# گروه لی و گروه فشرده

تألیف

جان فردریک پرایس

مدرسهٔ ریاضی، دانشگاه نیو سالتویز، کنسینگتن، استرالیا

ترجمه و تصحیح [1]

مهدی نجفی‌خواه

[1] آخرین بروز رسانی: ۱۸ خرداد ۱۳۹۲


e-mail : m_nadjafikhah@iust.ac.ir
Web : http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

# فهرست مطالب

# دیباچه

دو هدف از تألیف این اثر وجود داشته است: اول تهیهٔ مقدمه‌ای متکی بر خود و سریع از نظریهٔ عمومی گروه‌های لی، و دوم بیان ساختار گروه‌های لی همبند فشرده و نیز خود گروه‌های لی بر حسب گروه‌های لی بخصوصی بنام گروه‌های **ساده**. نظر به هدف اول، از این نوشته برای بدست آوردن اطلاعات عمومی در خصوص اصول نظریهٔ گروه‌های لی و یا به عنوان وسیله‌ای برای استفاده از کتابهای پیشرفته‌تر می‌توان استفاده نمود. تجربه نشان داده است که فصول ابتدایی این اثر برای دانشجویان سالهای آخر لیسانس، و فصول پایانی آن برای دانشجویان کارشناسی ارشد می‌تواند مفید باشد. دلیل دیگر فراهم نمودن توصیفی ساده‌تر از احکام مطرح شده در منابع پیشرفته‌تر (نظیر پنتریاگین [] و وایل [۶۰]) است. امید است نوشته حاضر که بیانی نوین از این متون است، احکام مطرح شده در آنها را قابل دسترس‌تر بنماید.

نظریهٔ گروه‌های لی در تلاقی نظریهٔ منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر، نظریه گروه‌های توپولوژی و نظریهٔ جبرهای لی قرار دارد. مطابق آنچه که مرسوم شده است، در برخورد با منیفلدها (و لذا با گروههای لی) از روش مختصات آزاد استفاده نموده و با کاستن از نمادها و اندیسهای تو در تو، به جنبه‌های شهودی مسأله می‌پردازیم. بخصوص، در حالت گروههای لی بر نتایج حاصل از ارتباط گروه‌لی و جبر لی نظیر به آن تکیه می‌کنیم.

در خلال چند سال گذشته، احکام مهمی در ارتباط با آنالیز هارمونیک بر گروههای فشرده و گروههای لی فشرده با استفاده از ساختار این گروهها و ... حاصل شده است؛ سمت و سوی نوشته حاضر، بیان مبسوط این احکام است. قضیه اصلی در مورد گروههای لی این است که اگر $G$ گروه لی همبند و فشرده باشد، آنگاه $G$ از نظر توپولوژی با

$$(G_0 \times G_1 \times \cdots G_m)/K$$

ایزومورف می‌باشد، که $G_0$ مولفه همانی مرکز $G$ است، $G_j$ ها همگی زیرگروههای لی ساده و همبند از $G$ هستند و $K$ زیرگروهی متناهی از مرکز حاصلضرب می‌باشد. در نتیجه، قضیه ساختاری مشابهی وجود دارد که در آن $G_j$ ها همبند ساده هستند. حکم اخیر به حالت گروههای همبند فشرده دلخواه تعمیم پیدا می‌کند.

تصمیم در خصوص اینکه حکمی در این کتاب آورده شود و یا خیر، بر این اساس گرفته می‌شد که در ارتباط با اثبات احکام ساختاری فوق قرار دارد یا خیر. در این ارتباط بسیاری از احکام اساسی نظریه گروههای لی مورد بررسی قرار گرفت، و حاصل ذکر برخی از احکام مورد اشاره بود، نظیر مطالب در فصل

چهار در ارتباط با هندسه گروههای لی و یا در فصل ۶ در ارتباط با شرط لازم و کافی برای یک گروه فشرده مفروض، گروه لی باشد.

فصل ۱ احکامی در ارتباط با نظریه منیفلدهای تحلیلی را در بر دراد، که اساس نظریه گروههای لی را تشکیل می‌دهد. فصل ۲ به مطالعه گروههای لی اختصاص دارد و بسیاری از مفاهیم اصلی نظیر جبر لی، میدان برداری ناوردای چپ، زیرگروه ۱-پارامتری و نگاشت نمایی در آن مطرح می‌گردد. اولین حکم عمیق در فصل ۳ مطرح می‌گردد، یعنی فرمول کمپبل-بیکر-هاوسدورف و ارتباط آن با ساختار گروهی یک گروه لی مفروض و ساختار جبری جبر لی آن گروه لی. در فصل ۴ مفهوم ژئودزی بر یک گروه لی مطرح شده و با استفاده از آن ایده‌ها نشان داده می‌شود که هر گاه گروه لی فشرده و همبند باشد، نگاشت نمایی آن پوشا خواهد بود. ارتباط بین ساختار گروهی زیرگروههای لی و زیرجبرهای لی در فصل ۵ مورد بررسی قرار می‌گیرد. فصل ۶ با فهرستی از شرایط لازم و کافی برای اینکه یک گروه فشرده، لی باشد آغاز می‌گردد و با احکام ساختاری مشروح در بالا خاتمه می‌یابد. ضمیمه‌ای شامل همه احکام در ارتباط با گروههای توپولوژی موضعا فشرده و نمایش آنها که در متن کتاب از آنها استفاده شده است، در انتها آورده شده است.

یادداشتهای اضافه و منابع برای مطالعات بیشتر در پایان هر فصل آورده شده است، و در ادامه تمرینات قرار گرفته است. اصل بر این بوده است که اثباتی را به عنوان تمرین واگذار نکنیم، مگر آنکه حکم خواسته شده بسیار ساده و سر راست بوده باشد.

در سال ۱۹۷۳ مطالبی از این نوشته را در دانشگاه ملی استرالیا برای دانشجویان عمدتا تحصیلات تکمیلی، و در سال ۱۹۷۴ در دانشگاه نیو سالت ویلز تدزیس نموده‌ام. این نوشته برگرفته از این دروس و همچنین مطالبی است که بعدا به آن اضافه نموده‌ام. لازم است از کسانی که در تهیه این کتاب کمک نموده‌ند، خصوصا از آقای دکتر گراهام وود برای خوانده فصل اول و نکاتی که در ارتباط با آن مطرح نمودند قدردانی کنم. او بود که فرمولهای خالی از مختصات در ۲.۳.۱ و ۳.۳.۱ برای حاصلضرب لی دو میدان برداری تحلیلی را مطرح نمود.

فکر می‌کنم این دیباچه به پایان نمی‌رسد مگر آنکه مطلبی را در ارتباط با دیاگرامهای تعویض‌پذیر ذکر کنم. تجربه شخصی من نشان می‌دهد که دیاگرامها در ارائه و فهم مطالب ریاضی کمکی نمی‌کنند، مگر آنکاه خود شخص قبلا شهودی در آن ارتباط داشته باشد، و بر این اساس من از آنها استفاده نکرده‌ام، مگر آنکه واقعا لازم بوده باشد.

کنسینگتن، ۱۹۷۶ — جان ف. پرایس

# فصل ۱

# منیفلد تحلیلی

این فصل به نظریه مقدماتی منیفلدهای تحلیلی مدل شده بر فضاهای برداری حقیقی با بعد متناهی اختصاص دارد. مطابق مرسوم، از روش خالی از مختصات استفاده نموده و بر مفاهیم و تعاریف کلی تکیه می‌کنیم.

یکی از دلایل آوردن این فصل آن است که خواننده قبل از برخورد با بحث اصلی در خصوص گروه‌های لی با این روش آشنا شود. دلیل دیگر برای استفاده از این روش، امکان تعمیم مستقیم مباحث به حالت منیفلدهای با بعد نامتناهی می‌باشد. البته فعلاً هیچ نیازی به دانستن این حالت کلی وجود ندارد، و در یادداشت انتهای فصل نکاتی راجع به این حالت را مطرح نموده‌ایم. خوانندهٔ علاقمند می‌تواند به کارهای لانگ [۴۰] و [۴۱] مراجعه کند.

چون یکی از سه ستون نظریهٔ گروه‌های لی بر نظریهٔ منیفلدها استوار است (دو ستون دیگر آن نظریهٔ گروه‌های موضعاً فشرده و نظریهٔ جبرهای لی می‌باشد)، در ادامه، لازم است تا تمام ایده‌های این فصل را بطور کامل فهمیده باشید.

## بخش ۱.۱ منیفلد و دیفرانسیل‌پذیری

**۱.۱.۱ تعریف (چارت).** فرض کنید $M$ یک فضای توپولوژی هاوسدورف و غیر تهی است و $E$ یک فضای برداری با بعد متناهی می‌باشد. اگر $\varphi : U \to V$ یک همیومورفیسم بین مجموعه‌های باز $U \subseteq E$ و $V \subseteq M$ باشد، می‌گوئیم که $\varphi$ یک **چارت بر** $M$ است. همچنین، اگر $p \in V$، می‌گوئیم $\varphi$ یک **چارت در نقطهٔ** $p$ است.

**یادداشت.** به تبعیت از نظریهٔ کاتگوری، همین که نام تابعی ذکر شود، بطور خودکار دامنه و برد آن مشخص است و دیگر لزومی به بیان سه موردی تابع نیست. ما نیز این نمادگذاری را پذیرفته و از نمادهای

$\varphi$، $\varphi_\alpha$، و $\varphi_\beta$ برای چارتهای با دامنهٔ بترتیب $U$، $U_\alpha$ و $U_\beta$ و برد بترتیب $V$، $V_\alpha$ و $V_\beta$ استفاده می‌کنیم. مگر آنکه خلاف آن تصریح گردد.

**تعریف (اطلس - منیفلد)** فرض کنید که به ازای هر $\alpha$ از یک مجموعهٔ اندیسگذار مفروض $A$، $\varphi_\alpha$ چارتی بر $U_\alpha \subseteq M$ است. گردایهٔ $\{\varphi_\alpha | \alpha \in A\}$ را در صورتی **اطلس بر $M$** گوئیم که

(۱) هر یک از $U_\alpha$ ها در یک فضای برداری با بعد متناهی مفروض $E$ قرار داشته باشد؛ و

(۲) اجتماع $V_\alpha$ ها برابر $M$ باشد.

در این صورت می‌گوئیم $M$ **منیفلد** است، یا $M$ **منیفلد مدل شده بر $E$** است. (هنگامی که می‌خواهیم بطور کاملاً دقیق صحبت کنیم، زوج مرتب $(M, \{\varphi_\alpha | \alpha \in A\})$ را منیفلد می‌گوئیم. البته، وقتی که بیم ابهامی نمی‌رود، تنها می‌نویسیم که **منیفلد** $M$.) بعد منیفلد $M$ را برابر با بعد فضای برداری $E$ تعریف می‌کنیم. برای بیان دلیل اینکه چرا بعد منیفلد ثابت است، به تمرین $C-1$–(۱) مراجعه کنید.

**مثال (زیر منیفلد باز)** روشن است که هر زیرمجموعهٔ باز $U$ از یک فضای بردار با بعد متناهی $E$ به همراه نگاشت همانی $i$، منیفلد است. از این پس، هنگامی که به چنین مجموعه‌ای $U$ به عنوان یک منیفلد اشاره می‌کنیم، فرض بر این است که اطلس آن $\mathrm{Id}_U : U \to U$ است. در فصل دوم پس از تعریف گروه لی، مثالهای جدی‌تر از منیفلدها آورده می‌شد.

**نمادگزاری.** روشن است که فضای توپولوژی هاوسدورف $M$ را وقتی و تنها وقتی با ساختار یک منیفلد $0$–بعدی می‌توان همراه نمود که $M$ گسسته باشد. لذا، با اینکه تمام احکام جالب در خصوص منیفلدها به طور خودکار برای گروه‌های لی برقرارند، بحث آنها بسیار لوس است. به همین دلیل، قرار داد می‌کنیم که از این پس همهٔ فضاهای برداری، منیفلدها و گروه‌های لی با بعد لا اقل ۱ هستند. هر کجا که ذکر می‌کنیم بعد فضای برداری $E$ برابر $n$ است، منظور ما این است که $E$ همان $\mathbb{R}^n$ می‌باشد، که $\mathbb{R}$ نمایشگر مجموعهٔ اعداد حقیقی است. اما در کل سعی می‌شود تا فضاهای برداری حقیقی با بعد متناهی را با نماد $E$ یا $F$ نشان دهیم.

**۲.۱.۱ تعریف (نگاشت دیفرانسیل‌پذیر).** در نظریهٔ منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر از تعریف مجرد مشتق نگاشت بین فضاهای برداری استفاده می‌شود، ولی از مختصات موضعی بخصوصی استفاده نمی‌شود. اگر $f$ تابعی از یک زیر مجموعهٔ باز $U$ از یک فضای برداری با بعد متناهی $E$ بتوی فضای دیگر $F$ باشد، آنگاه در صورتی می‌گوئیم $f$ در $x \in U$ دیفرانسیل‌پذیر است که نگاشتی خطی $f'(x) : E \to F$ چنان یافت گردد که به ازای $h$ های در یک زیرمجموعهٔ کراندار $U$ (البته، به ازای آنهایی که $x+\varepsilon h$ به $U$ متعلق است) تساوی

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(f(x+\varepsilon h) - f'(x)) = f'(x)h \qquad (۱.۱)$$

به طور یکشکل برقرار است.

**یادداشت.** بسادگی می‌شود تحقیق نمود که این تعریف با تعریف کلاسیک معادل است: نگاشتی خطی $f'(x) : E \to F$ چنان وجود دارد که

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{\|f(x+\varepsilon h) - f(x) - f'(x)h\|}{\|h\|} = 0. \qquad (۲.۱)$$

نرمهای بکار رفته در اینجا می‌توانند هر کدام از نرم‌های هم‌ارز با همی باشند که می‌توان بر فضاهای برداری با بعد متناهی تعریف نمود. (به گزارهٔ ۱.۹.۶ از ادوارد [۱۹] مراجعه شود.)

**یاداداشت.** از این پس هر کجا که به توپولوژی بر یک فضای برداری با بعد متناهی اشاره می‌شود، منظور توپولوژی القائی از یک چنین نرمی می‌باشد.

در تمرین $A-1$ برخی از خواص مقدماتی مشتق، نظیر یکتایی نگاشت خطی $f'(x)$ را جمع آوری نموده‌ایم.

**تعریف (نگاشت مشتق)** اگر $f$ در هر یک از نقاط مجموعهٔ مفروض $U$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، می‌گوئیم $f$ بر $U$ دیفرانسیل‌پذیر است. در این حالت تابعی

$$f' : U \to \mathrm{Hom}(E, F)$$

خواهیم داشت که $f' : x \mapsto f'(x)$ و $\mathrm{Hom}(E,F)$ فضای برداری همهٔ نگاشتهای خطی از $E$ به $F$ می‌باشد.

**تعریف (مشتقات مرتبهٔ بالا - نگاشت هموار)** روشن است که اگر به همین طریق ادامه دهیم، مشتقات مراتب بالاتر $f'' = (f')'$، $f''' = (f'')'$ و ... را می‌توان تعریف نمود. به این ترتیب به مفهوم نگاشت **هموار** (در یک نقطه و یا بر یک مجموعهٔ باز) می‌رسیم که معنی وجود تمام مشتقات تابع (در یک همسایگی از آن نقطه و یا آن مجموعهٔ باز) می‌باشد.

فرض کنید $f$ مانند بالا است و $f''$ بر $U$ وجود دارد، در این صورت $f''$ تابعی از $U$ به $\mathrm{Hom}(E, \mathrm{Hom}(E,F))$ است. مطابق مرسوم، فضای آخری را با فضای برداری $\mathrm{Hom}^2(E\times E, F)$ همهٔ نگاشت‌های دوخطی از $E\times E$ به $F$ یکی می‌گیریم. عملاً، اگر $f^{(p)}$ بر $U$ وجود داشته باشد، فضای تصویر آن را با نماد $\mathrm{Hom}^p(E\times E\times\cdots\times E\,(\text{تا } p), F)$ نشان می‌دهیم. این کار باعث ساده‌تر شدن بسیاری از عبارتها نظیر بسط تیلر در زیر بخش ۵.۱.۱ می‌گردد.

**قضیه (قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق)** اگر $E$، $F$ و $G$ فضاهای برداری با بعد متناهی باشند و $f : E \to F$ در $x$ دیفرانسیل‌پذیر است و $g : F \to G$ در $f(x)$، قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق (که تمرین $A-1$ ذکر شده است) اذعان می‌دارد که $g\circ f$ در $x$ دیفرانسیل‌پذیر است و بعلاوه:

$$(g\circ f)'(x) = g'((x))\circ f'(x). \qquad (۳.۱)$$

**۳.۱.۱ یادداشت.** مفهوم مشتقی که در اینجا مطرح شده است، تحت عنوان مشتق فرشه [۱] معروف می‌باشد. فصل هشتم کتاب دیونونن [۱۵] به مطالعهٔ این مفهوم در فضاهای باناخ اختصاص دارد، و کتاب آوربوخ و اسمولیانوف [۲] به مطالعهٔ این مفهوم به شکل کلی‌تر بر فضاهای توپولوژی می‌پردازد. مثلاً، در مرجع دوم مؤلفان نشان می‌دهند که مشتق فرشه حالت ضعیف‌تر دیفرانسیل‌پذیری است، به این معنی که قاعدهٔ زنجیره‌ای مرتبهٔ اول در مورد فضاهای برداری با بعد نامتناهی برقرار است.

**۴.۱.۱ مثال (نگاشت از $\mathbb{R}$).** اگر $f:\mathbb{R}\to E$ نگاشتی دیفرانسیل‌پذیر باشد، در این صورت $f'(x)$ در رابطهٔ

$$f'(x)(t)=f'(x)(1)\cdot t$$

صدق می‌کند. یعنی، $f'(x)$ توسط مقدارش در ۱ کاملاً مشخص می‌گردد، و معمولاً بجای $f'(x)(1)$ می‌نویسیم $f'(x)$. (این دقیقاً آن چیزی است که در نظریهٔ کلاسیک توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ رخ می‌دهد، و $f'(x)$ را به عنوان یک عدد تلقی می‌کنند نه یک عملگر.)

**۵.۱.۱ قضیه (فرمول تیلور).** فرض کنید $f$ تابعی هموار از یک مجموعهٔ باز $U$ از یک فضای برداری با بعد متناهی $E$ به فضایی دیگر $F$ است. فرض کنید $x\in U$ و $y\in E$ به گونه‌ای هستند که به ازای هر $t\in[0,1]$ ای $x+ty\in U$. اگر $m-$تایی $(y,\cdots,y)$ را با نماد حلاصهٔ $y^{(m)}$ نشان دهیم، در این صورت به ازای هر $m\in\mathbb{Z}^+=\{0,1,2,\cdots\}$ ای

$$f(x+y)=f(x)+f'(x)y+\cdots\cdots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(x)y^{(m)}+R_{m+1}(y) \qquad (۴.۱)$$

که جملهٔ خطای $R_{m+1}(y)$ در رابطهٔ $\lim_{y\to 0}R_{m+1}(y)\cdot\|y\|^{-m}=0$ صدق می‌کند.

(به تمرین $D-1$ که در آن شکل انتگرالی جملهٔ خطا آورده شده است، مراجعه کنید.) فرمول (۴.۱) را **فرمول تیلور درجهٔ** $m$ **ام** می‌نامند.

**تعریف (تابع تحلیلی)** درست همانند حالت یک بعدی، تابع مفروض $f:U\to F$ را درصورتی بر $U$ **تحلیلی** (حقیقی) گوئیم که به ازای هر $x\in U$ ای یک گوی باز $B\subseteq U$ به مرکز در $x$ طوری یافت گردد که سری

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}f^{(m)}(x)y^{(m)} \qquad (۵.۱)$$

به ازای همهٔ $z=x+y\in B$ ها همگرای مطلق بوده (به بیان دیگر، سری $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\|f^{(m)}(x)y^{(m)}\|$ همگرا می‌باشد، که $\|\cdot\|$ نرمی در $F$ است) و به $f(z)$ همگرا باشد. در صورتی می‌گوئیم تابع $f:U\to F$ **در** $x$ **تحلیلی** است که در یک همسایگی از $x$ تحلیلی باشد.

**مثال ۱)** اگر $f:E\to F$ در $x$ و $g:F\to G$ در $f(x)$ تحلیلی باشند، در این صورت $g\circ f$ در $x$ تحلیلی است.

---
[۱] Freshet Derivative

**مثال ۲)** اگر $f:U\to F$ بر زیر مجموعهٔ باز $U$ از $E$ تحلیلی باشد، در این صورت به ازای هر $k\in\mathbb{Z}^+$ ای $f^{(k)}$ نیز بر $U$ تحلیلی است و بسط تیلر آن در $x+y\in U$ برابر با $\sum_{m=0}^{\infty} f^{(k+m)}(x)y^{(m)}/m!$ است، که $x\in U$؛ به عبارت دیگر،

$$f^{(k)}(x+y)(u_1,\cdots,u_k)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}f^{(k+m)}(x)(\underbrace{y,\cdots,y}_{m\ \text{تا}},u_1,\cdots,u_k)$$

اثبات درستی این دو مثال را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم.

**مثال ۳)** مثالهای متنوعی از توابع هموار غیر تحلیلی وجود دارد. حتی مطلقاً همگرا بودن عبارت (۵.۱ ) در یک گوی به مرکز $x$، برای استنتاج تحلیلی بودن تابع در آن نقطه کافی نیست. مثلاً، تابع هموار $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$g(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{اگر } x\neq 0\\ 0 & \text{اگر } x=0\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. در این صورت به ازای هر $m\in\mathbb{Z}^+$ ای $g^{(m)}(0)=0$ و بنابراین سری ( ۵.۱) به ازای هر $y\in\mathbb{R}$ ای همگرای مطلق است، در حالی که تنها در $x=0$ همگرا می‌باشد.

**۶.۱.۱ تعریف (اطلس و منیفلد هموار).** در صورتی اطلس مفروض $\{\varphi_\alpha|\alpha\in A\}$ بر فضای توپولوژی هاوسدورف $M$ را **هموار** گوئیم که به ازای هر $\alpha,\beta\in A$ ای تابع $\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha$ بر $\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha\cap V_\beta)$ هموار باشد. یک چنین اطلسی را در صورتی ماکسیمال گوئیم که اگر $U\subseteq E$ و $V\subseteq M$ زیرمجموعه‌هایی باز و $\varphi:U\to V$ همیومورفیسمی باشد که به ازای هر $\alpha\in A$ ای هر یک از توابع

$$\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi:\varphi^{-1}(V\cap V_\alpha)\to\varphi_\alpha^{-1}(V\cap V_\alpha) \qquad (۶.۱\ )$$
$$\varphi^{-1}\circ\varphi_\alpha:\varphi_\alpha^{-1}(V\cap V_\alpha)\to\varphi^{-1}(V\cap V_\alpha) \qquad (۷.۱\ )$$

هموار باشند، آنگاه $\varphi\in\{\varphi_\alpha|\alpha\in A\}$.

**لم.** هر اطلس هموار بر $M$ در یک اطلس هموار ماکسیمال منحصر بفرد قرار دارد.

**برهان:** اگر $\{\varphi_\alpha|\alpha\in A\}$ اطلسی هموار بر $M$ باشد، فرض کنیم $\{\varphi_{\alpha'}|\alpha'\in A'\}$ گردایهٔ همهٔ نگاشت‌های $\psi$ بین زیر مجموعه‌های باز $E$ و $M$ باشد که در شرایط ( ۶.۱) و ( ۷.۱) صدق می‌کنند. اطلس مورد نظر همین گردایه می‌باشد. □

این حکم در اصطلاح این طور گفته می شود که هر اطلس هموار یک اطلس هموار ماکسیمال منحصر بفرد را **تولید** می‌کند.

**تعریف (منیفلد هموار)** منیفلد $(M,\{\varphi_\alpha|\alpha\in A\})$ را درصورتی هموار گوئیم که اطلس آن هموار و در عین حال ماکسیمال باشد.

**یادداشت.** در عمل بیشتر با مولد یک اطلس کار می‌شود تا خود اطلس ماکسیمال، نظیر توپولوژی که بیشتر با پایهٔ یک توپولوژی کار می‌شود تا خود توپولوژی. نکته اینجا است که بسیاری از خواص وقتی و تنها وقتی برای اطلس ماکسیمال برقرارند که برای یک مولد آن برقرار باشند. بنابراین اگر اطلسی $\{\varphi_\alpha|\alpha\in A\}$ را بر $M$ مشخص نمودیم و بعد از منیفلد $(M,\{\varphi_\alpha|\alpha\in A\})$ سخن گفتیم، منظورمان $M$ به همراه اطلس ماکسیمال تولید شده توسط اطلس $(M,\{\varphi_\alpha|\alpha\in A\})$ می‌باشد.

**مثال (فضای برداری)** اگر $M$ یک فضای برداری حقیقی با بعد متناهی به همراه توپولوژی استانداردش باشد و $\mathrm{Id}: M\to M$ نگاشت همانی باشد، در این صورت $(M,\{\mathrm{Id}\})$ منیفلدی هموار خواهد بود. همین اطلس ساده‌ای که تنها یک چارت دارد کافی است، و چارت Id خود باعث تولید خانواده‌ای فزاینده از چارتها می‌شود. تشریح اعضاء آن به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده است.

**۷.۱.۱ تعریف (نگاشت هموار).** در صورتی که $M$ و $N$ دو منیفلد هموار با اطلس هموار بترتیب $\{\varphi_\alpha|\alpha\in A\}$ و $\{\psi_\beta|\beta\in B\}$ باشند، در صورتی می‌گوئیم نگاشت $f$ از مجموعهٔ باز $U\subseteq M$ بتوی $N$ **هموار** است که به ازای هر $\alpha\in A$ و هر $\beta\in B$ ای نگاشت $\psi^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha$ بر $\varphi^{-1}(V_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta))$ هموار باشد.

به ویژه، وقتی و تنها وقتی $f$ در نقطهٔ $x$ هموار است که **هر زوج** $(\varphi_\alpha,\psi_\beta)$ ای در شرایط زیر صدق کند:

$$x\in(\varphi_\alpha \text{ برد}) \text{ و } f(x)\in(\psi_\beta \text{ برد}) \qquad (۸.۱)$$

$$\text{نگاشت } \psi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha \text{ در نقطهٔ } \varphi_\alpha^{-1}(x) \text{ هموار است} \qquad (۹.۱)$$

**یادداشت.** روشن است که اگر جفت $(\varphi_\alpha,\psi_\beta)$ در شرایط (۸.۱) و (۹.۱) صدق کند و زوج $(\varphi'_{\alpha'},\psi'_{\beta'})$ تنها در شرایط (۸.۱) صدق کند، آنگاه روشن است که نگاشت $\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_{\alpha'}$ در نقطهٔ $\varphi_{\alpha'}(x)$ و نگاشت $\psi_{\beta'}^{-1}\circ\psi_\beta$ در نقطهٔ $\psi_\beta(f(x))$ هموارند و در نتیجه

$$\psi_{\beta'}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\alpha'}=\left(\psi_{\beta'}^{-1}\circ\psi_\beta\right)\circ\left(\psi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha\right)\circ\left(\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_{\alpha'}\right)$$

در نقطهٔ $\varphi_{\alpha'}^{-1}(x)$ هموار است. این نشان می‌دهد که زوج $(\varphi'_{\alpha'},\psi'_{\beta'})$ در شرط (۹.۱) نیز صدق می‌کند.

**تعریف (دیفئومورفیسم)** در صورتی که $M$ و $N$ منیفلدهایی هموار و $f: M\to N$ همیومور-فیسمی باشد که $f$ و $f^{-1}$ هر دو هموارند، در این صورت $f$ را **دیفیومورفیسم** می‌نامیم.

**۸.۱.۱ تعریف (منیفلد تحلیلی).** اگر در تعریف اطلس، منیفلد و نگاشت هموارکه در بالا ذکر شد بجای لفظ **هموار** از **تحلیل** استفاده شود، به تعریفی برای **اطلس تحلیلی**، **منیفلد تحلیلی** و **نگاشت تحلیلی** می‌رسیم. اگر یک همیومورفیسم و وارونش تحلیلی باشند، آن را **همیومورفیسم تحلیلی** یا **دیفیومورفیسم تحلیلی** می‌نامیم.

**۹.۱.۱ تعریف (نگاشت تحلیلی).** فرض کنید $M$ و $N$ منیفلدهایی تحلیلی با اطلس‌های تحلیلی به ترتیب $\{\varphi_\alpha|\alpha\in A\}$ و $\{\psi_\beta|\beta\in B\}$ باشند. شبیه به زیر بخش ۷.۱.۱، در صورتی می‌گوئیم نگاشت $f: M\to N$ در $x\in M$ تحلیلی است که یک چارت $\varphi_\alpha$ حول $x$ و $\psi_\beta$ حول $f(x)$ چنان یافت شوند که $\psi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha$ در $x$ تحلیلی باشد.

## بخش ۲.۱ کلاف مماس

**۱.۲.۱ ایدهٔ اصلی.** فرض کنید $U$ زیر مجموعه‌ای باز از فضای برداری با بعد متناهی $E$ است. اگر $\xi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ (که $\varepsilon > 0$) یک منحنی تحلیلی صادق در شرط $\xi(0) = p$ باشد، در این صورت یا با محاسبه و یا با تجسم، می‌توان قبول کرد که $\xi$ در $p$ دارای مماس است. بعلاوه، دو منحنی مماس گذرنده از نقطهٔ $p$ در صورتی دارای مماس یکسانی در نقطهٔ $p$ هستند که جهت و سرعت آن دو در نقطهٔ $p$ همانند باشند. به بیان ریاضی، مماس بر $\xi$ در $p$ را به عنوان برداری در $E$، با نماد $\xi'(0)$ (و یا با نماد $\xi'(0)(1)$) نشان می‌دهیم.

پس می‌توان $E$ را فضای مماس به $U$ در $p$ قلمداد نمود؛ و این موضوع، چیزی جز دسته‌های هم‌ارزی از مجموعهٔ همهٔ منحنی‌های تحلیلی گذرنده از $p$ نسبت به رابطهٔ هم‌ارزی **دارای مشتق همانند در نقطهٔ $p$ بودن** نمی‌باشد.

حال فرض کنیم که $M$ یک منیفلد تحلیلی مدل شده بر $E$ است. فرض کنید $C(M)$ نمایشگر مجموعهٔ همهٔ نگاشت‌های تحلیلی $\xi$ از یک همسایگی باز از $0 \in \mathbb{R}$ بتوی $M$ است که در شرط $\xi(0) = p$ صدق می‌کنند. مشتق $\xi$ تعریف نشده است، اما با در نظر گرفتن مشتق $\varphi_\alpha^{-1} \circ \xi$ در $0$ می‌توان این مشکل را حل نمود، که $\varphi_\alpha$ یک چارت حول $p$ می‌باشد. رابطه‌ای هم‌ارزی بر $C(M)$ به صورت

$$\xi \sim \eta \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \left(\varphi_\alpha^{-1}\xi\right)'(0) = \left(\varphi_\alpha^{-1}\eta\right)'(0) \tag{۱۰.۱}$$

تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $[[\xi]]_p$ نمایشگر دستهٔ شامل همهٔ منحنی‌های هم‌ارز با $\xi$ است (و یاد آور می‌شویم که اگر دو منحنی مفروض نسبت به یک چارت بخصوص در رابطهٔ (۱۰.۱) صدق کنند، در این صورت نسبت به هر چارت دیگری که حول $0$ باشد نیز در این رابطه صدق خواهند نمود)؛ **فضای مماس** به $M$ در $p$ را به صورت مجموعهٔ همهٔ چنین دسته‌های هم‌ارزی تعریف می‌کنیم.

برعکس عمل کرده و یک بردار $v$ در $E$ و یک چارت $\varphi_\alpha$ حول $p$ در نظر می‌گیریم.

آیا همواره می‌توان یک منحنی $\xi$ در $C_p(M)$ طوری پیدا نمود که $\left(\varphi_\alpha^{-1}\eta\right)'(0) = v$؟

پاسخ این سؤال مثبت است و قسمتی از تمرین $B - 1$ می‌باشد.

از روش بکار رفته در اینجا، چنین استنباط می‌شود که فضای مماس به یک منیفلد (مدل شده بر $E$) در یک نقطه را همیشه با خود $E$ می‌توان یکی گرفت. خواهیم دید که با چنین برداشتی، می‌توان این فضا را بدون توجه به منحنی‌ها با خود $E$ یکی گرفت. این کار را در زیر بخش بعدی به انجام می‌رسانیم. روشی دیگر برای تعریف فضای مماس به عنوان **نگاشت‌های مشتق** وجود دارد که در تمرین $F - 1$ آورده شده است.

**۲.۲.۱ فضای مماس.** فرض کنید $(M, \{\varphi_\alpha | \alpha \in A\})$ منیفلدی تحلیلی و $p$ نقطه‌ای از $M$ است. رابطه‌ای هم‌ارزی

$$(\varphi_\alpha, v) \sim (\varphi_\beta, w) \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \left(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha\right)'\left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v) = w \tag{۱۱.۱}$$

بر زوجهای به شکل $(\varphi_\alpha, v)$، که $\varphi_\alpha$ یک چارت حول $p$ و $v$ برداری از $E$ می‌باشد، تعریف می‌کنیم.
این روند را به صورت زیر می‌توان تصور نمود: بسته به هر چارت مفروض حول $p$، یک کپی از فضای $E$ را به نقطهٔ $p$ الصاق کرده، و سپس هر جفت از این الصاقها را به کمک رابطهٔ هم‌ارزی ( ۱۱.۱) یکی می‌گیریم. پس از این کار، عملاً یک شیء واحد در نقطهٔ $p$ خواهیم داشت که از انتخاب چارت مستقل می‌باشد. بعلاوه، مشاهده می‌شود که این شیء به طور طبیعی دارای ساختار فضای برداری ایزومورف با $E$ است. این شیء به همراه ساختار مذکور را **فضای مماس به $M$ در $p$** می‌نامیم.
انگیزهٔ طرح تعریف ( ۱۱.۱) را با دنبال کردن مطالب قبلی که در ( ۱۰.۱) در مورد منحنی‌های تحلیلی $\xi$ بر $M$ با $\xi(0) = p$ می‌توان توضیح داد. این خواسته را می‌توان داشت که بردار مماس به $\xi$ در $p$ تنها به $\xi$ بستگی داشته باشد و نه به انتخاب چارت $\varphi_\alpha$ یا $\varphi_\beta$ حول $p$؛ یعنی، اینکه می‌بایستی $\left(\varphi_\alpha^{-1}\right)'(0)$ و $\left(\varphi_\beta^{-1}\right)'(0)$ (به تعبیری خاص) معادل باشند. یعنی، بسته به ( ۱۱.۱)!
قبل از آنکه ادامه دهیم باید نشان دهیم که رابطه ( ۱۱.۱) واقعاً رابطه‌ای هم‌ارزی است. برای این منظور باید تحقیق کنیم

۱) بازتابی است؛

۲) تقارنی است؛ و

۳) متعدی است.

**اثبات ۱)** روشن است که $(\varphi_\alpha, v) \sim (\varphi_\beta, w)$ و بنابراین رابطهٔ مذکور بازتابی است.

**اثبات ۲)** فرض کنید $(\varphi_\alpha, v) \sim (\varphi_\beta, w)$ و در نتیجه

$$\left(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha\right)' \left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v) = w;$$

رابطهٔ مذکور در صورتی بازتابی است که داشته باشیم

$$\left(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta\right)' \left(\varphi_\beta^{-1}(p)\right)(w) = v.$$

اما به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای ( ۳.۱) داریم

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta\right)' \left(\varphi_\beta^{-1}(p)\right)(w) &= \left(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta\right)' \left(\varphi_\beta^{-1}(p)\right)\left[\left(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha\right)' \left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v)\right] \\
&= \left(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\beta^{-1}(p) \circ \varphi_\alpha\right)' \left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v) \\
&= (\mathrm{Id})' \left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v) \\
&= v.
\end{aligned}$$

**اثبات ۳)** اگر $(\varphi_\alpha,v)\sim(\varphi_\beta,w)$ و $(\varphi_\beta,w)\sim(\varphi_\gamma,u)$ در این صورت تعدی بودن رابطهٔ مذکور به معنی $(\varphi_\alpha,v)\sim(\varphi_\gamma,u)$ می‌باشد. یعنی، به معنی

$$\left(\varphi_\gamma^{-1}\circ\varphi_\alpha\right)'\left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v)=u$$

این رابطه را به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌توان افبات نمود:

$$\begin{aligned}\left(\varphi_\gamma^{-1}\circ\varphi_\alpha\right)'\left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v) &= \left(\varphi_\gamma^{-1}\circ\varphi_\beta\right)'\left(\varphi_\beta^{-1}(p)\circ\varphi_\alpha\right)'\left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v)\\ &= \left(\varphi_\gamma^{-1}\circ\varphi_\beta\right)'\left(\varphi_\beta^{-1}(p)\right)\left(\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha\right)'\left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v)\\ &= \left(\varphi_\gamma^{-1}\circ\varphi_\beta\right)'\left(\varphi_\beta^{-1}(p)\right)(w)\\ &= u.\end{aligned}$$

کلاس هم‌ارزی شامل $(\varphi,v)$ در $p$ را با نماد $[\varphi,v]_p$ نشان می‌دهیم.
مجموعهٔ همهٔ چنین کلاسهای هم‌ارزی، با اعمال به شرح زیر، تشکیل فضای برداری می‌دهد.

(1) $\lambda[\varphi_\alpha,v]_p=[\varphi_\alpha,\lambda v]_p$

(2) $[\varphi_\alpha,v]_p+[\varphi_\beta,w]_p=\left[\varphi_\beta,\left(\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha\right)'\left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v)+w\right]_p$

(برای تکمیل کار می‌بایستی تحقیقی گردد که این دو عمل خوش–تعریف هستند. این امر را به عنوان تمرین $B-1$ به خواننده می‌سپاریم.)

**تعریف.** مجموعهٔ همهٔ کلاسهای هم‌ارزی نسبت به رابطهٔ (۱۱.۱) به همراه ساختار جبری تعریف شده در بالا را با نماد $T_p(M)$ نشان داده و **فضای مماس به $M$ در $p$** می‌نامیم.

روشن است که این ساختار با $E$ ایزومورف می‌باشد. چون عملاً به هر نقطه از $M$ یک کپی بخصوص از $E$ را نسبت می‌دهیم، این پرسش که اگر $p$ و $q$ دو نقطهٔ متفاوت از $M$ باشند، آنگاه آیا $T_p(M)$ و $T_q(M)$ مشترکاتی دارند یا خیر، محلی برای طرح ندارد.

**۳.۲.۱ کلاف مماس.** فرض کنید $(M,\{\varphi_\alpha|\alpha\in A\})$ منیفلدی تحلیلی و $p$ نقطه‌ای از $M$ است. **کلاف مماس** به $M$ را به صورت اجتماع (مجزای) فضاهای مماس $T_p(M)$ (که $p$ در $M$ حرکت می‌کند) تعریف نموده و با نماد $T(M)$ نشان می‌دهیم. گزارهٔ بعدی نشان می‌دهد که همواره می‌توان به طور طبیعی یک ساختار توپولوژیک هاوسدورف و نیز یک اطلس تحلیلی بر $T(M)$ طوری تعریف نمود که $T(M)$ به همراه آنها به یک منیفلد تحلیلی مدل شده بر $E\times E$ بدل شود. در ادامه همواره فرض بر این است که $T(M)$ این ساختار اضافی را دارد. نگاشتی $\pi:T(M)\to M$ با ضابطهٔ $\pi([\varphi_\alpha,v]_p)=p$ بنام **تصویر طبیعی** تعریف می‌کنیم. نظیر به هر $\alpha\in A$ تعریف می‌کنیم

$$\tau_\alpha:U_\alpha\times E\to\pi^{-1}(V_\alpha)\qquad\tau_\alpha(u,v)=[\varphi_\alpha,v]_{\varphi_\alpha(u)}$$

توجه شود که هر یک از $\tau_\alpha$ ها دو سویی هستند و اجتماع برد همهٔ آنها برابر با $T(M)$ است. فرض کنیم که $\alpha,\beta\in A$ و برد $\tau_\alpha$ و $\tau_\beta$ اشتراک دارند، یعنی اینکه

$$\pi^{-1}(V_\alpha)\cap\pi^{-1}(V_\beta)\neq\varnothing$$

چون $\pi^{-1}(V_\alpha)\cap\pi^{-1}(V_\beta)=\pi^{-1}(V_\alpha\cap V_\beta)$ نتیجه می‌گیریم که $V_\alpha\cap V_\beta\neq\emptyset$. فرض کنیم $(u,v)$ به $\pi_\alpha^{-1}\left(\pi^{-1}(V_\alpha)\cap\pi^{-1}(V_\beta)\right)$ تعلق دارد، در این صورت

$$\begin{aligned}\tau_\beta^{-1}\circ\tau_\alpha(u,v) &= \tau_\beta^{-1}\left([\varphi_\alpha,v]_{\varphi_\alpha(u)}\right)\\ &= \tau_\beta^{-1}\left(\left[\varphi_\beta,\left(\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha\right)'(u)(v)\right]_{\varphi_\alpha\left(\left(\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha\right)(u)\right)}\right)\\ &= \left(\left(\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha\right)(u),\left(\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha\right)'(u)(v)\right)\end{aligned}$$

بعلاوه،

$$\begin{aligned}\tau_\alpha^{-1}\left(\pi^{-1}(V_\alpha)\cap\pi^{-1}(V_\beta)\right) &= \left(\tau_\alpha^{-1}\circ\pi^{-1}\right)(V_\alpha\cap V_\beta)\\ &= \varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha\cap V_\beta)\times E\end{aligned}$$

و بنابراین، تحلیلی بودن $\tau_\beta^{-1}\circ\tau_\alpha$ بر $\tau_\alpha^{-1}\left(\pi^{-1}(V_\alpha)\cap\pi^{-1}(V_\beta)\right)$. از تحلیلی بودن $\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha$ بر $\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha\cap V_\beta)$ نتیجه می‌شود.

بسادگی می‌توان تحقیقی نمود که گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های باز $\tau_\alpha(U\times V)$ (که $\alpha$ در $A$، $U$ بر زیر مجموعه‌های باز در $U_\alpha$ و $V$ بر زیر مجموعه‌های باز در $E$تغییر می‌کند) تشکیل یک فضای توپولوژی هاوسدورف بر $T(M)$ می‌دهند و ... به تمرین $E-1$ مراجعه شود ... و به این ترتیب نشان داده‌ایم که

**گزاره.** $(T(M),\{\tau_\alpha|\alpha\in A\})$ یک منیفلد تحلیلی مدل شده بر $E\times E$ است.

**تعریف.** چارتهای $\tau_\alpha$ را **چارتهای بدیهی‌سازی** $T(M)$ نامیده و به کمک آن می‌توان نشان داد که چگونه کلاف مماس بر $V_\alpha$ را با $U_\alpha\times E$ می‌توان یکی گرفت.

**۴.۲.۱ تعریف (نگاشت مشتق).** اگر $f:M\to N$ نگاشتی تحلیلی بین منیفلدهای تحلیلی $(M,\{\varphi_\alpha\})$ و $(N,\{\psi_\beta\})$ و $p\in M$ باشد، در این صورت نگاشتی خطی $f_{*,p}:T_p(M)\to T_{f(p)}(N)$ با ضابطهٔ

$$f_{*,p}:[\varphi_\alpha,v]_p\mapsto\left[\psi_\beta,\left(\psi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha\right)'\left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v)\right]_{f(p)}$$

بنام **نگاشت مشتق $f$ در $p$** تعریف می‌کنیم.

برای مشاهدهٔ خوش–تعریفی این تابع باید نشان دهیم که اگر $(\varphi_\alpha,v)\ \sim_p\ (\varphi_\gamma,w)$، آنگاه

$$\left(\psi_\beta,\left(\psi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha\right)'\left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v)\right)\sim_{f(p)}\ \left(\psi_\delta,\left(\psi_\delta^{-1}\circ f\circ\varphi_\gamma\right)'\left(\varphi_\gamma^{-1}(p)\right)(w)\right)$$

که این مطلب را به سادگی و با دو بار استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق در مورد تعریف ( ۱۱.۰۱) هم‌ارزی می‌توان اثبات نمود.

با فرض اینکه $p$ می‌تواند بر $M$ تغییر کند، نگاشتی بین کلافهای برداری $f_*:T(M)\to T(N)$ با این ضابطه که $f_*=f_{*,p}$ بر $T_p(M)$ می‌رسیم.

**قضیه.** فرض کنیم $f : M \to N$ و $g : N \to P$ دو نگاشت تحلیلی‌اند و $M$، $N$ و $P$ منیفلدهای تحلیلی هستند. در این صورت به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق داریم $(g \circ f)_{*,p} = g_{*,f(p)} \circ f_{*,p}$ و بنابراین

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \qquad (۱۲.۱)$$

حکم بعدی برای استفاده‌های بعدی طرح مفهوم رتبه و نیز ایمرشن لازم است.

**۵.۲.۱ تعریف (رتبه).** اگر $f : M \to N$ نگاشتی تحلیلی باشد، که $M$ و $N$ منیفلدهای تحلیلی هستند، در این صورت **رتبهٔ** $f$ **در** $p$ را برابر با بعد تصویر $f_{*,p}$ در $T_{f(p)}(N)$ تعریف می‌کنیم.

**لم** چنانچه هسته و تصویر $f_{*,p}$ را بترتیب با $\mathrm{Ker}(f_{*,p})$ و $\mathrm{Im}(f_{*,p})$ نشان دهیم، در این صورت

$$\dim(M) = \dim\left(\mathrm{Ker}(f_{*,p})\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(f_{*,p})\right).$$

برهان: مقدماتی است. از دیدگاهی بالاتر، می‌توان گفت که این حکم می‌گوید که هر دنبالهٔ دقیق کوتاه از فضاهای برداری با بعد متناهی تجزیه می‌شود. $\square$

**نتیجه.** رتبهٔ $f : M \to N$ در $p$ حد اکثر برابر با مینیموم $\dim(M)$ و $\dim(N)$ است.

**۶.۲.۱ تعریف (ایمرشن).** نگاشت تحلیلی مفروض $f : M \to N$ را در صورتی **ایمرشن** گوئیم که رتبهٔ آن در کلیهٔ نقاط $M$ برابر با بعد $M$ باشد. به بیان دیگر، ایمرشن نگاشتی تحلیلی $f$ است که به ازای هر $p \in M$ ای $f_{*,p}$ یک–به–یک است.

