k)}$ برای نمایش مجموعه متغیرهای وابسته و مشتقات جزئی‌شان از مرتبه k یا کمتر استفاده می‌نمائیم. در ضمن روش برای مشخص نمودن شرط تقارن خطی شده آشنا می باشد. تنها تفاوت این است که باید از اندیس گذاری بیشتری استفاده نماییم. بنابراین تنها به بیان نکات اصلی بدون آنکه جزئیات را شرح دهیم می‌پردازیم.

فرض کنید X مولد بی نهایت کوچک یک گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای باشد، یعنی

$$X=\xi^i(x,u)\partial_{x^i}+\eta_\alpha(x,u)\partial_{u^\alpha}. \qquad (۶۰.۸)$$

مشخصه گروه، $Q=(Q_1,\cdots,Q_M)$ است، که در آن:

$$Q_\alpha=\eta_\alpha-\xi^i u^\alpha_{x^i},\quad \alpha=1,\cdots,M \qquad (۶۱.۸)$$

برای امتداددهی عمل گروه خطی شده نیازمند استفاده از مشتقات کلی می‌باشیم:

$$D_{x^i}\equiv\partial_{x^i}+u^\alpha_{x^i}\partial_{u^\alpha}+\cdots.$$

امتداد مرتبه اول X بصورت

$$X^{(1)}=X+\eta^l_\alpha(x,u^{(1)})\partial_{u^\alpha_{x^l}}$$

می‌باشد که

$$\eta^l_\alpha(x,u^{(1)})=D_{x^l}Q_\alpha+\xi^i D_{x^l}u^\alpha_{x^i}. \qquad (۶۲.۸)$$

بطور مشابه، فرمول عمومی برای مولدهای امتداد یافته عبارتست از:

$$X=\xi^i(x,u)\partial_{x^i}+\eta_\alpha(x,u)\partial_{u^\alpha}+\eta^J_\alpha\partial_{u^\alpha_J}, \qquad (۶۳.۸)$$

به قسمی که $u^\alpha_J=D_Ju^\alpha$ و

$$\eta^J_\alpha=D_JQ_\alpha+\xi^iD_Ju^\alpha_{x^i} \qquad (۶۴.۸)$$

می‌باشد. در اینجا

$$D_J=D^{j_1}_{x^1}D^{j_2}_{x^2}\cdots D^{j_M}_{x^M},$$

است و فرض می‌کنیم که مولد امتداد یافته (۶۳.۸) شامل تمامی عباراتی که برای شرح دادن عمل گروه خطی شده روی معادله با مشتقات جزئی مفروض نیاز داریم، باشد.

برای سهولت، تنهامعادلات با مشتقات جزئی به فرم

$$\Delta_\beta\equiv u_{\sigma_\beta}-\omega_\beta(x,u^{(n)})=0,\quad \beta=1,\cdots,M \qquad (۶۵.۸)$$

را در نظر می‌گیریم که هر u_{σ_β} «بالاترین مشتق » u^α می‌باشد، بدین معنا که هیچ عبارت دیگری در دستگاه مذکور شامل هر یک از u_{σ_β} یا مشتقاتش نمی‌باشد. این مطلب ما را قادر می‌سازد که هر u_{σ_β} را

در شرط تقارن خطی شده بوسیله ω_β متناظرش جایگزین نمائیم. سپس دستگاه حاصل را می‌توانیم به دو معادله مبین توسط یکسان قرار دادن توانهای مشتقات باقیمانده u تقسیم بندی نمائیم.

تذکر: تنها به دستگاههایی از معادله با مشتقات جزئی هامی‌پردازیم که دارای تعداد مشابه از معادلات با متغیرهای وابسته می‌باشند. برای اجتناب از پیچیدگی‌های تکنیکی، فرض تحلیلی بودن و وجود جواب منحصر بفرد برای مسئله کوشی که با مقدار اولیه دلخواه در ناحیه مورد نظر را ،در نظر می‌گیریم. افراد مبتدی نباید زمان زیادی را صرف بررسی اطلاعات مقدماتی این تکنیک نه چندان سخت نمایند.

۵.۸ مثال. برخی از معادلات با مشتقات جزئیدارای تبدیلات خطی‌ای می‌باشند که تبدیلات نقطه‌ای با متغیرهای اولیه نیستند، اما هنگامیکه معادله با مشتقات جزئی بصورت یک دستگاه مرتبه اول نوشته می‌شود بعنوان تبدیلات نقطه‌ای ظاهر می‌گردند. باید نشان دهیم که معادله برگر

$$u_t + uu_x = u_{xx}, \qquad (۶۶.۸)$$

دارای یک جبر لی ۵ بعدی از مولدهای تقارن نقطه‌ای می‌باشد. بنابراین قابلیت خطی شدن توسط یک تبدیل نقطه‌ای را دارا نمی باشد. معادله برگر بعنوان یک قانون پایستگی بصورت ذیل می تواند نوشته شود:

$$u_t + (\frac{1}{2}u^2 - u_x)_x = 0.$$

لذا، پتانسیل v به قسمی که

$$u_x = v_t + \frac{1}{2}u^2, \qquad v_x = u, \qquad (۶۷.۸)$$

هستند، موجود می‌باشد. با حذف v از رابطه (۶۷.۸)، معادله برگر بدست می‌آید. متناوباً، می‌توان برای بدست آوردن «فرم پتانسیل» معادله برگر، u را حذف نمائیم:

$$v_t + \frac{1}{2}v_x^2 = v_{xx}. \qquad (۶۸.۸)$$

اکنون قصد داریم تقارنهای نقطه‌ای لی دستگاه (۶۷.۸) را بیابیم. بنابر رابطه (۶۰.۸)، مولدهای تقارن نقطه‌ای به فرم

$$X = \xi(x,t,u,v)\partial_x + \tau(x,t,u,v)\partial_t + \eta(x,t,u,v)\partial_u + \chi(x,t,u,v)\partial_v,$$

می‌باشند. (در اینجا برای اجتناب از افزایش اندیس ها ، به توابع ومتغیرها حروف متمایزی را اختصاص می‌دهیم). شرط تقارن خطی شده

$$\eta^x = \chi^t + u\eta, \qquad \chi^x = \eta$$ هنگامیکه (۶۷.۸) برقرار باشد. (۶۹.۸)

پس از محاسبات ساده (که بعنوان تمرین قرار دهیم)، یک جبر لی نامتناهی البعد بدست می‌آید که توسط

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_t, \qquad X_3 = \partial_v, \qquad X_4 = x\partial_x + 2t\partial_t - u\partial_u, \\ X_5 = t\partial_x + \partial_u + x\partial_v, \qquad X_6 = xt\partial_x + t^2\partial_t + (x - tu)\partial_u + (\frac{1}{2}x^2 + t)\partial_v, \\ \{X_W = [W_x(x,t) + \frac{1}{2}W(x,t)u]e^{v/2}\partial_u + W(x,t)e^{v/2}\partial_v : W_t = W_{xx}\}, \end{gathered} \qquad (۷۰.۸)$$

تولید می‌شود. اگر بطور موقت از تمام مضارب ∂_v صرف نظر نماییم، بار دیگر پنج مولدی را که در مثال (۸.۱.۳) یافته بودیم را بدست می‌آوریم. همچنین مولدهایی به فرم

$$X_W = [W_x(x,t) + \frac{1}{2}W(x,t)u]e^{v/2}\partial_u, \qquad (۸.۷۱)$$

را می‌یابیم که تقارنهای نقطه‌ای معادله برگر را تولید نمی کنند. مولدهای تقارن نقطه‌ای فقط وابسته به (x,t,u) می‌باشند، در حالیکه مولدهایی به فرم (۸.۷۱) وابسته به پتانسیل v نیز می‌باشند. (آنها را تقارتهای پتانسیل معادله برگر می‌نامیم).

اکنون تحدید مولدهای (۸.۷۰) به متغیرهای (x,t,v) را با در نظر نگرفتن عبارات ∂_u، در نظر می‌گیریم. مولدهای تحدید یافته عبارتند از :

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_t, \qquad X_3 = \partial_v, \qquad X_4 = x\partial_x + 2t\partial_t, \\ X_5 = t\partial_x + x\partial_v, \qquad X_6 = xt\partial_x + t^2\partial_t + (\frac{1}{2}x^2 + t)\partial_v, \\ \left\{X_W = W(x,t)e^{v/2}\partial_v : W_t = W_{xx}\right\}, \end{gathered} \qquad (۸.۷۲)$$

مولدهای فوق الذکر وابسته به v,t,x می‌باشند ولی وابسته به u نمی‌باشند. آنها مولدهای تقارن نقطه‌ای برای فرم پتانسیل معادله برگر می‌باشند. مولدهای X_W وابسته به جوابهای دلخواه معادله گرما

$$w_t = \omega_{xx},$$

می‌باشند و به آسانی نشان داده می‌شود که رابطه (۸.۶۸) با نوشتن

$$w = e^{-v/2} \qquad (۸.۷۳)$$

به معادله گرما نگاشته می‌شود. (طریقه رسیدن به این نتیجه را بعنوان تمرین باقی می‌گذاریم). بنابراین

$$w_x = \frac{-1}{2}v_x e^{-v/2} = \frac{-1}{2}uw,$$

که منجر به تبدیل آشنا هوپف - کول:

$$u = -2\frac{w_x}{w} \qquad (۸.۷۴)$$

می‌گردد. این یک تبدیل نقطه‌ای از معادله برگر نمی‌باشد، اما تقارنهای نقطه‌ای دستگاه (۸.۶۷) ما را قادر می‌سازد تا آن را بدست آوریم.

بخش ۸.۳ یافتن تقارنها بوسیله جبر کامپیوتری

شرط تقارن خطی شده، روش سیستماتیکی‌ای را برای یافتن تقارنهای نقطه‌ای لی ارائه می‌دهد. اگرچه، هنگامیکه تعداد متغیرها یا مرتبه معادله دیفرانسیل افزایش یابد، محاسبات به سرعت غیر قابل کنترل می‌گردد. (مثالهایی که تاکنون به مطالعه آنها پرداختیم نسبتاً ساده بودند، با معادلات با مشتقات جزئی مرتبه کمتر با متغیرهای کمترآغاز می‌نمائیم). در طی سالیان گذشته ، بسته نرم افزاری تقارن- یاب برای بسیاری از دستگاههای جبر کامپیوتری گسترش یافته است. این بخش مقدمه مختصری برای بخشی از بسته‌های نرم افزاری می‌باشد که اکنون در دسترس می‌باشند. این مطلب جامع نمی‌باشد، اما به خواننده

اطلاعات کافی را برای آغاز نمودن ارائه می‌دهد. بسیاری از بسته‌ها دارای زیر روالهایی می‌باشند که کاربر را قادر می‌سازد جوابهای دقیق را بیابد، جابجاگر را محاسبه نماید و نظیر این اعمال را انجام دهد. ابزارهای سودمندی در میان بسته‌های نرم افزاری بطور عمده تغییر می‌نمایند که در اینجا به شرح آنها نمی‌پردازیم. بسته‌ها و مستندات جزئی را می‌توان از لیست وب سایت‌هایی که در خاتمه این بخش آمده است دانلود نمایید.

برای بدست آوردن تقارنهای نقطه‌ای لی معادله با مشتقات جزئی مفروض (۶۵.۸)، بسته نرم افزاری ابتدا باید به محاسبه معادلات مبین توسط تقسیم بندی شرط تقارن خطی شده بپردازد. کاربر معادله (معادلات) دیفرانسیلی را وارد می‌سازد و سپس به برنامه دستور می‌دهد که کدامیک از عبارات $u_{\sigma\beta}$ باید حذف شوند. بسیاری از بسته‌ها نیاز دارند که معادله با مشتقات جزئی بصورت چند جمله‌ای ، حداقل بر حسب مشتقات u باشد، برای اینکه بتوانند معادلات مبین را توسط یکسان قرار دادن توانهایی از مشتقات استخراج نمایند. معادلات با مشتقات جزئی که چند جمله‌ای های گویا می باشند، از قبیل معادله تصفیه غیر خطی

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1+u_x^2} \qquad (۷۵.۸)$$

می توانند به فرم چند جمله‌ای وارد گردند، برای مثال

$$(1+u_x^2)u_t - u_{xx} = 0.$$

معمولاً مشتق معادلات مبین ساده می‌باشد و بدون دخالت کاربر انجام می‌پذیرد. اگر دستگاه های معادله با مشتقات جزئی بسیار بزرگ، از مرتبه بالا یا پیچیده باشد، بسته نرم افزاری با محدودیت‌های حافظه‌ای اجرا می‌شود. یک راه پیرامون رفع این مشکل این است که با یافتن تعداد کمی از معادلات مبین آغاز نماییم، سپس معادلات مبین را حل نموده و از نتایج برای ساده سازی محاسبات باقیمانده استفاده نماییم. اعمال فوق مشابه روشی است که پیش‌تر برای یافتن تقارنها با دست انجام می‌دادیم.

خروجی که از محاسبات فوق حاصل می‌شود باید مجموعه‌ای از معادلات مبین باشد که جواب عمومی آنها تمامی مولدهای تقارن نقطه‌ای لی را بدست می‌آورد. برای بسیاری از معادلات با مشتقات جزئی یک سری آزادی عمل در سطر از معادلات مبین وجود دارد که با برابر قراردادن توانهایی از مشتقات بدست می‌آیند. برای مثال، فرض کنید معادلات مبین شامل

$$\xi_u = 0, \qquad \xi_{uu} = 0,$$

باشند. دومین عبارت اضافی می‌باشد، زیرا نتیجه‌ای از عبارت اول می‌باشد. بسته‌های تقارن-یاب معمولاً یک لیست کاهش یافته از معادلات مبین را توسط حذف عبارات اضافی تولید می‌نمایند.

قدم بعدی پس از بدست آوردن برخی یا تمامی معادلات مبین، حل آنها است. بسیاری از بسته‌ها هر جا که لازم باشد، این عمل را بطور اتوماتیک با استفاده از تکنیک های پایه‌ای انتگرال‌گیری انجام می‌دهند. برخی دیگر از این بسته‌های نرم افزاری از روال کلی دستگاههای جبر کامپیوتری برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده می‌نمایند؛ سایر بسته ها از روشهای مختص به خود استفاده می‌کنند.

اخطار: برخی از بسته‌ها با حل کننده‌های اتوماتیک، برای بدست آوردن جواب عمومی معادلات مبین ناموفق می‌باشند. بنابراین چنین بسته‌هایی ممکن است نتوانند تمامی مولدهای تقارنی را بیابند. آنچه که شگفت‌آور است این است که امکان تعیین اندازه جبرلی یک معادله با مشتقات جزئی مفروض بدون آنکه لازم باشد در ابتدا به حل معادلات مبین بپردازیم وجود دارد. چندین برنامه با توانایی فوق موجودند که کاربر را قادر می‌سازند که بسته تقارن-یاب را برای بدست آوردن تمامی تقارنها بررسی نماید.

تمامی بسته‌های نرم افزاری تقارن- یاب حل کننده‌های معادلات دیفرانسیل را یکی نمی‌کنند. بسته‌های بدون حل کننده، برای آنکه کاربر بتواند مراحل حل را کنترل نماید طراحی شده‌اند. چنین بسته‌هایی بسیار معتبر می‌باشند و این قابلیت را دارند که با دستگاههایی بسیار بزرگ و پیچیده از معادلات با مشتقات جزئی سر و کار داشته باشند. معادلات مبین معمولاً مرحله به مرحله همانند محاسباتی که با دست انجام می‌دادیم حل می‌شوند. هنگامی که معادله مبین حل می‌شود (یا برای اینکه معادله مرتبه پایین‌تری بدست آید از آن انتگرال گیری می‌شود) نتیجه حاصله می‌تواند نسبت به معادلات مبین باقیمانده فیدبک داده شود. سپس بسته نرم افزاری قادر است که برخی از معادلات را بوسیله یکسان قرار دادن توانهای متغیرهای مستقل و وابسته تفکیک نماید. در هر مرحله، هدف بدست آوردن هرگونه اطلاعاتی است که به سادگی باعث کاهش شود و از این اطلاعات برای ساده نمودن معادلات حل نشده استفاده نماید.

راه حل فوق مبتنی بر این فرض است که حداقل یکی از معادلات مبین به سادگی حل می‌گردد (یا به یک معادله با مشتقات جزئی مرتبه پایین‌تر کاهش می‌یابد). حال اگر مجموعه معادلات مبین از مرتبه بالاتر زوج شده باشند، بطوریکه دستگاه انتگرال پذیر به نظر برسد، چه اقدامی باید صورت پذیرد؟ دستگاههای زوج شده از معادلات جبری خطی می‌تواند توسط حذف گاوسی، که مسئله را به آن دسته از دستگاههای حل شده

$$Ax = b$$

که ماتریس A بفرم طبقه ای می باشد(یعنی بالا مثلثی) کاهش دهد.

دستگاه کاهش یافته شامل معادلات با پیچیدگی‌های افزایش یافته می‌باشد (قسمت فوق را مطالعه نمایید). معادله ساده‌تر به سادگی حل می‌گردد و یک مؤلفه از x را بدست می‌دهد. این اطلاعات ما را قادر می‌سازد مسئله را برای مؤلفه بعدی حل نماییم و ... . راه حل مشابه‌برای دستگاههای زوج از معادلات جبری غیرخطی چندجمله‌ای بکار گرفته می‌شود. متغیرها با روش مناسب مرتب می‌شوند و الگوریتم گوشبرگر برای ساخت یک پایه گروبنر کاهش یافته استفاده می‌شود. در بیان کلی، پایه گروبنر یک دستگاه از معادلات در فرم «طبقه‌ای» با مجموعه مشابه از جوابها مانند دستگاه اولیه می‌باشد. دستگاه کاهش یافته بطور کلی بسیار سادتر از دستگاه اولیه حل می‌شود.

روش مشابه بر دستگاههای خطی و غیر خطی از معادلات دیفرانسیل منطبق می‌باشد. برنامه‌هایی در دسترس می‌باشند که از دیفرانسیل‌گیری، ضرب و جمع برای رسیدن به یک « پایه گروبنر دیفرانسیلی » استفاده می‌کنند. نتیجه حاصله بخصوص وابسته به مرتبه متغیرها می‌باشد. چندین طرح استاندارد مرتب شده موجودند که در ساده سازی بسیاری از دستگاهها، موفق عمل می‌نمایند. در عین حال، گاهی اوقات بدست آوردن یک پایه گروبنر دیفرانسیلی مشکل می‌باشد.(به دلایلی که فراتر از این کتاب می‌باشند) بهترین روش برای یادگیری بیشتر بسته‌های نرم افزاری تقارن- یاب گرفتن یکی از آنها و انجام دادن برخی از محاسبات است. بسیاری از بسته‌های نرم افزاری مختلف برای دستگاههای جبر کامپیوتری (CASs) گوناگون در دسترس می‌باشند. در اینجا گزیده‌ای از بسیاری از بسته‌های مورد نیاز موجود باشد.(یکی برای هر سه CAS اصلی و دیگری برای آنهایی که نیاز به پیش نصب CAS ندارند)

LIE و BIGLIE: مستقل، نیازی به برنامه اضافه ندارد.
تنها برای کامپیوترهای خانگی سازگار با IBM طراحی شده است.
نویسنده: آ.ک. هید
http://archives.math.utk.edu/software/msdos/adv.diff.equations/lie51.html

LIE یک مدل محدودتر از muMATH توسط به بسته نرم افزاری افزوده شده است، لذا بسته نرم افزاری مستقل می‌باشد. مدل ۵.۱ در مرحله نوشتن قابل دسترس می‌باشد. برخلاف مدل‌های قبلی، در ویندوز ۹۵ DOS اجرا می‌شود.

LIE قادر است که مولدهای تقارنی را برای معادلات با مشتقات جزئی ای که چندجمله‌ای هایی بر حسب مشتقات u هستند بیابد. معمولاً بسته بطور اتوماتیک معادلات مبین را با استفاده از تعداد کمی از تکنیک های انتگرال گیری استخراج و حل می‌نماید. محدودیت اصلی روی LIE این است که muMATH تنها ۲۵۶ کیلو بایت از حافظه را برای برنامه و فضای کاری اختصاص می‌دهد. با این وجود، LIE قادر است با دستگاههای پیچیده و شگفت آور روبرو گردد، زیرا از حافظه قابل دسترسی از روی درایت استفاده می‌نماید. یک برنامه مرتبط، BIGLIE ، قادر است تقارنهای نقطه‌ای لی را برای معادلات با مشتقات جزئی ای که بسیار پیچیده برای LIE هستند، بیابد.

SPDE: نیازمند به REDUCE.

نویسنده: اف. شوارز

http://casun2.gmd.de/ Email:reduce-netlib@rand.org

مدل حاضر (۱.۰) از SPDE می‌تواند مولدهای تقارنی را برای معادلات با مشتقات جزئی ای که در استدلالشان جبری می‌باشند، مشخص نماید. بسته نرم افزاری قادر است اندازه گروه تقارنی را مستقیماً از معادلات مبین بدست آورد. برای انجام این عمل، یک پایه گروبنر دیفرانسیلی ساخته می‌شود. این امر ضمانت می کند که تمامی مولدها را با ضرایب جبری برای معادلات با مشتقات جزئیی غیر خطی از مرتبه دوم یا بیشتر بیابیم.

SPDE در وب سایت فوق می تواند بطور فعل و انفعالی استفاده شود. بسته نرم افزاری کامل توسط ایمیل قابل دسترس می‌باشد.

SYMMGRP.MAX: نیازمند به MACSYMA.

نویسنده: ب.چمپنگ، پ. وینترنیتز و ه. هرمان.

ftp://mines.edu/pub/papers/math -cs-dept/software/symmetry/

SYMMGRP.MAX یک بسته نرم افزاری قابل تغییر و تست شده است که برای استفاده بطور متقابل طراحی شده است و می‌تواند دستگاههای بسیار بزرگ را به پایان برساند و تعداد کمی از معادلات مبین را در یک لحظه محاسبه نماید. کاربر باید یک یا چند مورد از اینها را حل نماید، نتیجه‌ای که حاصل می‌گردد تعداد کمی از معادلات مبین بعدی را ساده می‌نماید و ... . SYMMGRP.MAX هنگامی که با بسته‌ای که پایه‌های گروبنر دیفرانسیلی از قبیل DIFFGROB2 را می‌سازند تلفیق می‌شود بسیار کارآمد می‌باشد. (قسمت ذیل را مشاهده نمایید)

DIFFGROB 2: نیازمند به Maple.

