دانشگاه علم و صنعت ایران
دانشکده ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض-هندسه

عنوان

بررسی معادلات حرارت غیرخطی دو بعدی به روش لی

نگارش
محمد رضا رضوی مطلق

استاد راهنما
دکتر مهدی نجفی خواه

اسفند ۱۳۹۱

دانشگاه علم و صنعت ایران
دانشکده ریاضی

رساله کارشناسی ارشد

بررسی معادلات حرارت غیرخطی دو بعدی به روش لی

نگارش: محمد رضا رضوی مطلق

استاد راهنما: دکتر مهدی نجفی خواه　　　امضاء:

استاد ممتحن داخلی: دکتر محمد باقر قائمی　　　امضاء:

استاد ممتحن خارجی: دکتر احمد رضا فروغ　　　امضاء:


بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به پدر، مادر و همچنین استاد گرانقدرم
آقای دکتر مهدی نجفی خواه که با صبر ، تأمل و علم فراوان زحمات زیادی در راستای موفقیت بنده در این دوره تحصیلی کشیدند.به حق زبان من از بیان و قدردانی زحمات بی شائبه ایشان قاصر است و بی شک نمی توانم زحمات استادی فرزانه همچون ایشان را در زندگی تحصیلی خویش نادیده بگیرم. در انتها از دوستان خوبم که در گردآوری این نوشته یار و همراهم بودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.
با سپاس فراوان.

چکیده

بسیاری از پدیده های طبیعی توسط یک سیستم معادلات دیفرانسیل غیر خطی با مشتقات جزئی قابل توصیف هستند که حل کردن تحلیلی آن ها سخت و یا غیر ممکن است و دلیل این موضوع این است که یک تئوری کلی برای حل کردن کامل این تیپ معادلات وجود ندارد.

یکی از تکنیک های مؤثر برای یافتن جواب های دقیق سیستم های دینامیکی ای که با دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی با مشتقات جزئی توصیف شده اند روش تقارن ها است.

از یک سو، می توان با کاهش تقارن معادلات دیفرانسیل کار کرد و بنابراین کلاسی از جواب های دقیق را یافت.

از سوی دیگر، با توجه به تعریف تقارن داریم که، هر تقارن جواب را به جواب می برد، یعنی اینکه می توان با استفاده از تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با داشتن یک جواب معین به سایر جواب ها دست پیدا کرد.

روش تقارن برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ابتدا توسط شخصی به نام سوفوس لی به کار گرفته شد، که امروزه این تکنیک را به احترام این دانشمند بزرگ به روش تقارن های لی نامگذاری کرده اند.

هدف از این رساله بررسی تقارن های معادله دو بعدی غیر خطی حرارت به روش لی است. ابتدا شکل کلی معادلهٔ انتشار-حرارت را در نظر می گیریم و با بررسی و اعمال تغییرات لازم به شکل اساسی معادلهٔ دو-بعدی غیر خطی حرارت می رسیم. در ادامه با استفاده از روش لی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای حالت کلی معادله دو-بعدی غیر خطی حرارت، کار را ادامه می دهیم. سپس حالت های مختلفی که این معادله به خود می گیرد را معرفی می کنیم و دو حالت از این حالت ها را تا یافتن تقارن ها و ناورداها مورد بحث و بررسی قرار می دهیم. در ادامه در مورد طبقه بندی جواب های ناوردای گروهی بحث کرده و به سراغ سیستم بهینه می رویم.

در انتها نیز بحث را با بررسی چند نتیجه خاتمه می دهیم.

کلمات کلیدی:

گروه لی - جبر لی - تقارن - ناوردا - مولد بی نهایت کوچک - معادلهٔ غیر خطی حرارت - معادله با مشتقات جزئی - نمایش الحاقی - سیستم بهینه

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها و تعاریف مقدماتی

تعریف ۱ *(فضای توپولوژیک):*

فرض کنید X یک مجموعه باشد، یک توپولوژی روی X عبارت است از خانواده ای مانند τ از زیر مجموعه های X که در شرایط زیر صدق می کند:

۱. $\emptyset, X \in \tau$.

۲. *اجتماع هر زیر گردایه از τ متعلق به τ باشد.*

۳. *اشتراک اعضای هر زیر گردایهٔ متناهی از τ متعلق به τ باشد.*

یک فضای توپولوژیک عبارتست از زوج مرتب (X, τ) که در آن τ یک توپولوژی روی X است.

تعریف ۲ *(فضای هاوسدورف) :*

فضای توپولوژیک X با توپولوژی τ را هاوسدورف گوئیم هرگاه به ازای هر دو نقطهٔ متمایز $x, y \in X$، همسایگی های U برای x و V برای y وجود داشته باشد به طوری که $U \cap V = \emptyset$. (فضای هاوسدورف را فضای T_2 نیز می گویند.)

به عنوان مثال فضاهای متریک نمونه هایی از فضاهای هاوسدورف هستند و برای مجموعهٔ دلخواه غیرتهی X با توپولوژی $\tau=\{\emptyset,X\}$، فضای (x,τ) یک فضای توپولوژیک غیر هاوسدورف است.

تعریف ۳ (*فضای همبند*) :

فضای توپولوژیک X را همبند گوئیم، هرگاه نتوان آن را به صورت اجتماع دو یا بیشتر از زیر مجموعه های باز نا تهی آن نوشت. همبند بودن برای فضاهای توپولوژیک خاصیتی است که با آن، این فضاها از هم متمایز می شوند.

تعریف ۴ (*شمارای نوع دوم*) :

فضای توپولوژیک (X,τ) را شمارای نوع دوم گوئیم هرگاه بتوان پایه ای حداکثر شمارا از زیر مجموعه های X مانند $\mathcal{B}$ بیابیم، به طوری که برای هر زیر مجموعهٔ باز $U\subset X$، U را بتوانیم به صورت اجتماع اعضای $\mathcal{B}$ بنویسیم. به عنوان مثال فضای توپولوژیک معمولی حقیقی $\mathbb{R}$ را در نظر می گیریم. به وضوح مجموعهٔ

$$\beta=\{(a,b):a,b\in\mathbb{Q}\}. \tag{۱.۱}$$

یک پایهٔ حداکثر شمارا برای این فضاست و بنابر تعریف هر زیر مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}$ را می توان بر حسب اجتماع اعضای β نوشت، بنابراین فضای توپولوژیک ذکر شده شمارای نوع دوم است.

تعریف ۵ (*منیفلد*) :

فرض کنیم M یک فضای توپولوژیکی باشد. M یک منیفلد توپولوژیکی n- بعدی است هرگاه هاوسدورف، شمارای دوم و موضعاً اقلیدسی باشد. منظور از موضعاً اقلیدسی آن است که هر نقطه M دارای یک همسایگی همئومورف با زیر مجموعهٔ بازی از $\mathbb{R}^n$ باشد. منظور از همئومورف بودن یک نگاشت یعنی خودش و وارونش پیوسته باشند.

مثال ۱ :

۱. مجموعهٔ اعداد طبیعی یک منیفلد با بعد صفر است.

۲. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، منیفلدی با بعد n است.

۳. هر فضای برداری n- بعدی، منیفلدی با بعد n است.

۴. کلیهٔ ماتریس های حقیقی $n \times m$ منیفلدی با بعد mn است.

۵. هر زیر مجموعهٔ باز از یک منیفلد، خود یک منیفلد است.

منیفلد توپولوژیکی M را هموار یا دیفرانسیل پذیر گوئیم هرگاه C^∞ (بی نهایت بار مشتق پذیر) باشد؛ به عنوان مثال $\mathbb{R}^n$ و یا ماتریس های $m \times n$.

تعریف ۶ (جا دهنده):

اگر M و N دو منیفلد هموار باشند، آنگاه تابع مشتق پذیر $\psi : M \longrightarrow N$ را یک جا دهنده گوئیم هرگاه به ازاء هر نقطه از دامنهٔ ψ، داشته باشیم:

$$rank\psi = \dim M$$

که رتبهٔ نگاشت ψ در هر نقطهٔ $x \in M$ که با $rank\psi$ نمایش داده می شود برابر است با تعداد سطر و یا ستون های مستقل خطی ماتریس $[\frac{\partial \psi^j}{\partial x^j}]$ در x.

تعریف ۷ (فضای مماس بر منیفلد):

فضای مماس بر منیفلد M در نقطهٔ $p \in M$ که با نماد $T_p(M)$ نمایش داده می شود، عبارتست از فضای برداری تمام بردارهایی که از p آغاز می شوند و بر منیفلد M مماس هستند.

تعریف ۸ (*گروه لی*):

یک گروه لی، منیفلد هموواری چون G است بطوری که دارای ساختار جبری گروه بوده و دو نگاشت ضرب $m : G \times G \longrightarrow G$ و وارون ساز $\iota : G \longrightarrow G$ که با ضابطهٔ:

$$m(g,h) = g.h, \qquad (۲.۱)$$

$$\iota(g) = g^{-۱}.$$

تعریف می شوند، هموار باشند.

اگر G یک منیفلد توپولوژیک و نگاشت های m و ι پیوسته باشند، آنگاه G را گروه توپولوژیک می نامند.

اگر G یک گروه لی باشد، مؤلفهٔ همانی آن یعنی بزرگترین زیر مجموعهٔ همبند شامل عضو e (عضو خنثی یا بی اثر گروه G) نیز گروه لی است. (برای شناختن گروه لی، شناختن مؤلفهٔ همانی آن کافی است، چون عضو خنثی را دارد و اعضا را می توان در آن ضرب کرد و G را ساخت.)

مفهوم گروه های لی اولین بار توسط ریاضی دانی نروژی به نام سوفوس لی (S. Lie) در سال ۱۸۷۴ در [۲۴] مطرح شد.

مثال ۲ *در ادامه مثال هایی برای روشن تر شدن تعریف گروه لی ارائه می دهیم:*

۱. $\mathbb{R}^n$ *با عمل جمع یک گروه لی است.*

۲. $\mathbb{R}^*$*(اعداد حقیقی غیر صفر) با ضرب معمولی اعداد، یک گروه لی است.*

۳. $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{۲n}$ *با عمل جمع یک گروه لی است.*

۴. $\mathbb{C}^*$ *(اعداد مختلط غیر صفر) با ضرب اعداد مختلط، یک گروه لی است.*

۵. *دایرهٔ واحد* $\mathbb{S}^۱$ *با ضرب القاء شده از* $\mathbb{C}^*$ *یک گروه لی است.*

۶. گروه خطی عام $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ یعنی گروه ماتریس های با دترمینان غیر صفر از اعداد حقیقی با ضرب ماتریسی یک گروه لی است.

$$\mathbb{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | det(A) \neq ۰\}.$$

۷. اگر $G_۱,\ldots,G_n$ گروه لی باشند، آنگاه $G_۱ \times \ldots \times G_n$ با تعریف نگاشت های زیر یک گروه لی است.

$$(g_۱,\ldots,g_n)(h_۱,\ldots,h_n) = (g_۱h_۱,\ldots,g_nh_n)$$

$$(g_۱,\ldots,g_n)^{-۱} = (g_۱^{-۱},\ldots,g_n^{-۱})$$

تعریف ۹ (زیرگروه لی):

فرض کنیم G یک گروه لی باشد، زیر منیفلد H از G را یک زیر گروه لی گوئیم هرگاه :

۱. H تحت عمل گروه یک زیر گروه G باشد

۲. H خود یک گروه لی باشد.

در ادامه بیان می کنیم که هرگاه G یک گروه لی و H یک زیر گروه بستهٔ G باشد، آنگاه H یک زیر گروه لی G است. (قضیهٔ کارتان)

تعریف ۱۰ (گروه تبدیلات):

یک گروه تبدیلات مثل G که روی یک منیفلد هموار مانند M عمل می کند، یک گروه لی می‌-باشد با این شرط که نگاشت:

$$\phi : G \times M \longrightarrow M, \tag{۳.۱}$$

$$(g, p) \longmapsto g \cdot p$$

که دارای ویژگی های زیر است، هموار باشد.

۱. $(g \cdot h) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$

۲. $e \cdot p = p$

در این حالت می گوئیم G از چپ روی M عمل می کند. به همین شکل می توان عمل از سمت راست را تعریف کرد.
هرگاه G یک گروه تبدیلات روی M و $g \in G$ باشد، آنگاه g را یک تبدیل گویند. به ازای هر تبدیل g نگاشت تبدیل ϕ را به صورت $\phi_g : M \longrightarrow M$ می توان باز نویسی کرد که به اختصار قرار می دهیم $\phi_g = g$.

تعریف ۱۱ (مدار):

فرض کنید G گروه تبدیلات روی منیفلد M و $p \in M$ باشد، در این صورت مجموعهٔ تمام تبدیلات p تحت گروه تبدیلات G یعنی:

$$G.p = \{g.p : g \in G\}$$

را مدار p تحت تبدیل G می نامند. مدارها همگی زیر منیفلد هستند.

تعریف ۱۲ (زیر گروه پایدار ساز):

فرض کنید G گروه تبدیلات روی منیفلد M باشد، آن دسته از اعضای G که به ازاء هر $p \in M$، به صورت عضو همانی عمل می کنند:

$$G_p = \{g \in G; g.p = p\}$$

زیر گروهی از G خواهد بود که به آن زیر گروه پایدار ساز p می گویند. به همین ترتیب برای زیر مجموعهٔ $S \subset M$، مجموعهٔ :

$$G_S = \{g \in G; g.S = S\}$$

را زیر گروه پایدار ساز S گوئیم.

همچنین مجموعهٔ متشکل از تمام اعضای گروه G که تمام نقاط در S را ثابت نگه می دارند به شکل زیر:

$$G_S^* = \cap_{p \in S} G_p = \{g \in G : g.p = p, \forall p \in S\}$$

را زیر گروه پایدار ساز فراگیر G روی S گوئیم.

تعریف ۱۳ : (حالت های مختلف عمل گروه روی منیفلد):

گروه G روی منیفلد M ،

۱. آزاد عمل می کند، اگر به ازای هر $p \in M$، $G_p = \{e\}$ باشد.

۲. موضعاً آزاد عمل می کند، اگر به ازای هر $p \in M$، G_p یک زیر گروه گسسته باشد.

۳. روی زیر مجموعه ها مؤثر عمل می کند، اگر برای هر زیر مجموعهٔ باز $U \subset M$ ، $G_U^* = \{e\}$.

۴. موضعاً مؤثر عمل می کند، اگر G_p^* یک زیر گروه گسسته از G باشد.

۵. متعدی عمل می کند، هرگاه به ازای هر دو نقطهٔ دلخواه $p,q \in M$، عضوی چون $g \in G$ وجود داشته باشد به طوری که $g.p = q$. به طور معادل برای هر نقطهٔ $p \in M$، تنها یک مدار و آن هم $G.p = M$ داشته باشیم.

۶. نیم منظم عمل می کند، هرگاه تمام مدارهای هر نقطهٔ $p \in M$ ، هم بعد باشند.

۷. منظم عمل می کند، هرگاه علاوه بر نیم منظم بودن، هر نقطهٔ $p \in M$ دارای یک همسایگی به طور دلخواه کوچک باشد به طوری که اشتراک آن با مدار p همبند باشد.

تعریف ۱۴ (*تابع ناوردا*):

فرض کنیم G یک گروه تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می کند. یک تابع G-ناوردا، تابعی حقیقی مانند $I : M \longrightarrow \mathbb{R}$ است به قسمی که برای هر $p \in M$ و $g \in G$

$$I(g.p) = I(p)$$

تعریف ۱۵ (*میدان برداری*):

یک میدان برداری X روی یک زیر مجموعهٔ باز U از M ، یک تابع است که برای هر $p \in U$ یک بردار مماس X_p در فضای مماس $T_p(M)$ اختصاص می دهد.

تعریف ۱۶ (*میدان برداری G-ناوردا*) :

فرض کنیم G یک گروه تبدیلات روی منیفلد M باشد. میدان برداری v روی M را G-ناوردا گوئیم هرگاه:

$$g_*(v_p) = v_{g \cdot p}.$$

به ازاء هر $g \in G$ و $p \in M$ که $g \cdot p$ تعریف شود.

تعریف ۱۷ (جبر لی چپ (راست)):

فرض کنیم G روی خودش از چپ (راست) عمل کند، مجموعه تمام میدان های برداری ناوردای چپ (راست) را جبر لی چپ (راست) G گویند و با نماد $\mathfrak{g}_\ell$ ($\mathfrak{g}_r$) نمایش می دهند.

مثال ۳ در این قسمت بدون محاسبه تنها به ارائه چند جبر لی می پردازیم:

۱. جبر لی گروه خطی عام $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ که با نماد $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ نمایش می دهیم عبارتست از مجموعهٔ ماتریس های مربعی $n \times n$ ، به عبارت دیگر $M(n \times n, \mathbb{R})$.

۲. جبر لی گروه خطی خاص $\mathbb{SL}(n,\mathbb{R})$ که با نماد $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ نمایش می دهیم، ماتریس های مربعی $n \times n$ با اثر صفر می باشد:

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \quad ; \quad trA = ۰\}.$$

۳. جبر لی دایره $\mathbb{S}^۱$، جبر لی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می باشد.

۴. جبر لی فضای اقلیدسی $(\mathbb{R}^n, +)$، $\mathbb{R}^n$ با ضرب صفر است.

تعریف ۱۸ (نگاشت ضربی راست):

برای عنصر گروهی $g \in G$، نگاشت ضربی راست عبارتست از :

$$\begin{aligned} R_g \ &: \ G \longrightarrow G \\ &\quad h \longmapsto h.g \end{aligned}$$

R_g یک دیفئومورفیسم با وارون :

$$R_{g^{-۱}} = (R_g)^{-۱}$$

می باشد.

تعریف ۱۹ (راست - ناوردا):

میدان برداری v را روی G، راست - ناوردا گوئیم، اگر برای تمام $g, h \in G$،

$$dR_g(v|_h) = v|_{R_g(h)} = v|_{hg}$$

یادآوری می کنیم که اگر v و ω راست - ناوردا باشد آنگاه هر ترکیب خطی $av + b\omega$ که $a, b \in \mathbb{R}$ نیز یک میدان برداری راست - ناوردا است. پس مجموعهٔ تمام میدان های برداری راست - ناوردا یک فضای برداری تشکیل می دهد.

تعریف ۲۰ (جبر لی):

منظور از جبر لی یک فضای برداری حقیقی (یا مختلط) $\mathfrak{g}$ است به انضمام یک نگاشت دو خطی $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ معروف به کروشهٔ لی، به طوری که برای هر $A, B, C \in \mathfrak{g}$ و $a, b \in \mathbb{R}$ داریم:

۱. $[A, B] = -[B, A]$

۲. $[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C], \quad [A, aB + bC] = a[A, B] + b[A, C]$

۳. $[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0$

مثال ۴ :

اگر M یک منیفلد باشد آنگاه فضای برداری متشکل از تمام میدان های برداری C^∞ روی M با براکت لی به عنوان براکت، یک جبر لی است.

مثال ۵ :

فرض کنید $K^{n\times n}$ فضای برداری تمام ماتریس های $n\times n$ روی میدان K باشد، روی $X,Y\in K^{n\times n}$ تعریف می کنیم:

$$[X,Y]=XY-YX$$

که XY ضرب ماتریس های X,Y است. با این براکت $K^{n\times n}$ یک جبر لی می شود.

تعریف ۲۱ *(منحنی انتگرال):*

یک منحنی انتگرال از یک فضای برداری ν، عبارت است از منحنی پارامتری شدهٔ $x=\phi(\epsilon)$ که بردار مماس آن در هر نقطه با مقدار ν در همان نقطه برابر است، یعنی برای هر ϵ داشته باشیم:

$$\dot{\phi}(\epsilon)=\nu_{\phi(\epsilon)}.$$

در مختصات موضعی، $x=\phi(\epsilon)=(\phi^{1}(\epsilon),\ldots,\phi^{m}(\epsilon))$ باید جواب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dx^i}{d\epsilon}=\xi^i(x)\qquad i=1,\ldots,m \tag{۴.۱}$$

باشند که $\xi^i(x)$، ضرائب ν در x هستند.