## بخش ۳.۱ میدان برداری

**قرارداد.** در سراسر این بخش فرض بر این است که $(M, \{\varphi_\alpha \ : \ \alpha \in A\})$ یک منیفلد تحلیلی مدل شده بر فضای برداری با بعد متناهی $E$ است.

**تعریف.** در صورتی نگاشت $X$ از $M$ به $T(M)$ را **میدان برداری** گوییم که به ازای هر $p \in M$ ای $\pi(X(p)) = p$. چون $M$ و $T(M)$ منیفلد تحلیلی‌اند، در مورد میدانهای برداری تحلیلی می‌توان سخن گفت.

**یادداشت.** یک روش رایج برای تجسم میدان برداری این است که ابتدا فضای مماس $T_p(M)$ به $M$ در $p$ را به صورت **تار** رشد کرده از نقطهٔ $p$ تلقی نموده و $T(M)$ را به صورت **کلاف** شامل همهٔ چنین تارهای در $p$ در نظر بگیریم که $p$ بر $M$ تغییر می‌کند. در این تصویر، میدان برداری را به عنوان روشی می‌توان تصور نمود که به هر عضو $p \in M$ عضوی از تار در $p$ را نسبت می‌دهد. به بیان دیگر، میدان برداری برشی از کلاف مماس می‌باشد.

از اصطلاحات **تار** و **کلاف** بجا استفاده نموده‌ایم زیرا کلاف مماس نمونه‌ای بخصوص از مفهوم کلی **کلاف تاری** می‌باشد. برای مشاهدهٔ نظریهٔ عمومی این گونه اشیاء به استنرود[۵۷] مراجعه کنید، و برای ملاحظهٔ کاربردهای آن در منیفدهای با بعد نامتناهی به الز [؟] و یا لانگ [۴۱] مراجعه کنید.)

حال نشان می‌دهیم که می‌توان بر ساختار فضای برداری و نیز یک ساختار جبری بر مجموعهٔ همهٔ میدانهای برداری بر $M$ تعریف نمود.

**۱.۳.۱ ساختار فضای برداری بر میدانهای برداری.** اگر $X$ و $Y$ دو میدان برداری تحلیلی بر $M$ باشند و $\lambda \in \mathbb{R}$، در این صورت $\lambda X$ و $X+Y$ را به ترتیب به کمک عملگرهای

$$\lambda X \ : \ p \mapsto \lambda X(p) \quad \text{و} \quad X+Y \ : \ p \mapsto X(p)+Y(p)$$

تعریف می‌کنیم، که تصویر آنها را به کمک اعمال جبری تعریف شده در ( ۱۱.۰۱) می‌توان محاسبه نمود. در این صورت $\lambda X$ و $X+Y$ میدانهای برداری‌اند.

**۲.۳.۱ ساختار جبری بر میدانهای برداری.** چندین روش معادل برای تعریف نمودن حاصلضرب **لی** دو میدان برداری تحلیلی وجود دارد. ما از روشی که تا حدودی پرزحمت اما مستقیم است، استفاده می‌کنیم؛ در این روش انگیزهٔ طرح این مفهوم روشن‌تر است. به ازای هر $\alpha \in A$ ای نگاشت تصویر $\rho_\alpha : T_p(M) \to E$ را با ضابطهٔ $\rho_\alpha[\varphi_\alpha, w]_p) = w$ تعریف می‌کنیم.

**تعریف.** اگر $X$ و $Y$ دو میدان برداری تحلیلی بر $M$ باشند، حاصلضرب آنها $[X,Y] : M \to T(M)$ را به صورت

$$[X,Y](p) \ := \ \Big[\varphi_\alpha\,, (\rho_\alpha \circ Y \circ \varphi_\alpha)'(v)\,((\rho_\alpha \circ X \circ \varphi_\alpha)(v)) - (\rho_\alpha \circ X \circ \varphi_\alpha)'(v)\,((\rho_\alpha \circ Y \circ \varphi_\alpha)(v))\Big]$$

تعریف می‌کنیم، که $v = \varphi_\alpha^{-1}(p)$.

**یادداشت.** بایستی نشان دهیم که
(۱) این نگاشت از انتخاب چارت بخصوص $\varphi_\alpha$ مستقل است، و
(۲) این نگاشت تحلیلی است.

**اثبات ۱)** فرض کنیم $\varphi_\alpha(v) = \varphi_\beta(w) = p$، در این صورت نیاز داریم ثابت کنیم

$$[X,Y](p) \ = \ \Big[\varphi_\alpha\,, (\rho_\alpha \circ Y \circ \varphi_\alpha)'(v)\,((\rho_\alpha \circ X \circ \varphi_\alpha)(v)) - (\rho_\alpha \circ X \circ \varphi_\alpha)'(v)\,((\rho_\alpha \circ Y \circ \varphi_\alpha)(v))\Big]$$

و

$$[X,Y](p) \ = \ \Big[\varphi_\beta\,, \big(\rho_\beta \circ Y \circ \varphi_\beta\big)'(v)\Big(\big(\rho_\beta \circ X \circ \varphi_\beta\big)(v)\Big) - \big(\rho_\beta \circ X \circ \varphi_\beta\big)'(v)\Big(\big(\rho_\beta \circ Y \circ \varphi_\beta\big)(v)\Big)\Big]$$

هم‌ارزند. یعنی اینکه

$$\left(\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha\right)'\left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)\Big\{(\rho_\alpha\circ Y\circ\varphi_\alpha)'(v)((\rho_\alpha\circ X\circ\varphi_\alpha)(v)) - (\rho_\alpha\circ X\circ\varphi_\alpha)'(v)((\rho_\alpha\circ Y\circ\varphi_\alpha)(v))\Big\} =$$
$$= \left(\rho_\beta\circ Y\circ\varphi_\beta\right)'(v)\Big(\left(\rho_\beta\circ X\circ\varphi_\beta\right)(v)\Big) - \left(\rho_\beta\circ X\circ\varphi_\beta\right)'(v)\Big(\left(\rho_\beta\circ Y\circ\varphi_\beta\right)(v)\Big)$$

اما $v=\left(\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\beta\right)(w)$ و به سادگی مشاهده می‌شود که

$$\rho_\alpha = \left(\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\beta\right)'(w)\rho_\beta$$

و بنابراین سمت چپ تساوی بالا عبارت است از ؟ که همان چیزی است که می‌خواستیم، زیرا ؟ عملگر همانی است.

**اثبات ۲)** بنابه ۹.۱.۱ برای تحقیق تحلیلی بودن $[X,Y]$ در نقطهٔ $p$، کافی است که تحلیلی بودن

$$v\mapsto\left(\tau_\alpha^{-1}\circ[X,Y]\circ\varphi_\alpha\right)(v)$$

را در $v=\varphi_\alpha^{-1}(p)$ بررسی کنیم. فرض تحلیلی بودن $X$ در $p$ به این معنی است که نگاشت

$$v\mapsto\left(\tau_\alpha^{-1}\circ X\circ\varphi_\alpha\right)(v)=\left(v,\rho_\alpha\circ X\circ\varphi_\alpha(v)\right)$$

در $\varphi_\alpha^{-1}(p)$ تحلیلی است، و حکم مشابهی نیز در خصوص $Y$ داریم. حال بنابه تعریف

$$\left(\tau_\alpha^{-1}\circ[X,Y]\circ\varphi_\alpha\right)(v)=\left((\rho_\alpha\circ Y\circ\varphi_\alpha)'(v)\circ(\rho_\alpha\circ X\circ\varphi_\alpha)'(v)-\cdots\right)$$

و در نتیجه تحلیلی بودن $\tau_\alpha^{-1}\circ[X,Y]\circ\varphi_\alpha$ (و لذا $[X,Y]$) از تحلیلی بودن $X$ و $Y$ و این واقعیت که اگر توابع $f,g:E\to E$ در $a\in E$ تحلیلی باشند، آنگاه تابع $x\mapsto g'(x)f(x)$ نیز در آن نقطه تحلیلی است، استنتاج می‌گردد.

**مثال** اگر $M$ زیر مجموعه‌ای باز از $E$ باشد، در این صورت همواره می‌توان اطلس بدیهی هموارِ $\{\mathrm{Id}\}$ بر آن یافت و بی هیچ ابهامی می‌توان $v$ و $\rho_i[\mathrm{Id},v]_p$ را یکی گرفت. بعلاوه، اگر از ذکر $i$ خودداری کنیم، حاصلضرب کروشه‌ای میدانهای برداری هموار $X$ و $Y$ را به شکل ساده‌تر

$$[X,Y](p)=Y'(p)X(p)-X'(p)Y(p)$$

با بازگشت به حالت کلی و با توجه به اینکه هر دو منیفلد $M$ و $T(M)$ موضعاً با زیرمجموعه‌های بازی از فضاهای برداری با بعد متناهی همیومورفند، در این صورت منطقی است که فرمول (۱۳.۱) را **بیان موضعی** $[X,Y]$ دانست.

**۳.۳.۱ مشتق.** فرض کنید $\mathcal{F}_\alpha$ نمایشگر مجموعهٔ همهٔ توابع با مقدار حقیقی و تحلیلی بر یک $V_\alpha$ ی بخصوص است، که $(M, \{\varphi_\alpha | \alpha \in A\})$ منیفلدی تحلیلی است. به ازای هر میدان برداری تحلیلی مفروض $X$، عملگر خطی $\tilde{X} : \mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{F}_\alpha$ را

$$\tilde{X}f : p \mapsto \rho \circ f_{*,p} \circ X(p) \qquad p \in V_\alpha \tag{۱۳.۱}$$

تعریف می‌کنیم، که $\rho = \rho(f, p)$ نگاشت تصویر طبیعی از $T_{f(p)}(\mathbb{R})$ بروی $\mathbb{R}$ و با ضابطهٔ $\rho\Big([i, w]_{f(p)}\Big) = w$ است. به ویژه $T_{f(p)}(\mathbb{R})$ و $\mathbb{R}$ را می‌توان یکی گرفت، و بنابراین

$$\tilde{X}f(p) = \Big(f_{*,p} \circ X\Big)(p) \quad p \in V_\alpha, \ \ f \in \mathcal{F}_\alpha \tag{۱۴.۱}$$

(به بیان دقیق‌تر، دامنهٔ $f_{*,p}$ برابر $T_p(V_\alpha)$ است، و از طرفی $T_p(V_\alpha)$ با $T_p(M)$ به شکل کانونی ایزومورف می‌باشد.)

ایدهٔ پشت این تعریف در تجرید مفهوم کلاسیک مشتق امتدادی است؛ $\tilde{X}f(p)$ مشتق امتدادی $f$ در $p$ نسبت به بردار مماس $X(p)$ است.

روشن است که عملگر $\tilde{X}$ در رابطهٔ

$$\tilde{X}(fg)(p) = f(p)(\tilde{X}g)(p) + g(p)(\tilde{X}f)(p), \qquad p \in V_\alpha, \ \ f, g \in \mathcal{F}_\alpha$$

صدق دارد. هر عملگر خطی بر $\mathcal{F}_\alpha$ که در رابطهٔ (۱۵.۱) صدق کند را یک **مشتق** می‌نامند. (مشتقات موضعی در تمرین $E - 1$ تعریف شده است.)

**قضیه** اگر $X$ و $Y$ دو میدان برداری تحلیلی بر منیفلد تحلیلی $M$ باشند، در این صورت

$$\widetilde{[X, Y]} = \tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X}.$$

برهان: اگر $\varphi_\alpha$، $\rho_\alpha$ و $v$ مثل در تعریف مشتق لی باشند، آنگاه $\tilde{X}f(p)$ را به شکل

$$(f\varphi_\alpha)'(v)\,(\rho_\alpha \circ X \circ \varphi_\alpha(v)) = e \circ ((f\varphi_\alpha)', \rho_\alpha \circ X \circ \varphi_\alpha)(v)$$

می‌توان نوشت که $e$ نگاشت تعیین مقدار کانونی از $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{R}) \times E$ بتوی $\mathbb{R}$ است. بنابراین $\tilde{X}(\tilde{Y}f)(p)$ را به شکل موضعی به صورت

$$\tilde{X}(\tilde{Y}f)(p) = [e \circ ((f\varphi_\alpha)', \rho_\alpha \circ X \circ \varphi_\alpha)]'(v)\,((\rho_\alpha \circ X \circ \varphi_\alpha)(v))$$

می‌توان نوشت. اگر $E_1$، $E_2$، $E$ و $F$ فضاهای برداری با بعد متناهی باشند و بعلاوه اگر $\theta : E_1 \times E_2 \to F$ نگاشتی دو خطی و $g : U \to E_1$ و $h : U \to E_2$ در $x \in U$ دیفرانسیل‌پذیر باشند، که $U$ در $E$ باز است، در این صورت تابع $P = \theta(g, h) : U \to F$ نیز در $x$ دیفرانسیل‌پذیر است و بعلاوه به ازای هر $u \in E$ ای

$$P'(x)(u) = P(g'(x)u, h(x)) + P(g(x), h'(x)u) \tag{۱۵.۱}$$

با بکارگیری (۱۵.۱) در (۱۵.۱)، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\tilde{Y})(p) &= (f\varphi_\alpha)''(v)((\rho_\alpha\circ X\circ\varphi_\alpha)(v))((\rho_\alpha\circ Y\circ\varphi_\alpha)(v))\\ &\quad +(f\varphi_\alpha)'(v)((\rho_\alpha\circ Y\circ\varphi_\alpha),(v))((\rho_\alpha\circ X\circ\varphi_\alpha)(v))\end{aligned}$$

اکنون از تقارن مشتق دوم (تمرین $A-1$) استفاده نموده و نتیجه می‌گیریم که بیان موضعی $\tilde{X}(\tilde{Y}f)(p)-\tilde{Y}(\tilde{X}f)(p)$ دقیقاً همان بیان برای $\widetilde{[X,Y]}f(p)$ است. □

**۴.۳.۱ نتیجه.** ضرب لی بر مجموعهٔ همهٔ میدانهای برداری تحلیلی دو خطی است و بعلاوه بع ازای هر سه میدان برداری تحلیلی دلخواه $X$، $Y$ و $Z$ در روابط

$$\begin{aligned}&(1)\quad [X,X]=0,\\ &(2)\quad [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0,\end{aligned}$$

صدق می‌کند.

**تعریف (جبر لی)** یک فضای برداری حقیقی به همراه یک عمل دو خطی صادق در شرایط (۱) و (۲) مشروح در بالا را **جبر لی** می‌نامند. (ضرب دو خطی صادق در شرط (۱) را **پاد متقارن** می‌نامند، و بعلاوه رابطهٔ (۲) به **اتحاد ژاکوبی** موسوم است. از (۱) و دو خطی بودن ضرب نتیجه می‌گردد که $[X,Y]=-[Y,X]$.)

نتیجهٔ ۴.۳.۱ اذعان می‌دارد که مجموعهٔ همهٔ میدانهای برداری تحلیلی به همراه ضرب لی تشکیل یک جبر لی می‌دهد. در فصل بعدی به مطالعهٔ گروه‌های لی پرداخته و مشاهده می‌کنیم که به سرعت بر ما معلوم می‌گردد که زیر جبری بخصوص از این جبر لی وجود دارد که اطلاعات وسیعی از گروه زمینه‌ای خود را در بر دارد. این زیر جبر را جبر لی گروه لی زمینه نامیده و مشاهده خواهیم نمود که عملاً مطالعهٔ گروه‌های به مطالعهٔ جبرهای لی نظیر به آنها می‌انجامد، که البته همهٔ آنها با بعد متناهی هستند.

فرض کنید $E$ یک فضای برداری با بعد متناهی و حقیقی است. در این صورت فضای $\mathfrak{gl}(E)$ همهٔ اندومورفیسم‌های خطی $E$ همراه با ضرب

$$[X,Y]=XY-YX.$$

نمونه‌ای عالی از یک گروه لی است.

**اثبات ۴.۳.۱:** اثبات را مستقیماً از تعریف ضرب لی و یا به کمک خواص مشتق‌ها می‌توان اقامه نمود. در واقع این حکم نتیجه‌ای بلافصل از قضیهٔ بعدی است که ابته خود این حکم نیز شایان توجه است:

**حکم** اگر به ازای هر $f\in\mathcal{F}_\alpha$ ای $\tilde{X}f=0$، آنگاه $X=0$ بر $V_\alpha$.

برهان: فرض کنیم $X(p) = [\varphi_\alpha, v]_p \neq 0$، یعنی $v \neq 0$. نتیجتاً یک تابعک خطی $\ell : E \to \mathbb{R}$ چنان وجود دارد که $\ell(v) \neq 0$. $f$ را بر $V_\alpha$ به صورت $f = \ell \circ \varphi_\alpha^{-1}$ تعریف می‌کنیم؛ در این صورت $f$ تحلیلی است و بنابراین عضوی از $\mathcal{F}_\alpha$ است. بعلاوه

$$(f\varphi_\alpha)'\left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v) = \ell'\left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v) = \ell(v)$$

بنابراین

$$(\tilde{X}f)(p) = f_{*,p}[\varphi_\alpha, v]_p = \left[i, (f\varphi_\alpha)'\left(\varphi_\alpha^{-1}(p)\right)(v)\right]_{f(p)} = [i, \ell(v)] \neq 0$$

و اثبات تکمیل است. $\square$

## بخش ۳.۱ یادداشتها

دو سبک برای تعمیم طبیعی مفهوم منیفلد هموار وجود دارد.

(۱) روش کلاسیک این است که بر نگاشتهای $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ محدودیتهایی را اعمال کنیم، که $\varphi_\alpha$ و $\varphi_\beta$ چارت‌اند. مثلاً، در صورتی می‌گوئیم منیفلد $(M, \{\varphi_\alpha : \alpha \in A\})$ یک $C^p$-**منیفلد** است که همهٔ نگاشتهای $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ دارای مشتتق مرتبهٔ $p$ ام بر مجموعهٔ باز $\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$ باشند. البته، هنگامی که با گروه‌های لی فشرده کار داریم، مشاهده می‌کنیم که هر منیفلدی که همزمان گروه لی فشرده نیز باشد (البته با ساختار گروهی و منیفلدی سازگار) منیفلدی تحلیلی است و اعمال گروهی آن نیز تحلیلی می‌باشند. (البته این امر برای گروه‌های موضعاً فشرده نیز صحیح است، ولی آن را در اینجا اثبات نمی‌کنیم. جزئیات بیشتر را در یادداشتهای در انتهای فصل ششم می‌توانید ملاحظه کنید.) بنابراین هر گونه تعمیم مفهوم گروه لی که از ناحیهٔ تعمیم مفهوم منیفلد زمینه‌ای آن و با محدود نمودن شرایط دیفرانسیل‌پذیری صورت می‌گیرد، کاملاً غیر واقعی است. جملهٔ احکام در مورد منیفلدهای تحلیلی که در این فصل اثبات گردید، در مورد منیفلدهای هموار نیز صحیح می‌باشند. بعلاوه، با انجام کمی تغییرات لازم در آنها، همهٔ آنها برای $C^p$-منیفلدها نیز صحیح می‌باشند.

(۲) روش دوم در تعمیم مفهوم منیفلد هموار، همان طوری که در این فصل نیز به آن اشاره شد، مدل نمودن آن بر فضاهای باناخ با بعد نامتناهی (و یا حتی، فضاهای فرشه) می‌باشد. (اگر در تعریف منیفلد، منیفلد هموار و یا منیفلد تحلیلی که در ابتدای این فصل آمد بجای فضای برداری با بعد متناهی از فضای باناخ با بعد نامتناهی استفاده شود، در این صورت تعریف همچنان با معنی خواهد بود.) موضوع منیفلدهای با بعد نامتناهی یکی از پر رونق‌ترین مباحث تحقیقاتی در ده سال گذشته است، و بسیاری از احکام در این مورد به اثبات رسیده‌اند. به عنوان مثال، در مقالهٔ توصیفی الس [۲۱] مطالب مبسوطی در این مورد خواهید یافت. بعلاوه می‌توان در کتاب لانگ [۴۱] بسیاری از احکامی را مشاهده نمود که قبلاً تصور می‌شد تنها در خصوص منیفلدهای با بعد متناهی صحیح هستند، در حالی که به زیبایی تمام در مورد منیفلدهای مدل شده بر فضاهای باناخ با بعد نامتناهی قابل اثبات می‌باشند.

البته، از دیدگاهی که ما مسأله می‌پردازیم، و می‌خواهیم تا به مطالعهٔ گروه‌های لی (موضعاً) فشرده بپردازیم، کار کردن با چنین فضاهای باناخی هیچ گونه پیامد جدیدی به همراه ندارد. دلیل این امر آن است که اگر بتوانیم شرط موضعاً فشرده بودن را بر یک منیفلد مدل شده بر فضای باناخ اعمال کنیم، در این صورت می بایستی که فضای باناخ زمینه با بعد متناهی باشد. زیر از فرض موضعاً فشرده بودن این طور نتیجه می‌گردد هر نقطه‌ای دارای یک همسایگی با بستار فشرده است، و چون هر چارتی یک نگاشت همیومورفیسم می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که بایستی هر نقطه از فضای باناخ زمینه $E$ در یک همسایگی فشردهٔ نسبی قرار داشته باشد. حال می‌توان از قضیهٔ ریس (به صفحهٔ ۶۵ از ادوارد [۱۹] مراجعه شود) استفاده نموده و نتیجه گرفت که لزوماً $E$ با بعد متناهی است.

البته هیچ دلیلی برای اعمال کردن **پیش فرض** موضعاً فشرده بودن و عدم پرداختن به گروه‌های لی با بعد نامتناهی نداریم. در واقع مشخص شده است که بسیاری از احکام در خصوص گروه‌های لی با بعد متناهی در مورد حالت کلی‌تر نیز برقرارند. (به بخش ۵ از فصل ۴ کتاب لانگ [۴۱]، بخش سوم از مقالهٔ الس [۲۱] و یا مراجع آورده شده در این مقاله مراجعه شود.) با وجود این همه جذابیت برای پرداختن به این گونه تعمیم‌ها، مقدورات این کتاب اجازهٔ پرداختن به آنها را نمی‌دهد.

سوای موضعاً فشرده بودن، نکتهٔ دیگری که باید قبل از پرداختن به منیفلدهای با بعد نا متناهی مورد توجه داشته باشیم این است که در بسیاری از موارد ما منیفلد را چیزی جز یک زیر مجموعهٔ باز از فضای مدل آن نمی‌دانیم. برای توجیه بسیاری از این موقیتها، کافی است که از نوع بخصوصی از ایمرشنهای مطرح شده در زیر بخش ۶.۲.۱ استفاده کنیم. ایمرشن $f : M \to N$ را در صورتی **نشاننده** گوئیم که (نسبت به توپولوژی القائی) همیومورفیسمی بروی بردش باشد. در بحث ما همهٔ ایمرشنها و نشاننده‌ها تحلیلی‌اند، اما روشن است که از $C^p$−ایمرشنها و یا $C^p$−نشاننده‌ها سخن گفت. (عملاً، هنگامی که می‌خواهیم تا با مفهوم ایمرشن و یا نشاننده در حالت منیفلدهای با بعد نامتناهی بپردازیم، بایستی کمی تغییرات در موضوع صورت بدهیم ... به صفحهٔ ۲۵ و نیز گزارهٔ ۲ از صفحهٔ ۲۷ از کتاب لانگ [۴۱] توجه شود.)

فرض کنید $E$ یک فضای باناخ هموار با بعد نامتناهی و نیز دارای یک پایهٔ شودر [۲] است. فرض کنید $M$ منیفلدی هموار، متریک‌پذیر و تفکیک‌پذیر است که بر $E$ مدل شده است. الس و الورتی [۲۲] نشان داده‌اند که اگر کلاف مماس $M$ بدیهی باشد، در این صورت یک نشانندهٔ هموار از $M$ بروی زیر مجموعه‌ای باز از $E$ وجود دارد. (منیفلد $M$ مدل شده بر فضای $E$ وقتی و تنها وقتی دارای **کلاف مماس بدیهی** است که $T(M)$ با $M \times E$ هم‌ارز است. البته، چنین شرطی چندان محدود کننده نیست، زیرا مثلاً می‌دانیم که همهٔ منیفلدهای مدل شده بر فضایی هیلبرت، نظیر $\ell^p$ با $(1 \le p < \infty)$ و یا $L^p[0,1]$ با $(1 < p < \infty)$، دارای کلاف مماس بدیهی هستند. این حکم و چندین حکم در این ارتباط را در دیکسمیر و دودی [۱۶] و نیز میتیاگینی [۴۷] می‌توان مشاهده نمود.) هندرسون [۲۹] حکم مشابهی در خصوص $C^0$−نشاننده‌ها را ثابت می‌کند: فرض کنید $M$ یک $C^0$−منیفلد تفکیک‌پذیر، متریک‌پذیر و مدل شده بر یک فضای فرشهٔ با بعد نامتناهی $F$ است؛ در این صورت $M$ دارای یک $C^0$−نشاننده بروی زیر مجموعه‌ای باز از $F$ است.

## بخش ۴.۱ تمرینات

---
[۲] Schauder basis

$(1-A)$ (۱) نشان دهید که دو تعریف مشتق که در فرمولهای ( ۱.۰۱) و ( ۲.۰۱) مطرح شده‌اند، معادل می‌باشند.
(۲) نشان دهید که اگر $f$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه تنها یک عضو از $\mathrm{Hom}(E,F)$ وجود دارد که در ( ۱.۰۱) صدق می‌کند.
(۳) فرمول ( ۳.۰۱) را تحقیقی کنید.
(۴) نگاشتی از یک زیر مجموعهٔ باز $U \subseteq E$ بتوی $F$ باشد که دو بار دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد، در این صورت به ازای هر $x \in U$ ای

$$f''(x) \in \mathrm{Hom}(E,\mathrm{Hom}(E,F)) = \mathrm{Hom}^2(E\times E,F)$$

نشان دهید که $f''(x)$ متقارن است، یعنی، به ازای هر $u,v \in E$ ای در $F$ داریم $f''(x)(u)(v) = f''(x)(v)(u)$.
(۵) اگر $E$ و $F$ دو فضای برداری با بعد متناهی باشند و پایه‌ای برای هر کدام از آنها در اختیار باشد، در این صورت هر تابع $f : E \to F$ ای را بر اساس این پایه‌ها به شکل $f(x_1,\cdots,x_n) = (f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$ می‌توان نمایش داد. نشان دهید که ماتریش نمایش این نگاشت عبارت است از

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]; \qquad i = 1,\cdots m, \quad j = 1,\cdots,n$$

$(1-B)$ (۱) اگر $p$ نقطه‌ای از منیفلد تحلیلی $M$ مدل شده بر $E$ باشد و $\varphi_\alpha$ چارتی حول $p$، در این صورت نشان دهید که به ازای هر $v \in E$ مفروض، $\xi \in C_p(M)$ ای وجود دارد که $v = \left(\varphi_\alpha^{-1}\xi\right)'(0)$.
(۲) نشان هید که اعمال خطی تعریف شده در زیر بخش (۱.۲.۲) بر $T_p(M)$ خوش–تعریفند. (مثلاً، اگر نشان دهید که $(\varphi_\alpha,v) \sim_p \left(\varphi_\beta,w\right)$، آنگاه $(\varphi_\alpha,\lambda v) \sim_p \left(\varphi_\beta,\lambda w\right)$. حکم مشابهی نیز درخصوص عمل جمع نشان دهید.)
(۳) فرض کنید $f$ نگاشتی تحلیلی از منیفلد تحلیلی $(M,\{\varphi_\alpha | \alpha \in A\})$ بتوی منیفلد تحلیلی $(N,\{\psi_\beta | \beta \in B\})$ است. به کمک نمادگذاری در زیر بخش ۴.۲.۱، به ازای هر $p \in M$ نگاشت $f_{\#,p}$ را با ضابطهٔ $f_{\#,p}[\varphi_\alpha,v]_p[\psi_\beta,w]_{f(p)}$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید $f_{\#,p}[\![\xi]\!]_p = [\![f\circ\xi]\!]_{f(p)}$ و سپس نشان دهید که اگر $v = \left(\varphi_\alpha^{-1}\circ\xi\right)'(0)$، آنگاه $w = \left(\psi_\beta^{-1}\circ f\circ\xi\right)'(0)$. سپس، نتیجه بگیرید که نگاشتهای $f_{*,p}$ و $f_{\#,p}$ عملاً یکی‌اند.

$(1-C)$ (۱) فرض کنید $E$ و $F$ فضاهای بردار با بعد متناهی‌اند و $M$ یک فضای توپولوژی هاوسدورف به همراه دو اطلس مدل شده بر فضاهای بترتیب $E$ و $F$ است. نشان دهید که $\dim(E) = \dim(F)$. (این مطلب از این حکم استنتاج می‌گردد که وقتی و تنها وقتی $E$ و $F$ همیومورفند که $\dim(E) = \dim(F)$. اثبات این حکم را در بخش ۶.۳، XVI از کتاب دوگونجی [۱۷] می‌توان یافت.)
(۲) فرض کنید $M$ منیفلد و $N$ زیر مجموعه‌ای از $M$ است که به همراه توپولوژی القایی از $M$، خودش نیز یک منیفلد است. نشان دهید که وقتی و تنها وقتی $N$ در $M$ باز است که $\dim(M) = \dim(N)$. (برقراری قسمت (۱) را فرض بگیرید.)

$D-1$) **فرمول تیلر** فرض کنید $E$ و $F$ فضاهای برداری با بعد متناهی‌اند و $U$ زیر مجموعه‌ای باز از $E$ می‌باشد. فرض کنید $f : U \to F$ تابعی هموار است، $x \in U$، $y \in E$ و به ازای همهٔ $t$ های در $[0,1]$ ای $x+ty \in U$. با فرض اینکه $y^{(m)}$ نمایشگر $m$–تایی $(y, y, \cdots, y)$ باشد، نشان دهید که

$$f(x+y) = f(x) + f'(x)y + \frac{1}{2!}f''(x)y^{(2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)y^{(y)} + R_n$$

که در آن

$$R_n = \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x+ty)\, dt\right) y^{(n)}$$

(راهنمایی: با درنظر گرفتن تابع $t \mapsto (\mu \circ f)(x+ty)$ بر $[0,1]$، که $\mu$ یک تابعک خطی بر $F$ است، مسأله را به حالت کلاسیک تبدیل کنید.)

$E-1$) فرض کنید $E$ یک فضای برداری با بعد متناهی، $X$ مجموعه‌ای غیر تهی است ، و به ازای هر $\alpha$ ی در یک مجموعهٔ مفروض $A$، $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ نگاشتی دو سویی از زیر مجموعه‌ای باز $U_\alpha$ از $E$ بروی زیر مجموعه‌ای $V_\alpha$ از $M$ است. نشان دهید که اگر اجتماع $V_\alpha$ ها برابر $M$ شود، و اگر هر یک از نگاشتهای $\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha$ بر $\varphi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$ پیوسته (بترتیب، تحلیلی) باشد، در این صورت یک ساختار توپولوژی هاوسدورف منحصر بفرد بر $M$ وجود دارد به گونه‌ای که $(M, \{\varphi_\alpha | \alpha \in A\})$ منیفلد (بترتیب، منیفلد تحلیلی) است.

$F-1$) فرض کنید $(M, \{\varphi_\alpha | \alpha \in A\})$ منیفلدی تحلیلی است، $p \in V_\alpha$ و $\mathcal{F}_\alpha$ فضای برداری همهٔ توابع با مقدار حقیقی و تحلیلی بر $V_\alpha$ باشد. بنابه تعریف منظور از یک **مشتق موضعی در** $p$ نگاشتی خطی چون $\delta : \mathcal{F}_\alpha \to \mathbb{R}$ است که در شرط

$$\delta(f \circ g) = f(p)\delta(g) + g(p)\delta(f)$$

صدق می‌کند. در این صورت نشان دهید که
**(۱)** هر عضو $[\varphi_\alpha, v]_p \in T_p(M)$ باعث تعریف یک مشتق موضعی $\delta$ در $p$ با ضابطهٔ

$$\delta : f \mapsto \rho \circ f_{*,p}\left([i,w]_{f(p)}\right) = w, \qquad f \in \mathcal{F}_\alpha$$

می‌گردد، که $\rho = \rho(f,p)$ تصویر طبیعی از $T_{f(p)}(\mathbb{R})$ بتوی $\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $\rho = \rho \circ f_{*,p}\left([i,w]_{f(p)}\right) = w$ می‌باشد.
**(۲)** هر مشتق موضعی در $p$ به روش بالا و توسط عنصری از $T_p(M)$ تولید می‌گردد.

$G-1$) **منیفلد حاصلضرب** فرض کنید $M$ و $N$ منیفلدهایی تحلیلی با اطلس بترتیب $(M, \{\varphi_\alpha | \alpha \in A\})$ و $(N, \{\psi_\beta | \beta \in B\})$ هستند و فضای توپولوژی حاصلضرب آنها $M \times N$ را با اطلس $\{\varphi_\alpha \times \psi_\beta | \alpha \in A, \beta \in B\}$ همراه می‌کنیم. تحقیق کنید که این اطلس تحلیلی است، و بنابراین $M \times N$ به همراه آن به یک منیفلدی تبدیل می‌شود، و بعلاوه این ساختار دارای خاصیت **عام** است؛ یعنی اینکه:
**(۱)** تصاویر طبیعی $\pi_1 : M \times N \to M$ و $\pi_2 : M \times N \to N$ تحلیل اند.
**(۲)** اگر $P$ منیفلدی تحلیلی باشد، آنگاه $f : P \to M \times N$ وقتی و تنها وقتی تحلیلی است که $\pi_1 \circ f$ و $\pi_2 \circ f$ تحلیلی باشند.

$H-1$) **الصاق تحلیلی** فرض کنید $M$ و $N$ دو منیفلد تحلیلی‌اند، $M$ همبند است و $f$ و $g$ دو تابع تحلیلی از $M$ بتوی $M$ هستند. اگر زیر مجموعه‌ای باز و غیر تهی از $M$ وجود داشته باشد که $f$ و $g$ بر آن برابرند، در این صورت $f$ و $g$ بر کل $M$ با هم برابرند. (راهنمایی: این مسأله حکم کلاسیک موسوم به اصل الصاق تحلیلی برای زیر مجموعه‌های باز غیر تهی از $\mathbb{R}^n$ و یا $\mathbb{C}^n$ می‌باش؛ به زیربخش (۹.۴.۲) از کتاب دیودونن [۱۵] مراجعه شود.)

# فصل ۲

# گروه و جبر لی

هدف از این فصل معرفی مفاهیم گروه لی و ابزار اصلی توأم با آن (نظیر، جبر لی آن، زیر گروه ۱−پارامتری، و . . .) و بیان ارتباط میان آنها است. در بخش اول گروه لی تعریف می‌گردد . . . گروه توپولوژیکی است که می‌تواند با اطلسی هموار چنان همراه گردد که در این بین، اعمال گروهی تحلیلی شوند.

پس از بیان چندین مثال و حکم از گروه‌های لی، به طرح پسیله‌ای بنیادی در مطالعهٔ آنها، بنام جبر لی گروه لی می‌پردازیم. اگر $G$ گروه لی باشد، در این صورت فضای مماس $T_e(G)$ به $G$ در عنصر همانی‌اش $e$ با فضای همهٔ میدانهای برداری ناوردای چپ بر $G$ ایزومورف خواهد که خود نسبت به عمل براکت لی که در فصل قبل تعریف گردید، بسته است. جبر لی $\mathfrak{g}$ گروه لی $G$ را $T_e(G)$ همراه با ضرب لی القاء شده از فضای میدانهای برداری ناوردای چپ بر آن، تعریف می‌کنیم. $\mathfrak{g}$ را به کمک زیر گروه‌های ۱−پارامتری $G$ (همومورفیسم‌های تحلیل از $\mathbb{R}$ به $G$) بیشتر می‌توان توصیف نمود؛ هر بردار واقع در $\mathfrak{g}$ به برد یک زیر گروه ۱−پارامتری منحصر بفرد از $G$ و در عنصر همانی $e$ مماس است، و بالعکس. این احکام مستقیماً به تعریف تابع نمایی $\exp : \mathfrak{g} \to G$ انجامیده و در پی آن اثبات می‌گردد که وقتی و تنها وقتی $\theta : \mathbb{R} \to G$ زیر گروه ۱−پارامتری $G$ است که به ازای یک $X \in \mathfrak{g}$ ای به شکل $t \mapsto \exp(tX)$ باشد.

در بخش پایانی به بیان مبسوط گروه و جبر لی متعامد می‌پردازیم. این مثالها در مطالعهٔ فصول بعدی بسیار آموزنده و مفید خواهند بود.

## بخش ۱.۲ گروه لی

با یاد آوری اینکه تعریف و خواص اصلی گروه‌های توپولوژی را در ضمیمهٔ الف جمع آوری نموده‌ایم، آغاز می‌کنیم. در اینجا جا دارد تا قرارداد کنیم که همهٔ گروه‌های توپولوژیکی که در نظر خواهیم گرفت، هاوسدورفند. فرض کنید که $G$ گروهی توپولوژی و $\mu : G \times G \to G$ و $\lambda : G \to G$ بترتیب نگاشت ضرب و وارون هستند. در صورت یک اطلس بر $G$ (به عنوان فضایی توپولوژی) را **سازگار** با $G$ (به عنوان گروه) گوئیم که هر دو نگاشت $\mu$ و $\lambda$ تحلیلی باشند. (برای ملاحظهٔ تعریف منیفلد حاصلضرب به

تمرین $J-2$ مراجعه شود.) تعریف زیر از گروه لی که در آن قبل از هر چیزی گروه لی را گروه توپولوژی تصور می‌کند، برای مقاصد بعدی ما مفید است.

**۱.۱.۲ تعریف.** یک گروه توپولوژی مفروض را در صورتی **گروه لی** گوئیم که یک اطلس تحلیل سازگار بپذیرد. بعد منیفلد زمینه را **بعد** گروه لی اعلام می‌کنیم.

اینکه اطلس ارائه شده ماکسیمال باشد و یا خیر در کلیت مسأله خللی وارد نمی‌کند، زیرا اطلسهای ماکسیمال تولید شده توسط اطلسهای سازگار، خود با هم سازگارند. بعلاوه، در قسمت ۳.۳.۲ خواهیم دید که تنها یک اطلس تحلیل ماکسیمال بر هر گروه لی وجود دارد، به این معنی که همهٔ اطلسهای تحلیلی سازگار با یک گروه توپولوژی مفروض، یک اطلس تحلیلی (سازگار و) ماکسیمال واحد را تولید می‌کنند.

**۲.۱.۲ مثال.** **(الف)** فرض کنید $E$ نمایشگر یک فضای برداری حقیقی و یا مختلط $n$–بعدی است. در این صورت $E$ گروهی جمعی است و بسته به اینکه میدان زمینهٔ $E$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد و یا میدان اعداد مختلط، یک گروه لی $n$ و یا $2n$ بعدی می‌باشد. (همان طوری که در ۱.۱.۱ مطرح شد، اگر فضای برداری $E$ حقیقی و با بعد برابر با $n$ باشد، در این صورت $E$ اطلسی مرکب از تنها یک چارت می‌پذیرد و بعلاوه این چارت با ساختار گروهی بر $E$ سازگار است. در حالتی که $E$ مختلط است، یک فضای برداری حقیقی $n$–بعدی طوری می‌توان یافت نمود که $E$ عبارت از مجموع مستقیم $F$ و $iF$ است، که در اینجا $i$ ریشهٔ دوم ۱- می‌باشد. اطلسی که برای $E$ مطرح می‌گردد، از تنها چارت $j: F\oplus F \to E$ با ضابطهٔ $j(u,v) = u + iv$ تشکیل شده است. روشن است که این اطلس تحلیلی و سازگار می‌باشد.)

**(ب)** بازهم فرض کنید $E$ یک فضای برداری $n$–بعدی حقیقی و یا مختلط است و $\mathfrak{gl}(E)$ نمایشگر مجموعهٔ همهٔ اندومورفیسم‌های (خطی) وارون‌پذیر $E$ است. اکنون $\mathfrak{gl}$ را با توپولوژی منحصر بفرد خطی‌اش همراه می‌کنیم (به قسمت الف.۲ از ضمیمهٔ الف مراجعه شود)؛ در این صورت $\mathfrak{gl}$ نسبت به عمل ترکیب نگاشتها تشکیل یک گروه توپولوژی می‌دهد و بعلاوه گروه لی است. معمولاً آن را **گروه خطی عمومی** نظیر به $E$ می‌نامند. چون عملاً $\mathfrak{gl}$ به میدان زمینه (حقیقی یا مختلط بودن آن) و بعد $E$ بستگی دارد، از نمادهای $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ (و یا $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$) نیز برای $\mathfrak{gl}$ استفاده می‌شود. چنانچه پایه‌ای برای $E$ مطرح شود، $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ را به صورت گروه ماتریسهای $n\times n$ با درایه‌های حقیق، و $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ را به صورت گروه ماتریسهای $n\times n$ با درایه‌های مختلط می‌توان تجسم نمود؛ در هر از مورد توپولوژی القائی توسط نرم ماکزیموم قدر مطلق درآیه‌ها ($|||[a_{ij}]||| := \max\{a_{ij} \mid i,j = 1,\cdots,n\}$) استفاده می‌شود.

فقط نشان می دهیم که $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ گروه لی است. ابتدا مجموعه‌ای باز $U$ در $\mathbb{R}^{2n^2}$ به شکل

$$\left(x^m_{jk} \mid j,k = 1,\cdots n,\ m = 1,2\right) \in U \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \left(x^1_{ik} + ix^2_{ik}\right) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$$

تعریف نموده و سپس همیومورفیسمی $\varphi: U \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ با ضابطهٔ

$$\varphi\left(x^m_{jk}\right) = \left(x^1_{ik} + ix^2_{ik}\right)$$

تعریف می‌کنیم. (لازم است توجه شود که در اینجا $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ را به شکل ماتریسهای $n\times n$ وارون‌پذیر با درآیه‌های مختلط تصور نموده‌ایم، و $\left(x^1_{jk} + ix^2_{jk}\right)$ نمایشگر ماتریسی $n\times n$ با درآیه‌های $x^1_{ik} + ix^2_{ik}$ است، که $n,\ m = 1,2$ و $j,k = 1$.) هنگامی که $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ را با اطلس $\{\varphi\}$ توأم می‌کنیم، نتیجه یک منیفلد

تحلیلی خواهد بود. حال می‌خواهیم نشان دهیم که این اطلس با ساختار گروهی آن سازگار است. نگاشت ضرب $\mu$ در صورتی تحلیلی است که $\varphi^{-1}\circ\mu\circ(\varphi\times\varphi)$ بر $U\times U$ تحلیلی باشد. اگر $\left(x^i_{jk}\right)$ و $\left(y^i_{jk}\right)$ به $U$ متعلق باشند، در این صورت

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}\circ\mu\circ(\varphi\times\varphi)\left(\left(x^i_{jk}\right),\left(y^i_{jk}\right)\right) &= \varphi^{-1}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\left(x^1_{j\ell}+ix^2_{j\ell}\right)\left(y^1_{\ell k}+iy^2_{\ell k}\right)\right)\\ &= \varphi^{-1}\left(w^1_{jk}+iw^2_{jk}\right)=\left(w^i_{jk}\right)\end{aligned}$$

که در اینجا

$$w^1_{jk}=\sum_{\ell=1}^{n}\left(x^1_{j\ell}y^1_{\ell k}-x^2_{j\ell}y^2_{\ell k}\right)\quad,\quad w^2_{jk}=\sum_{\ell=1}^{n}\left(x^2_{j\ell}y^1_{\ell k}+x^1_{j\ell}y^2_{\ell k}\right)$$

بنابراین این نگاشت مرکب چیزی جز مجموع‌هایی متناهی از حاصلضربهای متناهی از مختصات عناصر در $U$ نیست، و بنابراین تحلیلی می‌باشد. به روشی مشابه و به کمک قاعدهٔ کرامر برای یافتن وارون یک ماتریس، می‌توان نشان داد که وارون این نگاشت نیز تحلیلی است.

به روشی مشابه می‌توان نشان داد که $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ گروه لی (ایزرمورف با زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^{n^2}$) می‌باشد.

**(ج)** اگر $E$ یک فضای هیلبرت مختلط $n$−بعدی[۱] باشد، در این صورت زیر مجموعهٔ $U(E)$ (یا $U(n)$) از $\mathfrak{gl}(E)$ مرکب از همهٔ اندومورفیسم‌های یکانی[۲] $E$ تشکیل گروهی لی بنام **گروه یکانی درجهٔ** $n$ **ام** تشکیل می‌دهد.

چون $U(E)$ (و بترتیب $O(E)$) زیر مجموعه‌ای بسته و کراندار از $\mathfrak{gl}(E)$ است (چرا؟)، پس نسبت به توپولوژی القائی از $\mathfrak{gl}(E)$ بر آن، فشرده است. (فرض کنید $\left(x_{jk}\right)$ عضوی دلخواه است. در این صورت به ازای هر $j$ ای $\sum_{k=1}^{n}|x_{jk}|^2=1$ و بنابراین هر یک از درآیه‌های آن با اندازهٔ حداکثر یکند.) مستقیماً می‌توان نشان داد که هر دوی آنها گروه لی هستند، اما این کار را نمی‌کنیم و بعداً با اثبات این مطلب که هر زیر گروه بسته از یک گروه لی خود یک گروه لی است، کار را تمام می‌کنیم.

در قضیه ۱.۱۰.۶ نشان داده می‌شود که $U(E)$ و $O(E)$ مثالهای کلیدی در دستهٔ گروه‌های لی فشرده‌اند.

**(د)** فرض کنید $SU(n)$ (بترتیب $SO(n)$) زیر گروهی از $U(n)$ (بترتیب $O(n)$) شامل همهٔ عناصر با دترمینان برابر با یک است. هر دوی این گروه‌ها به همان دلیل در قسمت (ج) گروه لی‌اند و بترتیب **گروه یکانی خاص** و **گروه متعامد خاص** (از درجهٔ $n$ ام) نامیده می‌شوند.