نویسنده: ا.ل. منسفلد

ftp://ftp.ukc.ac.uk/pub/maths/liz/

DIFFGROB 2 یک بسته نرم افزاری تاثیر گذار و قدرتمند برای ساده سازی دستگاههای معادلات با مشتقات جزئیی خطی یا غیر خطی می‌باشد که می‌تواند پایه‌های گروبنر دیفرانسیلی را برای دستگاههای خطی عمومی و برخی از دستگاههای غیر خطی بسازد. انتخاب مرتب عبارت بسیار سخت می‌باشد لذا بسته نرم افزاری ممکن است از سؤال و جواب استفاده نماید تا کاربر را قادر سازد مرتبه‌های گوناگون را بررسی نماید. DIFFGROB 2 یک ضمیمه بسیار سودمند برای بسته‌های تقارن یاب می‌باشد که شامل الگوریتم‌های پایه گروبنر نمی‌باشند. (بعنوان مثال SYMMGRP.MAX). اگر بخواهیم تقارنهای «غیر کلاسیک» را که معادلات مبینشان غیر خطی هستند بیابیم، این مطلب لازم می‌باشد. ((۹.۳) را مشاهده نمایید.)

مطالعه بیشتر

بسیاری از معادلات با مشتقات جزئیی غیر خطی مهم تبدیلات خطی‌ای را می‌پذیرند که اغلب توسط روشهای تقارن بدست می‌آیند. دراین فصل به معرفی چنین تبدیلاتی پرداخته شد و چگونگی ساخت آنها نمایش داده شد. با اینحال روش شرح داده شده ساده بوده و شامل تمامی جزئیات نمی‌باشد. برای جزئیات بیشتر خواننده باید از فصل ششم کتاب بومن و کومی (۱۹۸۹) کمک بگیرد. این دو نویسنده یک بحث کامل پیرامون تقارنهای پتانسیلی را به همراه تعداد بسیاری مثال و کاربرد ارائه داده‌اند.

قضیه کوشی-کوالفسکایا شرایطی را برای وجود جواب‌های مسئله کوشی برای یک دستگاه تحلیلی از معادلات با مشتقات جزئی بیان می‌کند. اولور (۱۹۹۳) شرح داد که چرا وجود و یکتایی جوابها، ضمانت می کند که شرط تقارن خطی شده، گروههای تقارنی (همبند) عمومی‌تر را بدست دهد.

خواننده‌ای که قصد دارد از SPDE یا DIFFGROB 2 استفاده نماید باید در ابتدا با پایه‌های گروبنر برای دستگاههای غیرخطی چندجمله‌ای آشنا گردد. متنی که توسط اوشی، کوکس و لیتل (۱۹۹۲) تهیه شده است شامل دلایل قابل فهم تر الگوریتم بوچبرگ می‌باشد و برای مبتدیان جبر جابجایی قابل فهم می‌باشد. ساده‌ترین مقدمه برای DIFFGROB2 توسط منسفلد و کلارکسون (۱۹۹۷) ارائه شده است که راه حلهای گوناگون برای ساده سازی معادلات مبین را شرح می‌دهد.

خوانندگانی که قصد دارند بیشتر درباره نرم افزارهای تقارن اطلاعات کسب کنند، می‌توانند از مقاله نوشته شده توسط هرمان (۱۹۹۶) کمک بگیرند. واضح است که مرور دقیق با جزئیات بسته‌های نرم افزاری بیشتری نسبت به آنهایی که در بخش ۳.۸ ذکر شد می‌باشند.

تمرین‌ها

۱.۸. نشان دهید که تبدیل هودوگراف ، $(\hat{x},\hat{t},\hat{u})=(u,t,x)$ تقارن معادله تصفیه غیر خطی (۷۵.۸) می‌باشد.

۲.۸. تقارنهای نقطه‌ای لی

$$u_t = u_x^3$$

را مشخص نمایید.

۳.۸. مولدهای تقارن نقطه‌ای لی را برای معادله گرما

$$u_t = u_{xx}$$

استخراج نمایید.

۴.۸. نشان دهید که جبرلی مولدهای تقارن نقطه‌ای لی (۶۸.۸) توسط (۷۲.۸) تولید می‌شوند.

۵.۸. مولدهای تقارنی معادله گرما را با (۷۲.۸) مقایسه نمایید و پس از آن تبدیل (۷۳.۸) را استخراج نمایید.

۶.۸. در آب کم عمق حرکت یک بعدی موجهای طولی توسط دستگاه ذیل

$$u_t + uu_x + v_x = 0, \qquad v_t + uv_x + vu_x = 0,$$

کنترل می‌شوند. مولدهای تقارن نقطه‌ای لی برای دستگاه مذکور را بیابید و سپس تبدیل خطی شده را بدست آورید.

۷.۸. بسته جبر کامپیوتری تقارن-یاب را بیابید و از آن برای دوباره استخراج نمودن تقارنهایی که در این فصل بدست آمده‌اند استفاده نمایید.

فصل ۹

روش‌هایی برای یافتن جوابهای دقیق معادلات با مشتقات جزئی

اگر تغییر کرد، ثبات به من بده.

(چارلز دیکنز: دامبی وپسر)

بخش ۱.۹ جوابهای ناوردا ی گروهی

اکنون به تجهیز روشهای فصل قبل می‌پردازیم، می‌توانیم تقارنهای نقطه‌ای لی یک معادله با مشتقات جزئی مفروض را به روش اصولی بیابیم. این فصل به بیان روش بکار بردن تقارنها برای یافتن جوابهای دقیق می‌پردازد. روشهای بکار گرفته شده تعمیم بخش 3.4 هستند، که خواننده باید به مشاهده آنها پیش از ادامه دادن بپردازد.

تقریباً تمامی روش‌های دقیق، یک معادله با مشتقات جزئی مفروض را به یک یا چند معادله دیفرانسیل معمولی مرتبط می‌سازند. برای مثال جواب عمومی معادله با مشتقات جزئی شبه خطی مرتبه اول توسط انتگرال گیری از معادلات مشخصه ساخته می‌شود. برای اکثریت معادلات با مشتقات جزئی ، نمی توانیم «جواب عمومی» را بنویسیم اما باید به حدسیات علمی گوناگون استناد نماییم. می‌توانیم جوابهای مشابه، موجهای متحرک، جواب‌های مجزا و و غیره را بیابیم. بسیاری از این روش‌ها، عملی جز جستجوی جوابهای ناوردا تحت یک گروه ویژه از تقارن‌ها را شامل نمی‌شوند. برای مثال، معادلات با مشتقات جزئی برای $u(x,t)$ ای که مولدهای تقارنی‌اش شامل

$$X = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_t$$

می‌باشند، عموماً جوابهای موج متحرکی به فرم

$$u = F(x-ct) \tag{۱.۹}$$

دارند. این جوابها تحت گروه تولید شده توسط

$$X = cX_1 + X_2 = c\partial_x + \partial_t, \qquad (۲.۹)$$

ناوردا هستند، زیرا u و $x-ct$ ناورداها می‌باشند. به روش مشابه، معادلات با مشتقات جزئی با تقارنهای مقیاسی جوابهایی مشابه می‌پذیرند که از روی ناورداهای گروه ساخته می‌شوند.

این ایده به سهولت به هر گروه لی از تقارنهای یک معادله با مشتقات جزئی مفروض

$$\Delta = 0 \qquad (۳.۹)$$

تعمیم داده می‌شود. اکنون، معادلات با مشتقات جزئی ی اسکالر با دو متغیر مستقل را در نظر بگیرید. یادآوری می‌نماییم که جواب $u = u(x,t)$ تحت گروه تولید شده توسط

$$X = \xi\partial_x + \tau\partial_t + \eta\partial_u$$

ناوردا می‌باشد اگر وتنها اگر مشخصه روی جواب صفر باشد. بعبارت دیگر، هر جواب ناوردا در شرط سطح ناوردا صدق می‌نماید:

$$Q \equiv \eta - \xi u_x - \tau u_t = 0. \qquad (۴.۹)$$

معمولاً حل کردن (۴.۹) ساده تر از حل کردن معادله با مشتقات جزئی اولیه می‌باشد! باحل (۴.۹) می‌توانیم جواب‌هایی که در (۳.۹) صدق می‌نمایند را بیابیم. برای مثال، گروه تولید شده (۲.۹) دارای مشخصه

$$Q = -cu_x - u_t \qquad (۵.۹)$$

می‌باشد. $ansatz$ موج متحرک (۱.۹) جواب عمومی شرط سطح ناوردا $Q = 0$ می‌باشد.

حال، فرض کنید τ, ξ هر دو صفر نباشند. پس شرط سطح ناوردا، یک معادله با مشتقات جزئی شبه خطی مرتبه اول است که توسط معادلات مشخصه می‌تواند حل گردد. معادلات مشخصه عبارتند از:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{du}{\eta}. \qquad (۶.۹)$$

اگر $r(x,t,u)$ و $v(x,t,u)$ انتگرال های اولیه مستقل تابعی (۶.۹) باشند، هر ناوردا گروهی تابعی از r و v می‌گردد. معمولاً بهتر است که فرض نمایید که یک ناوردا نقش متغیر وابسته را بازی می‌کند. (بدون کاستن از کلیت) فرض کنید $v_u \neq 0$ باشد؛ آنگاه جواب عمومی شرط سطح ناوردا

$$v = F(r) \qquad (۷.۹)$$

می‌باشد. اگر (۳.۹) جایگزین شود، تابع F مشخص می شود.

اگر r و v هر دو وابسته به u باشند، لازم است بررسی کنیم که آیامعادله با مشتقات جزئی جوابهایی به فرم

$$r = c \qquad (۸.۹)$$

دارد. اینها تنها جواب های شرط سطح ناوردا هستند که (موضعاً) به فرم (۷.۹) نمی‌باشند. اگر r فقط تابعی از متغیرهای مستقل t, x باشد، از (۸.۹) نمی‌توان جواب $u = u(x,t)$ را نتیجه گرفت.

۱.۹ مثال. درمیان بسیاری از تقارنهای معادله گرما،

$$u_t = u_{xx}, \qquad (۹.۹)$$

یک گروه لی دو پارامتری از مقیاسها موجود است که توسط

$$X_1 = x\partial_x + 2t\partial_t, \qquad X_2 = u\partial_u$$

تولید می‌شود. هر مولد گروه لی یک پارامتری از مقیاسها به فرم

$$X = hX_1 + kX_2$$

است که در آن h,k ثابت هستند. به یاد داشته باشید که اگر λ ثابت ناصفری باشد، X و λX گروه یک -پارامتری مشابهی را تولید می‌نمایند. (پارامتر گروهی ε تغییر می‌کند، اما تاثیری روی گروه نمی‌گذارد). بنابراین اگر $h \neq 0$ باشد بدون کاستن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $h = 1$ است و اگر $h = 0$ باشد، $k = 1$ قرار می‌دهیم.

فرض کنید $h = 1$ باشد، بنابراین

$$X = x\partial_x + 2t\partial_t + ku\partial_u. \qquad (۱۰.۹)$$

شرط سطح ناوردا بصورت

$$Q \equiv ku - xu_x - 2tu_t = 0,$$

که توسط انتگرال گیری از معادلات مشخصه

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t} = \frac{du}{ku}$$

حل می‌گردد. انتگرال گیری ساده، ناورداهای

$$r = xt^{-1/2} \quad , v = ut^{-k/2}$$

بدست می آید. چون r مستقل از u می‌باشد، هر جواب ناوردا به فرم

$$v = F(r)$$

می‌باشد که با

$$u = t^{k/2}F(xt^{-1/2}) \qquad (۱۱.۹)$$

معادل است. با دیفرانسیل گیری از (۱۱.۹)، بدست می‌آوریم:

$$u_t = t^{(k-2)/2}\left(\frac{-1}{2}rF'(r) + \frac{1}{2}kF(r)\right), \qquad u_{xx} = t^{(k-2)/2}F''(r).$$

بنابراین اگر

$$F'' + \frac{1}{2}rF' - \frac{1}{2}kF = 0, \qquad (۱۲.۹)$$

باشد، (۱۱.۹) جواب معادله گرما می‌باشد. جواب عمومی (۱۲.۹)،

$$F(r) = C_1 U(k+\frac{1}{2}, 2^{-r/2}) + c_2 V(k+\frac{1}{2}, 2^{-r/2}),$$

می‌باشد، که $U(p,z)$ و $V(p,z)$ توابع استوانه‌ای سهوی می‌باشند. اگر k یک عددصحیح باشد، این توابع برحسب توابع مقدماتی و انتگرال هایشان می‌توانند بیان شوند. برای مثال، اگر $k=0$ باشد، آنگاه

$$F(r) = c_1 \mathrm{erf}(\frac{r}{2}) + c_2,$$

است که

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta,$$

تابع خطا می‌باشد. اگر $k=-1$ باشد،

$$F = c_1 e^{-r^2/4} + c_2 e^{-r^2/4} \int_0^r e^{\zeta^2/4} d\zeta,$$

است. نتایج بدست آمده را در (۱۱.۹) جایگذاریی کنید. خانواده بزرگی از جوابها که شامل جواب اساسی

$$u = t^{-1/2} e^{-x^2/4t} \qquad (k=-1)$$

بدست می‌آیند، جواب تابع خطا

$$u = \mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{t}}), \quad (k=0)$$

و جوابهای مشهور دیگری هم هستند.

تااینجا فرض کردیم τ, ξ هر دو با هم صفر نباشند، بنابراین حداقل یکی از ناورداهای v, r وابسته به u می‌باشد. اگر τ, ξ در نقطه‌ای روی سطح ناوردا صفر باشند، شرط سطح ناوردا (۴.۹) نتیجه می‌دهد که η نیز در آن نقطه صفر است. بنابراین مولد X نیز در نقطه مذکور صفر است و نقطه ناوردا می‌باشد. اگر τ, ξ بطور یکسان صفر باشند، تنها جوابهای ناوردای ممکن ، جوابهایی هستند که برای آنها

$$\eta(x,t,u) \equiv 0, \qquad (۱۳.۹)$$

است. چنین جوابهایی شامل تمامی نقاطی هستند که تحت گروه تولید شده توسط X ناوردا می‌باشند. البته، لازم نیست (۱۳.۹) جوابهایی به فرم $u=u(x,t)$ داشته باشد. برای نمونه، اگر

$$X = \partial_u$$

باشد، آنگاه

$$(\xi, \tau, \eta) = (0,0,1)$$

می‌باشد، بنابراین (۱۳.۹) نمی‌تواند برقرار باشد. مولدهای دیگری مانند $X = \eta \partial_u$ موجودند که برای مولدهای مذکور رابطه (۱۳.۹) دارای جوابهای $u=u(x,t)$ می‌باشد. بررسی این مطلب که آیا چنین جوابهایی نیز معادله با مشتقات جزئی (۳.۹) را حل می‌نمایند ساده می‌باشد.

۲.۹ مثال. در مثال قبل، به بررسی جوابهای ناوردا- مقیاسی تولید شده توسط

$$X = u\partial_u$$

پرداخته نشد. در اینجا τ, ξ هر دو صفر می‌باشند، اما شرط سطح ناوردا دارای جواب می‌باشد که آنرا

$$u = 0$$

می‌نامیم. این جوابی از معادله گرماست، حتی اگرچه بطور خاص بهترین جواب نمی‌باشد.

اگر چه جوابهای موج‌های متحرک و ناورداهای مقیاسی (به طور مشابه) برای اکثر خوانندها، آشنا می‌باشند، اما هیچ راهی برای تفکیک این تبدیلات از تقارنهای دیگر وجود ندارد. گروه هرچه که باشد، روش یافتن جواب‌های ناوردا-گروهی بطور مشابه می‌باشد.

۳.۹ مثال. معادله تصفیه غیر خطی

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1+u_x^2}, \tag{۱۴.۹}$$

دارای یک گروه لی پنج پارامتری از تقارنهای نقطه‌ای می‌باشد که توسط

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_t, \qquad X_3 = \partial_u, \\ &X_4 = x\partial_x + 2t\partial_t + u\partial_u, \qquad X_5 = u\partial_x - x\partial_u, \end{aligned} \tag{۱۵.۹}$$

تولید شده‌اند. گروه یک پارامتری از دوران‌ها که توسط X_5 تولید شده است، دارای ناورداهای

$$r = t, \qquad v = \sqrt{x^2+u^2}$$

می‌باشد. هر جواب ناوردا $v = F(r)$ با

$$u = \pm\sqrt{F(t)^2 - x^2} \tag{۱۶.۹}$$

هم ارز است. جانشینی رابطه (۱۶.۹) در معادله با مشتقات جزئی (۱۴.۹)، به معادله دیفرانسیل معمولی

$$F'(r) = -\frac{1}{F(r)} \tag{۱۷.۹}$$

منتهی می‌گردد. [خوانندگان ممکن است از اینکه که یک معادله با مشتقات جزئی مرتبه دوم به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول کاهش یافته است شگفت زده شده باشند. دلیل کاهش این است که (۱۴.۹) دارای مشتقات مرتبه دوم نسبت به مختصات ناوردا t نمی‌باشد]. جواب عمومی (۱۷.۹) بصورت

$$F(r) = \pm\sqrt{c_1 - 2r}$$

می‌باشد. لذا جوابهای (۱۴.۹) که تحت دوران‌های تولید شده توسط X_5 ناوردا هستند، عبارتند از:

$$u = \pm\sqrt{c_1 - 2t - x^2}. \tag{۱۸.۹}$$

ایده جستجو برای یافتن جوابهای ناوردا-گروهی بطور طبیعی به معادلات با مشتقات جزئی با هر تعداد متغیرهای وابسته و مستقل تعمیم داده می‌شود. در حالت کلی، یک گروه پارامتری که بطور غیر بدیهی روی یک یا چند پارامتر مستقل عمل می‌نماید برای کاهش یکی از متغیرهای مستقل ، بکار گرفته می‌شود. برای مثال، فرض کنید یک معادله با مشتقات جزئی اسکالر باسه متغیر مستقل برحسب ناورداهای یک گروه یک پارامتری نوشته شده باشد. سه ناوردای مستقل تابعی موجود است که حداقل یکی از آنها وابسته به u می‌باشد، لذا معادله با مشتقات جزئی اولیه به یک معادله با مشتقات جزئی اسکالر با دو متغیر مستقل کاهش می‌یابد. گروه تقارنی یک پارامتری دیگر برای کاهش معادله با مشتقات جزئی مذکور به یک معادله دیفرانسیل معمولی لازم است.

برای دستگاههایی از معادلات با مشتقات جزئی با M متغیر وابسته، $u=(u_1,\cdots,u_M)$، مشخصه $\mathbf{Q}$ دارای M مؤلفه می‌باشد که هر یک از آنها روی هر جواب ناوردا صفر می‌باشند. برای مثال، اگر دو متغیر مستقل t,x موجود باشد، جواب $u=u(x,t)$ ناورداست اگر وفقط اگر

$$Q_\alpha\,|_{u=u(x,t)}\equiv X[u^\alpha-u^\alpha(x,t)]\,|_{u=u(x,t)}=0\quad,\alpha=1,\cdots,M.$$

درست مانند معادلات با مشتقات جزئی ی اسکالر، بهترین روش این است که با حل شرط سطح ناوردا شروع نمائیم:

$$Q_\alpha=0,\qquad \alpha=1,\cdots,M; \tag{۱۹.۹}$$

آنگاه جواب را در دستگاه مفروض معادلات با مشتقات جزئی جایگزین نمایید تا یک مسئله کاهش یافته بدست آید.

۴.۹ مثال. دستگاه ذیل انتقال گرمای آزاد دوبعدی یک سیال چسبناک تراکم ناپذیر بین مرزهای افقی گرم شده را مدلسازی می‌نماید:

$$\begin{aligned} uu_x+vu_y &= u_{xx}+u_{yy}-p_x,\\ uv_x+vv_y &= v_{xx}+v_{yy}-p_y+\lambda\theta,\\ u\theta_x+v\theta_y &= \sigma(\theta_{xx}+\theta_{yy}),\\ u_x+v_y &= 0. \end{aligned} \tag{۲۰.۹}$$

(این مدل از تقریب بوزونیسک استفاده می‌نماید. سرعت سیال به ترتیب دارای مولفه‌های v,u در امتدادهای افقی و عمودی می‌باشد. P نمایشگرفشار، θ اختلال دما می‌باشد. تمامی متغیرها بطور قابل قبولی فاقد بعد شده هستند. متغیرهای فاقد بعد عدد $Grashof$، λ و عدد $\sigma, prantl$ می‌باشند).

دستگاه (۲۰.۹) دارای گروه لی پنج پارامتری از تقارنهای نقطه‌ای تولید شده بوسیله

$$\begin{aligned} &X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_p,\quad X_4=\lambda y\partial_p+\partial_\theta,\\ &X_5=x\partial_x+y\partial_y-u\partial_u-v\partial_v-2p\partial_p-3\theta\partial_\theta, \end{aligned} \tag{۲۱.۹}$$

می‌باشد.