منحنی انتگرال $\phi:I\longrightarrow M$ را ماکسیمال گویند هر گاه شامل منحنی انتگرال طولانی تری نباشد، بدین معنی که اگر $\tilde{\phi}:\tilde{I}\longrightarrow M$، یک منحنی انتگرال دیگری با همان مقدار اولیهٔ $\tilde{\phi}(0)=x$ باشد آنگاه $\tilde{I}\subset I$ و برای هر $\epsilon\in\tilde{I}$، $\tilde{\phi}(\epsilon)=\phi(\epsilon)$.

تعریف ۲۲ (شار یا فلو):

اگر ν یک میدان برداری باشد، آنگاه منحنی انتگرال ماکسیمال پارامتری شدهٔ گذرا از نقطهٔ $x \in M$ را با $\Psi(\epsilon, x)$ نمایش داده و Ψ را شار تولید شده توسط ν گوئیم. برای هر ϵ داریم:

$$\frac{d}{d\epsilon}\Psi(\epsilon, x) = \nu|_{\Psi(\epsilon,x)} \qquad (۵.۱)$$

تعریف ۲۳ (نگاشت نمایی):

گروه لی G با جبر لی $\mathfrak{g}$ را در نظر می گیریم در این صورت نگاشت $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ را نگاشت نمایی گویند، هرگاه U یک همسایگی $0 \in \mathfrak{g}$ و V همسایگی $e \in G$ باشند آنگاه $\exp$ یک دیفئومورفیسم بین U و V برقرار می کند.

یادداشت ۱ :
فرض کنیم G یک گروه لی همبند با جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد، در این صورت برای هر $\nu_1, \ldots, \nu_k \in \mathfrak{g}$ هر عضو G مثل g قابل بیان به صورت ضرب نگاشت های نمایی می باشد.
بدین معنی که $g = \exp(\nu_1) \ldots \exp(\nu_k)$.

تعبیر مطلب فوق آن است که با داشتن اعضای یک جبر لی می توان با محاسبهٔ نگاشت های نمایی متناظر با هر عضو و ضرب آن ها در هم ضابطهٔ تبدیل گروه را به دست آورد.

تعریف ۲۴ (براکت لی):

مهمترین عملگر روی میدان های برداری براکت لی یا جابجاگر است.
برای میدان های برداری داده شدهٔ υ و ω روی منیفلد M، براکت لی آن ها عبارت است از میدان برداری یکتای $[\upsilon,\omega]$ که برای هر تابع هموار $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ در شرط $[\upsilon,\omega](f) = \upsilon(\omega(f)) - \omega(\upsilon(f))$ صدق می کند.
در مختصات موضعی، اگر

$$\upsilon = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \omega = \sum_{i=1}^{m} \eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

باشد، آنگاه:

$$[\upsilon,\omega] = \sum_{i=1}^{m}\{\upsilon(\eta^i) - \omega(\xi^i)\}\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\{\xi^i\frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^i\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{۶.۱}$$

مثال ۶ :

فرض کنیم:

$$\upsilon = y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \omega = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$$

دو میدان برداری باشند. در این صورت:

$$[\upsilon,\omega] = \upsilon(x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \upsilon(xy)\frac{\partial}{\partial y} - \omega(y)\frac{\partial}{\partial x} = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$$

تعریف ۲۵ (خواص براکت لی):

براکت لی ویژگی های زیر را دارد:

۱. دو خطی

$$[c_1 v + c_2 v', \omega] = c_1 [v, \omega] + c_2 [v', \omega]$$

$$[v, c_1 \omega + c_2 \omega'] = c_1 [v, \omega] + c_2 [v, \omega']$$

که c_1 و c_2 ضرائب ثابت هستند.

۲. پاد تقارنی

$$[v, \omega] = -[\omega, v]$$

۳. اتحاد ژاکوبی

$$[\nu, [v, \omega]] + [\omega, [\nu, v]] + [v, [\omega, \nu]] = 0.$$

تعریف ۲۶ (گروه و جبر لی حل پذیر):

فرض کنید G یک گروه لی باشد با جبر لی $\mathfrak{g}$. گروه لی G حل پذیر است اگر زنجیری از زیر گروههای لی G موجود باشد که:

$$\{e\} = G^{(0)} \subset G^{(1)} \subset G^{(2)} \subset \dots G^{(r-1)} \subset G^{(r)} = G \qquad (7.1)$$

که برای هر $k = 1, \dots, r$، $G^{(k)}$ زیر گروه لی k-بعدی G است و $G^{(k-1)}$ زیر گروه نرمال $G^{(k)}$ است.

بطور معادل گوئیم جبر لی $\mathfrak{g}$ حل پذیر است هرگاه زنجیری از زیر جبر ها به صورت زیر داشته باشد:

$$\{0\} = \mathfrak{g}^{(0)} \subset \mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathfrak{g}^{(2)} \subset \dots \mathfrak{g}^{(r-1)} \subset \mathfrak{g}^{(r)} = \mathfrak{g} \tag{۸.۱}$$

که برای هر k ، بعد $\mathfrak{g}^{(k)}$ برابر k است و $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ زیر جبر نرمالی از $\mathfrak{g}^{(k)}$ است، یعنی:

$$[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k)}] \subset \mathfrak{g}^{(k-1)} \tag{۹.۱}$$

تعریف ۲۷ (قضیهٔ آدو) :

فرض کنید $\mathfrak{g}$ یک جبر لی با بعد متناهی باشد، بنابراین $\mathfrak{g}$ به ازای هر n، یکریخت است با زیر جبر لی از $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ (جبر لی گروه خطی عام). [۱۷]

تعریف ۲۸ (مولد بی نهایت کوچک) :

هرگاه G یک گروه لی باشد که روی M عمل می کند و $\mathfrak{g}$ جبر لی آن باشد، آنگاه به ازای هر $\nu \in \mathfrak{g}$ مولد بی نهایت کوچک $\hat{\nu}$ متناظر با ν در نقطه $p \in M$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\hat{\nu}_p = \phi_{*p}(\nu_e). \tag{۱۰.۱}$$

نگاشت $\phi_p : G \longrightarrow M$ تعریف می شود به طوری که $g \longmapsto g \cdot p$ و $\phi_{*p} : T_eG \longrightarrow T_{e.p}M = T_pM$.

مثال ۷ (عمل گروه $\mathbb{SL}(۲)$):

عمل گروه $\mathbb{SL}(۲) = \{A \in \mathbb{R}^{۲\times۲} | \det(A) = ۱\}$ روی $\mathbb{RP}^۱$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می کنیم:

$$p \longmapsto \frac{ap+b}{cp+d}, \qquad p \in \mathbb{RP}^۱$$

که:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{SL}(۲)$$

همانطور که در مثال ۲ دیدیم جبر لی $\mathbb{SL}(۲)$ مجموعهٔ ماتریس های ۲×۲ با اثر صفر است، بنابراین این جبر با ماتریس های زیر تولید می شود:

$$A_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$A_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

$$A_۳ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

بنابراین اگر $v_۱, v_۲, v_۳$ مولد های بی نهایت کوچک متناظر با هر یک از ماتریس های $A_۱, A_۲, A_۳$ باشند آنگاه:

$$v_۱ = \partial_p; \qquad v_۲ = ۲p\partial_p; \qquad v_۳ = -p^۲\partial_p;$$

که ∂_p همان $\frac{\partial}{\partial p}$ است.

تعریف ۲۹ (عمل روی توابع):

فرض کنیم ν یک میدان برداری روی M و $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد. می خواهیم بررسی کنیم که f تحت شار تولید شده توسط ν به چه چیزی تبدیل می شود. بدین معنی که ما به $f(\exp(\epsilon\nu)x)$ وقتی ϵ تغییر می کند، توجه داریم.

در مختصات موضعی، اگر $\nu = \sum_i \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ آنگاه با استفاده از قاعدهٔ زنجیری و تعریف شار داریم:

$$\frac{d}{d\epsilon}f(\exp(\epsilon\nu)x) = \sum_{i=۱}^{m}\xi^i(\exp(\epsilon\nu)x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(\exp(\epsilon\nu)x) \equiv \nu(f)[\exp(\epsilon\nu)x]. \qquad (۱۱.۱)$$

بخصوص در $\epsilon = ۰$، داریم:

$$\frac{d}{d\epsilon}\mid_{\epsilon=۰} f(\exp(\epsilon\nu)x) = \sum_{i=۱}^{m}\xi^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \nu(f)(x)$$

اکنون دلیل اصلی نماد گذاری مان برای میدان های برداری آشکار می شود.

میدان برداری ν به عنوان یک عملگر دیفرانسیلی جزئی مرتبهٔ اول روی توابع حقیقی مقدار $f(x)$ روی M عمل می کند. به علاوه با استفاده از قضیهٔ تیلور داریم:

$$f(\exp(\epsilon\nu)x) = f(x) + \epsilon\nu(f)(x) + O(\epsilon^۲)$$

لذا $\nu(f)$ یک تغییر بی نهایت کوچک در تابع f تحت شار تولید شده توسط ν می دهد. فرآیند دیفرانسیل سازی و جایگزینی با سری تیلور را می توان ادامه داد، که عبارت زیر

$$f(\exp(\epsilon\nu)x) = f(x) + \epsilon\nu(f)(x) + \frac{\epsilon^۲}{۲}\nu^۲(f)(x) + \ldots + \frac{\epsilon^k}{k!}\nu^k(f)(x) + O(\epsilon^{k+۱}) \qquad (۱۲.۱)$$

را بدست می آوریم که $\nu^k = \nu(\nu^{k-۱})$ برای هر $k \geqslant ۲$.

اگر ما فرض کنیم که تمام سری های تیلور در ϵ همگرا باشند، آنگاه سری لی:

$$f(\exp(\epsilon\nu)x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\nu^k(f)(x). \tag{۱۳.۱}$$

را برای عمل روی شار بدست می آوریم. همین نتیجه برای توابع حقیقی مقدار

$$\begin{aligned} F \ &: \ M \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ &x \longmapsto (F^1(x), \dots, F^n(x)). \end{aligned} \tag{۱۴.۱}$$

برقرار است که ما فرض می کنیم که ν مؤلفه به مؤلفه روی $F : \nu(F) = (\nu(F^1), \dots, \nu(F^n))$ عمل می کند. به خصوص اگر F تابع مختصاتی x باشد، یک سری لی برای شار خودش بدست می‌آوریم که به صورت زیر می باشد:

$$\exp(\epsilon\nu)x = x + \epsilon\xi(x) + \frac{\epsilon^2}{2}\nu(\xi)(x) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\nu^k(\xi)(x) + O(\epsilon^{k+1}). \tag{۱۵.۱}$$

که در آن $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$ و $\nu(\xi) = (\nu(\xi^1), \dots, \nu(\xi^m))$.

تعریف ۳۰ **(ناوردایی بی نهایت کوچک):**

فرض کنیم G یک گروه تبدیلات همبند باشد که روی M عمل می کند. تابع حقیقی $I : M \longrightarrow \mathbb{R}$ تحت عمل گروه G ناورداست اگر و تنها اگر برای هر $p \in M$ و $\nu \in \mathfrak{g}$ داشته باشیم:

$$\nu_p(I) = 0. \tag{۱۶.۱}$$

یادداشت ۲ : (روش عملی برای یافتن ناورداهای یک مولد بی نهایت کوچک)
هرگاه $u = \zeta(x)$ یک تابع پارامتری و $\nu = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x)\partial_{x^i}$ یک مولد بی نهایت کوچک باشد، برای آن که ζ یک ناوردا تحت G باشد باید $\nu(\zeta) = 0$ و بنابراین

$$\nu(\zeta) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x)\frac{\partial\zeta}{\partial x^i} = 0 \qquad (۱۷.۱)$$

حال برای یافتن ζ دستگاه زیر را حل می کنیم:

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \cdots = \frac{dx^n}{\xi^n(x)}. \qquad (۱۸.۱)$$

جواب های عمومی رابطهٔ (۱۸.۱) را می توان به صورت زیر نوشت:
$\zeta^1(x^1, \ldots, x^n) = c_1, \ldots, \zeta^{n-1}(x^1, \ldots, x^n) = c_{n-1}$ که $c_1, \ldots, c_{n-1}$ ثابت های انتگرال‌گیری هستند و توابع $\zeta^i(x)$ مستقل از c_i ها هستند.
بنابراین به راحتی دیده می شود که توابع $\zeta^1, \ldots, \zeta^{n-1}$ جواب هایی مستقل تابعی برای (۱۸.۱) هستند و هر جواب ناوردای دیگر برای (۱۸.۱) می بایستی تابعی بر حسب $\zeta^1, \ldots, \zeta^{n-1}$ باشد.
حال بیان می کنیم $\zeta^1, \ldots, \zeta^{n-1}$ توابع ناوردا تحت ν هستند، یعنی $\nu(\zeta^1) = 0, \ldots, \nu(\zeta^{n-1}) = 0$.

مثال ۸ : عمل گروه $SO(2)$ را روی فضای سه متغیره به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(x, y, z) \longmapsto (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t, \frac{\sin t + z\cos t}{\cos t - z\sin t}) \qquad (۱۹.۱)$$

مولد بی نهایت کوچک حاصل از این عمل به صورت زیر می باشد.

$$v = -y\partial_x + x\partial_y + (1 + z^2)\partial_z$$

با حل دستگاه:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{(1 + z^2)} \qquad (۲۰.۱)$$

دو تابع ناوردا به صورت $\eta = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\omega = \frac{xz-y}{yz+x}$ به دست می آید.

تعریف ۳۱ (مشتق کامل):

هر تابع حقیقی $F : J^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع دیفرانسیلی از مرتبه n می نامند. مشتق کامل F نسبت به هر یک از x^i ها عبارتست از یک تابع دیفرانسیلی D_iF، از مرتبه $(n+1)$، که به ازای هر تابع هموار $u = f(x)$ در رابطهٔ

$$D_i[F(x, f^{n+1}(x))] = \frac{\partial}{\partial x^i} F(x, f^n(x)). \tag{۲۱.۱}$$

صدق می کند.

مثال ۹ :

هرگاه $X \simeq \mathbb{R}^2$ و $U \simeq \mathbb{R}$ و $F : J^n \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد، آنگاه:

$$D_xF = \frac{\partial F}{\partial x} + u_x\frac{\partial F}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{xt}\frac{\partial F}{\partial u_t} + \cdots$$

$$D_tF = \frac{\partial F}{\partial t} + u_t\frac{\partial F}{\partial u} + u_{tt}\frac{\partial F}{\partial u_t} + u_{xt}\frac{\partial F}{\partial u_x} + \cdots$$

تعریف ۳۲ (مشخصه یک میدان برداری):

فرض کنیم

$$\nu = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{۲۲.۱}$$

یک میدان برداری روی E باشد، مشخصهٔ ν تابعی است به صورت $Q(x, u^{(1)})$ وابسته به x، u و u_{x^i} که به شکل زیر تعریف می شود:

$$Q^\alpha(x, u^{(1)}) = \varphi^\alpha(x,u) - \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}. \tag{۲۳.۱}$$

که $\alpha = 1, \cdots, q$ تغییر می کند.

تعریف ۳۳ (فضای جت):

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی شامل p متغیر مستقل $x = (x^1, \cdots, x^p)$ و q متغیر وابستهٔ $u = (u^1, \cdots, u^q)$ می باشد که آن ها را به عنوان مختصات موضعی دو منیفلد اقلیدسی $X \simeq \mathbb{R}^p$ و $U \simeq \mathbb{R}^q$ می توان فرض کرد. (لازم به ذکر است که کلیهٔ مفاهیمی که در طول کار ارائه می شود روی منیفلد های مختلط نیز قابل بحث است. مثلاً دو منیفلد فوق را $\mathbb{C}^p$ و $\mathbb{C}^q$ می توان فرض کرد. اما به جهت سهولت روی منیفلد های حقیقی بحث می کنیم.)

فضای کامل یک دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل توصیف شده در بالا را با E نشان می دهیم که شامل کلیهٔ متغیر های مستقل و وابستهٔ معادله است. بنابراین E یک ساختار منیفلد حاصل ضربی به صورت $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ می پذیرد.

منظور از یک تبدیل نقطه ای g، تبدیلی است که روی هر دو نوع متغیر های مستقل و وابسته عمل می کند یعنی:

$$g.(x, u) = (\tilde{x}, \tilde{u})$$

که $\tilde{x}$ و $\tilde{u}$ متغیر های جدید می باشند.

فرض کنیم $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی تعریف شده روی منیفلد X باشد، در این صورت f دارای $p_k = \binom{p+k-1}{k}$ مشتق جزئی از مرتبهٔ k است. فضای لازم برای نشان دادن مشتقات از مرتبهٔ صفر تا مرتبهٔ n-ام چنین تابعی را با $U^{(n)}$ نشان می دهیم، بنابراین، $U^{(n)}$ را به صورت زیر می توان نوشت:

$$U^{(n)} = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{p_1 q} \times \mathbb{R}^{p_2 q} \times \ldots \mathbb{R}^{p_n q} \qquad (۲۴.۱)$$

براحتی می توان دید که فضای فوق، فضایی $q^{(n)} = \binom{p+n}{n}$ بعدی است . فضای متشکل از متغیرهای مستقل و متغیرهای وابسته و مشتقات تا مرتبهٔ n-ام متغیرهای وابسته نسبت به مستقل فضای جت مرتبهٔ n-ام نامیده می شود.

تعریف ۳۴ (امتداد تابع):

قرار می دهیم $J^n = X \times U^{(n)}$ ، در این صورت J^n را فضای جت مرتبهٔ n ـام تابع f می نامند. واضح است که J^n یک منیفلد $p+q\binom{p+n}{n}$ بعدی است و همچنین، J^n یک کلاف برداری روی X است.

تابع هموار $f : X \longrightarrow U$ را به ازاء $x \in X$ و $u \in U$ به صورت $u = f(x)$ تعریف می کنیم. امتداد مرتبهٔ nـام این تابع را با $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$ نشان می دهیم که تابعی از X به $U^{(n)}$ است.

امتداد f کلیهٔ مشتقات جزئی تا مرتبهٔ nـام تابع را به دست می دهد، یا به بیان دیگر امتداد مرتبهٔ nـام تابع f فضای جت مرتبهٔ nـام تابع منهای متغیرهای مستقلش است. $f^{(\cdot)}$ ، امتداد مرتبهٔ صفر تابع f را همان f فرض می کنیم.

تعریف ۳۵ (امتداد عمل):

اگر $\Gamma_f = \{(x, f(x))\}$ گراف تابع f باشد، آنگاه :

$$\Gamma_f^{(n)} = \{(x, f^{(n)}(x))\}, \tag{۲۵.۱}$$

امتداد مرتبهٔ nـام گراف تابع f است که یک زیر منیفلد pـ بعدی از J^n می باشد.

هرگاه g یک تبدیل نقطه ای باشد که روی گراف تابع عمل کند، آنگاه امتداد مرتبهٔ nـام چنین عملی را با $g^{(n)}$ نشان می دهیم.

$g^{(n)}$ روی گراف f و مشتقات جزئی تا مرتبهٔ n عمل می کند.

این بدان معنی است که $g^{(n)}$ روی J^n عمل می کند. به همین ترتیب، اگر G یک گروه تبدیلات نقطه ای باشد، آنگاه $G^{(n)}$ امتداد مرتبهٔ nـام گروه G است.

مثال ۱۰ : عمل گروه تبدیلات نقطه ای $SO(2)$ روی $\mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(x,u) \longmapsto (x\cos t - u\sin t, x\sin t + u\cos t) \qquad (۲۶.۱)$$

تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} u &= f(x) \\ &= f'(x_0)(x-x_0)+u_0. \end{aligned} \qquad (۲۷.۱)$$

که $u \neq x\cot t$.

امتداد مرتبه اول f به صورت J^1 $f^{(1)}:\mathbb{R}\longrightarrow$ می باشد و ضابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \frac{\sin t + f'(x_0)\cos t}{\cos t - f'(x_0)\sin t}\tilde{x} + \frac{u_0 - f'(x_0)x_0}{\cos t - f'(x_0)\sin t}$$

همچنین امتداد مرتبهٔ اول عمل فوق به شکل زیر قابل نمایش است:

$$\begin{aligned} t^{(1)}(x,u,u_x) &= (\tilde{x},\tilde{u},\tilde{u_x}) \\ &= (x\cos t - u\sin t, x\sin t + u\cos t, \frac{\sin t + u_x\cos t}{\cos t - u_x\sin t}) \end{aligned} \qquad (۲۸.۱)$$

تعریف ۳۶ (تعریف کلی تقارن):

تقارن در حالت کلی یک نگاشت است از یک شئ ریاضی به خودش یا به شئ دیگر ریاضی که برخی خواص اشیاء را ثابت نگه می دارد.