---

[۱] فرض کنید $E$ یک فضای برداری (حقیقی یا مختلط) $n$−بعدی است. در صورتی $E$ را **فضای اقلیدسی** یا **فضای برداری با ضرب داخلی** گوئیم که یک ضرب داخلی $<\cdot,\cdot>: E\times E\to E$ بتوان بر آن تعریف نمود. بعلاوه بایستی ضرب داخلی و فضای برداری با هم سازگار باشند، یعنی اینکه $<\,,\,>$ نسبت به هر یک از مؤلفه‌هایش خطی باشد. روشن است که هر چنین ضرب داخلی‌ای یک متر (با ضابطهٔ $d(u,v):=\sqrt{<u-v,u-v>}$) تعریف می‌کند، و در نتیجه یک توپولوژی بر $E$ مشخص می‌کند. در صورتی که این متر کامل باشد (یعنی، هر دنبالهٔ کوشی در $E$ همگرا باشد) $E$ را **فضای هیلبرت** می‌گوئیم.

[۲] اگر $E$ یک فضای هیلبرت با نرم $\|\cdot\|$ باشد و $f: E\to E$، در صورتی نگاشت خطی $f$ را **یکانی** گوئیم که به ازای هر $u,v\in E$ از شرط $<f(u),f(v)>=<u,v>$، یعنی $f$ حافظ فاصلهٔ در $E$ باشد.

**(ه)** گروه $U(1)$ را معمولاً **گروه دایره‌ای** یا **گروه تیوبی ۱-بعدی** نامیده و با نماد $T$ نشان می‌دهیم. در کل، گروه تیوبی $n$-بعدی عبارت است از $T^n$. همهٔ این گروه‌ها گروه لی آبلی، همبند و فشرده هستند و در آینده خواهیم دید که اینها تنها چنین گروه‌های لی هستند.

**توسیع خواص موضعی** برای مشخص نمودن یک ساختار گروه توپولوژی بر یک گروه (مجرد) مفروض $G$ کافی است تا خانواده‌ای بخصوص از مجموعه‌های شامل مبدأ را مشخص کنیم، سپس با تأثیر خانوادهٔ انتقال‌های چپ (و یا انتقال‌های راست) بر این مجموعه‌ها، توپولوژای بر $G$ تعریف می‌کنیم که اعمال گروهی نسبت به آن پیوسته‌اند - و در نتیجه $G$ به یک گروه توپولوژی تبدیل می‌گردد. (به ضمیمهٔ الف مراجعه شود.) به صورت مشابه، با شروع از یک گروه توپولوژی و یک چارت حول مبدأ که دارای خواصی مشخص است، با در نظر گرفتن مجموعهٔ همهٔ انتقال‌های چپ (و یا انتقال‌های راست) از این چارت ، اطلسی سازگار بر $G$ بدست خواهیم آورد. حکم زیر نمونه‌ای از چنین احکامی است.

۳.۱.۲ **قضیه.** فرض کنید $G$ یک گروه توپولوژی و $\varphi : U \to V$ چارتی حول عنصر همانی گروه $G$ است. اگر

(۱) تابع $(u,v) \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(u)\varphi(v))$ بر $\{(u,v) \mid u,v \in U,\ \varphi(u)\varphi(v) \in V\}$، و

(۲) تابع $u \mapsto \varphi^{-1}\left(\varphi(u)^{-1}\right)$ بر $\varphi^{-1}(V \cap V^{-1})$

تحلیلی باشند، در این صورت $G$ گروه لی است.

قبل از اثبات این حکم مفهوم مؤلفهٔ همانی در یک گروه توپولوژی را مطرح نموده و چند حکم پایه‌ای در خصوص آنها را اثبات می‌کنیم. **مؤلفهٔ همانی** در یک گروه لی را به صورت زیر مجموعهٔ ماکسیمال همبند شامل عنصر همانی تعریف می‌کنیم.

۴.۱.۲ **لم.** فرض کنید $G_0$ نمایشگر مؤلفهٔ همانی در گروه توپولوژی $G$ است. در این صورت

(۱) $G_0$ زیر گروهی نرمال و بسته از $G$ است؛

(۲) چنانچه $G$ گروه لی باشد، $G_0$ باز نیز هست؛ و

(۳) وقتی و تنها وقتی $G_0$ گروه لی است که $G$ گروه لی باشد.

**برهان (۱):** از پیوستگی انتقال‌های چپ، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $x \in G_0$ ای مجموعهٔ $xG_0$ نیز همبند و شامل $e$ است، و بنابراین $(G_0)^2 \subseteq G_0$. به صورت مشابه از پیوستگر نگاشت وارون این طور استنباط می‌گردد که $G_0^{-1} \subseteq G_0$. بنابراین $G_0$ زیر گروهی از $G$ است.
اگر $x \in G$، در این صورت نگاشت $y \mapsto xyx^{-1}$ پیوسته است و بنابراین $xG_0x^{-1}$ نیز همبند است. اما، این مجموعه نیز عنصر همانی را در بر دارد، و بنابراین بایستی زیر مجموعه‌ای از $G_0$ باشد؛ که نشان دهندهٔ نرمال بودن $G_0$ است. چون $G_0$ در بین زیر مجموعه‌های همبند ماکسیمال است، بنابراین بسته نیز می‌باشد. (مؤلفه‌های همبندی در یک فضای توپولوژی هم بازند و هم بسته.)

**(۲)** فرض کنید $G$ گروه لی باشد؛ کمی بیشتر از آنچه که گفته شده را ثابت می‌کنیم. یعنی، ثابت می‌کنیم که $G$ موضعاً همبند است. (فضای توپولوژی را در صورتی **موضعاً همبند** گوئیم که به ازای هر عنصر $x$ از فضا و هر همسایگی $W$ از $x$، مؤلفهٔ همبندی شامل $x$ در $W$ نیز یک همسایگی باز از $x$ است.) کل گروه همسایگی بازی از تک تک اعضای در $G_0$ است و مؤلفهٔ همبندی شامل $x \in G_0$ در $G$ عبارت است از $xG_0 = G_0$. بنابراین اگر $G$ موضعاً همبند باشد، آنگاه $G_0$ همسایگی بازی از هر یک از $x \in G_0$ ها است و بنابراین $G_0$ باز می‌باشد.

برای نشان دادن موضعاً همبند بودن $G$ ابتدا متذکر می‌شویک که همان طوری که از ظاهر این اصطلاح بر می‌آید، موضعاً همبندی بودن یک مفهوم موضعی است و لذا همهٔ آنچه بایستی نشان دهیم این است که فضای برداری حقیقی با بعد متناهی $E$ ای که به عنوان فضای مدل برای $G$ استفاده می‌شود، موضعاً همبند است. که امری است بدیهی.

**(۳)** اگر $G$ گروه لی باشد، در این صورت (به دلیل آنکه $G_0$ زیر مجموعه‌ای باز از $G$ است) $G_0$ نیز گروه لی است و با محدود نمودن بردها به $G_0$، می‌توان از هر اطلس سازگار بر $G$ به یک اطلس سازگار بر $G_0$ رسید.

از سوی دیگر اگر $G_0$ گروه لی باشد و $\{\varphi_\alpha, \alpha \in A\}$ یک اطلس تحلیلی سازگار بر $G_0$ باشد، فرض می‌کنیم $\mathcal{A}_L := \{L_x \circ \varphi_\alpha, \alpha \in A,\ x \in G\}$، که در آن $L_x$ انتقال از چپ به اندازهٔ $x \in G$ است $(L_x : y \mapsto xy)$. این با تابعی شبیه به (۳.۱.۲) عمل می‌کند، که از آن (با استفاده از ۱.۳.۲) تحلیلی بودن $x \mapsto b^{-1} \times b$ بر $G_0$ برای $b \in G$ نتیجه می‌گردد. □

**۵.۱.۲ .** در اثبات ۳.۱.۲ اینکه

«هر همسایگی از عنصر همانی از یک گروه توپولوژی همبند، کل گروه را می‌تواند تولید کند.»

را استفاده می‌کنیم. (برای مشاهده اثباتی از این حکم، به قضیه (7.4) از [۳۰] مراجعه شود.) می‌خواهیم تا ثابت کنیم که $\mathcal{A}_L$ یک اطلس سازگار تحلیلی بر $G$ است.

برای اثبات اطلس بودن $\mathcal{A}_L$ فرض می‌کنیم $x, y \in G$ و

$$L_x \circ \varphi_\alpha(G_0) \cap L_y \circ \varphi_\beta(G_0) \neq \emptyset$$

در این صورت دامنهٔ مورد اشتراک دو چارت $U_\alpha \cap U_\beta$ است و برد مورد اشتراک آن دو نیز $xV_\alpha \cap yV_\beta$ می‌باشد. در نتیجه، نگاشت تغییر وضعیت عبارت از

$$\begin{aligned}\left(L_y \circ \varphi_\beta\right)^{-1} \circ (L_x \circ \varphi_\alpha) &= \varphi_\beta^{-1} \circ L_{y^{-1}} \circ L_x \circ \varphi_\alpha \\ &= \varphi_\beta^{-1} \circ L_{y^{-1}x} \circ \varphi_\alpha \qquad (۱.۲)\end{aligned}$$

است، و کافی است که نشان دهیم این نگاشت تحلیلی است. برای این منظور توجه می کنیم که : $\varphi_\alpha$ $U_\alpha \to V_\alpha$ و $\varphi_\beta : U_\beta \to V_\beta$ تحلیلی‌اند (زیرا هر دوی آنها چارت‌هایی از $G_0$ هستند و می‌دانیم که هر چارت از یک منیفلد مفروض تحلیلی است.) بعلاوه، از فرض غیر تهی بودن $xV_\alpha \cap yV_\beta$ استفاده نموده و فرض می‌کنیم $p$ به متعلق باشد. در این صورت $a \in V_\alpha$ ای و $b \in V_\beta$ ای چنان وجود دارند که

$p = xa = yb$ و بنابراین $y^{-1}x = ba^{-1}$ به $V_\alpha \cap V_\beta$ و لذا به $G_0$ متعلق است. اما تمام انتقال‌های چپ در یک گروه لی تحلیلی‌اند، و بنابراین $L_{y^{-1}x}$ نیز تحلیلی است. نتیجه اینکه نگاشت (۱.۲) تحلیلی است.
با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که $\mathcal{A}_R := \{R_x \circ \varphi_\alpha, \alpha \in A,\ x \in G\}$ نیز یک اطلس تحلیلی بر $G$ است. بعلاوه $\mathcal{A}_L$ و $\mathcal{A}_R$ با یکدیگر سازگارند، زیرا اگر $L_x \circ \varphi_\alpha \in \mathcal{A}_L$ و $R_x \circ \varphi_\beta \in \mathcal{A}_R$، در این صورت

$$\begin{aligned} \left(L_y \circ \varphi_\beta\right)^{-1} \circ (R_x \circ \varphi_\alpha) &= \varphi_\beta^{-1} \circ L_{x^{-1}} \circ R_x \circ \varphi_\alpha \\ &= \varphi_\beta^{-1} \circ L_{x^{-1}y} \circ \varphi_\alpha \end{aligned} \quad (۲.۲)$$

که به وضوح تحلیلی است. بنابراین $\mathcal{A}_L$ و $\mathcal{A}_R$ دارای یک اطلس ماکسیمال واحد $\mathcal{A}$ بر $G$ هستند.
فرض کنیم $x \in G$، در این صورت $L_x : G \to G$ تحلیلی است. زیرا اگر $a \in G$ و $\varphi_\alpha$ چارتی حول $e \in G_0$ باشد، در این صورت نمایش موضعی $L_x$ در همسایگی $a$ عبارت است از

$$\begin{aligned} (L_{xa} \circ \varphi_\alpha)^{-1} \circ L_x \circ (L_a \circ \varphi_\alpha) &= \varphi_\alpha^{-1} \circ L_{xa}^{-1} \circ L_x \circ L_a \circ \varphi_\alpha \\ &= \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \\ &= \mathrm{Id}. \end{aligned} \quad (۳.۲)$$

به دلیل مشابه همهٔ $R_x$ ها نیز تحلیلی‌اند.
برای اثبات سازگاری ساختار گروهی $G$ با اطلس $\mathcal{A}$ باید ثابت کنیم که نگاشت ضرب $\mu : G \times G \to G$ و نگاشت وارون $i : G \to G$ تحلیلی‌اند.
برای اثبات تحلیلی بودن $\mu$ فرض می‌کنیم $g, h \in G$. با توجه به اینکه $L_g$ در $e$ و $R_h$ در $g$، $L_{g^{-1}}$ در $g$، $R_{h^{-1}}$ در $h$ و $\mu$ در $(e,e)$ تحلیل‌اند، و نیز با توجه به اینکه $\mu = R_h \circ L_g \circ \mu \circ L_{h^{-1}} \times L_{g^{-1}}$، بنابراین $\mu$ در $(g,h)$ تحلیلی است.
برای اثبات تحلیلی بودن $i$ فرض می‌کنیم $g \in G$ به این نکته توجه می‌کنیم که بنابه فرض $i$ به عنوان نگاشتی از $G_0$ تحلیلی است، پس می‌توانیم فرض کنیم که $i$ در لااقل همسایگی یک $h \in G_0$ ای تحلیلی است. چون انتقال از چپ به اندازهٔ $hg^{-1}$ عنصر $g$ را به $h$ منتقل می‌کند و نگاشتی تحلیلی است و با توجه به اینکه $i$ در $h$ و $L_{g^{-1}h}$ در $h^{-1}$ تحلیلی‌اند و بعلاوه $i = L_{g^{-1}h} \circ i \circ L_{hg^{-1}}$، بنابراین $i$ در $G$ تحلیلی است.□

**اثبات ۳.۱.۲:** چون هر همسایگی از عنصر همانی یک گروه توپولوژی، همسایگی متقارنی (یعنی، همسایگی $W$ از $e$ طوری که $W = W^{-1}$) در بر دارد، بدون کاسته شدن از کلیت بحث می‌توانیم فرض کنیم که مجموعه $V$ در صورت قضیه متقارن است. همچنین می‌توانیم فرض کنیم $U$ و لذا $V$ همبند هستند، و لذا $V$ در مولفه همبندی $G$ قرار دارد. بنابراین، بر طبق قسمت (۳) از لم ۴.۱.۲، بدون کاسته شدن از کلیت بحث می‌توانیم فرض کنیم که $G$ همبند می‌باشد.
فرض کنیم $V'$ همسایگی متقارنی ار $e$ است که $VV' \subseteq V$. گیریم $U' = \varphi^{-1}(V')$ و $\psi = \varphi|_{U'}$؛ در این صورت $\psi : U' \to V'$چارتی از $G$ حول عنصر همانی $e$ می‌باشد. به ازای هر $a \in G$، نگاشت $L_a : G \to G$ را با ضابطه $x \mapsto ax$ تعریف می‌کنیم.در این صورت $L_a \circ \psi$ همئومورفیسمی از $U'$ بروی $aV'$ تعریف می‌کند، و $\{L_a \circ \psi | a \in G\}$ اطلسی بر $G$ تعریف می‌نماید. فرض کنیم $L_a \circ \psi$ و $L_v \circ \psi$

دو چارت همپوشا باشند؛ بایستی نشان دهیم که $(L_a \circ \psi)^{-1} \circ (L_b \circ \psi)$ بر $(L_a \circ \psi)^{-1}(aV' \cap bV')$ تحلیلی است. بعبارت دیگر

$$v \mapsto \psi^{-1}(b^{-1}a\psi(v)) \quad \text{بر} \quad \psi^{-1}(V' \cap a^{-1}bV') \quad \text{تحلیلی است.} \tag{۲.۴}$$

چون $aV' \cap bV'$ غیر تهی است، $v_1, v_2 \in V'$ چنان وجود دارند که $av_1 = bv_2$. بنابراین $b^{-1}a = v_2v_1^{-1}$ و لذا $b^{-1}a \in V$. در نتیجه $u \in U$ ای وجود دارد که $\phi(u) = b^{-1}a$. بعلاوه، هر گاه $v \in \psi^{-1}(V' \cap a^{-1}bV')$، داریم

$$\phi(u)\phi(v) \in b^{-1}a(V' \cap a^{-1}bV') = b^{-1}V' \cap V' \subseteq V'.$$

بنابراین، نگاشت در (۲.۴) را به صورت

$$v \longmapsto \psi^{-1}(\phi(u)\psi(v)) = \phi^{-1}(\phi(u)\phi(v))$$

می‌توان نوشت، و تحلیلی بودن آن بر $\psi^{-1}(V' \cap a^{-1}bV')$ از $(i)$–۲.۱.۳ نتیجه می‌گردد.

پیش از نشان دادن تحلیلی بودن حاصلضرب، بهتر است نشان دهیم که به ازای هر $b \in G$ ای

$$u \mapsto \psi^{-1}(b^{-1}\psi(u)b) \quad \text{در} \quad \psi^{-1}(e) \quad \text{تحلیلی است.} \tag{۲.۵}$$

(قضیه ۱.۲ از ضمیمه آ را می‌شود برای نشان دادن اینکه تابع در (۲.۵) بر یک همستیگی از $\psi^{-1}(e)$ خوشتعریف است، استفاده نمود.) با فرض اینکه $b$ به $V$ متعلق است شروع می‌کنیم. بنابراین، $w$ ای در $U$ چنان یافت می‌شود که $\phi(w) = b$. در این حالت (۲.۵) هموار است، زیرا آن را به صورت ترکیب $\alpha \circ \beta$ می‌توان نوشت، که $\alpha$ و $\beta$ به صورت

$$\begin{aligned} \alpha : u &\longmapsto \varphi^{-1}(\varphi(w')\varphi(u)), \qquad \text{با } w' = \varphi^{-1}(b^{-1}) \\ \beta : u &\longmapsto \varphi^{-1}(\varphi(u)\varphi(w)), \end{aligned}$$

تعریف می‌گردند، و هر دو بنابه $(i)$–۲.۱.۲ در تحلیلی هستند. حال فرض کنید $b$ به $G$ متعلق باشد؛ حکم مطرح در ۲.۱.۵ ایجاب می‌کند که $b$ را به صورت حاصلضرب متناهی $b_1 \cdots b_k$ از عناصر در $V$ بتوان نوشت. (یادآور می‌شویم که $V$ متقارن و $G$ همبند است.) با نوشت نگاشت در (۲.۵) به صورت حاصلضرب متناهی $\ell_k \circ \cdots \circ \ell_1$ از توابع

$$\ell_j : u \longmapsto \psi^{-1}(b_j^{-1}\psi(u)b_j),$$

که هر یک از آنها بر اساس استدلال بالا در $\psi^{-1}(e)$ تحلیلی هستند، تحلیلی بودن (۲.۵) در $\psi^{-1}(e)$ نتیجه می‌گردد.

اکنون در وضعیتی هستیم که می‌توانیم نشان دهیم ضرب در $G$ تحلیلی است. بنابه ۱.۱.۹ در صورتی حاصلضرب در $(a,b)$ تحلیلی است که

$$\begin{aligned} (u,v) &\longmapsto (L_{ab} \circ \psi)^{-1}(L_a \circ \psi(u).L_b \circ \psi(v)) \\ &= \psi^{-1}(b^{-1} \circ \psi(u)b \circ \psi(v)) \end{aligned} \tag{۲.۶}$$

در $(\psi^{-1}(e),\psi^{-1}(e))$ تحلیلی باشد، زیرا $(a,b)\in aV'\times bV'$ و $ab\in ab.V'$. این نگاشت را به صورت ترکیبی از دو نگاشت

$$(u,v)\ \longmapsto\ (\psi^{-1}(b^{-1}\psi(u)b),v),\qquad \text{و}\qquad (u,v)\ \longmapsto\ \psi^{-1}(\psi(u)b\psi(v)),$$

می‌شود نوشت. تحلیلی بودن این دو نگاشت در $(\psi^{-1}(e),\psi^{-1}(e))$ از $(i)$–۳.۱.۲ و (۵.۲) نتیجه می‌گردد. بنابراین، (۶.۲) در این نقطه تحلیلی است.
تحلیلی بودن نگاشت وارون را از تحلیلی بودن (۵.۲) و $(i)$–۳.۱.۲ می‌توان نتیجه گرفت. □

## بخش ۲.۲ جبر لی یک گروه لی

در این بخش ابتدا دو توصیف دیگر از فضای مماس در عنصر همانی یک گروه لی $G$ ارائه نموده و سپس به این فضا ساختار جبر لی می‌بخشیم. جبر حاصل را **جبر لی** $G$ می‌نامیم. در سراسر این بخش فرض بر این است که $G$ یک گروه لی مدل شده بر $G$ می‌باشد.

**میدان برداری ناوردای چپ.** اگر $X:G\to T(G)$ میدان برداری باشد، در صورتی آن را **ناوردای چپ** گوئیم که

$$X\circ L_a=(L_a)_*\circ X \qquad\qquad \text{به ازای هر } a\in G$$

که در اینجا $L_a$ نمایشگر **انتقال از چپ به اندازهٔ** $a$ و با ضابطهٔ $G\ni x\mapsto ax\in G$ است. به جهت کاربردهای بعدی بهتر است یادآور شویم که شرط بالا به این معنی است که

$$(L_a)_{*,x}([\varphi_\alpha,v]_x)=[L_a\circ\varphi_\alpha,v]_{L_ax} \tag{۷.۲}$$

این فرمول نیز خود به این معنی است که اگر چارتی حول $L_ax$ به گونه‌ای انتخاب شود که با انتقال از چپ باندازهٔ $a$ به یک چارت مفروض حول $x$ برده شود، در این صورت $(L_a)_{*,x}$ هر برداری از $T_x(G)$ را به همان بردار در $T_{(L_a)_{*,x}}(G)$ خواهد برد.

**۱.۲.۲ لم.** هر میدان برداری ناوردای چپ تحلیلی است.

برهان: فرض کنید $X$ یک میدان برداری ناوردای چپ بر $G$ است. چون

$$X(x)=X\circ L_g(e)=(L_x)_{*,e}(e)$$

بسیار جالب است که $X$ تحلیلی باشد، چرا که تحلیلی بودن آن تنها به تحلیلی بودن $x\mapsto(L_x)_{*,e}(e)$ بستگی دارد. البته، برای اثبات این مطلب می‌باید موقتاً کمی از بحث اصلی دور شویم.
فرض کنیم $f$ تابعی تحلیلی از $U\times U$ به توی $E$ است، که $E$ یک فضای برداری حقیقی با بعد متناهی است و $U$ زیر مجموعه‌ای باز و غیر تهی از $E$ است. اگر $\tilde u$ و $\tilde v$ بترتیب نمایشگر زوجهای

$(u_1,u_2)$ و $(v_1,v_2)$ باشند، در این صورت هر گاه $\tilde{u}\in U\times U$، آنگاه به دلیل تحلیلی بودن $f$، مجموعهٔ باز $B\subseteq U\times U$ با مرکز در $\tilde{u}$ طوری وجود دارد که سری

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}f^{(m)}(\tilde{u})\tilde{v}^{(m)} \tag{۸.۲}$$

به ازای هر $\tilde{u}+\tilde{v}\in B$ ای همگرای مطلق است و بعلاوه به $f(\tilde{u}+\tilde{v})$ همگرا است.

به ازای هر $u_1\in U$ ای تابع $f_{u_1}$ از $U$ به $E$ را با ضابطهٔ $f_{u_1}: u_2\mapsto f(u_1,u_2)$ تعریف می‌کنیم. مشتق $(f_{u_1})'(u_2)$ تابع $f_{u_1}$ در نقطهٔ $u_2$ را با نماد $D_2f(u_1,u_2)$ نشان داده و آن را **مشتق جزئی $f$ نسبت به دومین متغیر** می‌نامیم. به صورت مشابه می‌توان از نماد $D_1f(u_1,u_2)$ و اصطلاح **مشتق جزئی $f$ نسبت به اولین متغیر** سخن گفت. به سادگی می‌توان مشتقات جزئی مراتب بالاتر را تعریف نمود و ... بعلاوه می‌دانیم که

$$f'(\tilde{u})(\tilde{v})=D_1f(\tilde{u})(v_1)+D_2f(\tilde{u})(v_2)$$

و نیز

$$f^{(m)}(\tilde{u})(\tilde{v})^{(m)}=\sum_{j_1=1}^{2}\cdots\sum_{j_m=1}^{2}D_{j_1}\cdots D_{j_m}f(\tilde{u})(v_{j_1},\cdots,v_{j_m})$$

که البته، تأثیر مشتقات جزئی تعویض‌پذیرند. (جزئیات بیشتر را در بخش ۱۲، فصل هشت از کتاب دیودونه [۱۵] و یا بخش ۷، فصل پنجم از کتاب لانگ [۴۰] می‌توانید بیابید.) نتیجه اینکه به ازای هر $u_2\in U$ ای $u_1\mapsto D_2f(u_1,u_2)$ بر $U$ تحلیلی است، زیرا از ۸.۲ و ۹.۲ نتیجه می‌گردد که به ازای هر $u_1,u_2\in U$ و $(u_1+v_1,u_2)\in B$ داریم

$$D_2f(u_1+v_1,u_2)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}D_1^mD_2f(u_1,u_2)\left(v_1^{(m)},\,.\,\right)$$

و بعلاوه سری در سمت راست تساوی بالا، همگرای مطلق است.

به گروه لی $G$ و میدانن برداری ناوردای چپ $X$ باز می‌گردیم. چارتی $\varphi:W\to V$ حول $e$ از اطلس تحلیلی موجود بر $G$ انتخاب می‌کنیم. زیر مجموعهٔ باز غیر تهی $U$ ای از $W$ چنان انتخاب می‌کنیم که $\varphi(U)$ همسایگی بازی از $e$ بوده و بعلاوه به ازای هر $u,v\in U$ ای $\varphi^{-1}(\varphi(u)\varphi(v))\in W$. فرض کنیم $X_e=[\varphi,w]_e$؛ در این صورت به ازای هر $x\in\varphi(U)$ ای

$$X_x=(L_x)_{*,e}X_e=\left[\varphi,\left(\varphi^{-1}\circ L_x\circ\varphi\right)'\Big|_{\varphi^{-1}(e)}(w)\right]_e$$

اکنون نیاز داریم که ثابت شود $X$ در یک همسایگی از عنصر همانی تحلیلی است، و نظر به زیر بخشهای ۹.۱.۱ و ۳.۲.۱ این مطلب به معنی تحلیلی بودن $\tau^{-1}\circ X\circ\varphi$ بر $U$ است، که $\tau:(W\times E)\to\pi^{-1}(V)$ با ضابطهٔ $\tau(u,v)=[\varphi,v]_{\varphi(u)}$ تعریف می‌گردد. اکنون به ازای هر $u\in U$ ای

$$\left(\tau^{-1}\circ X\circ\varphi\right)(u)=\left(u,\left(\varphi^{-1}\circ L_{\varphi(u)}\circ\varphi\right)'\Big|_{\varphi^{-1}(e)}(w)\right)$$

و در نتیجه، این نگاشت در صورتی بر $U$ تحلیلی است که

$$h : u \mapsto \left(\varphi^{-1} \circ L_{\varphi(u)} \circ \varphi\right)'\Big|_{\varphi^{-1}(e)} (w)$$

بر $U$ تحلیلی باشد. برای این منظور نگاشت $f$ را بر $U \times U$ به صورت $f(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u)\varphi(v))$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $f$ تحلیلی است و بنابراین، مطابق آنچه که در بالا گفته شد،

$$\begin{aligned} u \;\mapsto\; \left(\varphi^{-1} \circ L_{\varphi(u)} \circ \varphi\right)'\Big|_{\varphi^{-1}(e)} &= \left(\varphi^{-1}(\varphi(u)\varphi)\right)'\Big|_{\varphi^{-1}(e)} (f_u)'\Big|_{\varphi^{-1}(e)} \\ &= D_2 f(u, \varphi^{-1}(e)) \end{aligned}$$

نیز بر $U$ تحلیلی است. $\square$

**۲.۲.۲ تعریف.** به هر همومورفیسم تحلیلی $\theta$ از $\mathbb{R}$ بتوی گروه لی $G$، زیر گروه ۱-پارامتری $G$ گفته می‌شود.

**۳.۲.۲ قضیه.** فرض کنید $G$ گروه لی است. در این صورت

(۱) نگاشت $X_e \mapsto X$ تناظری یک-به-یک بین میدانهای برداری ناوردای چپ (تحلیلی) $X$ بر $G$ و بردارهای در $T_e(G)$ تعریف می‌کند.

(۲) نگاشت $\theta_{*,0}[i,1]_0 \mapsto \theta$ تناظری یک-به-یک بین زیر گروه‌های ۱-پارامتری در $G$ و بردارهای در $T_e(G)$ تعریف می‌کند.

برهان: (۱) باید نشان دهیم که به ازای هر $v \in T_e(G)$ مفروض، یک میدان برداری ناوردای چپ منحصر بفرد $X$ بر $G$ وجود دارد به گونه‌ای که $X_e = v$. فرض کنیم چنین میدان برداری‌ای وجود داشته باشد؛ در این صورت

$$X_x = (X \circ L_x)(e) = (L_x)_* X_e = (L_x)_* v$$

و بنابراین به صورت یکتا بر باقیماندهٔ $G$ تعریف می‌گردد. از سوی دیگر از همین فرمول برای تعریف یک میدان برداری $X$ می‌توان استفاده نمود: $X_x = (L_x)_* v$. به وضوح $X_e = v$ و خود به خود ناوردای چپ است، زیرا به ازای هر $a, x \in G$ ای

$$(L_a)_* X_x = (L_a)_* (L_x) v = X_{ax} = (X \circ L_a)(x)$$

در نتیجه بنابه زیر بخش ۱.۲.۲، $X$ تحلیلی است. $\square$

قبل از ارائهٔ اثبات قسمت (۲) از قضیهٔ ۳.۲.۲ به بیان یک حکم کلاسیک از نظریهٔ معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم. به جهت خلاصه‌تر شدن بحث کلی کتاب، حکمی کلی‌تر که بعداً نیز مورد لزوم واقع می‌گردد را مطرح می‌کنیم، و سپس حکم خاصی که اکنون به آن نیاز داریم را نتیجه می‌گیریم. در ابتدای امر ممکن است خواننده قبول نکند که این احکام کلاسیک هستند، اما چون تمام محاسبات به صورت موضعی صورت می‌پذیرند، این احکام را به حالت فضاهای برداری با بعد متناهی می‌توان ترجمه نمود و به احکام کلاسیک مورد اتفاق رسید.

**۴.۲.۲ قضیه.** فرض کنید $V$ یک همسایگی از $e$ در گروه لی $G$ است و $W$ یک همسایگی از نقطهٔ مفروض $w_0$ در $\mathbb{R}^m$ می‌باشد. فرض کنیم که به ازای هر $w \in W$ ای $X_w$ میدانی برداری بر $G$ است با این ویژگی که نگاشت $(x, w) \mapsto X_w(x)$ بر $V \times W$ تحلیلی است. در این صورت یک همسایگی $W_0$ از $w_0$ در $W$ و یک بازهٔ $(-\epsilon, \epsilon)$ (که $0 < \epsilon$) در $\mathbb{R}$ و به ازای هر $w \in W_0$ ای یک تابع $f_w : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ چنان وجود دارند که

$$(f_w)_*[i, 1]_t = X_w(f_w(t)), \qquad f_w(0) = e \tag{۹.۲}$$

بعلاوه، نگاشت $(t, w) \mapsto f_w(t)$ بر $(-\epsilon, \epsilon) \times W_0$ تحلیلی است، و به ازای هر $w \in W_0$ مفروض، هر دو جواب از معادلات (۹.۲) بر دامنهٔ حاصل از برخورد دامنه‌شان برابرند.

برهان: اثبات این مطلب را در بسیاری از کتب در مورد معادلات دیفرانسیل می‌توان یافت. از قضیهٔ ۴.۱ از فصل ۲ از کتاب کدینگتن و لوینسون [۱۳]، قضیهٔ (۱۰.۷.۱) از کتاب دیودونه [۱۵] و یا بخش ۲ از فصل ۴ از کتاب لانگ [۴۱] می‌توان نام برد. □

**۵.۲.۲ نتیجه.** فرض کنید $V$ یک همسایگی باز از $e$ گروه لی $G$ است و $X$ یک میدان برداری بر $G$ است که تحلیلی بر $V$ است. در این صورت یک بازهٔ $(-\epsilon, \epsilon)$ از $\mathbb{R}$ و یک تابع $f : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ چنان وجود دارند که

$$f_*([i, 1]_t) = X(f(t)) \text{ ای } t \in (-\epsilon, \epsilon) \text{ و به ازای هر} \quad f(0) = e \tag{۱۰.۲}$$

بعلاوه، هر دو جواب از معادلات (۱۰.۲) بر دامنهٔ حاصل از برخورد دامنه‌شان برابرند.

حال با داشتن این نتیجه، با قدرت مناسبی به اثبات قسمت (۲) از قضیهٔ ۳.۲.۲ باز می‌گردیم.

اثبات قسمت (۲) از قضیهٔ ۳.۲.۲: اگر $\theta$ یک زیر گروه ۱-پارامتری از $G$ باشد، در این صورت $\theta_{*,0}[i, 1]_0$ برداری در $T_e(G)$ است. از قسمت (۱) همین قضیه نتیجه می‌گردد که یک میدان برداری ناوردای چپ منحصر بفرد $X$ بر $G$ طوری وجود دارد که $X(e) = \theta_{*,e}[i, 1]_0$. حال از فرمول (۷.۲) و این واقعیت که میدان برداری $X$ ناوردای چپ است و نیز اینکه $\theta$ همومورفیسم تحلیلی است، نتیجه

می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\theta_{*,t}[i,1]_t &= \theta_{*,t}(L_t)_{*,0}[i,1]_0(\theta L_t)_{*,0}[i,1]_0\\ &= (L_{\theta(t)}\theta)_{*,0}[i,1]_0\\ &= (L_{\theta(t)})_{*,0}X(e)\\ &= X(\theta(t))\end{aligned}$$

یعنی اینکه

$$\theta_{*,t}[i,1]_t = X(\theta(t)) \quad \text{به ازای هر } t\in\mathbb{R} \text{ ای} \qquad (۱۱.۲)$$

این نشان می‌دهد که اگر $X$ میدان برداری ناوردای چپ بوده و زیر گروه ۱-پارامتری $\theta$ در شرط $\theta_{*,0}[i,1]_0 =$ $X(e)$ صدق کند، در این صورت $\theta$ در رابطهٔ (۱۱.۲) صدق می‌کند. برای تکمیل اثبات قسمت (۲) از قضیهٔ ۳.۲.۲ کافی است نشان دهیم که $\theta_{*,0}[i,1]_0 = X(e)$، و لذا یک زیر گروه ۱-پارامتری منحصر بفرد در شرط (۱۱.۲) صدق می‌کند.

به ازای هر $v\in T_e(G)$ مفروض، وجود و یکتایی یک میدان برداری ناوردای چپ $X$ بر $G$ طوری که $X(e)=v$ از قسمت (۱) این قضیه نتیجه می‌گردد. با بکارگیری نتیجهٔ ۵.۲.۲ در این مورد، نتیجه می‌گیریم که بازه‌ای باز $J$ از $0\in\mathbb{R}$ و تابعی تحلیلی $f:J\to G$ چنان وجود دارد که به ازای همهٔ $t\in J$ ها

$$f_*([i,1]_t) = X(f(t)), \qquad f(0)=e \qquad (۱۲.۲)$$

ایدهٔ اصلی اثبات این است که نشان دهیم $f$ تحدیدی از یک زیر گروه ۱-پارامتری منحصر بفرد می‌باشد.

ابتدا فرض کنیم $J_1\subseteq J$ چنان همسایگی بازی از $0$ است که $J_1+J_1\subseteq J_1$. پر واضح است که به ازای هر $s\in J_1$ ای توابع $f_1: t\mapsto f(s)f(t)$ و $f_2: t\mapsto f(s+t)$ بر مجموعهٔ $J_1$ در شرایط (eq:2.2.3ref) صدق می‌کنند. (برای مشاهدهٔ این امر در مورد $f_1$ کافی است توجه شود که به کمک (۱۲.۱) و (۱۲.۲) و ناوردایی چپ $X$ داریم

$$\begin{aligned}(f_1)_*([i,1]_t) &= (L_{f(s)}f)_*([i,1]_t) = (L_{f(s)})_*(f)_*([i,1]_t)\\ &= (L_{f(s)})_*Xf(t) = XL_{f(s)}f(t) = X(f_1(t))\end{aligned}$$

با محاسباتی کاملاً مشابه بالا می‌توان حکم مشابهی را برای $f_2$ تحقیق نمود.) از یکتایی جواب (۱۲.۲) نتیجه می‌شود که

$$f(s)f(t) = f(s+t) \quad \text{به ازای هر } s,t\in J_1 \text{ ای}$$

بنابراین $f$ به شکل موضعی یک هomomorfism تحلیلی منحصر بفرد از $\mathbb{R}$ یتوی $G$ می‌باشد.

برای نشان دادن امکان توسیع $f$ به یک زیر گروه ۱-پارامتری منحصر بفرد از $G$، فرض می‌کنیم $r\in\mathbb{R}$. در این صورت عدد صحیح مثبت منحصر بفردی $N$ وجود دارد که $r/N\in J_1$؛ پس تعریف می‌کنیم $\theta(r) = (f(r/N))^N$. حال به سادگی می‌توان تحقیق نمود که $\theta:\mathbb{R}\to G$ مستقل از $N$ است، توسیع $f$ می باشد، و هomomorfism است. و چون $f$ تحلیلی است، این نگاشت تنها هomomorfism تحلیلی‌ای است که توسیع $f$ می‌شود.□

**۶.۲.۲ گزاره.** مجموعهٔ همهٔ میدانهای برداری ناوردای چپ بر یک گروه لی مفروض، هنگامی که با ضرب لی القایی از مجموعهٔ همهٔ میدانهای برداری بر آن گروه همراه گردد، تشکیل یک جبر لی می دهد.

نمونه‌ای کاملتر از این حکم را اثبات می‌کنیم تا بعداً بتوانیم از آن در مورد زیر گروههای یک گروه لی نیز استفاده کنیم. فرض کنیم $M$ و $N$ منیفلد تحلیلی‌اند و $h : M \to N$ نگاشتی تحلیلی است. اگر $X$ و $Y$ بترتیب میدان برداری تحلیلی بر $M$ و $N$ باشند، آنگاه در صورتی می‌گوئیم آن دو $h$**–مرتبط**[۳] هستند که $h_* \circ X = Y \circ h$. در این حالت اگر $\{\psi_\beta \ : \ \beta \in B\}$ اطلسی تحلیلی برای $N$ باشد و $f \in \mathcal{F}_\beta$ (یعنی $f$ تابعی با مقدار حقیقی و تحلیلی بر $V_\beta$ باشد)، آنگاه

$$\tilde{Y} f \circ h = \tilde{X}(f \circ h) \quad \text{بر} \quad h^{-1}(V_\beta) \tag{۱۳.۲}$$

زیرا

$$\begin{aligned}(\tilde{Y} f)(h(a)) &= f_{*,h(a)} Y(h(a)) = f_{*,h(a)} \circ h_{*,a} X(a)\\ &= (f \circ h)_{*,a} X(a) = \tilde{X}(f \circ h)(a)\end{aligned}$$

از سوی دیگر، اگر (۱۳.۲) به ازای همهٔ $\beta \in B$ ها و نیز $f \in \mathcal{F}_\beta$ ها برقرار باشد، در این صورت از محاسبات بالا این طور استنتاج می‌گردد که به ازای هر زوج $(\beta, f)$ ای

به ازای هر $a \in h^{-1}(V_\beta)$ ای

$$f_{*,h(a)} = Y(h(a)) = f_{*,h(a)} \circ h_{*,a} X(a)$$

حال با استدلالی مشابه با آنچه که در مورد ۴.۳.۱ بکار رفت، می توان نشان داد که $Y \circ h = h_* \circ X$ و بنابراین $X$ و $Y$ $h$–مرتبط هستند. از این بیان معادل برای $h$–مرتبط بودن برای اثبات حکم زیر می توان استفاده نمود:

**۷.۲.۲ لم.** اگر به ازای هر $i = 1, 2$ ای $X_i$ با $Y_i$ $h$–مرتبط باشند، در این صورت $[X_1, X_2]$ و $[Y_1, Y_2]$ نیز $h$–مرتبطند.

برهان: از بحث بالا نتیجه می‌گردد که به ازای هر $f \in \mathcal{F}_\beta(N)$ و هر $i = 1, 2$ ای

$$(\tilde{Y}_i f) \circ h = \tilde{X}_i(f \circ h) \quad \text{بر} \quad h^{-1}(V_\beta)$$

بنابراین به کمک زیر بخش ۳.۳.۱ داریم

$$\begin{aligned}(\widetilde{[Y_1, Y_2]} f) \circ h &= \tilde{Y}_1(\tilde{Y}_2 f) \circ h - \cdots = \tilde{X}_1((\tilde{Y}_2 f) h) - \cdots\\ &= \tilde{X}_1((\tilde{X}_2 f) h) - \cdots = (\widetilde{[X_1, X_2]} f) \circ h\end{aligned}$$

در نتیجه همان طوری که انتظار داشتیم $[X_1, X_2]$ و $[Y_1, Y_2]$ نیز $h$–مرتبطند. □

و اینک به اثبات گزارهٔ ۶.۲.۲ باز می‌گردیم.

اثبات گزارهٔ ۶.۲.۲: کافی است توجه شود که نظر به اصطلاحات قبلی گفته شده در مورد گروههای لی، وقتی و تنها وقتی میدان براداری $X$ بر گروه لی $G$ ناوردای چپ است که به ازای هر $a \in G$ ای با خودش $L_a$–مرتبط باشد. بنابراین $X$ و $Y$ میدان برداری ناوردای چپ باشند، در این صورت $[X, Y]$ نیز هست و برهان تمام است. □

[۳] $h$–related

**۸.۲.۲ جبر لی.** فرض کنید $G$ گروه لی است. چون فضای میدانهای برداری تحلیلی ناوردای چپ بر $G$ هم نسبت به عمل ضرب لی (۲.۳.۱ و ۶.۲.۲) بسته است و هم به شکل خاصی با $T_e(G)$ ایزومورف است (قسمت (۱) از قضیهٔ ۳.۲.۲)، به طور طبیعی می‌توان ضرب لی را به $T_e(G)$ منتقل نمود. به بیان دقیق‌تر، به ازای هر $u, v \in T_e(G)$ مفروض، تعریف می کنیم

$$[v, w] = [X, Y](e) \qquad (۱۴.۲)$$

که در اینجا $X$ و $Y$ میدانهای برداری ناوردای چپ تحلیلی بر $G$ هستند به گونه‌ای که $X(e) = u$ و $Y(e) = v$.

بنابه تعریف $T_e(G)$ همراه با ساختار فضای برداری‌اش و نیز ضرب تعریف شده توسط (۱۴.۲) را **جبر لیِ** $G$[۴] نامیده و اغلب با نماد $\mathfrak{g}$ نشان می‌دهیم. (در صورتی که $H$ زیر گروه لی باشد، جبر لی آن را با نماد $\mathfrak{h}$ نشان خواهیم داد.)

به دلیل هم‌ارزی کانونی بین $\mathfrak{g}$ و جبر لی میدانهای بردار ناوردای چپ بر $G$، عبارت "$X \in \mathfrak{g}$" می‌تواند به این معنی باشد که $X$ یک بردار در $T_e(G)$ است و همچنین می‌تواند به این معنی باشد که $X$ یک میدان برداری ناوردای چپ است. این امر باعث می‌شود که تا حدودی از طول برهانها کاسته شود، البته بایستی خوانند توجه داشته باشد که این امر باعث ابهام در مفهوم نشود.

**۹.۲.۲ نگاشت نمایی.** بنابه تعریف **نگاشت نمایی**[۵] نگاشتی $\exp : \mathfrak{g} \to G$ است با ضابطهٔ

$$\exp(X) = \theta_X(1), \qquad X \in \mathfrak{g} \text{ به ازای}$$

که $\theta_X$ زیر گروه ۱-پارامتری نظیر شده به $X$ مطابق قسمت (۲) از قضیهٔ ۳.۲.۲ می‌باشد.

از ۳.۲.۲ نتیجه می‌گردد که $(\theta_X)_{*,0}[i, 1]_0 = X(0)$ و این خود موجب می‌شود که زیر گروه ۱-پارامتری $\psi : t \mapsto \theta_X(st)$ به ازای هر $s \in \mathbb{R}$ ای در شرط $\psi_{*,0}[i, 1]_0 = sX(e)$ صدق می‌کند. بنابراین $\psi$ به میدان برداری ناوردای چپ $sX$ متناظر است و بنابراین

$$\exp(sX) = \psi(1) = \theta_X(s)$$

در نتیجه، به ازای هر $s, t \in \mathbb{R}$ ای

$$\begin{aligned} \exp((s+t)X) &= \theta_X(s+t) = \theta_X(s)\theta_X(t) \\ &= \exp(sX)\exp(tX) \end{aligned}$$

با ترکیب این مطلب و نیز قضیهٔ ۳.۲.۲، داریم

**۱۰.۲.۲ قضیه.** فرض کنید $G$ گروه لی است. در این صورت به ازای هر $X \in \mathfrak{g}$ ای $\theta_x : t \mapsto \exp(tX)$ یک زیر گروه ۱-پارامتری از $G$ است به گونه‌ای که به ازای هر $s, t \in \mathbb{R}$ ای $(\theta_X)_{*,t}[i, s]_t = sX(\theta_X(t))$. بعلاوه، هر زیر گروه ۱-پارامتری از $G$ به این فرم است.

---
[۴] Lie algebra of $G$
[۵] exponential map

از تعریف نگاشت نمایی چنین نتیجه می‌گردد که $t \mapsto \exp(tX)$ تحلیل است. در قضیهٔ ۱۲.۲.۲ خواهیم دید که نگاشت exp به عنوان تابعی بر $\mathfrak{g}$ تحلیلی است.

**۱۱.۲.۲ قضیهٔ نگاشت وارون.** اگر $M$ و $N$ منیفلدهایی تحلیلی و $f : M \to N$ نگاشتی تحلیلی باشد، آنگاه در صورتی $f$ را **هیومورفیسم موضعاً تحلیلی** در $p \in M$ گوئیم که

(۱) $f$ بر یک همسایگی باز $U$ از $p$ تحلیلی باشد، و

(۲) یک همسایگی باز $V$ از $f(p)$ در $N$ و یک نگاشت تحلیلی $g : V \to M$ چنان وجود داشته باشد که $f \circ g$ و $g \circ f$ بترتیب برابر با نگاشت همانی بر $V$ و $U$ هستند.