گروههای یک پارامتری تولید شده توسط X_3,X_2,X_1 شامل انتقالها می‌باشند، در حالیکه X_5 تولید کننده مقیاس‌ها می‌باشد (که به جوابهای مشابه منتهی می‌گردد). برای X_4، مشخصه

$$Q=(Q_u,Q_v,Q_p,Q_\theta)$$

می‌باشد که دارای مولفه‌های

$$Q_u=0,\quad Q_v=0,\quad Q_p=\lambda y,\quad Q_\theta=1$$

می‌باشد.
بنابراین هیچ کدام از جوابها تحت گروه تولید شده توسط X_4 ناوردا نمی‌باشند. اگرچه می‌توانیم از X_4 برای یافتن جوابهای ناوردا توسط ترکیب آن با X_1 استفاده نماییم. مشخصه گروه تولید شده توسط

$$X = X_1 + kX_4 = \partial_x + k\lambda y\partial_p + k\partial_\theta, \qquad k \neq 0 \tag{۲۲.۹}$$

دارای مولفه‌های

$$Q_u = -u_x, \quad Q_v = -v_x, \quad Q_p = k\lambda y - p_x, \quad Q_\theta = k - \theta_x \tag{۲۳.۹}$$

می‌باشد. بنابراین جواب عمومی شرط سطح ناوردا $\mathbf{Q} = 0$،

$$\begin{aligned} u &= F(y), \\ v &= G(y), \\ p - k\lambda xy &= H(y), \\ \theta - kx &= k(y), \end{aligned} \tag{۲۴.۹}$$

می‌باشد. جانشینی رابطه (۲۴.۹) در دستگاه اولیه معادلات با مشتقات جزئی (۲۰.۹) به دستگاه ذیل از معادلات دیفرانسیل معمولی منتهی می‌گردد:

$$\begin{aligned} GF' &= F'' - k\lambda y, \\ GG' &= G'' - H' + \lambda k, \\ kF + Gk' &= \sigma k'', \\ G' &= 0. \end{aligned}$$

که معادله دیفرانسیل معمولی آخر، به سادگی حل می گردد:

$$G = c_1 \quad .$$

معادلات دیفرانسیل معمولی باقیمانده به دستگاه خطی

$$\begin{aligned} F'' - c_1F' &= k\lambda y, \\ K'' - \frac{c_1}{\sigma}K' &= \frac{k}{\sigma}F, \\ H' &= \lambda K, \end{aligned} \tag{۲۵.۹}$$

کاهش می‌یابند. این دستگاه دارای جوابهای مقدماتی که شامل شش ثابت دلخواه می‌باشند، است. ما شرایط مرزی را که تحمیل کننده مجموعه جواب هستند، در نظر نگرفته‌ایم. برای مثال، جواب فوق، $v = G = c_1$ را دارا می‌باشد. اگر مرزها ناتراوا باشند، آنگاه v در مرزها صفر می‌باشد. جوابهای ناوردا بدست آمده، در این شرط صدق می‌کنند اگر و فقط اگر $c_1 = 0$ باشد.

بخش ۲.۹ جوابهای جدید از جوابهای معلوم دیگر

فرض کنید یک جواب که تحت یک گروه از تقارنهای نقطه‌ای لی ناوردا است را یافته‌ایم. اگر تقارنهای دیگری موجود باشد که تحت آنها این جواب ناوردا نباشد، می‌توانیم آنهارا بکار بگیریم تا جواب را به خانواده جواب‌های جدید بنگاریم. روش دقیقاً مشابه روشی است که برای معادلات دیفرانسیل معمولیارائه شد،(§۴.۳ را مشاهده نمایید)، همانطور که مثال بعد نشان می‌دهد.

۵.۹ مثال. پیش‌تر یافتیم که معادله تصفیه غیر خطی

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1+u_x^2}, \tag{۲۶.۹}$$

دارای یک خانواده یک پارامتری از جوابهای

$$u = \sqrt{c_1 - 2t - x^2}, \tag{۲۷.۹}$$

می‌باشد، هر یک از جوابها تحت $X_5 = u\partial_x - x\partial_u$ ناوردا می‌باشند. فرض کنید بخواهیم جوابهای جدیدی از رابطه (۲۷.۹) بسازیم، بدین منظور از تمامی مولدهای تقارنی باقیمانده (۱۵.۹) استفاده نمایید. تقارنهای تولید شده بوسیله $X_1 = \partial_x$،

$$(\hat{x},\hat{t},\hat{u}) = (x+\varepsilon, t, u)$$

می‌باشند. بنابراین رابطه (۲۷.۹) با

$$\hat{u} = \sqrt{c_1 - 2\hat{t} - (\hat{x}-\varepsilon)^2}$$

هم ارز می‌باشد. با برداشتن علامت هشتک، نتیجه می‌گیریم که گروه تولید شده بوسیله X_1، رابطه (۲۷.۹) را به خانواده دو پارامتری از جوابها می‌نگارد:

$$u = \sqrt{c_1 - 2t + (x-\varepsilon)^2}. \tag{۲۸.۹}$$

گروه یک پارامتری تولید شده بوسیله $X_3 = \partial_u$ ،

$$(\hat{x},\hat{t},\hat{u}) = (x, t, u+\delta),$$

می‌باشد که رابطه (۲۸.۹) را به خانواده سه پارامتری

$$u = \sqrt{c_1 - 2t + (x-\varepsilon)^2} + \delta \tag{۲۹.۹}$$

می‌نگارد. تقارنهای نقطه‌ای لی تولید شده توسط X_2 و X_4 جوابهای بیشتری از (۲۹.۹) را نمی دهند؛ عمل آنها صرفاً مقادیر ثابتهای دلخواه ε, δ, c_1 را تغییر می‌دهند. بنابراین با روش فوق الذکر نمی‌توانیم جوابهای بیشتری از (۲۷.۹) را بدست آوریم.

توجه: هر جواب (۲۹.۹) تحت گروه یک پارامتری تولید شده بوسیله

$$\tilde{X}_5 = (u-\delta)\partial_x - (x-\varepsilon)\partial_u = X_5 - \delta X_1 + \varepsilon X_3, \tag{۳۰.۹}$$

ناوردا می‌باشد.

بوضوح $\tilde{X}_5$ و X_5 مرتبط هستند و هر دو دورانها را در صفحه (x,u) تولید می‌نمایند اما $\tilde{X}$ ، دورانهای حول (ε,δ) را بیشتر از (۰و۰) تولید می‌نماید.

جواب دلخواهی که تحت یک گروه تقارنی یک پارامتری ناوردا می‌باشد را در نظر بگیرید، می‌توانیم خانواده‌ای از جوابها را بوسیله بکار بردن تقارنهای باقیمانده استخراج کنیم. دهیم که این جواب‌ها تحت (حداقل) یک گروه تقارنی یک پارامتری ناوردا می‌باشند. از اینرو مجموعه تمامی جوابهای ناوردا به دو

کلاس هم ارزی تفکیک می‌شوند. اگرجوابها بوسیله یک تقارن نقطه‌ای به یکدیگر بتوانند نگاشته شوند، در کلاس مشابه قرار می‌گیرند. نوعاً تنها تعداد کمی از کلاس‌ها موجودند که آنرا برای طبقه بندی تمامی جوابهای ناوردا ساده‌تر می‌سازد.

برای معادلات با مشتقات جزئی ی خطی همگن، روشی دیگری برای تولید جوابهای جدید وجود دارد. برای سهولت، فقط معادلات با مشتقات جزئی ی اسکالر برای $u(x,t)$ را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد(بنابر شرط تقارن خطی شده) که هر مولد تقارنهای نقطه‌ای لی معادله با مشتقات جزئی خطی همگن، $\Delta = 0$ بفرم

$$X = \xi(x,t)\partial_x + \tau(x,t)\partial_t + (f(x,t)u + U(x,t))\partial_u, \qquad (۳۱.۹)$$

است که $u = U(x,t)$ جواب دلخواهی از $\Delta = 0$ می‌باشد. جبر لی $\mathcal{L}$ از مولدهای تقارن نقطه‌ای به زیر جبر متناهی البعد $\mathcal{L}_0$ شامل مولدهای (۳۱.۹) با $U = 0$ و زیر جبر آبلی نامتناهی البعد $\mathcal{L}_\infty$ تولید شده بوسیله مولدهای

$$\Delta\,|_{u=U(x,t)} = 0 \quad \text{که} \quad X_U = U(x,t)\partial_u \qquad (۳۲.۹)$$

تفکیک می‌شود.

جواب دلخواه $u = U(x,t)$ از معادله با مشتقات جزئی، $\Delta = 0$ را در نظر بگیرید که مولد $X_U \in \mathcal{L}_\infty$ را ایجاد می‌نماید. اکنون جابجاگر X_U را بوسیله هر $X_i \in \mathcal{L}_0$ یکی یکی محاسبه نمایید. هر X_i به فرم

$$X_i = \xi_i(x,t)\partial_x + \tau_i(x,t)\partial_t + f_i(x,t)u\partial_u, \qquad (۳۳.۹)$$

است و لذا

$$[X_U, X_i] = \tilde{U}_i(x,t)\partial_u, \qquad (۳۴.۹)$$

که

$$\tilde{U}_i(x,t) = f_i(x,t)U(x,t) - \xi_i(x,t)U_x(x,t) - \tau_i(x,t)U_t(x,t) \qquad (۳۵.۹)$$

می‌باشد. جابجاگر هر دو مولد خودش یک گروه تقارنی می‌باشد، یعنی

$$\tilde{U}_i(x,t)\partial_u \in \mathcal{L}.$$

بعلاوه، مولد مذکور از فرم (۳۲.۹) می‌باشد، لذا

$$\tilde{U}_i(x,t)\partial_u \in \mathcal{L}_\infty.$$

بنابر این $u = \tilde{U}_i(x,t)$ یک جواب معادله با مشتقات جزئی، $\Delta = 0$ می‌باشد. اگر جوابهای جدید بدست آیند، هریک می‌توانند به جای U قرار گیرند تا جوابهای جدید بیشتری را توسط روش فوق بسازند.

۶.۹ مثال. مثال ۸.۱.۴ را بخاطر بیاورید، تقارنهای نقطه‌ای لی

$$u_{xt} = u \qquad (۳۶.۹)$$

توسط

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_t, \quad X_3 = u\partial_u, \quad X_4 = x\partial_x - t\partial_t, \qquad (۳۷.۹)$$

و

$$\{X_U = U(x,t)\partial_u : U_{xt} = U\}. \qquad (۳۸.۹)$$

تولید می‌شوند. بوضوح مولدهای (۳۷.۹) تشکیل یک پایه برای زیر جبر متناهی البعد $\mathcal{L}_0$ می‌دهند، در حالیکه رابطه (۳۸.۹)، $\mathcal{L}_\infty$ را تولید می‌نماید. جواب دلخواه $u = U(x,t)$ را در نظر بگیرید، مولدهای (۳۷.۹)،

$$\begin{array}{rcl} \tilde{U}_1 & = & -U_x, \qquad , \\ \tilde{U}_2 & = & -U_t,, \\ \tilde{U}_3 & = & U, \\ \tilde{U}_4 & = & tU_t - xU_x, \end{array} \qquad (۳۹.۹)$$

را تولید می کنند. هر یک از این جوابها به استثنای $\tilde{U}_3$ می‌توانند متفاوت با U باشند (اما لازم نمی‌باشد). برای مثال فرض کنید با جواب موج متحرک

$$U = e^{x+t} \qquad (۴۰.۹)$$

شروع نماییم (که تحت گروه تولید شده توسط $X_2 - X_1$ ناوردا می‌باشد). هیچ یک از این دو یعنی $\tilde{U}_1$ یا $\tilde{U}_2$ مستقل از U نمی‌باشند، اما

$$\tilde{U}_4 = (t-x)e^{x+t} \qquad (۴۱.۹)$$

جدید می‌باشد. اکنون این روش را با $U = (t-x)e^{x+t}$ تکرار نمایید.داریم:

$$\tilde{U}_4 = [(t-x)^2 + t + x]e^{x+t}. \qquad (۴۲.۹)$$

این مطلب نشان می‌دهد که X_1 یک جواب جدید را تولید می‌کند، که آنرا

$$\tilde{U}_1 = (t-x-1)e^{x+t},$$

می نامیم. اما $\tilde{U}_1$ دقیقاً ترکیب خطی (۴۰.۹) و (۴۱.۹) می‌باشد، لذا جواب جدیدی بدست نمی‌آید. اگر چه X_4 مکرراً جوابهای جدید را تولید می نماید؛ بعدی در سریها

$$\tilde{U}_4 = ((t-x)^3 + 3(t^2 - x^2) + t - x)e^{x+t} \qquad (۴۳.۹)$$

می‌باشد. اگر جواب آغازی متفاوتی را انتخاب کرده باشیم، X_1 یا X_2 می‌توانند جوابهای جدیدی را تولید نمایند.

ایده فوق برای معادلات با مشتقات جزئی ی غیر خطی که قابل خطی شدن بوسیله تبدیل معکوس پذیر می‌باشند نیز بکار می‌رود. هر جواب معادله با مشتقات جزئی غیر خطی، متناظر با جواب معادله خطی می‌باشد. بنابراین، می‌توانیم روش فوق را برای تولید جوابهای جدید معادله خطی بکار ببریم و سپس این جواب را به جوابهای معادله با مشتقات جزئی غیر خطی اولیه تبدیل می‌نماییم. برای نمونه، معادله توماس

$$u_{xt} = u_x u_t - 1$$

می‌تواند به رابطه (۳۶.۹) خطی گردد، همانند آنچه که در مثال ۸.۱.۴ نشان داده شد. خواننده می‌تواند بپذیرد که هر جواب جدید (۴۱.۹) - (۴۳.۹) متناظر با یک جواب از معادله توماس است.

بخش ۳.۹ تقارنهای غیر کلاسیک

این بخش به معرفی یک کلاس از گروههای تبدیل نقطه‌ای که متقارن نمی‌باشند اما می‌توانند به جوابهای دقیق یک معادله با مشتقات جزئی مفروض منتهی شوند، می‌پردازد. برای اجتناب از پیچیدگیهای غیر ضروری، توجهمان را به معادلات با مشتقات جزئی ی اسکالر برای $u(x,t)$ معطوف می‌نماییم. روش به معادلات با مشتقات جزئی ی دلخواه تعمیم داده می‌شود، اما پیچیدگی محاسبات با افزایش تعداد متغیرها زیاد می شود.

تقارنهای نقطه‌ای لی یک معادله با مشتقات جزئی مفروض مجموعه تمامی جوابها را به خودش می‌نگارد. اگر برخی از جوابها را بشناسیم این مطلب مفید خواهد بود، اما این امر ما را قادر به ساختن جوابهای جدید از هیچ نمی کند. برای انجام این کار، به جستجوی جوابهایی می‌پردازیم که تحت یک گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای ناوردا هستند. تمامی جوابهایی که تحت گروه با مشخصه Q ناوردا هستند، در معادله با مشتقات جزئی و شرط سطح ناوردا صدق می کنند؛ این جوابها، جوابهای دستگاه

$$\Delta = 0, \qquad Q = 0, \tag{۴۴.۹}$$

می‌باشند. اگر تنها به جستجوی جوابهای ناوردا بپردازیم، ارزشمند است که سعی نمائیم تمامی X هایی که تقارنهای نقطه‌ای دستگاه (۴۴.۹) را تولید می نمایند، مشخص کنیم. مشکلی که ایجاد می‌شود این است که معادله دوم $(Q=0)$ وابسته به X می‌باشد!

با این حال اغلب یافتن تمامی چنین مولدهایی (بطور اصولی) امکانپذیر است. برای برخی از معادلات با مشتقات جزئی اینها به جوابهای ناوردای جدیدی که از تقارنهای نقطه‌ای «کلاسیک» نمی توانند بدست آیند منتهی می‌شوند.

شرط تقارن خطی شده برای دستگاهها بیان می کند که مولد X متناظر باQ، تقارنهای مرتبه n ام معادله با مشتقات جزئی (۴۴.۹) را تولید می‌کند هر گاه

$$X^{(n)}\Delta = 0, \quad X^{(1)}Q = 0 \quad \text{هنگامیکه (۴۴.۹) برقرار است،} \tag{۴۵.۹}$$

(اکنون، مرتبه امتداددهی را دقیقاً نشان می‌دهیم). این شرط از تساوی

$$X^{(1)}Q = QQ_u \tag{۴۶.۹}$$

حاصل می شود.(که از خواننده خواسته می‌شود بعنوان تمرین آن را بدست آورد) از رابطه (۴۶.۹) نتیجه می‌شود:

$$Q = 0 \quad \text{هنگامیکه} \quad X^{(1)}Q = 0.$$

لذا X تقارن رابطه (۴۴.۹) می‌باشد، اگر

$$\Delta = 0, \qquad Q = 0 \quad \text{هنگامیکه} \quad X^{(n)}\Delta = 0 \tag{۴۷.۹}$$

باشد. بعبارت دیگر، لازم است گروه تولید شده توسط X فقط جوابهای ناوردا را به خودشان بنگارد. نیاز نیست که جوابهای باقیمانده $\Delta = 0$ به جوابها نگاشته شوند.

بوضوح، اگر X تقارنهای معادله با مشتقات جزئی را تولید نماید، در شرط تقارن خطی شده

$$\Delta = 0 \qquad \text{هنگامیکه} \quad X^{(n)}\Delta = 0 \tag{۴۸.۹}$$

صدق می‌نماید و از اینرو در شرط ضعیف‌تر (۴۷.۹) صدق می‌کند. اگر چه ممکن است مولدهای X موجود باشند که در رابطه (۴۷.۹) صدق کنند اما در شرط تقارن خطی شده (۴۸.۹) صدق نکنند. اینها مولدهای تقارنهای غیر کلاسیک می‌باشند.

جوابهای رابطه (۴۷.۹) بوسیله محاسبه $X^{(n)}\Delta$، حذف برخی مشتقات u بوسیله استفاده از $Q=0$ و $\Delta=0$ و در نهایت برابر قرار دادن توانهای مشتقات باقیمانده u برای بدست آوردن معادلات مبین، بدست می‌آیند. این مفاهیم شبیه روشی است که برای یافتن تقارنهای کلاسیک بکار می‌رود، اما یک تفاوت مهم وجود دارد. معادلات مبین غیر خطی می‌باشند، زیرا $Q=0$ شامل توابع نامشخص (ξ,τ,η) می‌باشد. در نتیجه مجموعه مولدهای تقارنی غیر کلاسیک یک فضای برداری نمی‌باشد، فرض کنید که مجموعه تقارنهای غیر کلاسیک تنها یک جبر لی باشد. بعلاوه، حل شدن معادلات مبین معمولاً بدون جبر کامپیوتری سخت می‌باشد.

ساده‌سازی‌هایی توسط بررسی این مطلب که اگر X تقارن غیر کلاسیکی را تولید نماید آنگاه λX نیز برای هر تابع ناصفر λ چنین است، انجام می‌پذیرد. برای استخراج این نتیجه، از اتحاد $(\lambda X)^{(k)}=\lambda X^{(k)}$ هنگامیکه $Q=0$ است استفاده می‌نماییم که نتیجه‌ای از فرمول امتداددهی (۸.۲۵) می‌باشد. اگر X تولید کننده تقارنهای غیر کلاسیک باشد آنگاه

$$(\lambda X)^{(n)}\Delta\Big|_{\substack{Q=0,\\ \Delta=0}} = \lambda X^{(n)}\Delta\Big|_{\substack{Q=0,\\ \Delta=0}} = 0,$$

می‌باشد، لذا λX نیز تقارنهای غیر کلاسیک را تولید می‌کند. بنابراین بدون کاستن از کلیت، اگر τ ناصفر باشد، قرار می‌دهیم $\tau=1$ و اگر $\tau=0$ باشد، قرار می‌دهیم $\xi=1$. (اگر τ,ξ هر دو صفر باشند، شرط سطح ناوردا ایجاب می‌کند که η نیز صفر باشد. آنگاه روش اصولی یافتن سطح ناوردا موجود نمی‌باشد مگر اینکه مولد تقارن کلاسیک شناخته شده باشد.)

۷.۹ مثال. معادله هاکسلی

$$u_t=u_{xx}+2u^2(1-u), \qquad (۴۹.۹)$$

یک گروه لی دو پارامتری از تقارنهای نقطه‌ای (کلاسیک) را دارا می‌باشد که توسط

$$X_1=\partial_x, \qquad X_2=\partial_t.$$

تولید شده است. تمامی جوابهایی که تحت گروه تولید شده بوسیله X_1 ناوردا هستند دارای شکل سه بعدی هستند، بنابراین $u=F(t)$ است که

$$F'=2F^2(1-F). \qquad (۵۰.۹)$$

تنها جواب‌های دیگری که تحت تقارنهای کلاسیک ناوردا می‌باشند موجهای متحرک پایا می‌باشند، $u=F(x-ct)$، که

$$F''+cF'+2F^2(1-F)=0. \qquad (۵۱.۹)$$

فرض کنید به جستجوی تقارنهای غیر کلاسیک با $\tau=1$ بپردازیم، لذا شرط سطح ناوردا بصورت

$$u_t=\eta-\xi u_x \qquad (۵۲.۹)$$

می‌باشد. شرط تقارن خطی شده برای این تقارنهای غیر کلاسیک بصورت

(۵۳.۹) $\quad$ هنگامیکه (۴۹.۹) و (۵۲.۹) برقرار باشد $\quad \eta^{xx}-\eta^t+(4u-6u^2)\eta=0$

است. معادلات مبین بوسیله نوشتن رابطه (۵۳.۹) ، بکار بردن رابطه (۴۹.۹) و (۵۲.۹) برای حذف u_{xx} و u_t بدست می‌آیند وسپس معادلات حاصل بوسیله مساوی قرار دادن توانهای u_x تفکیک می‌گردند. این مطلب دستگاه

$$\begin{aligned} \xi_{uu} &= 0, \\ \eta_{uu}-2\xi_{xu}+2\xi\xi_u &= 0, \\ 2\eta_{xu}-\xi_{xx}-(2\eta+6u^3-6u^2)\xi_u+2\xi\xi_x+\xi_t &= 0, \\ \eta_{xx}-2\eta\xi_x+2u^2(u-1)(\eta_u-2\xi_x)-\eta_t+(4u-6u^2)\eta &= 0, \end{aligned} \qquad (۵۴.۹)$$

را تولید می‌کند. برخی از این معادلات مبین غیر خطی می‌باشند، اما (۵۴.۹) کاملاً به راحتی حل می‌شود (زیرا می‌تواند بفرم مثلثی باشد). جواب عمومی معادله اول

$$\xi = A(x,t)u+B(x,t)$$

می‌باشد که به جواب معادله دوم:

$$\eta = -\frac{-1}{3}A^2u^3+(A_x-AB)u^2+C(x,t)u+D(x,t)$$

منتهی می‌گردد. این نتایج ما را قادر می‌سازد تا به تفکیک معادلات باقیمانده توسط یکسان قرار دادن توانهای u و ... بپردازیم. نظر به اینکه این مطلب اکنون روشی آشنا می‌باشد، جزئیات را حذف نموده و نتیجه ارائه شده را ساده می‌نماییم. جوابهای رابطه (۵۴.۹) عبارتند از:

$$\xi = 1 \quad ,\eta = 0 \qquad (۵۵.۹)$$

و

$$\xi = \pm(3u-1), \qquad \eta = 3u^2(1-u). \qquad (۵۶.۹)$$

اکنون به بررسی (۵۵.۹) که متناظر با مولد تقارنی کلاسیک X_1+X_2 است، می‌پردازیم(به یاد داشته باشید که $\tau = 1$ است). اگر چه (۵۶.۹) جدید می‌باشد؛ (۵۶.۹) مولدهای تقارنی غیر کلاسیک را می‌دهد:

$$X = \pm(3u-1)\partial_x+\partial_t+3u^2(1-u)\partial_u. \qquad (۵۷.۹)$$

شرط سطح ناوردا برای تقارنهای غیر کلاسیک

$$u_t \pm (3u-1)u_x = 3u^2(1-u), \qquad (۵۸.۹)$$

می‌باشد که توسط روش مشخصه‌ها به راحتی حل می‌گردد. دو ناوردای مستقل تابعی عبارتند از:

$$r = (\frac{1}{u}-1)e^{t\pm x}, \quad v = \frac{1}{u}+2t\mp x. \qquad (۵۹.۹)$$

اکنون $v = F(r)$ را در معادله هاکسلی جانشین نمایید، که به

$$F'' = 0$$

کاهش می‌یابد. بنابراین $F(r) = c_1 r + c_2$ می‌باشد. با نوشتن بر حسب متغیرهای اولیه، بدست می‌آید:

$$u = \frac{1 - c_1 e^{t \pm x}}{2t \pm x - c_1 e^{t \pm x} + c_2}.$$

جوابها با $c_1 \neq 0$ بوسیله کاهش کلاسیک دلخواه قابل بدست آوردن نمی‌باشند. اگر $c_1 = 0$ باشد، جواب $v = c_2$ یک موج متحرک می‌باشد. همچنین یک موج متحرک با جواب $r = c_3$ موجود است.