تعریف ۳۷ (گروه تقارنی سیستم معادلات دیفرانسیل):

فرض کنید φ یک سیستم معادلات دیفرانسیل باشد. یک گروه تقارنی از سیستم معادلات φ یک گروه تبدیلات موضعی G است که روی زیر مجموعهٔ باز M از فضای متغیرهای مستقل و وابستهٔ سیستم عمل می کند با این خاصیت که اگر $u = f(x)$ یک جواب برای φ باشد و اگر $g.f$ برای $g \in G$ تعریف شده باشد آنگاه $\tilde{u} = g.f(x)$ یک جواب دیگر سیستم معادلات φ باشد، یا به عبارت ساده تر گروه تقارنی G جواب را به جواب می برد. (رجوع شود به پیوست آ)

تعریف ۳۸ (میدان برداری تعمیم یافته):

فرض کنید میدان برداری

$$\nu = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{۲۹.۱}$$

یک مولد بی نهایت کوچک از عمل G روی منیفلد M را نشان دهد و $Q = (Q^1, \cdots, Q^q)$ مشخصهٔ آن باشد. گوئیم:

$$\nu^{(n)} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{0 \le k = \# J \le n} \varphi_J^\alpha(x,u^{(k)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}. \tag{۳۰.۱}$$

امتداد مرتبهٔ n-ام ν یا مولد بی نهایت کوچک امتداد یافتهٔ عمل $G^{(n)}$ روی J^n متناظر با آن است، که ضرائب تابعی φ_J^α از فرمول امتدادی مشهور زیر بدست می آیند:

$$\varphi_J^\alpha = D_J Q^\alpha + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha. \tag{۳۱.۱}$$

که با جایگذاری Q^α از رابطهٔ (۲۴.۱) داریم:

$$\varphi_J^\alpha = D_J(\varphi^\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i . u_{J,i}^\alpha \tag{۳۲.۱}$$

که $D_J = D_{j_1} \cdots D_{j_k}$ متناظر با مشتق کلی مکرر، $u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$ و $u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i}$ می باشند.

تعریف ۳۹ (خواص توسیع میدان های برداری):

فرض کنید v و w میدان های برداری هموار روی $M \subset X \times U$ باشند، آنگاه توسیع مرتبهٔ n-ام آنها با ثابت های $c, c' \in \mathbb{R}$، خواص زیر را دارد:

$$(cv + c'w)^{(n)} = cv^{(n)} + c'w^{(n)}.$$

$$[v, w]^{(n)} = [v^{(n)}, w^{(n)}].$$

مثال ۱۱ : فرض کنید $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$، میدان برداری کلی

$$\nu = \xi(x, u)\partial_x + \varphi(x, u)\partial_u.$$

بر $M = \mathbb{R}^{(2)}$ را در نظر بگیرید. مشخصهٔ میدان برداری ν تابع

$$Q(x, u, u_x) = \varphi(x, u) - \xi(x, u)u_x.$$

می باشد. از یادداشت ۱ نتیجه می گیریم که تابع $u = f(x)$ تحت گروه یک-پارامتری تولید شده توسط ν ناورداست، اگر و تنها اگر در معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

$$\xi(x, u)u_x = \varphi(x, u).$$

صدق کند.

امتداد مرتبهٔ دوم ν یک میدان برداری بر $J^۲$ بصورت:

$$\nu^{(۲)} = \xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \varphi^x(x,u^{(۱)})\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^{xx}(x,u^{(۲)})\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

می باشد که ضرایب φ^x و φ^{xx} به صورت زیر:

$$\varphi^x = D_x Q + \xi u_x x = \varphi_x + (\varphi_u - \xi_x)u_x - \xi_u u_x^۲.$$

$$\begin{aligned}\varphi^{xx} &= D_x^۲ Q + \xi u_{xxx} = \varphi_{xx} + (۲\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x + (\varphi_{uu} - ۲\xi_{xu})u_x^۲ \\ &\quad -\xi_{uu}u_x^۳ + (\varphi_u - ۲\xi_x)u_{xx} - ۳\xi_x u_x u_{xx}.\end{aligned}$$

محاسبه می شوند.

برای مثال امتداد دوم از مولد بی نهایت کوچک

$$\nu = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u}.$$

به صورت زیر است:

$$\nu^{(۲)} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (۱ + u_x^۲)\frac{\partial}{\partial u_x} + ۳u_x u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

که ضرائب این گونه محاسبه شده اند:

$$\varphi^x = D_x Q + \xi u_x x = \varphi_x + D_x(x + uu_x) - uu_{xx} = ۱ + u_x^۲.$$

$$\varphi^{xx} = D_x^۲ Q + \xi u_{xxx} = D_x^۲(x + uu_x) - uu_{xxx} = ۳u_x u_{xx}.$$

در این صورت گروه تبدیلات را به آسانی با انتگرال گیری از دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt} = -u, \qquad \frac{du}{dt} = x, \qquad \frac{dp}{dt} = ۱ + p^۲, \qquad \frac{dq}{dt} = ۳pq$$

دوباره می توان به دست آورد، که در اینجا برای راحتی $p = u_x$ و $q = u_{xx}$ قرار می دهیم، پس امتداد دوم از گروه دورانی به صورت زیر است:

$$(x\cos t - u\sin t, x\sin t + u\cos t, \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - p\sin t}, \frac{q}{(\cos t - p\sin t)^۳}).$$

تعریف ۴۰ (سیستم معادلات دیفرانسیل):

یک سیستم معادلات دیفرانسیل φ، تشکیل شده از p متغیر مستقل و q متغیر وابسته، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = ۰$، $(\nu = ۱, ..., \ell)$ تعریف می کند که شامل p متغیر مستقل $x = (x^۱, ..., x^p)$ و q متغیر وابستهٔ $u = (u^۱, ..., u^q)$ و مشتقات u برحسب x تا مرتبهٔ n-ام است. تابع $\Delta(x, u^{(n)}) = (\Delta_۱(x, u^{(n)}), ..., \Delta_\ell(x, u^{(n)}))$ تابعی هموار در هر مؤلفه اش است، بنابراین Δ را می توان به صورت یک نگاشت هموار از فضای جت $X \times U^{(n)}$ به یک فضای برداری ℓ-بعدی اقلیدسی در نظر گرفت.

$$\Delta : X \times U^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

تعریف ۴۱ (ماتریس ژاکوبی):

فرض کنید U زیر مجموعهٔ بازی از $\mathbb{R}^n$ باشد و تابع $f = (f^1, \dots, f^n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی از U روی $\mathbb{R}^n$ باشد ماتریس مشتقات جزئی $[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}]$ را ماتریس ژاکوبی f می نامیم و دترمینان آن یعنی $\det[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}]$ را دترمینان ژاکوبی f می نامیم.

تعریف ۴۲ (حالت ماکزیمم رتبه برای تابع):

فرض کنید $F : M \longrightarrow N$ یک نگاشت هموار از منیفلد m- بعدی M به منیفلد n- بعدی N باشد. رتبهٔ F در نقطهٔ $x \in M$ برابر است با رتبهٔ ماتریس ژاکوبی $n \times m$، $(\frac{\partial F^i}{\partial x^j})$ در x. نگاشت F روی زیر مجموعهٔ $S \subset M$ از ماکزیمم رتبه است هرگاه برای هر $x \in S$ رتبهٔ F بیشترین مقدار ممکن باشد.

تعریف ۴۳ (سیستم معادلات دیفرانسیل با ماکزیمم رتبه):

فرض کنید

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \qquad \nu = 1, \dots, l$$

یک سیستم معادلات دیفرانسیل باشد. این سیستم از ماکزیمم رتبه است اگر ماتریس ژاکوبی زیر:

$$J_\Delta(x, u^{(n)}) = (\frac{\partial \Delta_u}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_J^\alpha})$$

از Δ نسبت به تمام متغیرهای $(x, u^{(n)})$ وقتی که $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ از رتبهٔ l (به تعداد معادلات دستگاه معادلات دیفرانسیل) باشد. یا به عبارت ساده تر، معادلات دستگاه دو به دو مستقل از یکدیگر باشند.

تعریف ۴۴ *(شرط لازم برای گروه تقارنی سیستم معادلات دیفرانسیل):*

فرض کنید $\Delta_\nu(x,u^{(n)}) = ۰$، $(\nu = ۱,...,\ell)$ *یک سیستم معادلات دیفرانسیل از ماکزیمم رتبه باشد که روی* $M \subset X \times U$ *تعریف شده است، اگر* G *یک گروه تبدیلات موضعی روی* M *باشد و*

$$v^{(n)}[\Delta_\nu(x,u^{(n)})] = ۰, \quad \nu = ۱,...,\ell.$$

وقتی $\Delta(x,u^{(n)}) = ۰$ *که* v *یک مولد بی نهایت کوچک دلخواه* G *است، آنگاه* G *گروه تقارنی سیستم* $\Delta_\nu(x,u^{(n)}) = ۰$ *است.*

تعریف ۴۵ *:*

فرض کنید Δ *یک سیستم معادلات دیفرانسیل از ماکزیمم رتبه باشد که روی* $M \subset X \times U$ *تعریف شده است، مجموعهٔ تمام تقارن های بی نهایت کوچک این سیستم یک جبر لی از میدان های برداری روی* M *تشکیل می دهد. علاوه بر آن اگر این جبر لی از بعد متناهی باشد، گروه تقارنی این سیستم یک گروه تقارنی از تبدیلات است که روی* M *عمل می کند.*

فصل ۲

مقدمه ای کوتاه بر گروه های لی

گروههای لی در حد فاصل بین دو شاخهٔ بزرگ ریاضیات یعنی جبر و گروه لی و توپولوژی قرار دارند. ویژگی جبری آنها از اصول موضوعهٔ گروه گرفته می شود و خواص هندسی آنها از پارامتری کردن عناصر این گروه به وسیلهٔ نقاطی از یک منیفلد دیفرانسیل پذیر گرفته می شود.
تبدیلات پیوسته در ابتدا توسط ماریوس سوفوس لی در سال ۱۸۷۴ به عنوان یک ابزار سودمند برای حل کردن معادلات دیفرانسیل معمولی معرفی شدند.

این کار لی به تعریف و مطالعهٔ گروه های لی منجر شد. وی دریافت که ساختار مربوط به یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مشخص می کند که آن معادله قابل حل یا ساده شدن است یا نه و علاوه بر آن، وی راه و روشی برای حل یا ساده تر کردن معادلات دیفرانسیل ارائه داد.
لی در ادامه به بررسی گروه هایی از معادلات دیفرانسیل پرداخت که ناوردا باشند، پس از آن او به مطالعهٔ نتایجی که این نظریه خواهد داشت، پرداخت که امروزه آنها را با نام گروه های لی می شناسیم.
گروه های لی در نوع خود بسیار زیبا هستند، آنقدر زیبا که خود به تنهایی به عنوان ابزاری برای حل معادلات دیفرانسیل و مطالعهٔ توابع خاصی که توسط دستهٔ خاصی از این معادلات تعیین می شود به کار می روند.

میراث به جا مانده از سوفوس لی استفاده از تئوری گروه و هندسهٔ دیفرانسیل برای مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل است. کارهای لی بعد از سال ۱۹۱۴ تقریباً به دست فراموشی سپرده شد. ولی در سالهای اخیر دوباره این فعالیت ها و مطالعات از سر گرفته شده و به نوبهٔ خود بیشترین مطالعات و مقالات در ریاضیات عصر حاضر را به خود اختصاص داده است. همچنین قابل توجه است که این رنسانس و تحول در موضوع فوق به منزلهٔ یک پایهٔ تاریخی از تئوری گروه های لی است، زیرا از یکسری از

مقالات ریاضی، فیزیک، شیمی و مهندسی که مورد بحث و بررسی قرار گرفته اند بدست آورده اند که اشتراکاتی بین تئوری گروه و ساختار هندسی وجود دارد، مشابه به آنچه در گذشته توسط سوفوس لی و دیگران انجام می گرفت.

تقسیم بندی گروه های لی :

گروه های لی به دو دستهٔ پایه ای تقسیم می شوند: گروه های لی **حل پذیر** و **ساده** .
گروه های لی ساده این ویژگی را دارند که خود را تحت خاصیت جابجایی باز تولید می کنند، بر خلاف آنها گروه های لی حل پذیر این گونه نیستند و شامل زنجیره ای از زیر گروه ها هستند که هر کدام یک زیر گروه ناوردا از زیر گروه ما قبل خود است.
گروه های ساده و حل پذیر خشت های بنای گروه های لی هستند، گروه های نیمه ساده ضرب مستقیم گروه های لی ساده اند، گروه های غیر نیمه ساده نیم ضرب مستقیم گروه های ساده با زیر گروه های ناوردای حل پذیر هستند.[۲۵]

گروه های حل پذیر مربوط به معادلات دیفرانسیل حل پذیر و یا حداقل ساده شونده است، اما گروه های ساده به قدری موضوعات جالبی را پیش می کشند که بیشتر تلاش ریاضی دانان در یک قرن اخیر تنها در دسته بندی کردن و شمارش کامل و بررسی ویژگی های آنها مصروف گشته است.
با این وجود هنوز هم یک دسته بندی کامل از گروه های لی حل پذیر و بنابراین گروه های لی غیر نیمه ساده بیان نشده است.

فصل ۳

معرفی و تاریخچهٔ معادلهٔ حرارت

فرم کلی معادلهٔ یک بعدی غیر خطی حرارت را در ادامه خواهیم دید. این معادله از شکل کلی معادلهٔ انتشار جسم انتقال دهندهٔ گرما به فرم زیر بدست می آید.

$$g(x)u_t = (f(u)u_x)_x + h(u)u_x. \tag{۱.۳}$$

بررسی معادلات غیر خطی حرارت با استفاده از روش تقارن ها اولین بار توسط «اوزیانیکوف[۱]» در سال ۱۹۵۹ و روی معادلهٔ زیر بود.

$$u_t = (f(u)u_x)_x. \tag{۲.۳}$$

در سال ۱۹۸۷ «ابراگیموف[۲]» ، « گازیزوف[۳] » و «آخاتوف[۴] » معادلهٔ زیر را بر حسب تقارن هایش طبقه بندی کردند.

$$u_t = G(u_x)u_{xx}. \tag{۳.۳}$$

«درودنیستین[۵] » درسال ۱۹۸۲ گروه معادلهٔ زیر را طبقه بندی کرد.

$$u_t = (G(u)u_x)_x + g(u). \tag{۴.۳}$$

[۱] Ovsiannikov [۲] Ibragimov [۳] Gazizov [۴] Akhatov [۵] Dorodnitsyn

«اورون [۶]» و «رزوناو [۷]» در ۱۹۸۶ و « ادواردز [۸] » در ۱۹۹۴ در زمان خودشان بزرگ ترین و کامل ترین لیست از تقارن های معادلهٔ:

$$u_t = (G(u)u_x)_x + f(u)u_x. \tag{۵.۳}$$

را طبقه بندی کرده و نشان دادند.

نتایج بدست آمده بعدها توسط « چرنیها [۹] » و « سروو [۱۰] » تحت عنوان معادلهٔ غیر خطی حرارت با شرط انتقال گرما به صورت زیر نشان داده شد.

$$u_t = (G(u)u_x)_x + f(u)u_x + g(u). \tag{۶.۳}$$

جدای از نقطه نظر تئوری ما برای بررسی معادله، معادلاتی به شکل (۱.۳) برای مدل سازی مفاهیم زیادی در فیزیک، مهندسی، شیمی و زیست شناسی به کار می روند.
اگر در معادلهٔ (۱.۳) در نظر بگیریم $g(x) = ۱$، این معادله به صورت معادله بررسی انتقال آب در یک فضای همگن غیر دگردیس پذیر بیان می شود[۴،۵]. اگر $h(u) = ۰$ باشد، این نوع معادلات حرکات ایستایی از یک لایهٔ مرزی سیال روی سطح هموار را توصیف می کنند و یک گرداب از سیال تراکم ناپذیر در یک سطح پرمنفذ از چگالی و فشار گاز را بررسی می کنند[۶،۷].
حال اگر دو حالت $g(x) = ۱$ و $h(u) = ۰$ را بر معادله تحمیل کنیم، معادله غیر خطی حرارت به صورت زیر حاصل می شود.

$$u_t = (f(u)u_x)_x. \tag{۷.۳}$$

معادله خطی حرارت با قرار دادن $f(u) = ۱$ به صورت زیر حاصل می شود:

$$u_t = u_{xx}. \tag{۸.۳}$$

که این یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) است که فلوی گرما (حرارت) را در یک ماده توصیف می کند که در آن میزان جریان حرارت متناسب با گرادیان دما است.

[۶] Oron [۷] Rosenau [۸] Edwards [۹] Cherniha [۱۰] Serov

به معادلهٔ حرارت، معادلهٔ انتشار نیز می گویند، چون همان معادله می تواند برای توصیف انتشار مقادیر دیگری بجز گرما و حرارت نیز استفاده شود.

معادلهٔ (۷.۳) با رویکردهای مختلفی بررسی شده است، روش تقارن های کلاسیک برای اولین بار روی معادلهٔ (۷.۳) در مرجع [۸] بررسی شده است و نتایج به معادلات غیر خطی حرارت با انتقال گرما در [۹] گسترش داده شده است.

معادلات به شکل (۱.۳) از روش هایی غیر از روش تقارن های کلاسیک نیز بررسی می شوند. به عنوان مثال تقارن های پتانسیل زیر کلاسی از (۷.۳) هستند با $g(x) = 1$ و $h(u) = 0$ که در مرجع های [۱۰،۱۱] بررسی شده اند. برخی از خواص تقارن ها کلی تر از حالت (۱.۳) هستند، به بیان دقیق تر:

$$g(x)u_t = (k(x)f(u)u_x)_x + h(u)u_x. \tag{۹.۳}$$

که در مقاله [۱۲] بحث شده اند.

ساختار تقریبی جواب های معادلهٔ غیر خطی چند بعدی حرارت و جواب های دقیق برای رسانایی غیر خطی در [۱۳،۱۴] مورد بحث و بررسی قرار گرفته اند.

در این نوشتار سعی ما بر آن است که تقارن های لی برای معادلات غیر خطی حرارت به شکل (۷.۳) را بررسی کنیم، اما به شکل کلی تر و جامع تری به صورت فضای (۱+۲)-بعدی از متغیرهای مستقل. به بیان واضح تر ۳ متغیر مستقل x, y, t و یک متغیر وابسته $u = u(x, y, t)$ را در نظر می-گیریم و معادلهٔ زیر را بررسی می کنیم:

$$u_t = (f(u)u_x)_y. \tag{۱۰.۳}$$

این معادله در تئوری یک معادلهٔ جالب است برای بررسی مقدماتی و ابتدایی تکنیک های تقارن و کاربرد های آن.

به عنوان مثال، برای حالت $f(u) = u^{-1}$ که معادل است با معادلهٔ دو بعدی ریچی-فلو که یک معادله با مفاهیم فراوان در بحث گرانش است.

این نوشتار به صورت زیر شکل گرفته است، بعد از بخش های مقدماتی در بخش آینده، دستگاه های معادلات معین برای اپراتورهای تقارن های لی متناظر با (۱۰.۳) با استفاده از تکنیک خاص پرداختن به معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ دوم با ۳ متغیر مستقل و یک متغیر وابسته بدست می آیند.

در بخش بعد، دو حالت از حالت های ممکن برای تابع f که تقارن های غیر بدیهی برای (۱۰.۳) می دهند، بررسی خواهند شد. برای این موارد، مولدهای تقارن لی، مقادیر ناوردایی هستند که به آنها می پیوندند و جواب های مشابه (همسان) را تولید می کنند.
ارتباط بحث ما با معادلهٔ یک بعدی غیر خطی حرارت در [۱۵] بحث شده و ارتباط بحث ما با نتایج بدست آمده برای مدل دو بعدی ریچی - فلو در [۱۶] بخش پایانی مقاله هستند.
برخی نتایج نیز در آخر بحث آمده اند.