قضیهٔ نگاشت وارون اذعان می‌دارد که اگر $f : M \to N$ تحلیلی بوده و نگاشت $f_{*,p}$ ایزومورفیسم خطی باشد، در این صورت $f$ یک هیمومورفیسم تحلیلی موضعی در نقطهٔ $p$ است.

برای مشاهدهٔ اثباتی از این حکم به صفحهٔ ۲۲ از کتاب لانگ [۴۰] و یا به هر کتاب در ارتباط با حساب دیفرانسیل پیشرفته مراجعه شود.

**۱۲.۲.۲ قضیه.** نگاشت نمایی تحلیلی است و بعلاوه در نقطهٔ $0 \in \mathfrak{g}$ هیمومورفیسم موضعی می‌باشد.

برهان: چون تابع $(x, X) \mapsto X(x)$ از $G \times \mathfrak{g}$ بتوی $T(G)$ نسبت به اولین متغیرش تحلیلی است و نسبت به دومین متغیرش نیز خطی می‌باشد، پس در کل نگاشتی تحلیلی می‌باشد. فرض کنیم $X_0 \in \mathfrak{g}$ دلخواه و از این پس ثابت باشد. با بکارگیری قضیهٔ ۲.۲.۴ نتیجه می‌شود که یک همسایگی باز $W_0$ از $X_0$ در $\mathfrak{g}$ و یک بازهٔ باز $(-\epsilon, \epsilon)$ (که $\epsilon > 0$) در $\mathbb{R}$ به گونه‌ای وجود دارند که به ازای هر $X \in W_0$ تابعی تحلیلی $\theta_X : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ چنان وجود دارد که

$$(\theta_X)_*[i, t]_0 = X(\theta_X(t)), \qquad \theta_X(0) = e$$

و بعلاوه نگاشت $(t, X) \mapsto \theta_X(t)$ بر $(-\epsilon, \epsilon) \times W_0$ تحلیلی است. اما قضیهٔ ۳.۲.۲ نشان می‌دهد که $\theta_X$ تحدید یک زیر گروه ۱-پارامتری از $G$ است (که آن را نیز با نماد $\theta_X$ نشان می‌دهیم) و بعلاوه $\exp(tX) = \theta_x(t)$. حال از تحلیلی بودن نگاشت $(t, X) \mapsto \theta_X(t)$، تحلیلی بودن exp در یک همسایگی از $X_0$ نتیجه می‌گردد. چون در انتخاب $W_0$ هیچ گونه محدودیتی را اعمال نکردیم، بنابراین می توانیم نتیجه بگیریم که exp بر کل $\mathfrak{g}$ تحلیلی است.

فرض کنیم گروه لی $G$ بر $E$ مدل شده است. از نقطه نظر تعریف $\exp_{*,0}$ نگاشتی از $T_0(\mathfrak{g})$ به $T_e(G)$ است، ولی هم دامنه و هم برد این نگاشت به شکل کانونی با $E$ ایزومورفند، بنابراین $\exp_{*,0}$ را به عنوان نگاشتی از $E$ به $E$ می‌توان قلوداد نمود. پس، نسبت به این ایزومورفیسم‌ها می‌توانیم بنویسم

$$\exp_{*,0}(X) = \exp_{*,0}[i, X]_0 = [\varphi_\alpha, (\varphi_\alpha^{-1} \circ \exp)'\big|_0 (X)]_e$$

که $\varphi_\alpha$ چارتی حول $e$ برای $G$ می‌باشد. عبارت آخری برابر است با

$$\left[\varphi_\alpha, (\varphi_\alpha^{-1} \circ \theta_X)'\big|_0 (1)\right]_e = (\theta_X)_{*,0}[i, 1]_0$$

که بنابه قضیهٔ ۳.۲.۲ چیزی جز $X(e)$ و یا خود $X$ نسبت به ایزومورفیسم گفته شده نیست. بنابراین $\exp_{*,0}$ نگاشت همانی (بر $E$) است و به همین دلیل قضیهٔ نگاشت وارون ۱۱.۲.۲ اذعان می‌دارد که exp همیومورفیسم موضعی است.□

**۱۳.۲.۲ زیر گروههای کوچک.** در صورتی که در یک گروه توپولوژی مفروض هیچ همسایگی باز از عنصر همانی نتوان یافت که شامل زیر گروهی غیر بدیهی باشد، آنگاه می‌گوئیم که این گروه توپولوژی **بدون زیر گروههای کوچک**[۶] است.اکنون برآنیم تا ثابت کنیم که همهٔ گروههای لی بدون زیر گروههای کوچک هستند و بعداً در فصل ششم نیز نشان خواهیم داد که عکس این مطلب برای گروههای توپولوژی فشرده صحیح می‌باشد.

**۱۴.۲.۲ نتیجهٔ از ۱۲.۲.۲.** همهٔ گروههای لی بدون زیر گروههای کوچکند.

برهان: فرض کنیم $G$ گروه لی باشد. از قضیهٔ بالا نتیجه می‌گردد که یک همسایگی باز $U$ از $0 \in \mathfrak{g}$ وجود دارد که نگاشت نمایی exp بر آن یک–به–یک می‌باشد. فرض کنیم $V$ همسایگی دیگری از $o \in \mathfrak{g}$ است که مشمول در $U$ بوده و در شرط $V + V \subseteq U$ صدق می‌کند. همچنین فرض کنیم که $V$ کراندار انتخاب شده باشد. اگر $G$ در شرط بدون زیر گروههای کوچک صدق کند، بنابراین مشخصاً $\exp(V)$ شامل زیر گروهی غیر بدیهی، مثلاً $H$ خواهد بود. فرض کنیم $x \in H$ و $x \neq e$.در این صورت $X$ ای در $V$ یافت خواهد شد به گونه‌ای که $\exp X = x$. ثابت می‌کنیم که به ازای هر عدد صحیح مثبت دلخواه $n$ ای $nX \in V$، که این امر با کرانداری $V$ در تضاد می‌باشد. (زیرا، $x \neq e$ و بنابراین $X \neq$.)
روشن است که $X \in V$. پس فرض می‌کنیم که به ازای هر $m$ صادق در $1 \leq m < n$، $mX \in V$؛ در این صورت $nX = (n-1)X + X \in V + V \subseteq U$. اما $H$ زیر گروه است و $\exp(nX) = (\exp X)^n = x^n$، در نتیجه $\exp(nX)$ نیز به $H$ تعلق دارد. اما exp بر $U$ یک–به–یک است و لذا همان طوری که انتظار داشتیم $nX \in V$.□

**۱۵.۲.۲ یادداشت..** قضایای ۱۰.۲.۲ و ۱۲.۲.۲ شامل احکام مثبتی در خصوص نگاشت نمایی هستند و به دفعات به آنها مراجعه خواهد شد. اما از سوی دیگر، نگاشت نمایی در حالت کلی به هیچ وجه نه یک–به–یک است و نه پوشا. (به تمرینات $B-2$ و $D-2$ توجه شود.) البته می‌دانیم که نگاشت نمایی برای دستهٔ وسیعی از گروههای لی پوشا است. به عنوان مثال در فصل ۴ نشان داده خواهد شد که این ویژگی برای کلیهٔ گروههای لی فشرده برقرار است.
اما، شرط پوشا بودن نگاشت نمایی $\exp : \mathfrak{g} \to G$ معادل با این خاصیت است که هر عضو در $G$ واقع در (تصویر) یک زیر گروه ۱–پارامتری می‌باشد. در حالت کلی زیر گروههای ۱–پارامتری (به عنوان زیر مجموعه‌هایی از گروه لی) بسته نیستند، اما در مورد گروههای تیوبی $T^n$ که $n > 1$ چنین است. (به تمرین $B-2$–(۱) توجه شود.) بعلاوه لزومی ندارد که توپولوژی القائی از گروه لی بر یک زیر گروه ۱–پارامتری مفروض یکی باشد، و یا حتی با این توپولوژی تشکیل یک گروه لی دهد. (به تمرین $E-2$ توجه شود.) اهمیت زیر گروههای ۱–پارامتری در مطالعهٔ گروههای لی فوق تصور است، حتی در مورد دسته‌ای وسیع‌تر از گروههای توپولوژی، یعنی گروههای موضعاً فشرده، اطلاعات فوق‌العاده وسیعی از گروه

[۶] with no small subgroups

را از مطالعهٔ زیر گروههای ۱-پارامتری (پیوستهٔ) آن می‌توان کسب نمود. (به قضیهٔ (۹.۱) و بخش ۲۵ از کتاب هویت و روز [۳۰] توجه شود.)

**۱۶.۲.۲ حاصلضرب مستقیم گروههای لی.** فرض کنید $\{G_j \mid j \in J\}$ خانواده‌ای غیر تهی از گروههای توپولوژی است؛ حاصلضرب دکارتی $G_j$ ها به همراه توپولوژی حاصلضربی و ساختار گروه حاصلضربی، را با نماد $\Pi_{j\in J}G_j$ نشان می‌دهیم. در این صورت $\Pi_{j\in J}G_j$ گروه توپولوژی است (به (۶.۲) از کتاب هویت و روز [۳۰] توجه شود) و آن را **حاصلضرب مستقیم $G_j$ ها**[۷] می‌نامیم. بعلاوه فرض کنید که به ازای هر $j \in J$ ای $G_j$ گروه لی غیر بدیهی باشد. در صورتی که $J$ متناهی باشد، آنگاه با تعمیم تمرین $J-2$ می‌توان نشان داد که حاصلضرب مستقیم آنها نیز گروه لی است. اما چنانچه $J$ نامتناهی باشد، می‌توان نشان داد که هر همسایگی از عنصر همانی در حاصلضرب گروههای لی دارای یک زیر گروه غیر بدیهی می‌باشد. با ترکیب این حکم و نیز ۱۴.۲.۲ می‌توانیم بنویسیم:

**گزاره.** اگر $\Pi_{j\in J}G_j$ خانواده‌ای غیر تهی از گروههای لی غیر بدیهی باشد، آنگاه حاصلضرب مستقیم آنها وقتی و تنها وقتی گروه لی است که $J$ متناهی باشد.

## بخش ۳.۲ همومورفیسمِ گروههای لی

اگر $G$ و $H$ گروه لی و $f: G \to H$، آنگاه در صورتی $f$ را یک **همومورفیسمِ لی**[۸] گوئیم که اولاً به عنوان نگاشتی بین گروههای مجرد، همومورفیسم باشد و در ثانی به عنوان نگاشتی بین منیفلدها، تحلیلی باشد. مهمترین حکم این بخش آن است که هر همومورفیسم پیوستهٔ بین گروههای لی، همومورفیسم لی است و بنابراین هر ایزومورفیسم توپولوژی یک ایزومورفیسم لی می‌باشد.

**۱.۳.۲ قضیه.** فرض کنید $G$ و $H$ گروه لی‌اند، در این صورت هر همومورفیسم پیوستهٔ $f: G \to H$ تحلیلی است.

برهان: اول از همه یادآور می‌شویم که کافی است تحلیلی بودن $f$ را تنها در یک همسایگی از عنصر همانی بررسی کنیم. فرض کنیم $\mathfrak{h}$ جبر لی $H$ باشد. اساس اثبات بیان $f$ بر حسب توابع تحلیلی به شکل $t \mapsto \exp(tY)$ است، که $Y \in \mathfrak{h}$. این مطلب را ابتدا برای $G = \mathbb{R}$ و سپس برای حالت کلی اثبات می‌کنیم.

(۱) فرض کنیم $G = \mathbb{R}$. فرض کنیم $U$ همسایگی باز و محدبی از $0 \in \mathfrak{h}$ است که $\exp$ بر آن دیفیومورفیسم می‌باشد. به ازای هر $x \in \exp(\frac{1}{2}U)$ ای یک $y$ منحصر بفرد در $\exp(tY)$ وجود دارد به گونه‌ای که $y^2 = x$. (چنین $y$ ای چیزی جز $\exp(X/2)$ نیست، که $X \in \frac{1}{2}U$ و $\exp(X) = x$.) به دلیل پیوستگی $f$، $\epsilon > 0$ ای می‌توانیم بیابیم که

$$f(t) \in \exp\left(\frac{1}{2}U\right) \qquad \text{به ازای هر } t \text{ که } |t| < \epsilon$$

[۷] direct product of the $G_j$
[۸] Lie homomorphism

در این صورت $f(\epsilon) \in \exp(\frac{1}{2}U)$ و لذا $X \in \frac{1}{2}U$ منحصر بفردی وجود دارد که $f(\epsilon) \in \exp(X)$. بعلاوه $f(\epsilon/2)$ ریشهٔ منحصر بفرد $f(\epsilon)$ در $\exp(\frac{1}{2}U)$ می‌باشد و همچنین $f(\epsilon/2)\exp(X/2)$. به کمک استقراء نتیجه می‌گردد که

$$f\left(\frac{\epsilon}{2^n}\right) = \exp\left(\frac{1}{2^n}X\right) \qquad \text{به ازای هر } n \in \mathbb{N} \text{ ای}$$

و بنابراین،

$$\text{به ازای هر } m \in \mathbb{N} \text{ که } 0 < m < 2^n$$
$$f\left(\frac{m\epsilon}{2^n}\right) = \exp\left(\frac{m}{2^n}X\right)$$

با توسیع این فرمول به کمک پیوستگی تابع $f$، نتیجه می‌گردد که به ازای هر عدد حقیقی $t$ صادق در $|t| \leq 1$ داریم

$$f(t\epsilon) = \exp(tX)$$

حال تحلیلی بودن $f$ را از تحلیلی بودن زیر گروه ۱-پارامتری نظیر به $X \in \mathfrak{h}$ نتیجه می‌گردد (قضیهٔ ۱۰.۲.۲).

(۲) اکنون حالت کلی که در آن $G$ و $H$ گرو لی دلخواهند را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم میدانهای برداری $X_1$، . . . و $X_n$ پایه‌ای برای $\mathfrak{g}$ تشکیل می‌دهند. هر یک از نگاشتهای $t \mapsto f(\exp(tX_j))$ هوموروفیسمس پیوسته از $\mathbb{R}$ بتوی $H$ است و در نتیجه بنا به استدلال بالا تحلیلی هستند. بنابراین هر یک از اینها یک زیر گروه ۱-پارامتری از $H$ هستند، و لذا بنابه قضیهٔ ۱۰.۲.۲، اعضاء $Y_1$، . . . و $Y_n$ از $\mathfrak{h}$ به گونه‌ای وجود دارند که

$$\exp(tY_j) = f(\exp(tX_j)) \qquad \text{به ازای هر } t \in \mathbb{R} \text{ ای}$$

نگاشت $F : \mathbb{R}^n \to G$ را به صورت

$$F(t_1, \cdots, t_n) = \exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_nX_n)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $f \circ F$ تحلیلی است، زیرا آن را به شکل

$$(f \circ F)(t_1, \cdots, t_n) = \exp(t_1Y_1)\cdots\exp(t_nY_n)$$

می‌توان نوشت. فرض کنیم $e_j$ $n$-تایی مرتبی باشد که درآیهٔ $n$ ام آن یک و سایر درآیه‌های آن صفر می‌باشد؛ در این صورت

$$F_{*,0}[i, e_j]_0 = \exp_{*,0}[i, X_j]_0 = [i, X_j]_0$$

آخرین تساوی از این نکته نتیجه می‌گردد که در اثبات قضیهٔ ۱۲.۲.۲ نشان دادیم که $\exp_{*,0}$ نگاشت همانی است. بنابراین $F_{*,0}$ هر پایهٔ از فضای برداری $n$-بعدی $\mathbb{R}^n$ را به پایه‌ای برای فضای برداری $n$-بعدی

$\mathfrak{g}$ می‌نگارد و در نتیجه ایزومورفیسمی خطی می‌باشد. بنابراین قضیهٔ نگاشت وارون را می‌توان بکار برد (به قضیهٔ ۱۱.۲.۲) و نتیجه گرفت که یک همسایگی باز $V$ از $0 \in \mathbb{R}$ طوری یافت می‌گردد که $F$ بر آن دیفئومورفیسم می‌باشد. بنابراین بر $F(V)$ می‌توانیم بنویسیم $f = (f \circ F)F^{-1}$، که $F^{-1}$ نمایشگر نگاشت تحلیلی وارون موضعی $F$ است. بنابراین، همان طوری که انتظار می‌رفت، $f$ در یک همسایگی از عنصر همانی تحلیلی است.□

**۲.۳.۲ نتیجه.** هر ایزومورفیسم توپولوژی $f : G \to H$ بین دو گروه لی $G$ و $H$، ایزومورفیسم لی است.

برهان: کافی است که حکم بالا را در مورد $f$ و $f^{-1}$ بکار گیریم. □

**۳.۳.۲ ساختار منیفلدی گروه لی.** به یاد داریم که وقتی تعریف گروه لی را مطرح می‌نمودیم، **وجود** اطلس تحلیلی سازگار را فرض کردیم؛ در حالی مشاهده نمودیم که در احکام بالا عملاً هیچ ساختار بخصوصی بر گروه لی مشخص نمی‌شد. به همین جهت سخن گفتن از جبر لی یک گروه لی مفروض $G$ ابهام بر انگیز است و لازم است تا حتماً از اصطلاح جبر لی نظیر به اطلس تحلیلی مشخص شده بر گروه لی $G$ سخن گفت. همان طوری که در ادامهٔ تعریف ۱.۲.۲ ذکر گردید، نکته‌ای که باعث رفع این ابهام می‌گردد آن است که به هر گروه لی مفروض یک و تنها یک اطلس تحلیلی نظیر می‌گردد. اکنون وقت آن فرا رسیده است که این مطلب را دقیقاً اثبات نموده (و بنابراین یکتایی جبر لی متناظر به یک گروه لی را اثبات کنیم).

اگر $M$ یک فضای توپولوژی به همراه دو اطلس تحلیلی $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ و $\{\psi_\beta \mid \beta \in B\}$ باشد، در این صورت هنگامی می‌گوئیم این دو اطلس **هم‌ارز** هستند که به طور طبیعی یک نگاشت نشانندهٔ تحلیلی $\lambda : (M, \{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}) \to (M, \{\psi_\beta \mid \beta \in B\})$ طوری وجود داشته باشد که وارون آن موجود و تحلیلی است. در چنین حالتی به ازای هر $p \in M$، نگاشت $\lambda_{*,p}$ به طور طبیعی یک ایزومورفیسم خطی بین $T_p(M, \{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\})$ و $T_p(M, \{\psi_\beta \mid \beta \in B\})$ تعریف می‌کند، و نتیجتاً $\lambda_*$ تناظری یک–به–یک بین $T(M, \{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\})$ و $T(M, \{\psi_\beta \mid \beta \in B\})$ برقرار می‌کند. (درواقع، وقتی که کلافهای مماس با ساختار منیفلدی تحلیلی مشروح در ۳.۲.۱ همراه می‌گردند، هر دو نگاشت $\lambda_*$ و $\lambda_*^{-1}$ تحلیل‌اند.)

حال اگر به حالت گروههای لی باز گردیم و $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ و $\{\psi_\beta \mid \beta \in B\}$ دو اطلس تحلیلی سازگار بر گروه لی مفروض $G$ باشند، در این صورت نگاشت نشانندهٔ بدیهی $\mathrm{Id}_M : M \to M$ یک ایزومورفیسم توپولوزیک است و بنابراین (مطابق نتیجهٔ ۲.۳.۲) یک ایزومورفیسم لی می‌باشد؛ پی بخصوص یک نگاشت تحلیلی است و بنابراین دو اطلس داده شده هم‌ارزند. در نتیجه جبرهای لی معرفی شده توسط آن دو اطلس به عنوان فضاهای برداری ایزومورفند و به سادگی می‌توان نشان داد که به عنوان جبرهای لی نیز ایزومورف می‌باشند (به تمرین $J-2$ توجه شود). بنابراین، به هر گروه لی مفروض در حد ایزومورفیسم تنها یک جبر لی نظیر می‌گردد.

اما، وقتی و تنها وقتی دو اطلس تحلیلی مفروض هم‌ارزند که اطلسهای ماکسیمال تحلیلی یکسانی را تولید کنند. بعلاوه، اطلس تحلیلی ماکسیمال تولید شده توسط یک اطلس تحلیلی سازگار مفروض بر یک گروه توپولوژی مفروض $G$، خود نیز سازگار می‌باشد و عبارت است از اجتماع همهٔ اطلسهای تحلیلی سازگار موجود بر آن گروه توپولوژی $G$. (این احکام را اثبات کنید.) بنابراین هر گروه توپولوژی مفروض حداکثر یک اطلس تحلیلی ماکسیمال سازگار می‌پذیرد.

**۴.۳.۲ گزاره.** فرض کنید $G$ گروه لی و $U$ همسایگی بازی از $0 \in \mathfrak{g}$ است که نگاشت نمایی بر آن همیومورفیسم تحلیلی می‌باشد. در این صورت $\exp|_U$ عضوی از اطلس تحلیلی ماکسیمال سازگار بر $G$ است. (چارت $\exp|_U$ را **چارت نرمال حول** $e \in G$[۹] و یا **چارت متعارف حول** $e \in G$[۱۰] می‌نامند.)

برهان: فرض کنید $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ یک اطلس تحلیلی سازگار و دلخواه بر $G$ است. بنابه تعریف اطلس ماکسیمال در ۶.۱.۱ همهٔ آنچه که می‌باید نشان دهیم این است که به ازای هر $\alpha$ ای نگاشتهای $\varphi_\alpha^{-1} \circ \exp$ و $\exp^{-1} \circ \varphi_\alpha$ بر دامنهٔ تعریفشان تحلیلی‌اند. که این خود چیزی جز همیومورفیسم تحلیلی بودن $\exp$ بر $U$ نیست.□

**۵.۳.۲ مثال.** این بخش را با ارائهٔ مثالی از دو اطلس تحلیلی غیر همارز به پایان می‌بریم. منیفلدهای $(\mathbb{R}, \{i\})$ و $(\mathbb{R}, \{\varphi\})$ را در نظر بگیرید که $i$ نگاشت همانی بر $\mathbb{R}$ و $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و یک همیومورفیسم غیر دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد. (مثلاً، می‌توان فرض نمود که $\varphi(x) = x$ به ازای $x < 0$ و در غیر این صورت $\varphi(x) = 2x$.) در این صورت هر دو منیفلد ارائه شده تحلیلی‌اند ولی نشانندهٔ طبیعی بین آنها غیر تحلیلی است.

## بخش ۴.۲ گروه خطی عمومی

فرض کنید $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ نمایشگر مجموعهٔ همهٔ ماترسیهای حقیقی $n \times n$ همراه با عمل ضرب

$$[M, N] = MN - NM \tag{۱۵.۲}$$

است و $\mathfrak{o}(n)$ زیر مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای متقارن کج در $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ می‌باشد (یعنی،

$$\mathfrak{o} = \{M \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid M^T = -M\},$$

که $M^T$ نمایشگر ترانهاد $M$ است.) که این نیز با ضرب (۱۵.۲) توائم می‌باشد. از قرار $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ و $\mathfrak{o}(n)$ جبر لی‌اند؛ هدف اصلی از این بخش نشان دادن این مطلب است که یک ایزومورفیسم لی کانونی بین $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ (و بترتیب $\mathfrak{o}(n)$) و جبر لیِ گروه لی $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ (و بترتیب جبر لیِ گروه لی $O(n)$) وجود دارد.

**۱.۴.۲ نگاشت نمایی سری توانی.** فرض کنید $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ با نرم

$$M \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |m_{ij}|^2}$$

همراه شده باشد، که $m_{ij}$ درآیهٔ $(i, j)$ ام ماتریس $M$ است. به این ترتیب $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ به یک فضای باناخ تبدیل می‌گردد. به سادگی می توان نشان داد که اگر $M \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$، و به ازای هر $m$ ای تعریف کنیم

$$A_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} M^j$$

---

[۹] normal chart about e in G

[۱۰] canonical chart about e in G

آنگاه دنبالهٔ $\{A_m\}_{m=0}^{\infty}$ در $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ کوشی است. در نتیجه این دنباله دارای یک نقطهٔ حدی در $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ است، که آن را با نماد $e^M$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر

$$e^M = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} M^j$$

(توجه شود $\|e^M\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|M\|^j = e^{\|M\|}$، که $\|.\|$ نمایشگر نرم تعریف شده در بالا برای $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ می‌باشد.) چون عمل ترکیب در $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ پیوسته می‌باشد، بنابراین

$$\begin{aligned} e^M e^{-M} &= \left(I + M + \frac{1}{2}M^2 + \cdots\right) \times \left(I - M + \frac{1}{2}M^2 - \cdots\right) \\ &= I + A(1)M + A(2)M^2 + \cdots \end{aligned}$$

هرگاه $m$ عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه $A(m)$ صفر است، زیرا

$$A(m) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{(m-1)!} \frac{(-1)^j}{j!} = (m!)^{-1}(1 + (-1))^m = 0$$

بنابراین $e^M e^{-M} = I$، عملگر همانی است و لذا $e^M$ عضوی از $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ می‌باشد. بعلاوه، وقتی $M$ به $\mathfrak{o}(n)$ تحدید می‌گردد، $(e^M)^{-1} = e^{-M} = e^{M^T} = (e^M)^T$ (آخرین تساوی به راحتی از تمرین $C - 2$ (۵) نتیجه می‌گردد) و بنابراین $e^M$ متعامد است. مطالب بالا را به صورت زیر می‌توان جمعبندی نمود:

**۲.۴.۲ گزاره.** اگر $M \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$، آنگاه $e^M \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ و اگر $M \in \mathfrak{o}(n)$، آنگاه $e^M \in O(n)$.

به زیر گروههای ۱-پارامتری باز گشته، و به ازای هر $M \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ ای هومورفیسمی به شکل

$$\theta_M : \mathbb{R} \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}), \qquad t \mapsto e^{tM} \tag{۱۶.۲}$$

تعریف می‌کنیم. اکنون قضیهٔ ۱.۳.۲ اذعان می‌دارد که برای تحقیق تحلیلی بودن $\theta_M$ کافی است که پیوستگی آنرا نشان دهیم و این نیز تنها در عنصر همانی $\mathbb{R}$ (یعنی $0$) لازم می‌باشد. برای این منظور فرض کنیم $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی با $|t_m| \leq 1$ همگرا به صفر است. در این صورت

$$\begin{aligned} \left\|e^{t_m M} - I\right\| &= \left\|t_m\left(M + \frac{1}{2}t_m M + \cdots\right)\right\| \\ &\leq |t_m|\left[\|M\| + \frac{1}{2}\|M\| + \cdots\right] && \text{زیرا } |t_m| \leq 1 \\ &\leq |t_m|\left(e^{\|M\|} - I\right) \to 0 && \text{وقتی } m \to \infty \end{aligned}$$

بنابراین $\theta_M$ پیوسته و لذا تحلیلی است، در نتیجه $\theta_M$ یک زیر گروه ۱-پارامتری از $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ می‌باشد. اما در قضیهٔ ۱۰.۲.۲ چنین زیرگروههایی را بر حسب جبر لی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ و تابع نمایی (-گروه لی) توصیف

نمودیم، و در قضیهٔ ۳.۲.۲ بر حسب میدانهای برداری ناوردای چپ (–ِ گروه لی) توصیف نمودیم. مثلاً، از قضیهٔ ۳.۲.۲ نتیجه می‌گردد که به هر $M \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ ای یک میدان برداری ناوردای چپ $X_M$ طوری نظیر می‌گردد که

$$(\theta_M)_{*,0}[i,1]_0 = X_M(1). \qquad (۱۷.۲)$$

حال سمت چپ این تساوی را بررسی می‌کنیم. این کار ساده‌ای است زیرا $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ با زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^{n^2}$ همیومورف است (به تمرین قسمت (ب) از ۲.۱.۲ توجه شود) و چارت همانی برای تشکیل یک اطلس مناسب می‌باشد. در این حالت به ازای هر $s \in \mathbb{R}$ ای بجای $(\theta_M)'|_0(s)$ می‌توانیم بنویسیم $(\theta_M)_{*,0}(s)$. اکنون

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\|\theta_M(0+s)-\theta_M(0)-sM\|\cdot|s|^{-1} &= \\ = \qquad \lim_{s\to 0}\left\|\left(sM+\frac{1}{2}(sM)^2+\cdots\right)-sM\right\|\cdot|s|^{-1} &= 0\end{aligned}$$

در نتیجه، بنابه تعریف (۲.۱) مشتق، داریم $(\theta_M)'(0) = M$. اکنون از فرمول (۱۷.۲) نتیجه می‌گردد که $X_M = M$، یا به بیان دقیق‌تر اینکه:

$$X_M(1) = [i,M]_I \quad \text{به ازای هر } M \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \text{ ای} \qquad (۱۸.۲)$$

که $i$ تحدید چارت همانیِ $\mathbb{R}^{n^2}$ بر $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ می‌باشد. (لازم به ذکر است که به طرق مختلفی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ را به شکل همیومورف در $\mathbb{R}^{n^2}$ می‌توان نشاند؛ و به همین سبب می‌توان $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ را به عنوان زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^{n^2}$ تصور نمود.) نظر به این محاسبات، فرمول (۱۸.۲) نشان می‌دهد که هر عضو $M \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ ای موجب عنصری $[i,M]_I$ در جبر لی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ می‌گردد. اما، بعد $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ به عنوان گروه لی برابر با $n^2$ است (به تمرین $1-C$ (۲) توجه شود) که در نتیجه برابر بعد $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ می‌باشد؛ بنابراین

**۳.۴.۲ حکم.** تناظر $M \mapsto [i,M]_I$ یک تناظر دوسویی خطی از $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ به جبر لی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ می‌باشد.

اولین مرحله در تشریح ضرب لی موجود در جبر لیِ $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$، بررسی دقیق‌تر میدانهای برداری ناوردای چپ $X_M$ (که $M \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$) است که قبلاً در فرمول (۳.۴.۲) بیان گردیدند. چون هر چنین میدان برداری‌ای ناوردای چپ است، به ازای هر $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ ای داریم

$$\begin{aligned}X_M(A) &= (L_A)_{*,I}X_M(I) \\ &= (L_A)_{*,I}[i,M]_I && \text{بنابه فرمول (۱۸.۲)} \\ &= [i,(L_A)'|_I(M)]_A \\ &= \left[i,\lim_{\epsilon\to 0}(A(I+\epsilon M)-AI)\epsilon^{-1}\right]_A \\ &= [i,AM]_A\end{aligned}$$

فرض کنیم $\rho = \rho(A)$ نمایشگر تصویر $\rho : [i,B]_A \mapsto B$ باشد. در این صورت از تعریف ۱.۳.۲ نتیجه می‌گردد که ضرب لی دو میدان برداری $X_M$ و $X_N$ (که $M,N \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$) در نقطهٔ $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ عبارت است از

$$\begin{aligned}
[X_M, X_N](A) &= [i, (\rho X_N)'|_A(\rho X_M)(A) - (\rho X_M)'|_A(\rho X_N)(A)]_A \\
&= [i, (\rho X_N)'|_A(AM) - (\rho X_M)'|_A(AN)]_A \\
&= \left[i, \lim_{\epsilon\to 0}\left\{(\rho X_N((A+\epsilon AM) - \rho X_N(A))\epsilon^{-1}\right\} - \cdots\right]_A \\
&= \left[i, \lim_{\epsilon\to 0}\left\{((A+\epsilon AM)N - AN)\epsilon^{-1}\right\} - \cdots\right]_A \\
&= [i, A(MN-NM)]_A \\
&= X_{MN-NM}(A)
\end{aligned}$$

بنابراین $[X_M, X_N] = X_{MN-NM}$. با ترکیب این مطلب با ۳.۴.۲ و تعریف ضرب لی در جبر لی یک گروه لی، از (۱۴.۲) نتیجه می‌گیریم که:

**۴.۴.۲ قضیه.** تناظر $M \mapsto [i,M]_I$ تناظری دوسویی و خطی از جبر لی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ روی جبر لی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ است که ضرب لی را حفظ می‌کند.

**۵.۴.۲ تعریف.** یک تناظر یک-به-یک (یا دوسویی) از یک جبر لی به جبر لی دیگر که بتواند ضرب لی را حفظ نماید، **هومورفیسم لی** (یا **ایزومورفیسم لی**) می‌نامند.

بسته به این اصطلاح می‌توان گفت که قضیهٔ ۴.۴.۲ اذعان می‌دارد که $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ و جبر لی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ به شکل بسیار ساده‌ای (به عنوان جبر لی) ایزومورفند.

در مورد جبر لی $O(n)$ چه می‌توان گفت؟ چون $O(n)$ زیر گروه بسته‌ای از گروه لی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ می‌باشد، پس گروه لی است (البته، این مطلب را در فصل بعدی اثبات خواهیم نمود). اما بسته بودن زیر گروه $O(n)$ موجب می‌گردد تا چارت همانی در مورد آن کارایی نداشته باشد. این مشکل را به شکل زیر مرتفع می‌کنیم: فرض کنیم $j : O(n) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ نمایشگر نگاشت احتوای طبیعی $O(n)$ در $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ باشد؛ در این صورت $j$ پیوسته است، و بنابراین تحلیلی می‌باشد. در نتیجه بنابه تمرین $J-2$ و $H-2$ (۲)، $j_{*,I}$ یک هومورفیسم لی از جبر لی $O(n)$ بتوی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ است. (توجه شود که نظر به قضیهٔ ۴.۴.۲ جبر لی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ را با نماد $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.) پس، با کمک نگاشتهای $j$ و $J_{*,I}$ نیازی به داشتن چارتهای خود $O(n)$ نیست.

به ازای هر $M \in \mathfrak{o}(n)$ ای نگاشت $t \mapsto e^{tM}$ یک زیر گروه ۱-پارامتری از $O(n)$ است (این مطلب از ۲.۴.۲ و استدلال آمده در پی آن نتیجه می‌گردد) و بنابراین، از فرمولهای (۱۷.۲) و (۱۸.۲) نتیجه می‌گردد که یک میدان برداری ناوردای چپ منحصر بفرد $Y_M$ بر $O(n)$ طوری وجود دارد که

$$Y_M(I) = (j_{*,I})^{-1}[i,M]_I. \tag{۱۹.۲}$$

بنابراین، هر $M \in O(n)$ ای باعث یک عضو $(j_{*,I})^{-1}[i,M]_I$ در جبر لی $O(n)$ می‌گردد. این تناظر خطی است و با محاسبهٔ بعد دو طرف می‌شود نشان داد که همهٔ اعضاء در جبر لی $O(n)$ به این شکلند.

هر عضو $M=(m_{ij})$ از این فضای برداری را با دقیقاً مشخص نمودن هر یک از درآیه‌هایش $m_{ij}$ که $1 \leq i < j \leq n$ (اینها دقیقاً عبارتند از اعضاء واقع در بالای قطر اصلی ماتریس $M$) می‌توان معرفی نمود. جمعاً $n(n-1)/2$ تا از زوجهای $(i,j)$ صادق در شرط $1 \leq i < j \leq n$ وجود دارد و بنابراین بعد $O(n)$ دقیقاً برابر با $n(n-1)/2$ است. ملاحظه می‌گردد که بعد $O(n)$ به عنوان زیر گروهی از گروه لی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$، از بعد آن کمتر است؛ دلیل این امر وجود روابط تعامد در $O(n)$ است که موجب کاسته شدن از درجهٔ آزادی در انتخاب اعضاء آن می‌گردد. درواقع، وقتی و تنها وقتی $M=(m_{ij})$ متعامد است که به ازای هر $i,j \in \{1,\cdots n\}$ ای $\sum_{k=1}^{n} m_{ij}m_{jk} = \delta_{ij}$. (که در اینجا $\delta_{ij}$ نمایشگر دلتای رونکر است.) این مجموع‌ها نسبت به $i$ و $j$ متقارنند و لذا کافی است آنهایی را در نظر بگیریم که از زوجهای $(i,j)$ صادق در $1 \leq i \leq j \leq n$ نتیجه می‌گردند. جمعاً $n(n+1)/2$ تا از چنین زوجهایی وجود دارد، و بنابراین بعد $O(n)$ برابر است با $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$، که درست همان بعد $\mathfrak{o}(n)$ می‌باشد.

اکنون از تساوی بعد (جبر لی) $O(n)$ و $\mathfrak{o}(n)$، رابطهٔ (۱۹.۲)، اینکه $j_{*,I}$ هومورفیسم لی است و قضیهٔ ۴.۴.۲ می‌توان استنباط نمود که:

**۶.۴.۲ نتیجه.** تناظر $M \mapsto (j_{*,I})^{-1}([i,M]_I)$ یک ایزومورفیسم لی از $\mathfrak{o}(n)$ بروی جبر لی $O(n)$ می‌باشد.

گروه $O(n)$ مثالی بسیار مناسب از یک گروه لی فشرده است، زیرا در فصل ۶ نشان داده خواهد شد همهٔ گروههای لی فشرده زیر گروههای بسته‌ای از یک $O(n)$ ای هستند و بنابراین جبر لی آنها با زیر جبرهای لی از یک $\mathfrak{o}(n)$ ای ایزومورفند.

هرگاه $M \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$، آنگاه $[i,M]_I$ عنصری در جبر لی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ است که به زیر گروه ۱−پارامتری $\theta_M$ از $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ نظیر می‌گردد، که در (۱۶.۲ ذکر گردید). بنابراین $\exp([i,M]_I) = \theta_M$ و در نتیجه

$$\exp([i,M]_I) = e^M \tag{۲۰.۲}$$

بعلاوه، اگر $G$ زیر گروه بسته‌ای از $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ باشد، آنگاه $j_{*,I}$ یک هومورفیسم لی از $\mathfrak{g}$ به $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ (یا به شکل دقیق‌تر، بتوی جبر لی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$) می‌باشد و بنابراین به ازای هر $M \in j_{*,I}(\mathfrak{g})$ ای

$$\exp \circ (j_{*,I})^{-1}(M) = e^M. \tag{۲۱.۲}$$

(در صورتی که تمرین $F-2$ را حل کنید، به سادگی می‌توان این تساوی را اثبات نمود.)

## بخش ۵.۲ یادداشت

ریاضی‌دان نروژی **سوفس لی**[۱۱] (۱۸۴۲ تا ۱۸۹۹) در اواخر قرن نوزدهم، هنگامی که به مطالعهٔ دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل مشغول بود، به اشیائی برخورد نمود که امروزه آنها را به افتخار وی، گروه لی می‌نامند. توجه لی به تبدیلاتی از فضای اقلیدسی حقیقی معطوف بود که به یک معادهٔ دیفرانسیل بخصوص مربوط بودند، و ترکیب هر دو چنین تبدیلی، تبدیل سومی می‌شد که باز هم به همان معادله دیفرانسیل مرتبط بود و

[۱۱] Sophus Lie

به شکل دیفرانسیل‌پذیر با دو تبدیل نخست در ارتباط بود. (برای مشاهدهٔ ترجمه‌ای از برخی از کارهای وی به [۴۲] مراجعه شود.) بتدریج مفهوم مجرد گروه لی گسترش یافت و در سال ۱۹۳۵ میر و تامس [۴۵] به کمک منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر، گروه‌های توپولوژی و جبر های لی موفق به مطالعهٔ فراگیر آنها شدند.

در بررسی تأثیر تبدیلات هنگامی که بر یک بازهٔ زمانی بینهایت کوچکی عمل می‌کردند، مفهوم زیر گروه ۱−پارامتری پدیدار گردید. خود این تبدیل بینهایت کوچک باعث تولید یک زیر گروه ۱−پارامتری منحصر بفرد می‌گردد. یا به اصطلاح ما، هر زیر گروه ۱−پارامتری (هموار) از یک گروه لی، دارای بردار مماس منحصر بفردی در $e$ می‌باشد؛ این بردار مماس به جبر لی $\mathfrak{g}$ نظیر به گروه لی $G$ تعلق دارد. از سوی دیگر هر عضو $X$ در $\mathfrak{g}$ یک بردار مماس به عنصر همانی است و (بی هیچ زحمتی) آنرا به صورت یک خط بینهایت کوچک آغاز شده از $e$ در $G$ می‌توان تصور نمود. اگر آن سوی این خط یا منحنی را $\delta x$ بگیریم، و اگر فرض کنیم که زمان نظیر به این نقطه در امتداد این خط برابر $\delta t$ است، آنگاه منحنی تولید شده توسط $\delta x$ عبارت از برد یک زیر گروه ۱−پارامتری در $G$ خواهد بود. بعلاوه فرض کنیم که $\delta x$ عنصر نظیر به $Y \in \mathfrak{g}$، مثل تناظر $\delta x$ با $X$ باشد. در این صورت عنصر بینهایت کوچک $\delta x^{-1} \cdot \delta y^{-1} \cdot \delta x \delta y$ موجب تولید زیر گروه ۱−پارامتری سومی در $G$ می‌گردد . . . و $[X, Y]$ مماس بر این زیر گروه در عنصر همانی می باشد! در قسمت ۹.۲.۳ اثبات برخی از این مطالب آورده شده است. (مطالعهٔ کار رابینسون در ارتباط با آنالیز غیر استاندار (یعنی، آنالیز در ارتباط با بینهایت کوچک‌ها و بینهایت بزرگ‌ها) می تواند در توضیح و فهم بهتر این روند مفید باشد. به بخشهای ۸.۳ و ۸.۴ از کتاب رابینسون [۵۴] مراجعه شود.) در برخی از نوشته‌ها جبر لی یک گروه لی را گروه بینهایت کوچک یا جبر بینهایت کوچک آن گروه می‌نامند.

همان طوری که در بخش آخر دیدیم، نگاشت نمایی یک گروه لی exp، تعمیم طبیعی سری توان تابع نمایی معمولی $e^x$ است. تابع $e^x$ سوای گروه‌های لی، نقش مهمی را در مطالعهٔ نیم گروه‌ها و عملگرها به عهده دارد. مثلاً، هر زیر نیم زیر گروه ۱−پارامتری (که دارای شرایط پیوستگی مناسبی باشد) از یک عملگر کراندار مفروض بر یک فضای باناخ $B$ مفروض، به شکل $t \mapsto e^{tM}$ است که $M$ نیز یک عملگر کراندار بر $B$ است. (برای مشاهدهٔ توضیحات بیشتر به بخش ۱ از فصل هشتم کتاب دانفرد و شوارتز [۱۸] مراجعه شود.) در بخش چهارم فصل حاضر، نمونه‌ای از این حکم که در ارتباط بافضاهای باناخ با بعد متناهی است را مشاهده نمودید. همچنین توجه شود که دلیل استفاده از exp این بود که هر زیر گروه ۱−پارامتری از یک گروه لی مفروض $G$، به ازای یک $X \in \mathfrak{g}$ ای به شکل $t \mapsto \exp tM$ است. (به قضیهٔ ۱۰.۲.۲ توجه شود.)

در ادامه اثبات خواهد شد که قضیهٔ ۱.۳.۲ (که اذعان می‌دارد که هر همومورفیسم پیوسته بین گروه‌های لی، تحلیلی است) بسیار مفید می‌باشد. اخیراً کالمن [۳۶] حکمی را در این ارتباط اثبات نموده است: فرض کنید $G$ یک گروه لی سادهٔ فشرده است. اگر $G'$ گروهی توپولوژی با پایه‌ای شمارا بوده و $\varphi : G \to G'$ ایزومورفیسم جبری (یعنی، بین گروه‌های مجرد) باشد، آنگاه $\varphi$ ایزومورفیسم توپولوژی (یعنی، بین گروه‌های توپولوژی) است. گذشت زمان نشان خواهد داد که این حکم و یا نتایج آن دارای کاربردهای وسیعی خواهند بود.

سرانجام یادآور می شویم که برخی از نویسندگان گروه لی را به صورت گروه توپولوژی‌ای که بر آن یک اطلس هموار ارائه شده است به گونه‌ای که اعمال گروه نسبت به آن هموارند، تعریف می‌کنند. روشن است که هر گروه لی، یک گروه لی هموار می‌باشد. بعلاوه، چنانچه در هر یک از احکام این فصل بجای «تحلیلی»

از «هموار» استفاده گردد، حکم بدست آمده نیز درست می‌باشد و همچنین اثباتها را نیز به همین ترتیب می‌توان بدست آورد. مثلاً، هر میدان برداری ناوردای چپ بر یک گروه لی هموار، هموار است و نگاشت نمایی که نگاشتی از جبر لیِ گروه لی بتوی خود گروه لی می باشد نیز هموار است.

## بخش ۶.۲ تمرینات

$(2-A)$ (۱) توصیفی کلی از کلاف مماس، میدانهای برداری، میدانهای برداری تحلیلی و میدانهای برداری ناوردای چپ $\mathbb{R}$ ارائه دهید.
(۲) گروه دایره $T = U(1)$ را با اطلسی تحلیلی و سازگار هموار نموده و سپس همان پرسشهای قسمت (۱) را در مورد $T$ پاسخ دهید.

$(2-B)$ (۱) نشان دهید که همهٔ زیر گروه‌های ۱-پارامتری تیوب $T^2$ به شکل $t \mapsto (e^{iat}, e^{ibt})$ هستند، که $a, b \in \mathbb{R}$. سپس با بدست آوردن شرط لازم و کافی برای بسته بودن یک زیر گروه ۱-پارامتری از $T^2$ (یعنی، بسته بودن برد به عنوان زیر مجموعه‌ای از یک فضای توپولوژی) نشان دهید که برخی از زیر گروه‌های ۱-پارامتری در $T^2$ بسته نیستند. یعنی، ممکن است زیر گروهی از یک گروه لی وجود داشته باشد که بسته نباشد. بستار زیر گروه‌های ۱-پارامتری غیر بسته در $T^2$ را مشخص کنید.
(۲) نشان دهید که نگاشت نمایی $\exp$ تیوب $T^2$ یک-به-یک است ولی پوشا نیست.