هنوز به یافتن تقارنهای غیر کلاسیک با $\tau = 0$ نپرداخته‌ایم، برای آنها

$$X = \partial_x + \eta(x, t, u)\partial_u,$$

می‌باشد. شرط سطح ناوردا

$$u_x = \eta \qquad (۶۰.۹)$$

است. لذا هر جواب ناوردا دلخواه معادله هاکسلی در

$$u_t = \eta_x + \eta\eta_u + 2u^2(1-u) \qquad (۶۱.۹)$$

صدق می‌کند. بدون کاستن از کلیت، در می‌یابیم که شرط تقارن خطی شده غیر کلاسیک

$$\eta_{xx} + 2\eta\eta_{xu} + \eta^2\eta_{uu} - 2u^2(1-u)\eta_u - \eta_t + (4u - 6u^2)\eta = 0,$$

می‌باشد که در واقع شرط انتگرال پذیری برای دستگاه (۶۰.۹) و (۶۱.۹) می‌باشد. تنها یک معادله وجود دارد، زیرا همه مشتقات u هنگامیکه (۶۰.۹) و (۶۱.۹) در نظر گرفته می‌شوند، حذف می‌گردند. در نتیجه نمی‌توانیم اقدامات بیشتری انجام دهیم بجز با تغییر دادن حدسهای گوناگون.

در نتیجه مثال فوق استثنا می‌باشد از این حیث که معادلات مبین (با$\tau = 1$) به سادگی حل می‌شوند! برای اکثر معادلات با مشتقات جزئی با تقارنهای غیر کلاسیک، معادلات مبین باید بوسیله کمک گرفتن از جبر کامپیوتری ساده گردند. بسته نرم افزاری DIFFGROB 2 (که در فصل ۸ شرح داده شد) قادر است با بسیاری از دستگاههای غیر خطی از معادلات با مشتقات جزئی ی بالا معین مواجه گردد. با وجود این، نرم افزار همواره موفق نمی‌باشد.

برای بسیاری از معادلات با مشتقات جزئی ، هر کاهش غیر کلاسیک نیز بوسیله تقارنهای کلاسیک قابل بدست آوردن می‌باشد. اگر چه تعداد کمی از معادلات با مشتقات جزئی (مانند معادله بوزونیسک خانواده بزرگی) از جوابها را دارا می‌باشند که بوسیله تقارنهای کلاسیک نمی توانند یافت شوند. دلیل این امر هنوز قابل درک نمی‌باشد.

مطالعه بیشتر

تقارنها، تبدیلات خطی شده و جوابهای ناوردای معادلات با مشتقات جزئی ی آشنا در طی سه دهه گذشته طبقه بندی شده‌اند. بسیاری از این نتایج در محتوای کتاب راهنمایی که توسط ابراگیمف در سال (۱۹۹۴ و ۱۹۹۵) نوشته شده است موجود می‌باشند.

ما شرایط اولیه یا مرزی را فعلاً بیان ننموده‌ایم. در یک بیان کلی، جواب ناوردا مسئله مقدار مرزی اگر معادله با مشتقات جزئی ، دامنه و شرایط مرزی تماماً تحت گروه تقارنی ناوردا باشد موجود است. برای مثال شارپوسیل در نی استوانه‌ای امکان پذیر است زیرا معادلات حرکت، دامنه (یک استوانه) و شرایط مرزی (شار صفر در دیوار نی)تحت دورانها حول محورهای نی ناوردا می‌باشند. (توجه: وجود یک جواب ناوردا ضمانتی برای پایداری آن نمی‌باشد. برای مثال، شار نی متلاطم متقارن محوری نمی‌باشد).

تحت برخی از شرایط، امکان استفاده از جوابهای ناوردا معادله با مشتقات جزئی برای ساخت یک جواب ترکیبی که در شرایط مرزی مفروض صدق کند وجود دارد. بلومن و کومی (۱۹۸۹) چگونگی این روش را برای معادلات با مشتقات جزئی ی خطی بیان نموده‌اند.

در بسیاری از کار بردها، جوابهای ناوردا رفتار محدود شده یک دستگاه را به دور از شرایط مرزی و اولیه شرح می‌دهند. برای نمونه، رفتار محدود شده یک معادله با مشتقات جزئی سهمی گون روی دامنه فاقد مرز اغلب بوسیله جوابهای مشابه شرح داده می‌شود. بارنبلات (۱۹۹۶) مسائل فیریکی بسیاری را وقتیکه این اتفاق می افتد شرح داد و به بسط روشهایی برای تجزیه و تحلیل رفتار محدود شده ناوردا-مقیاسی پرداخت.

تقارنهای غیر کلاسیک اخیراً تلاش پژوهشی زیادی را همانند بسته‌های نرم افزاری معتبر که قابل دسترس هستند، جلب نموده‌اند. تجزیه و تحلیل معادله بوزونیسک توسط کلارکسون (۱۹۹۶)نقطه شروع خوبی برای خوانندگانی که قصد دارند بیشتر در مورد تقارنهای غیر کلاسیک دریابند، می‌باشد.

تمرین‌ها

۱.۹ درفصل ۸، نشان داده شد که معادله توماس (۸.۵۵) می‌تواند به

$$u_{xt} = u,$$

خطی شود که تقارنهایش شامل مقیاس‌های تولید شده بوسیله

$$X = x\partial_x - t\partial_t + ku\partial_u,$$

می‌باشند. تمامی جوابها معادله با مشتقات جزئی فوق که تحت گروه تولید شده بوسیله X (برای k دلخواه) ناوردا هستند را بیابید. اگر $k = \frac{1}{2}U$ باشد جوابها چه هستند؟ روش‌های 2.9 را بکار برید تا خانواده بزرگی از جوابهای ناوردا از روی آنهایی که یافته‌اید، بسازید. اکنون نتایج بدست آمده را برای ساخت خانواده‌ای از جوابهای معادله توماس بکار برید. [راهنمایی: از $r = \sqrt{xt}$ بعنوان یک ناوردا استفاده نمایید].

۲.۹ نشان دهید که مشخصه گروه لی یک پارامتری تقارنهای نقطه‌ای معادله با مشتقات جزئی اسکالر در اتحاد

$$XQ = QQ_u$$

صدق می‌کنند. نتیجه متناظر برای تقارنهای نقطه‌ای یک دستگاه از معادلات با مشتقات جزئی باM متغیر وابسته چه می‌باشد؟

۳.۹ جوابهای موج متحرک معادله تصفیه غیر خطی (۱۴.۹) را محاسبه نمایید. از تقارنهای باقیمانده (۱۵.۹) برای ساخت یک خانواده از جوابهایی که یافته‌اید استفاده نمایید.

۴.۹ معادله کورتج-دوریس

$$u_t + \frac{u}{t} + uu_x + u_{xxx} = 0$$

دارای تقارنهای نقطه‌ای تولید شده بوسیله

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = ln\ t\partial_t + t^{-1}\partial_u, \quad X_3 = 3t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u,$$

می‌باشد. اکثر جوابهای عمومی که تحت گروه تولید شده بوسیله X_2 ناوردا می‌باشند را بیابید. اکنون از تقارنهای نقطه‌ای لی باقیمانده برای ساخت خانواده دو پارامتری از جوابهای ناوردا استفاده کنید.

۵.۹ تقارنهای غیر کلاسیک معادله برگر ($\tau = 1$) را محاسبه کنید وجوابهای ناوردا را بیابید.

فصل ۱۰

دسته‌بندی جوابهای ناوردا

بجای شمارش یک میلیون نیم دوجین . . .، ساده کن، ساده کن.

(ه. د. ثورو: والدن)

بخش ۱.۱۰ هم ارزی جوابهای ناوردا

هدف ما در این فصل این است که مجموعه همه جوابهای ناوردای یک معادله دیفرانسیل مفروض را به دسته‌های هم‌ارزی افراز کنیم. دو جواب ناوردا**هم ارزی**می باشند هرگاه یک جواب بتواند تحت یک تقارن نقطه‌ای معادله با مشتقات جزئی به جواب دیگر نگاشته شود. این دسته‌بندی، بطور قابل توجهی مسئله مشخص کردن کلیه جوابهای ناوردا را آسان می‌سازد. تنها لازم است یک جواب ناوردا (عمومی) از هر دسته بیابیم آنگاه کل دسته با بکارگیری تقارنها می‌تواند ساخته شود. این استراتژی تلاشی که برای بدست آوردن جوابهای ناوردا لازم است را به حداقل می‌رساند.

برای راحتی روی مسئله هم ارزی جوابهایی که تحت یک گروه لی تک پارامتری از تقارنهای نقطه‌ای ناوردا هستند، متمرکز می‌شویم. برای اجتناب از تکثیر اندیسها فرض کنیم x و u به ترتیب بیانگر N متغیر مستقل و M متغیر وابسته باشد و فرض کنیم z مجموعه همه متغیرهایی باشد که $z=(x,u)$ است. بایستی بررسی کنیم زمانیکه تقارن

$$\Gamma : z \mapsto \hat{z} \tag{۱.۱۰}$$

روی جوابی که تحت یک گروه تقارن تک پارامتری تولید شده توسط

$$X = \kappa^i X_i \tag{۲.۱۰}$$

ناوردا است، عمل می‌کند چه اتفاقی می‌افتد؟ در اینجا هر κ^i یک مقدار ثابت است و مولدهای

$$X_i = \zeta_i^s(z)\partial_{z^s} \tag{۳.۱۰}$$

پایه‌ای برای جبرلی مولدهای تقارن نقطه‌ای تشکیل می‌دهند. از این پس قرارداد می‌کنیم که وجود یک نشان روی یک تابع یا عملگر به این معنی است که $\hat{z}$ جایگزین z شده است. بطور مثال

$$\hat{X}_i = \zeta_i^s(\hat{z})\partial_{\hat{z}^s} \tag{۴.۱۰}$$

در اینجا توابع ζ_i^s دقیقاً مشابه توابع رابطه (۳.۱۰) هستند هر چند متغیر آنها تغییر یافته است.

اکنون بایستی با روند تولید خانواده‌هایی از جوابهای ناوردا مانوس باشید.(بخش ۴.۳ و مثال ۹.۵) را ببینید. فرض کنید جواب $u = f(x)$ تحت یک گروه تقارن تک پارامتری تولید شده توسط X، ناوردا باشد. $u = f(x)$ را بر حسب $(\hat{x}, \hat{u})$ می‌نویسیم تا $\hat{u} = \tilde{f}(\hat{x})$ بدست آید. مولد گروه تقارن یعنی X نیز بر حسب $(\hat{x}, \hat{u})$ نوشته می‌شود و در آخر علامتها برداشته می‌شوند. این عمل، مولد یک گروه تک پارامتری که جواب تبدیل یافته $u = \tilde{f}(x)$ تحت آن ناورداست را نتیجه می‌دهد. این مولد را $\tilde{X}$ می‌نامیم.

جوابهای $u = f(x)$ و $u = \tilde{f}(x)$ هم ارزند زیرا یک تقارن (Γ) وجود دارد که یکی را به دیگری می‌نگارد. به طور مشابه این تقارن X را به $\tilde{X}$ می‌نگارد بنابراین مولدها نیز هم ارز در نظر گرفته می‌شوند. می‌خواهیم جوابهای ناوردا را از طریق دسته‌بندی مولدهای تقارنی متناظر آنها دسته‌بندی کنیم. برای انجام این کار یک مولد از هر دسته برای دستیابی به مجموعه جوابهای ناوردا بکار گرفته می‌شود. مجموعه‌ای که دقیقاً شامل یک مولد از هر دسته است یک**دستگاه بهینه از مولدها** نامیده می‌شود.

برای دسته بندی مولدها بایستی X را بر حسب $\hat{z}$ بنویسیم. از بخش ۲.۶ به یاد داریم که اگر $\hat{z} = e^{\varepsilon X_j}z$ آنگاه

$$e^{\varepsilon X_j}F(z) = F(e^{\varepsilon X_j}z) = F(\hat{z}) \tag{۵.۱۰}$$

بازای هر تابع هموار F برقرار است. بطور کلی عمل هر تقارن (۱.۱۰) روی هر تابع هموار F به طور مشابه بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma F(z) = F(\Gamma z) = F(\hat{z}) \tag{۶.۱۰}$$

(این به ما اجازه می‌دهد تا با تقارنهای گسسته مانند تقارنهای لی برخورد کنیم.)اکنون فرض کنیم $\Gamma(\delta)$ نماینده یک گروه لی تک پارامتری از تقارنهای تولید شده توسط X باشد. در اینجا δ پارامتر گروه است و

$$\Gamma(\delta) : z \mapsto e^{\delta X}z \tag{۷.۱۰}$$

اگر F یک تابع هموار دلخواه باشد آنگاه از (۶.۱۰) داریم:

$$\hat{X}F(\hat{z}) = \Gamma XF(z) = \Gamma X\Gamma^{-1}F(\hat{z})$$

از این رو:

$$\hat{X}^2F(\hat{z}) = \Gamma X\Gamma^{-1}\Gamma X\Gamma^{-1}F(\hat{z}) = \Gamma X^2\Gamma^{-1}F(\hat{z})$$

و این روند ادامه پیدا می‌کند و با فرض همگرایی می‌توانیم سریهای لی زیر را تشکیل دهیم:

$$\hat{\Gamma}(\delta)F(\hat{z}) = e^{\delta\hat{X}}F(\hat{z}) = \Gamma e^{\delta X}\Gamma^{-1}F(\hat{z}) = \Gamma\Gamma(\delta)\Gamma^{-1}F(\hat{z})$$

از آنجاییکه F دلخواه است نتیجه می‌گیریم که:

$$\hat{X} = \Gamma X\Gamma^{-1} \tag{۸.۱۰}$$

مولد گروه لی تک پارامتری از تقارنهای:

$$\hat{\Gamma}(\delta) = \Gamma\Gamma(\delta)\Gamma^{-1} \qquad (۹.۱۰)$$

است. در فصل ۱۱، این نتیجه را برای بدست‌آوردن تقارنهای گسسته بکار خواهیم برد. در ادامه این فصل، تنها با هم ارزی تحت تقارنهای لی که توسط یک جبرلی متناهی‌البعد با یک پایه $X_1, \cdots, X_R$ تولید شده اند سروکار داریم.(از آن دسته‌هایی که شامل مولدهای وابسته به توابع دلخواه، از قبیل زیرجبرهای نامتناهی البعد که در معادلات با مشتقات جزئی ی خطی یا قابل خطی شدن ظاهر می شوند می‌باشند، چشم پوشی می‌کنیم.) می‌توان نشان داد که این مسئله هم ارزی محدود شده با بررسی یک دنباله از مسائل یک بعدی قابل حل است. در هر یک از این مسائل، هم ارزی تحت تقارنهایی را مد نظر قرار می‌دهیم که از یکی از مولدها در پایه مذکور بدست آمده اند

$$\Gamma : z \mapsto \hat{z} = e^{\varepsilon X_j} z \qquad (۱۰.۱۰)$$

از رابطه (۸.۱۰) بازای مولد دلخواه X داریم

$$\hat{X} = e^{\varepsilon X_j} X e^{-\varepsilon X_j} \qquad (۱۱.۱۰)$$

(در اینجا و در ادامه این فصل اندیس j را جمع نمی‌زنیم حتی هنگامی که تکرار می‌شود زیرا X_j نمایانگر یک مولد خاص است.) بخصوص (۱۱.۱۰) بازای $X = X_j$ که با $e^{-\varepsilon X_j}$ جابجا می‌شود برقرار است. بنابراین

$$\hat{X}_j = X_j \qquad (۱۲.۱۰)$$

اکنون می‌توانیم با حل (۱۱.۱۰) بر حسب X، هر مولد X را بر حسب $\hat{z}$ بنویسیم و با استفاده از (۱۲.۱۰) بدست آوریم:

$$X = e^{-\varepsilon \hat{X}_j} \hat{X} e^{\varepsilon \hat{X}_j} \qquad (۱۳.۱۰)$$

بازای هر ε طرف راست (۱۳.۱۰) یک گروه تقارن تک پارامتری تولید می کند که تحت آن $\hat{u} = \tilde{f}(\hat{x})$ ناوردا است. بنابراین جواب تبدیل یافته $u = \tilde{f}(x)$ تحت گروه تولید شده توسط:

$$\tilde{X} = e^{-\varepsilon X_j} X e^{\varepsilon X_j} \qquad (۱۴.۱۰)$$

که با X هم ارز است، ناورداست. این نتیجه برای کلیه تقارنهای نقطه‌ای لی تولید شده توسط X_j برقرار است. اساساً مسئله دسته بندی مولدها، با بکار گیری (۱۴.۱۰) بازای مولدهای متفاوت X_j به منظور کاهش هر مولد به ساده ترین شکل هم ارز آن حل می‌شود. اکنون به بحث در مورد اینکه چگونه این کار را انجام می‌دهیم می‌پردازیم.

بخش ۲.۱۰　چگونگی دسته‌بندی مولدهای تقارنی

رابطه هم ارزی (۱۴.۱۰) بجای جوابهای یک معادله دیفرانسیل مشخص، شامل مولدهای تقارن است. زمانیکه مولدها را برای یک جبرلی بخصوص دسته‌بندی کردیم این دسته‌بندی برای هر معادله دیفرانسیل با همان جبرلی، خواه یک معادله دیفرانسیل معمولی باشد یا یک معادله با مشتقات جزئی مورد استفاده

قرار می‌گیرد. اگر همه جبرهای لی ممکن را شناسایی کنیم، می‌توانیم مسئله دسته بندی را یکباره و برای همه جبرهای لی حل کنیم. مسئله تشخیص کلیه جبرهای لی ممکن برای معادلات دیفرانسیل معمولی اسکالر حل شده است. اما برای معادلات با مشتقات جزئی یا دستگاههای معادله دیفرانسیل معمولی حل نشده. بنابراین معمولاً لازم است دسته‌بندی را روی پایه‌های مختلف و در مورد هر یک جداگانه انجام دهیم.

از (۱۴.۱۰) نتیجه می‌شود که $\tilde{X}$ در مسئله مقدار اولیه

$$\frac{d\tilde{X}}{d\varepsilon} = -X_j\tilde{X} + \tilde{X}X_j = -[X_j, \tilde{X}], \qquad \tilde{X}|_{\varepsilon=0} = X \tag{۱۵.۱۰}$$

صدق می‌کند. با دیفرانسیل گیری از معادله دیفرانسیل معمولی فوق نسبت به ε خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\tilde{X}}{d\varepsilon^2} = -\left[X_j, \frac{d\tilde{X}}{d\varepsilon}\right] = (-1)^2[X_j, [X_j, \tilde{X}]]$$

و به همین ترتیب ادامه می دهیم. قضیه تیلور جواب زیرا که بصورت یک سری است و بازای هرε به قدر کافی نزدیک به صفر برقرار است را نتیجه می‌دهد

$$\tilde{X} = X - \varepsilon[X_j, X] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[X_j, [X_j, X]] - \cdots \tag{۱۶.۱۰}$$

اگر X_j و X جابجا شوند آنگاه (۱۶.۱۰) نتیجه می‌دهد:

$$\tilde{X} = X \qquad \forall\varepsilon \tag{۱۷.۱۰}$$

بنابراین مولد X تغییر نمی‌یابد. در مورد جبرهای لی آبلی کلیه مولدها جابجا می‌شوند بنابراین هیچ دو مولد مستقل خطی‌ای هم ارز نیستند. دستگاههای بهینه مولدها شامل همه مولدها است.

برای جبرهای لی غیر آبلی هدف این است که هر مولد پایه‌ای X_j را برای ساده کردن X از طریق حذف هر تعداد ثابت κ^i که ممکن است، بکار گیریم. یک راه ساده کردن دیگر نیز وجود دارد. می‌توانیم یک مقدار ثابت غیر صفر دلخواه مانند λ را در X ضرب کنیم. (یادآور می‌شویم که گروه تولید شده توسط λX دقیقاً با گروه تولید شده توسط X یکی است بنابراین مجموعه جوابهای ناوردای گروهی زمانیکه X در یک مقدار ثابت ضرب شود تحت تاثیر قرار نمی‌گیرند.)