فصل ۴

رویکرد کلی

تقارن های لی برای یک معادلهٔ (PDE) یک روش کلاسیک است که جواب های معادله را تحت یک گروه لی موضعی از تبدیلات بی نهایت کوچک، ناوردا نگه می دارد.

در این بخش در مورد تقارن های لی برای معادله (۱۰.۳) صحبت می کنیم.
بحث را با رابطهٔ زیر آغاز می کنیم:

$$u_t - f_u u_y u_x - f(u) u_{xy} = ۰. \qquad (۱.۴)$$

یک گروه یک پارامتری تبدیلات که روی فضای متغیرهای مستقل (x, y, t) و تنها متغیر وابستهٔ u در معادله (۱.۴) عمل می کند را در نظر بگیرید. این گروه مولد بی نهایت کوچک به صورت زیر دارد:

$$U(x, y, t, u) = \xi^{۱}(x, y, t, u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^{۲}(x, y, t, u)\frac{\partial}{\partial y} + \varphi(x, y, t, u)\frac{\partial}{\partial t} + \sigma(x, y, t, u)\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (۲.۴)$$

شرط ناوردایی برای PDE درجه دوم (۱.۴) به صورت زیر است:

$$U^{(۲)}[u_t - f_u u_y u_x - f(u) u_{xy}] = ۰. \qquad (۳.۴)$$

که $U^{(2)}$ نمایش توسیع مرتبهٔ دوم اپراتور U به شکل کلی زیر است:

$$\begin{aligned}U^{(2)} &= U+\sigma^x\frac{\partial}{\partial u_x}+\sigma^y\frac{\partial}{\partial u_y}+\sigma^t\frac{\partial}{\partial u_t}+\sigma^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+\sigma^{xy}\frac{\partial}{\partial u_{xy}}+\sigma^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}}\\ &\quad+\sigma^{yy}\frac{\partial}{\partial u_{yy}}+\sigma^{yt}\frac{\partial}{\partial u_{yt}}+\sigma^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}. \qquad (۴.۴)\end{aligned}$$

رابطهٔ (۳.۴) با رابطهٔ زیر معادل است: (یعنی با اثر دادن $U^{(2)}$ روی معادله (۱.۴) داریم):

$$\sigma[-f_{uu}u_xu_y-f_uu_{xy}]+\sigma^x[-f_uu_y]+\sigma^y[-f_uu_x]+\sigma^t-f(u)\sigma^{xy}=0. \qquad (۵.۴)$$

با استفاده از روابط زیر برای یافتن $\sigma^x,\sigma^y,\sigma^t,\sigma^{xy}$ داریم:

$$U=\sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\sigma_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \qquad (۶.۴)$$

که رابطهٔ توسیع به صورت زیر است:

$$U^{(n)}=U+\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J}\sigma_\alpha^J(x,u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}. \qquad (۷.۴)$$

و نیز می دانیم که:

$$\sigma_\alpha^J=D_J(\sigma_\alpha-\sum_{i=1}^{p}\xi^iu_i^\alpha)+\sum_{i=1}^{p}\xi^iu_{J,i}^\alpha. \qquad (۸.۴)$$

حال پس از انجام محاسبات داریم:

$$\sigma^x = \sigma_x + (\sigma_u - \xi^1_x)u_x - \xi^1_u u_x^2 - \xi^2_x u_y - \xi^2_u u_x u_y - \varphi_x u_t - \varphi u_x u_t. \qquad (۹.۴)$$

$$\sigma^y = \sigma_y + (\sigma_u - \xi^2_y)u_y - \xi^2_u u_y^2 - \xi^1_y u_x - \xi^1_u u_x u_y - \varphi_y u_t - \varphi_u u_y u_t. \qquad (۱۰.۴)$$

$$\sigma^t = \sigma_t + (\sigma_u - \varphi_t)u_t - \xi^1_t u_x - \xi^1_u u_x u_t - \xi^2_t u_y - \xi^2_u u_y u_t - \varphi_u u_t^2. \qquad (۱۱.۴)$$

$$\begin{aligned}\sigma^{xy} &= \sigma_{xy} + [\sigma_{yt} - \xi^1_{xy}]u_x + [\sigma_{xu} - \xi^2_{xy}]u_y + [\sigma_{uu} - \xi^1_{xu} - \xi^2_{yu}]u_x u_y - 2\xi^1_u u_x u_{xy}\\ &\quad +[\sigma_u - \xi^1_x - \xi^2_y]u_{xy} - [\varphi_y + \varphi_t]u_{yt} - \xi^1_{yu}u_x^2 - \xi^1_y u_{xx} - \xi^1_u u_x^2 u_y - \xi^1_u u_{xx}u_y\\ &\quad -\xi^2_{xu}u_y^2 - \xi^2_{uu}u_x u_y^2 - 2\xi^2_u u_y u_{yy} - \xi^2_x u_{yy} - \xi^2_u u_x u_{yy} - \varphi_{xy}u_t - \varphi_{yu}u_x u_t\\ &\quad -\varphi_{xu}u_y u_t - \varphi_{uu}u_x u_y u_t - \varphi_u u_{xy}u_t - \varphi_u u_y u_{xt} - \varphi_u u_x u_{yt} \qquad (۱۲.۴)\end{aligned}$$

که با تعویض کردن u_t با $f_u u_y u_x + f(u)u_{xy}$ در عبارات فوق داریم:

$$\begin{aligned}\sigma^x &= \sigma_x + [\sigma_u - \xi^1_x]u_x - \xi^1_u u_x^2 - \xi^2_x u_y - [f_u\varphi_x + \xi^2_u]u_x u_y - f_u\varphi_u u_x^2 u_y\\ &\quad -f(u)\varphi_x u_{xy} - f(u)\varphi_u u_x u_{xy}. \qquad (۱۳.۴)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^y &= \sigma_y + [\sigma_u - \xi^2_y]u_y - \xi^1_y u_x - \xi^2_u u_y^2 - [f_u\varphi_y + \xi^1_u]u_x u_y - f_u\varphi_u u_x u_y^2\\ &\quad -f(u)\varphi_y u_{xy} - f(u)\varphi_u u_y u_{xy}. \qquad (۱۴.۴)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^t &= \sigma_t + [\sigma_u f_u - \varphi_t f_u]u_x u_y + f(u)[\sigma_u - \varphi_t]u_{xy} - \xi^1_u f_u u_x^2 u_y - \xi^1_u f(u)u_x u_{xy}\\ &\quad -\xi^2_u f_u u_x u_y^2 - \xi^2_u f(u)u_y u_{xy} - \xi^1_t u_x - \xi^2_t u_y - \varphi_u f_u^2 u_x^2 u_y^2 - \varphi_u f^2(u)u_{xy}^2\\ &\quad -2\varphi_u\sigma_u f(u)u_x u_y u_{xy}. \qquad (۱۵.۴)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^{xy} &= \sigma_{xy}+[\sigma_{xu}-\xi^{2}_{xy}]u_y+[\sigma_{yu}-\xi^{1}_{xy}]u_x+[\sigma_{uu}-\xi^{1}_{xu}-\xi^{2}_{yu}-\varphi_{xy}f_u]u_xu_y-\xi^{1}_{yu}u_x^{2}\\
&+[\sigma_u-\xi^{1}_x-\xi^{2}_y-\varphi_{xy}f(u)]u_{xy}-[\xi^{1}_{uu}+\varphi_{yu}f_u+\varphi_yf_{uu}]u_x^{2}u_y-\xi^{1}_yu_{xx}-\xi^{1}_uu_yu_{xx}\\
&-\xi^{2}_{xu}u_y^{2}-[\varphi_{yu}f(u)-2\varphi_yf_u]u_xu_{xy}-\xi^{2}_xu_{yy}-[\xi^{2}_{uu}+\varphi_{xu}f_u+\varphi_xf_{uu}]u_xu_y^{2}\\
&-[\xi^{2}_u+\varphi_xf_u]u_xu_{yy}-[\varphi_{xu}f(u)+2\varphi_xf_u]u_yu_{xy}-[\varphi_{uu}f_u+2\varphi_uf_{uu}]u_x^{2}u_y^{2}\\
&-\varphi_uf(u)u_{xy}^{2}-[\varphi_{uu}f(u)+5\varphi_uf_u]u_xu_yu_{xy}-\varphi_xf(u)u_{xyy}-\varphi_uf_uu_x^{2}u_{yy}\\
&-\varphi_uf(u)u_xu_{xyy}-\varphi_uf_uu_x^{2}u_{yy}-\varphi_uf(u)u_xu_{xyy}-\varphi_yf_uu_{xx}u_y-\varphi_yf(u)u_{xxy}\\
&-\varphi_uf_uu_y^{2}u_{xx}-\varphi_uf(u)u_yu_{xxy}. \qquad (16.4)
\end{aligned}$$

با قرار دادن عبارت های ((۱۶.۴)-(۱۳.۴)) در شرط ناوردایی (۵.۴) و صفر کردن ضرائب چند جمله ای ها بر اساس مشتقات $u(x,y,t)$، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل شامل (۲۰) معادله برای توابع مجهول $\xi^{1}(x,y,t,u),\xi^{2}(x,y,t,u),\varphi(x,y,t,u),\sigma(x,y,t,u)$ بدست می آید، این سیستم را می توانیم به صورت زیر کاهش بدهیم، داریم:

$$\sigma_t-f(u)\sigma_{xy}=0. \qquad (17.4)$$

$$\xi^{1}_t+\sigma_yf_u(u)+f(u)\sigma_{yu}=0. \qquad (18.4)$$

$$\xi^{2}_t+\sigma_xf_u(u)+f(u)\sigma_{xu}=0. \qquad (19.4)$$

$$-\sigma f_u(u)+f(u)[-\varphi_t+\xi^{1}_x+\xi^{2}_y]=0. \qquad (20.4)$$

$$-f_{uu}(u)\sigma+f_u(u)[\xi^{1}_x+\xi^{2}_y-\varphi_t-\sigma_u]-f(u)\sigma_{uu}=0. \qquad (21.4)$$

که داریم $\xi^{1}=\xi^{1}(x,t),\xi^{2}=\xi^{2}(y,t),\varphi=\varphi(t),\sigma=\sigma(x,y,t)$.

واضح است که با انتخاب های خاص $f(u)$، عبارات بنیادین برای اپراتورهای تقارنی لی متناظر یافت می شوند. در بخش آینده به حالت های مختلف انتخاب تابع $f(u)$ می پردازیم.

فصل ۵

تقارن های اساسی و ناورداها

۱.۵ بررسی کلی

بحث را با بررسی تمام حالت های ممکن انتخاب $f(u)$ که در سیستم قبلی ظاهر می شوند آغاز میکنیم. این حالت های مختلف ما را به سمت جواب های غیر بدیهی اپراتور های تقارن (۲.۴) هدایت می کنند. به این منظور، با مشتق گرفتن بر حسب u از (۲۰.۴) و استفاده از معادلهٔ (۲۱.۴) داریم:

$$-\sigma_u f_u(u) - \sigma f_{uu}(u) + f_u(u)[-\varphi_t + \xi^1_x + \xi^2_y] = 0 \tag{۱.۵}$$

$$-f_{uu}(u)\sigma + f_u(u)[\xi^1_x + \xi^2_y - \varphi_t] - \sigma_u f_u(u) - f(u)\sigma_{uu} = 0 \tag{۲.۵}$$

لذا داریم:

$$f(u)\sigma_{uu} = 0 \Longrightarrow \sigma_{uu} = 0 \tag{۳.۵}$$

جواب (۳.۵) به صورت زیر است (یعنی σ بر حسب u خطی است).

$$\sigma = \sigma^1(x,y,t)u + \sigma^0(x,y,t) \tag{۴.۵}$$

با در نظر گرفتن رابطهٔ (۳.۵) و قرار دادن در (۱.۵) داریم:

$$(\sigma^1 + \sigma^0)f_u(u) = [-\varphi_t + \xi^1_x + \xi^2_y]f(u) \tag{۵.۵}$$

توابع $\sigma^1, \sigma^0, \varphi, \xi^2, \xi^1$ به u بستگی ندارند، بنابراین بعد از مقدار دهی به x, t داریم:

$$(au + b)f_u = cf \tag{۶.۵}$$

که a, b مقادیر ثابت هستند.

حال با مقدار دهی به a, b, c، حالت های مختلفی که برای $f(u)$ رخ می دهد را بررسی می کنیم. اگر $a \neq 0$ می توان بدون از دست دادن کلیت فرض کرد که $a = 1$ است. جواب کلی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &(au + b)f_u = cf \Longrightarrow (u + b)f_u = cf \Longrightarrow \frac{f_u}{f} = \frac{c}{u + b} \Longrightarrow \\ &\int \frac{f_u}{f} du = \int \frac{c}{u + b} du \Longrightarrow ln(f) = cln(u + b) = ln(u + b)^c \end{aligned} \tag{۷.۵}$$

بنابر این محاسبات داریم:

$$f(u) = A|u + b|^c \tag{۸.۵}$$

بعلاوه می توانیم از هم ارزی تبدیلات نیز استفاده کنیم (پیمایش متناظر با t و انتقال متناظر با u) با قرار دادن $A = 1$ و $b = 0$ و بعد از تعریف دوبارهٔ $c = \alpha$ داریم:

$$f(u) = |u|^\alpha \tag{۹.۵}$$

حال اگر قرار دهیم $a = 0, b \neq 0$ بدون از دست دادن کلیت می توان فرض کرد $b = 1$، داریم:

$$(au+b)f_u = cf \Longrightarrow f_u = cf \Longrightarrow \int \frac{f_u}{f} du = \int c du \Longrightarrow f = Ae^{cu}$$

بعلاوه می توانیم از تبدیلات هم ارزی استفاده کنیم (پیمایش متناظر با u, t) با قرار دادن $A = 1$ و $c \in \{0, 1\}$ داریم:

$$f = 1 \qquad , \qquad f = e^u \tag{۱۰.۵}$$

حالت $a = b = 0$ متناظر است با حالت کلی و اصلی که روی f هیچ محدودیتی نیست.

نتیجه گیری:

حالت های غیر هم ارز زیر را برای f می توان در نظر گرفت:

۱. $f = 1$

۲. $f = \frac{1}{u}$

۳. $f = e^u$

۴. $f = u^\alpha$

که در حالت آخر $\alpha \neq 0, 1$.

حالت اول متناظر است با معادلهٔ دو-بعدی خطی حرارت، حالت دوم در [۱۶] بررسی شده است و دو حالت دیگر در ادامه بررسی خواهند شد.

۲.۵ حالت $f(u)=u^{\alpha}$:

در این حالت معادلهٔ دو-بعدی غیر خطی حرارت به شکل زیر در می آید:

$$u_t - \alpha u^{\alpha-1}u_yu_x - u^{\alpha}u_{xy} = 0 \qquad (11.5)$$

برای این انتخاب $f(u)$، معادلات معین ((۲۱.۴)-(۱۷.۴)) از تقارن های کلاسیک متناظر با (۱.۴) به صورت زیر هستند:

$$\sigma_t - u^{\alpha}\sigma_{xy} = 0 \qquad (12.5)$$

$$\xi^1_t + \alpha u^{\alpha-1}\sigma_y + u^{\alpha}\sigma_{yu} = 0$$

$$\xi^2_t + \alpha u^{\alpha-1}\sigma_x + u^{\alpha}\sigma_{xu} = 0$$

$$\alpha u^{\alpha-1}\sigma - u^{\alpha}[-\varphi_t + \xi^1_x + \xi^2_y] = 0$$

$$\alpha(1-\alpha)u^{\alpha-2}\sigma + \alpha u^{\alpha-1}[\xi^1_x + \xi^2_y - \varphi_t - \sigma_u] - u^{\alpha}\sigma_{uu} = 0$$

که داریم $\xi^1(x,t), \xi^2(y,t), \varphi(t), \sigma(x,y,t,u)$.

با حل کردن دستگاه (۱۲.۵) دو جواب متفاوت برای $(i)\alpha \neq -1$ و $(ii)\alpha = -1$ می یابیم.
برای حالت $\alpha \neq -1$ جواب به صورت زیر است:

$$\xi^1(x) = c_1x + c_2; \qquad (13.5)$$

$$\xi^2(y) = c_3y + c_4;$$

$$\varphi(t) = c_5t + c_6;$$

$$\sigma(u) = \frac{1}{\alpha}[c_1 + c_3 - c_5]u;$$

که c_i برای $i = 1, \dots, 6$ ثابت های دلخواه هستند.

مولد تقارن لی برای (۱۱.۵) به صورت زیر است:

$$U = [c_۱ x + c_۲]\partial_x + [c_۳ y + c_۴]\partial_y + [c_۵ t + c_۶]\partial_t + \frac{۱}{\alpha}[c_۱ + c_۳ - c_۵]u\partial_u. \qquad (۱۴.۵)$$

عبارت (۱۴.۵) نشان می دهد که ۶ اپراتور مستقل لی داریم که با انتخاب مقدار ۱ $= c_i$ برای $i = ۱, \cdots, ۶$ و صفر کردن مابقی پارامترها داریم:

$$U_۱ = x\partial_x + \frac{۱}{\alpha}u\partial_u. \qquad (۱۵.۵)$$

$$U_۲ = \partial_x.$$

$$U_۳ = y\partial_y + \tfrac{۱}{\alpha}u\partial_u.$$

$$U_۴ = \partial_y$$

$$U_۵ = t\partial_t - \tfrac{۱}{\alpha}u\partial_u.$$

$$U_۶ = \partial_t.$$

شکل های بنیادین اپراتور های $U_۲, U_۴, U_۶$ به ترتیب ناورداهای (۱۱.۵) تحت گروه بی نهایت کوچک از انتقال فضا و زمان هستند. مولدهای تقارن باقی مانده یعنی $U_۱, U_۳, U_۵$ حاکی از ناورداهای تحت تبدیلات پیمایشی هستند.

با محاسبهٔ جبر لی حاصل از اپراتور های (۱۵.۵) می بینیم که تنها رابطه های غیر صفر به صورت زیر هستند:

$$[U_۱, U_۲] = -U_۲; \qquad (۱۶.۵)$$

$$[U_۳, U_۴] = -U_۴;$$

$$[U_۵, U_۶] = -U_۶;$$

رابطهٔ تبدیل بین این میدان های برداری با جدول زیر داده شده است، درایهٔ روی سطر iام و ستون jام نمایش دهندهٔ $[U_i, U_j]$ است.

$[\cdot,\cdot]$	$U_۱$	$U_۲$	$U_۳$	$U_۴$	$U_۵$	$U_۶$
$U_۱$	۰	$-U_۲$	۰	۰	۰	۰
$U_۲$	$U_۲$	۰	۰	۰	۰	۰
$U_۳$	۰	۰	۰	$-U_۴$	۰	۰
$U_۴$	۰	۰	$U_۴$	۰	۰	۰
$U_۵$	۰	۰	۰	۰	۰	$-U_۶$
$U_۶$	۰	۰	۰	۰	$U_۶$	۰

مرکز در جدول آن میدان برداری ای است که سطر و ستون مربوط به آن صفر باشد، همانطور که از جدول فوق پیداست جبرلی این میدان های برداری مرکز ندارد.

برای بدست آوردن گروه های یک پارامتری G_i که توسط مولدهای بی نهایت کوچک $U_i = \xi_i^۱\partial_x+\xi_i^۲\partial_y+\varphi_i\partial_t+\sigma_i\partial_u$ ، $i = ۱,\ldots,۶$ ، تولید می شود، باید ۶ دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول زیر را حل کنیم:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\epsilon} = \xi_i^۱(\tilde{x}(\epsilon), \tilde{y}(\epsilon), \tilde{t}(\epsilon), \tilde{u}(\epsilon)) \qquad \tilde{x}(۰) = x.$$

$$\frac{d\tilde{y}}{d\epsilon} = \xi_i^۲(\tilde{x}(\epsilon), \tilde{y}(\epsilon), \tilde{t}(\epsilon), \tilde{u}(\epsilon)) \qquad \tilde{y}(۰) = y.$$

$$\frac{d\tilde{t}}{d\epsilon} = \varphi_i(\tilde{x}(\epsilon), \tilde{y}(\epsilon), \tilde{t}(\epsilon), \tilde{u}(\epsilon)) \qquad \tilde{t}(۰) = t.$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\epsilon} = \sigma_i(\tilde{x}(\epsilon), \tilde{y}(\epsilon), \tilde{t}(\epsilon), \tilde{u}(\epsilon)) \qquad \tilde{u}(۰) = u.$$

که در آن $i = ۱,\ldots,۶$ می باشد.