$(2-C)$ فرض کنید $M \mapsto e^M$ نمایشگر نگاشت نمایی سری توانی تعریف شده بر جبر لی $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ باشد، به گونه‌ای که در بخش ۲.۴ تعریف گردید. در صورتی که $M, N \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ و $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$، هر یک از احکام زیر را اثبات کنید:
(۱) $e^{A^{-1}MA} = A^{-1}e^M A$؛
(۲) اگر $x_1$، . . . و $x_n$ بردارهای ویژهٔ نه لزوماً مجزایِ $M$ هستند، در این صورت $e^{x_1}$، . . . و $e^{x_n}$ نیز بردارهای ویژهٔ نه لزوماً مجزایِ $e^M$ هستند؛
(۳) دترمینان $e^M$ برابر $e^{tr(M)}$ است، که $tr(M)$ نمایشگر اثر $M$ (یعنی، مجموع درآیه‌های قطر اصلی آن) می‌باشد؛
(۴) اگر $[M, N] = 0$ آنگاه $e^{M+N} = e^M e^N$؛
(۵) $e^{M^T} = (e^M)^T$؛
(۶) $e^{\bar{M}} = \overline{e^M}$.

$(2-D)$ **گروه خطی خاص.** فرض کنید $(SL)(2, \mathbb{R})$ نمایشگر زیر گروهی از $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ باشد که از ماتریس‌های با دترمینان یک تشکیل می‌گردد؛ در این صورت $SL(2, \mathbb{R})$ زیر گروهی بسته از گروه لی $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ است و بنابراین، خود یک گروه لی است. (به بیان دقیق‌تر، اگر $U$ زیر مجموعه‌ی

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1 - 1| < 1,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R}\}$$

از $\mathbb{R}^3$) باشد و $\varphi$ نگاشت با ضابطهٔ

$$\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \qquad\qquad x_4 = \frac{1 + x_2 x_3}{x_1}$$

در این صورت $\varphi$ همیومورفیسمی از مجموعهٔ باز $U$ بروی مجموعهٔ باز $\varphi(U)$ می‌باشد. نشان دهید که $\varphi$ در شرایط قضیهٔ ۳.۱.۲ صدق می‌کند و بنابراین $SL(2,\mathbb{R})$ گروه لی ۳ بعدب است.)

(۱) نشان دهید که جبر لی $SL(2,\mathbb{R})$ برابر (یعنی، ایزومورف) است با زیر جبر لی از $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ متشکل از همهٔ ماتریسهای با اثر صفر. (راهنمایی: از تمرین $C - 2$ (۳) استفاده کنید.) حکم مشابهی برای $SL(n,\mathbb{R})$ صحیح است.

(۲) نشان دهید که اگر $r > -1$ و $A_r := \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{bmatrix} \in SL(n,\mathbb{R})$ ، آنگاه $A_r$ در برد نگاشت نمایی $\exp_{SL(n,\mathbb{R})}$ قرار ندارد، و بنابراین لزومی ندارد که نگاشت $\exp$ پوشا باشد. (راهنمایی: فرض کنید $M \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ ای وجود داشته باشد که $e^M = A_r$ و سپس از تمرین $C - 2$ (۲) برای رسیدن به یک تناقض استفاده کنید. البته این نشان خواهد داد که $\exp_{\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})}$ پوشا نیست.)

$(2 - E$ نشان دهید که سری توان نمایی $\begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix}$ برابر $\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$ است، و سپس ماتریسهای $2\times 2$ $M$ و $N$ ای را بیابید که $e^M e^N \neq e^{M+N}$.

$(2 - F$ اگر $f : G \to H$ هومورفیسمی تحلیلی بین گروه‌های لی $G$ و $H$ باشد، در این صورت نشان دهید که $f \circ \exp_G = \exp_H \circ f_{*,e}$.

$(2 - G$ فرض کنید $f$، $G$ و $H$ مانند تمرین $F - 2$ باشند. در این صورت نشان دهید که $f_{*,e}$ هومورفیسم لی است. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید که شرط لازم و کافی برای $f_{*,e}(v) = w$ آن است که میدانهای برداری ناوردای چپ نظیر به بردارهای $v$ و $w$ $f-$مرتبط باشند و سپس از لم ۷.۲.۲ استفاده کنید.)

**هومورفیسم‌های موضعی.** نشان دهید که اگر $f$ یک هومورفیسم موضعی باشد، آنگاه هر دو حکم بالا بر یک همسایگی مناسب از $0 \in \mathfrak{g}$ برقرارند. (به تعاریف ۳.۴.۳ توجه شود.)

$(2 - H$ فرض کنید $f$، $G$ و $H$ مانند تمرین $F - 2$ باشند. در این صورت نشان دهید که

(۱) وقتی و تنها وقتی $f$ پوشا است که $f_{*,e}$ باشد (که برای برقراری وارون، فرض همبندی $H$ لازم است.)

(۲) اگر $f$ یک‌-به‌-یک باشد، آنگاه $f_{*,e}$ نیز یک‌-به‌-یک است. (اما، وارون این مطلب در حالت کلی صحیح نیست. مثلاً، فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ و هومورفیسم تحلیلی $f : \mathbb{R} \to T$ را با ضابطهٔ $f(x) = e^{i\alpha x}$ تعریف کنید. روشن است که $f$ یک‌-به‌-یک نیست، ولی وقتی که $f_{*,0}$ را تشریح می‌کنیم، در می‌یابیم که یک‌-به‌-یک نیست. با تمرین $J - 3$ مقایسه شود.)

$I-2$) **گروه آفین عمومی.** (۱) فرض کنید $E$ یک فضای برداری (حقیقی یا مختلط) با بعد متناهی است. مجموعهٔ همهٔ تبدیلات آفین وارن‌پذیر $E$ (یعنی تبدیلات از $E$ به $E$ به شکل $\tau : x \mapsto Ax+a$، که $A\mathfrak{gl}(E)$ و $a \in E$) را با نماد $GA(E)$ نشان می‌دهیم. با نوشتن $\tau$ به شکل $\begin{bmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، نشان دهید که $GA(E)$ زیر گروهی بسته از $\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{R})$ یا $\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C})$ می‌باشد. سپس به کمک قضیهٔ ۱.۳.۳ نشان دهید که $GA(E)$ گروه لی ($n(n+1)$ بعدی) است. این گروه لی را **گروه آفین عمومی** متناظر به $E$ می‌نامند.

(۲) اگر $\{x,y\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^2$ باشد و تعریف کنیم $[x,x]=0$، $[y,y]=0$ و $[x,y]=y$ و سپس آن را با شرط دو خطی بودن و پادمتقارن بودن به کل $\mathbb{R}^2$ تعمیم دهیم، در این صورت نشان دهید که $\mathbb{R}^2$ با این ضرب تشکیل یک جبر لی می‌دهد.

(۳) نشان دهید که در حد ایزومورفیسم، جبر لی تعریف شده در قسمت (۲) تنها جبر لی غیر جابجایی ۲-بعدی می‌باشد. (به تمرین $C-1$ توجه شود.)

(۴) نشان دهید که مؤلفهٔ همانی $GA(\mathbb{R})$ عبارات است از زیر گروه همهٔ تبدیلات به شکل $x \mapsto \alpha x+\beta$ که $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ و $\alpha > 0$. (کلی‌تر اینکه، مؤلفهٔ همانی $GA(n,\mathbb{R})$ عبارات است از زیر گروه همهٔ تبدیلات به شکل $x \mapsto Ax+a$ که $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$، $\det(A)>0$ و $a \in \mathbb{R}^n$. برای مشاهدهٔ این امر ابتدا نشان دهید که مؤلفهٔ همانی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ از همهٔ عملگرهای با دترمینان مثبت تشکیل می‌شود.) مؤلفهٔ همانی $GA(\mathbb{R})$ را با نماد $GA(\mathbb{R})^+$ نشان می‌دهیم. برقراری تمرین $C-1$ را فرض نموده و نشان دهید که جبر لی $GA(\mathbb{R})^+$ و $GA(\mathbb{R})$ (و نیز جبر لی هر گروه لی ۲-بعدی با مؤلفهٔ همانی غیر آبلی دیگری) برابر با جبر لی معرفی شده در قسمت (۲) می‌باشد.

# فصل ۳

# فرمول کمبل-بکیر-هاوسدورف

اطلاعات ما در مورد رابطهٔ بین گروه لی و جبر لیِ آن به کمک فرمولی که به جی. ای. کمبل، اچ. اف. بیکر و اف. هاوسدورف [۱] نسبت داده می‌شود و در دههٔ گذشته تکمیل گردیده است، به شکل قابل توجهی افزایش می‌یابد. فرمول کمبل-بکیر-هاوسدورف (و یا به اختصار فرمول **کبه**) ساختار جبریِ جبر لی $\mathfrak{g}$ یک گروه لی مفروض $G$ را به کمک نگاشت نمایی متناظر به آن گروه لی $G$ هویدا می‌سازد. به بیان ساده، این فرمول می‌گوید که اگر $X$ و $Y$ در یک همسایگی باز مناسب از $0 \in \mathfrak{g}$ قرار داشته باشند، آنگاه

$$\begin{aligned}\exp(X)\exp(Y) &= \exp(Z)\\ &= \exp\left(X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\text{جملات مرتبهٔ بالاتر}\right).\end{aligned}$$

در این فصل ابتدا نمونه‌ای از فرمول کبه که قابل استفاده برای جبرهای لی مجرد است را فرض نموده و سپس به کمک آن نسخه‌ای از آن برای گروه‌های لی می‌سازیم. در ادامه دو کاربرد مهم از آن را ذکر خواهیم نمود. اولین آنها این است که هر زیر گروه بستهٔ یک گروه لی، خود یک گروه لی است و دومین آنها این است که اگر $G$ و $H$ گروه لی بوده و $F$ همومورفیسم لی از $\mathfrak{g}$ بتوی $\mathfrak{h}$ باشد، آنگاه یک همومورفیسم موضعی $f$ بر همسایگی بازی از $e \in G$ و بتوی $H$ وجود خواهد داشت به گونه‌ای که $f_{*,e} = F$. بعلاوه، مختصری نیز در مورد گروه‌های لی همبند ساده و گروه‌های پوششی بحث خواهد شد.

## بخش ۱.۳ فرمول کبه برای جبر لی

در این بخش بیانی نسبتاً عجولانه از پیش زمینه‌ها و موقعیت مفهومی فرمول کبه برای جبرهای لی را مطرح می‌کنیم. خوانندهٔ علاقمند می‌تواند برای مشاهدهٔ بحث بیشتر در خصوص این موضوع به بخش ۵ از فصل ۳ از کتاب جیکوبسن [۳۵] و یا بخش ۵.۱۰ از کتاب مگنوس، کاراس و سولیتار [۴۴] مراجعه

[۱] I. E. Campbel, F. Baker and F. Hausdorff

کند. اثبات این فرمول را نیز می‌توان در آنها یافت زیرا ما تنها صورت آن را بیان نموده و کمی در مورد ان توضیح خواهیم داد.

**۱.۱.۳ تعریف.** بنابه تعریف منظور از یک **جبر** $A$ فضای برداری حقیقی‌ای است به همراه یک ضرب دوخطی شرکت‌پذیر و یکدار. هر جبر یکداری را با تعریف ضرب جدید $[X,Y] = XY - YX$ به یک جبر لی می‌توان تبدیل نمود. **جبر آزاد** $A_r$ تولید شده توسط مجموعهٔ $\{X_j \,|\, j = 1,\cdots,r\}$ را به صورت زوج مرتب $(A,i)$ تعریف می‌کنند که $A$ یک جبر و $i$ نگاشتی یکبیک از $\{X_j \,|\, j = 1,\cdots,r\}$ بتوی جبر $A$ است به گونه‌ای که اگر $\alpha$ نگاشتی دلخواه از $\{X_j \,|\, j = 1,\cdots,r\}$ بتوی جبر لی $B$ باشد، آنگاه یک هومورفیسم جبری منحصر بفرد $\beta : A \to B$ طوری وجود داشته باشد که $\alpha = \beta \circ i$. ($A_r$ را به صورت فضای برداری همهٔ ترکیبات $\mathbb{R}$-خطی و متناهی از اعضای به شکل

$$\{1\} \cup \left\{X_{n_1}^{e_1}\cdots X_{n_k}^{e_k} \,|\, k, e_1,\cdots,e_k \in \mathbb{N}, n_j \in \{1,\cdots,r\},\ n_j \neq n_{j+1}\right\}$$

می‌توان تجسم نمود. در این صورت $i$ به شکل نگاشت احتوای معمولی در خواهد آمد و عمل ضرب نیز به شکل صوری انجام خواهد شد.)

در صورتی که $A_r$ جبر آزاد تولید شده توسط $\{X_1,\cdots,X_r\}$ باشد، آنگاه جبر سری‌های توانی صوری بر حسب $X_j$ ها را با نماد $\bar{A}_r$ نشان خواهیم داد. یعنی، $\bar{A}_r$ مجموعهٔ همهٔ اعضای به شکل

$$a_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i X_i + \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij} X_i X_j + \sum_{i,j,k=1}^{r} a_{ij} X_i X_j X_k + \cdots$$

می‌باشد که $a_0, a_i, a_{ij}, a_{ijk}, \cdots \in \mathbb{R}$ و جمع و ضرب اسکالر به شکل مؤلفه‌ای تعریف می‌شوند، و اگر

$$b_0 + \sum_{i=1}^{r} b_i X_i + \sum_{i,j=1}^{r} b_{ij} X_i X_j + \sum_{i,j,k=1}^{r} b_{ij} X_i X_j X_k + \cdots$$

عضو دیگری از $\bar{A}_r$ باشد، آنگاه در صورتی این دو عضو برابرند که $a - 0 = b_0$، $a_i = b_i$، $a_{ij} = b_{ij}$ و ...، و حاصلضرب آنها به صورت

$$c_0 + \sum_{i=1}^{r} c_i X_i + \sum_{i,j=1}^{r} c_{ij} X_i X_j + \sum_{i,j,k=1}^{r} c_{ij} X_i X_j X_k + \cdots$$

تعریف می‌گردد که $c_0 = a_0 b_0$، $c_i = a_0 b_i + a_i b_0$، $c_{ij} = a_0 b_{ij} + a_i b_j + a_{ij} b_0$ و ...

**۲.۱.۳ نگاشت نمایی صوری.** به ازای هر عضو دلخواه

$$Z = \sum_{i=1}^{r} d_i X_i + \sum_{i,j=1}^{r} d_{ij} X_i X_j + \sum_{i,j,k=1}^{r} d_{ij} X_i X_j X_k + \cdots$$

از $\bar{A}_r$، $e^Z$ را به شکل سری توان صوری

$$e^Z = 1 + Z + \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{3!}Z^3 + \cdots \qquad (۱.۳)$$

تعریف می‌کنیم. چون جملهٔ $d_0$ در $Z$ صفر فرض شده است، عناصر درجهٔ $k$ ام $Z$ را تنها در $k+1$ جملهٔ اول عبارت (۱.۳) می‌توان یافت. بنابراین $e^Z$ عضوی

$$e_0 + \sum_{i=1}^{r} e_i X_i + \sum_{i,j=1}^{r} e_{ij} X_i X_j + \sum_{i,j,k=1}^{r} e_{ij} X_i X_j X_k + \cdots$$

از $\bar{A}_r$ خواهد بود که در آن:

$$e_0 = 1,\ e_i = d_i,\ e_{ij} = d_{ij} + \frac{1}{2}d_i d_j,$$
$$e_{ijk} = d_{ijk} + \frac{1}{2}(d_i d_{jk} + d_{ij} d_k) + \frac{1}{3!}d_i d_j d_k,\ \cdots$$

اغلب فرض ما بر این است مؤلفه‌های در $e^Z$ به ترتیب بالا نوشته می‌شوند و بنابراین $e^Z$ را به عنوان عضوی از $\bar{A}_r$ قلمداد می‌کنیم.

فرض کنیم $\bar{A}_2$ حبر آزاد تولید شده توسط $X$ و $Y$ باشد، در این صورت می‌دانیم که $e^X$ و $e^Y$ اعضای $\bar{A}_2$ هستند. بعلاوه

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= \left(1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \cdots\right)\left(1 + Y + \frac{1}{2}Y^2 + \cdots\right) \\ &= 1 + (X+Y) + \left(\frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2\right) + \cdots \end{aligned}$$

حال اگر فرض شود «$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] +$جملات مرتبهٔ بالاتر»، در این صورت می‌توان نشان داد

$$e^Z = 1 + (X+Y) + \left(\frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2\right) + \text{جملت مرتبهٔ بالاتر از ۲}$$

و بنابراین $e^X e^Y = e^Z$. فرمول کبه تأیید می‌کند که می‌توان $Z$ ای در $\bar{A}_2$ یافت (که جملات اول آن را در بالا ذکر نمودیم) طوری که $e^X e^Y = e^Z$ و همهٔ مؤلفه‌های $Z$ از محاسبهٔ حاصلضربهای لیِ مراتهٔ بالای $X$ و $Y$ بدست می‌آیند.

برای بیان دقیق‌تر فرمول کبه به نمادگذاریهای زیر نیاز داریم. فرض کنید $\Delta$ زیر مجموعه‌ای از جبر لی مفروض $L$ باشد. در این صورت، اعضای $\Delta$ را **حاصلضربهای لی مرتبهٔ اول** از جملات در $\Delta$ می‌نامیم؛ و هر عبارت حاصل از ضرب لی یک حاصلضرب لیِ مرتبهٔ $k$ ام از جملات در $\Delta$ در یک حاصلضرب لیِ مرتبهٔ $m-k$ ام از جملات در $\Delta$ را **حاصلضرب لیِ مرتبهٔ $m$ ام** از جملات در $\Delta$ می‌نامیم، که $k \in \bar{1}, \cdots, m-1$.

اگر $\Delta$ برخی از اعضایِ $\mathbb{R}$ را در بر داشته باشد، آنگاه این اعضاء را حاصلضربهای لیِ مرتبهٔ $0$ ام جملات

در $\Delta$ می‌گوئیم. مثلاً، به کمک خواص ضرب لی می‌توان نشان داد که حاصلضربهای لی مرتبهٔ دوم، سوم و چهارم جملات در $\Delta$ بترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned}&[X,Y];\\&\pm[X,[Y,Z]];\\&\pm[W,[X,[Y,Z]]],\ [[W,X],[Y,Z]];\end{aligned}$$

که $W,X,Y,Z\in\Delta$. همهٔ چنین حاصلضربهای لی را **حاصلضربهای لی چندگانه** می‌نامند.

اگر $A_r$ جبر آزاد تولید شده توسط $\{X_1,\cdots,X_r\}$ باشد، در این صورت اعضایی از $\bar{A}_r$ که به صورت $\sum_{m=0}^{\infty} Z_m$ قابل بیان باشند (که هر یک از $Z_m$ ها یک ترکیب $\mathbb{R}$-خطی متناهی از حاصلضربهای لی مرتبهٔ $m$ ام از جملات در $\{X_1,\cdots,X_r\}$ می‌باشند) را **اعضای لیِ** $\bar{A}_r$ می‌نامند.

**۳.۱.۳ فرمول کمبل-بکیر-هاوسدورف.** اگر $A_2$ جبر آزاد تولید شده توسط اعضاء $X$ و $Y$ باشد، در این صورت یک عضو لی $Z$ در $\bar{A}_r$ وجود خواهد داشت که جملهٔ مرتبهٔ صفرم آن صفر است و $e^Xe^Y=e^Z$. مؤلفه‌های تا مرتبهٔ سوم $Z$ عبارتند از

$$Z=X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[[X,Y],X]+\frac{1}{12}[[X,Y],Y]+\cdots$$

در بحث بالا دلایل کافی برای ظهور جملات مرتبهٔ اول و دوم در $Z$ آمده است، در تمرین $C-3$ از خوانندهٔ علاقمند خواسته می‌شود تا صحت جملات مرتبهٔ سوم را نشان دهد.

در حالت کلی $Z$ برابر

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{(p_i,q_i)\in A_m}\frac{(-1)^{m-1}}{m\sum\limits_{i=1}^{m}(p_i+q_i)}\,\frac{[[[[[[[\cdots\overbrace{[x,x]\cdots x]}^{p_1\text{ تا}}\overbrace{y]\cdots y]}^{q_1\text{ تا}}\cdots\overbrace{x]\cdots x]}^{p_m\text{ تا}}\overbrace{y]\cdots y]}^{q_m\text{ تا}}}{p_1!q_1!\cdots p_m!q_m!}$$

است، که در آن

$$A_m=\Big\{(p_i,q_i)\,\Big|\,1\le i\le m,\ p_i,q_i\in\{0,1,2,\cdots\},\sum_{i=1}^{m}(p_i+q_i)\le m\Big\}$$

برای مشاهدهٔ اثبات این فرمول به مراجع معرفی شده در ابتدای این بخش مراجعه کنید.

## بخش ۲.۳ فرمول کبه برای گروه لی

با بسط تیلر برای توابع تحلیلی با مقدار حقیقی بر یک چارت حول عنصر همانی گروه لی آغاز می‌کنیم. در خلال این بخش فرض ما بر این است که $G$ گروه لی و $\{\varphi_\alpha | \alpha \in A\}$ یک اطلس تحلیلی سازگار بر $G$ است. یادآور می‌شویم که اگر $f \in \mathcal{F}_\alpha$ (یعنی به مجموعهٔ توابع با مقدار حقیقی بر $V_\alpha$ تعلق داشته باشد)، و $X$ یک میدان برداری تحلیلی بر $G$ باشد، در این صورت $\tilde{X}f$ نمایشگر تابع

$$\tilde{X}f : x \mapsto f_{*,x}X(x), \qquad x \in V_\alpha$$

که آن نیز عضوی از $\mathcal{F}_\alpha$ می‌باشد (به ۳.۳.۱ توجه شود). نمادگذاری استاندارد دیگری که در این بخش استفاده خواهد شد، نما $||\cdot||$ است که نمایشگر نرم بر $\mathfrak{g}$ می‌باشد که قادر به تولید توپولوژی بر موجود بر آن می‌باشد. از بین همهٔ نرمهای ممکن یکی را انتخاب نموده و من بعد از در همه جا از آن استفاده می‌کنیم. بعلاوه گوی واحد بسته به مرکز $0$ در $\mathfrak{g}$ را با نماد $B$ نشان می‌دهیم.

**۱.۲.۳ لم.** با $G$ و $\{\varphi_\alpha | \alpha \in A\}$ مثل بالا، فرض کنید $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ چارتی حول $e \in G$ است. فرض کنید $V$ همسایگی بازی از $e$ در $G$ است که $V \cdot V \subseteq V_\alpha$. $\varepsilon' > 0$ را طوری انتخاب کنید که به ازای هر $t \in I_{\varepsilon'} = (-\varepsilon'; \varepsilon')$ ای $\exp(tB) \subseteq V$ و نیز فرض کنید که $X$ میدان برداری ناوردای چپی بر $B$ است. در این صورت به ازای هر $f \in \mathcal{F}_\alpha$ ای و هر $x \in V$ ای تابع $t \mapsto f(x \cdot \exp(tX))$ بر $I_{\varepsilon'}$ تحلیلی است، و بعلاوه $\varepsilon$ ای وجود دارد که $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ و بسط تیلور تابع $t \mapsto f(x \cdot \exp(tX))$ بر $I_{\varepsilon'}$ به شکل زیر است:

$$f(x \cdot \exp(tX)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \left(\tilde{X}^m(f)\right)(x) \tag{۲.۳}$$

**۲.۲.۳ یادداشت.** چنانچه در مفروضات لم بالا فرض تعلق داشتن $X$ به $\mathfrak{g}$ را کنار بگزاریم، همچنان این لم صحیح خواهد بود، در این صورت $X \cdot ||X||^{-1} \in B$ و از فرمول (۲.۳) نتیجه می‌شود که به ازای هر $t \in I_{\varepsilon'}$ ای

$$f(x \cdot \exp(tX \cdot ||X||^{-1})) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m! \, ||X||^m} \left(\tilde{X}^m(f)\right)(x)$$

بنابراین، فرمول (۲.۳) تنها وقتی برقرار خواهد بود که $t$ به $(-\varepsilon||X||^{-1}; \varepsilon||X||^{-1})$ محدود شود.

اثبات لم ۱.۲.۳: در صورتی که $\varphi_\alpha$ و $V$ مانند در صورت لم انتخاب شوند، آنگاه چون نگاشت نمایی پیوسته است، $\varepsilon' > 0$ ای می‌توان یافت نمود که $\exp(\varepsilon' B) \subseteq V$؛ به ویژه، به ازای هر $t \in I_{\varepsilon'}$ ای $\exp(tB) \subseteq V$. فرض کنیم $f \in \mathcal{F}_\alpha$ و $X \in B$. چون $V \cdot V \subseteq V_\alpha$ و تابع $f$، نگاشت ضرب در $G$ و نگاشت نمایی بر دامنه‌شان تحلیلی‌اند، بنابراین تابع

$$g : t \mapsto f(x \cdot \exp(tX)), \qquad t \in I_{\varepsilon'}$$

نیز تحلیلی می‌باشد. اکنون می‌توان از نمونهٔ کلاسیک فرمول تیلور استفاده نموده و نشان داد که $\varepsilon$ ای با $0<\varepsilon\leq\varepsilon'$ طوری وجود دارد که

$$g(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}g^{(m)}(0), \qquad t\in I_\varepsilon$$

اثبات با نشان دادن اینکه

$$g^{(m)}(0)=\left(\tilde{X}^m(f)\right)(0) \quad \text{به ازای هر } m\in\mathbb{Z}^+=\{0,1,2,\cdots\} \text{ ای} \tag{۳.۳}$$

به پایان می‌رود. برای این منظور لازم است ثابت گردد که بر $I_\varepsilon$ داریم

$$g^{(m)}=\left(\tilde{X}^m(f)\right)\circ L_x\circ\theta \quad \text{به ازای هر } m\in\mathbb{Z}^+ \text{ ای} \tag{۴.۳}$$

که $\theta$ نمایشگر زیر گروه ۱-پارامتری $t\mapsto\exp(tX)$ می‌باشد. نظر به تعریف $\mathfrak{g}$، فرمول (۴.۳) به ازای $m=0$ برقرار می‌باشد؛ حال فرض کنیم که این فرمول برای $m=0,1,2,\cdot,m-1$ صحیح باشد. ابتدا توجه شود که چون $X$ ناوردای چپ است، به ازای هر $a\in G$ ای با خودش $L_a$-مرتبط می‌باشد، و لذا از (۱۳.۲) نتیجه می‌گردد که $\left(\tilde{X}(f)\right)\circ L_a=\tilde{X}(f\circ L_x)$ . بنابراین، به استقراء بر $p\in\mathbb{Z}^+$ داریم که

$$\left(\tilde{X}^p(f)\right)\circ L_a=\tilde{X}^p(f\circ L_x) \quad \text{به ازای هر } a\in G \text{ و هر } p\in\mathbb{Z}^+ \text{ ای} \tag{۵.۳}$$

اکنون به ازای هر $s\in I_\varepsilon$ ای داریم

$$\begin{aligned}
g^{(m)}(s) &= g^{(m-1)(1)}(s)=\left(g^{(m-1)}\right)_{*,s}[i,1]_s \\
&= \left(\tilde{X}^{m-1}\circ L_x\circ\theta\right)_{*,s}[i,1]_s && (۶.۳)\\
&= \left(\tilde{X}^{m-1}(f\circ L_x)\circ\theta\right)_{*,s}[i,1]_s && (۷.۳)\\
&= \left(\tilde{X}^{m-1}(f\circ L_x)\right)_{*,\theta(s)}\theta_{*,s}[i,1]_s \\
&= \left(\tilde{X}^{m-1}(f\circ L_x)\right)_{*,\theta(s)}X(\theta(s)) && (۸.۳)\\
&= \tilde{X}\left(\tilde{X}^{m-1}(f\circ L_x)\right)(\theta(s)) \\
&= \left(\tilde{X}^m\circ f\right)\circ L_x\circ\theta(s) && (۹.۳)
\end{aligned}$$

که در (۶.۳) از فرمول (۴.۳) به ازای $m+1$، در (۷.۳) از فرمول (۵.۳)، در (۸.۳) از قضیهٔ ۱۰.۲.۲، در (۹.۳) از فرمول (۵.۳) و در سایر موارد از تعریف $\tilde{X}$ استفاده نموده‌ایم. بنابراین فرمول (۴.۳) و لذا فرمول (۳.۳) به ازای هر $m\in\mathbb{Z}^+$ ای برقرار می‌باشد. □

**۳.۲.۳ نتیجه.** فرض کنید $G$ و $\varphi_\alpha$ مانند در صورت لم بالا باشند و $\varepsilon>0$ را طوری انتخاب نموده باشیم که به ازای هر $t\in I_\varepsilon$ ای $\exp(tB)\subseteq V_\alpha$. در این صورت به ازای هر $f\in\mathcal{F}$ ای تابع $t\mapsto f(\exp(tX))$ بر $I_\varepsilon$ تحلیلی است و بسط تیلور در یک همسایگی 0 آن عبارت است از

$$f(\exp(tX))=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\left(\tilde{X}^m(f)\right)(e)$$

**۴.۲.۳ یادداشت.** اگر تابع $f$ بر $G$ تحلیلی باشد و $X$ یک میدان برداری دلخواه بر $\mathfrak{g}$، تابع $x \mapsto f_{*,x}X(x)$ بر $G$ را با نماد $\tilde{X}(f)$ نشان می‌دهیم. در این صورت $t \mapsto f(\exp(tX))$ بر $G$ تحلیلی است و با روش بکار رفته در لم بالا می‌توان اثبات نمود که به ازای هر $x \in G$ و هر $t \in \mathbb{R}$ ای

$$f(x \cdot \exp(tX)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \left(\tilde{X}^m(f)\right)(x)$$

به بیان دیگر، از اثبات لم ۱.۲.۳ برای بدست آوردن نمونه‌ای تعمیم یافته‌تر از حکم مورد نظر می‌توان استفاده نمود. دلیل اینکه چرا ۱.۲.۳ را بر اساس توابع تحلیلی بر $V_\alpha$ بیان نمودیم و نه بر کل $G$، این است که از قبل می‌دانیم میدانهای برداری تحلیلی بر $V_\alpha$ را بر $V_\alpha$ به کمک تعدادی کافی از توابع با مقدار حقیقی می‌توان تفکیک نمود (به اثبات ۴.۳.۱ توجه شود).

**۵.۲.۳ زیر جبر.** اگر $L$ یک جبر لی (حقیقی و با بعد متناهی) باشد، و $L'$ زیر فضایی برداری از $L$ که نسبت به ضرب لیِ $L$ بسته است، در این صورت $L'$ را **زیر جبر لیِ** $L$ می‌گوئیم.
فرض کنید $X_1$، . . . و $X_m$ اعضایی از $L$ باشند؛ در این صورت، کوچکترین زیر جبر لیِ $L$ که $\{X_1, \cdots, X_m\}$ را در بر داشته باشد، **زیر جبر لی $L$ تولید شده توسط** $\{X_1, \cdots, X_m\}$ می‌نامیم.
بسادگی مشاهده می‌شود که زیر جبر لی $L$ تولید شده توسط $\{X_1, \cdots, X_m\}$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ ترکیبات $\mathbb{R}$-خطی متناهی از حاصلضربهای لی اعضای در $\{X_1, \cdots, X_m\}$. چون این زیر جبر لی با بعد متناهی است، می‌شود نتیجه گرفت که تنها تعداد متناهی از این حاصلضربهای لی برای تولید آن کافی است.

**۶.۲.۳ فرمول کبه برای گروه لی.** فرض کنید $G$ گروه لی است. در این صورت $\varepsilon > 0$ ای وجود دارد که به هر $X, Y \in B$ تابعی $Z : I_\varepsilon \to \mathfrak{g}$ نظیر می‌گردد که

$$\exp(tX)\ \exp(tY) = \exp(Z(t)) \quad \text{به ازای هر } t \in I_\varepsilon \text{ ای}$$

بعلاوه $Z$ را به شکل سری توان همگرای مطلق

$$Z(t) = \sum_{m=1}^{\infty} t Z_m(X, Y),$$

می‌توان نوشت، که $Z_m(X, Y)$ ترکیبی $\mathbb{R}$-خطی از حاصلضربهای لی مرتبهٔ $m$ ام از $\{X, Y\}$ می‌باشد. (بنابراین، $Z(t)$ به زیر جبر لی تولید شده توسط $\{X, Y\}$ تعلق دارد.) همچنین، $Z_1(X, Y) = X + Y$ و $Z_2(X, Y) = \frac{1}{2}[X, Y]$.

**۷.۲.۳ یادداشت.** با کاری شبیه به آنچه که در ۲.۲.۳ صورت گرفت، می‌توان نشان داد که به ازای $\varepsilon$ ای مناسب حکم بالا برای هر $X, Y \in \mathfrak{g}$ دلخواهی قابل اثبات است.

اثبات ۶.۲.۳: فرض کنیم $X, Y \in B$ و $U$ همسایگی بازی از $0$ در $\mathfrak{g}$ می‌باشد که $\exp$ بر آن دیفیومورفیسم است. $\varepsilon_1 > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که به ازای هر $t \in I_{\varepsilon_1}$ ای $\exp(tB) \cdot \exp(tB) \subseteq \exp(tB)$. وارون موضعی $\exp$ بر $U$ را با نماد $\log$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$Z : I_{\varepsilon_1} \to \mathfrak{g} \qquad Z(t) = \log(\exp(tX) \cdot \exp(tY))$$

روش است که $Z$ تابعی تحلیلی با $Z(0) = 0$ می‌باشد. بعلاوه

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = \exp(Z(t)) \quad \text{به ازای هر } t \in I_{\varepsilon_1} \text{ ای} \tag{۱۰.۳}$$

مشکل اصلی در ادامهٔ اثبات، نشان دادن این مطلب است که $Z$ به شکل معرفی شده در صورت قضیه است و بنابراین به ازای یک $I_\varepsilon$ غیر تهی‌ای، بردش در جبر لی تولید شده توسط $\{X, Y\}$ قرار دارد. دلیل این تعمیم در آن است که اگر دو طرف تساوی (۱۰.۳) را در تابعی حقیقی و تحلیلی ضرب کنیم، آنگاه بر همسایگی مناسبی از $e \in G$ خواهیم داشت

$$e^{t\tilde{X}} e^{t\tilde{Y}} f(e) = e^{t\tilde{Z}} f(e) \quad \text{به ازای } t \text{ های به اندازهٔ کافی کوچک}$$

(به (۱۶.۳) توجه شود.) اتحادی که به این ترتیب حاصل می‌شود مناسبترین صورت ممکن برای بکارگیری فرمول کبهٔ جبرهای لی آزاد که در بخش ۱.۳ مطرح گردید را دارد.

چنانچه فقط بخواهیم نشان دهیم که

$$Z(t) = t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + \text{جملات مرتبهٔ بالاتر}$$

و تعلق $Z(t)$ به جبر لی تولید شده توسط $\{X, Y\}$ مورد نظر نباشد، ساده‌ترین راه این است که ابتدا بنویسیم $Z(t) = tZ_1 + t^2 Z_2 + t^3 Z_3$، که $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{g}$ و $Z_2$ تابعی تحلیلی از $I_\varepsilon$ ای بتوی $\mathfrak{g}$ است، سپس این عبارت را در سمت راست فرمول (۱۰.۳) قرار داده و آنگاه هر یک از دو طرف رابطهٔ مذکور را بر تابعی دلخواه $f$ تأثیر داده و از لم ۱.۲.۳ استفاده کنیم. (مثلاً، به قضیهٔ ۱۴ از فصل ۱۰ کتاب اسپیوک [۵۸] و یا لم ۱.۸ از فصل دوم کتاب هلگاسن [۲۸] مراجعه شود.)

فرض کنیم $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ چارتی حول $e$ و $V$ همسایگی بازی از $e$ است به گونه‌ای که $V \cdot V \subseteq V_\alpha$. $\varepsilon_2'' > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که به ازای هر $t \in I_{\varepsilon_2''}$ ای $\exp(tB)$ در $V$ قرار داشته باشد. اگر $f \in \mathcal{F}$، انگاه لم ۱.۲.۳ نشان می‌دهد که $\varepsilon_2'$ ای با $0 < \varepsilon_2' \le \varepsilon_2''$ وجود دارد، طوری که به ازای هر $s, t \in I_{\varepsilon_2'}$ ای

$$f(\exp(sX) \cdot \exp(tY)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \left(\tilde{Y}^m(f)\right)(\exp(sX))$$

اما چون به ازای هر $m$ ای تابع $s \mapsto \left(\tilde{Y}^m(f)\right)(\exp(sX))$ به $\mathcal{F}_\alpha$ تعلق دارد، لم ۱.۲.۳ را در مورد هر یک از آنها می‌توانیم بکار بگیریم. بنابراین، بایستی بسط تیلور تابع تحلیلی $(s,t) \mapsto f(\exp(sX) \cdot \exp(tY))$ به شکل

$$f(\exp(sX) \cdot \exp(tY)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \left(\tilde{X}^k \tilde{Y}^m\right) f(e) \right\} \tag{۱۱.۳}$$

باشد، که $s$ و $t$ در همسایگی مناسبی از $0$ در $\mathbb{R}$ (مثلاً $I_{\varepsilon_2}$) قرار دارند. چون هر از سریهای برحسب $m$ و $k$ همگرای مطلق هستند، سری (۶.۲.۳) را به شکل یک سری دوگانهٔ همگرای مطلق می‌توان نوشت. بعلاوه اگر قرار دهیم $s = t$، آنگاه (۶.۲.۳) به شکل

$$f(\exp(tX)\cdot\exp(tY)) = \sum_{m,k}\frac{t^{k+m}}{k!m!}\left(\tilde{X}^k\tilde{Y}^m\right)f(e) \tag{۱۲.۳}$$

تبدیل خواهد شد، که $t \in I_{\varepsilon_2}$.

به ازای هر $t \in I_{\varepsilon_2}$ ای، عبارت $\sum_k \frac{1}{k!}\left(t\tilde{X}\right)^k$ را به صورت عمگری از $\mathcal{F}_\alpha$ بتوی مجموعهٔ توابع حقیقی و تحلیلی بر $V$ و با ضابطهٔ

$$\left(\sum_k \frac{1}{k!}\left(t\tilde{X}\right)^k\right)(f) : x \mapsto \sum_k \frac{t^k}{k!}\left(\tilde{X}^k(f)\right)(f)$$

می‌توان در نظر گرفت، که $f \in \mathcal{F}_\alpha$ و $x \in V$. (به دلیل اینکه سری سمت راست به $f(x\cdot\exp(tX))$ همگرا است، با معنی می‌باشد.) این عملگر را با نماد $e^{t\tilde{X}}$ نشان می‌دهیم. (در واقع نشان خواهیم داد که به ازای هر $t \in I_{\varepsilon_2}$ ای، سری صوری $e^{t\tilde{X}}$ را به عنوان عملگری بر $\mathcal{F}_\alpha$ می‌توان تلقی نمود.) در نتیجه بنابه (۱۲.۳)، به ازای هر $f \in \mathcal{F}_\alpha$ و $t \in I_{\varepsilon_2}$ ای

$$f(\exp(tX)\cdot\exp(tY)) = e^{t\tilde{X}}\,e^{t\tilde{Y}}f(e) \tag{۱۳.۳}$$

به تعریف تابع $Z$ تعریف شده توسط (۱۰.۳) بازگشته، نشان می‌دهیم که $\varepsilon_3 > 0$ ای وابسته به فقط $G$ و $B$ طوری وجود دارد که به ازای هر $f \in \mathcal{F}_\alpha$ و $t \in I_{\varepsilon_3}$ ای

$$f(\exp(Z(t))) = \sum_n \frac{1}{n!}\widetilde{Z(t)}^n f(e) = e^{\widetilde{Z(t)}}f(e) \tag{۱۴.۳}$$

همان طوری که در یادداشت ۲.۲.۳ گفته شد، $\lambda > 0$ ای می‌توانیم بیابیم که هر گاه $T \in \lambda \in B$، آنگاه

$$f(\exp(T)) = \sum_m \frac{1}{m!}(\tilde{T}^m f)(e) \tag{۱۵.۳}$$

(نظر به ۱.۲.۳ بیستی $\varepsilon > \lambda > 0$.) اکنون $\varepsilon_3 > 0$ ای با این خاصیت انتخاب می‌کنیم که

به ازای هر $t \in I_{\varepsilon_3}$ ای $\log(\exp(tB)\cdot\exp(tB)) \subseteq \lambda B$

پس بخصوص، به ازای هر $t \in I_{\varepsilon_3}$ ای $Z(t) \in \lambda B$ و در نتیجه (۱۴.۳) با جایگزینی $Z(t)$ بجای $T$ در (۱۵.۳) حاصل می‌گردد.

در ادامهٔ برهان تنها $t$ هایی را در نظر می‌گیریم که $t \in I_\varepsilon$، که $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. با ترکیب فرمولهای (۱۰.۳)، (۱۳.۳) و (۱۴.۳) نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $f \in \mathcal{F}_\alpha$ و $t \in I_\varepsilon$ ای

$$e^{t\tilde{X}}\,e^{t\tilde{Y}}f(e) = e^{\widetilde{Z(t)}}f(e) \tag{۱۶.۳}$$

فرض کنیم $A_2$ نمایشگر جبر آزاد تولید شده توسط $\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$. در این صورت به ازای هر $t$ ای $e^{t\tilde{X}}\, e^{t\tilde{Y}} \in \bar{A}_2$ و لذا بنابه فرمول کبه برای جبرهای لی آزاد ۳.۱.۳، یک عنصر لی از $\bar{A}_2$، مثلاً $Z^0(t)$، طوری یافت می‌گردد که

$$e^{t\tilde{X}}\, e^{t\tilde{Y}} = e^{Z^0(t)} \tag{۱۷.۳}$$

عنصر $Z^0(t)$ یک سری نامتناهی از مضاربِ حاصلضربهای لی از $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ است. (اولین جملات $Z^0(t)$ عبارتند از $t(\tilde{X}+\tilde{Y}) + \frac{t^2}{2!}[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.)
نظربه (۱۶.۳)

$$e^{\widetilde{Z(t)}} = e^{Z^0(t)} \qquad \text{به ازای هر } t \in I_\varepsilon \text{ ای}$$

و بنابراین $Z(t)$ از نظر صوری یک سری توان نامتناهی می‌باشد، که ضریب $t^m$ از آن یک ترکیب $\mathbb{R}-$خطی و متناهی از حاصلضربهای لی مرتبهٔ $m$ ام از $X$ و $Y$ است. اما $t \mapsto Z(t)$ بر $I_\varepsilon$ تحلیلی است و سریها بر این دامنه همگرای مطلق هستند، در نتیجه همان طوری که می‌خواستیم $Z(t)$ به جبر لی $\mathfrak{g}$ تولید شده توسط $\{X, Y\}$ تعلق دارد.(البته، توجه شود که $e^{t\tilde{X}}$ و . . . در (۱۶.۳) و (۱۷.۳) تعابیر مختلفی دارند. اولین تعبیر، عملگر بر $\mathcal{F}_\alpha$ بودن است و دومین تعبیر، عضوی از $\bar{A}_2$ می‌باشد.) این ابهام را با استفاده از تناظر دوسویی که بین مجموعه‌ای بخصوص از عملگرهای بر $\mathcal{F}_\alpha$ (در واقع، مجموعه‌ای از حاصلجمعهای نامتناهی $\sum_i F_i$ از ترکیبات خطی و جبری از $\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$ که به ازای هر $f \in \mathcal{F}_\alpha$ ای $\sum_i (F_i f)(e)$ همگرای مطلق است.) بتوی $\bar{A}_2$ وجود دارد، می‌توان مرتفع نمود.) چون می‌دانیم که اولین و دومین جملهٔ $Z^0(t)$ عبارت از $t(\tilde{X}+\tilde{Y})$ و $\frac{t^2}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ هستند، نتیجه می‌گیریم که

$$Z(t) = t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + \text{جملات از مرتبهٔ بالاتر}.\square$$

**۸.۲.۳ نماد مرتبه.** اگر $Z$ نگاشتی از یک بازه $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ (که $\varepsilon > 0$) بتوی یک فضای برداری با بعد متناهی $E$ باشد، آنگاه در صورتی این نگاشت را با نماد $O(t^m)$ نشان می‌دهیم که $Z(t) \cdot t^{-m}$ در یک همسایگی غیر تهی از $0 \in \mathbb{R}$ کراندار باشد. بنابراین $O(t^m)$ در وضعیتهای مختلف توابع مختلفی را نمایش می‌دهد.

کاربردهایی مختلف از ۶.۲.۳ را به کمک این نمادگذاری می‌توان مطرح نمود:

**۹.۲.۳ نتیجه.** به ازای $X, Y \in \mathfrak{g}$، داریم

1) $\exp(tX)\, \exp(tY)\, \exp(-tX) = \exp\left(tY + t^2[X,Y] + O(t^3)\right)$

2) $\exp(-tX)\, \exp(-tY)\, \exp(tX)\, \exp(tY) = \exp\left(t^2[X,Y] + O(t^3)\right)$

**۱۰.۲.۳ یادداشت.** قسمت (۲) از نتیجهٔ ۹.۲.۳ نشان می‌دهد که به ازای $x$ و $y$ های در یک همسایگی باز کوچک از عنصر همانی $e$ در گروه لی $G$ و در حد جملات تا مرتبهٔ دوم داریم

$$x^{-1}y^{-1}xy = \exp(\log x, \log y) \tag{۱۸.۳}$$

بنابراین، جبر لی $\mathfrak{g}$ تقریبی از «میزان آبلی-نبودن»[۲] $G$ را بدست می‌دهد. مثلاً، شرط لازم و کافی برای آبلی بودن یک گروه لی فروض $G$ این است که به ازای هر $X, Y \in \mathfrak{g}$ ای $[X, Y] = 0$. (به تمرین $A - 3$ توجه شود.) بعلاوه بهتر است تا فرمول (۱۸.۳) را با تعبیری که در یادداشت پایان فصل ۲، برای جابجاگر عناصر بینهایت کوچک یک گروه لی مفروض آوردیم، مقایسه نمایید.

## بخش ۳.۳ زیر گروه بسته

اولین کاربرد فرمول کبه برای گروههای لی، استفاده از آن در نشان دادن این مطلب است که هر زیر گروه بسته از یک گروه لی، خود نیز گروه لی است. کاربرد این حکم یکی از اصلی‌ترین روشها برای نشان دادن گروه لی بودن یک گروه توپولوژی مفروض می‌باشد، که ما نیز در ۲.۱.۲ هنگامی که به معرفی گروههای لی استاندارد مشغول بودیم، از آن به دفعات استفاده نمودیم.

**۱.۳.۳ قضیه.** فرض کنید $G$ گروه لی و $H$ زیر گروه‌ی بسته از $G$ است. اگر $H$ را با توپولوژی القائی از $G$ همراه کنیم، در این صورت $H$ گروه لی خواهد بود.