۱.۱۰ مثال. جبرلی دو بعدی غیر آبلی با پایه $\{X_1, X_2\}$ بطوریکه

$$[X_1, X_2] = X_1$$

است را در نظر بگیرید.(این جبرلی عموماً با$\mathfrak{a}(1)$ نمایش داده می‌شود.) هر مولد بصورت

$$X = \kappa^1 X_1 + \kappa^2 X_2$$

است. با مشخص کردن مجموعه مولدهایی که تحت گروه تولید شده توسط X_1 با X هم ارزند، شروع می‌کنیم. از (۱۶.۱۰) داریم:

$$\begin{aligned}
\tilde{X} &= X - \varepsilon[X_1, X] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[X_1, [X_1, X]] - \cdots \\
&= \kappa^i\left(X_i - \varepsilon[X_1, X_i] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[X_1, [X_1, X_i]] - \cdots\right) \\
&= \kappa^1 X_1 + \kappa^2(X_2 - \varepsilon X_1) \\
&= (\kappa^1 - \varepsilon\kappa^2)X_1 + \kappa^2 X_2
\end{aligned}$$

بخصوص اگر $\kappa^2 \neq 0$ آنگاه می‌توان $\varepsilon = \kappa^1/\kappa^2$ را برای نشان دادن اینکه X با $X = \kappa^2 X_2$ هم ارز است، انتخاب کرد. با مقیاس دهی مجدد قرار می‌دهیم $\kappa^2 = 1$ بدون اینکه از کلیت کاسته شود(زیرا فرض کرده بودیم $\kappa^2 \neq 0$). تنها حالت ممکن باقیمانده $\kappa^2 = 0$ است که در اینصورت بازای یک $\kappa^1 \neq 0$ داریم $X = \kappa^1 X_1$ و مجدداً برای قرار دادن $\kappa^1 = 1$ مقیاس دهی می‌کنیم. بطور خلاصه مجموعه $\{X_1, X_2\}$ یک دستگاه بهینه برای $\mathfrak{a}(1)$ است. هر جوابی که تحت یک گروه تک پارامتری تولید شده توسط $X \in \mathfrak{a}(1)$ ناورداست با یک جواب که تحت گروه تولید شده توسط یکی از مولدهای موجود در دستگاه بهینه ناورداست هم ارز می‌باشد.

در این مثال بسیار ساده توانستیم مسئله هم ارزی را تنها با استفاده از گروه تولید شده توسط X_1 حل کنیم. اگر بجای X_1 بخواهیم گروه تولید شده توسط X_2 را بکار گیریم چه اتفاقی خواهد افتاد؟ در این حالت داریم:

$$
\begin{aligned}
\tilde{X} &= \kappa^i \left(X_i - \varepsilon [X_2, X_i] + \frac{\varepsilon^2}{2!} [X_2, [X_2, X_i]] - \cdots \right) \\
&= e^{\varepsilon} \kappa^1 X_1 + \kappa^2 X_2
\end{aligned}
$$

این گروه روی X با ضرب یکی از مولفه‌هایش در یک مقدار ثابت عمل می‌کند. اگر $\kappa^2 \neq 0$ باشد با مقیاس دهی مجدد X بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود قرار می‌دهیم $\kappa^2 = 1$. اگر $\kappa^1 \neq 0$ باشد می‌توانیم $\varepsilon = -\ln|\kappa^1|$ را اختیار کنیم تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\tilde{X} = \pm X_1 + X_2$$

اگر چه قادر شدیم مولد را بطور قابل ملاحظه‌ای ساده کنیم اما نمی‌توانیم به ساده‌ترین شکل هم ارز

$$\tilde{X} = X_2$$

بدون استفاده از گروه تولید شده توسط X_1 دست یابیم.

معمولاً همه یا برخی از گروههای تک پارامتری $e^{\varepsilon X_j}$ نیازمند ارائه یک دستگاه بهینه از مولدها می‌باشند. محاسبات برای جبرهای لی با بعد کم بسیار ساده است. اما هنگامیکه بعد افزایش می‌یابد پیچیدگی بیشتر می‌شود. بنابراین اکنون مسئله هم ارزی را مجدداً بر حسب ماتریسها بیان می‌کنیم تا از فواید نرم افزارهای محاسبه‌گر جبری برای کار با ماتریسها استفاده کنیم. برای شروع X و $\tilde{X}$ را بصورت زیر به مولفه‌ها تجزیه می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
X &= \kappa^i X_i, && (۱۸.۱۰) \\
\tilde{X} &= \kappa^i \tilde{X}_i = \kappa^i e^{-\varepsilon X_j} X_i e^{\varepsilon X_j} && (۱۹.۱۰)
\end{aligned}
$$

یادآوری می‌کنیم که هر جبرلی تحت جابجاگر بسته است بنابراین بازای ماتریس $R \times R$ $A(j,\varepsilon)$ داریم:

$$\tilde{X}_i = (A(j,\varepsilon))_i^m X_m \qquad (۲۰.۱۰)$$

لذا

$$\tilde{X} = \tilde{\kappa}^m X_m \qquad (۲۱.۱۰)$$

که در آن

$$\tilde{\kappa}^m = \kappa^i (A(j,\varepsilon))_i^m. \qquad (۲۲.۱۰)$$

برای راحتی بردارهای سطری

$$\kappa = (\kappa^1, \cdots, \kappa^R), \qquad \tilde{\kappa} = (\tilde{\kappa}^1, \cdots, \tilde{\kappa}^R)$$

را معرفی می‌کنیم. در اینصورت Γ می‌تواند به عنوان نگاشتی که روی مقادیر ثابت κ بصورت زیر عمل می‌کند در نظر گرفته شود:

$$\Gamma : \kappa \mapsto \tilde{\kappa} = \kappa A(j, \varepsilon) \tag{۲۳.۱۰}$$

هنگامیکه ماتریس $A(j,\varepsilon)$ متناظر با هر X_j، مشخص است سعی می‌کنیم مسئله هم ارزی را با استفاده از این ماتریسها بصورت مناسبی برای κ، حل کنیم. هر بار ε را به منظور ساده کردن $\tilde{\kappa}$ انتخاب می‌کنیم.

اکنون کار ما این است که $A(j,\varepsilon)$ را بدست آوریم. مولد $\tilde{X}_i$ جواب مسئله مقدار اولیه

$$\frac{d\tilde{X}_i}{d\varepsilon} = -e^{-\varepsilon X_j}[X_j, X_i]e^{\varepsilon X_j} = c_{ij}^k \tilde{X}_k, \qquad \tilde{X}_i|_{\varepsilon=0} = X_i$$

است. بنابراین از (۲۰.۱۰) داریم:

$$\frac{d(A(j,\varepsilon))_i^m}{d\varepsilon} X_m = c_{ij}^k (A(j,\varepsilon))_k^m X_m, \qquad (A(j,0))_i^m X_m = X_i$$

مولدهای X_m مستقل خطی‌اند بنابراین :

$$\frac{d(A(j,\varepsilon))_i^m}{d\varepsilon} = c_{ij}^k (A(j,\varepsilon))_k^m, \qquad (A(j,0))_i^m = \delta_i^m \tag{۲۴.۱۰}$$

اکنون ماتریس $C(j)$ که عناصر آن بصورت زیر هستند را تعریف می‌کنیم.

$$(C(j))_i^k = c_{ij}^k \tag{۲۵.۱۰}$$

این کار ما را قادر می‌سازد تا (۲۴.۱۰) را بصورت معادله دیفرانسیل ماتریسی

$$\frac{dA(j,\varepsilon)}{d\varepsilon} = C(j)A(j,\varepsilon), \qquad A(j,0) = I \tag{۲۶.۱۰}$$

بنویسیم که جواب عمومی آن عبارتست از:

$$A(j,\varepsilon) = \exp\{\varepsilon C(j)\} = \sum_{n=0}^{\infty} C(j)^n \frac{\varepsilon^n}{n!} \tag{۲۷.۱۰}$$

برای جبرهای لی با بعد کم محاسبه دستی $A(j,\varepsilon)$ همانطور که در مثال بعد نشان داده می‌شود کار آسانی است. بیشتر سیستمهای محاسبه‌گر جبری دارای بسته‌های جبرخطی هستند که ماتریس نمایی $A(j,\varepsilon)$ که ماتریس ثابتهای ساختاری آن، $C(j)$ ، داده شده است را محاسبه می‌کنند. چه از یک سیستم محاسبه‌گر استفاده بشود چه نشود در هر حال عاقلانه است پایه‌ای انتخاب شود که در آن ثابتهای ساختاری تا حد امکان صفر باشند تا از مشکل شدن روند ساده کردن κ جلوگیری شود.

همانطور که دیده‌ایم مولدهای جبرهای لی آبلی هرگز ساده نمی‌شوند زیرا هر مولد تحت گروه تولید شده توسط دیگر مولدها ناورداست. برخی از جبرهای لی غیرآبلی همچنین داری یک یا چند ناوردای $I(\kappa)$ هستند بطوریکه:

$$I\Big(\kappa \exp[\varepsilon C(j)]\Big) = I(\kappa), \qquad \forall \quad j, \varepsilon \tag{۲۸.۱۰}$$

ناورداها به عنوان قیودی روی ساده سازیهای تا حد ممکن انجام شده عمل می‌کنند. بنابراین توانایی دستیابی به آنها بصورت اصولی امری مهم است. اکنون تکنیکی برای انجام این کار ارائه می‌دهیم.

دیفرانسیل‌گیری از (۲۸.۱۰) نسبت به ε بازای $\varepsilon = 0$ به شرط لازم (و کافی) برای ناوردا بودن $I(\kappa)$ منتهی می‌شود:

$$\kappa C(j)\nabla I(\kappa) = 0, \qquad \forall \quad j \tag{۲۹.۱۰}$$

که در آن

$$\nabla I(\kappa) = \begin{bmatrix} I_1(\kappa) \\ \vdots \\ I_R(\kappa) \end{bmatrix}, \qquad I_i(\kappa) \equiv \frac{\partial I(\kappa)}{\partial \kappa^i}$$

شرایط ناوردایی (۲۹.۱۰) می تواند به کمک روش مشخصه‌ها حل شود. یک راه ساده برای انجام این امر این است که (۲۹.۱۰) بصورت

$$K(\kappa)\nabla I(\kappa) = 0 \tag{۳۰.۱۰}$$

نوشته شود که $K(\kappa)$ ماتریسی $R \times R$ است که سطر jام آن $\kappa C(j)$ است. ماتریس معادله با مشتقات جزئی رابطه (۳۰.۱۰) می تواند با کاهش $K(\kappa)$ بصورت پلکانی ساده شود. حل معادلات کاهش یافته با روش مشخصه‌ها عموماً آسان است. اگر $\rho = Rank(K(\kappa))$ باشد تعداد $R-\rho$ ناوردای مستقل تابعی وجود دارد.

۲.۱۰ مثال. در اینجا روش ماتریسی را به منظور مشخص کردن یک دستگاه بهینه از مولدها برای جبرلی سه بعدی $\mathfrak{sl}(2)$ بکار می‌گیریم. طبق معمول یک پایه $\{X_1, X_2, X_3\}$ را اختیار می‌کنیم بطوریکه:

$$[X_1, X_2] = X_1, \qquad [X_1, X_3] = 2X_2, \qquad [X_2, X_3] = X_3$$

تنها ثابتهای ساختاری غیرصفر c_{ij}^k که در آنها $j = 1$ است عبارتند از:

$$c_{21}^1 = -1, \qquad c_{31}^2 = -2$$

بنابراین:

$$C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

به طور مشابه سایر ثابتهای ساختاری نتیجه می‌دهند:

$$C(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C(3) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریسهای $\varepsilon C(j)$ را به منظور دستیابی به نتیجه زیر، نمایی می‌کنیم

$$A(1,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon^2 & -2\varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \qquad A(2,\varepsilon) = \begin{bmatrix} e^{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$A(3,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 2\varepsilon & \varepsilon^2 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۳۱.۱۰}$$

قبل از انجام هر کاری برای ساده کردن κ ابتدا وجود ناورداها را بررسی می‌کنیم. بردارهای سطری $\kappa C(j)$ عبارتند از

$$\begin{aligned}\kappa C(1) &= (-\kappa^2,-2\kappa^3,0),\\ \kappa C(2) &= (\kappa^1,0,-\kappa^3),\\ \kappa C(3) &= (0,2\kappa^1,\kappa^2)\end{aligned}$$

بنابراین هر ناوردا در

$$\begin{bmatrix} -\kappa^2 & -2\kappa^3 & 0\\ \kappa^1 & 0 & -\kappa^3\\ 0 & 2\kappa^1 & \kappa^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(\kappa)\\ I_2(\kappa)\\ I_3(\kappa)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

صدق می‌کند. در اینجا $\rho = 2$ است بنابراین یک ناوردا وجود دارد:

$$I = (\kappa^2)^2 - 4\kappa^1\kappa^3 \qquad (۳۲.۱۰)$$

(محاسباتی که به (۳۲.۱۰) منجر می‌شود به عنوان تمرین واگذار شده است.) I را نمی‌توان تغییر داد مگر با مقیاس دهی مجدد X که با ضرب κ در یک ثابت غیرصفر معادل است. از آنجاییکه I بر حسب متغیرهای κ از مرتبه دو است مقیاس دهی مجدد، تنها I را در یک مقدار ثابت مثبت ضرب می‌کند. بنابراین بایستی سه موضوع مسئله را در نظر بگیریم یعنی سه حالت $I > 0$ ، $I < 0$ و $I = 0$. بردار κ توسط ماتریسهای $A(j,\varepsilon)$ بصورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\begin{aligned}\kappa A(1,\varepsilon) &= (\kappa^1-\varepsilon\kappa^2+\varepsilon^2\kappa^3,\kappa^2-2\varepsilon\kappa^3,\kappa^3), && (۳۳.۱۰)\\ \kappa A(2,\varepsilon) &= (e^{\varepsilon}\kappa^1,\kappa^2,e^{-\varepsilon}\kappa^3), && (۳۴.۱۰)\\ \kappa A(3,\varepsilon) &= (\kappa^1,2\varepsilon\kappa^1+\kappa^2,\varepsilon^2\kappa^1+\varepsilon\kappa^2+\kappa^3). && (۳۵.۱۰)\end{aligned}$$

فرض کنید $I > 0$ باشد. در اینصورت رابطه (۳۳.۱۰) می تواند جهت جایگزین کردن صفر به جای κ^1 استفاده شود.(اگر $\kappa^3 \neq 0$ باشد $\varepsilon = (\kappa^2 + \sqrt{I})/(2\kappa^3)$ و در غیر اینصورت یعنی اگر $\kappa^3 = 0$ باشد κ^1/κ^2 را اختیار کنید. توجه داریم که اگر $I > 0$ باشد κ^2 و κ^3 هر دو نمی‌توانند صفر باشند.) سپس رابطه (۳۵.۱۰) را بازای $\varepsilon = -\kappa^3/\kappa^2$ بکار می‌گیریم تا صفر را جایگزین κ^3 نماییم.(در صورتیکه صفر نباشد) در آخر مولد با قرار دادن $\kappa^2 = 1$ مجدداً مقیاس دهی می‌شود.بنابراین هر مولد با $I > 0$ با X_2 هم ارز است.

اکنون فرض کنید $I < 0$ باشد که این نشان می‌دهد $\kappa^1\kappa^3 > 0$. نخست با توجه به رابطه (۳۳.۱۰) و انتخاب $\varepsilon = \kappa^2/(2\kappa^3)$، قرار می‌دهیم $\kappa^2 = 0$. سپس فرمول (۳۴.۱۰) را بازای $\varepsilon = \frac{1}{2}\ln(\kappa^3/\kappa^1)$ برای مساوی قرار دادن κ^1 و κ^3 بکار می‌گیریم. پس از مقیاس دهی مجدد، درمی‌یابیم که هر مولد با $I < 0$ با $X_1 + X_3$ هم ارز است.

اگر $I = 0$ باشد آنگاه هر سه مختص κ غیرصفرند یا κ^2 و یکی از مختص‌های κ^1 و κ^3 صفرند. می‌توان حالت اول را به حالت دوم با استفاده از (۳۵.۱۰) بازای $\varepsilon = -\kappa^2/(2\kappa^1)$ به منظور جایگزینی صفر بجای κ^2 و κ^3 کاهش داد. علاوه براین:

$$(0,0,\kappa^3)A(1,1)A(3,1) = (\kappa^3,-2\kappa^3,\kappa^3) = (\kappa^3,0,0)$$

می توان مختصهای دوم و سوم از هر κ را با صفر جایگزین کرد. با مقیاس دهی مجدد نتیجه می‌گیریم کلیه مولدهایی که برای آنها $I = 0$ است با X_1 هم ارزند. بنابراین $\{X_1, X_2, X_1 + X_3\}$ یک دستگاه بهینه برای مولدهای $\mathfrak{sl}(2)$ است.

در دو مثال اخیر تعداد مولدها در دستگاه بهینه جبرلی با بعد (R) منطبق است. این موضوع همیشه رخ نمی‌دهد. عموماً تعداد مولدهای غیر هم ارز فراتر از R می‌باشد.

بخش ۳.۱۰ دستگاههای بهینه جوابهای ناوردا

با دستیابی به یک دستگاه بهینه از مولدها می‌توان روش ارائه شده در بخش ۱.۹ را برای محاسبه جوابهای ناوردای متناظر بکار برد. هر مجموعه کامل از این جوابها که دیگر جوابهای ناوردا از آن مشتق می‌شود، **یک دستگاه بهینه جوابهای ناوردا** گفته می شود. ممکن است با دو حالت مواجه شویم. نخست اینکه یک مولد در دستگاه بهینه ممکن است به هیچ جواب ناوردایی منجر نشود.

۳.۱۰ مثال. می‌خواهیم یک مجموعه بهینه از جوابهای ناوردای

$$y'' = y^{-3} \qquad (۳۶.۱۰)$$

که تقارنهای نقطه‌ای لی آن توسط

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x + \frac{1}{2}y\partial_y, \qquad X_3 = x^2\partial_x + xy\partial_y \qquad (۳۷.۱۰)$$

تولید شده را بسازیم. جبرلی متناظر $\mathfrak{sl}(2)$ است.(با ثابتهای ساختاری معمول). مثال (۲.۱۰) نشان می‌دهد که $\{X_1, X_2, X_1 + X_3\}$ یک دستگاه بهینه از مولدهاست. هیچ جوابی تحت گروه تولید شده توسط X_1 ناوردا نیست زیرا کلیه خمهای ناوردا بصورت

$$y = c$$

هستند. همچنین در مورد گروه تولید شده توسط X_2 این موضوع صادق است زیرا خمهای ناوردا بصورت

$$y = c\sqrt{x}$$

می‌باشند. فقط زمانیکه $c^4 = -4$ است، چنین خمی یک جواب است. بنابراین جوابهای حقیقی مقدار وجود ندارد. گروه تولید شده توسط $X_1 + X_3$ دارای دو جواب ناوردا به صورت زیر است:

$$y = \pm\sqrt{1 + x^2} \qquad (۳۸.۱۰)$$

عمل تقارنهای باقیمانده روی این جوابها، جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی را نتیجه می‌دهد که عبارتست از:

$$y = \pm\sqrt{c_1 + (x + c_2)^2/c_1}, \qquad c_1 > 0 \qquad (۳۹.۱۰)$$

یادآوری می‌کنیم که X_1 و X_2 نماینده‌های دسته‌های مولد با خاصیت به ترتیب $I = 0$ و $I > 0$ می‌باشند. آیا ممکن است جوابهای ناوردای متناظر با دیگر مولدها در این دسته‌ها موجود باشند؟ در واقع چنین جوابهایی وجود ندارند. (نتیجه این موضوع به عنوان تمرین واگذار شده).

حالت ممکن دوم این است که ممکن است معادلات کاهش یافته‌ای که یک یا چند جواب ناوردا را مشخص می‌کنند حل تحلیلی بسیار دشوار داشته باشند. حتی اگر نتوانیم به یک دستگاه بهینه دست یابیم هنوز قادر خواهیم بود برخی جوابهای ناوردا را بیابیم.

۴.۱۰ مثال. معادله با مشتقات جزئی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u_t = u_{xx} - \frac{2}{x^2}u \qquad (۴۰.۱۰)$$

زیرجبر متناهی‌البعد $\mathcal{L}_0$ دارای پایه‌ای بصورت زیر است:

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \frac{1}{2}x\partial_x + t\partial_t - \frac{1}{4}u\partial_u, \qquad (۴۱.۱۰)$$
$$X_3 = xt\partial_x + t^2\partial_t(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t)u\partial_u, \qquad X_4 = u\partial_u$$

که تنها جابجاگرهای غیرصفر آن عبارتند از:

$$[X_1, X_2] = X_1, \qquad [X_1, X_3] = 2X_2, \qquad [X_2, X_3] = X_3,$$

بنابراین سه مولد اول در این پایه زیرجبر $\mathfrak{sl}(2)$ را می‌سازند. (که زیرجبر مشتق شده از $\mathcal{L}_0$ است) و X_4 با کلیه مولدها جابجا می‌شود. دو ناوردای $I(\kappa)$ به ترتیب زیر موجودند:

$$I^1 = (\kappa^2)^2 - 4\kappa^1\kappa^3, \qquad I^2 = \kappa^4$$

مولدها دقیقاً همانند مثال (۲.۱۰) دسته‌بندی می‌شوند اما هر مولد دارای مضربی از X_4 است که با آن جمع شده است. ما بایستی این امکان را که سه مختص اول κ همگی صفر باشند در نظر بگیریم. با مقیاس دهی مجدد، بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود قرار می‌دهیم $\kappa^4 = 1$. بنابراین دستگاه مولدهای زیر بهینه است:

$$X_1 + \mu X_4, \qquad X_2 + \mu X_4, \qquad X_1 + X_3 + \mu X_4, \qquad X_4$$

(در اینجا μ یک ثابت دلخواه است.) برای یافتن یک دستگاه بهینه از جوابها هر کدام از این مولدها را بترتیب بکار می‌گیریم. جوابهایی که تحت $X_1 + \mu X_4$ ناوردا هستند بصورت:

$$u = e^{\mu t}F(x) \qquad (۴۲.۱۰)$$

می باشند که

$$F'' - (\mu + 2x^{-2})F = 0$$

جواب عمومی این معادله دیفرانسیل معمولی عبارتست از:

$$F(x) = \begin{cases} c_1(\sqrt{\mu} - x^{-1})e^{\sqrt{\mu}x} + c_2(\sqrt{\mu} + x^{-1})e^{-\sqrt{\mu}x}, & \mu \neq 0 \\ c_1x^2 + c_2x^{-1}, & \mu = 0 \end{cases} \qquad (۴۳.۱۰)$$

و بنابراین جواب ناوردای عمومی با جایگذاری (۴۳.۱۰) در (۴۲.۱۰) حاصل می‌شود. به طور مشابه عمومی‌ترین جواب که تحت $X_2 + \mu X_4$ ناورداست عبارتست از

$$u = t^{\mu - 1/4}F(r), \qquad r = xt^{-1/2} \qquad (۴۴.۱۰)$$

که

$$F'' + \frac{1}{2}rF' + (\frac{1}{4} - \mu - 2r^{-2})F = 0 \qquad (۴۵.۱۰)$$

جواب (۴۵.۱۰) می تواند بر حسب توابع هم-جریان ابرهندسی بیان شود که قدری شلوغ است. شکل ساده آن بازای برخی مقادیر μ امکانپذیر است. بطور مثال وقتی $\mu = 1/4$ است، یک جواب به شکل (۴۴.۱۰) عبارتست از:

$$u = x^{-1}t^{1/2}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

جوابهایی که تحت $X_1 + X_3 + \mu X_4$ ناوردا هستند بصورت

$$u = (1+t^2)^{-1/4}\exp\Big\{\mu\tan^{-1}t - \frac{x^2 t}{4(1+t^2)}\Big\}F(r), \qquad r = x(1+t^2)^{-1/2} \qquad (۴۶.۱۰)$$

می باشند که

$$F'' + (\frac{1}{4}r^2 - \mu - 2r^{-2})F = 0 \qquad (۴۷.۱۰)$$

این جوابها همچنین ترکیبی از توابع هم-جریان ابرهندسی و توابع اولیه می‌باشند. در آخر، گروه تولید شده توسط X_4 تنها جواب بدیهی $u = 0$ را ناوردا باقی می‌گذارد.