در اینجا برای نمونه یکی از این دستگاه ها را حل و در نتیجه یکی از G_i ها (مثلاً G_1) را به دست می آوریم:

$$U_1 = x\partial_x + \frac{1}{\alpha}u\partial_u.$$

$$\frac{d\tilde{x}(\epsilon)}{d\epsilon} = \tilde{x}, \quad \tilde{x}(0) = x \Rightarrow \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}} = d\epsilon \Rightarrow \ln\tilde{x} = \epsilon + C \Rightarrow \tilde{x} = C_1 e^{\epsilon} \Rightarrow \tilde{x} = xe^{\epsilon}$$

$$\frac{d\tilde{y}}{d\epsilon} = 0, \quad \tilde{y}(0) = y \Rightarrow d\tilde{y} = 0 \Rightarrow \tilde{y}(\epsilon) = C_2 \Rightarrow \tilde{y} = y$$

$$\frac{d\tilde{t}}{d\epsilon} = 0, \quad \tilde{t}(0) = t \Rightarrow d\tilde{t} = 0 \Rightarrow \tilde{t}(\epsilon) = C_3 \Rightarrow \tilde{t} = t$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\epsilon} = \frac{1}{\alpha}\tilde{u}, \quad \tilde{u}(0) = u \Rightarrow \frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}} = \frac{1}{\alpha}d\epsilon \Rightarrow \ln\tilde{u} = C_4 + \frac{\epsilon}{\alpha} \Rightarrow \tilde{u} = C_5 e^{\frac{\epsilon}{\alpha}} \Rightarrow \tilde{u} = ue^{\frac{\epsilon}{\alpha}}$$

بنابراین گروه های یک پارامتری نظیر $U_1, \ldots, U_6$ عبارتند از:

$$G_1 := [x = xe^{\epsilon}, y = y, t = t, u = ue^{(\frac{\epsilon}{\alpha})}]$$

$$G_2 := [x = \epsilon + x, y = y, t = t, u = u]$$

$$G_3 := [x = x, y = ye^{\epsilon}, t = t, u = ue^{(\frac{\epsilon}{\alpha})}]$$

$$G_4 := [x = x, y = \epsilon + y, t = t, u = u]$$

$$G_5 := [x = x, y = y, t = te^{\epsilon}, u = ue^{(\frac{-\epsilon}{\alpha})}]$$

$$G_6 := [x = x, y = y, t = t + \epsilon, u = u]$$

چون هر کدام از G_iها یک گروه یک پارامتری تقارن است، می بینیم که اگر $u = f(x, y, t)$ یک جواب برای معادلهٔ غیر خطی حرارت با $f(u) = u^{\alpha}$ باشد، آنگاه توابع :

$$u^{(1)} = f(xe^{(-\epsilon)}, y, t)e^{(\frac{\epsilon}{\alpha})}$$

$$u^{(2)} = f(-\epsilon + x, y, t)$$

$$u^{(3)} = f(x, ye^{(-\epsilon)}, t)e^{(\frac{\epsilon}{\alpha})}$$

$$u^{(4)} = f(x, -\epsilon + y, t)$$

$$u^{(5)} = f(x, y, te^{(-\epsilon)})e^{(\frac{-\epsilon}{\alpha})}$$

$$u^{(6)} = f(x, y, -\epsilon + t)$$

نیز جواب های معادله هستند هرگاه $\epsilon \in \mathbb{R}$.

با توجه به یادداشت ۲ در بخش مقدماتی برای یافتن ناورداهای U_1 کافی است بنویسیم:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{\frac{1}{\alpha}u} \tag{۱۷.۵}$$

پس از حل رابطهٔ فوق به ناورداهایی به فرم $y, t, \frac{u^\alpha}{x}$ می رسیم.
ناوردای $\frac{u^\alpha}{x}$ را در نظر بگیرید، با استفاده از آن جواب های مشابه را به صورت زیر می یابیم:

$$u(x, y, t) = x^{\frac{1}{\alpha}} g^{\frac{1}{\alpha}}(y, t); \tag{۱۸.۵}$$

با قرار دادن (۱۸.۵) در (۱۱.۵) داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha}.x^{\frac{1}{\alpha}}.g^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(y,t).g_t(y,t) - \alpha x^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.g^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(y,t).\frac{1}{\alpha}.x^{\frac{1}{\alpha}}.g^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(y,t).g_y(y,t) \\ &.\frac{1}{\alpha}.x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.g^{\frac{1}{\alpha}}(y,t) - x.g(y,t).\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\alpha}.x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.g^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(y,t).g_y(y,t) = 0. \end{aligned} \tag{۱۹.۵}$$

که با ساده کردن عبارت فوق، رابطهٔ زیر برای $g(y, t)$ بدست می آید:

$$g_t(y, t) = \frac{\alpha + 1}{\alpha} g g_y; \qquad \alpha \neq -1. \tag{۲۰.۵}$$

معادلهٔ (۲۰.۵) دارای جوابی به صورت زیر است:

$$g(y, t) = \frac{-a_1 y - a_2}{a_3 + \frac{\alpha+1}{\alpha} a_1 t}; \qquad \alpha \neq -1; \tag{۲۱.۵}$$

که $a_۱, a_۲, a_۳$ پارامتر هستند.

برای یافتن ناورداهای متناظر با مولد بی نهایت کوچک $U_۳$ داریم:

$$\frac{dx}{۰} = \frac{dy}{y} = \frac{dt}{۰} = \frac{du}{\frac{۱}{\alpha}u} \qquad (۲۲.۵)$$

پس از انجام محاسبات، ناورداهایی به شکل $x, t, \frac{u^\alpha}{y}$ بدست می آیند، مشابه روش قبل با $\frac{u^\alpha}{y}$ کار می‌کنیم. جواب های مشابه به صورت زیر هستند:

$$u(x,y,t) = y^{\frac{۱}{\alpha}} h^{\frac{۱}{\alpha}}(x,t) \qquad (۲۳.۵)$$

که مشابه روش قبل با جایگذاری در (۱۱.۵) و ساده کردن عبارات، رابطهٔ زیر بر حسب $h(x,t)$ بدست می آید:

$$h_t(x,t) = \frac{\alpha+۱}{\alpha} h.h_x; \alpha \neq -۱. \qquad (۲۴.۵)$$

که با حل رابطهٔ فوق به جواب زیر برای $h(x,t)$ می رسیم:

$$h(x,t) = -\frac{b_۱ x + b_۲}{b_۳ + \frac{\alpha+۱}{\alpha} b_۱ t} \qquad (۲۵.۵)$$

و در نهایت برای یافتن ناورداهای $U_۵$ داریم:

$$\frac{dx}{۰} = \frac{dy}{۰} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{-\frac{۱}{\alpha}u} \qquad (۲۶.۵)$$

که پس از حل به ناورداهای $x, y, u^\alpha t$ می رسیم.
که مشابه حالت های قبل با در نظر گرفتن $u^\alpha t$ برای یافتن جواب های مشابه می نویسیم:

$$u(x,y,t) = \frac{\rho^{\frac{۱}{\alpha}}(x,y)}{t^{\frac{۱}{\alpha}}}. \qquad (۲۷.۵)$$

با قرار دادن رابطهٔ فوق در (۱۱.۵) داریم:

$$\frac{-\frac{1}{\alpha}t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\rho^{\frac{1}{\alpha}}(x,y)}{t^{\frac{2}{\alpha}}} = -\alpha\frac{\rho^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x,y)}{t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}.\frac{\frac{1}{\alpha}\rho^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(x,y)\rho_y(x,y)}{t^{\frac{1}{\alpha}}}.\frac{\frac{1}{\alpha}\rho^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(x,y)\rho_x(x,y)}{t^{\frac{1}{\alpha}}}$$
$$-\frac{\rho(x,y)}{t}.\frac{\frac{1}{\alpha}((\frac{1-\alpha}{\alpha})\rho^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}(x,y)\rho_y(x,y)\rho_x(x,y)+\rho^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\rho_{xy}(x,y))}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad (۲۸.۵)$$

که پس از ساده کردن عبارت فوق به رابطهٔ زیر بر حسب $\rho(x,y)$ می رسیم:

$$\rho\rho_{xy}+\frac{1}{\alpha}\rho_x\rho_y+\rho=0; \qquad \alpha\neq-1. \qquad (۲۹.۵)$$

برای (۲۹.۵) جواب های خصوصی بصورت زیر می یابیم:

$$\rho(x,y)=\frac{1}{\beta}xy. \qquad \beta=\frac{\alpha-1}{\alpha}; \quad \beta\neq\alpha; \quad \beta\neq 2. \qquad (۳۰.۵)$$

در این حالت جواب های مشابه به صورت زیر هستند:

$$u(x,y,t)=(\frac{\beta t}{xy})^{\beta-1} \qquad (۳۱.۵)$$

تذکر:

یک جواب اساسی برای (۲۹.۵) به صورت زیر است:

$$\rho(x,y)=(cx+c_0)(\frac{\alpha}{(\alpha-1)c}y+c_1) \qquad (۳۲.۵)$$

که c_0, c_1, c ثابت های دلخواه هستند. جواب های خصوصی (۲۷.۵) با قرار دادن $c_0=1$، $c_1=0$، $c=1$ حاصل می شود.

برای اپراتور های باقی مانده $U_۲, U_۴, U_۶$ ناورداها به ترتیب متناظر هستند با توابع دلخواه $q(y, t, u), p(x, t, u), r(x, y, u)$.

لازم است بدانید که حل کردن رابطهٔ ((۱۶.۵)-(۱۲.۵)) بر اساس $\alpha = -۱$، مولد تقارن لی به شکل زیر می دهد:

$$U = \xi^۱(x)\partial_x + \xi^۲(y)\partial_y + [c_۵ t + c_۶]\partial_t + [c_۵ - \xi^۱_x - \xi^۲_y]\partial_u \qquad (۳۳.۵)$$

که $\xi^۱(x), \xi^۲(y)$ توابع دلخواه و $c_۵, c_۶$ پارامتر هستند.

۳.۵ حالت $f(u)=e^u$:

برای این حالت خاص، معادلهٔ کلی (۱.۴) به صورت زیر در می آید:

$$u_t - e^u u_y u_x - e^u u_{xy} = 0. \quad (۳۴.۵)$$

بنابراین دستگاه معادلات معین ((۲۱.۴)-(۱۷.۴)) برای تقارن های لی متناظر با (۳۴.۵) به فرم زیر است:

$$\sigma_t - e^u \sigma_{xy} = 0 \quad (۳۵.۵)$$

$$\xi^1_t + e^u \sigma_y + e^u \sigma_{yu} = 0$$

$$\xi^2_t + e^u \sigma_x + e^u \sigma_{xu} = 0$$

$$-\sigma - \varphi_t + \xi^1_x + \xi^2_y = 0$$

$$\sigma_u + \sigma_{uu} = 0$$

که داریم: $\xi^1(x,t), \xi^2(y,t), \varphi(t)$.

در ادامه با حل کردن دستگاه فوق برای یافتن ضرائب تقارن لی داریم:

$$\xi^1(x) = d_1 x + d_2 \quad (۳۶.۵)$$

$$\xi^2(y) = d_3 y + d_4$$

$$\varphi(t) = d_5 t + d_6$$

$$\sigma = d_1 + d_3 - d_5$$

که d_i برای $i = 1, \cdots, 6$ مقادیر ثابت هستند و اپراتور های لی به شکل زیر را تولید می کنند:

$$U = [d_1 x + d_2]\partial_x + [d_3 y + d_4]\partial_y + [d_5 t + d_6]\partial_t + [d_1 + d_3 - d_5]\partial_u. \quad (۳۷.۵)$$

بنابر روش حل برای یافتن تقارن های لی، با قرار دادن $d_i = ۱$ ، $d_j = ۰$ برای $(i, j = ۱, \cdots, ۶)$ ، $(i \neq j)$، داریم:

$$U_۱ = y\partial_y + \partial_u \qquad (۳۸.۵)$$

$$U_۲ = \partial_y$$

$$U_۳ = x\partial_x + \partial_u$$

$$U_۴ = \partial_x$$

$$U_۵ = t\partial_t - \partial_u$$

$$U_۶ = \partial_t$$

جبر لی غیر صفر حاصل از این مولدها به شکل زیر است:

$$[U_۱, U_۲] = -U_۲; \qquad (۳۹.۵)$$

$$[U_۳, U_۴] = -U_۴;$$

$$[U_۵, U_۶] = -U_۶;$$

مشابه به آنچه در حالت قبل بررسی شد، با محاسبهٔ $[U_i, U_j]$ برای $i = ۱, \ldots, ۶$ به جدول زیر می رسیم:

$[\,\cdot\,]$	$U_۱$	$U_۲$	$U_۳$	$U_۴$	$U_۵$	$U_۶$
$U_۱$	۰	$-U_۲$	۰	۰	۰	۰
$U_۲$	$U_۲$	۰	۰	۰	۰	۰
$U_۳$	۰	۰	۰	$-U_۴$	۰	۰
$U_۴$	۰	۰	$U_۴$	۰	۰	۰
$U_۵$	۰	۰	۰	۰	۰	$-U_۶$
$U_۶$	۰	۰	۰	۰	$U_۶$	۰

باز هم مشابه حالت قبل برای بدست آوردن گروه های یک پارامتری G_i که توسط مولدهای بی نهایت کوچک $U_i = \xi_i^{۱}\partial_x + \xi_i^{۲}\partial_y + \varphi_i\partial_t + \sigma_i\partial_u$ ، $i = ۱, \dots, ۶$ تعریف می شوند، باید ۶ دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول زیر را حل کنیم:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\epsilon} = \xi_i^{۱}(\tilde{x}(\epsilon), \tilde{y}(\epsilon), \tilde{t}(\epsilon), \tilde{u}(\epsilon)) \qquad \tilde{x}(۰) = x.$$

$$\frac{d\tilde{y}}{d\epsilon} = \xi_i^{۲}(\tilde{x}(\epsilon), \tilde{y}(\epsilon), \tilde{t}(\epsilon), \tilde{u}(\epsilon)) \qquad \tilde{y}(۰) = y.$$

$$\frac{d\tilde{t}}{d\epsilon} = \varphi_i(\tilde{x}(\epsilon), \tilde{y}(\epsilon), \tilde{t}(\epsilon), \tilde{u}(\epsilon)) \qquad \tilde{t}(۰) = t.$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\epsilon} = \sigma_i(\tilde{x}(\epsilon), \tilde{y}(\epsilon), \tilde{t}(\epsilon), \tilde{u}(\epsilon)) \qquad \tilde{u}(۰) = u.$$

که در آن $i = ۱, \dots, ۶$ می باشد، در اینجا برای نمونه یکی از این دستگاه ها را حل و در نتیجه یکی از G_i ها (مثلاً $G_۱$) را به دست می آوریم:

$$U_۱ = y\partial_y + \partial_u.$$

$$\frac{d\tilde{x}(\epsilon)}{d\epsilon} = ۰, \quad \tilde{x}(۰) = x \Rightarrow d\tilde{x} = ۰ \Rightarrow \tilde{x} = C_۱ \Rightarrow \tilde{x} = x$$

$$\frac{d\tilde{y}}{d\epsilon} = \tilde{y}, \quad \tilde{y}(۰) = y \Rightarrow \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} = d\epsilon \Rightarrow \ln\tilde{y} = C_۲ + \epsilon \Rightarrow \tilde{y} = C_۳ e^{\epsilon} \Rightarrow \tilde{y} = ye^{\epsilon}$$

$$\frac{d\tilde{t}}{d\epsilon} = ۰, \quad \tilde{t}(۰) = t \Rightarrow d\tilde{t} = ۰ \Rightarrow \tilde{t}(\epsilon) = C_۳ \Rightarrow \tilde{t} = t$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\epsilon} = ۱, \quad \tilde{u}(۰) = u \Rightarrow d\tilde{u} = d\epsilon \Rightarrow \tilde{u} = C_۴ + \epsilon \Rightarrow \tilde{u} = u + \epsilon$$

بنابراین گروه های یک پارامتری نظیر $U_۱, \ldots, U_۶$ عبارتند از:

$$G_۱ := [x = x, y = ye^{\epsilon}, t = t, u = u + \epsilon]$$

$$G_۲ := [x = x, y = y + \epsilon, t = t, u = u]$$

$$G_۳ := [x = xe^{\epsilon}, y = y, t = t, u = \epsilon + u]$$

$$G_۴ := [x = x + \epsilon, y = y, t = t, u = u]$$

$$G_۵ := [x = x, y = y, t = te^{\epsilon}, u = -\epsilon + u]$$

$$G_۶ := [x = x, y = y, t = t + \epsilon, u = u]$$

و چون هر کدام از G_i ها یک گروه یک پارامتری تبدیلات تقارنی است، می بینیم که اگر $u = f(x, y, t)$ یک جواب برای معادلهٔ دو بعدی غیر خطی حرارت با $f(u) = e^u$ باشد، آنگاه توابع :

$$u^{(۱)} = \epsilon + f(x, ye^{-\epsilon}, t)$$

$$u^{(۲)} = f(x, -\epsilon + y, t)$$

$$u^{(۳)} = \epsilon + f(xe^{-\epsilon}, y, t)$$

$$u^{(۴)} = f(-\epsilon + x, y, t)$$

$$u^{(۵)} = -\epsilon + f(x, y, te^{-\epsilon})$$

$$u^{(۶)} = f(x, y, -\epsilon + t)$$

نیز جواب هستند وقتی $\epsilon \in \mathbb{R}$ باشد.

برای یافتن جواب های مشابه برای (۳۴.۵) با پیروی از روشی مشابه به آنچه در قبل بررسی شد، جواب های مشابه را که القاء شده به ترتیب توسط ناورداهای وابسته به اپراتورهای $U_۱, U_۳$ است را بدست می آوریم.

$$u(x, y, t) = ln(\frac{-xy}{t}) \tag{۴۰.۵}$$

و این جواب فقط برای زیر مجموعه ای از فضای متغیرها که $xy < ۰$ قابل استفاده است.

ناورداهای لی متناظر با اپراتور $U_۵$ به ما اجازه می دهند تا جواب مشابهی به صورت :

$$u(x, y, t) = ln(\frac{۱}{tH(x, y)}) \tag{۴۱.۵}$$

را در نظر بگیریم که $H(x, y)$ به صورت مثبت تعریف شده است و در معادلهٔ دیفرانسیل

$$H^۳ + ۲H_xH_y - HH_{xy} = ۰. \tag{۴۲.۵}$$

صدق می کند.

معادلهٔ (۴۲.۵) جوابی دقیق به صورت زیر دارد:

$$H(x, y) = \frac{-۱}{xy} \tag{۴۳.۵}$$

که جواب هایی منطبق با (۴۰.۵) تولید می کند.

فصل ۶

طبقه بندی جواب های ناوردای گروهی

در حالت کلی، برای هر زیر گروه s-پارامتری H از گروه تقارنی G از یک سیستم معادلات دیفرانسیل با $p > s$ متغیر مستقل، یک خانوادهٔ متناظر از جواب های ناوردای گروهی یافت می شود. هر چند می توان گفت بطور معمول تعداد این زیر گروه ها متناهی است، اما بازنویسی آن ها عملاً غیر ممکن است. بنابراین ما نیاز به یک روش مؤثر برای طبقه بندی این جواب ها داریم که ما را به سمت سیستم بهینهٔ ناوردای گروهی هدایت می کند که بقیهٔ جواب ها هم از این راه یافت می شوند.