برهان: روش معمول، تقسیم برهان به چند مرحله است، که ما نیز چنین می‌کنیم.

**حکم ۱.** فرض کنیم $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp(tX) \in H$ به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\}$. در این صورت $\mathfrak{h}$ زیر جبر لی $\mathfrak{g}$ است.

ابتدا متذکر می‌شویم که شرط لازم و کافی برای $X \in \mathfrak{h}$ این است که به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ای $tX \in \mathfrak{h}$.
فرض کنیم $X, Y \in \mathfrak{h}$ و $t \in \mathbb{R}$. از ۶.۲.۳ نتیجه می‌گیریم که به ازای $n$ های باندازهٔ کافی بزرگ

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{t}{n}X\right)\exp\left(\frac{t}{n}Y\right) = \exp\left(\frac{t}{n}(X+Y) + O(n^{-2})\right)$$

و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{t}{n}X\right)\exp\left(\frac{t}{n}Y\right)\right)^n = \exp\left(t(X+Y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad (۱۹.۳)$$

چون $X, Y \in \mathfrak{h}$، $\frac{t}{n}X$ و $\frac{t}{n}Y$ نیز به $\mathfrak{h}$ متعلقند، و بنابراین همواره سمت چپ (۱۹.۳) به $H$ تعلق دارد. اما $H$ بسته است و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{t}{n}X\right)\exp\left(\frac{t}{n}Y\right)\right)^n = \exp\left(t(X+Y)\right) \in H$$

بنابراین، از تعریف $\mathfrak{h}$ نتیجه می‌گیریم که $X + Y \in \mathfrak{h}$ و در نتیجه $\mathfrak{h}$ فضای برداری است.
بسته بودن $\mathfrak{h}$ نسبت به عمل ضرب لی با برهانی شبیه به بالا و با توجه به فرمول

$$\exp(t^2[X,Y]) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(-\frac{t}{n}X\right)\exp\left(-\frac{t}{n}Y\right)\exp\left(\frac{t}{n}X\right)\exp\left(\frac{t}{n}Y\right)\right)^{n^2}$$

از قسمت (۲) از نتیجهٔ ۸.۲.۳ قابل اثبات می‌باشد.

[۲] Abelian-ness

**حکم ۲.** اگر $\mathfrak{g}$ را به صورت $L\oplus\mathfrak{h}$ تجزیه کنیم، که $L$ زیر فضایی از $\mathfrak{g}$ می‌باشد، در این صورت همسایگی $W$ ای از $0$ در $L$ طوری وجود دارد که اگر $X \in W$ و $X \neq 0$، آنگاه $\exp X \notin H$.

بالعکس، فرض کنیم دنباله‌ای $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ در $L$ وجود داشته باشد که به ازای هر $m$ ای $\exp(X_m) \in H$ و $\lim_{m\to\infty} X_m = 0$. $L$ را با یک نرم اقلیدسی $\|\cdot\|$ همراه می‌کنیم. می‌توانیم فرض کنیم که دنبالهٔ $\{X_m/\|X_m\|\}_{m=1}^{\infty}$ نقطه‌ای حدی مانند $X$ دارد (البته، در صورت امکان دنبالهٔ $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ را با زیر دنباله‌ای از خودش تعویض می‌کنیم)، و این نقطهٔ حدی به $L$ متعلق است. بعلاوه، $\|X\| = 1$ و بنابراین $X \neq 0$. تناقض مورد نظر با نشان دادن اینکه $X \in \mathfrak{h}$ حاصل می‌گردد. به ازای $t \in \mathbb{R}$، چون $\lim_{m\to\infty} X_m = 0$، دنباله‌ای $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ از اعادا صحیح مثبت چنان می‌توان انتخاب نمود که $\lim_{m\to\infty} n_m \cdot \|X_m\| = t$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\exp(tX) &= \lim_{m\to\infty} \exp\left(\frac{tX_m}{\|X_m\|}\right)\\ &= \lim_{m\to\infty} \exp(n_m \cdot X_m)\\ &= \lim_{m\to\infty} (\exp(X_m))^{n_m}\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $\exp(tX) \in H$، زیرا $H$ بسته است. بنابراین $X \in \mathfrak{h}$.

**حکم ۳.** همسایگی $U$ از $0 \in \mathfrak{h}$ و $V$ از $e \in G$ طوری وجود دارد که

$$\exp U = V \cap \exp(\mathfrak{h}) = V \cap H.$$

با در نظر گرفتن حاصلجمع مستقیم $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\oplus L$ همچون در حکم ۲، نتیجه می‌گیریم که همسایگی $U$ از $0 \in \mathfrak{h}$ و $U'$ از $0 \in L$ را چنان می‌توان انتخاب نمود که

$$\varphi : \mathfrak{g} \to G \qquad\qquad \varphi(X) = \exp(X_1)\exp(X_2)$$

دیفیومورفیسمی بر $U \oplus U'$ می‌باشد. (در اینجا فرض شده است که $X$ به صورت $X_1 + X_2$ تجزیه شده است.) می‌توانیم فرض کنیم که $U' \subseteq W$، که $W$ همسایگی معرفی شده در حکم ۲ می‌باشد. فرض کنیم $V = \varphi(U \oplus U')$. در این صورت اگر $x \in V \cap H$، آنگاه $x = \exp(X_1)\exp(X_2) \in H$، که $X_1 \in U$ و $X_2 \in U'$. بنابراین $\exp(X_2) \in H$، و از حکم ۲ نتیجه می‌گیریم که $X_2 = 0$ و بنابراین $x \in \exp(U)$. در نتیجه

$$V \cap \exp(\mathfrak{h}) \subseteq V \cap H \subseteq \exp(U).$$

از سوی دیگر، اگر $X \in U \subseteq \exp(\mathfrak{h})$، آنگاه

$$\exp(X) = \exp(X)\exp(0) = \varphi(X) \in V \cap \exp(\mathfrak{h})$$

و به این ترتیب اثبات حکم ۳ به پایان می‌رود.

**حکم ۴.** همسایگی باز $U_1$ ای از $0 \in \mathfrak{h}$ چنان وجود دارد که $\exp|_{U_1}$ در شرایط قضیهٔ ۳.۱.۲ صدق می‌کند.

فرض کنیم $U$ مانند در حکم ۳ است. نظر به فرمول کبه برای گروههای لی (قضیهٔ ۶.۲.۳)، حکم ۱ و اینکه $U$ همسایگی‌ای از $0 \in \mathfrak{h}$ می‌باشد، همسایگی بازی از $0 \in U$ می‌توانیم بیابیم که به ازای هر $X$ و $Y$ در این همسایگی، $\log(\exp(X)\exp(Y))$. (لازم به ذکر است که قبلاً فرض نموده‌ایم که بر همسایگی بازی از $0 \in \mathfrak{h}$ کار می‌کنیم که $\exp$ بر آن دیفیومورفیسم است.) با ترکیب این مطلب با گزارهٔ ۴.۳.۲ نتیجه می‌گیریم که همسایگی بازی $U_1$ از $0$ در $U$ چنان می‌توانیم انتخاب کنیم که $\exp|_{U_1}$ بر آن همیومورفیسم است و نگاشت

$$(X, Y) \mapsto \log(\exp(X)\exp(Y)) \qquad (۲۰.۳)$$

از $\{(X, Y) \mid \exp(X) \cdot \exp(X) \in \exp(U_1)$ و $X, Y \in U_1\}$ به $U_1$ تحلیلی است. همچنین روشن است که نگاشت

$$X \mapsto \log((\exp(X))^{-1}) = -X \qquad (۲۱.۳)$$

بر $\{X \mid (\exp(X))^{-1} \in U_1$ و $X \in U_1\}$. فرمولهای (۲۰.۳) و (۲۱.۳) نشان می‌دهند که شرایط قضیهٔ ۱.۳.۳ توسط $\exp|_{U_1}$ تأمین می‌گردد. به این ترتیب بنابه قضیهٔ ۳.۱.۲ $H$ گروه لی است و اثبات قضیهٔ ۱.۳.۳ تکمیل گردید. □

**۲.۳.۳ یادداشت.** بعد از مدتی از طرح این حکم، خواننده با این مطلب جالب برخورد خواهد نمود که جبر لی $H$ (در حد ایزومورفیسم) دقیقاً همان $\mathfrak{h}$ مطرح شده در برهان بالا می‌باشد. این مطلب را در فصل ۵ اثبات خواهیم نمود.

## بخش ۴.۳ گروه لی همبند ساده

به بیان شهودی، در صورتی یک فضای توپولوژی را همبند ساده گوئیم که «حفره» نداشته باشد. اصلی‌ترین حکم در مورد گروههای توپولوژی همبند ساده این است که اگر $G$ یک گروه توپولوژی همبند ساده و $H$ یک گروه (مجرد) باشد و $U$ همسایگی بازی از $e$ در $G$ و $f$ تابعی از $U$ بتوی $H$ باشد که به ازای هر $x, y \in U$ که $xy \in U$ داشته باشیم $f(xy) = f(x)f(y)$، آنگاه می‌توان $f$ را به یک همومورفیسم بر کل $G$ توسیع داد. این حکم را در اینجا اثبات نمی‌کنیم (برای مشاهدهٔ اثباتی از آن به صفحهٔ ۳۹ از ماسنر و شوارتز [۶۴] و یا صفحهٔ ۵۴ از هاسچیلد [۶۵] مراجعه شود) ولی از آن استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که اگر $G$ و $H$ گروه لی باشند، $G$ همبند ساده بوده و $F : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ همومورفیسم لی باشد، در این صورت همومورفیسم تحلیلی $f : G \to H$ ای وجود دارد که $F = f_{*,e}$.

این مطلب وارون حکمی است که در تمرین $J - 2$ مطرح شد، منتهی برای گروههای لی همبند ساده.

**۱.۴.۳ تعریف.** فرض کنید $M$ فضای توپولوزی هاوسدورف است.

(۱) **مسیر** در $M$ نگاشتی پیوسته به فرم $f:[0,1]\to M$ می‌باشد. $f(0)$ و $f(1)$ را **نقاط انتهایی** $f$ می‌نامند، و اگر $f(0)=f(1)$، آنگاه می‌گوئیم که $f$ یک **مسیر بسته در نقطهٔ پایه‌ای** $f(0)$ است.

(۲) فضای $M$ را در صورتی **همبند راهی** گوئیم که هر جفت از نقاط در $M$ را نقاط انتهایی مسیری در $M$ بتوان دانست.

(۳) فضای $M$ را در صورتی **همبند ساده** گوئیم که همبند راهی بوده و نقطه‌ای $p_0$ در $M$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر مسیر بسته $f$ در $M$ با نقطهٔ پایه‌ای $p_0$، نگاشتی پیوسته $h:[0,1]\times[0,1]\to M$ وجود داشته باشد که

الف) $h(s,0)=f(s)$ و به ازای هر $s\in[0,1]$ ای $h(s,1)=p_0$، و

ب) به ازای هر $t\in[0,1]$ ای $h(0,t)=p_0=h(1,t)$.

**۲.۴.۳ توضیح.** روشن است که هر فضای همبند راهی، همبند است و در قسمت (۲) از تمرین $D-3$ نشان داده می‌شود که هر منیفلد همبند، همبند راهی است. بنابراین، منیفلد وقتی و تنها وقتی همبند است که همبند راهی باشد.

تعریف همبند ساده برای فضای همبند راهی را این طور می‌توان تعبیر نمود که نقطه‌ای بخصوص در فضا وجود دارد طوری که هر مسیر بسته با پایهٔ در آن نقطه، به شکل پیوسته قابل دگردیسی به همان نقطه است (به بیان دیگر، فضا «حفره» نداد). علم مطالعهٔ مسیرها و دگردیسیها را **نظریهٔ هوموتوپی**[۳] می‌نامند. به بیان مختصر، دو مسیر را در صورتی **هم‌ارز** گوئیم که بتوان هر یک دگردیسی پیوسته بین آنها تعریف نمود. چنانچه حاصلضرب دو مسیر بسته در یک نقطهٔ ثابت را مسیر بستهٔ حاصل از طی مسیر اول و سپس مسیر دوم تعریف کنیم، آنگاه می‌توان بر مجموعهٔ مسیرهای بستهٔ در آن نقطه یک ساختار گروهی تعریف نمود. گروه حاصل به پیمانهٔ رابطهٔ هم‌ارزی مشروح در بالا را **گروه بنیادیِ فضا در آن نقطهٔ مشخص** می‌نامیم. می‌توان نشان داد که چنانچه دو نقطه را با مسیری پیوسته بتوان بهم متصل نمود، در این صورت گروه بنیادی در آن دو نقطه ایزومورفند. در نتیجه، اگر فضایی همبند باشد، آنگاه گروه بنیادی در تمام نقاط آن ایزومورفند و می‌توان از **گروه بنیادیِ فضا**[۴] سخن گفت. با توجه به نظریهٔ هوموتوپی و تعریف بالا می‌توان اظهار نمود که «وقتی و تنها وقتی یک فضای مفروض همبند ساده است که همبند راهی بوده و گروه بنیادی آن همانی باشد».

**۳.۴.۳ تعریف.** فرض کنید $G$ و $H$ گروه لی باشند. اگر $f:G\to H$ نگاشتی تحلیلی از یک همسایگی باز $U$ شامل $e$ در $G$ باشد و به ازای هر $x,y\in U$ ای که $xy\in U$ داشته باشیم $f(x)\cdot f(y)=f(xy)$. آنگاه $f$ را **هومورفیسم موضعی** (-ِ گروههای لی) می‌نامیم. چنانچه $f^{-1}$ نیز بر یک همسایگی باز شامل $e$ در $H$ موجود باشد، $f$ را **ایزومورفیسم موضعی** می‌نامیم. در این حالت گفته می‌شود که $G$ و $H$ موضعاً ایزومورفند[۵].

[۳] Homotopy theory
[۴] fondamental group
[۵] locally isomorphic

در تمرین $J-2$ خواسته شده است تا ثابت کنید که اگر $G$ و $H$ گروه لی بوده و $f:G\to H$ هومورفیسمی تحلیلی باشد، در این صورت $f_{*,e}\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ هومورفیسم لی است. با کمی اصلاح در برهان آن مسأله می‌توان نشان داد که اگر فقط $f$ هومورفیسم موضعی باشد، در این صورت همچنان حکم برقرار است.

**۴.۴.۳ قضیه.** فرض کنید $G$ و $H$ گروه لی باشند و $F:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ هومورفیسم لی است. در این صورت یک هومورفیسم موضعی $f$ از یک همسایگی $e\in G$ بتوی $H$ وجود دارد به گونه‌ای که $f_{*,e}=F$. این هومورفیسم موضعی یکتا است، به این معنی که اگر $g$ یک هومورفیسم دیگر با چنینی خاصیتی باشد، آنگاه $f$ و $g$ بر یک همسایگی از $e\in G$ با هم برابرند.

برهان: اگر $f$ هومورفیسمی موضعی از یک همسایگی باز از $e\in G$ بتوی $H$ باشد که $f_{*,e}=F$، آنگاه بنابه دومین قسمت از تمرین $F-2$ بر یک همسایگی از $0\in\mathfrak{g}$ داریم $f\circ\exp_G=\exp_H\circ F$. بنابراین یکتایی هومورفیسم موضعی مورد نظر نشان داده شد. از این فرمول برای نشان دادن وجود چنین هومورفیسم موضعی‌ای استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $U_G$ همسایگی‌ای از $0\in\mathfrak{g}$ باشد که $\exp_G$ بر آن دیفئومورفیسم می‌باشد، و نیز $V_G$ همسایگی بازی از $\in U_G$ باشد که تابع

$$\eta_G:(X,Y)\mapsto\log(\exp X\ \exp Y)$$

بر $V_G\times V_G$ تحلیلی است. همچنین فرض می‌کنیم تابع مذکور را بر این همسایگی به شکل مجموع نامتناهی $\sum_m r_mZ_m(X,Y)$ بسط داده‌ایم که $r_m$ ها اعداد حقیقی و $Z_m(X,Y)$ ها حاضلضربهای لی چند گانه از عناصر $\{X,Y\}$ می‌باشند (به ۶.۲.۳ توجه شود). به صورت مشابه $\eta_H$، $U_H$ و $V_H$ را برای گروه لی $H$ انتخاب می‌کنیم. علاوه بر همهٔ اینها فرض می‌کنیم $U_G$ طوری است که $F(U_G)\subseteq U_H$ (به دلیل خطی بودن و در نتیجه پیوستگی $F$، این فرض محالی نیست). در این صورت چون $F$ هومورفیسم لی می‌باشد، به ازای هر $X,Y\in V_G$ ای

$$\begin{aligned}(F\circ\eta_G)(X,Y) &= F\left(\sum_m r_mZ_m(X,Y)\right)\\ &= \sum_m r_mZ_m(F(X),F(Y))\\ &= \eta_H(F(X),F(Y))\end{aligned}$$

$f:\exp(V_G)\to H$ را به صورت $f(\exp X)=\exp\circ F(X)$ تعریف می‌کنیم که $X\in V_G$ دلخواه است. اگر $x$، $y$ و $xy$ در $\exp(V_G)$ واقع باشند، در این صورت $X,Y\in V_G$ ای چنان یافت می‌شوند که $\exp X=x$، $\exp Y=y$، $(\exp\circ\eta_G)(X,Y)=xy$ و $\eta_G(X,Y)\in V_G$. به این ترتیب با توجه به خواص $\eta_G$، $\eta_H$ و $F$ مشروح در بالا و تعریف $f$ داریم

$$\begin{aligned}f(xy) &= f(\eta_G(X,Y))=\exp(F\circ\eta_G)(X,Y)\\ &= \exp(\eta_H(F(X),F(Y)))=\exp F(X)\cdot\exp F(Y)\\ &= f(\exp X)\cdot f(\exp Y)=f(x)\cdot f(y)\end{aligned}$$

و بنابراین، همانطوری که انتظار می‌رفت $f$ هومومورفیسم موضعی است. □

به کمک تعمیم احکامی که در ابتدای این بخش متذکر شدیم، دو موضوع زیر را از قضیهٔ ۴.۴.۳ می‌توان نتیجه گرفت.

**۵.۴.۳ نتیجه.** فرض کنید $G$ و $H$ گروه لی‌اند و $G$ همبند ساده است. در این صورت اگر $F:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ هومومورفیسم لی باشد، آنگاه هومومورفیسم تحلیلی منحصر بفردی $f:G\to H$ وجود دارد که $f_{*,e}=F$.

**۶.۴.۳ نتیجه.** فرض کنید $G$ و $H$ گروه لی همبند ساده باشند. در این صورت وقتی و تنها وقتی $G$ و $H$ به عنوان دو گروه لی ایزومورفند که $\mathfrak{g}$ و $\mathfrak{h}$ به عنوان دو جبر لی ایزومورف باشند.

**۷.۴.۳ گروه پوششی.** نظریهٔ گروههای پوششی (همبند ساده) در مطالعهٔ موضعی گروههای لی نقشی حیاتی را ایفاء می‌نماید. اصلی‌ترین بحث در این نظریه این است که به هر گروه لی $G$ یک گروه لی همبند ساده $\tilde{G}$ چنان نظیر می‌گردد که $\tilde{G}$ و $G$ موضعاً ایزومورفند. (برای مشاهدهٔ برهانی از این حکم جالب توجه به صفحهٔ ۴۲ از هازنر و شوارتز [۶۴] و یا صفحهٔ ۱۳۴ از هاسچیلد [۶۵] مراجعه شود.) از نتیجهٔ ۶.۴.۳ چنین استنباط می‌گردد که $\tilde{G}$ تنها گروه لی همبند سادهٔ با این ویژگی می‌باشد. $\tilde{G}$ را **گروه پوششی** $G$ می‌نامند. اهمیت گروههای لی موضعاً ایزومورف وقتی روشن می‌گردد که (تمرین $E-3$ را) بدانیم که دو گروه لی مفروض وقتی و تنها وقتی موضعاً ایزومورفند می‌باشند که جبر لی آن دو ایزومورف باشند. بعلاوه چندی قبل دیدیم که در هر دسته از گروههای لی موضعاً ایزومورف گروهی وجود دارد که همبند ساده است و گروه پوششی سایر اعضاء این دسته می‌باشد.

اگر $G$ گروه لی با گروه پوششی $\tilde{G}$ باشد، هومومورفیسمی از $\tilde{G}$ بتوی $G$ که توسیع ایزومورفیسم موضعی بین $\tilde{G}$ و $G$ می‌باشد را با نماد $p:\tilde{G}\to G$ نشان می‌دهیم. چنانچه $G$، $\tilde{G}$ و $p$ همانند بالا مرتبط باشند، خواهیم گفت که «$p:\tilde{G}\to G$ گروه پوششی همبند سادهٔ $G$ است». چون $p$ دیفئومورفیسم موضعی است، $p(\tilde{G})$ یک همسایگی از عنصر همانی $G$ می‌باشد، و سپس می‌توان از ۵.۱.۲ کمک گرفته و نشان داد که چنانچه $G$ همبند باشد، آنگاه $p$ پوشا است.

## بخش ۵.۳ یادداشت.

برخی (همچون ماگوس، کاراس و سولیتار [۴۴]) فرمولی را که ما تحت عنوان فرمول کمبل-بکیر-هاوسدورف بررسی نمودیم (یعنی همان فرمول کبه)، فرمول بکیر-هاوسدورف می‌نامند و برخی نیز فرمول کمبل-هاوسدورف (همچون هاسچیلد [۶۵]) می‌نامند. البته برخی نیز (همچون هازنر و شوارتز [۶۴]) آن را مانند ما فرمول کمبل-بکیر-هاوسدورف می‌نامند. این فرمول اول بار در سال ۱۸۹۸ بر اساس نماهای عملگرهای (خطی بین فضاهای تابعی) مطرح گردید (به کمبل [۶] مراجعه شود). اما به مسألهٔ همگرایی سری موجود در فرمول (آن گونه که ما در مورد گروههای لی دیدیم) توجهی نشد. این خلاء و یا به تعبیری فراموشی بطور مجزا از هم توسط بیکر در سال ۱۹۰۵ (به بیکر [۳] مراجعه شود) و سپس هاوسدورف در سال ۱۹۰۶ (به هاوسدورف [۲۷] مراجعه شود) مرتفع گردید. ایشان این کار را با طرح نوع جبری فرمول کبه (آنچنان که در ۳.۱.۳ آورده شد) برای جبرهای لس غیر تعویضپذیر بر $\mathbb{R}$ به انجام رسانیدند. نقش اساسی فرمول کبه در ایجاد ارتباط بین ساختار یک گروه لی و ساختار جبر لیِ آن به کمک نگاشت نمایی می‌باشد. با نگاهی به دو کاربرد مشروح در بالا می‌توان به اهمیت این فرمول پی‌برد.

نوعی از فرمول کبه وجود دارد که در برخی از مراجع ذکر می‌شود: اگر $G$ گروه لی باشد، در این صورت به ازای هر $X, Y \in \mathfrak{g}$ ای

$$\exp(tX)\ \exp(tY) = \exp\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)\right)$$

االبته باید متذکر شویم که $\varepsilon = \varepsilon(X,Y) > 0$ ای وجود دارد که به ازای هر $|t| < \varepsilon$ ای $O(t^3)$ به زیر جبر لی تولید شده توسط $\{X,Y\}$ در $\mathfrak{g}$ تعلق دارد. شایان ذکر است که دو کاربرد از فرمول کبه می‌توان مطرح نمود که در آن از شکل کامل این فرمول استفاده می‌گردد (به هلگاسن [۲۸] مراجعه شود).

چنانچه می‌خواستیم تا از فرمول مختصر کبه در بحثمان استفاده کنیم، بایستی ابتدا اطمینان پیدا می‌کردیم که «$\varepsilon > 0$ ای وجود دارد که هر گاه $X, Y \in B$ و $|t| < \varepsilon$، آنگاه $O(t^3)$ به زیر جبر لی تولید شده توسط $\{X,Y\}$ در $\mathfrak{g}$ تعلق دارد. اگر تنها بدانیم که $X, Y \in \mathfrak{g}$، آنگاه با دنبال نمودن برهان ۲.۲.۳ به این نتیجه خواهیم رسید که فرمول کبه تنها هنکامی درست خواهد بود که

$$|t| < \varepsilon \cdot \min\left\{\|X\|^{-1}, \|Y^{-1}\|\right\}.$$

## بخش ۶.۳ تمرینات

$(3-A$ در صورتی می‌گوئیم جبر لی $\mathfrak{g}$ تعویضپذیر است که به ازای هر $X, Y \in \mathfrak{g}$ ای $[X,Y] = 0$. نشان دهید که گروه لی همبند وقتی و تنها وقتی آبلی است که جبر لی آن تعویضپذیر باشد.

$(3-B$ فرض کنید $G$ یک گروه لی آبلی با جبر لی $\mathfrak{g}$ است.

۱) تنها ساختار جمعی موجود بر $\mathfrak{g}$ را در نظر گرفته و نشان دهید که $\exp : \mathfrak{g} \to G$ هومورفیسم بین گروهها می‌باشد.

۲) نشان دهید که هستهٔ نگاشت نمایی گسسته بوده و به فرم $\mathbb{Z}X_1 + \cdots + \mathbb{Z}X_m$ می‌باشد، که $\mathbb{Z}$ گروه جمعی اعداد صحیحی است و $\{X_1, \cdots, X_m\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای در $\mathfrak{g}$ می‌باشد.

۳) نشان دهید که اگر $G$ همبند و آبلی باشد، آنگاه نگاشت نمایی $\exp : \mathfrak{g} \to G$ پوشا است و بعلاوه وقتی و تنها وقتی گروه لی $G$ همبند و آبلی است که به فرم $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ باشد، که $n$ بعد $G$ است. (این مطلب را در فصل ششم در مورد گروههای لی فشرده نشان خواهیم داد.)

۴) همهٔ گروههای لی آبلی فشرده را مشخص کنید.

$(3-C$ سومین جملهٔ موجود در $Z$ فرمول کبه ۳.۱.۳ را استخراج کنید.

$(3-D$ ۱) نشان دهید که هر فضای توپولوژی هاوسدورف و همبند راهی، همبند است.

۲) نشان دهید که هر منیفلد همبند، همبند راهی است. (راهنمایی: فرض کنید $M$ منیفلدی همبند است، $p \in M$ و $M_p$ نمایشگر زیر مجموعه‌ای از $M$ می‌باشد که از همهٔ نقاط قابل اتصال به $p$ توسط مسیرهای در $M$ هستند. سپس نشان دهید که $M_p$ هم باز است و هم بسته می‌باشد.) به یادداشت قسمت (۲) در ۳.۱.۴ نیز توجه شود.

$3-E$) به کمک قضیهٔ ۴.۴.۳ نشان دهید که شرط لازم و کافی برای اینکه دو گروه لی مفروض موضعاً ایزومورف باشند این است که جبر لی آنها ایزومورف باشند.

$3-F$) همهٔ جبرهای لی ۱-بعدی را معرفی نموده و سپس نشان دهید که $\mathbb{T}$ و $\mathbb{R}$ گروههای لی ۱-بعدی همبند می‌باشند.

$3-G$) فرض کنید $p:\tilde{G}\to G$ گروه پوششی همبند سادهٔ $G$ است. نشان دهید که اگر $G$ همبند ساده نباشد، آنگاه $p$ یکبیک نیست. (چون $p_{*,e}$ همواره یکبیک است، این حکم تعمیمی از قسمت (۲) از تمرین $H-2$ می‌باشد.)

$3-H$) فرض کنید $G$ گروه لی است و $X,Y\in\mathfrak{g}$. زیر گروههای ۱-پارامتری نظیر به آنها ($\theta_1$ و $\theta_2$) را به صورت

$$\theta_1(t)=\exp(tX),\ \ \theta_2(t)=\exp(tY),\ \ t\in\mathbb{R}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که به ازای هر $t\in\mathbb{R}$ ای حدود

$$\begin{aligned}\theta_3(t) &= \lim_{t\to\infty}\left\{\theta_1\!\left(\frac{t}{n}\right)\theta_2\!\left(\frac{t}{n}\right)\right\}^n\\ \theta_4(t) &= \lim_{t\to\infty}\left\{\theta_1\!\left(\frac{-\sqrt{t}}{n}\right)\theta_2\!\left(\frac{-\sqrt{t}}{n}\right)\theta_1\!\left(\frac{\sqrt{t}}{n}\right)\theta_2\!\left(\frac{\sqrt{t}}{n}\right)\right\}^{n^2}\end{aligned}$$

وجود دارند. برای این منظور نشان دهید که $\theta_3$ و $\theta_4$ زیر گروههای ۱-پارامتری می‌باشند

$$\theta_3(t)=\exp\left(t(X+Y)\right),\qquad \theta_4(t)=\exp\left(t[X,Y]\right)$$

# فصل ۴

# هندسهٔ گروه لی

دو حکم اصلی این فصل در ارتباط با گروههای لی همبند کاملی که متر ریمانی ناوردای می‌پذیرند می‌باشد. گروههای لی همبند فشرده به این خانواده از گروههای لی تعلق دارند. ابتدا نشان خواهیم داد که در این گونه از گروههای لی، ژپودزیها همان زیر گروههای لی ۱-پارامتری (قضیهٔ ۳.۳.۴) و سپس به عنوان یک نتیجه (نتیجهٔ ۵.۳.۴) نشان خواهیم داد که نگاشت نمایی یک چنین گروههای لی پوشا می‌باشند. طرح این احکام فقط به جهت اهمیت ذاتی آنها است و در اثبات قضایای ساختاری در فصل ۶ از آنها استفاده نخواهند شد.

اولین بخش از این فصل به توصیف مختصری از منیفلدهای ریمانی اختصاص دارد (و چند حکم بدون برهان نیز ارائه خواهد شد) و دومین بخش از آن به بیان شرط لازم و کافی برای اینکه گروه لی مفروضی بتواند متر ریمانی ناوردا بپذیرد اختصاص دارد. در بخش سوم به کمک این مطالب به اثبات قضایای مشروح در بالا می‌پردازیم.

## بخش ۱.۴ منیفلد ریمانی

در خلال این بخش فرض بر این است که $M$ منیفلدی تحلیلی می‌باشد. با انتخاب $p$ در $M$ و ارائهٔ یک نرم در $T_p(M)$ می‌توان به طریق زیر مفهوم فاصلهٔ را در یک همسایگی «بینهایت کوچک» از $p$ تعریف نمود. چنانچه همهٔ مشکلات احتمالی در برخورد با بینهایت کوچکها را مرتفع بدانیم و اگر $q$ نقطه‌ای در همسایگی بینهایت کوچک مورد نظر از $p$ قرار داشته باشد، در این صورت فرض می‌کنیم که $\xi$ یک منحنی تحلیلی بر $M$ باشد که $\xi(0) = p$ و $\xi(\delta t) = q$. فاصلهٔ بین $p$ و $q$ را $\delta t$ برابر نرم بردار مماس به $\xi$ در $p$ تعریف می‌کنیم. بعلاوه چنانچه در هر یک از فضاهای $T_p(M)$ (که $p \in M$ دلخواه است) نرمی تعریف گردد، آنگاه با تقسیم نمودن یک منحنی به قطعات «بینهایت کوچک»، تعیین طول هر یک از آنها و سپس محاسبهٔ مجموع آنها (به کمک انتگرال)، می‌توانیم طول یک منحنی واقع بر منیفلد $M$ را تعریف کنیم. در این بخش به بیان مبانی نظری لازم برای طرح این مفهوم می‌پردازیم.

**۱.۱.۴ تعریف.** در صورتی منفلد تحلیلی $M$ را **ریمانی** (یا دارای **متر ریمانی**) گوئیم که به ازای هرنقاطهٔ دلخواه $p$ از $M$، یک ضرب داخلی (یعنی، یک فرم دوخطی، مثبت معین و متقارن) $\langle\ ,\ \rangle_p$ بر $T_p(M)$ به گونه‌ای تعریف گردد که: اگر $X$ و $Y$ میدانهای برداری تحلیلی باشند، آنگاه نگاشت $p \mapsto \langle X(p), Y(p)\rangle_p$ از $M$ به $\mathbb{R}$ تحلیلی باشد.

به محض اینکه بر منیفلدی متر ریمانی ارائه گردد، به سادگی می‌توان مفهوم طول منحنی‌ها بخصوصی را مطرح نمود. فرض کنید $a,b \in \mathbb{R}$ و $a \leq b$. اگر $\xi$ یک منحنی تحلیلی از $[a,b]$ به $M$ باشد (یعنی، $\varepsilon\rangle 0$ ای وجود داشته باشد که بتوان $\xi$ را به نگاشتی تحلیلی از $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ به $M$ توسیع داد)، در این صورت $\xi$ را **منحنی تحلیل در** $M$، یا ساده‌تر **منحنی در** $M$ می‌گوئیم. **منحنی تحلیل شکسته در**$M$ نگاشت $\xi : [a,b] \to M$ ای که به ازای یک افراز مناسب از $[a,b]$، $\xi$ بر هر یک از زیر بازه‌های بستهٔ آن افراز منحنی تحلیلی است.

با کمک اصلاح در نمادگزاری می توانیم حالت $a = -\infty$، $b = \infty$ و یا هر دو با هم را در نظر بگیریم. در حالتی که $a$ و $b$ متناهی‌اند، $\xi(a)$ و $\xi(b)$ را نقاط انتهایی $\xi$ می‌نامیم.

**۲.۱.۴ تعریف.** در صورتی که $[a,b]$ بازه‌ای کراندار در $\mathbb{R}$ و $\xi : [a,b] \to M$ منحنی تحلیلی‌ای در منیفلد ریمانی $M$ باشد، **طول منحنی** $\xi$ را

$$L_{p,q} := \int_a^b \left\|\xi_{*,t}(1)\right\|_{\xi(t)} dt$$

تعریف می‌کنیم، که $p$ و $q$ نقاط انتهایی $\xi$ هستند و $\left\|\xi_{*,t}(1)\right\|^2_{\xi(t)} := \langle \xi_{*,t}(1), \xi_{*,t}(1)\rangle_{\xi(t)}$ . بصورت مشابه چنانچه $\xi$ منحنی شکسته‌ای باشد، **طول** $\xi$ را برابر مجموع طول هر یک از منحنی‌های تحلیلی سازندهٔ آن تعریف می‌کنیم.

**۳.۱.۴ یادداشت.** **(۱)** روشن است که طول منحنی به انتخاب متر ریمانی تعریف شده بر منیفلد زمینه‌اش بستگی دارد (یعنی، مترهای مختلف باعث بدست آمدن طولهای مختلفی برای یک منحنی واحد می‌شوند). از سوی دیگر طول منحنی از انتخاب پارامتر توضیح دهندهٔ آن مستقل می‌باشد. (به تمرین $B-4$ توجه شود.)

**(۲)** تمرین $D-3$ نشان می‌دهد که شرط لازم و کافی برای همبند راهی بودن یک منفلد، همبند بودن آن می‌باشد. با استدلال بکار رفته برای حل این تمرین می‌توان نشان داد که هر دو نقطه از یک منیفلد همبند را توسط یک منحنی تحلیلی شکسته می‌توان بهم وصل نمود.

**۴.۱.۴ مثال.** در مورد منیفلد تحلیلی $\mathbb{R}^n$، به ازای هر $p \in \mathbb{R}^n$ ای $T_p(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. به ازای $x, y \in \mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم

$$\langle x, y\rangle_p := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

که $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. به این ترتیب به یک متر ریمانی بر $\mathbb{R}^n$ می‌رسیم، زیرا به ازای هر $p$ ای $\langle\ ,\ \rangle_p$ یک ضرب داخلی است و چنانچه $X$ و $Y$ میدانهای برداری تحلیلی باشند، آنگاه نگاشت $p \mapsto \langle X(p), Y(p)\rangle_p$ از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ تحلیلی می‌باشد. (برای مشاهدهٔ جزئیات بیشتر به تمرین

$A-4$ توجه شود.) اگر $\xi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ منحنی تحلیلی باشد، آنرا بر حسب مختصات در $\mathbb{R}^n$ به صورت $\xi(t)=(\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t))$ می‌توان نوشت. در این صورت طول منحنی $\xi$ نسبت به متر ریمانی مشروح در بالا عبارت است از

$$\begin{aligned}\int_a^b \left\|\xi_{*,t}(1)\right\|_{\xi(t)} dt &= \int_a^b \left\langle \left\|\xi_{*,t}(1)\right\|_{\xi(t)}, \left\|\xi_{*,t}(1)\right\|_{\xi(t)} \right\rangle^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \left(\xi_1'(t),\cdots,\xi_n'(t)\right)^{1/2} dt\end{aligned}$$

که همان فرمول معروف طول منحنی در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

**۵.۱.۴ فاصله.** اگر $p$ و $q$ دو نقطهٔ دلخواه از منیفلد ریمانی همبند $M$ باشند، در این صورت **فاصلهٔ** $d(p,q)$ این دو نقطه $p$ و $q$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(p,q) := \inf\left\{L_{p,q}(\xi) \,\middle|\, \text{است } q \text{ و } p \text{ نقاط انتهایی با یک منحنی تحلیلی شکسته با } \xi\right\}$$

**۶.۱.۴ متر.** **فضای متری** زوج مرتبی $(X,d)$ است از یک مجموعه $X$ و یک تابع $d$ از حاصلضرب دکارتی $X\times X$ به مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی به گونه‌ای که به ازای $x,y,z\in X$ ای

1) $d(x,y)=d(y,x)$,  2) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$,

3) $d(x,x)=0$,  4) $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$.

معمولاً هنگامی که بیم ابهامی نرود، بجای $(X,d)$ از فضای متری $X$ سخن خواهیم گفت. اگر $(X,d)$ فضای متری باشد، در این صورت گویهای باز $B_r(x):=\{y\mid d(x,y)\langle r\}$ (که $x\in X$ و $r\in[0,\infty)$ دلخواهند؛ $B_r(x)$ را گوی باز به مرکز $x$ و شعاع $r$ می‌گوئیم) تشکیل زیر پایه‌ای برای یک توپولوژی بر $M$ می‌دهند. این توپولوژی هاوسدورف بوده و دارای ثایه‌ای شمارا می‌باشد. توپولوژی مذکور را **توپولوژی متری** القایی توسط $(X,d)$ می‌نامند.

در صورتی دنبالهٔ $\{x_n\}$ در یک فضای متری دخواه را **کوشی** گوئیم که به ازای هر $\varepsilon>0$ ای یک عدد طبیعی $N$ چنان یافت گردد که به ازای هر $n,m>N$ ای $d(x_n,x_m)<\varepsilon$. اگر هر دنبالهٔ کوشی دارای نقطه‌ای حدی باشد، فضای متری را **کامل** گوئیم. برای مشاهدهٔ مباحث بیشتر در این ارتباط به فصل چهارم از کتاب کِلِی [۳۷] مراجعه شود.

حکم زیر نشان می‌دهد که توپولوژی هر فضای ریمانی یک توپولوژی متری است و بنابراین اصطلاح «متر ریمانی» وجاهت کافی را پیدا می‌کند.

**۷.۱.۴ قضیه.** فرض کنید $M$ منیفلدی ریمانی است. در این صورت تابع فاصلهٔ نظیرش، یک متر است و بعلاوه توپولوژی متری القاء شده توسط تابع فاصله بر $M$ با توپولوژی موجود بر منیفلد مذکور هم‌ارز می‌باشد.

برهان: فرض کنیم $(M,\{\varphi_\alpha\mid\alpha\in I\})$ منیفلدی ریمانی با متر ریمانی $p\mapsto\langle\,,\rangle_p$ و تابع فاصلهٔ نظیر $d$ می‌باشد. روشن است که $d$ سه ویژگی نخست در ۶.۱.۴ برای متر بودن را دارا می‌باشد. $q\in M$ را انتخاب نموده و فرض می‌کنیم $\varphi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha$ چارتی بر $M$ حول $q$ می‌باشد. بدون کاسته شدن از کلیت

بحث، فرض می‌کنیم که $q = \varphi_\alpha(0)$. فرض کنیم $M$ بر $\mathbb{R}^n$ مدل شده است و $\langle\ ,\ \rangle$ و $\|\ \|$ بترتیب نمایشگر ضرب داخلی و نرم اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ می‌باشند. در این صورت $\delta > 0$ ای وجود دارد که

$$U \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \delta\} \subseteq U_\alpha$$

اولین مرحله در نشان دادن اینکه $d$ در قسمت (۴) از ۶.۱.۴ صدق می‌کند، مشخص نمودن رفتارش بر $V$ می‌باشد.

به ازای $u = [\varphi_\alpha, u^0]_p$ و $v = [\varphi_\alpha, v^0]_p$، که $p \in V_\alpha$، به کمک رابطهٔ

$$p \mapsto \langle\ ,\ \rangle_p^0, \qquad \langle u, v\rangle_p^0 := \langle u^0, v^0\rangle \tag{۱.۴}$$

یک متر ریمانی جدید بر $V_\alpha$ تعریف می‌کنیم. (به بیان دیگر به کمک $\varphi_\alpha$ متر ریمانی طبیعی بر $U_\alpha$ را به روی $V_\alpha$ می‌نگاریم.) $\left(\langle u, v\rangle_p^0\right)^{1/2}$ را با نماد $\|u\|_p^0$ نشان می‌دهیم.

نگاشت $\mu : V_\alpha \times S^{n-1} \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $\mu(p, x) := \|[\varphi_\alpha, x]\|_p$ تعریف می‌کنیم که $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. در این صورت $\mu$ پیوسته و اکیداً مثبت می‌باشد و بنابراین چون $V_\alpha \times S^{n-1}$ فشرده است، $m, M > 0$ ای چنان وجود دارند که

$$m \leq \mu(p, x) \quad \text{بر} \quad V_\alpha \times S^{n-1} \tag{۲.۴}$$

گیریم $[\varphi_\alpha, y]_p \in T_p(M)$. در این صورت $y/\|y\| \in S^{n-1}$. در نتیجه می‌توان از ۲.۴ استفاده نموده و نشان داد که

$$\begin{aligned} m\left\|[\varphi_\alpha, y]_p\right\|_p^0 = m\|y\| &\leq \|y\| \cdot \left\|[\varphi_\alpha, y/\|y\|]_p\right\|_p \\ &\leq M\left\|[\varphi_\alpha, y]_p\right\|_p^0 \end{aligned}$$

اما $\left\|[\varphi_\alpha, y]_p\right\|_p^0 = \|y\| \cdot \left\|[\varphi_\alpha, y/\|y\|]_p\right\|_p$ و بنابراین به ازای هر $p \in V$ و $v \in T_p(M)$ ای

$$m\|v\|_p^0 \leq \|\|_p \leq M\|v\|_p^0 \tag{۳.۴}$$

فرض کنیم $r \in M$ و $r\ neqq$؛ می‌خواهیم نشان دهیم که $d(q, r) \neq 0$.

**حالت ۱، $r \in V$:** فرض کنیم $\xi : [a, b] \to M$ یک منحنی تحلیلی شکسته بانقاط انتهایی $q$ و $r$ می‌باشد. در این صورت $c \in [a, b]$ ای وجود دارد که اولاً $\xi(c)$ بر مرز $V_\alpha$ قرار دارد (فرض کنیم این نقطه $s$ باشد) و در ثانی برد $\xi$ بر $[a, c]$ در مجموعهٔ $V_\alpha$ قرار دارد. در این حالت

$$\begin{aligned} L_{q,r} &\geq L_{q,a} = \int_a^c \|\xi_{*,t}(1)\|_{\xi(t)}\, dt \\ &\geq m\int_a^c \|\xi_{*,t}(1)\|_{\xi(t)}^0\, dt \\ &= m\int_a^c \left|\left(\varphi_\alpha^{-1}\right)'(t)\right| dt \end{aligned}$$

حال $\xi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ منحنی شکسته‌ای بر $[a,c]$ در $U$ می‌باشد که از $0$ به نقطه‌ای بر مرز $U$ متصل می‌گردد و بنابراین طول آن کمتر از $\delta$ نمی‌باشد. بنابراین $L_{q,s} \geq m\delta > 0$ و در نتیجه همان طوری که انتظار داشتیم $d(q,r) \neq 0$.

**حالت ۲،** $r \in V$: با بکارگیری استدلالی شبیه به آنچه که در بالا اتفاق افتاد، ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر منحنی تحلیلی شکستهٔ $\xi : [a,b] \to M$ واصل بین $q$ و $r$، داریم $L_{q,s} \geq m\|\varphi_\alpha^{-1}(r)\| > 0$ و در نتیجه بازهم $d(q,r) \neq 0$.

پس به هر ترتیب $d$ متر است.

برای نشان دادن اینکه توپولوژی متری نظیر به $d$ با توپولوژی قبلی موجود بر $M$ هم‌ارز است، کافی است نشان دهیم که به هر نقطه از $M$ همسایگی بازی می‌توان نسبت داد که دو توپولوژی مذکور بر آن هم‌ارزند. اما این مطلب قبلاً توسط ۳.۴ به انجام رسیده است. زیرا بنابه این فرمول، به ازای همهٔ نقاط $x,y \in V$ ای

$$md^0(x,y) \leq d(x,y) \leq d^0(x,y)$$

که $d^0$ نمایشگر متر حاصل بر $V_\alpha$ با تعریف ۱.۴ می‌باشد، و در نتیجه توپولوژی طبیعی و $d^0$–توپولوژی بر $V_\alpha$ هم‌ارزند. $\square$

**۸.۱.۴ ژئودزی.** اگر $\xi : [a,b] \to M$ منحنی تحلیلی از بازهٔ کراندار $[a,b]$ به منیفلد ریمانی $M$ باشد، آنگاه در صورت $\xi$ را **ژئودزی** گوئیم که $L_{p,q}(\xi) = d(p,q)$؛ که $p$ و $q$ نقاط انتهایی $\xi$ هستند.

از دید تئوری چنانچه دو منحنی دارای دامنه‌های یکسان و توابع معرف متفاوت باشد، دو منحنی متفاوت قلمداد می‌شوند. اما، در بسیاری از موارد، اگر دو منحنی مذکور با اعمال یک تغییر متغیر تحلیلی مناسبی برابر شوند (منظور، توابع آنها است)، در این صورت دو منحنی را یکی قلمداد می‌کنند. این امر در مورد ژئودزیها صادق است، زیرا تنها به طول آنها توجه می‌شود، و بنابه تمرین $B-4$ طول منحنی نسبت به تغییر متغیر تحلیلی ناوردا می‌باشد. از بین تمام پارامترهای موجود برای ژئودزی، پارامتر طول قوس بهترین است (به تمرین $C-4$ توجه شود).