پس از اینکه یک دستگاه بهینه از جوابهای ناوردا یافت شد، اغلب ساختن هر کلاس از جوابهای ناوردا همانطور که در بخش ۲.۹ توصیف شد، کار آسانی است. اگر چه بیشتر معادلات با مشتقات جزئی دارای جوابهای بسیاری هستند که تحت هیچ تقارن نقطه‌ای ناوردا نیستند، جوابهای ناوردا عموماً رفتار محدود کننده‌ای را توصیف می‌کنند(بخصوص برای جوابهای معادلات با مشتقات جزئی ی پارابولیک). به طور مشابه جوابهای (مقیاس-ناوردا) بطور خاصی در این رابطه قابل استفاده‌اند.

نکات و مطالعه بیشتر

اگر بدنبال جوابهایی که تحت یک گروه لی (زیرگروه لی) $N-1$ پارامتری از تقارنها ناوردا هستند باشیم، معادلات با مشتقات جزئی با $N \geq 3$ متغیر مستقل می توانند به معادلات دیفرانسیل معمولی کاهش یابند. این امکان وجود دارد که یک مجموعه بهینه از چنین کاهشهایی بیابیم که بر پایه نتایج بدست آمده برای گروههای تک پارامتری است.(برای مطالعه جزئیات بیشتر اوسیانیکوف (۱۹۸۲) را ببینید.)

تمرین‌ها

۱.۱۰. نشان دهید (۳۲.۱۰) تنها ناوردای $\mathfrak{sl}(2)$ است.

۲.۱۰. یک دستگاه بهینه از مولدها را برای $\mathfrak{so}(3)$ در پایه‌ای که ثابتهای ساختاری غیرصفر آن مطابق رابطه (۳۳.۵) هستند محاسبه کنید. آیا ناوردای $I(\kappa)$ ای وجود دارد؟

۳.۱۰. مسئله هم ارزی برای تقارنهایی که توسط یک زیرجبر شش بعدی از معادله گرما تولید شده‌اند را در نظر بگیرید. (بدون احتساب مولدهایی که بصورت $X = U(x,t)\partial_u$ هستند.) این مولدها در انتهای کتاب در بخش تمرینات ۳.۸ یافت می‌شوند. دو ناوردای مستقل تابعی را محاسبه و مولدهای دستگاه بهینه را بدست آورید.

۴.۱۰. نشان دهید κ^i ناورداست اگر $X_i \notin [\mathcal{L},\mathcal{L}]$. آیا این شرط برای اطمینان از اینکه κ^i ناورداست لازم است؟

۵.۱۰. نشان دهید معادله دیفرانسیل معمولی مطرح شده در مثال (۳.۱۰) دارای هیچ جواب حقیقی مقداری که تحت یک گروه که مولد آن دارای خاصیت $I > 0$ است ناوردا باشد نیست.(در تذکر مثال ۲.۱۰)

۶.۱۰. یک دستگاه بهینه از مولدها برای مسئله هم-بردارهای آزاد توصیف شده در مثال ۴.۹ محاسبه کنید. نتایج خود را برای دستیابی به یک دستگاه بهینه از جوابهای ناوردا بکار گیرید. (توجه: این دستگاه بسیار بزرگ است اما بیشتر جوابها قابل دستیابی است.)

فصل ۱۱

تقارنهای گسسته

محلی در دور دست هست، ماورای اشعه خورشیدی، که در آنجا برخلاف معمول، خطوط راست موازی یکدیگر را قطع می‌کنند.

(ج.ک چسترتون: ریاضیات عالی)

بخش ۱.۱۱ برخی کاربردهای تقارنهای گسسته

در فصل اول، از تقارنهای گسسته یک مثلث برای معرفی تقارنهای لی به خواننده استفاده نمودیم. شایسته است که فصل انتهایی به معرفی روشی که از تقارنهای لی برای معلوم کردن تقارنهای گسسته یک معادله دیفرانسیل مفروض استفاده می‌کند بپردازد. در اینجا دلایلی موجودند که اهمیت مشخص نمودن تقارنهای گسسته را بیان می‌کنند:

الف) تقارنهای نقطه‌ای لی برای افزایش اثر بخشی روشهای محاسباتی بکار گرفته می‌شوند. اگر یک مسئله کرانی مقدار مساله با مقدار اولیه متقارن و دارای جواب شناخته شده منحصر بفرد باشد، محاسبه می‌تواند روی دامنه کاهش یافته انجام گیرد. متناوباً، از یک روش طیفی با توابع پایه‌ای می‌توان استفاده نمود که تحت تقارن ناوردا باشند. همچنین لازم به ذکر است که وجود تقارنهای گسسته دقت محاسبات عددی را بهبود می‌بخشد.

ب) بسیاری از مساله با مقدار اولیه های غیر خطی دارای جوابهای چندگانه می‌باشند و لازم است که تعیین نماییم کی و چگونه هنگامیکه پارامترها تغییر می‌کنند، دستگاه رفتارش را تغییر می‌دهد. به دلیل اینکه معمولاً رفتار دستگاههای غیر متقارن «کلی» کاملاً متفاوت از دستگاههایی که باتقارن هستند می‌باشد، باید تقارنهای گسسته در نظر گرفته شوند. مشخص نمودن تمامی تقارن‌ها در یک مسئله برای درک رفتار آن بطور دقیق حائز اهمیت می‌باشد.

پ) همانند تقارنهای لی، تقارنهای گسسته می‌توانند برای تولید جوابهای جدید از جوابهای قبلی بکار گرفته شوند. همچنین تقارنهای گسسته می‌توانند برای ساده سازی یک دستگاه اپتیمال از مولدها بکار برده شوند. اگر دو مولد در دستگاه اپتیمال توسط یک تقارن گسسته مرتبط باشند تنها یکی از آنها نیاز است، دیگری را می‌توان حذف نمود.

ت) تقارنهای گسسته شامل پیوستگی بار الکتریکی، تغییر توازن، واژگونی زمان در نظریه میدان کوانتوم در مرکزیت قرار دارند. (تقارنهای گسسته دیگر در فیزیک حائز اهمیت می‌باشند ولی در اینجا به شرح آنها نمی‌پردازیم.)

ث) باید توجهمان را به تقارنهای نقطه‌ای گسسته معطوف نماییم، اگرچه انواع دیگر تقارنهای گسسته نیز مفید می‌باشند. اتفاقاً تبدیل لژاندر مثال خوبی از تبدیل برخوردی گسسته می‌باشد. چنین تبدیلاتی بعنوان تقارنهای معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌گردند، حتی اگر تقارنهای برخوردی لی موجود نباشند. تبدیلات بکلاند ، تقارنهای گسسته غیر نقطه‌ای هستند. آنها کاربر را قادر می‌سازند تا جوابهای معادلات با مشتقات جزئی ی انتگرال پذیر غیر خطی را رتبه بندی نماید.

اغلب حل شرط تقارن برای تقارنهای گسسته‌ای به‌وسیله روش مستقیم بسیار سخت است. این بدان دلیل است که معادلات مبین نوعاً تشکیل یک دستگاه غیرخطی از مرتبه بالا زوج شده می‌دهند. گاهی اوقات ساده‌نمودن این دستگاه با کمک جبر کامپیوتری امکانپذیر است. یک حدس علمی ممکن است به برخی از تقارنهای گسسته منجر گردد؛ اگرچه ضمانتی برای بدست آوردن تمامی تقارنهای گسسته وجود ندارد.

تقریباً تمامی مسائلی که از کاربردها بدست می‌آیند، حداقل یک گروه لی یک پارامتری از تقارنهای نقطه‌ای دارند. اگر یک معادله دیفرانسیل مفروض دارای یک جبرلی متناهی البعدی شناخته شده از مولدهای تقارنی باشد، روش مستقیمی که در بالا شرح داده شد لازم نمی‌باشد. تقارنهای لی و گسسته با روشی که برای استخراج تقارنهای گسسته بطور دستگاهی بکار برده می‌شوند بطور متقابل اثر می‌کنند. (ایده‌های مشابه نیز برای جبرهای لی نامتناهی البعدی عمل می‌کنند، اما به توجه بیشتری نیاز است و نباید به توضیح بیشتر پیرامون جبرها بپردازیم.)

بخش ۲.۱۱ چگونگی بدست آوردن تقارنهای گسسته از تقارنهای لی

از اینجا به بعد از نماد گذاری استفاده شده در بخش ۱.۱۰ استفاده می‌نماییم که پیشنهاد می‌گردد خواننده ابتدا به مطالعه آن بپردازد. فرض کنید.

$$\Gamma : z \longmapsto \hat{z} \tag{۱.۱۱}$$

تقارن دلخواه یک معادله دیفرانسیل مفروض باشد که z نمایش دهنده M متغیر وابسته و N متغیر مستقل است. فرض نمایید که جبر لی $\mathcal{L}$ از مولدهای تقارن نقطه‌ای، R بعدی باشد و مولدهای

$$X_i = \zeta_i^s(z)\partial_{z^s}, \qquad i = 1, \cdots, R, \tag{۲.۱۱}$$

تشکیل پایه برای $\mathcal{L}$ دهند. در بخش ۱.۱۰ نشان دادیم گه اگر $X \in \mathcal{L}$ باشد، آنگاه

$$\hat{X} = \Gamma X \Gamma^{-1},$$

یک گروه لی یک پارامتری از تقارنهای نقطه‌ای معادله دیفرانسیل را تولید می‌کند. جبر لی $\mathcal{L}$ مجموعه تمامی مولدهای تقارنهای نقطه‌ای لی می‌باشد. در نتیجه $\hat{X} \in \mathcal{L}$ است. بویژه، هر مولد پایه‌ای

$$\hat{X}_i = \Gamma X_i \Gamma^{-1} = \zeta_i^s(\hat{z})\partial_{\hat{z}^s} \tag{۳.۱۱}$$

در $\mathcal{L}$ می‌باشد. بعلاوه، مجموعه مولدهای $\left\{\hat{X}_1, \cdots, \hat{X}_R\right\}$ یک پایه برای $\mathcal{L}$ می‌باشد، زیرا در واقع با تعویض $\hat{z}$ با z، یک پایه اصلی می‌شود. بنابراین هر X_i را می‌توان بصورت ترکیب خطی از $\hat{X}_i$ ها بصورت ذیل

نوشت:

$$X_i = b_i^l \hat{X}_l. \qquad (۴.۱۱)$$

ضرایب b_i^l ثابت‌هایی می‌باشند که توسط تقارن Γ و پایه $\{X_1, \cdots, X_R\}$ مشخص می‌شوند. در نظر گرفتن این ضرایب بعنوان اعضایی از ماتریس $R \times R$

$$B = (b_i^l) \qquad (۵.۱۱)$$

سودمند می‌باشد.

معادلات خطی (۴.۱۱) یک تبدیل مابین دو پایه می‌سازد. (این پایه‌ها را X_i ها و $\hat{X}_i$ ها می‌نامیم). بنابر این ماتریس B نامنفرد می‌باشد.

از رابطه (۴.۱۱) برای ساختن تقارنهای گسسته بصورت ذیل استفاده می‌نمائیم. ابتدا رابطه (۴.۱۱) را برای تک تک متغیرهای $\hat{z}^s$ بکار ببرید، تا

$$\zeta_i^r(z)\frac{\partial \hat{z}^s}{\partial z^r} = b_i^l \hat{X}_l \hat{z}^s = b_i^l \zeta_l^s(\hat{z}), \qquad 1 \le i \le R, \qquad 1 \le s \le M+N \qquad (۶.۱۱)$$

بدست آید.

این دستگاه $(M+N)R$ معادله دیفرانسیل جزئی را می‌توان توسط روش مشخصه که $\hat{z}$ را بر حسب z، ثابت‌های نامشخص b_i^l و تعدادی توابع یا ثابتهای دلخواه انتگرال گیری بدست می‌آورد حل نمود. بنابر روش ساخت، هر تقارن (گسسته یا دیگر) برای ماتریسی مانند B در رابطه (۶.۱۱) صدق می‌نماید، اگرچه (۶.۱۱) ممکن است شامل جوابهایی باشد که متقارن نباشند. با این وجود، معمولاً برای ما راحت‌تر است که تمامی تقارن‌هارا بوسیله جانشینی جواب عمومی (۶.۱۱) در شرط تقارن، یکی بگیریم.

چون اکنون تقارنهای نقطه‌ای لی را می‌شناسیم، می‌توانیم آنها را در مرحله مناسبی از محاسبات کنار بگذاریم (یعنی از آنها فاکتورگیری نماییم). لذا لیستی از تقارنهای نقطه‌ای گسسته ناهم‌ارز که نمی‌توانند به دیگری توسط تقارنهای نقطه‌ای لی نگاشته شوند باقی خواهند ماند.

۱.۱۱ مثال. برای شرح روش به بیان ساده، تقارنهای گسسته معادله دیفرانسیل معمولی

$$y'' = \tan y', \qquad (۷.۱۱)$$

که جبر لی مولدهای تقارنی نقطه‌ای آن دارای پایه

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_y \qquad (۸.۱۱)$$

می‌باشند، را مشخص می نمائیم.

در اینجا $z = (x,y)$ می‌باشد و لذا(۶.۱۱) بصورت

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_x & \hat{y}_x \\ \hat{x}_y & \hat{y}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

می‌باشد. جواب عمومی این دستگاه

$$(\hat{x},\hat{y}) = (b_1^1 x + b_2^1 y + c_1, b_1^2 x + b_2^2 y + c_2) \qquad (۹.۱۱)$$

می‌باشد.

در این مرحله، بهتر است رابطه (۹.۱۱) را بوسیله فاکتورگیری از تقارنهای لی ساده نماییم. انتقالهای تولید شده توسط $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ ثابتهای دلخواهی را به ترتیب به $\hat{x}$ و $\hat{y}$ می‌افزایند. بنابر این لازم است تنها به مطالعه جوابهای

$$(\hat{x},\hat{y}) = (b_1^1 x + b_2^1 y, b_1^2 x + b_2^2 y), \qquad (۱۰.۱۱)$$

بپردازیم، زیرا جوابهای باقیمانده توسط این جوابها با بکارگیری تقارنهای لی بدست می‌آیند. هر تقارن گسسته برای ماتریسی مانند B بفرم (۱۰.۱۱) می‌باشد (باتقریب هم ارزی تحت انتقالها). برای یافتن ماتریس‌های متناظر با تقارنهای گسسته، رابطه (۱۰.۱۱) را در شرط تقارن جانشین نمایید:

$$y'' = \tan\, y' \quad \text{هنگامیکه} \quad \hat{y}'' = \tan\, \hat{y}'. \qquad (۱۱.۱۱)$$

از فرمول امتداددهی بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{y}' &= \frac{b_1^2 + b_2^2 y'}{b_1^1 + b_2^1 y'}, \\ \hat{y}'' &= \frac{J y''}{(b_1^1 + b_2^1 y')^3}, \qquad J \equiv \det(B) \neq 0 \quad \text{که} \end{aligned}$$

بنابراین شرط تقارن بصورت

$$\frac{J\ \tan\ y'}{(b_1^1 + b_2^1 y')^3} = \tan\left(\frac{b_1^2 + b_2^2 y'}{b_1^1 + b_2^1 y'}\right) \qquad (۱۲.۱۱)$$

می‌باشد. با دیفرانسیل‌گیری از رابطه (۱۲.۱۱) نسبت به y' بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{J(1+\tan^2 y')}{(b_1^1 + b_2^1 y')^3} - \frac{3b_2^1 J\ \tan\ y'}{(b_1^1 + b_2^1 y')^4} &= \frac{J}{(b_1^1 + b_2^1 y')^2}\left\{1 + \tan^2\left(\frac{b_1^2 + b_2^2 y'}{b_1^1 + b_2^1 y'}\right)\right\} \\ &= \frac{J}{(b_1^1 + b_2^1 y')^2}\left\{1 + \frac{J^2 \tan^2 y'}{(b_1^1 + b_2^1 y')^6}\right\}. \qquad (۱۳.۱۱) \end{aligned}$$

اگر b_2^1 ناصفر باشد، رابطه (۱۳.۱۱) می‌تواند یک معادله جبری برای $\tan\ y'$ بر حسب y' باشد. برای tan که تابعی غیر جبری است این مطلب نمی‌تواند بدینصورت باشد. بنابراین $b_2^1 = 0$ ، منجر می‌شود که $b_1^1 = 1$ و $b_2^2 = \alpha \in \{-1, 1\}$ باشد.
از اینرو (۱۲.۱۱) به

$$\alpha\ \tan\ y' = \tan\ (\alpha y' + b_1^2)$$

کاهش می یابد. لذا تقارنهای گسسته ناهم ارز عبارتند از:

$$(\hat{x},\hat{y}) = (x, \alpha y + q\pi x), \quad \alpha \in \{-1, 1\}, \quad q \in \mathbb{Z}. \qquad (۱۴.۱۱)$$

این مثال روش پایه‌ای را شرح می‌دهد. اگر $\mathcal{L}$ با بعد کم باشد، محاسبات معمولاً بطور منظم و راحت انجام می‌گیرند. (برای اینکه محاسبات را تا حد امکان ساده نمائیم، با مختصاتی که برای یک مولد

کانونی می‌باشند،کار نمایید). تعداد ضرایب نامعلوم b_i^l به سرعت بوسیله R افزایش می‌یابند؛ اگر $\mathcal{L}$ آبلی باشد و $R > 2$، از جبر کامپیوتری باید استفاده نمود. اگر $\mathcal{L}$ غیر آبلی باشد، اگرچه، فاکتورگیری از تقارنهای لی پیش از حل معادلات (۶.۱۱) امکانپذیر است. نوعاً، این ، تعداد ضرایب ناصفر در B را از R^2 به R کاهش می‌دهد. آنگاه یافتن تقارنهای گسسته معادلات دیفرانسیل کهR در آنها کوچک نباشد، با کمی تلاش بیشتر از آنچه برای معین نمودن تقارنهای لی لازم است امکانپذیر می‌گردد. اساساً، B توسط روش مشابهی که در $\S2.10$ برای طبقه بندی مولدهای گروههای تقارنی یک پارامتری بکار گرفته‌شد، ساده می‌گردد. اکنون این مطلب را با جزئیات برای مواجه شدن با معادلات دیفرانسیلی که در آنها $R > 2$ می‌باشد بررسی می‌کنیم.

بخش ۳.۱۱　طبقه بندی تقارنهای گسسته

اگر$\mathcal{L}$ غیر آبلی باشد، آنگاه حداقل یکی از جابجاگرهای:

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k \qquad (۱۵.۱۱)$$

ناصفر می‌باشند. بنابراین مولدها به کلاسهای هم ارزی (با بیش از یک عضو) تعلق می‌گیرند که آنها را برای ساده نمودن B باید بکار ببریم. یادآوری می‌شود که X_i با

$$\tilde{X}_i = (A(j,\varepsilon))_i^p X_p,$$

تحت تقارنهای نقطه‌ای تولید شده توسط X_j هم‌ارز می‌باشد. می‌توانیم رابطه (۴.۱۱) را بصورت

$$\tilde{X}_i = \tilde{b}_i^l \hat{X}_l, \qquad (۱۶.۱۱)$$

که

$$\tilde{b}_i^l = (A(j,\varepsilon))_i^p b_p^l$$

می‌باشد، بازنویسی نمائیم. بنابراین (۱۶.۱۱) با

$$X_i = \tilde{b}_i^l \hat{X}_l \qquad (۱۷.۱۱)$$

هم ارز می‌باشد.

در نتیجه، جوابهای $\tilde{z}$ از رابطه (۶.۱۱) با جوابهای

$$\zeta_i^r(z)\frac{\partial \hat{z}^s}{\partial z^r} = \tilde{b}_i^l \zeta_l^s(\tilde{z}) \qquad (۱۸.۱۱)$$

بوسیله تقارنها در گروه یک پارامتری تولید شده بوسیله X_j مرتبط می‌گردد. بعبارت دیگر، B با خانواده ماتریسهای $A(j,\varepsilon)B$ هم ارز می‌باشد. برای فاکتور گیری تقارنهای لی تولید شده بوسیله X_j، رابطه (۱۸.۱۱) را فقط برای یک ماتریس (ساده) در این خانواده حل می‌نماییم. اغلب، یک یا چند عضو B را می‌توانیم با صفرجایگزین نماییم .

به طور مشابه، مولد $\hat{X}_l$ با $(A(j,\varepsilon))_l^p \hat{X}_p$ تحت تقارنهای لی تولید شده توسط $\hat{X}_j$ هم ارز می‌باشد. لذا، با استدلال مشابه آنچه در بالا ذکر گردید، B هم ارز با $BA(j,\varepsilon)$ می‌باشد. از این پس از عبارت تبدیل هم ارزی برای بیان جانشینی B توسط یکی از این دو یعنی $BA(j,\varepsilon)$ یا$A(j,\varepsilon)B$ استفاده می‌کنیم.