تعریف ۱ *(ناوردای موضعی):*

فرض کنید G یک گروه تبدیلات موضعی باشد که روی منیفلد M عمل می کند، زیر مجموعهٔ $\varphi \subset M$ را موضعاً G-ناوردا گوئیم اگر برای هر $x \in \varphi$ همسایگی $\tilde{G}_x \in G_x$ از عنصر همانی G باشد که $g.x \in \varphi$ برای هر $g \in \tilde{G}_x$.

تعریف ۲ *(جواب ناوردا):*

دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی Δ را روی زیر مجموعهٔ باز $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ از $M \subset X \times U \simeq$ فضای متغیرهای مستقل و وابسته در نظر می گیریم. فرض کنید G یک گروه تبدیلات موضعی باشد که روی M عمل می کند.
به طور کلی جواب $u = f(x)$ از دستگاه Δ یک جواب G-ناوردا نامیده می شود اگر تحت تمام تبدیلات گروه ناوردا باقی بماند، یعنی برای هر $g \in G$، توابع f و $g.f$ در یک دامنهٔ تعریف مشترک باشند. به

بیان دیگر، یک جواب از Δ مانند $u = f(x)$ جوابی است که گراف آن یعنی $\Gamma_f = \{(x, f(x))\} \subset M$ یک مجموعهٔ G-ناوردای موضعی از M باشد.

مثال ۱ : *جواب بنیادین $u = \log(x^۲ + y^۲)$ برای معادلهٔ دو- بعدی لاپلاس به صورت $u_{xx} + u_{yy} = ۰$ تحت گروه یک- پارامتری دورانی $SO(۲) : (x, y, u) \longmapsto (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta, u)$ که روی x, y عمل می کند، ناورداست.*

هر عضو $g \in G$ که در زیر گروه H از گروه G نباشد، هر جواب H-ناوردا را به جواب دیگر ناوردای گروهی می برد، جواب هایی که به این صورت به هم مربوط هستند را نیازی نیست در سیستم بهینه بیاوریم. توضیحات کامل تر در ادامه می آیند.

گزاره ۱ : *فرض کنید G گروه تقارنی سیستم معادلات دیفرانسیل Δ باشد و فرض کنید $H \subset G$ یک زیر گروه s-پارامتری باشد. اگر $u = f(x)$ یک جواب H-ناوردا برای Δ و $g \in G$ یک عنصر دیگر گروه باشد، آنگاه تابع تبدیل یافتهٔ $\tilde{u} = \tilde{f}(x) = g.f(x)$ یک جواب $\tilde{H}$-ناوردا است که $\tilde{H} = gHg^{-۱}$ زیر گروه مزدوج H تحت g است.*[۱۷]

بنابر این گزاره، مسالهٔ طبقه بندی جواب های ناوردای گروهی به مسالهٔ طبقه بندی زیر گروه - های گروه تقارنی G تحت عمل مزدوج گیری کاهش می یابد. بنابراین می بایستی نگاشت مزدوج $h \longmapsto ghg^{-۱}$ روی یک گروه لی را با جزئیات فرا بگیریم، سپس به ادامهٔ مسالهٔ طبقه بندی باز می- گردیم.

تعریف ۳ *(نمایش الحاقی):*

فرض کنید G یک گروه لی باشد. برای هر $g \in G$ نگاشت مزدوج

$$K_g : G \longrightarrow G,$$
$$K_g(h) = ghg^{-1}, \quad \forall h \in H,$$

یک دیفئومورفیسم روی G تعریف می کند. علاوه بر آن، $K_g \circ K_{g'} = K_{gg'}, K_e = 1_G$ بنابراین K_g یک عمل گروه G روی خودش تعریف می کند، با هر نگاشت مزدوج، K_g یک همومورفیسم گروهی است: $K_g(hh') = K_g(h)K_g(h')$.

نگاشت مشتق $dK_g : TG|_h \to TG|_{K_g(h)}$ به آسانی دیده می شود که میدان های برداری ناوردای راست را ناوردا نگه می دارد، بنابراین دیده می شود که تشکیل یک نگاشت خطی روی جبرلی گروه لی G می دهد که به آن نمایش الحاقی گوئیم:

$$Adg(v) \equiv dK_g(h), \qquad v \in \mathfrak{g} \tag{۱.۶}$$

به یاد داشته باشید که نمایش الحاقی یک عمل خطی از G روی $\mathfrak{g}$ تعریف می کند:

$$Ad(g.g') = Adg \circ Adg', \qquad Ad(e) = 1.$$

اگر $v \in \mathfrak{g}$ زیر گروه یک پارامتری $H = \{\exp(\epsilon v) : \epsilon \in \mathbb{R}\}$، آنگاه $Adg(v)$ به سادگی دیده می‌شود که زیر گروه یک پارامتری مزدوج $K_g(H) = gHg^{-1}$ را تولید می کند.

گزاره ۲ *: فرض کنید H و $\tilde{H}$ زیر گروه های لی s-بعدی همبند از گروه لی G باشند با زیر جبر های لی متناظر $\mathfrak{h}$ و $\tilde{\mathfrak{h}}$ از جبر لی $\mathfrak{g}$ از G. بنابراین $\tilde{H} = gHg^{-1}$ زیر گروه های مزدوج هستند اگر و تنها اگر $\tilde{\mathfrak{h}} = Adg(\mathfrak{h})$ زیر جبر های مزدوج باشند .*

اگر v مولد زیر گروه یک پارامتری $\exp(\epsilon v)$ باشد سپس adv میدان برداری روی $\mathfrak{g}$ است که مولد گروه یک پارامتری نظیر تبدیل الحاقی است:

$$adv\mid_w \equiv \frac{d}{d\epsilon}\mid_{\epsilon=0} Ad(\exp(\epsilon v))w, \qquad w \in \mathfrak{g}. \tag{۲.۶}$$

یک حقیقت اساسی این است که عمل الحاقی بی نهایت کوچک موافق همان جبر لی روی $\mathfrak{g}$ است.

گزاره ۳ : *فرض کنید G یک گروه لی با جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد. برای هر $v \in \mathfrak{g}$، بردار الحاقی adv در $w \in \mathfrak{g}$ برابر است با:*

$$adv|_w = [w,v] = -[v,w] \tag{۳.۶}$$

اگر $G \subset \mathbb{GL}(n)$ که ماتریس گروه لی است با جبر لی $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)$، در این صورت داریم، $K_A(B) = ABA^{-1}$، که $A, B \in G$ ماتریس های $n \times n$ هستند، نگاشت الحاقی هم با مزدوج گیری زیر بدست می آید:

$$AdA(X) = AXA^{-1}, \qquad A \in G, \quad X \in \mathfrak{g}. \tag{۴.۶}$$

حال قرار دهید $A = e^{\epsilon Y}, Y \in \mathfrak{g}$، و مشتق گیری بر حسب ϵ داریم:

$$adY|_X = YX - XY = [X,Y] \tag{۵.۶}$$

که همان براکت لی روی $\mathfrak{gl}(n)$ است.

حال می خواهیم با داشتن عمل الحاقی مولد های بی نهایت کوچک $\mathfrak{g}$، نمایش الحاقی $Ad(G)$ را بسازیم. برای این منظور از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر:

$$\frac{dw}{d\epsilon} = adv|_w, \qquad w(0) = w_0. \tag{۶.۶}$$

با جواب $w(\epsilon) = Ad(\exp(\epsilon v))w$ انتگرال می گیریم و یا با محاسبهٔ سری لی:

$$\begin{aligned} Ad(\exp(\epsilon v))w_{۰} &= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!}(ad(v))^n(w_{۰}) \\ &= w_{۰} - \epsilon[v, w_{۰}] + \frac{\epsilon^{۲}}{۲}[v, [v, w_{۰}]] - \dots \end{aligned} \quad (۷.۶)$$

حال در ادامه به بررسی و محاسبهٔ نمایش الحاقی دو حالت خاص معادلهٔ دو-بعدی غیر خطی حرارت که در گذشته بحث کردیم، می پردازیم.

نمایش الحاقی معادلهٔ دو بعدی غیر خطی حرارت، حالت $f(u) = u^\alpha$:

جبر لی حاصل در این حالت توسط بردارهای زیر تولید می شود:

$$U_1 = x\partial_x + \frac{1}{\alpha}u\partial_u; \tag{۸.۶}$$

$$U_2 = \partial_x;$$

$$U_3 = y\partial_y + \tfrac{1}{\alpha}u\partial_u;$$

$$U_4 = \partial_y;$$

$$U_5 = t\partial_t - \tfrac{1}{\alpha}u\partial_u;$$

$$U_6 = \partial_t;$$

برای محاسبهٔ نمایش الحاقی از سری لی (۷.۶) کمک می گیریم به عنوان مثال:

$$\begin{aligned} Ad(\exp(\epsilon U_1))U_2 &= U_2 - \epsilon[U_1, U_2] + \frac{1}{2}\epsilon^2[U_1,[U_1,U_2]] - \dots \\ &= U_2 - \epsilon(-U_2) + \frac{\epsilon^2}{2!}(U_2) + \dots \\ &= U_2(1 + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2!} + \dots) = U_2 e^\epsilon \end{aligned} \tag{۹.۶}$$

در ادامه جدول زیر را می سازیم:

Ad	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
U_1	U_1	U_2e^ϵ	U_3	U_4	U_5	U_6
U_2	$U_1 - \epsilon U_2$	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
U_3	U_1	U_2	U_3	U_4e^ϵ	U_5	U_6
U_4	U_1	U_2	$U_3 - \epsilon U_4$	U_4	U_5	U_6
U_5	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6e^ϵ
U_6	U_1	U_2	U_3	U_4	$U_5 - \epsilon U_6$	U_6

که درایه های (i,j)–ام آن نشانگر $Ad(\exp(\epsilon U_i))U_j$ است.

نمایش الحاقی معادلهٔ دو بعدی غیر خطی حرارت، حالت $f(u)=e^u$:

در این حالت، جبر لی توسط بردارهای زیر تولید می شود:

$$U_1 = y\partial_y + \partial_u;\qquad (۱۰.۶)$$

$$U_2 = \partial_y;$$

$$U_3 = x\partial_x + \partial_u;$$

$$U_4 = \partial_x;$$

$$U_5 = t\partial_t - \partial_u;$$

$$U_6 = \partial_t;$$

که در این حالت نیز با کمک سری (۷.۶) داریم:

Ad	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
U_1	U_1	U_2e^{ϵ}	U_3	U_4	U_5	U_6
U_2	$U_1-\epsilon U_2$	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
U_3	U_1	U_2	U_3	U_4e^{ϵ}	U_5	U_6
U_4	U_1	U_2	$U_3-\epsilon U_4$	U_4	U_5	U_6
U_5	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6e^{ϵ}
U_6	U_1	U_2	U_3	U_4	$U_5-\epsilon U_6$	U_6

که درایه های (i,j)-ام آن نشانگر $Ad(\exp(\epsilon U_i))U_j$ است.

۱.۶ طبقه بندی زیر گروه ها و زیر جبر ها

یکی از کاربردهای اصلی و اساسی تئوری گروه های لی از گروه های تقارنی برای معادلات دیفرانسیل ساختار جواب های ناورداست. با در نظر گرفتن هر زیر گروه از گروه تقارنی، می توان معادله را برای جواب های ناوردا متناظر با این زیر گروه نوشت.

این کار باعث می شود که مرتبهٔ معادله کاهش یابد و تعداد متغیرها کم شود، و این مورد در حالت کلی راهکار خوبی برای حل مسأله است.
در اصل برای خیلی از معادلات مهم فیزیک و هندسه، جواب های ناوردا تنها راه حل مسأله هستند.
اهمیت این بحث به این دلیل است که آن ها معمولاً رفتار مجانبی را توصیف می کنند یا ساختار تکینی جواب های اساسی را نشان می دهند.
اما در مورد جواب های ناوردای گروهی با یک مشکل اساسی مواجه هستیم که آن هم مسأله طبقه-بندی آنهاست. از آنجائی که یک گروه لی (یا جبر لی) معمولاً شامل بی نهایت زیر گروه (زیر جبر) از یک بعد مشابه است، طبقه بندی آنها در حد یک رابطهٔ هم ارزی لازم می باشد، به همین منظور به سراغ مفهوم سیستم بهینه می رویم.

تعریف ۴ (دستگاه بهینه):

فرض کنید G یک گروه لی باشد، یک سیستم بهینه از زیر گروههای s-پارامتری فهرستی از زیر گروه های s-پارامتری غیر هم ارز تحت مزدوج گیری است با این خاصیت که هر زیر گروه دیگر با منحصراً یکی از این زیر گروه ها مزدوج است.

به طور مشابه برای جبر لی نیز داریم، فهرستی از زیر جبر های s-پارامتری یک سیستم بهینه تشکیل می دهد هرگاه هر زیر جبر s-پارامتری از $\mathfrak{g}$، با یک عضو منحصر به فرد از این لیست تحت مزدوج گیری معادل باشد، یعنی $\tilde{\mathfrak{h}} = Adg(\mathfrak{h}), g \in G$.

گزارهٔ ۲ بیان می کند که مسالهٔ یافتن یک سیستم بهینه از زیر گروه ها معادل با یافتن یک سیستم بهینه از زیر جبرها است. متأسفانه این مساله هنوز کمی پیچیده است و تکنیک های ما ممکن است برخی جاها جواب نداشته باشند.

برای جبرهای یک-بعدی مسألهٔ طبقه بندی زیر جبرها دقیقاً مانند مسأله طبقه بندی مدارهای نمایش مزدوج است، بنابراین هر زیر جبر یک-بعدی با یک بردار ناصفر در $\mathfrak{g}$ تعریف می شود.

۲.۶ محاسبهٔ دستگاه بهینهٔ زیر جبرهای جبر لی معادلهٔ دو بعدی غیر خطی حرارت

برای محاسبهٔ سیستم بهینه معادله دو بعدی غیر خطی حرارت برای هر دو حالت $f(u) = u^\alpha$ و $f(u) = e^u$ داریم:

ابتدا بردار ناصفر زیر را در نظر بگیرید:

$$U = a_1U_1 + a_2U_2 + a_3U_3 + a_4U_4 + a_5U_5 + a_6U_6$$

هدف ما ساده کردن ضرائب a_i با استفادهٔ صحیح از نگاشت های مزدوج روی U است.

۱) اگر $a_1 \neq 0$ باشد، با انتقال مناسب U، می توان در نظر گرفت $a_1 = 1$، با ترکیب زیر شروع به کار می کنیم:

$$U^{(1)} = U_1 + a_2U_2 + a_3U_3 + a_4U_4 + a_5U_5 + a_6U_6$$

حال اگر روی $U^{(1)}$، $Ad(\exp(a_2U_2))$ را اثر بدهیم می توانیم ضریب U_2 را صفر کنیم.

$$\begin{aligned} Ad(\exp(a_2U_2))U^{(1)} &= U^{(1)} - a_2[U_2, U^{(1)}] \\ &= U^{(1)} - a_2[U_2, U_1] \end{aligned}$$

لذا داریم:

$$U^{(2)} = U_1 + a_3U_3 + a_4U_4 + a_5U_5 + a_6U_6$$

در مرحلهٔ بعد روی $U^{(2)}$، عبارت$Ad(\exp(\frac{a_4}{a_3}U_4))$ را اثر می دهیم،که این کار باعث صفر شدن ضریب U_4 می شود.

$$\begin{aligned} Ad(\exp(\frac{a_4}{a_3}U_4))U^{(2)} &= U^{(2)} - \frac{a_4}{a_3}[U_4, U^{(2)}] \\ &= U^{(2)} - \frac{a_4}{a_3}[U_4, U_3] \end{aligned}$$

لذا داریم:

$$U^{(3)} = U_1 + a_3U_3 + a_5U_5 + a_6U_6$$

به طور مشابه، در مرحلهٔ بعد روی $U^{(3)}$، عبارت$Ad(\exp(\frac{a_6}{a_5}U_6))$ را اثر می دهیم،که این کار باعث صفر شدن ضریب U_6 می شود.

$$\begin{aligned} Ad(\exp(\frac{a_6}{a_5}U_6))U^{(3)} &= U^{(3)} - \frac{a_6}{a_5}[U_6, U^{(3)}] \\ &= U^{(3)} - \frac{a_6}{a_5}[U_6, U_5] \end{aligned}$$

لذا:

$$U^{(4)} = U_1 + a_3U_3 + a_5U_5$$

حال با توجه به جدول نمایش الحاقی دیده می شود که ساده سازی بیشتری ممکن نیست، بنابراین زیر جبر یک-بعدی تولید شده توسط U با $a_1 \neq 0$ معادل است با $U_1 + mU_3 + nU_5$ که $m, n \in \mathbb{R}$.
زیر جبرهای باقی ماندهٔ یک-بعدی تولید شده توسط $a_1 = 0$ به صورت زیر است:

$$U^{(5)} = a_2U_2 + a_3U_3 + a_4U_4 + a_5U_5 + a_6U_6$$

۲) حال فرض کنید $a_2 \neq 0$، می توان با انتقال مناسب کاری کنیم که $a_2 = 1$ شود لذا داریم:

$$U^{(6)} = U_2 + a_3U_3 + a_4U_4 + a_5U_5 + a_6U_6$$

حال با اثر دادن $Ad(\exp(\frac{a_4}{a_3}U_4))$ روی $U^{(6)}$ می بینیم که ضریب U_4 صفر می شود.

$$\begin{aligned} Ad(\exp(\frac{a_4}{a_3}U_4))U^{(6)} &= U^{(6)} - \frac{a_4}{a_3}[U_4, U^{(6)}] \\ &= U^{(6)} - \frac{a_4}{a_3}[U_4, a_3U_3] \end{aligned}$$

لذا داریم:

$$U^{(7)} = U_2 + a_3U_3 + a_5U_5 + a_6U_6$$

در ادامه با اثر دادن $Ad(\exp(\frac{a_6}{a_5}U_6))$ روی $U^{(7)}$ ضریب U_6 را صفر می کنیم.

$$\begin{aligned} Ad(\exp(\frac{a_6}{a_5}U_6))U^{(7)} &= U^{(7)} - \frac{a_6}{a_5}[U_6, U^{(7)}] \\ &= U^{(7)} - \frac{a_6}{a_5}[U_6, a_5U_5] \end{aligned}$$

لذا :

$$U^{(8)} = U_2 + a_3U_3 + a_5U_5$$

حال با توجه به جدول نمایش الحاقی دیده می شود که ساده سازی بیشتری ممکن نیست، بنابراین زیر جبر یک-بعدی تولید شده توسط U با $a_2 \neq 0$ معادل است با زیر جبر تولید شده توسط $U_2 + pU_3 + qU_5$ که $p, q \in \mathbb{R}$.

۳) در ادامه در نظر بگیرید $a_1 = a_2 = 0$ و $a_3 \neq 0$، در نظر بگیرید $a_3 = 1$.

$$U^{(9)} = U_3 + a_4 U_4 + a_5 U_5 + a_6 U_6$$

با اثر دادن $Ad(\exp(a_4 U_4))$ روی $U^{(9)}$، ضریب U_4 را در $U^{(9)}$ صفر می کنیم.

$$\begin{aligned} Ad(\exp(a_4 U_4))U^{(9)} \quad &= U^{(9)} - a_4[U_4, U^{(9)}] \\ &= U^{(9)} - a_4[U_4, U_3] \end{aligned}$$

لذا داریم:

$$U^{(10)} = U_3 + a_5 U_5 + a_6 U_6$$

در ادامه با اثر دادن $Ad(\exp(\frac{a_6}{a_5} U_6))$ روی $U^{(10)}$ ضریب U_6 را در $U^{(10)}$ صفر می کنیم.

$$\begin{aligned} Ad(\exp(\frac{a_6}{a_5} U_6))U^{(10)} \quad &= U^{(10)} - \frac{a_6}{a_5}[U_6, U^{(10)}] \\ &= U^{(10)} - \frac{a_6}{a_5}[U_6, a_5 U_5] \end{aligned}$$

یعنی داریم:

$$U^{(11)} = U_3 + a_5 U_5$$

باز هم بنابر جدول نمایش الحاقی، مشاهده می کنیم که عبارت فوق بیش از این ساده نمی شود و در این حالت زیر جبر یک-بعدی تولید شده توسط $U_3 + aU_5$ است که $a \in \mathbb{R}$.