چنانچه دو نقطه‌ای به توسط یک ژئودزی بهم متصل شوند، در حالت کلی این ژئودزی منحصر بفرد نیست. (ژئودزیهای واصل بین $z=1$ و $z=-1$ در $T$ را درنظر بگیرید.) احتمالاً بررسی وجود ژئودزیها از بررسی یکتائی آنها اساسی‌تر باشد. این گفته غلط است که در حالت کلی هر دو نقطهٔ دلخواه از یک منیفلد ریمانی همبند را به توسط یک ژئودزی بهم می‌توان متصل نمود (نقاط $(-1,0)$ و $(1,0)$ در $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ را در نظر بگیرید)، ولی اگر منیفلد زمینه کامل باشد، این مطلب صحیح است. مابقیهٔ این بخش به توصیف کلی برهان این حکم اختصاص دارد؛ خوانندهٔ علاقمند می‌تواند برای مشاهدهٔ جزئیات بیشتر این بحث به بخش ۱۰ از فصل ۱ کتاب حلگاسن [۲۸] و یا بخش ۴ از فصل ۴ کتاب کوبایاشی و نومیزو [۳۹] مراجعه کند.

فرض کنیم $M$ منیفلد ریمانی کاملی با متر متناظر $d$ است. به ازای هر $p \in M$ و هر $r > 0$ ای تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} B_r(p) &:= \{q \in M \mid d(p,q) < r\} \\ E_r(p) &:= \{q \in \overline{B_r(p)} \mid \text{را توسط یک ژئودزی می‌توان بهم وصل نمود } q \text{ و } p\} \end{aligned}$$

روشن است که $\overline{B_r(p)}$، بستار $B_r(p)$ در $M$، برابر است با $\{q \in M \mid d(p,q) \le r\}$. از تمرین $4-D$ نتیجه می‌شود که به ازای هر $p \in M$، یک $\varepsilon > 0$ ای وجود دارد که $\overline{B_\varepsilon(p)} = E_\varepsilon$. بعلاوه، در مرجع ذکر شده در بالا، نشان داده شده است که $E_\varepsilon$ و $\overline{B_\varepsilon(p)}$ و فشرده‌اند.

**۹.۱.۴ قضیه.** هر جفت از نقاط در یک منیفلد همبند کامل را توسط یک ژئودزی به یکدیگر می‌توان وصل نمود.

برهان: فرض کنیم $p \in M$؛ روش اثبات این است که نشان دهیم که به ازای هر $r > 0$ ای

$$\overline{B_r(p)} = E_r(p) \tag{۴.۴}$$

همان طوری که در بالا بحث شد، $r > 0$ ای وجود دارد که به ازای آن (۴.۴) برقرار است. فرض کنیم $R$ سوپرموم همهٔ چنین $r$ هایی باشد. اگر $R = \infty$، چیزی برای اثبات نمی‌ماند. اما اگر $R$ متناهی باشد، در این صورت (۴.۴) به ازای $r = R$ نیز برقرار خواهد بود. (فرض کنیم $q \in \overline{B_r(p)}$؛ در این صورت $q$ با حد دنباله‌ای از نقاط برابر است که هر یک $\overline{B_r(p)} = E_r(p)$ ای متعلقند (و در نتیجه به خود $E_R(p)$ تعلق دارد) که $r < R$. چون $E_R(p)$ بسته است، حد این دنباله، یعنی $q$ نیز به $E_R(p)$ متعلق می‌باشد.) نشان می‌دهیم که (۴.۴) به ازای $r = R+\rho$ برقرار می‌باشد، که $\rho$ یک عدد اکیداً مثبت است.
بنابه فشردگی $\overline{B_r(p)} = E_r(p)$، تعدادی متناهی نقطه $p_1, \cdots, p_k \in E_R(p)$ و اعداد مثبت $\rho_1, \cdots, \rho_k$ چنان وجود دارند که

(۱) گرویهای باز $B_{\rho_j}(p_j)$ که $j = 1, \cdots, k$ مجموعهٔ $E_R(p)$ را می‌پوشانند؛

(۲) هر یک از این گویها فشردهٔ نسبی‌اند و بعلاوه $\overline{B_{\rho_j}(p_j)} = E_{\rho_j}(p_j)$.

چون اجتماع این گویها باز و فشردهٔ نسبی است، نسبت به متر کراندار است و متمم آن نیز بسته می‌باشد. بنابراین، نقطه‌ای در متمم وجود دارد که در فاصلهٔ حداقل تا $p$ است. این فاصله اکیداً بزرگتر از $R$ است و لذا باید $\rho$ ای وجود داشته باشد که $0 < \rho < \{\rho_1, \cdots, \rho_k\}$ و $\overline{B_{R+\rho}(p)} \subseteq \cup_{j=1}^k B_{\rho_j}(p_j)$.
حال فرض کنیم که $q$ نقطه‌ای در $M$ است، طوری که $R < d(p,q) \le R+\rho$. فرض کنیم $z$ نقطه‌ای در کرهٔ $\{x \mid d(p,x) = R\}$ است که با حد اقل فاصله با $q$ است. چون هر خم تحلیلی واصل بین $p$ و $q$ بایستی این کره را قطع کند، نتیجه می‌گیریم که

$$d(p,q) = d(p,z) + d(z,q).$$

بنابراین $d(z,q) = d(p,q) - d(p,z) < R+\rho-R = \rho$ و از چگونگی انتخاب $\rho$ نتیجه می‌گیریم که $z$ و $q$ در یک گوی مشترک مانند $B_{\rho_i}(p_i)$ از پوشش مطرح شده در بالا برای $E_R(p)$ قرار دارند. با ترکیب ژئودزی واصل بین $p$ و $z$ و ژئودزی واصل بین $z$ و $q$ (خم دوم به این دلیل وجود دارد که $B_{\rho_j}(p_j)$ در شرط (۲) صدق می‌کند)، یک خم به طول $d(p,q)$ بدست می‌آوریم که $p$ را به $q$ متصل می‌سازد. بنابراین $\overline{B_{R+\rho}(p)} = E_{R+\rho}$، که با فرض متناهی بودن $R$ در تضاد است. □

## بخش ۲.۴ متر ناوردا بر گروه لی

تعریف متر ریمانی بر گروه لی، موضوع سادهای است. فرض کنیم گروه لی $G$ بر $E$ مدل شده و $T_e(G) = \mathfrak{g} = E$ با ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle_e$ همراه شده است. به ازای هر $x \in G$ ای به صورت

$$\langle X, Y\rangle_x = \left\langle (L_{x^{-1}})_{*,x} X, (L_{x^{-1}})_{*,x} Y \right\rangle \tag{۵.۴}$$

یک ضرب داخلی بر $T_x(G)$ تعریف میکنیم، که در آن $X, Y \in T_x(G)$. با عملیاتی شبیه به آنچه که در اثبات لم ۱.۲.۲ بکار رفت، میتوان نشان داد که خانوادهٔ حاصلضربهای داخلی $x \mapsto \langle\ ,\ \rangle_x$ (که $x \in G$) به تعبیر در تعریف ۱.۱.۴ تحلیلی است و بنابراین تشکیل یک متر ریمانی میدهد.

اگر متری در رابطهٔ ۵.۴ صدق کند، در این صورت به ازای هر $x, y \in G$ و هر $X, Y \in T_x(G)$ ای

$$\left\langle \left(L_y\right)_{*,x} X, \left(L_y\right)_{*,x} Y \right\rangle_{L_y x} \tag{۶.۴}$$

رابطهٔ مذکور دقیقاً به این معنی است که $L_y$ به ازای هر $y \in G$ ای یک ایزومتری است.

**۱.۲.۴ تعریف.** فرض کنید $M$ و $N$ منیفلد ریمانی هستند و $f : M \to N$ نگاشتی دوسویی بین آنها باشد، طوری که $f$ و $f^{-1}$ تحلیلیاند و به ازای هر $p \in M$ و هر $X, Y \in T_p(G)$ ای

$$\left\langle f_{*,p} X, f_{*,p} Y \right\rangle_{f(p)} = \langle X, Y\rangle$$

در این صورت $f$ را **ایزومتری** میگوئیم.

به سادگی میشود نشان داد که اگر $M$ و $N$ منیفلدهای ریمانی همبند باشند، و نیز اگر $d_M$ و $d_N$ مترهای نظیر به آن دو باشند، در این صورت هر ازومتری $f : M \to N$ ای حافظ طول خواهد بود، یعنی به ازای هر $p, q \in M$ ای

$$d_M(p, q) = d_N(f(p), f(q))$$

(زیرا، وقتی و تنها وقتی $\xi$ یک منحنی تحلیلی شکسته واصل بین $p$ و $q$ است که $f \circ \xi$ یک منحنی تحلیلی شکسته بین $f(p)$ و $f(q)$ باشد.) از سوی دیگر، قضیهٔ ۱۱.۱ از فصل ۱ ازکتاب هلگاسن [۲۸] نشان میدهد که هر نگاشت حافظ فاصله از یک منیفلد ریمانی بتوی منیفلد ریمانی دیگر، خود به خود یک ایزومتری است؛ اما در اینجا نیازی به بیان آن نداریم.

به حالت گروه لی $G$ باز میگردیم. اگر متر ریمانی مفروضی بر چنان باشد که به ازای هر $x \in G$ ای $L_x : G \to G$ ایزومتری باشد (یعنی در فرمول (۶.۴) صدق داشته باشد)، آنگاه این متر را **ناوردای چپ** مینامیم. به صورت مشابه، چنانچه به ازای هر $x \in G$ ای $R_x : G \to G$ ایزومتر باشد، متر را **ناوردای راست** مینامیم. متر ریمانی را در صورتی **ناوردا** گوئیم که ناوردای راست و چپ باشد.

در ادامه این بخش به بیان شرط لازم و کافی مفیدی برای وجود متر ریمانی ناوردا بر یک گروه لی میرسیم. به عنوان نتیجهای از این حکم خواهیم دید که همهٔ گروههای لی فشرده، مترر ریمانی ناوردا میپذیرند.

**۲.۲.۴  نمایش الحاقی.**  فرض کنید $G$ گروه لی است و به ازای هر $x \in G$ ای

$$A_x : G \to G, \qquad g \mapsto xg^{-1}x$$

عملگر $Ad$ از $G$ به مجموعهٔ نگاشتهای خطی از $\mathfrak{g}$ به $\mathfrak{g}$ را به صورت

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \qquad x \mapsto (A_x)_{*,e} \tag{۷.۴}$$

تعریف می‌کنیم. $\mathrm{Ad}$ یک نمایش $G$ وبسیلهٔ عملگرهای خطی در $GL(\mathfrak{g})$ است، زیرا

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(xy) &= \left(A_{xy}\right)_{*,e} \\ &= \left(A_xA_y\right)_{*,e} \\ &= (A_x)_{*,e}\left(A_y\right)_{*,e} \\ &= \mathrm{Ad}(x)\mathrm{Ad}(y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{Ad}(x^{-1}) &= (A_{x^{-1}})_{*,e} \\ &= \left((A_x)^{-1}\right)_{*,e} \\ &= (A_x)^{-1}_{*,e} \\ &= \mathrm{Ad}(x)^{-1} \end{aligned}$$

این را **نمایش الحاقی** $G$ می‌نامند.  چون $A_x$ را به صورت $L_x \circ R_{x^{-1}}$ می‌توان نوشت، بنابراین به ازای هر $X \in \mathfrak{g}$ ای

$$\mathrm{Ad}(x)(X) = (L_x)_{*,x^{-1}} \circ (R_{x^{-1}})_{*,e}(X) \tag{۸.۴}$$

و سپس به کمک روش بکار رفته در لم ۱.۲.۲ می توان نشان داد که به ازای هر $X \in \mathfrak{g}$ ای نگاشت $\mathrm{Ad}(x)(X) \mapsto x$ بر $G$ تحلیلی است.  در نتیجه، نمایش الحاقی به تعبیر در بخش ۲ از ضمیمهٔ پیوسته است.

**۳.۲.۴  قضیه.**  وقتی و تنها وقتی گروه لی $G$ متر ریمانی ناوردا می‌پذیرد که $\mathrm{Ad}(G)$ در $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ فشردهٔ نسبی باشد.

برهان:     فرض کنید $G$ متر ریمانی ناوردای $x \mapsto \langle\, , \rangle_x$ را می‌پذیرد.  چون ناوردای راست است، بایستی به ازای هر $x \in G$ و هر $X, Y \in T_e(G) = \mathfrak{g}$ ای داشته باشیم

$$\left\langle (R_{x^{-1}})_{*,e}X, (R_{x^{-1}})_{*,e}Y \right\rangle_{x^{-1}} = \langle X, Y\rangle \tag{۹.۴}$$

بعلاوه، چون ناوردای چپ نیز هست، بایستی به ازای هر $x \in G$ و هر $X_0, Y_0 \in T_(G)$ ای داشته باشیم

$$\left\langle (L_x)_{*,x^{-1}}X_0, (L_x)_{*,x^{-1}}Y_0 \right\rangle_e = \langle X_0, Y_0\rangle_{x^{-1}} \tag{۱۰.۴}$$

با ترکیب (۹.۴) و (۱۰.۴) و فرض $X_0 = (R_{x^{-1}})_{*,e}X$ و $Y_0 = (R_{x^{-1}})_{*,e}Y$ و با توجه به فرمول (۸.۴) داریم

$$\langle \mathrm{Ad}(x)X, \mathrm{Ad}(x)Y\rangle = \langle X, Y\rangle_e$$

چون $\langle\ ,\ \rangle_e$ یک ضرب داخلی بر $\mathfrak{g}$ است، به ازای هر $x \in G$ ای $\mathrm{Ad}(x)$ یک عملگر متعامد بر $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ تعریف می‌کند. بنابراین $\mathrm{Ad}(G)$ زیر مجموعه‌ای از گروه متعامد $\mathrm{O}(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ است و چون این گروه فشرده است (مثال ۲.۱.۲)، بستار $\mathrm{Ad}(G)$ نیز چنین می‌باشد.

حال فرض کنیم که $\mathrm{Ad}(G)$ فشردهٔ نسبی باشد. در این صورت بستار $\mathrm{Ad}(G)$، که آنرا مثلاً $H$ می‌نامیم، زیر کروهی فشرده از $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ است و بنابراین یک اندازهٔ هار نرمال شدهٔ ناوردا مانند $\lambda$ می‌پذیرد (به بخش ۴ از ضمیمه مراجعه شود). فرض کنیم $\langle\ ,\ \rangle$ یک ضرب داخلی دلخواه بر $T_e(G)$ است (که چون $T_e(G) = \mathfrak{g}$ با بعد متناهی است، چنین ضربی همواره وجود دارد). ضرب داخلی جدیدی به صورت

$$\langle X, Y\rangle_e := \int_H (s(X), s(Y))\, d\lambda(s)$$

بر $T_e(G)$ تعریف می‌کنیم، که در اینجا $X, Y \in T_e(G)$. (ضرب داخلی بودن این نگاشت را اثبات کنید.) اگر $t \in \mathbb{R}$، در این صورت از ناوردایی اندازهٔ هار $\lambda$ نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned}
\langle t(X), t(Y)\rangle_e &= \int_H (st(X), st(Y))\, d\lambda(s)\\
&= \int_H (s(X), s(Y))\, d\lambda(s)\\
&= \langle X, Y\rangle_e
\end{aligned}$$

به ویژه، به ازای هر $x \in G$ و هر $X, Y \in T_e(G)$ ای

$$\left\langle (R_{x^{-1}})_{*,x} X, (R_{x^{-1}})_{*,x} Y\right\rangle_e = \langle X, Y\rangle_x$$

در این صورت، با استفاده از ناوردایی $\langle\ ,\ \rangle_e$ نسبت به نمایش الحاقی و ناوردایی متر نسبت به انتقالهای راست داریم

$$\begin{aligned}
\left\langle (R_{x^{-1}})_{*,x} X, (R_{x^{-1}})_{*,x} Y\right\rangle_e &= \left\langle \mathrm{Ad}(x^{-1})(R_{x^{-1}})_{*,x} X, \mathrm{Ad}(x^{-1})(R_{x^{-1}})_{*,x} Y\right\rangle_e\\
&= \left\langle (L_{x^{-1}})_{*,x} X, (L_{x^{-1}})_{*,x} Y\right\rangle_e\\
&= \langle X, Y\rangle_x.
\end{aligned}$$

و به این ترتیب، برهان تمام است. □

**۴.۲.۴ نتیجه.** وقتی و تنها وقتی متر ریمانی $x \mapsto \langle\ ,\ \rangle_x$ بر گروه لی $G$ ناوردا است که به ازای هر $x \in G$ و $X, Y \in T_e(G)$ ای

$$\left\langle \mathrm{Ad}(x^{-1})(R_{x^{-1}})_{*,x} X, \mathrm{Ad}(x^{-1})(R_{x^{-1}})_{*,x} Y\right\rangle_e = \langle X, Y\rangle_e$$

نمایش الحاقی از $G$ بتوی $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ پیوستهٔ یکشکل است و بنابراین، اگر $G$ فشرده باشد، در این صورت $\mathrm{Ad}(G)$ نیز فشرده خواهد بود. بنابراین

**۵.۲.۴ نتیجه.** هر گروه فشرده، متر ریمانی ناوردا می‌پذیرد.

## بخش ۳.۴ ژئودزی بر گروه لی

فرض کنید $M$ منیفلدی تحلیلی بوده و $\xi : [a;b] \to M$ یگ منحنی بر $M$ باشد، در این صورت اگر $a \leq c \leq d \leq b$، $\xi : [c;d] \to M$ را یک **پارهٔ از** $\xi$ می‌نامیم. روشن است که در حالت $\mathbb{R}^n$، وقتی و تنها وقتی یک منحنی مفروض ژئودزی است که انتقال یافتهٔ یک پاره از یک زیر گروه ۱−پارامتری $\mathbb{R}^n$ باشد. در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که با در نظر داشتن تغییراتی جزئی، این حکم برای هر گروه لی دلخواهی که متر ریمانی ناوردا بپذیرد نیز صحیح می‌باشد. این امر ما را قادر خواهد ساخت تا نشان دهیم که هر چنین گروه لی‌ای که همبند و کامل نیز باشد، نگاشت نمایی پوشا است.

در حالت کلی درست نیست که گفته شود هر پارهٔ از یک زیر گروه ۱−پارامتری، ژئودزی است. بعنوان مثال، منحنی $\xi_k(t) = e^{tki}$ (که $k \in \mathbb{Z}$) از $[0, 2\pi]$ به $T$، یک پاره از یک زیر گروه ۱−پارامتری از $T$ است، ولی روشن است که اگر $k \neq 0$، آنگاه $\xi_k$ ژئودزی نیست. ولی، ژئودزیر موضعی می‌باشد:

**۱.۳.۴ ژئودزی موضعی.** منحنی $\xi$ از بازهٔ کراندار $[a;b]$ بتوی منیفلد ریمانی $M$ را در صورتی **ژئودزی موضعی** گوئیم که بردش را با مجموعه‌های باز چنان بتوان پوشاند که هر یک از پاره‌های منحنی واقع در هر یک از این مجموعه‌ها، ژئودزی باشد.

از سوی دیگر، باید متذکر شویم که ممکن است یک ژئودزی مفروض با انتقال یافتهٔ یک زیر گروه ۱−پارامتری برابر نباشد، بلکه پس از اعمال یک تغییر متغیر مناسب یک چنین موردی برقرار باشد. مثلاً، $\xi : [0;1] \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $\xi(t) = t^2$ یک ژئودزی واصل بین $0$ و $1$ است، ولی انتقال یافتهٔ هیچ زیر گروه ۱−پارامتری از $\mathbb{R}$ نیست. در حالی که $\xi$ بر پارهٔ $[0;1]$ از خود زیر گروه ۱−پارامتری $\theta(t) = t$ منطبق است.

**۲.۳.۴ منحنی‌های منطبق.** دو منحنی تحلیلی شکسته بر یک منیفلد تحلیلی را در صورتی **منطبق** گوئیم که برد برابر داشته باشند.

از تمرین $B - 4$ نتیجه می‌گردد که طول منحنی‌های منطبق، برابر است و بنابراین، شرط لازم و کافی برای اینکه یک منحنی یکبیک مفروض ژئودزی باشد، این است که هر منحنی یکبیک منطبق با آن نیز ژئودزی باشد.

**۳.۳.۴ قضیه.** فرض کنید $G$ یک گروه لی با متر ریمانی ناوردا است. هر ژئودزی در $M$ با انتقال یافتهٔ یک پاره از یک زیر گروه ۱−پارامتری منطبق است و (تقریباً برعکس) هر چنین انتقال یافته‌ای یک ژئودزی موضعی می‌باشد.

لم زیر در اثبات بخش اول از قضیه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

**۴.۳.۴ لم.** فرض کنید $\sigma$ یک ایزومتری از منیفلد ریمانی $M$ است و $\sigma^2$ ایزومتری همانی است. فرض کنید $x$ یک نقطهٔ ثابت ایزوله از $\sigma$ است و $U$ همسایگی‌ای از $x$ می باشد که (۱) هر جفت نقطه در $U$ را توسط یک ژئودزی منحصر بفرد (البته در حد منحنی‌های منطبق) بتوان وصل نمود (به تمرین $D - 4$توجه شود) و (۲) $U$ هیچ نقطهٔ ثابت دیگری از $\sigma$ بجز $x$ را در بر ندارد. در این صورت، اگر $y$ و $\sigma(y)$ در $U$ واقع باشند، آنگاه ژئودزی واصل بین $y$ و $\sigma(y)$ از $x$ خواهد گذشت.

برهان: فرض کنیم $\xi$ ژئودزی منحصر بفردی باشد که $y$ را به $\sigma(y)$ متصل می‌کند. چون $\sigma^2 = id$ و $\sigma$ ایزومتری است، بنابراین $\sigma\circ\xi$ یک ژدودزی متصل کنندهٔ $y$ به $\sigma(y)$ می‌باشد. در نتیجه $\sigma$ نگاشتی پیوسته از برد $\xi$ بتوی خودش می‌باشد و بنابراین (بنا به قضیهٔ نقطهٔ ثابت) نقطهٔ ثابتی از $\sigma$ بر برد $\xi$ وجود دارد؛ این نقطه فقط می‌تواتند $x$ باشد. □

اثبات قضیهٔ ۳.۳.۴: فرض کنیم $G$ یک گروه لی با متر ریمانی $x\mapsto\langle\ ,\ \rangle_x$ است. فرض کنیم $U$ همسایگی باز متقارن و محدبی از $o$ در $\mathfrak{g}$ است که نگاشت نمایی بر آن همیومورفیسم تحلیلی می‌باشد و $W$ همسایگی متقارنی از $e$ در $G$ است به گونه‌ای که (۱) $W^2\subseteq\exp(\frac{1}{2}U)$ و (۲) هر جفت از نقاط در $W$ را توسط یک ژئودزی منحصر بفرد واقع در $W$ می‌توان بهم متصل نمود. $\alpha>0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\exp(\alpha U)\subseteq W$. مجموعه‌ای دیگر نیز تعریف می‌کنیم: چون توپولوژی $G$ را توسط متر $d$ القائی از متر ریمانی (قضیهٔ ۷.۱.۴) می‌توان تعریف نمود، در این صورت بایستی $\exp(\alpha U)$ مجموعه‌ای به شکل $B_\rho=\{x\mid d(e,x)\le\rho\}$ را در بر داشته باشد، که $\rho$ عددی مثبت است. پس در مجموع داریم:

$$e\in B_\rho\subseteq\exp(\alpha U)\subseteq W,\qquad W^2\subseteq\exp(\frac{1}{2}U)\tag{۱۱.۴}$$

فرض کنیم $\xi$ یک ژئودزی باشد، بی آنکه از کلیت بحث کاسته شود، می‌توانیم فرض کنیم که $\xi(a)=e$. اگر $\mathrm{ran}(\xi)\cap\{x\mid d(e,x)=\rho\}$ غیر تهی باشد، $a_1$ را بزرگترین عدد نابیشتر از $b$ می‌گیریم که تحدید خم $\xi$ به $[a;a_1]$، تماماً در $B_\rho$ قرار دارد و بنابراین $z_1=\xi(a_1)$ در رابطهٔ $d(e,z_1)=\rho$ صدق می‌کند؛ در غیر اینصورت فرض می‌کنیم $z_1=\xi(b)$. $\theta_1:[0;1]\to G$ را به صورت $\theta_1(t)\exp(tZ_1)$ تعریف می‌کنیم که $Z_1=\log(z_1)$؛ نشان می‌دهیم که $\theta_1$ و $\xi_1=\xi|_{[a;a_1]}$ منطبقند.

اول از همه، از (۱۱.۴) متوجه می‌شویم که $\mathrm{ran}(\theta_1)\subseteq W$ و بویژه $x=\theta_1(\frac{1}{2})\in W$. $\sigma:G\to G$ را به صورت $\sigma(y)=xy^{-1}x$ تعریف می‌کنیم. برای نشان دادن اینکه $\sigma$ ایزومتری است، ابتدا نشان می‌دهیم که $\lambda:y\to y^{-1}$ ژئودزی می‌باشد. به ازای $p\in G$ و $X,Y\in T_p(G)$، داریم

$$\begin{aligned}
\left\langle\lambda_{*,p}X,\lambda_{*,p}Y\right\rangle_{\lambda(p)} &= \left\langle\left(L_p\right)_{*,p^{-1}}\circ\lambda_{*,p}X,\left(L_p\right)_{*,p^{-1}}\circ\lambda_{*,p}Y\right\rangle_e\\
&= \left\langle\left(L_p\circ\lambda\right)_{*,p}X,\left(L_p\circ\lambda\right)_{*,p}Y\right\rangle_e\\
&= \left\langle\left(\lambda\circ R_{p^{-1}}\right)_{*,p}X,\left(\lambda\circ R_{p^{-1}}\right)_{*,p}Y\right\rangle_e\\
&= \left\langle\lambda_{*,e}\left(R_{p^{-1}}\right)_{*,p}X,\lambda_{*,e}\left(R_{p^{-1}}\right)_{*,p}Y\right\rangle_e
\end{aligned}$$

که اولین تساوی از ناوردای چپ متر ریمانی نتیجه شده است. چون بر همسایگی‌ای از $0\in\mathfrak{g}$ کار می‌کنیم که $\exp$ بر آن همیومورفیسم است، داریم $\log\circ\lambda\circ\exp(X)=-X$ و بنابراین

$$\begin{aligned}
\lambda_{*,e}[\exp,v]_e &= [\exp,(\log\circ\lambda\circ\exp)'|_{(0)}(v)]_e\\
&= [\exp,-v]_e
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\left\langle \lambda_{*,e}\left(R_{p^{-1}}\right)_{*,p} X, \lambda_{*,e}\left(R_{p^{-1}}\right)_{*,p} Y\right\rangle_e = (-1)^2\left\langle\left(R_{p^{-1}}\right)_{*,p} X, \left(R_{p^{-1}}\right)_{*,p} Y\right\rangle_e$$

که بنابه ناوردایی راست متر ریمانی، با $\langle X,Y\rangle_p$ برابر است. با تلفیق این احکام اینطور نتیجه می‌گیریم که

$$\left\langle \lambda_{*,p}X, \lambda_{*,p}Y\right\rangle_{\lambda(p)} = \langle X,Y\rangle_e$$

و بنابراین $\lambda$ ایزومتری است. چون $\sigma = L_x\circ R_x\circ\lambda$، همان طوری که انتظار داریم، $\sigma$ نیز ایزومتری است.

اکنون به ازای هر $y\in G$ ای $\sigma^2(y) = x(xy^{-1}x)^{-1}x = y$ و بنابراین $x$ نقطهٔ ثابتی برای $\sigma$ می‌باشد. مرحلهٔ بعدی این است که نشان دهیم $x$ تنها نقطهٔ ثابت $\sigma$ در $W$ می‌باشد. اگر $y\in W$ و $\sigma(y)=y$، آنگاه $(xy^{-1})^2 = e$. نظر به (۱۱.۴)، $X\in\frac{1}{2}U$ ای وجود دارد که $\exp X = xy^{-1}$ و بنابراین $\exp(2X) = (xy^{-1})^2 = e$. اما $2X\in U$، مجموعه‌ای که $\exp$ بر آن دوسویی می باشد، و بنابراین $X=0$. در نتیجه $xy^{-1}=e$، یعنی $x=y$.

اکنون می‌توان از لم قبل استفاده نموده و نشان داد که ژئودزی $\xi|_{[a;a_1]}$ واصل بین نقاط $\sigma(z_1) = \theta_1(\frac{1}{2})\theta_1(-1)\theta_1(\frac{1}{2}) = e$ و $z_1$، الزاماً نقطهٔ $x$ را در بر دارد. با تکرار این روند برای دو پارهٔ حاصل از دو نیم کردن زیر گروه ۱−پارامتری $t\mapsto\exp(tZ_1)$ بر $[0;\frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2};1]$، و سپس برای هر یک از پاره‌های حاصل از دو نیم کردن هر یک از پاره‌های قبلی، و ...، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $n\in\mathbb{Z}^+$ و هر $0\le m\le 2^n$، عنصر $\theta_1(m/2^n)$ به $\operatorname{ran}(\xi_1)$ تعلق دارد. نظر به پیوستگی $\theta_1$ و ژئودزی بودن $\xi$، از اینکه به ازای هر $t\in[0;1]$ ای $\theta_1(t)$ به $\operatorname{ran}(\xi_1)$ تعلق دارد، نتیجه می‌گیریم که $\xi_1$ و $\theta_1$ منطبقند.

اگر $z_1=\xi(b)$، آنگاه برهان تمام است. پس فرض کنیم که $z_1\ne\xi(b)$ و ژئودزی $\xi^1:[a_1;b]\to G$ با ضابطهٔ $\xi^1(t)=\xi(t)$ را در نظر می‌گیریم که $t\in[a_1;b]$. ابتدا متذکر می‌شویم که طول $\xi^1$ حد اقل به اندازهٔ $\rho$ واحد از طول $\xi$ کوتاهتر است. با استفاده از ژئودزی $L_{\xi(a_1)^{-1}}\circ\xi^1$ بجای $\xi$ در برهان بالا و تکرار آن روند، می‌نوانیم به چنان $Z_2\in\mathfrak{g}$ و $a_2\in[a_1;b]$ ای برسیم که $\xi_2 = L_{\xi(a_1)^{-1}}\circ\xi^1[a_1;a_2]$ و $\theta_2:[0;1]\to G$ با ضابطهٔ $\theta_2(t)=\exp(tZ_2)$ منطبقند. چون در هر بار تکرار این روند، $\rho$ واحد از طول $\xi$ کاسته می‌شود، پس از تعدادی متناهی مرحله این روند به پایان خواهد رسید. بنابراین چنان عدد طبیعی $m$، افراز $a<a_1<\cdots<a_{m-1}<b$ و مجموعهٔ $\{Z_1,\cdots,Z_m\}\subseteq\mathfrak{g}-\{0\}$ ای وجود دارد که $\theta:[0;m]\to G$ و $\xi:[a;b]\to G$ منطبقند، که در اینجا

$$\theta(t)=\begin{cases}\exp(tZ_1) & \text{اگر } 0\le t\le 1\\ \xi(a_1)\cdot\exp((t-1)Z_2) & \text{اگر } 1\le t\le 2\\ \vdots & \vdots\\ \xi(a_{m-1})\cdot\exp((t-m+1)Z_m) & \text{اگر } m-1\le t\le m\end{cases}$$

چون $\theta$ حداقل پیوسته است، با محاسبهٔ مقدار $\theta$ در نقاط انتهایی $1,2,\cdots,m-1$ بدست می‌آوریم که

$$\xi(a_k)=\exp(Z_1)\cdots\exp(Z_k),\qquad k\in\{1,2,\cdots,m-1\}\qquad (۱۲.۴)$$

فرض کنید نشان داده‌ایم که به ازای هر $k \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$ ای یک عدد حقیقی مخالف صفر $\lambda_k$ چنان وجود دارد که

$$Z_{k+1} = \lambda_k Z_k \tag{۱۳.۴}$$

در این صورت با این فرض و نیز با توجه به (۱۲.۴)، به ازای هر $k \leq t \leq k+1$ داریم

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \xi(a_k) \cdot \exp((t-k)Z_{k+1}) \\ &= \exp(\mu_{k-1} Z_1) \cdot \exp((t-k)(\mu_k - \mu_{k-1})Z_1) \\ &= \exp(\{\mu_{k-1} + (t-k)(\mu_k - \mu_{k-1})\} Z_1) \end{aligned}$$

(که اگر $r \geq 1$، آنگاه $\mu_r = 1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 + \cdots + \lambda_1 \cdots \lambda_r$ و در غیر این صورت $0$ می‌باشد.) به کمک تغییر متغیر $u = \mu_{k-1} + (t-k)(\mu_k - \mu_{k-1})$ و با توجه به اینکه $\theta$ بر $[k; k+1]$ با $t \mapsto \exp(tZ_1)$ بر $[\mu_{k-1}; \mu_k]$ منطبق است، نتیجه می‌گییم که $\theta$ بر $[0; m]$ با $t \mapsto \exp(tZ_1)$ بر $[0; \mu_{m-1}]$ منطبق است. بنابراین همان طوری که انتظار داشتیم، $\xi$ بر $[a; b]$ با پاره‌ای از یک زیر گروه ۱–پارامتری منطبق می‌باشد. تنها مانده است که نشان دهیم (۱۳.۴) برقرار می‌باشد. ابتدا توجه می‌کنیم که چون $\frac{d}{dt}\{x \cdot \exp(tX)\}\big|_{t=k} = X\left(x \cdot \exp(kX)\right)$ بنابراین

$$\frac{d}{dt}\{\xi(a_{k-1} \cdot \exp((t-k+1)Z_k)\}\Big|_{t=k} = Z_k\left(\xi(a_{k-1} \cdot \exp(Z_k)\right)$$

و

$$\frac{d}{dt}\{\xi(a_k \cdot \exp((t-k)Z_{k+1})\}\Big|_{t=k} = Z_{k+1}\left(\xi(a_k)\right)$$

(در اینجا از این واقعیت استفاده نموده‌ایم که $Z_k$ و $Z_{k+1}$ عناصری از $T_e(G)$ هستند و لذا می‌توان از میدانهای برداری ناوردای نظیر به آنها استفاده نمود.) چون $\theta$ ژئودزی است و هر دو مشتق بالا مخالف صفرند (زیرا، اگر میدان برداری ناوردایی در یک نقطه صفر شود، آنگاه در همه جا صفر خواهد شد)، تمرین $E-4$ نشان می‌دهد که $\theta_{*,t}(1)$ در هر یک از نقاط $1, 2, \cdots, m-1$ تنها در ضریب خطی ناصفری تغییر می‌کند. به بیان دیگر، به ازای هر $k \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$، یک $\lambda_k \in \mathbb{R}$ مخالف صفر طوری وجود دارد که

$$Z_{k+1}\left(\xi(a_k)\right) = \lambda_k \cdot Z_k\left(\xi(a_{k-1}) \cdot \exp(Z_k)\right)$$

اما (۱۲.۴) نشان می‌دهد که $\xi(a_k) = \xi(a_{k-1}) \cdot \exp(Z_k)$ و چون هر میدان برداری ناوردای چپ به طور کامل با داشتن مقدارش در هر یک از نقاط دامنهٔ تعریفش مشخص می‌گردد، به این ترتیب برقراری رابطهٔ (۱۳.۴) اثبات شده است.

برای اثبات قسمت دوم، زیر گروه ۱–پارامتری $t \mapsto \exp(tX)$ بر $[a; b]$ را در نظر می‌گیریم که $X \neq 0$. چون متر ناوردا است، برای بررسی اینکه آیا این پاراه ژئودزی موضعی هست یا خیر، کافی است همین سؤال را در مورد $t \mapsto L_{\exp(-aX)} \exp(tX) = \exp((t-a)X)$ بر مطرح کنیم، یعنی برای $\theta : \exp(tX)$ بر $[0; b-a]$. در اثبات معمولی تمرین $D-4$ نشان داده می‌شود که متناظر به هر $X \in T_e(G)$ ای یک $c \in G$ ای (با $c \neq e$) و ژئودزی $\xi : [0; 1] \to G$ ای وجود دارند که $\xi(0) = e$، $\xi(1) = c$ و $\xi_{*,0}(1) = X$.

(به نکات مطح شده در پایان این فصل نیز توجه شود.) از قسمت اول این حکم اینطور نتیجه می‌گردد که $\xi$ با پاره‌ای از یک زیر گروه ۱-پارامتری غیر بدیهی منطبق است، مثلاً فرض کنیم با $\psi : t \mapsto \exp(tY)$ که $t \in [0;d]$.

اکنون $\xi$ و $\psi$ در یک همسایگی از عنصر همانی منطبقند، و بویژه مشتقات آنها در عنصر همانی صرف نظر از یک ضریب عددی با هم برابرند. بنابراین $X$ با مضرب اسکالر ناصفری از $Y$ برابر است و در نتیجه $\theta$ و $\psi$ در یک همسایگی از $e$ منطبق می‌باشند. اما این مطلب برهان را تکمیل می‌کند، زیرا $\psi$ و $\theta$ نیز در یک همسایگی از $e$ با یکدیگر برابر می‌باشند و بعلاوه $\xi$ ژئودزی است. □

**۵.۳.۴ نتیجه.** فرض کنید $G$ یک گروه لی همبند کامل است که متر ریمانی ناوردایی می‌پذیرد. (بویژه، فرض کنید که $G$ گروه لی همبند فشرده باشد.) در این صورت نگاشت نمایی نظیر به آن پوشا می‌باشد.

برهان: فرض کنید $G$ در مفروضات نتیجه صدق می‌کند و $x$ عنصری مخالف عنصر همانی از $G$ می‌باشد. بنابراین، از قضیهٔ ۹.۱.۴ نتیجه می‌گیریم که یک ژئودزی واصل بین $e$ و $x$ وجود دارد، و از قضیهٔ قبل نتیجه می‌گیریم که این ژئودزی به شکل $t \mapsto \exp(tX)$ می‌باشد، که $t \in [a;b]$ و $X \in \mathfrak{g}$. بویژه، $x = \exp(bX)$ و بنابراین همان طوری که انتظار داشتیم $\exp$ پوشا می‌باشد. □

**۶.۳.۴ کاربرد.** فرض کنید $G$ یک گروه لی با متر ریمانی ناوردای چپ $x \mapsto \langle\ ,\ \rangle_x$ باشد. به صورت صریح می توان طول هر یک از پاره‌های یک زیر گروه ۱-پارامتری از $G$ را تعیین نمود. در واقع اگر $\theta : t \mapsto \exp(tX)$، $t \in [a;b]$ و $X \in \mathfrak{g}$، آنگاه طول $\xi$ برابر است با $(b-a)\|X\|_e$. (فرمول کلی طول عبارت است از $\int_a^b \left\|\theta_{*,t}(1)\right\|_{\theta(t)} dt$، که چون در این مورد متر ناوردای چپ است، برابر با $\int_a^b \left\|\left(L_{\theta(t)^{-1}}\right)_{*,\theta(t)} \theta_{*,t}(1)\right\|_e dt$ می‌باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\left(L_{\theta(t)^{-1}}\right)_{*,\theta(t)} \theta_{*,t}(1) &= \left(L_{\theta(t)^{-1}}\right)_{*,\theta(t)} X(\theta(t)) \\ &= X\left(L_{\theta(t)^{-1}}(\theta(t))\right) \\ &= X(e)\end{aligned}$$

که اولین تساوی از ناوردایی چپ $X$ نتیجه می‌شود.)

## بخش ۴.۴ یادداشت

در حالت $\mathbb{R}^n$ روشن است که شرط لازم و کافی برای ژئودزی بودن یک منحنی در $\mathbb{R}^n$ آن است که مشتق این منحنی در همه جا مخالف صفر بوده و همهٔ بردارهای مماس بر موازی باشند. اما در حالت یک منیفلد دیفرانسیلپذیر دلخواه، هیچ روشی از قبل برای مقایسهٔ بردارهای مماس در نقاط مختلف وجود ندارد. ولی، چنانچه در منیفلد دیفرانسیلپذیر مورد نظر یک التصاق خطی انتخاب شده باشد (نظیر منیفلدهای ریمانی، به بخشهای ۱.۴ و ۱.۹ از هلگاسن [۲۸] مراجعه شود)، این کار شدنی است. به یک منحنی در یک منیفلد ریمانی در صورتی موازی گفته می‌شود که همهٔ بردارهای مماسش موازی باشند. اثبات می‌شود که

در هر نقطه از یک منیفلد ریمانی مفروض، همسایگی‌ای وجود دارد که شرط لازم و کافی برای ژئودزی بودن منحنی‌های در آن، که موازی بودنشان می‌باشد.

بعلاوه، قضیهٔ وجود و یکتایی منحنی‌های موازی در منیفلدهای ریمانی تعمیمی طبیعی از حکم مشابه در خصوص در مورد $\mathbb{R}^n$ می‌باشد (که البته در این حالت، حکمی بدیهی است). یعنی، به هر $p \in M$ همسایگی بازی $U$ از $p$ و عددی $\varepsilon > 0$ نسبت داده می‌شود که به ازای هر $q \in U$ و هر بردار مماس $X \in T_q(M)$ با $\|X\|_q < \varepsilon$، ژئودزی موازی منحصر بفردی $\gamma_X : [-1;1] \to M$ ای وجود دارد که

$$\gamma - X(0) = q, \qquad (\gamma_X)_{*,0}(1) = X \tag{۱۴.۴}$$

(برای مشاهدهٔ اثباتی از این مطلب به گزارهٔ ۵.۳ از کتاب هلگاسن [۲۸] و یا صفحات ۹ تا ۴۵ از کتاب اسپیواک [۵۸] مراجعه شود.) روش اثبات آن تعمیم روش بکار رفته در اثبات قسمت دوم از قضیهٔ ۳.۲.۲ می‌باشد، زیرا در آن به هر ژپودزی یک معادلهٔ دیفرانسیل نسبت داده می‌شود و سپس نشان داده می‌شود که این معادلهٔ دیفرانسیل دارای جوابی یکتا است.

نظر به بحث بالا، مفهوم «نگاشت نمایی برای یک منیفلد ریمانی دلخواه $M$» را می‌توان مطرح نمود که تعمیم آن چیزی است که در مورد گروههای لی در فصل دوم بیان شد. اگر $X \in T_q(M)$ برداری باشد که به ازای آن یک ژئودزی موازی $\gamma_X : [-1;1] \to M$ با خاصیت (۱۴.۴) وجود دارد (که البته این امر همواره در یک همسایگی مناسب از $0 \in T_q(M)$ ممکن است)، در این صورت مقدار **نگاشت نمایی** $q$ در $X$ را به صورت

$$\exp_q(X) := \gamma_X(1)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت ژئودزی $\gamma_X$ را به شکل

$$t \mapsto \gamma_X(t) = \exp_q(tX), \qquad t \in [-1;1]$$

می‌توان بیان نمود. با این مقدمات می‌توان اذعان داشت که اگر فضای مماس به $T_q(M)$ در $0$ با $T_q(M)$ یکی گرفته شود، در این صورت نگاشت

$$(\exp_q)_{*,0} : T_q(M) \to T_q(M) \tag{۱۵.۴}$$

همانی خواهد بود. این مطلب را با برهان قضیهٔ ۱۲.۲.۲ مقایسه کنید که در آنجا نشان داده شد که نگاشت $\exp_{*,0}$ از $\mathfrak{g}$ به $\mathfrak{g}$ همانی است.) چون $(\exp_q)_{*,0}$ خطی است، برای نشان دادن این مطلب تنها کافی است نشان دهیم که این نگاشت در یک همسایگی از صفر همانی می باشد؛ این همسایگی را در حکم قضیهٔ وجود و یکتایی برای ژئودزیها که در بالا ذکر شد استفاده می‌کنیم. فرض کنید $X \in T_q(M) = T_0(T_q(M))$ در این همسایگی قرار دارد.در این صورت $c : t \mapsto tX$ یک ژئودزی موازی در $T_q(M)$ می‌باشد که $c_{*,0}(1) = X$ و $c(1) = 0$. در نتیجه

$$\gamma_X(t) = \exp_q(tX) = \exp_q \circ c(t) \tag{۱۶.۴}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}
(\exp_q)_{*,0}(X) &= (\exp_q)_{*,0} \circ c_{*,0}(1) \\
&= (\exp_q \circ c)_{*,0}(1) \\
&= (\gamma_X)_{*,0}(1) \\
&= X
\end{aligned}$$

بعلاوه، در حالت گروههای لی، $\exp_e$ دقیقاً با نگاشت نمایی معمولی برابر است. زیرا، اگر $G$ گروه لی باشد و $\exp_e$ در $X \in T_e(G)$ تعریف شده باشد، در این صورت $\gamma_X : t \mapsto \exp_e(tX)$ (که $t \in -1;1$) یک ژئودزی موازی است، به گونه‌ای که $(\gamma_X)_{*,0}(1) = X$ و $\gamma_X(0) = e$. بعلاوه $\theta : t \mapsto \exp(tX)$ نیز یک ژئودزی موازی است، به گونه‌ای که $\theta_{*,0}(1)$ و $\theta(0) = e$، و بنابراین نظر به یکتایی ژئودزیها، داریم $\exp(X) = \exp_e(X)$.

در حالت خاصی که گروه لی $G$ آبلی است، در تمرین $B - 3$دیدیم که $G$ به شکل $T^m \times \mathbb{R}^n$ می‌باشد. روشن است که متر متناظر به هر متر ریمانی ناوردا بر $G$ عبارت از مضربی اسکالری از متر معمولی بر $T^m \times \mathbb{R}^n$ می‌باشد. بعلاوه، در این حالت کلیهٔ احکام در بخشهای ۴.۲ و ۴.۳ به شکل بدیهی در این حالت برقرارند. مثلاً توجه شود که وقتی گروه لی $G$ همبند و آبلی باشد، حکم نتیجهٔ ۵.۳.۴ همان قسمت سوم از تمرین $B - 3$ خواهد بود.

گروههای لی صادق در شرایط نتیجهٔ ۵.۳.۴ تنها گروههای لی‌ای نیستند که نگاشت نمایی آنها پوشا است. مثلاً، در تمرین $F - 4$ نشان داده می شود که نگاشت نمایی گروههای لی همبندی که جبر لی آنها پوچتوان می‌باشد نیز پوشا هستند.