برای جبرهای لی آبلی، اعضای B نامرتبط می‌باشند. چنین حکمی برای جبرهای لی غیر آبلی برقرار نمی‌باشد و می‌توانیم بین اعضا یک رابطه بدست آوریم. این روابط به همراه تبدیلات هم ارزی معمولاً ما را قادر به کاهش B به فرمهای ساده‌تر می کند.
مولدهای تقارنی $\hat{X}_i$ در روابط جابجایی مشابه، مانند X_i صدق می‌کنند، زیرا هر$\hat{X}_i$ صرفاً ازX_i متناظر با جایگذاری z با $\hat{z}$ بدست می‌آید. برای مثال، مولدهای

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x$$

دارای جابجاگر

$$[X_1, X_2] = [\partial_x, x\partial_x] = \partial_x = X_1$$

می‌باشند. اگر$\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ به طور مشابه تعریف گردند، با جانشینی $\hat{x}$ بوسیله x، آنگاه

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = [\partial_{\hat{x}}, \hat{x}\partial_{\hat{x}}] = \partial_{\hat{x}} = \hat{X}_1$$

می‌باشد. لذا ثابتهای ساختاری بوسیله تغییر پایه، تغییر نمی‌کنند. در حالت کلی، حالت مشابه صحیح است؛ اگر مولدهای X_i در رابطه (۱۵.۱۱) صدق نمایند، آنگاه

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = c^k_{ij}\hat{X}_k \tag{۱۹.۱۱}$$

می‌باشد.(باهمان ثابت‌های ساختاری). اکنون $X_i = b^l_i \hat{X}_l$ را در (۱۵.۱۱) جانشین می‌نمائیم تا بدست آوریم:

$$b^l_i b^m_j [\hat{X}_l, \hat{X}_m] = c^k_{ij} b^n_k \hat{X}_n.$$

سپس رابطه (۱۹.۱۱) به اتحاد مفید

$$c^n_{lm} b^l_i b^m_j = c^k_{ij} b^n_k \tag{۲۰.۱۱}$$

منتهی می‌گردد.
این معادلات محدودیتهای غیر خطی روی اعضای B هستند. محدودیت‌هایی با $i \geq j$ لزوماً مشابه آنهایی می‌باشند که $j < i$ است (اثبات این مطلب را بعنوان تمرین باقی می‌گذاریم). بنابراین توجهمان را به محدودیتهای (۲۰.۱۱) برای آنهایی که $i < j$ است محدود می‌نماییم. محدودیتها توسط تبدیل هم ارزی دلخواه تاثیر نمی پذیرند. (باردیگر، برهان را بعنوان تمرین باقی می‌گذاریم). بعلاوه،مرتبه ای که در ماتریس ها $A(j,\varepsilon)$ استفاده شده، تاثیری در طبقه بندی ماتریس B ندارد. هر رابطه ترتیبی فرم نهایی مشابهی را می‌دهد، مشروط به اینکه پارامترهای ε مناسب انتخاب شوند. بنابراین ممکن است از محدودیتها و تبدیلات هم‌ارزی در هر مرتبه‌ای که مناسب‌تر است استفاده نماییم.

۲.۱۱ مثال. یک جبر لی غیرآبلی دو بعدی $\mathfrak{a}(1)$ با پایه $\{X_1, X_2\}$ در نظر بگیرید به قسمی که $[X_1, X_2] = X_1$ باشد. تنها ثابتهای ساختاری ناصفر

$$c^1_{12} = 1, \qquad c^1_{21} = -1 \tag{۲۱.۱۱}$$

می‌باشند. محدودیتهای (۲۰.۱۱) با$(i < j)$

$$\begin{aligned} b^1_1 b^2_2 - b^2_1 b^1_2 = b^1_1, &\qquad (i,j,n) = (1,2,1), \\ 0 = b^2_1, &\qquad (i,j,n) = (1,2,2), \end{aligned}$$

می‌باشند و بنابراین (بخاطر داشته باشید که B نامنفرد است)

$$B = \begin{bmatrix} b_1^1 & 0 \\ b_2^1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b_1^1 \neq 0 \qquad (۲۲.۱۱)$$

می‌باشد.
اکنون سعی می‌نماییم تا B را توسط استفاده از تبدیلات هم ارزی ساده‌تر نماییم. ماتریسهای $A(j,\varepsilon) = \exp\{\varepsilon C(j)\}$ بصورت

$$A(1,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \qquad A(2,\varepsilon) = \begin{bmatrix} e^{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۳.۱۱)$$

می‌باشند. از پس ضرب B بوسیله $A(1,\varepsilon)$ بدست می‌آوریم:

$$BA(1,\varepsilon) = \begin{bmatrix} b_1^1 & 0 \\ b_2^1 - \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین با انتخاب $\varepsilon = b_2^1$ می‌توانیم b_2^1 را با صفر تعویض نماییم. آنگاه

$$BA(2,\varepsilon) = \begin{bmatrix} e^{\varepsilon} b_1^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

می‌باشد که بوسیله قرار دادن $\varepsilon = -\ln|b_1^1|$ آنرا ساده نماییم. این مطلب معادل است با اینکه b_1^1 را با ± 1 عوض نماییم. ساده‌تر نمودن بیشتر امکانپذیر نمی‌باشد، لذا با دو ماتریس غیرهم ارز روبرو هستیم:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{که} \quad \alpha \in \{-1, 1\}. \qquad (۲۴.۱۱)$$

توجه: دقیقاً نتیجه مشابهی بوسیله پس ضرب رابطه (۲۲.۱۱) توسط $A(j,\varepsilon)$ بدست می‌آید، اگرچه لازم است انتخاب‌های متفاوتی از ε داشته باشیم.

۳.۱۱ مثال. در این مثال، ماتریسهایغیرهم ارز B متناظر با $\mathfrak{sl}(2)$ را یکی در نظر می‌گیریم. باید با پایه‌های معمول که تنها ثابت‌های ساختاری ناصفرشان

$$c_{12}^1 = -c_{21}^1 = 1, \quad c_{13}^2 = -c_{31}^2 = 2, \quad c_{23}^2 = -c_{32}^3 = 1 \qquad (۲۵.۱۱)$$

می‌باشند کار نماییم.
بنابر رابطه (۳.۱۰) داریم:

$$A(1,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon^2 & -2\varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad A(2,\varepsilon) = \begin{bmatrix} e^{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\varepsilon} \end{bmatrix}, \qquad (۲۶.۱۱)$$
$$A(3,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 2\varepsilon & \varepsilon^2 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

محدودیتهای (۱۱.۲۰) بسیار پیچیده هستند، (زیرا $\mathfrak{sl}(2)$ یک جبر لی ساده می‌باشد). برای مثال، محدودیتها با $n=1$ عبارتند از:

$$b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1 = b_1^1, \qquad (۲۷.۱۱)$$
$$b_1^1 b_3^2 - b_1^2 b_3^1 = 2b_2^1, \qquad (۲۸.۱۱)$$
$$b_2^1 b_3^2 - b_2^2 b_3^1 = b_3^1. \qquad (۲۹.۱۱)$$

(یافتن و مطالعه محدودیتهای دیگر را به خواننده واگذار می نماییم). اگر$b_1^1 \neq 0$ باشد، B را توسط $A(1, \frac{b_2^1}{b_1^1})$ پیش ضرب می‌نماییم که با جایگذاری $b_2^1 = 0$ معادل می‌باشد. آنگاه از رابطه (۲۷.۱۱) بدست می‌آید:$b_2^2 = 1$ و لذا اگر $b_3^1 = 0$ باشد، رابطه (۲۹.۱۱) برقرار است. در نتیجه از (۲۸.۱۱) بدست می‌آید که $b_3^2 = 0$ است. تا اینجا، B را به فرم

$$B = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ 0 & 1 & b_2^3 \\ 0 & 0 & b_3^3 \end{bmatrix} \qquad (۳۰.۱۱)$$

کاهش دادیم.

سپس رابطه (۳۰.۱۱) را توسط $A(3, \frac{-b_1^2}{(2b_1^1)})$ برای قرار دادن $b_1^2 = 0$ پس ضرب می‌نماییم. آنگاه نتیجه حاصل شده این است که ابهامات باقیمانده (۲۰.۱۱) صادق هستند، تنها اگر $b_1^3 = b_2^3 = 0$ و $b_3^3 = \frac{1}{b_1^1}$.

در نهایت، B را توسط $A(2, -\ln|b_1^1|)$ پیش ضرب نموده تا دو ماتریس غیرهم ارز بدست آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \{-1, 1\} \qquad (۳۱.۱۱)$$

تنها حالت باقیمانده$b_1^1 = 0$ می‌باشد. با بکار بردن روش مشابه روش فوق

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \{-1, 1\} \qquad (۳۲.۱۱)$$

را می‌یابیم. لذا ۴ ماتریس جدا از هم B موجودند که تحت تقارنهای لی غیرهم ارز می‌باشند.

بخش ۴.۱۱ مثالها

تمامی نتایج بدست آمده در بخش قبل تنها به جبر لی مفروض بستگی دارند.(نه به معادله دیفرانسیل خاصی). فایده چنین نتایج کلی این است که می‌توانند مستقیماً برای هر معادله دیفرانسیلی که دارای جبرلی است بکار گرفته شوند. از یک طرف، هر B غیرهم ارز می‌تواند به بیش از یک تقارن گسسته معادله دیفرانسیل خاصی منتهی گردد.
از طرف دیگر، برخی از ماتریس‌های B که در محدودیتهای (۲۰.۱۱) صدق می نمایند ممکن است متناظر با حتی یک تقارن گسسته نباشد. این بخش را با سه مثال برای نمایش چگونگی عملکرد این روش به پایان می‌رسانیم.

۴.۱۱ مثال. معادله دیفرانسیل معمولی

$$y''' = \frac{y''^2}{x} - \frac{y''}{y'} \tag{۳۳.۱۱}$$

را در نظر بگیرید که جبر لی مولدهای تقارن نقطه‌ای آن دارای پایه

$$X_1 = \partial_y, \qquad X_2 = \frac{1}{2}x\partial_x + y\partial_y \tag{۳۴.۱۱}$$

می‌باشد. در این پایه، $[X_1, X_2] = X_1$، همانند (مثال ۱۱.۳.۱) تقارنهای گسسته غیرهم ارز در

$$\begin{bmatrix} X_1\hat{x} & X_1\hat{y} \\ X_2\hat{x} & X_2\hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2}\hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \frac{1}{2}\hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix},$$

که جواب عمومی آن بصورت

$$\hat{x} = c_1 x, \qquad \hat{y} = \alpha y + c_2 x^2, \qquad \alpha \in \{-1, 1\} \tag{۳۵.۱۱}$$

می‌باشد، صدق می‌نمایند.

شرط تقارن برقرار است اگر و فقط اگر $\alpha c_1^2 = 1$ و $c_2 = 0$ باشد. از اینرو، تنها تقارنهای نقطه‌ای گسسته حقیقی مقدار (با تقریب هم ارزی)

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \{(x, y), (-x, y)\} \tag{۳۶.۱۱}$$

می‌باشند. هر دو اینها متناظر با $\alpha = 1$ می‌باشند. تقارنهای حقیقی-مقدار با $\alpha = -1$ وجود ندارند.(گرچه دو تقارن مختلط-مقدار غیرهم ارز موجودند).

۵.۱۱ مثال. معادله چزی

$$y''' = 2yy'' - 3y'^2 + \lambda(6y' - y^2)^2, \tag{۳۷.۱۱}$$

دارای پایه ذیل برای جبر لی‌اش می‌باشد:

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x - y\partial_y, \qquad X_3 = x^2\partial_x - (2xy + 6)\partial_y. \tag{۳۸.۱۱}$$

جابجاگرهای این مولدها عبارتند از:

$$[X_1, X_2] = X_1, \qquad [X_1, X_3] = 2x_2, \qquad [X_2, X_3] = X_3$$

وبنابراین جبر لی $\mathfrak{sl}(2)$ می‌باشد.

برای معادله چزی ، دستگاه (۶.۱۱) بصورت

$$\begin{bmatrix} X_1\hat{x} & X_1\hat{y} \\ X_2\hat{x} & X_2\hat{y} \\ X_3\hat{x} & X_3\hat{y} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{x} & -\hat{y} \\ \hat{x}^2 & -2(\hat{x}\hat{y} + 6) \end{bmatrix} \tag{۳۹.۱۱}$$

می‌باشد که B یکی از چهار ماتریس (۳۱.۱۱) و (۳۲.۱۱) می‌باشد. این مطلب نتیجه می‌دهد دو جواب از رابطه (۳۹.۱۱) برای هر B وجود دارد. برای مثال، اگر B ماتریس همانی باشد، آنگاه

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \left\{(x, y), \left(x + \frac{6}{y}, -y\right)\right\}$$

می‌باشد. اگرچه، تنها یکی از اینها تقارن معادله چزی می‌باشد. جواب دیگر نقض کننده شرط تقارنی می‌باشد. هر ماتریس B دقیقاً یک تقارن گسسته معادله چزی را مشخص می‌نماید. لیست کامل بصورت ذیل می‌باشد:

$$(\hat{x},\hat{y}) \in \left\{(x,y),(-x,-y),\left(\frac{-1}{x},x^2y+6x\right),\left(\frac{1}{x},-(x^2y+6x)\right)\right\}. \qquad (۴۰.۱۱)$$

۶.۱۱ مثال. روش فوق برای معادلات با مشتقات جزئی و معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات و دستگاههای اسکالر کارآمد می‌باشد. معادله هری-دیم

$$u_t = u^3 u_{xxx}, \qquad (۴۱.۱۱)$$

را در نظر بگیرید که دارای جبر لی ۵ بعدی ازمولدهای تقارن نقطه‌ای می‌باشد. پایه

$$X_1=\partial_x, \quad X_2=x\partial_x+u\partial_u, \quad X_3=x^2\partial_x+2xu\partial_u,$$
$$X_4=\partial_t, \quad X_5=t\partial_t-\frac{1}{3}u\partial_u,$$

دارای ضرایب ساختاری ناصفر c_{ij}^k، $i<j$ می‌باشد:

$$c_{12}^1=1, \qquad c_{13}^2=2, \qquad c_{23}^3=1, \qquad c_{45}^4=1.$$

توجه نمایید که سه مولد اول تشکیل یک پایه برای زیر جبر $\mathfrak{sl}(2)$ می‌دهند و دو مولد دیگر زیر جبر $\mathfrak{a}(1)$ را تولید می‌کنند. این مطلب نتیجه می‌دهد که ماتریس‌های غیرهم ارز B، ماتریس‌های $\mathfrak{sl}(2)$ و$\mathfrak{a}(1)$ را بعنوان زیر بلوک‌ها یکی در نظر می‌گیرد: یکی از این دو، یعنی

$$(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)=(\alpha\hat{X}_1,\hat{X}_2,\alpha\hat{X}_3,\beta\hat{X}_4,\hat{X}_5), \qquad (۴۲.۱۱)$$

یا

$$(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)=(\alpha\hat{X}_3,-\hat{X}_2,\alpha\hat{X}_1,\beta\hat{X}_4,\hat{X}_5), \qquad (۴۳.۱۱)$$

که α,β یکی از این دویعنی ۱ یا۱- می‌باشند.
جواب عمومی رابطه (۶.۱۱) بوسیله (۴۲.۱۱) بصورت

$$(\hat{x},\hat{t},\hat{u})=(\alpha x,\beta t,cu)$$

می‌باشد.
با جایگزینی نتیجه فوق در شرط تقارن، $c=\alpha\beta$ را بدست می‌آوریم. تقارنهای گسسته متناظر با (۴۳.۱۱) به طور مشابه بدست می‌آیند. در تمامی اینها ۸ تقارن گسسته حقیقی غیرهم ارز موجود می‌باشد:

$$(\hat{x},\hat{t},\hat{u}) \in \left\{(\alpha x,\beta t,\alpha\beta u),\left(\frac{-\alpha}{x},\beta t,\frac{\alpha\beta u}{x^2}\right)\right\}, \quad \alpha,\beta\in\{-1,1\} \qquad (۴۴.۱۱)$$

مطالعه بیشتر

قضیه انشعاب روشی را شرح می‌دهد که در آن دستگاههای غیر خطی رفتارشان را مانند پارامترها تغییر می‌دهند. برای دستگاهها با تقارنها، قضیه انشعاب هم ارزی، برای بررسی تباهیدگی‌های متناظر با تقارن‌ها لازم می‌باشد. شافر، گالوبتسکی و استیوارد (۱۹۸۸) معرفی جامعی راپیرامون این موضوع جالب ارائه دادند.

در بخش ۳.۱۱ به مطالعه مجموعه‌ای از تبدیلات خطی جبرلی پرداختیم. این تبدیلات که توسط ماتریس B نمایش داده می‌شوند را خودریختی‌ها می‌نامیم. برای اطلاعات بیشتر پیرامون جبر لی‌ها در حالت کلی و بویژه خودریختی‌ها پیشنهاد می‌شود به فوشس و اولور (۱۹۹۷) رجوع شود.()

معادله چزی دارای خواص متعدد جالبی می‌باشد، بطوریکه در کلارکسون و اولور (۱۹۹۶) شرح داده شده است. این مقاله روش‌های اجمالی شرح داده شده در بخش ۶.۳ را بسط داده و آنها را برای معادله چزی بکار می‌بندد.

روشهای شرح داده شده در این فصل بسیار جدید می‌باشند. برای یادگیری بیشتر از هایدون (۱۹۸۸) کمک بگیرید.

تمرین‌ها

۱.۱۱. یک مجموعه از تقارنهای گسسته حقیقی مقدار غیر هم‌ارز

$$y'' = \frac{y'}{x} + \frac{4y^2}{x^3}$$

که تقارنهای لی آن بوسیله $X_1 = x\partial_x + y\partial_y$ تولید می‌شوند رابیابید.

۲.۱۱. نشان دهید که محدودیتهای (۲۰.۱۱) با $i < j$ برای شرح تمام مجموعه (یعنی، محدودیتها با $i \geq j$ هیچ چیز جدیدی را نمی‌دهد) کافیست.

۳.۱۱. نشان دهید محدودیتهای (۲۰.۱۱) اگر B بوسیله $A(j,\varepsilon)B$ یا $BA(j,\varepsilon)$ جایگزین شوند تغییر نمی‌کنند.

راهنمایی : ابتدا نشان دهید که

$$c^n_{lm}(A(j,\varepsilon))^l_i(A(j,\varepsilon))^m_j = c^k_{ij}(A(j,\varepsilon))^n_k.$$

۴.۱۱. نتایج بدست آمده در مثال ۳.۱۱ را بوسیله نوشتن (۹) محدودیت (۲۰.۱۱) با جزئیات استخراج نمایید.

۵.۱۱. یک مجموعه از ماتریسهای غیرهم ارز B را برای جبر لی $\mathfrak{so}(3)$ بیابید.

۶.۱۱. یک مجموعه از تقارنهای گسسته غیرهم ارز معادله دیفرانسیل معمولی (۵.۹) را محاسبه نمایید.

۷.۱۱. یک مجموعه از تقارنهای گسسته غیرهم ارز معادله برگر را محاسبه نمایید.

۸.۱۱. یک مجموعه از تقارنهای گسسته غیرهم ارز معادله تصفیه غیر خطی (۲۶.۹) را محاسبه نمایید. این معادله تحت تبدیل هودوگراف، $(x,t,u) \to (u,t,x)$ ناوردا می‌باشد. اگر این تبدیل در مجموعه تقارنهای گسسته ناهم ارز شما نمی‌باشد، نشان دهید چگونه می‌تواند از یک عضو این مجموعه استخراج گردد.

۹.۱۱. نتایج تمرین ۳.۶ را برای محاسبه یک مجموعه از تقارنهای گسسته غیرهم ارز $y'' = (1-y')^3$ بکار ببرید.

۱۰.۱۱. برای یافتن تقارنهای برخوردی گسسته، مولدهای X_i در (۶.۱۱) را یکبار امتداد دهید (زیرا $\hat{z}$ وابسته بر u, x و مشتقات اولیه u می‌باشد). تنها تقارنهای برخوردی لی معادله دیفرانسیل معمولی (۳۳.۱۱)، تقارنهای نقطه‌ای (۳۴.۱۱) می‌باشند. نشان دهید که معادله دیفرانسیل معمولی مذکور دارای تقارنهای برخوردی گسسته غیر نقطه‌ای می‌باشد. (توجه: بخاطر داشته باشید که یک تبدیل برخوردی برای $\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}'$ تنها وابسته به x, y, y' می‌باشد)

راهنمای جوابها و راه حل‌های جزئی برخی از مسائل

فصل اول

۱.۱. جواب عمومی $y = cx$ می‌باشد، لذا جوابها خطوط مستقیم گذرنده از مبدأ می‌باشند. تقارنهای بدیهی تر عبارتند از انعکاس‌ها، دوران‌ها و مقیاس‌هایی که به فرم $(\hat{x}, \hat{y}) = (kx, ky)$ می‌باشند. (به قسمی که k یک ثابت مثبت است)

۱.۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی بصورت $y = (cx^2 - 1)/(cx^2 + 1)$ می‌باشد. تقارنها، مقیاسهایی در امتداد x می‌باشند.

۱.۴. $\alpha = 2$.

۱.۵. اصل انطباق خطی اگر $y = y(x)$ جواب دلخواه معادله دیفرانسیل معمولی ناهمگن و$y = y_0(x)$ جواب دلخواهی ازمعادله دیفرانسیل معمولی همگن $y' = F(x)y$ باشد، آنگاه $\hat{y} = y(x) + y_0(x)$ جواب ناهمگن معادله دیفرانسیل معمولی می‌باشد. جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی همگن بصورت $y = \varepsilon$
$exp\{\int F(x)dx\}$ می‌باشد.

فصل دوم

۲.۱.

$$(a)\ \ X = \partial_x + \partial_y, \quad (r, s) = (y - x, x), \qquad (b)\ \ X = xy\partial_x + y^2\partial_y, \quad (r, s) = (\frac{y}{x}, -\frac{1}{y})$$

۲.۲.

$$(a)\ \ (\hat{x}, \hat{y}) = (x + \varepsilon, e^{\varepsilon} y) \qquad (b)\ \ (\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x\cos\varepsilon + \sin\varepsilon}{\cos\varepsilon - x\sin\varepsilon}, \frac{y}{\cos\varepsilon - x\sin\varepsilon}\right)$$

(c) راهنمایی مختصات کانونی رابکار ببرید.

۲.۳. اگر $\alpha \neq 0$، مبدأ $(0,0)$ تنها نقطه ناوردا می‌باشد (اگر $\alpha = 0$، هر نقطه روی خط $x = 0$ ناوردا می‌باشد). اگر $\alpha = 2$ باشد تقارنها بدیهی هستند.

۲.۴. برحسب مختصات کانونی $(r,s)=(xy,\frac{1}{2}x^2)$، معادله دیفرانسیل معمولی به $ds/dr=r/(1+r)$ کاهش می‌یابد.