۴) حال فرض کنید $a_1=a_2=a_3=0$ و $a_4\neq 0$ لذا $a_4=1$ لذا داریم:

$$U^{(12)}=U_4+a_5U_5+a_6U_6$$

حال با اثر دادن $Ad(\exp(\frac{a_6}{a_5}U_6))$ روی $U^{(12)}$ داریم:

$$\begin{aligned} Ad(\exp(\frac{a_6}{a_5}U_6))U^{(12)} &= U^{(12)}-\frac{a_6}{a_5}[U_6,U^{(12)}]\\ &= U^{(12)}-\frac{a_6}{a_5}[U_6,a_5U_5] \end{aligned}$$

یعنی :

$$U^{(13)}=U_4+a_5U_5$$

باز هم بنابر جدول نمایش الحاقی، می بینیم که این عبارت هم ساده نمی شود و در این حالت نیز زیر جبر یک-بعدی تولید شده عبارتست از U_4+bU_5 که $b\in\mathbb{R}$.

۵) حال اگر فرض کنیم $a_1=a_2=a_3=a_4=0$ و $a_5\neq 0$ با یک انتقال می توانیم کاری کنیم که $a_5=1$:

$$U^{(14)}=U_5+a_6U_6$$

حال با اثر دادن $Ad(\exp(a_6U_6))$ روی $U^{(14)}$ داریم:

$$\begin{aligned} Ad(\exp(a_6U_6))U^{(14)} &= U^{(14)}-a_6[U_6,U^{(14)}]\\ &= U^{(14)}-a_6[U_6,U_5] \end{aligned}$$

لذا داریم:

$$U^{(15)}=U_5$$

۶) اگر در نظر بگیریم $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ و $a_6 \neq 0$ بازهم با یک انتقال مناسب می توانیم فرض کنیم $a_6 = 1$، داریم:

$$U^{(16)} = U_6$$

در نتیجه پس از محاسبات فوق به سیستم بهینه از زیر جبرهای یک-بعدی به صورت زیر دست می یابیم.

$$\{U_1 + mU_3 + nU_5, U_2 + pU_3 + qU_5, U_3 + aU_5, U_4 + bU_5, U_5, U_6\}$$

که برای هر دو حالت معادله که در فصل قبل بررسی شد، چون در هر دو حالت جبر لی به صورت پارامتری به یک صورت بود پس این سیستم بهینه برای هر دو حالت قابل بیان است.

در ادامه بیایید در مورد مقادیر ناوردا صحبت کنیم. با استفاده از یادداشت ۲ در فصل اول که در مورد نحوهٔ یافتن توابع یک-پارامتری ناوردا بحث می کند، تقارن های متناظر با سیستم بهینه از اپراتورهای تقارنی را به صورت زیر به دست می آوریم.

در مورد حالت اول داریم:

$$U_1 + mU_3 + nU_5 = x\partial_x + my\partial_y + nt\partial_t + \frac{m+1-n}{\alpha}u\partial_u$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{my} = \frac{dt}{nt} = \frac{du}{\frac{m+1-n}{\alpha}u}$$

حال با انتگرال گیری از روابط فوق داریم:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{my} \Rightarrow \ln x = \frac{۱}{m} \ln y \Rightarrow m \ln x = \ln y \Rightarrow x^m = y \Rightarrow I_۱ = yx^{-m}$$

$$\int \frac{dy}{my} = \int \frac{dt}{nt} \Rightarrow \frac{۱}{m} \ln y = \frac{۱}{n} \ln t \Rightarrow n \ln y = m \ln t \Rightarrow y^n = t^m \Rightarrow I_۲ = \frac{y^n}{t^m}$$

$$\int \frac{dt}{nt} = \int \frac{du}{\frac{m+۱-n}{\alpha} u} \Rightarrow \frac{m+۱-n}{\alpha} \ln t = n \ln u \Rightarrow t^{\frac{m+۱-n}{\alpha}} = u^n \Rightarrow I_۳ = \frac{u^n}{t^{\frac{m+۱-n}{\alpha}}}$$

لذا ناورداهای این حالت به صورت زیر هستند:

$$\{yx^{-m}, \frac{y^n}{t^m}, \frac{u^n}{t^{\frac{m+۱-n}{\alpha}}}\}$$

در مورد حالت دوم داریم:

$$U_۲ + pU_۳ + qU_۵ = \partial_x + py\partial_y + qt\partial_t + \frac{p-q}{\alpha} u\partial_u$$

به طور مشابه برای این حالت نیز داریم:

$$\frac{dx}{۱} = \frac{dy}{py} = \frac{dt}{qt} = \frac{du}{\frac{p-q}{\alpha} u}$$

با انتگرال گیری داریم:

$$\int \frac{dx}{۱} = \int \frac{dy}{py} \Rightarrow px = \ln y \Rightarrow I_۱ = ye^{-px}$$

$$\int \frac{dy}{py} = \int \frac{dt}{qt} \Rightarrow y^q = t^p \Rightarrow I_۲ = \frac{y^q}{t^p}$$

$$\int \frac{dt}{qt} = \int \frac{du}{\frac{p-q}{\alpha} u} \Rightarrow \frac{۱}{q} \ln t = \frac{\alpha}{p-q} \ln u \Rightarrow I_۳ = \frac{u^q}{t^{\frac{p-q}{\alpha}}}$$

در این حالت نیز ناورداها به صورت زیر هستند:

$$\{ye^{-px}, \frac{y^q}{t^p}, \frac{u^q}{t^{\frac{p-q}{\alpha}}}\}$$

برای حالت سوم داریم:

$$U_۳ + aU_۵ = y\partial_y + at\partial_t + \frac{۱-a}{\alpha}u\partial_u$$

$$\frac{dx}{۰} = \frac{dt}{at} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{\frac{۱-a}{\alpha}u}$$

$$\int \frac{dx}{۰} = \int \frac{dt}{at} \Rightarrow I_۱ = x$$

$$\int \frac{dt}{at} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{۱}{a}\int \frac{dt}{t} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{۱}{a}\ln t = \ln y \Rightarrow t = y^a \Rightarrow I_۲ = \frac{y^a}{t}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{du}{\frac{۱-a}{\alpha}u} \Rightarrow \ln y = \frac{\alpha}{۱-a}\ln u \Rightarrow y^{\frac{۱-a}{\alpha}} = u \Rightarrow I_۳ = \frac{y^{\frac{۱-a}{\alpha}}}{u}$$

لذا در این حالت، ناورداها به شکل زیر هستند:

$$\{x, \frac{y^a}{t}, \frac{y^{\frac{۱-a}{\alpha}}}{u}\}$$

در مورد حالت بعدی داریم:

$$U_۴ + bU_۵ = \partial_y + bt\partial_t - \frac{b}{\alpha}u\partial_u$$

$$\frac{dx}{۰} = \frac{dy}{۱} = \frac{dt}{bt} = \frac{du}{-\frac{b}{\alpha}u}$$

$$\int \frac{dx}{۰} = \int \frac{dy}{۱} \Rightarrow I_۱ = x$$

$$\int dy = \int \frac{dt}{bt} \Rightarrow y = \frac{۱}{b}\ln t \Rightarrow by = \ln t \Rightarrow e^{by} = t \Rightarrow I_۲ = te^{-by}$$

$$\int \frac{dt}{bt} = \int \frac{du}{-\frac{b}{\alpha}u} \Rightarrow \frac{۱}{b}\ln t = -\frac{\alpha}{b}\ln u \Rightarrow t = u^{-\alpha} \Rightarrow I_۳ = u^{\alpha}t$$

در این حالت نیز ناورداها به شکل زیر هستند:

$$\{x, te^{-by}, u^{\alpha}t\}$$

فصل ۷

نظرات و نتیجه گیری

در گذشته شکل کلی (۱۰.۳) از معادلات دو بعدی غیر خطی حرارت را بررسی کردیم و شرایط ((۲۱.۴)-(۱۷.۴)) را برای عبارت غیر خطی $f(u)$ بدست آوردیم که این امر منجر به یافتن اپراتورهای تقارن لی و مقادیر ناوردا می شود.

نتایج کلی بر روی دو حالت خاص، اعمال شد، حالت اول $f(u)=u^\alpha$ و حالت دوم $f(u)=e^u$.

حالت اول برای $\alpha=-1$ شامل مدل دو بعدی ریچی-فلو می شود و مورد دوم جواب های مشابه خوبی بدنبال دارد.

در ادامه جوابهایمان را با جواب هایی که برای مدل ۱-بعدی معادلهٔ (۲.۳) و معادلهٔ دو-بعدی ریچی-فلو داشتیم، مقایسه می کنیم.

نتایج اصلی در ادامه می آیند.

(i) چهار حالت غیر بدیهی برای $f(u)$ در معادلهٔ (۱۰.۳) وجود دارند که در نوع تقارن های لی جالب هستند و در فصل ۵ به آنها اشاره شده است.

(ii) حالت $f(u)=\frac{1}{u}$ معادل است با مدل مهم دو-بعدی ریچی-فلو.
در این حالت از (۱۵.۵) همان جبر لی را بدست می آوریم که در مرجع [۱۶] به آن اشاره شده است.

(iii) معادله برای گروه اپراتورهای تقارن حالت دو-بعدی، تعمیم یافتهٔ طبیعی حالت یک-بعدی است.

بعنوان مثال : معادلهٔ (۲.۳) برای $f(u)=u^\alpha$ که $\alpha\neq -۱$ ، ۴ اپراتور مستقل لی به صورت زیر را نتیجه می دهد:

$$U'_۱ = ۲t\partial t + x\partial x; \qquad (۱.۷)$$

$$U'_۲ = \partial x;$$

$$U'_۳ = t\partial t - u\partial u;$$

$$U'_۴ = \partial t;$$

با مقایسه این مجموعه با (۱۵.۵) مجموعهٔ مشابه دو بعدی، می بینیم که $U_۲ = U'_۲$ ، $U_۶ = U'_۴$ ، $U_۵ = U'_۳$، و $U_۴$ شریک طبیعی دو-بعدی $U_۲$ است. یک تقارن جدید که در حالت دو بعدی ظاهر می شود توسط $U_۱$ و شریکش $U_۳$ به دست می آید.

(iv) اگر روشی مشابه به قبل بر روی دو حالت خاص که در بالا ذکر شد اعمال شود، منجر به یافتن تقارن های مناسبی می شود. ۳ تا از این ناورداها، متناظر هستند با ۳ اپراتور لی متفاوت که برای حالت $f(u)=u^\alpha$ ذکر شده است.

جالب است بدانید در مورد حالت $f(u)=e^u$، ۳ اپراتور متفاوت تقارن می توانند همزمان جواب ها را تولید کنند.

(v) همچنین جالب است که بیان کنیم اپراتورهای لی برای حالت های $f(u)=u^\alpha$ با $\alpha\neq -۱$ و $f(u)=e^u$ دقیقاً یک جبرلی تولید می کنند که با روابط (۱۶.۵) و (۳۹.۵) داده شده است.

در ادامه علاقه مندیم بیان کنیم دسته بندی اپراتورها در ۳ جفت مستقل دارای عمل مشابه روی معادله است، این بدان معناست که کل جبرلی به یک جمع مستقیم از ۳ زیر جبرلی تقسیم شود که هر کدام از آنها دو-بعدی هستند و از قضیهٔ آدو پیروی می کنند که این زیر جبرها تولید شده توسط تنها یک جبر دو-بعدی غیر جابجایی از ماتریس هاست که تولید شده توسط :

$$E_{۱۱} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}. \tag{۲.۷}$$

$$E_{۱۲} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}. \tag{۳.۷}$$

هستند که گروه لی متناظر با آن به شکل زیر است:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}. \tag{۴.۷}$$

پیوست آ

گروه ها و معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱ ***(گروه تبدیلات):***

یک گروه تبدیلات عمل کننده روی منیفلد هموار M یک گروه لی G است و نگاشت هموار

$$\Phi : G \times M \longrightarrow M$$

که با ضابطهٔ $\Phi(g,x) = g.x$ به همراه روابط $e.x = x$ و $g.(h.x) = (gh).x$ برای هر $x \in M$ و $g \in G$.

سیستم معادلات φ را در نظر بگیرید که شامل p متغیر مستقل $x = (x^1, \ldots, x^p)$ و q متغیر وابستهٔ $u = (u^1, \ldots, u^q)$ باشد. جواب های این سیستم به شکل $u = f(x)$ هستند یا در شکل مؤلفه ای به صورت $u^\alpha = f^\alpha(x^1, \ldots, x^p)$ که $\alpha = 1, \ldots, q$. فرض کنید $X = \mathbb{R}^p$ با مختصات $x = (x^1, \ldots, x^p)$ نشان دهندهٔ فضای متغیرهای مستقل باشد و همچنین فرض کنید $U = \mathbb{R}^q$ با مختصات $u = (u^1, \ldots, u^q)$ نشانگر فضای متغیرهای وابستهٔ سیستم باشد. گروه تقارنی سیستم معادلات دیفرانسیل φ یک گروه تبدیلات موضعی G است که روی زیر مجموعهٔ بازی چون $M \subset X \times U$ عمل می کند. به عبارت دیگر گروه تقارنی G جواب های دستگاه معادلات دیفرانسیل φ را به جواب های دیگر آن می برد.

برای فهم بهتر موضوع می بایستی نشان دهیم که یک تقارن داده شده از گروه لی G به چه صورت یک تابع $u = f(x)$ را انتقال می دهد.

در ابتدا تابع $u = f(x)$ را با گراف آن معرفی می کنیم:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \Omega\} \subset X \times U$$

که $X \supset \Omega$ دامنهٔ تعریف تابع f است. دقت داشته باشید که Γ_f یک زیر منیفلد p-بعدی معین از $X \times U$ است.

اگر $\Gamma_f \subset M_g$، دامنهٔ تعریف گروه تقارنی g باشد، بنابراین تبدیل Γ_f توسط g بصورت زیر است:

$$g.\Gamma_f = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) = g.(x, u) \quad ; \quad (x, u) \in \Gamma_f\}$$

مجموعهٔ $g.\Gamma_f$ الزاماً گراف تابع یک متغیرهٔ $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ نیست! هرچند G بطور هموار عمل می-کند و عنصر همانی G ، Γ_f را بدون تغییر رها می کند.

با کاهش مناسب دامنهٔ تعریف Ω از f، مطمئن می شویم که برای g های به اندازهٔ کافی نزدیک به همانی، تبدیل $g.\Gamma_f = \Gamma_{\tilde{f}}$ گراف یک تابع یک متغیرهٔ $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ است.

در ادامه می نویسیم $\tilde{f} = g.f$ و می خوانیم $\tilde{f}$ تبدیل تابع f توسط g است.

مثال ۲ :

فرض کنید $p = ۱$ و $q = ۱$، بنابراین $X = \mathbb{R}$ با تنها یک متغیر مستقل x و $U = \mathbb{R}$ با یک متغیر وابستهٔ u. (بنابراین در وضعیت یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی شامل $u = f(x)$ هستیم).

فرض کنید $G = SO(۲)$ گروه دورانی ای باشد که روی $X \times U \simeq \mathbb{R}^۲$ عمل می کند.

تبدیلات در G به صورت زیر داده می شوند:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta.(x, u) = (x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta).$$

فرض کنید $u = f(x)$ یک تابع باشد که گراف آن زیر مجموعهٔ $\Gamma_f \subset X \times U$ است.

گروه $SO(۲)$ روی f به این صورت عمل می کند که گراف آن را دوران می دهد. به وضوح، اگر θ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، گراف دوران یافتهٔ $\theta.\Gamma_f$ گراف یک تابع یک متغیرهٔ دیگر نخواهد بود. هر چند اگر $f(x)$ روی بازهٔ متناهی $a \leq x \leq b$ تعریف شده باشد و $| \theta |$ خیلی بزرگ نباشد، بنابراین $\theta.\Gamma_f$ گراف تابع خوش تعریف $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ با $\Gamma_{\tilde{f}} = \theta.\Gamma_f$ خواهد بود.

به عنوان یک مثال خاص، تابع خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u = f(x) = ax + b$$

گراف تابع f یک خط مستقیم است، بنابراین دوران آن تحت زاویهٔ θ باز هم یک خط راست است. اگر آن خط راست عمودی نباشد، گراف یک تابع دیگر است که $\tilde{f} = \theta.f$ یا تبدیل f توسط دوران تحت زاویهٔ θ.

برای یافتن فرمول دقیقی برای $\theta.f$، با توجه به عبارت فوق نقطهٔ $(x, u) = (x, ax + b)$ روی گراف f به نقطهٔ زیر دوران می یابد:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = (x\cos\theta - (ax + b)\sin\theta, x\sin\theta + (ax + b)\cos\theta)$$

برای یافتن $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ کافی است x را از این زوج معادلات حذف کنیم. این کار ممکن است در صورتی که $\cot\theta \neq a$ (در حالت خاص ، برای θهای به اندازهٔ کافی نزدیک صفر) بنابراین گراف آن عمودی نیست، داریم:

$$x = \frac{\tilde{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}$$

بنابراین $\tilde{f} = \theta.f$ توسط رابطهٔ زیر داده می شود:

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = \frac{\sin\theta + a\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\tilde{x} + \frac{b}{\cos\theta - a\sin\theta}$$

که همانطور که در گذشته اشاره شد، مجدداً یک تابع خطی است.

در حالت کلی روش کار برای یافتن تابع انتقال یافتهٔ $\tilde{f} = g.f$ خیلی شبیه این مثال ابتدایی است. فرض کنید انتقال g با مختصات زیر داده شده باشد:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g.(x, u) = (\Xi_g(x, u), \Phi_g(x, u))$$

برای توابع هموار Ξ_g, Φ_g .

بنابراین گراف $\Gamma_{\tilde{f}} = g.\Gamma_f$ از $g.f$ به صورت پارامتری با معادلات زیر داده می شود:

$$\tilde{x} = \Xi_g(x, f(x)) = \Xi_g \circ (1 \times f)(x)$$

$$\tilde{u} = \Phi_g(x, f(x)) = \Phi_g \circ (1 \times f)(x)$$

که $x \in \Omega$ و 1 نمایش دهندهٔ تابع همانی روی X است. بنابراین $1(x) = x$ و $\times$ ضرب دکارتی توابع است.

برای یافتن $\tilde{f} = g.f$ به وضوح می بایستی x را از این دو سیستم معادلات حذف کنیم.

بنابراین برای $g = e$ داریم $\Xi_e \circ (1 \times f)(x) = 1$، می دانیم با این شرط که g به اندازهٔ کافی نزدیک عنصر همانی باشد، ماتریس ژاکوبی $\Xi_g \circ (1 \times f)$ ماتریس غیر منفرد (ناتکین) است و بنابراین با قضیهٔ تابع معکوس می توانیم معادله را بر حسب x ساده کنیم:

$$x = [\Xi_g \circ (1 \times f)]^{-۱}(\tilde{x})$$

با جایگذاری در معادلهٔ دوم عبارت زیر برای $g.f$ به دست می آید:

$$g.f = [\Phi_g \circ (1 \times f)] \circ [\Xi_g \circ (1 \times f)]^{-۱}$$

که رابطهٔ فوق برقرار است هرگاه عبارت دوم معکوس پذیر باشد.

مثال ۳ :

در حالت خاص در نظر بگیرید که گروه تقارنی G فقط متغیرهای مستقل x را انتقال می دهد. بنابراین تبدیلات در G به فرم خاص زیر هستند:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g.(x, u) = (\Xi_g(x), u)$$

که Ξ_g در حقیقت یک دیفئومورفیسم روی X است که $\Xi_g^{-۱} = \Xi_{g^{-۱}}$، در جاهایی که تعریف شده باشد.

اگر $\Gamma_f = \{(x, f(x))\}$ گراف یک تابع هموار باشد، بنابراین تبدیل آن یعنی $g.\Gamma_f = \{g.(x, f(x))\}$ همیشه گراف یک تابع هموار خواهد بود. در واقع :

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g.(x, f(x)) = (\Xi_g(x), f(x))$$

بنابراین می توانیم x را از رابطهٔ فوق با معکوس کردن Ξ_g بدست آوریم، داریم :

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = f(\Xi_g^{-۱}(\tilde{x})) = f(\Xi_{g^{-۱}}(\tilde{x}))$$

به عنوان مثال، اگر G گروه انتقالی :

$$(x, u) \longmapsto (x + \epsilon a, u)$$

که $\epsilon \in \mathbb{R}$ و $a \in X$ ثابت. بنابراین تبدیل تابع $u = f(x)$ انتقال:

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = f(\tilde{x} - \epsilon a)$$

برای f است.

نتایج مشابه برای حالت کلی تر، برای یک گروه تبدیلات تصویر پذیر یا فیبر پایا نیز برقرار است، یعنی زمانی که عمل روی متغیرهای مستقل مجزا از عمل روی متغیرهای وابسته است، به شکل زیر:

$$g.(x, u) = (\Xi_g(x), \Phi_g(x, u))$$

برای مثال گروه یک پارامتری:

$$g_\epsilon : (x, t, u) \longmapsto (x + ۲\epsilon t, t, e^{-\epsilon x - \epsilon^۲ t} u)$$

که $\epsilon \in \mathbb{R}$ یک گروه تقارن معادلهٔ یک بعدی حرارت است. (رجوع شود به مرجع [۱۷].) اگر $u = f(x, t)$ یک تابع باشد، بنابراین تبدیل آن توسط g_ϵ به صورت زیر است:

$$\tilde{u} = e^{-\epsilon x - \epsilon^۲ t} u = e^{-\epsilon x - \epsilon^۲ t}.f(x, t)$$

که حالا با جملات $(\tilde{x},\tilde{t}) = g_\epsilon.(x,t) = (x+۲\epsilon t, t)$ باید نوشته شود، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= e^{-\epsilon(\tilde{x}-۲\epsilon\tilde{t})-\epsilon^۲\tilde{t}}.f(\tilde{x}-۲\epsilon\tilde{t},\tilde{t})\\ &= e^{-\epsilon\tilde{x}+\epsilon^۲\tilde{t}}.f(\tilde{x}-۲\epsilon\tilde{t},\tilde{t})\end{aligned}$$

تابع تبدیل یافته در این حالت خاص است.

حالا می توانیم یک تعریف دقیق از مفهوم گروه تقارنی برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بیان کنیم.

تعریف ۲ *(گروه تقارنی):*

فرض کنید φ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد، یک گروه تقارنی از سیستم معادلات φ یک گروه تبدیلات موضعی G است که روی زیر مجموعهٔ باز M از فضای متغیرهای مستقل و وابستهٔ سیستم عمل می کند با این خاصیت که اگر $u = f(x)$ یک جواب برای φ باشد و اگر $g.f$ برای $g \in G$ تعریف شده باشد، آنگاه $\tilde{u} = g.f(x)$ یک جواب دیگر سیستم معادلات φ است، یا به عبارت ساده تر گروه تقارنی G جواب را به جواب می برد.

به عنوان مثال برای معادلهٔ دیفرانسیل اولیهٔ $u_{xx} = ۰$، گروه دورانی $SO(۲)$ که در مثال ۲ در نظر گرفتیم یک گروه تقارنی است، بنابراین جواب ها همگی توابع خطی هستند و $SO(۲)$ هر تابع خطی را به یک تابع خطی دیگر می برد.

مثال سادهٔ دیگر در مورد معادلهٔ خطی یک بعدی حرارت به صورت $u_t = u_{xx}$ است، گروه انتقالی آن به صورت زیر است:

$$(x,t,u) \longmapsto (x+\epsilon a, t+\epsilon b, u)$$

که $\epsilon \in \mathbb{R}$ ، یک گروه تقارنی آن است چون $u = f(x-\epsilon a, t-\epsilon b)$ یک جواب برای معادلهٔ حرارت است هرگاه $u = f(x,t)$ یک جواب باشد.

بیان این نکته خالی از لطف نیست که گروه یاد شده در انتهای مثال ۳ نیز یک تقارن برای معادلهٔ یک بعدی خطی حرارت است، یعنی اینکه :

$$u = e^{-\epsilon x+\epsilon^{۲}t}f(x - ۲\epsilon t, t)$$

یک جواب برای معادلهٔ یک بعدی خطی حرارت است هرگاه $u = f(x,t)$ یک جواب معادله باشد.

یکی از مزایای آشکار دانستن گروه تقارنی برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل این است که می توانیم جواب های جدید معادله را با دانستن یک جواب بسازیم. یعنی اگر ما بدانیم $u = f(x)$ یک جواب است، سپس با توجه به نحوهٔ تعریف، $\tilde{u} = g.f(\tilde{x})$ نیز یک جواب برای معادله به ازای هر عنصر g از گروه است.
بنابراین امکان ساخت خانواده ای کامل از جواب ها فقط با انتقال یک جواب معین توسط همهٔ عناصر ممکن گروه میسر است.

به عنوان مثال در حالت بالا که برای گروه تقارن معادلهٔ حرارت بحث شد، با یک جواب ثابت بدیهی مثل $u = c$ آغاز به کار می کنیم. وجود خانوادهٔ دو پارامتری از جواب های نمایی زیر را در می یابیم:

$$u(x,t) = ce^{-\epsilon x+\epsilon^{۲}t}$$

ما می توانیم این بحث را بیشتر به گروه انتقالات ربط دهیم، اما در این حالت جواب های جدید حاصل نمی شوند.

کتاب‌نامه

[1] P.A. Clarkson, E.L. Mansfield, Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equation,Physica D 70 (1994) 250-288.

[2] L. Ovsiannikov, Group Analysis of Differential Equations, Academic Press, New York, 1982.

[3] W. Fushchych, R. Zhdanov, J. Nonlinear Math. Phys. 1 (1) (1994) 60–64.

[4] W.F. Ames, Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, vol. I, Academic, New York, 1965
W.F. Ames, Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, vol. II, Academic, New York, 1972

[5] G.I. Barenblatt, On some unsteady motions of a liquid and gas in a porous medium, Prikl. Mat. Mekh. 16 (1) (1952)

[6] G.I. Barenblatt, Prikl. Mat. Mekh. 16 (6) (1952)

[7] W. Malfliet, Amer. J. Phys. 60 (1992) 650–654.

[8] L.V. Ovsiannikov, Dokl. AN SSSR 125 (3) (1959) 492–495

[9] R. Cherniha, M. Serov, European J. Appl. Math. 9 (1998)

[10] C. Sophocleous, Bull. Austral. Math. Soc. 61 (3) (2000) 507–521.

[11] C. Sophocleous, Physica A 320 (2003) 169–183.

[12] S.K. El-labany, A.M. Elhanbaly, R. Sabry, J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 08055–8063.

[13] N. Euler, A. Kohler, J. Phys. A: Math. Gen. 27 (1994) 2083–2092.

[14] N. Euler, A. Kohler, W.I. Fushchych, Phys. Scripta V49 (1994) 518–524.

[15] R.O. Popovych, N.M. Ivanova, New results on group classification of nonlinear diffusion–convection equations. arxiv: math-ph/0306035 v4,2004.

[16] R. Cimpoiasu, R. Constantinescu, J. Nonlinear Math. Phys. 13 (2) (2006) 285–292.

[17] P.J. Olver, Applications of Lie Group for Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1986, p. 110.

[18] M. Nadjafikhah, R. Bakhshandeh-Chamazkoti, Preliminarily group classification of a class of 2D nonlinear heat equations

[19] Roman O. Popovych , Nataliya M. Ivanova, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Tereshchenkivska Str., Kyiv-4, 01601, Ukraine

[20] M. Nadjafikhah, R. Bakhshandeh,A. Mahdipour-Shirayeh, A symmetry classification for a class of (2 + 1)-nonlinear wave equation, arXiv:0907.4858v2 [math.DG] 14 Aug 2011

[21] Kai-Seng Chou and Guan-Xin Li, A Note on Optimal Systems for the Heat Equation, The Chinese University of Hong Kong, Shatin, Hong Kong, 1999.

[22] R. Cimpoiasu, R. Constantinescu, Symmetries, Integrability and Exact Solutions for Nonlinear Systems, arXiv:1111.1377v1 [math-ph] 6 Nov 2011

[23] R. Cimpoiasu, R. Constantinescu, Lie symmetries and invariants for a 2D nonlinear heat equation, University of Craiova, 13 A.I.Cuza, 200585 Craiova, Romania, Nonlinear Analysis 68 (2008) 2261–2268.

[24] S. Lie ; Theorie der transformation Gruppen 1,2,3 ,Unter M; twirkung von F. Engel , Liepzig ,1888 ,1890 ,1893.

[۲۵] اسد الله رضوی، گروه و جبر لی، دانشکده ریاضی، دانشگاه امیرکبیر، تابستان ۱۳۸۷

نمادهای بکار رفته

مجموعه X
توپولوژی .... τ
اشتراک .... $\cap$
اعداد حقیقی .... $\mathbb{R}$
هموار .... C^∞
اعداد گویا .... $\mathbb{Q}$
اعداد مختلط .... $\mathbb{C}$
فضای اقلیدسی حقیقی مرتبهٔ n .... $\mathbb{R}^n$
دایرهٔ واحد به شعاع ۱ .... $\mathbb{S}^۱$
بعد .... dim
رتبه .... $rank$
اعداد مختلط غیر صفر .... $\mathbb{C}^*$
گروه خطی عمومی .... $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$
گروه خطی خاص .... $\mathbb{SL}(n, \mathbb{R})$
زیر گروه پایدار ساز p .... G_p
زیر گروه پایدار ساز مجموعهٔ S .... G_S
زیر گروه پایدار ساز فراگیر G روی S .... G_S^*
جبر لی گروه خطی عمومی .... $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$
جبر لی گروه خطی خاص .... $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$
نگاشت ضربی راست .... R_g
جبر لی .... $\mathfrak{g}$
نگاشت نمایی .... $\exp$
زیر گروه لی k-بعدی G .... $G^{(k)}$
گروه متعامد خاص .... $SO(۲)$
فضای جت مرتبهٔ n-ام .... J^n
گراف تابع f .... Γ_f
دستگاه معادلات دیفرانسیل .... $\Delta(x, u^{(n)})$
فضای جت مرتبهٔ n-ام روی فضای زمینه ای $X \times U$ .... $X \times U^{(n)}$
امتداد مرتبهٔ n-ام تبدیل نقطه ای g .... $g^{(n)}$
توسیع مرتبهٔ n-ام میدان برداری ν .... $\nu^{(n)}$
امتداد مرتبهٔ n-ام $f(x)$ .... $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$
نگاشت تبدیل عمل گروه G .... ϕ_g
فضای مماس بر منیفلد M در نقطهٔ p .... T_pM
فضای مماس بر $\mathbb{R}^n$ در p .... $T_p\mathbb{R}^n$
جبر لی چپ .... $\mathfrak{g}_\ell$
جبر لی راست .... $\mathfrak{g}_r$
مشتق جزئی u بر حسب x^i .... $\frac{\partial u}{\partial x^i} = u_{x^i}$

مشتق کامل نسبت به مؤلفهٔ i–ام .... D_i
مشتق کامل مراتب بالاتر .... D_J
مشخصهٔ میدان برداری ν .... Q^α
اثر ماتریس یا مجموع درایه های روی قطر اصلی ماتریس .... $trace = tr$
براکت لی میدان های برداری v, w .... $[v, w]$
عمل ضرب گروه لی .... $m : G \times G \longrightarrow G$
عمل وارون گروه لی .... $\iota : G \longrightarrow G$
نقطه ای در $\mathbb{R}^n$ .... $x = (x^۱, \dots, x^n)$
دلتای کرونکر .... δ^i_j
مشتق تابع f .... df
اشتراک دو مجموعه U, V .... $U \cap V$
فضای برداری ماتریس های $n \times n$ با درایه هایی از $\mathbb{R}$ .... $\mathbb{R}^{n\times n}$
فضای برداری ماتریس های $n \times n$ با درایه هایی از میدان K .... $K^{n\times n}$
بردار مماس بر منیفلد در نقطه p .... ν_p
فضای حقیقی انعکاسی از بعد ۱ .... $\mathbb{R}P^۱$
زیر جبر لی .... $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
مشتق جزئی u، $\frac{\partial u^\alpha_J}{\partial x^i}$ .... $u^\alpha_{J,i}$
دترمینان .... det
لگاریتم نپرین .... ln
توابع C^∞ روی U .... $C^\infty(U)$
گروه پایدار ساز روی x .... G_x
گراف تابع $f(x)$ .... Γ_f
نگاشت مزدوج .... K_g
نمایش الحاقی .... Ad
نگاشت مزدوج .... K_g
نمایش الحاقی .... dK_g
عمل الحاقی بی نهایت کوچک .... ad_ν
نمایش الحاقی .... $Ad(\exp(\epsilon\nu))u$

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آخاتوف	Akhatov
ادواردز	Edwards
انتشار	Diffusion
انتقال	Translation
انتقال گرما	Convection
اوزیانیکوف	Ovsiannikov
بعد	Dimension
پدیده	Phenomena
پیمایش	Scaling
تبدیل	Transformation
تبدیل الحاقی	Adjoint Transformation
تبدیلات هم ارزی	Equivalent Transformation
تعویض کردن	Substitute
تقارن	Symmetry
تقریب زدن	Approximate
توپولوژی	Topology
توسیع	Extension
توسیع	Prolongation
ثابت های دلخواه	Arbitary constants
جبر لی	Lie Algebra
جواب های اساسی	General Solution
جواب های ناوردا	Invariant Solution
چرنیها	Cherniha
حرکت	Motion
حرارت	Heat
خصوصی	Particular
درودنیتسین	Dorodnitsyn
دورانی	Rotational
دیفئومورفیسم	Diffeomorphism
روزناو	Rosenau
ساده سازی	Simplification
سرو	Serov
سیال	Fluid
سیستم بهینه	Optimal System
شریک	Partner
شمارش پذیر	Countable
ضرائب	Coefficient
ضرب دکارتی	Cartesian Product
طبقه بندی	Classify

Concrete expression .... عبارات بنیادین
Linear Action .... عمل خطی
Nontrivial .... غیر بدیهی
Non-degenerate .... غیر تکین
Nonlinear .... غیر خطی
Jet Space .... فضای جت
Tangent Space .... فضای مماس
Fiber Preserving .... فیبر پایا
Ado's Theorem .... قضیهٔ آدو
Reduce .... کاهش دادن
Gazizov .... گازیزوف
Gravity .... گرانش
Lie Group .... گروه لی
General Linear Group .... گروه خطی عام
Laplace .... لاپلاس
Jacobian Matrix .... ماتریس ژاکوبی
Independent Variable .... متغیر مستقل
Dependent Variable .... متغیر وابسته
Corresponding .... متناظر
Boundary .... مرزی
Conjugacy .... مزدوج
Total Derivative .... مشتق کامل
Characteristic .... مشخصه
Equation .... معادله
Partial Differential Equation .... معادلات با مشتقات جزئی
Inverting .... معکوس کردن
Possible .... ممکن
Manifold .... منیفلد
Locally Invariant .... موضعاً ناوردا
Generator .... مولد
Infenitesimal Generetor .... مولد بی نهایت کوچک
Vector Field .... میدان برداری
Invariant .... ناوردا
Approach .... نزدیک شدن
Linera Map .... نگاشت خطی
Conjugacy Map .... نگاشت مزدوج
Adjoint Representation .... نمایش الحاقی
Hausdorff .... هاوسدورف
Equivalent .... هم ارزی
Homogenous .... همگن
Homomorphism .... هومومورفیسم

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

نمایش الحاقی	*AdjointRepresentation*
تبدیل الحاقی	*AdjointTransformation*
قضیهٔ آدو	*Ado‘sTheorem*
آخاتوف	*Akhatov*
تقریب زدن	*Approximate*
نزدیک شدن	*Approach*
ثابت های دلخواه	*ArbitaryConstant*
مرزی	*Boundary*
ضرب دکارتی	*CartesianProduct*
مشخصه	*Characteristic*
چرنیها	*Cherniha*
طبقه بندی	*Classify*
ضرائب	*Coefficient*
عبارات بنیادین	*ConcreteExpression*
مزدوج	*Conjugacy*
نگاشت مزدوج	*ConjugacyMap*
انتقال گرما	*Convection*
متناظر	*Corresponding*
شمارش پذیر	*Countable*
متغیر وابسته	*DependentVariable*
دیفئومورفیسم	*Diffeomorphism*
انتشار	*Diffusion*
بُعد	*Dimension*
درودنیتسین	*Dorodnitsyn*
ادواردز	*Edwards*
معادله	*Equation*
هم ارزی	*Equivalent*
تبدیلات هم ارزی	*EquivalentTransformation*
توسیع	*Extension*
فیبر پایا	*FiberPreserving*
سیال	*Fluid*
گازیزوف	*Gazizov*
گروه خطی عام	*GeneralLinearGroup*
جواب های اساسی	*GeneralSolution*
مولد	*Generator*
گرانش	*Gravity*
هاوسدورف	*Hausdorff*
حرارت	*Heat*

همگن .... *Homogenous*
هومومورفیسم .... *Homomorphism*
متغیر مستقل .... *IndependentVariable*
مولد بی نهایت کوچک .... *InfenitesimalGenerator*
جواب های ناوردا .... *InvariantSolution*
معکوس کردن .... *Inverting*
لاپلاس .... *Laplace*
جبر لی .... *LieAlgebra*
گروه لی .... *LieGroup*
عمل خطی .... *LinearAction*
نگاشت خطی .... *LinearMap*
موضعاً ناوردا .... *LocallyInvariant*
ماتریس ژاکوبی .... *JacobianMatrix*
فضای جت .... *JetSpace*
منیفلد .... *Manifold*
حرکت .... *Motion*
غیر تکین .... *Non − degenerate*
غیر خطی .... *Nonlinear*
غیر بدیهی .... *NonTrivial*
سیستم بهینه .... *OptimalSystem*
اوزیانیکوف .... *Ovsiannikov*
معادلات با مشتقات جزئی .... *PartialDifferentialEquation*
خصوصی .... *Particular*
شریک .... *Partner*
پدیده .... *Phenomena*
ممکن .... *Possible*
توسیع .... *Prolongation*
کاهش دادن .... *Reduce*
روزناو .... *Rosenau*
دورانی .... *Rotational*
پیمایش .... *Scaling*
سرو .... *Serov*
ساده سازی .... *Simplification*
تعویض کردن .... *Substitute*
تقارن .... *Symmetry*
فضای مماس .... *TangentSpace*
توپولوژی .... *Topology*
مشتق کامل .... *TotalDerivative*
تبدیل .... *Transformation*
انتقال .... *Translation*
میدان برداری .... *VectorField*

Abstract

Many natural phenomena are described by a system of nonlinear partial differential equations which is often difficult to be solved analytically, as there is no a general theory for completely solving of the nonlinear partial differential equations.

One of the most useful techniques for finding exact solutions of the dynamical systems described by nonlinear partial differential equations is the symmetry method.

In one hand, one can consider symmetry reduction of differential equations and thus obtain classes of exact solutions.

On the other hand, by definition, a symmetry transforms solutions,into solutions, and thus symmetries can be used to generate new solutions from old ones.

Initially the symmetry method for solving partial differential equations was developed by Sophus Lie, to honor this great scientist this method is named Lie symmetry method.

The purpose of this thesis is to study the Lie symmetries of two-dimensional nonlinear heat equation, initially with the general form of the diffusion-convection equation having in mind, yhe study and make necessary changes on it, we reach to the basic form of two-dimensional nonlinear heat equation. we continue by using the Lie method for two-dimensional nonlinear heat equation, moreover we introduce the variable conditions that happens to it, and discuss two conditions of them to finding symmetries and invariants, henceforth we classify the group invariant solutions and their optimal system.

We finish thesis with some illustration and conclusions.

Keywords: *Lie Group , Lie Algebra , Symmetry , Invariant , Infenitesimal Generator , Nonlinear Heat Equation , Partial Differential Equation , adoint representation, optimal system.*

Iran University of Science and Technology

School of Mathematics

Department of Pure Mathematics

Master of Science Thesis

Topic

Lie group analisys of 2-dimensional nonlinear heat equation

By

Mohammad Reza Razavi Motlagh

Supervisor

Dr Mehdi Nadjafikhah

February 2013