۲.۵. از مختصات کانونی استفاده نمایید، برای مثال $(r,s)=(y/x^3,\ln|x|)$.

۲.۶. مولد $X=\partial_x+y\partial_y$ می‌باشد.

۲.۷. مولد $X=y\partial_x$ می‌باشد.

۲.۹. از شرط تقارن خطی شده به شکل (۵۸.۲) برای اثبات استفاده نمایید.

فصل سوم

۳.۱. با $Q=\eta(x,y)-y'\xi(x,y)$ آغاز نمایید، مشتق گیری کلی را مکرراً تکرار نمایید تا $\eta^{(1)},\eta^{(2)},\cdots$ بدست آید.

۳.۲.

$$\begin{aligned}\eta^{(4)} &= \eta_{xxxx}+4(\eta_{xxxy}-\xi_{xxxx})y'+(6\eta_{xxyy}-4\xi_{xxxy})(y')^2\\&+(4\eta_{xyyy}-6\xi_{xxyy})(y')^3+(\eta_{yyyy}-4\xi_{xyyy})(y')^4-\xi_{yyyy}(y')^5\\&+\{6\eta_{xxy}-4\xi_{xxx}+(12\eta_{xyy}-18\xi_{xxy})y'+(6\eta_{yyy}-24\xi_{xyy})(y')^2-10\xi_{yyy}(y')^3\}y''\\&+\{3\eta_{yy}-12\xi_{xy}-15\xi_{yy}y'\}(y'')^2\\&+\{4\eta_{xy}-6\xi_{xx}+(4\eta_{yy}-16\xi_{xy})y'-10\xi_{yy}(y')^2-10\xi_y y''\}y'''\\&+\{\eta_y-4\xi_x-5\xi_y y'\}y^{(iv)}.\end{aligned}$$

۳.۳.

$$\begin{aligned}(b):\quad X^{(4)} &= x\partial_x+\alpha y\partial_y+(\alpha-1)y'\partial_{y'}+(\alpha-2)y''\partial_{y''}\\&\quad+(\alpha-3)y'''\partial_{y'''}+(\alpha-4)y^{(iv)}\partial_{y(iv)}.\\(d):\quad X^{(4)} &= -y\partial_x+x\partial_y+(1+y'^2)\partial_{y'}+3y'y''\partial_{y''}\\&\quad+(4y'y'''+3y''^2)\partial_{y'''}+(5y'y^{(iv)}+10y''y''')\partial_{y^{(iv)}}.\end{aligned}$$

۳.۴. اگر $\alpha=0$ باشد، آنگاه $\mathcal{L}$ سه بعدی می‌باشد. در غیر اینصورت، دو بعدی می‌باشد.

۳.۵. هر مولد به فرم $X=c_1\partial_x+(c_2e^x+c_3e^{2x}+c_4e^{-3x}+c_5y)\partial_y$ می‌باشد.

۳.۶. یک معادله دیفرانسیل معمولی هم ارز بنویسید، از متغیر وابسته جدید $\tilde{y}=y-x$ استفاده نمایید. تقارنهای معادله دیفرانسیل معمولی مذکور را بیابید، آنگاه تبدیل را برای بدست آوردن تقارنهای معادله دیفرانسیل معمولی اصلی بر می‌گردانیم.

۳.۷. از شرط تقارن خطی شده برای نمایش $\xi=B(x)$ و $\eta=c(x)y+D(x)$ و بدست آوردن شرایط روی $f(y)$ استفاده نمایید. این شرطها را برای $c(x)=0$ و $c(x)\neq 0$ جداگانه حل نمایید.

فصل چهارم

۴.۱. اگر $(r,s)=(y,x)$ باشد، معادله دیفرانسیل معمولی به معادله جدایی پذیر $dv/dr=-v^2r^{-2}$ که $v=ds/dr$ می‌باشد، کاهش می‌یابد. اگرچه تقارنهای مقیاسی، معادله دیفرانسیل معمولی اولیه را به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول () کاهش می‌یابد.

۴.۲. اگر $c_1\neq 0$ باشد، جواب عمومی $y=c_1/(c_1^2(x+c_2)^2-1)$ می‌باشد؛ جوابهای باقیمانده $y=(\pm 1/2)(x+c_2)$ می‌باشند.

۴.۳. مولدها عبارتند از $X_1=\partial_x$، $X_2=\partial_y$ و $X_3=x\partial_x+\frac{1}{2}y\partial_y$.

۴.۴. معادله اولر- لاگرانژ $y''=-y/(4x^2)-1/(\sqrt{x}y^2)-1/y^3$ می‌باشد. تقارنهای مقیاسی بوسیله $X=x\partial_x+\frac{1}{2}y\partial_y$ تولید می‌شوند.

۴.۵. مشخصه، $Q=y^2-xyy'$ می‌باشد. بنابراین $Q=0$ است اگر وفقط اگر برای $c\in\mathbb{R}$، $y=cx$ باشد. جوابهای ناوردا $y=0$ و $y=\pm x$ می‌باشند.

۴.۶. منحنی بسته $x^2+y^2=1$ تنها جواب ناوردا می‌باشد که مجموعه جوابها را به دو ناحیه جدا از هم همانگونه که در شکل ۵.۱ نشان داده شده است افراز می‌کند.

فصل پنجم

۵.۱. عمومی‌ترین چنین معادله دیفرانسیل معمولی $y'''=x^{\alpha-3}F(x^{-\alpha}y,x^{1-\alpha}y',x^{2-\alpha}y'')$ می‌باشد.

۵.۲. (a) $v=x-y/y'$ و $r=y/x$
(b) $v=x^2y'$ و $r=xy$ برای یافتن معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سوم عمومی ، (c) را حل نمائید تا (r_2,v_2) حاصل گردد، سپس dv_2/dr_2 را محاسبه نموده و نتایج §۵.۱ را بکار ببندید.

۵.۳. معادله دیفرانسیل معمولی ذیل است:

$$y''=\frac{2(xy'-y)(1+y'^2)+c(1+y'^2)^{3/2}}{1+x^2+y^2}.$$

۵.۵. در اتحاد ژاکوبی صدق نمی کند.

۵.۶. هرگاه $\alpha=-1$ باشد مولد (X_1,X_2) یک جبر لی می‌باشد . $\mathcal{L}(1)$ سه بعدی است ودارای جبر لی حل پذیر دو بعدی می‌باشد. در غیر اینصورت، $\mathcal{L}(\alpha)$ چهار بعدی است و دارای زیر جبر حل پذیر سه بعدی می‌باشد. زیر جبر $\mathfrak{sl}(2)$ دارای پایه به شرح ذیل است:

$$X_a=y\partial_x,\quad X_b=\frac{1}{2}x\partial_x-\frac{1}{2}y\partial_y,\quad X_c=-x\partial_y$$

۵.۷. ناوردای دیفرانسیلی مشترک مرتبه کمتر $I=(2xy''+y')/y'^3$ می‌باشد.

فصل ششم

۶.۱. جواب عمومی $x = y - c_1 \ln|y+c_1| + c_2$ می‌باشد. همچنین جوابها به شکل $y = c_1$ می‌باشند.

۶.۲. معادله دیفرانسیل معمولی ، دارای تقارنهای لی می‌باشد که بوسیله

$$X_1 = x^2\partial_x + xy\partial_y, \quad X_2 = x\partial_x + 2y\partial_y$$

تولید شده‌اند. برای کاهش مرتبه از $(r_1, v_1) = (y/x, xy' - y)$ استفاده نمایید.

۶.۵. فرض کنید $(r_1, v_1) = (x, y'/y)$ باشد. اینها ناوردای دیفرانسیلی اساسی برای گروه تولید شده بوسیله X_1 می‌باشند. اگر از مجموعه دیگری از ناورداهای دیفرانسیلی استفاده نمایید، به نظر می‌رسد که لازم است جوابها را بصورت پارامتری بنویسیم.

۶.۶. جواب عمومی $\mathrm{e}rf(\frac{y}{\sqrt{2}}) = c_1 + c_2/(x+c_3)$ می‌باشد. همچنین جوابهایی به شکل $\mathrm{e}rf(\frac{y}{\sqrt{2}}) = c_1 + c_2 x$ موجودند.

فصل هفتم

۷.۱. سه انتگرال اول مستقل تابعی، عبارتند از

$$\phi^1 = y^{-2}y'' - 2y^{-3}y'^2, \quad \phi^2 = 2y^{-3}y'' - 3y^{-4}y'^2, \quad \phi^3 = y^{-2}(xy'' - y') - 2xy^{-3}y'^2,$$

جواب عمومی $y = (c_1x^2 + c_2x + c_3)^{-1}$ می‌باشد.

۷.۲. مشخصه عمومی عبارت است از

$$Q = \{(c_1x + c_2)e^y + (c_3x + c_4)e^{-y}\}y'^{\frac{1}{2}} + \{c_5x^2 + c_6x + c_7\}y' + c_8x^2 + c_9x + c_{10}.$$

۷.۴. گروههای تولید شده توسط Q_{10}, Q_9, Q_8 به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned}
(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}') &= (x + 2\varepsilon y', y + \varepsilon y'^2, y'),\\
(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}') &= (x + 2\varepsilon\rho(xy' - y), y + \varepsilon\rho^2 y'^2(x - \varepsilon y), \rho y'),\\
(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}') &= (\kappa x, \kappa^2 y - \varepsilon\kappa^2(2y - xy')^2, \kappa y'),
\end{aligned}$$

که $\rho = \frac{1}{1-\varepsilon y'}$ و $\kappa = \frac{1}{1-\varepsilon(4y-2xy')}$ است.

۷.۶. اگر رابطه (۸۶.۷) برقرار باشد، آنگاه $J_j^{n-1} = 0$ می‌باشد. اتحاد

$$\bar{D}J_j^k = -J_{j-1}^k - J_j^{k-1} - \omega_{y(k)}J_j^{n-1} + \omega_{y(i)}J_k^{n-1}$$

برای هر $j < k$ نتیجه می‌دهد که $J_j^k = 0$ است. (بنابر استقرا). شرایط انتگرال پذیری باقیمانده از این نتیجه بدست می‌آید.

۷.۷. مشخصه‌ها عبارتند از $Q_1 = 1$ و $Q_2 = y'$. تنها یک هم مشخصه موجود است که مستقل از y'' می‌باشد، آنرا $\Lambda = e^x$ می‌نامیم.

فصل هشتم

۸.۲. جبر لی پنج بعدی می‌باشد، زیرا جواب عمومی شرط تقارن خطی شده بصورت ذیل می‌باشد

$$\eta = c_1 u + c_2, \quad \xi = c_3 x + c_4, \quad \tau = (3c_3 - 2c_1)t + c_5.$$

۸.۳. مولدهای تقارن نقطه‌ای لی برای معادله گرما عبارتند از

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_t, \quad X_3 = u\partial_u, \quad X_4 = x\partial_x + 2t\partial_t,$$
$$X_5 = 2t\partial_x - xu\partial_u, \quad X_6 = 4xt\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u,$$
$$\{X_u = U(x,t)\partial_u : \quad U_t = Uxx\} \quad .$$

۸.۶. مولدهای تقارن نقطه‌ای لی عبارتند از

$$X_1 = \partial_x \quad , X_2 = \partial_t, \quad X_3 = x\partial_x + t\partial_t, \quad X_4 = t\partial_x + \partial_u$$
$$\{X_{ZT} = Z(u,v)\partial_x + T(u,v)\partial_t : Z_u - uT_u + vT_v = 0, Z_v - uT_v + T_u = 0\}.$$

یک تبدیل شتاب (که توسط آن متغیرهای وابسته ومستقل تعویض می‌شوند) دستگاه را خطی می نماید.

فصل نهم

۹.۱. PDE به $v = F(r)$ کاهش می‌یابد به قسمی که $v = t^k u$ ، $r = \sqrt{xt}$ و

$$F'' + \frac{1-2k}{r}F' - 4F = 0$$

می‌باشد. جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی بصورت ذیل می‌باشد

$$F = r^k(c_1 I_k(2r) + c_2 K_k(2r)),$$

که $I_k(z)$ و $K_k(z)$ توابع بسل اصلاح شده می باشند. هنگامیکه $k = \frac{1}{2}$ باشد، نوشتن جواب بصورت

$$F = c_1 e^{2r} + c_2 e^{-2r}$$

ساده‌تر می‌باشد. با باز نویسی جواب برحسب متغیرهای اولیه، بدست می‌آوریم

$$u = (\frac{x}{t})^{\frac{k}{2}}(c_1 I_k(2\sqrt{xt}) + c_2 K_k(2\sqrt{xt})).$$

این جوابها به خانواده بزرگی با کمک تقارنهای لی باقیمانده تعمیم داده می‌شوند. برای یافتن جوابهای معادله توماس، به سادگی تبدیل خطی را معکوس نمایید.

۹.۲. از (۲۵.۸) برای مشتق گیری از اتحاد استفاده نمایید. برای دستگاهها، نتیجه متناظر بصورت

$$XQ_\alpha = Q_\beta \frac{\partial Q_\alpha}{\partial u_\beta}$$

می‌باشد.

۹.۳. جوابهای موج متحرک عبارتند از $u = c_1 + \frac{1}{c}\sin^{-1}(c_2 \exp\{-c(x-ct)\})$.

۹.۴. خانواده دو پارامتری از جوابها $u = \frac{x+c_1}{t(\ln t + c_2)}$ می‌باشد.

فصل دهم

۱۰.۲. دستگاه اپتیمال شامل تنها یک مولد می‌باشد، برای مثال، X_1 اپتیمال است . تنها ناوردا $I = (\kappa^1)^2 + (\kappa^2)^2 + (\kappa^3)^2$ می‌باشد.

۱۰.۳. ناورداها عبارتند از $I^1 = (\kappa^4)^2 - 4\kappa^2\kappa^6$ که از زیر جبر $\mathfrak{sl}(2)$ بدست می آیند و

$$I^2 = \left((\kappa^4)^2 - 4\kappa^2\kappa^6\right)\left(\kappa^3 + \frac{1}{2}\kappa^4\right) + \kappa^1\kappa^4\kappa^5 - \kappa^2(\kappa^5)^2 - (\kappa^1)^2\kappa^6.$$

یک دستگاه اپتیمال از مولدهابصورت

$$X_1, \quad X_2 + kX_3, \quad X_2 + kX_3 + X_6, \quad X_2 + X_5, \quad X_2 - X_5, \quad X_3, \quad X_4 + kX_3$$

می‌باشد که κ یک ثابت دلخواه است.

۱۰.۶. یک دستگاه اپتیمال از مولدها

$$X_1, \quad X_2 + \kappa^1 X_1 + \mu X_4, \quad X_3 + \mu X_1, \quad X_4 + \mu X_1, \quad X_5$$

می‌باشد که $\mu \in \{-1, 0, 1\}$ و κ^1 یک ثابت دلخواه است.

فصل یازدهم

۱۱.۱. یک مجموعه از تقارن‌های گسسته حقیقی-مقدار غیرهم ارز، عبارت است از

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \left\{(x, y), (-x, -y), \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^2}\right), \left(-\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^2}\right)\right\}$$

۱۱.۵. هر ماتریس B معادل با یک ماتریس همانی است.

۱۱.۷. چهار تقارن غیر هم ارز حقیقی مقدار از معادله برگر موجود است

$$(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}) \in \left\{(\alpha x, t, \alpha u), \left(\frac{\alpha x}{2t}, \frac{-1}{4t}, 2\alpha(ut - x)\right), \ \alpha \in \{-1, 1\}\right\}$$

۱۱.۱۰. معادله دیفرانسیل معمولی دارای چهار تقارن ناهم ارز ثابت مقدار است، دو تا از تقارنها، تقارنهای نقطه‌ای هستند که درمثال ۱۱.۴.۱ یافتیم. دو تقارن دیگر $(\hat{x}, \hat{y}) \in \{(y', xy' - y), (-y', xy' - y)\}$ می‌باشند.

کتاب‌نامه

[1] **Anco, S. C.** and **Bluman, G.** (1998). *Integrating factors and first integrals of ordinary differential equations.* Eur. J. Appl. Math., 9, 245-259.

[2] **Barenblatt, G. I.** (1996). *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics.* New York: Cambridge University Press.

[3] **Bluman, G. W.** and **Kumei, S.** (1989). *Symmetries and Differential Equations.* New York: Springer-Verlag.

[4] **Clarkson, P. A.** (1996). *Nonclassical symmetry reductions for the Boussinesq equation.* Chaos, Sol. Fractals, 5, 2261-2301.

[5] **Clarkson, P. A.** and **Olver, P. J.** (1996). *Symmetry and the Chazy equation.* J. Diff. Eqns., 124, 225-246.

[6] **Cox, D. A., Little, J.** B. and **O'Shea, D.** (1992). *Ideals, Varieties, and Algorithms.* New York: Springer-Verlag.

[7] **Fuchs, J.** and **Schweigert, C.** (1997). *Symmetries, Lie Algebras and Representations.* New York: Cambridge University Press.

[8] **Golubitsky, M., Stewart, I.** and **Schaeffer, D. G.** (1988). *Singularities and Groups in Bifurcation Theory,* Vol. II. New York: Springer-Verlag.

[9] **Hereman, W.** (1996). *Symbolic software for Lie symmetry analysis.* In CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 3: New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods, ed. N. H. Ibragimov, pp. 367-413. Boca Raton: CRC Press.

[10] **Hydon, P. E.** (1998a). *Discrete point symmetries of ordinary differential equations.* Proc. Roy. Soc. Lond. A, 454, 1961-1972.

[11] **Hydon, P. E.** (1998b). *How to find discrete contact symmetries.* J. Nonlinear Math. Phys., 5, 405-416.

[12] **Ibragimov, N. H.** (ed.) (1994). *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations.* Vol. I: Symmetries, Exact Solutions, and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press.

[13] **Ibragimov, N. H.** (ed.) (1995). *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations.* Vol. 2: Applications in Engineering and Physical Sciences. Boca Raton: CRC Press.

[14] **Mansfield, E. L.** and **Clarkson, P. A.** (1997). *Applications of the differential algebra package diff grob2 to classical symmetries of differential equations.* / Symb. Comp., 23, 517-533.

[15] **Olver, P. J.** (1993). *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* 2nd ed. New York: Springer-Verlag.

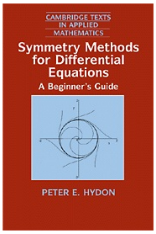
[16] **Olver, P. J.** (1995). *Equivalence, Invariants and Symmetry.* New York: Cambridge University Press.

[17] **Ovsiannikov, L. V.** (1982). *Group Analysis of Differential Equations.* New York: Academic Press.

[18] **Sattinger, D. H.** and **Weaver, O. L.** (1986). *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics.* New York: Springer-Verlag.

[19] **Sewell, M. J.** and **Roulstone, I.** (1994). *Families of lift and contact transformations.* Proc. Roy. Soc. Lond. A, 447, 493-512.

[20] **Stephani, H.** (1989). *Differential Equations: Their Solution Using Symmetries.* New York: Cambridge University Press.



درباره این کتاب

تقارن کلید حل معادلات دیفرانسیل است. بسیاری از تکنیک های شناخته شده برای به دست آوردن راه حل های دقیق معادلات وجود دارد، اما بسیاری از آنها عملا موارد خاص از چند روش توانای تقارن می‌باشند. علاوه بر این، روشهای دیگر برای معادلات دیفرانسیل نا آشنا بکار نمی روند، این روشها اغلب بر ”تردستی‌های زیرکانه“ استوارند. در عوض، اگر معادله دیفرانسیلی داده شده باشد، به روشی مشخص تقارنهای آن را می‌شود بدست آورد، و از آن برای ساخت جوابهای دقیق بهره برد. این کتاب مقدمه‌ای سر راست به موضوع مذکور است، و قابل استفاده برای ریاضیدانان، فیزیکدانان و مهندسان است. سبک کتاب به شکل غیر سوری است و هدف نشان دادن روش‌های اصلی تقارن بوده است. این کتاب در سطحی مناسب برای دانشجویان دوره کارشناسی و تحصیلات تکمیلی پیشرفته نوشته شده است، و قادر است خواننده را بر روشهای اصلی به سرعت و به راحتی مسلط نماید. مواردی در این کتاب وجود دارد که قبلا فقط در مقالات یافت می شد، نظیر روش بدست آوردن تقارن گسسته و انتگرالهای اول. این کتاب در سال ۲۰۰۰ توسط انتشارات کمبریج انگلستان به چاپ رسیده است. اطلاعات دقیق تر این کتاب به شرح ذیل است:

Peter E. Hydon, Symmetry methods for differential equations: a beginner's guide, Cambridge University Press, 2000. ISBN: 0-521-49703-5.

نویسنده. دکتر پیتر هایدون، استاد دانشکده ریاضیات دانشگاه سوری واقع در شهر گیلفورد انگلستان است. او دارای مقالات متعددی در زمینه نظریه تقارنهای معادلات دیفرانسیل است و از پیشروان این نظریه به شمار می آید. مقالات متعدد توصیفی ایشان در زمینه های مختلف این نظریه، بسیار معروف است. خواننده می‌تواند از وبسایت شخصی ایشان تعدادی از آنها را تهیه نماید.

Homepage: http://personal.maths.surrey.ac.uk/st/P.Hydon/
e-mail: p.hydon@surrey.ac.uk

مترجمین. دکتر مهدی نجفی‌خواه، استاد دانشکده ریاضیات دانشگاه علم و صنعت ایران است. ایشان دارای مقالات متعدد در زمینه تقارنهای معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آن می‌باشد. خانمهای مریم عبدالصمدی، الهه افتاده و پروانه احمدی بین سالهای ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۰ دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی در دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران-شمال بوده اند و خانمهای نرگس پور رستمی و محبوبه سامانی پور از سالهای ۱۳۹۰ دانشجوی دکتری مرکز تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام نور تهران هستند. این کتاب بین سالهای ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۱ توسط این گروه ترجمه و اصلاح شده است. هر پنج نفر اخیر دارای تحقیقاتی در این زمینه هستند و موضوعات رساله خود را در این زمینه اختیار نموده‌اند. جای بسی امتنان است که خواننده محترم، هر گونه پیشنهاد و یا انتقادی در خصوص این کتاب را با نویسندگان این کتاب در میان بنهد. آدرس ایمیل زیر این کار را ممکن می‌سازد.

Homepage: webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah
e-mail: m_nadjafikhah@iust.ac.ir