## بخش ۵.۴ تمرینات

$(4 - A)$ به کمک نمایش میداهای برداری تحلیلی بر $\mathbb{R}^n$ که در تمرین قسمت (۱) از $A - 2$ آورده شد، نشان دهید که ساختار مطرح شده در ۴.۱.۴ عملاً به یک متر ریمانی بر $\mathbb{R}^n$ می‌انجامد.

$(4 - B)$ **ناوردایی طول.** فرض کنید $M$ منیفلدی ریمانی و $\xi : [a;b] \to M$ و $\eta : [c;d] \to M$ منحنی‌های یکبیک تحلیلی در $M$ هستند که $[a;b]$ و $[c;d]$ کراندارند. بعلاوه فرض کنیم که این دو منحنی منطبق باشند.

(۱) اگر دیفئومورفیسمی $\theta : [a;b] \to [c;d]$ وجود داشته باشد که $\xi = \eta \circ \theta$، در این صورت نشان دهید که

$$L_{\xi(a),\xi(b)}(\xi) = L_{\eta(c),\eta(d)} \qquad (۱۷.۴)$$

(۲) ثابت کنید که (۱۷.۴) در حالت کلی برقرار می‌باشد. (راهنمایی: نشان دهید که $\xi_{*,t}(1)$ و $\eta_{*,t}(1)$ در حد اکثر تعدادی متناهی از نقاط صفرند. اکنون برد منحنی را به تعدادی متناهی پاره طوری تقسیم کنید که $\xi_{*,t}(1)$ و $\eta_{*,t}(1)$ بر هر یک از آنها مخالف صفر باشند، بجز احتمالاً در نقاط انتهایی. اکنون از قضیهٔ نگاشت وارون و قسمت (۱) همین تمرین استفاده نموده و نشان دهید که صرف نظر از همسایگیهای باندازهٔ کافی کوچک از این نقاط استثنایی، طول پاره‌های متناظر از $\xi$ و $\eta$ برابرند.)

$(4 - C)$ **تجدید نمایش به کمک طول.** فرض کنید $\xi$ یک منحنی تحلیلی یکبیک از بازهٔ کراندار $[a;b]$ به منیفلد ریمانی $M$ باشد. همچنین فرض کنید که $\xi_{*,t}(1) \neq 0$ بر $[a;b]$. به ازای $t \in [a;b]$ تعریف می‌کنیم $s(t) = L_{\xi(a),\xi(t)}$. در این صورت نشان دهید که $s$ یک دیفیومورفیسم از $[a;b]$ بتوی $[0;L]$

است، که $L$ طول $\xi$ می‌باشد. اکنون $\eta:[0;1]\to M$ را به صورت $\eta=\xi\circ s^{-1}$ تعریف نموده و نشان دهید که $\xi$ و $\eta$ منطبقند و بعلاوه

$$L_{\eta(0),\eta(t)}=t, \qquad \text{به ازای هر } t\in[0;L]$$

$(4-D)$ نشان دهید که حول هر نقطه از یک منیفلد ریمانی، همسایگی‌ای وجود دارد که هر دو نقطه از آن همسایگی را توسط یک و تنها یک ژئودزی می توان بهم متصل نمود، طوری که این ژئودزی کاملاً در آن همسایگی قرار می‌گیرد. (به قضیهٔ ۶.۲ و لم ۹.۳ از کتاب هلگاسن [۲۸] توجه شود.) این مطلب حکمی بسیار عمیق است و در مباحث در این فصل از اهمیت به سزایی برخوردار بود. شاید مشاهدات ذیل در درک صحت این گزاره کمک کند: چون تنها با خواص موضعی سرو کار داریم، بنابراین کافی است مسأله را برای زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم که بر آن یک متر ریمانی مشخص گردیده است. اگر متر ریمانی همان متر معمولی بر $\mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت مسأله بدیهی است. در غیر این صورت، بر همسایگی به اندازهٔ کافی کوچکی کار خواهیم نمود که متر ریمانی مورد نظر چندان با متر معمولی بر $\mathbb{R}^n$ متفاوت نیست و ژئودزیهای آن نیز تفاوت چندانی با خطوط صاف ندارند. اثبات دقیق این مطلب بر وجود و یکتایی ژئودزیهای موازی استوار می‌باشد، که در یادداشت بالا مختصری در مورد آنها بحث شد.

$(4-E)$ نشان دهید که اگر $\xi:[0;1]\to M$ و $\eta:[1;2]\to M$ دو منحنی تحلیلی بر منیفلد ریمانی $M$ باشند و $\xi(1)=\eta(1)$ و نیز اگر منحنی‌ای که بر بازهٔ $[0;1]$ برابر $\xi$ و بر بازهٔ $[1;2]$ برابر $\eta$ است، ژئودزی باشد، در این صورت اگر $\eta_{*,1}(1)\neq 0$ آنگاه $\xi_{*,1}(1)$ مضرب اسکالری از $\eta_{*,1}(1)$ می‌باشد.

$(4-F)$ جبر لی $L$ را در صورتی **پوچتوان** گوئیم که عدد طبیعی $n$ ای وجود داشته باشد که به ازای هر $X_1,\cdots,X_n\in L$ ای

$$[X_1,[X_2,[\cdots[X_{n-1},X_n]\cdots]]]=0$$

نشان دهید که هرگاه $G$ همبند و $\mathfrak{g}$ پوچتوان باشد، آنگاه نگاشت نمایی پوشا است. (راهنمایی: همسایگی $U$ ای از $0\in\mathfrak{g}$ و نگاشتی تحلیلی $Z:U\times U\to\mathfrak{g}$ چنان وجود دارند که به ازای هر $X,Y\in U$ ای

$$\exp(X)\exp(Y)=\exp\{Z(X)\}$$

چنانچه $\mathfrak{g}$ پوچتوان باشد، از فرمول کبه استفاده نموده نشان دهید که $Z$ به شکل حلیلی به کل $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ قابل گسترش است و بعلاوه از تمرین $H-1$ استفاده کرده و نشان دهید که این نگاشت گسترش یافته منحصر بفرد نیز می‌باشد.)

# فصل ۵

# زیرگروهها و زیر جبرهای لی

هدف اصلی از این فصل آشنایی با مفهوم زیرگروه لی از یک گروه لی $G$ و نیز نشان دادن این مطلب می‌باشد که وقتی و تنها وقتی گروه لی $H$ یک زیرگروه لی $G$ است که $\mathfrak{h}$ (= جبر لی $H$) یک زیر جبر لی از $\mathfrak{g}$ (= جبر لی $G$) باشد. سپس با اصلاح این حکم نشان خواهیم داد که تناظری یکبیک میان زیر گروههای لی همبند و نرمال از $G$ و ایده‌آلهای $\mathfrak{g}$ وجود دارد. به عنوان یکی از ابزارهای مورد لزوم برای اثبات قسمت دوم این حکم نیاز به تحلیل مفصل نمایش الحاقی برای یک‌گروه لی (که اول بار در بخش ۲.۴ مطرح گردید) داریم.

## بخش ۱.۵ زیرگروه و زیر جبر

در این بخش سعی می‌شود تا نشان دهیم که بین زیر مجموعه‌های بخصوصی از یک گروه لی و نیز زیر جبرهای لی از جبر لی متناظر به آن، تناظری دوسویی وجود دارد.

۱.۱.۵ زیرگروه لی. اگر $G$ و $H$ گروههای لی باشند و $H$ از نظر جبری زیرگروه $G$ باشد، آنگاه در صورتی $H$ را **زیرگروه لی** $G$ گوئیم که نگاشت احتوای طبیعی $j : H \to G$ پیوسته باشد.

مثال زیرگروههای بسته را داریم. مثلاً، هر زیرگروه بسته از یک گروه لی، به شرطی که با توپولوژی القایی همراه باشد، تشکیل یک‌گروه لی می‌دهد و بنابراین همهٔ زیرگروههای بستهٔ یک‌گروه لی، زیرگروه لی هستند. در مراجع بسیاری فرض ایمرشن تحلیلی بودن $j$ را نیز قید می‌کنند (به ۶.۲.۱ توجه شود). اما ذکر این شرط اضافی لازم نیست، چرا که می‌توان آن را از تعریف بالا نتیجه گرفت. قرار داد می‌کنیم که «$j : H \to G$ زیرگروه لی $G$ است» دقیقاً به معنی زیرگروه لی بودن $H$ در $G$ و احتوای طبیعی بودن $j$ می‌باشد.

۲.۱.۵ گزاره. اگر $j : H \to G$ زیرگروه لی $G$ باشد، در این صورت

۱) $j$ ایمرشن تحلیلی است.

۲) $j_{*,e}:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ منومورفیسم جبرهای لی است.

برهان: قبل از آغاز استدلال باید متذک شویم که تنها مفروضات بر $j$ این است که $j:H\to G$ منومورفیسمی پیوسته است. چون $j$ پیوسته است، از قضیهٔ ۱.۳.۲ نتیجه می‌گیریم که $j$ تحلیلی نیز می‌باشد. اما بنابه تعریف ایمرشن، باید اثبات گردد که به ازای هر $x\in H$ ای $j_{*,x}$ یکبیک است. در تمرین $A-5$ خواسته شده است تا نشان داده شود که این مطلب معادل با یکبیک بودن فقط $j_{*,e}$ است، که این موضوع نیز معادل با $\{X\in\mathfrak{h}\ :\ j_{*,e}X=0\}=\{0\}$ می‌باشد.

فرض کنیم $X\in\mathfrak{h}$ در رابطهٔ $j_{*,e}X=0$ صدق کند. فرض کنیم $U$ همسایگی‌ای از $0\in\mathfrak{h}$ باشد که $\exp_H$ بر آن یکبیک است و $t\in\mathbb{R}-\{0\}$ چنان است که $tX\in U$. چون $j_{*,e}$ خطی است، $j_{*,e}(tX)=0$ و از تمرین $F-2$ نتیجه می‌گیریم که

$$j\circ\exp_H(tX)=\exp_G\circ j_{*,e}(tX)=e_G$$

بنابراین $\exp_H(tX)=e_H$ و در نتیجه $tX=0$. بنابراین $X=0$ و همان طوری که انتظار داشتیم $j$ ایمرشنی یکبیک می‌باشد. بعلاوه، بنابه تمرین $J-2$ نگاشت خطی $j_{*,e}:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ هومموفیسم بین جبرهای لی است و چون $j$ ایمرشن است، منومورفیسم نیز می‌باشد. □

فرض کنید $j:H\to G$ زیر گروه لی $G$ باشد. در ادامه وقتی بیم ابهامی نرود، $\mathfrak{h}$ را توسط $j_{*,e}$ با زیر مجموعه‌ای از $\mathfrak{g}$ یکی می‌گیریم.حکم زیر وارون گزارهٔ ۲.۱.۵ است و پس از اثبات آن می‌توانیم ادعا کنیم که اگر $G$ گروه لی باشد، در این صورت $\mathfrak{h}\mapsto H$ تناظری یکبیک بین همهٔ زیر گروههای لی همبند $H$ از $G$ و همهٔ زیر جبرهای لی $\mathfrak{h}$ از $\mathfrak{g}$ می‌باشد.

**۳.۱.۵ قضیه.** فرض کنیم $G$ گروه لی‌ای با جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد. متناظر به هر زیر جبر لی $L$ از $\mathfrak{g}$ یک و تنها یک زیر گروه لی همبند $H$ از $G$ وجود دارد که جبر لی آن $\mathfrak{h}$ برابر $L$ است. (به بیان دقیقتر، متناظر به هر زیر جبر لی $L$ از $\mathfrak{g}$ یک و تنها یک زیر گروه لی همبند $j:H\to G$ از $G$ وجود دارد به گونه‌ای که $j_{*,e}(\mathfrak{h})=L$.)

برهان: فرض کنیم $U$ همسایگی باز متقارنی از $0\in\mathfrak{g}$ باشد، به گونه‌ای که

۱) $\exp$ همیومورفیسمی تحلیلی بر $U$ است (به قضیهٔ ۱۲.۲.۲ توجه شود)، و

۲) به ازای هر $X,Y\in U\cap L$ ای $\log(\exp(X),\exp(Y))\in L$ (به فرمول کبه ۶.۲.۳ توجه شود).

فرض کنیم $H$ زیر گروهی از $G$ باشد که توسط $\exp(L\cap L)$ تولید شده است. در این صورت توپولوژی القائی بر $H$ آنرا به یک گروه توپولوژی مبدل می‌سازد، اما دلیلی ندارد مطمئن باشیم که یک اطلس سازگار تحلیلی بر $H$ موجود است. برای حل این مشکل، توپولوژی‌ای قویتر بر $H$ ایجاد می‌کنیم، تا همراه آن بتواند به یک گروه لی تبدیل گردد. پایه‌ای از همسایگی‌های حول $e\in H$ به صورت $\{\exp(U')\mid U'\subseteq U$ یک همسایگی باز از $L$ $0\in L$ است و $U'$ یک همسایگی$\}$. این همسایگیها در شرایط قضیهٔ ۱.۲ از ضمیمه صدق می‌کنند و بنابراین، مجموعهٔ همهٔ انتقالهای چپ این همسایگیها یک زیر پایهٔ باز برای یک توپولوژی بر $H$

تعریف می‌کنند. (برای مشاهدهٔ این امر که توپولوژی مذکور حقیقتاً قویتر از توپولوژی القائی از $G$ می‌باشد، کافی است که به یک همسایگیهای به شکل $H \cap W$ از $e \in H$ توجه کنیم، که $W$ همسایگی‌ای از $e \in G$ می‌باشد. حال مجموعهٔ $U \cap L \cap \exp^{-1}(W)$ را در نظر بگیرید؛ این مجموعه یک همسایگی از $0 \in L$ است به گونه‌ای که تصویر آن نسبت به exp (بنابه تعریف) الزاماً یک همسایگی از $e \in H$ است. ولی

$$\exp(L \cap U \cap \exp^{-1}(W)) \subseteq (\exp(L \cap U)) \cap W \subseteq H \cap W$$

و در تمرین $B-5$ خواسته شده است تا نشان دهید که توپولوژی زیر گروهی اکیداً قویتر از توپولوژی القائی است.)

فرض کنیم $x = \exp(X)$، که $X \in L$. در این صورت $Y \in L \cap U$ ای و عدد صحیح مثبت $k$ ای وجود دارند که $kY = X$. در نتیجه $\exp(X) = \exp(kX) = (\exp Y)^k$ و بنابراین $\exp(X)$ به $H$ تعلق دارد. پس $H$ زیر گروهی از $G$ می‌باشد که توسط $\exp(L)$ تولید می‌گردد. چون $L$ همبند است و exp پیوسته می‌باشد، $\exp(L)$ نیز همبند است. فرض کنیم $H_0$ مؤلفهٔ همبندی $e \in H$ باشد؛ در این صورت $H_0$ زیر گروه توپولوژی $H$ است (به قسمت (۱) از لم ۴.۱.۲ توجه شود). چون $\exp(L)$ همبند است، پس باید $\exp(L) \subseteq H_0$. بنابراین زیر گروهی از $G$ که توسط $\exp(L)$ تولید می‌گردد، یعنی $H$، زیر مجموعه‌ای از $H_0$ است. بنابراین $H = H_0$ و این نشان می‌دهد که $H$ همبند است.

برای مشاهدهٔ اینکه $H$ گروه لی نیز می‌باشد، از قضیهٔ ۳.۱.۲ بهره می‌گیریم. نگاشت نمایی همیومورفیسمی از $L \cap U$ بروی زیر مجموعه‌ای باز $V$ از $H$ است که $e \in V$ و exp چارتی حول عنصر همانی برای $H$ تشکیل می‌دهد. بعلاوه، از چگونگی انتخاب $U$ این طور نتیجه می‌گردد که

$$(X, Y) \mapsto \log(\exp(X), \exp(Y))$$

نگاشتی از $L \cap U$ بتوی $L$ است. به ویژه، این نگاشت بر

$$\{(X, Y) \mid \exp(X)\exp(Y) \in \exp(L \cap U), X, Y \in L \cap U\}$$

تحلیلی است. همچنین

$$X \mapsto \log\left(\exp(X))^{-1}\right) = -x$$

بر $L \cap U$ تحلیلی است، و لذا از قضیهٔ ۳.۱.۲ نتیجه می‌گیریم که $H$ گروه لی است.

لم زیر در تکمیل برهان ۳.۱.۵ استفاده می‌شود:

**۴.۱.۵ لم.** فرض کنید $j : H \to G$ زیر گروه لی $G$ است. در این صورت، وقتی و تنها وقتی $X \in J_{*,e}(\mathfrak{h})$ که $t \mapsto j^{-1} \circ \exp_G(tX)$ نگاشتی خوشتعریف و پیوسته از $\mathbb{R}$ بتوی $H$ باشد.

برهان: فرض کنیم $X = j_{*,e}(Y)$، که $Y \in \mathfrak{h}$. در این صورت

$$\exp_G(tX) = \exp_G j_{*,e}(tY) = j \circ \exp_H(tY) \in j(H)$$

و بعلاوه $t \mapsto j^{-1} \circ \exp_G(tX)$ نگاشتی خوشتعریف از $\mathbb{R}$ بتوی $H$ می‌باشد. بالعکس، فرض کنیم $t \mapsto j^{-1} \circ \exp_G(tX)$ نگاشتی خوشتعریف از $\mathbb{R}$ بتوی $H$ است که $X \in \mathfrak{g}$. چون این نگاشت هomomorفیسم

است، بایستی تحلیلی باشد، و عملاً زیر گروهی ۱-پارامتری از $H$ می‌باشد. اکنون از قضیهٔ ۱۰.۲.۲ نتیجه می‌گیریم که باید $Y \in \mathfrak{h}$ ای وجود داشته باشد به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ای $j^{-1} \circ \exp_G(tX) = \exp_H(tY)$. بنابراین به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ای

$$\exp_G(tY) = j \circ \exp_H(tY) = \exp_G \circ j_{*,e}(tY)$$

و در نتیجه $X = j_{*,e}(Y)$. □

باز به برهان قضیهٔ ۳.۱.۵ باز می‌گردیم و نشان می‌دهیم که $L = j_{*,e}(\mathfrak{h})$. فرض کنیم $X = j_{*,e}(Y)$ که $Y \in \mathfrak{h}$. از لم بالا نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ای $j^{-1} \circ \exp_G(tX) = \exp_H(tY)$ و بنابراین به ازای $t$ های باندازهٔ کافی کوچک $\exp(tX) \in \exp(L \cap U)$. در نتیجه $X \in L$ و لذا $j_{*,e}(\mathfrak{h}) \subseteq L$. از سوی دیگر، اگر $X \in L$، آنگاه $t \mapsto \exp_G(tX)$ نگاشتی پیوسته از $\mathbb{R}$ به $H$ است. (به ازای $t$ های باندازهٔ کافی کوچک $\exp_G(tX) \in \exp(U \cap L)$ و بنابراین به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\exp_G(tX) \in H$. از چگونگی انتخاب توپولوژی بر $H$ نتیجه می‌گردد که $t \mapsto j^{-1} \circ \exp_G(tX)$ پیوسته می‌باشد.) اکنون از لم ۴.۱.۵ نتیجه می‌گردد که همان طوری که انتظار داشتیم $X \in j_{*,e}(\mathfrak{h})$.

برای اثبات یکتایی فرض می‌کنیم $j_1 : H_1 \to G$ زیر گروه لی همبند دیگری از $G$ باشد که $(j_1)_{*,e}(\mathfrak{h}_1) = L$. چون $\exp_G(L) \subseteq j_1(H_1) \cap j_1(H)$ و هر دو مجموعهٔ $j(H)$ و $j_1(H_1)$ از $G$ همبند می‌باشند، همهٔ آنچه که نیاز به اثبات داریم این مطلب است که $j_1^{-1} \circ j$ بر زیر مجموعه‌ای از $H$ که $e \in H$ همیومورفیسم است. فرض کنیم $W$ همسایگی باز همبندی از $L$ که $0 \in L$ است که $\exp_{H_1}$ و $\exp_H$ بترتیب بر $(j_1)_{*,e}^{-1}(W)$ و $j_{*,e}^{-1}(W)$ همیومورفیسم هستند. روشن است که به ازای هر $V \subseteq W$ مفروض، وقتی و تنها وقتی زیر مجموعهٔ $\exp_{H_1} \circ (j_1)_{*,e}^{-1}(V)$ از $H_1$ باز است که زیر مجموعهٔ $j_{*,e}^{-1} \circ \exp_G(V)$ از $H$ باز باشد. این اثبات قضیه را تکمیل می‌کند، زیرا مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های به شکل $j^{-1} \circ \exp_G(V)$ که $V \subseteq W$ باز است، پایه‌ای باز در $e \in H$ تشکیل می‌دهند. □

**یادداشت.** ۱) اگر $j : H \to G$ زیر گروه لی $G$ باشد، در این صورت $j \circ \exp_H = \exp_G \circ j_{*,e}$.

پس از اثبات ۲.۱.۵ متذکر شدیم که می‌توان به کمک $j_{*,e}$ جبر لی $\mathfrak{h}$ را با تصویرش در $\mathfrak{g}$ یکی گرفت. به صورت مشابه قبل، توجهمان را بر منومرفیسم تحلیلی بودن $j$ معطوف می‌کنیم. در این صورت $\exp_H = \exp_G|_{\mathfrak{h}}$ و بنابراین، اگر بیم ابهام نرود، می‌توانیم $\exp_G$ و $\exp_H$ را با نماد $\exp$ نشان دهیم. سایر بحثها و مطالب این بخش در اثبات قضایای ساختاری فصل بعد مهم هستند و خواننده‌ای که با آنها احساس راحتی نمی‌کند، می‌تواند منومورفیسمهای حذف شده را مجدداً وارد بحث کند.

۲) فرض کنیم $j : H \to G$ زیر گروه لی $G$ است؛ دو حکم زیر را به راحتی می‌توان اثبات نمود:

الف) اگر $\exp_G$ بر همسایگی $U$ از $0 \in \mathfrak{g}$ یکبیک باشد، در این صورت $\exp_H$ نیز بر $U \cap \mathfrak{h}$ یکبیک است (به بیان دقیتر، $\exp_H$ بر $j_{*,e}^{-1}(U \cap j_{*,e}(\mathfrak{h}))$ یکبیک است).

ب) اگر $U$ همچون در (الف) باشد و $x \in H \cap \exp(U)$، در این صورت $X \in U$ ای منحصر بفرد چنان وجود دارد که $\exp_G(X) = x$ و بعلاوه $X \in \mathfrak{h}$. (به بیان دقیقتر، اگر $U$ همانند در (الف) باشد و $x \in j(H) \cap \exp(U)$، در این صورت $X \in U$ ای منحصر بفرد چنان وجود دارد که $\exp_G(X) = x$ و بعلاوه $X \in j_{*,e}(\mathfrak{h})$.)

## بخش ۲.۵ زیر گروههای نرمال و ایده‌آلها

هدف کنونی این است که قدمی از محدودهٔ قضیهٔ ۳.۱.۵ فراتر گذاشته و نشان دهیم که تناظر تعریف شده در بالا را می‌توان به تناظری میان زیر گروههای لی نرمال در $G$ و ایده‌آلهای $\mathfrak{g}$ تقلیل داد. پیش از آنکه به اثبات این حکم بپردازیم، لازم است تا خواص بیشتری از نمایش الحاقی را قبلاً در ۲.۲.۴ معرفی شد، مطرح کنیم.

**۱.۲.۵ تعریف.** ۱) زیرگروه $H$ از $G$ را در صورتی **نرمال** گوئیم که به ازای هر $x \in G$ ای $xHx^{-1} \subseteq H$.
۲) زیر جبر لی $L'$ از جبر لی $L$ را در صورتی **ایده‌آل** گوئیم که به ازای هر $X \in L$ و هر $Y \in L'$ ای $[X, Y] \in L'$.

**۲.۲.۵ نمایش الحاقی برای جبرهای لی.** فرض کنید $L$ یک جبر لی باشد. نگاشت $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{g}l(L)$ با ضابطهٔ

$$\mathrm{ad}(X)\,(Y) := [X, Y], \qquad X, Y \in L$$

را **نمایش الحاقی** $L$ می‌نامیم.

روشن است که نگاشت ad خطی می‌باشد. بعلاوه ضرب لی را حفظ می‌کند.

(همان طوری که در بخش ۴.۲ متذکر شدیم،به طور طبیعی می‌توان بر $\mathfrak{g}l(L)$ ساختار جبر لی را تعریف نمود؛ ضرب لی $M, N \in \mathfrak{g}l(L)$ را به شکل $[M, N] = MN - NM$ تعریف می‌کنیم.) زیرا اگر $X, Y, Z \in L$ در این صورت به کمک اتحاد ژاکوبی می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}[X, Y]\,(Z) &= [[X, Y], Z] \\
&= -[[Y, Z], X] - [Z, [X, Y]] \\
&= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\
&= [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)]\,(Y)
\end{aligned}$$

بنابراین $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{g}l(L)$ هomomorphism میان جبرهای لی است.
به حالت گروه لی $G$ باز می‌گردیم، که جبر لی آن $\mathfrak{g}$ است. در این صورت نمایش الحاقی $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ گروه لی $G$ همومورفیسمی تحلیلی است، البته به شرطی که $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ را به عنوان گروه لی تصور کنیم (به بخش ۴.۲ توجه شود). بنابراین، $(\mathrm{Ad})_{*,e}$ همومورفیسم جبرهای لی از $\mathfrak{g}$ بتوی $\mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ می‌باشد. اما همان طوری که گفتیم، نمایش الحاقی ad جبر لی $\mathfrak{g}$ نیز یک همومورفیسم جبرهای لی از $\mathfrak{g}$ بتوی $\mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ است و . . . که حکم بعد نشان می‌دهد که این دو همومورفیسم عملاً یکی هستند.

**۳.۲.۵ قضیه.** فرض کنید $G$ گروه لی، Ad نمایش الحاقی $G$ و ad نمایش الحاقی $\mathfrak{g}$ است. در این صورت $(\mathrm{Ad})_{*,e} = \mathrm{ad}$.

برهان: بنابه قسمت (۱) از نتیجهٔ ۸.۲.۳ از فرمول کبه، داریم

$$\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX) = \exp\Big(tY + t^2[X,Y] + O(t^2)\Big) \qquad (۱.۵)$$

که $X, Y \in \mathfrak{g}$. به کمک تعریف Ad و نیز تمرین $F-2$ نتیجه می‌گیریم که

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX)) \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Ad}(\exp(tX))$$

با تلفیق این فرمول با فرمول (۱.۲.۵) نتیجه می‌گیریم که

$$\exp\{\mathrm{Ad}(\exp(tX))tY\} = \exp\{tY + t^2[X,Y] + O(t^2)\}$$

و بنابراین

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y = Y + t[X,Y] + O(t^2). \qquad (۲.۵)$$

فرض کنیم $X \in \mathfrak{g}$ و زیر گروه ۱-پارامتری $\psi$ از $G$ را با ضابطهٔ $\psi : t \mapsto \exp(tX)$ و زیر گروه ۱-پارامتری $\theta$ را با ضابطهٔ $t \mapsto \mathrm{Ad}(\exp(tX))$ تعریف کنیم. از قضیهٔ ۱۰.۲.۲ نتیجه می‌شود که $X_0 \in \mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ ای چنان وجود دارد که

$$\theta(t) = \exp(tX_0) \qquad \text{و} \qquad X_0 = \theta_{*,e}[i,1]_0$$

بنابراین

$$\begin{aligned} X_0 &= \theta_{*,0}[i,1]_0 = (\mathrm{Ad}\circ\psi)_{*,0} \\ &= (\mathrm{Ad})_{*,e}\psi_{*,0}[i,1]_0 = (\mathrm{Ad})_{*,e}X \end{aligned}$$

اثبات با نشان دادن اینکه $X_0 = \mathrm{ad}(X)$ به پایان می‌رود. برای این منظور فرض می‌کنیم $Y \in \mathfrak{g}$؛ در این صورت با استفاده از (۲.۲.۵) داریم

$$\begin{aligned} X_0(Y) &= \theta_{*,0}[i,1](Y) \\ &= \frac{d}{dt}\{\mathrm{Ad}(\exp(tX)\}|_{t=0}(Y) \\ &= \frac{d}{dt}\{\mathrm{Ad}(\exp(tX))(Y)\}|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\{Y + t[X,Y] + O(t^2)\}|_{t=0} \\ &= [X,Y] = \mathrm{ad}(X)Y \end{aligned}$$

(توجه شود که در بالا از یک نمادگزاری معمولی استفاده شده است: اگر $f$ تابعی از $\mathbb{R}$ بتوی فضای برداری بخصوصی $E$ باشد، در این صورت بجای $f'(0) = f'(0)(1)$ اغلب مانند کلکولوس نوشته می‌شود $\frac{d}{dt}\{f(t)\}|_{t=0}$.) □

**۴.۲.۵ یادداشت.** در بخش ۴.۲ نشان دادیم که در حالت گروه خطی عمومی $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$، به ازای هر $X$ از جبر لی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ داریم

$$\exp(X) = e^X = I + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots$$

بنابراین، به عنوان نتیجه‌ای از ۳.۲.۵ و تمرین $2-F$، به ازای هر $X \in \mathfrak{g}$ ای داریم

$$\mathrm{Ad}(\exp(X)) = e^{\mathrm{ad}(X)} = I + \mathrm{ad}(X) + \frac{(\mathrm{ad}(X))^2}{2!} + \cdots$$

رابطهٔ $A_x$، $\mathrm{Ad}$ و $\mathrm{ad}$ را در فرمولهای

$$(A_x)_{*,e} = \mathrm{Ad}(x), \qquad (\mathrm{Ad})_{*,e} = \mathrm{ad}$$

و دیاگرام زیر می‌توان دید:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "A_x"] & G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] & G \\
\mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathrm{Ad}(x)"'] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \arrow[r, "\mathrm{ad}"'] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \arrow[u, "e^{(\cdot)}"']
\end{tikzcd}$$

**۵.۲.۵ لم.** شرایط زیر بر زیر فضای خطی $L$ از $\mathfrak{g}$ را در نظر بگیرید، که $\mathfrak{g}$ عبارت است از جبر لی متناظر به گروه لی $G$:

۱) به ازای هر $x \in G$ ای $\mathrm{Ad}(x)L \subseteq L$ (و بنابراین، $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(L)$ نمایشی خوشتعریف برای $G$ است)؛

۲) به ازای هر $X \in \mathfrak{g}$ ای $\mathrm{ad}(X)L \subseteq L$ (و بنابراین، $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(L)$ نمایشی خوشتعریف برای $g$ است)؛

۳) $L$ ایده‌آلی از $\mathfrak{g}$ است.

در این صورت شرایط (۲) و (۳) معادلند و از (۱) نتیجه می‌شوند. چنانچه $G$ همبند باشد، این سه شرط معادلند.

برهان: به دلیل آنکه $\mathrm{ad}(X)Y = [X,Y]$، شرایط (۲) و (۳) به وضوح معادل هستند. فرض کنیم شرط (۱) برقرار باشد، $X \in \mathfrak{g}$ و $Y \in L$. در این صورت

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \mathrm{ad}(X)Y \\
&= (\mathrm{Ad})_{*,e}(X)Y \\
&= \frac{d}{dt}\{\exp t(\mathrm{Ad})_{*,e}(X)Y\}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\{\mathrm{Ad}(\exp tX)(Y)\}\Big|_{t=0}
\end{aligned}$$

اما $\exp(tX) \in G$ و بنابراین به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\mathrm{Ad}(\exp(tX))(Y) \in L$. در نتیجه

$$\frac{d}{dt}\{\mathrm{Ad}(\exp tX)(Y)\}\Big|_{t=0} \in L$$

که نشان دهندهٔ ایده‌آل بودن $L$ می‌باشد.

حال فرض کنیم که $G$ همبند است و (۲) نیز برقرار می‌باشد. فرض کنیم $X \in \mathfrak{g}$ و $Y \in L$. در این صورت

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(\exp(X))(Y) &= e^{\mathrm{ad}(X)}(Y) \\
&= Y + [X,Y] + \frac{1}{2}[X,[X,Y]] + \cdots
\end{aligned}$$

چون $L$ ایده‌آل است، هر یک از جملات عبارت آخر به $L$ متعلقند و بنابراین مجموع آنها به عنصری در $L$ همگرا است. مجموعهٔ $\exp()P[\mathfrak{g}]$ همسایگی‌ای از عنصر همانی گروه همبند $G$ است و بعلاوه ۵.۱.۲ اذعان می‌دارد که هر عضو از $G$ را به شکل $\exp(X_1)\cdots\exp(X_m)$ می‌توان نوشت که $X_1,\cdots,X_m \in \mathfrak{g}$. بنابراین، چون به ازای هر $j = 1,\cdots,m$ ای $\mathrm{Ad}(\exp(X_j))(L) \subseteq L$، داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(X)Y &= \mathrm{Ad}(\exp(X_1)\cdots\exp(X_m))Y \\
&= \mathrm{Ad}(\exp(X_1))\cdots\mathrm{Ad}(\exp(X_m))Y \in L
\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

**۶.۲.۵ قضیه.** فرض کنیم $G$ گروه لی همبند باشد. در این صورت $\mathfrak{h} \mapsto H$ تناظری یکبیک میان همهٔ زیر گروههای لی همبند نرمال $H$ در $G$ و همهٔ ایده‌آلهای $\mathfrak{h}$ در $\mathfrak{g}$ می‌دهد.

برهان: همانند اثبات قضیهٔ ۳.۱.۵ فرض می‌کنیم $L$ زیر جبر لی $\mathfrak{g}$ است و $H$ زیر گروه لی همبند منحصر بفردی از $G$ است که جبر لی آن $L = \mathfrak{h}$ می‌باشد. همچنین فرض کنیم که $H$ نرمال باشد، $X \in \mathfrak{g}$ و $Y \in \mathfrak{h} = L$. در این صورت درست مثل قسمت اول از برهان ۵.۲.۵ داریم

$$[X,Y] = \frac{d}{dt}\{\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y\}\Big|_{t=0}$$

اما

$$\exp(\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y) = \exp(tX)\cdot\exp(Y)\cdot\exp(-tX)$$

و بنابراین $H \ni \exp(\mathrm{Ad}(\exp(tX)))$، زیرا به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\exp(\pm tX) \in G$، $\exp(Y) \in H$ و $H$ نرمال است. در نتیجه بنابه لم ۴.۱.۵ به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y \in L$، و بنابراین همان طوری که انتظار داشتیم

$$[X,Y] = \frac{d}{dt}\{\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y\}\Big|_{t=0} \in L$$

از سوی دیگر، فرض کنیم $L = \mathfrak{h}$ ایده‌آلی از $\mathfrak{g}$ باشد. فرض کنیم $x \in G$ و $X \in \mathfrak{h}$. در این صورت از ۵.۲.۵ نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{Ad}(x)X \in L$ و بنابراین

$$x\cdot\exp(X)\cdot x^{-1} = A_x(\exp X) \in L.$$

حال از این واقعیت استفاده می کنیم که $H$ توسط $\exp(L)$ تولید می‌گردد و نشان می‌دهیم که به ازای هر $x \in G$ ای $x\cdot H\cdot x^{-1} \subseteq H$، و بنابراین $H$ نرمال است. □

اکنون قدمی از قضیهٔ قبلی فراتر نهاده و زیر گروه لی‌ای گروه لی $G$ را ارائه می دهیم که جبر لی آن برابر مرکز $\mathfrak{g}$ جبر لی $G$ می‌باشد.

**۷.۲.۵ تعریف.** ۱) **مرکز** جبر لی $L$ عبارت است از ایده‌آل $\{X \in L \ :$ به ازای هر $Y \in L$ ای $[X,Y]=0\}$.

۲) **مرکز** گروه $G$ عبارت است از زیر گروه نرمال $\{y \in G \ :$ به ازای هر $y \in G$ ای $xy = yx\}$.

روشن است که دو تعریف فوق بسیار شبیه هستند، زیرا مرکز $L$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\{X \in L \ : \ [X,Y] = [Y,X] \text{ به ازای هر } Y \in L \text{ ای}\}$$

**۸.۲.۵ نتیجه.** مؤلفهٔ همانی $J$ مرکز گروه لی $G$، زیر گروه لی آبلی و بسته‌ای از $G$ است و جبر لی آن $\mathfrak{j}$ برابر با مرکز $\mathfrak{g}$ می‌باشد. بعلاوه

$$\mathfrak{j} = \{\mathrm{Ad}(x)X = X \text{ به ازای هر } x \in G \text{ ای}\}.$$

**۹.۲.۵ یادداشت.** حتی در مورد گروه لی همبند $H$ ممکن است که مرکزش همبند نباشد. مثلاً، مرکز گروه لی همبند فشردهٔ $\mathrm{SU}(2)$ برابر با $\{-I, I\}$ است، که $I$ ماتریس همانی $2\times 2$ می‌باشد.

اثبات ۸.۲.۵: فرض کنیم $L = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(x)X = X$ به ازای هر $x \in G$ ای $\}$. ابتدا نشان می‌دهیم که $L$ با مرکز $\mathfrak{g}$ برابر است. اگر $X \in L$ و $Y \in \mathfrak{g}$، به کمک اولین پاراگراف از اثبات ۵.۲.۵ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $X$ به مرکز $\mathfrak{g}$ تعلق دارد، زیرا

$$[Y, X] = \frac{d}{dt}\{\mathrm{Ad}(\exp(tY)X)\}\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\{X\}\bigg|_{t=0} = 0$$

از سوی دیگر اگر $X$ به مرکز $\mathfrak{g}$ تعلق داشته باشد و $Y \in \mathfrak{g}$، در این صورت

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\exp(Y))X &= e^{\mathrm{ad}(Y)}(X)\\ &= x + [Y, X] + \frac{1}{2!}[Y, [Y, X]] + \cdots\\ &= X\end{aligned}$$

چون $G$ همبند است، توسط $\exp(\mathfrak{g})$ تولید می‌گردد و بنابراین به ازای هر $x \in G$ ای $\mathrm{Ad}(x)X = X$. در نتیجه $X \in L$ و لذا همان طور که می‌خواستیم، $L$ با مرکز $\mathfrak{g}$ برابر است.

اکنون نشان می‌دهیم که $L$ جبر لی $J$ مؤلفهٔ همانی مرکز $G$ می‌باشد. فرض کنیم $J_0$ نمایشگر زیر گروه لی آبلی و همبند منحصر بفردی از $G$ باشد که جبر لی آن $L$ است (قضیهٔ ۶.۲.۵). اگر $X \in l$ و $x \in G$، در این صورت

$$x \cdot \exp(X) \cdot x^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(x)X) = \exp(X)$$

اما $J_0$ توسط $\exp(L)$ تولید می‌گردد و بنابراین زیر مجموعه‌ای از مرکز $G$ است. در نتیجه $J_0 \subseteq J$. چون $J$ در مرکز $G$ بسته است و مرکز $G$ نیز در خود $G$ بسته است، بنابراین $J$ در $G$ بسته می‌باشد. همچنین، $J$ آبلی و همبند است، و بنابراین $j : J \to G$ زیر گروه لی آبلی، همبند و بسته‌ای از $G$ می‌باشد (قضیهٔ ۱.۳.۳). چون $J_0 \subseteq J$، بنابراین $L \subseteq \mathfrak{j}$، که $\mathfrak{j}$ جبر لی $J$ می‌باشد.

فرض کنیم $X \in \mathfrak{j}$ و $x \in G$. بنابه لم ۴.۱.۵، $X \in J$، و در نتیجه

$$\exp(\mathrm{Ad}(x)X) = x \cdot \exp(X) \cdot x^{-1} = \exp(X)$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که به ازای هر $x \in G$ و هر $X \in \mathfrak{j}$ ای $\mathrm{Ad}(x)X = X$، البته چنانچه لازم باشد از اول می‌توانیم بجای $X$ از مضربی حقیقی از $X$ استفاده کنیم. در نتیجه $\mathfrak{j} \subseteq L$ و خواستهٔ ما مبنی بر $\mathfrak{j} = L$ محقق شد. □

**۱۰.۲.۵ جبر لیِ حاصلضرب گروههای لی.** به عنوان نتیجه‌ای دیگر از قضیهٔ ۶.۲.۵، آن را با فرمول کبه در آمیخته و توصیفی برای جبر لیِ حاصلضرب تعدادی متناهی از گروههای لی همبند ارائه می‌کنیم. فرض کنیم $G_1$ و $G_2$ دو گروه لی همبند با جبر لی بترتیب $\mathfrak{g}_1$ و $\mathfrak{g}_2$ باشند، و جبر لی $G = G_1 \times G_2$ برابر با $\mathfrak{g}$ باشد. (بنابه ۱۶.۲.۲ این گروه عملاً یک گروه لی می‌باشد.) چون $G_1$ (یا دقدقتر، $G_1 \times \{e_1\}$) زیر گروه نرمال و بسته‌ای از $G$ است، در نتیجه $\mathfrak{g}_1$ ایده‌آلی از $\mathfrak{g}$ می‌باشد. به صورت مشابه، $\mathfrak{g}_2$ نیز ایده‌آلی از $\mathfrak{g}$ است.

اگر $X \in \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{g}_2$، در این صورت به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\exp(tX) \in G_1 \cap G_2 = \{e\}$ و بنابراین $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$. بعلاوه به ازای هر $X_1 \in \mathfrak{g}_1$ و هر $X_2 \in \mathfrak{g}_2$ ای $\exp(X_2)\exp(X_1) = \exp(X_1)\exp(X_2)$ و یا به بیان دقیقتر،

$$\left(\exp_{G_1}(X_1), e_1\right)\left(\exp_{G_2}(X_2), e_2\right) = \left(e_2, \exp_{G_2}(X_2)\right)\left(e_1, \exp_{G_1}(X_1)\right)$$

بنابراین از فرمول کبه نتیجه می‌گیریم که $\exp(X_1) \cdot \exp(X_2) = \exp(X_1 + X_2)$. بعد $\mathfrak{g}$ بایستی با مجموع ابعاد $\mathfrak{g}_1$ و $\mathfrak{g}_2$ برابر باشد و در نتیجه $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. پیدا است که این استدلال را برای حاصلضربی از یک تعداد متناهی گروه لی می‌توان بکار گرفت. همچنین مؤلفهٔ همانی حاصلضربی از گروههای توپولوژی برابر است با حاصلضرب مؤلفه‌های همانی آن گروهها (تمرین)، و جبر لی مؤلفهٔ همانی (بستهٔ) یک گروه لی برابر است با جبر لی کل آن گروه (از لم ۴.۱.۲ در اثبات آن استفاده شود). در نتیجه:

**گزاره** فرض کنید $G_1$، . . . و $G_m$ خانواده‌ای از $m$ گروه لی با جبر لی بترتیب برابر با $\mathfrak{g}_1$، . . . و $\mathfrak{g}_m$ باشند. اگر $\mathfrak{g}$ جبر لی $G = G_1 \times \cdots \times G_m$ باشد، در این صورت هر یک از $\mathfrak{g}_j$ ها ایده‌آل در $\mathfrak{g}$ هستند و بعلاوه $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$. همچنین، اگر $X_j \in \mathfrak{g}_j$، آنگاه

$$\begin{aligned} \exp_G(X_1 + \cdots + X_m) &= \exp_G(X_1) \cdots \exp_G(X_m) \\ &= \left(\exp_{G_1}(X_1) \cdots \exp_{G_m}(X_m)\right) \end{aligned}$$

## بخش ۳.۵ تمرینات

$(5-A)$ فرض کنید $G$ و $H$ گروه لی باشند و $\varphi : H \to G$ همومورفیسمی تحلیل است. نشان دهید که وقتی و تنها وقتی $\varphi$ ایمرشن است که $\varphi_{*,e}$ یکبیک باشد.

$(5-B)$ نشان دهید که اگر مجموعهٔ نقاط $\left(e^{it}, e^{i\sqrt{2}t}\right)$ با $t \in \mathbb{R}$ با توپولوژی مطح شده در اثبات قضیهٔ ۳.۱.۵ همراه گردد، زیر گروه لی غیر فشرده‌ای از $\mathbb{T}^2$ می‌سازد. همچنین نشان دهید که این توپولوژی اکیداً قویتر از توپولوژی القائی از $\mathbb{T}^2$ می‌باشد. (این تمرین را با تمرین $2-B$ و نیز قضیهٔ ۱۳.۳.۶ مقایسه کنید.) نشان دهید که اگر این زیر گروه ۱-پارامتری از $\mathbb{T}^2$ را با توپولوژی القائی‌اش همراه کنیم، آنگاه گروه حاصل گروه لی نخواهد بود، زیرا حتی موضعاً فشرده نیست!

$(5-C)$ فرض کنید $G$ یک گروه لی با جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد و $\mathfrak{h}_1$ و $\mathfrak{h}_2$ بترتیب برابر با جبر لی زیر گروههای لی همبند $H_1$ و $H_2$ از $G$ باشند. در این صورت $\mathfrak{h}_1$ و $\mathfrak{h}_1$ زیر جبرهای لی $\mathfrak{g}$ هستند و بعلاوه

۱) نشان دهید که زیر گروه لی همبند از $G$ متناظر به $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ از نظر جبری با $H_1 \cap H_2$ برابر است.

۲) فرض کنید $H$ نمایشگر زیر گروهی از $G$ باشد که توسط اجتماع $H_1 \cup H_2$ تولید می‌گردد. نشان دهید که زیر گروه لی همبند از $G$ متناظر به زیر جبر لی تولید شده توسط اجتماع $\mathfrak{h}_1 \cup \mathfrak{h}_2$ در $\mathfrak{g}$، بین $H$ و بستار $H$ در $G$ قرار دارد.

# کتاب‌نامه


[1] Armstrong, A. L.; *On the derived algebra of $L_p$ of a compact group*; Michigan Math. J. 21, 1974, 341-52.

[2] Averbukh, V. I. and Smolyanov, O. G.; *The various definitions of the derivative in linear topological spaces*; Russian Math. Surveys 23, 1968, 67-113.

[3] Baker, H. F.; *Alternants and countineous groups*; Proc. London Math. Soc. 3, 1905, 24-47.

[4] Birkhoff, G.; *Lie groups simply isomorphic with no linear group*; Bul. Ame. Math. Soc. 42, 1936, 883-8.

[5] Bourbaki, N.; *Groups et algebras de Lie*; Elements de mathematique, Chapters 2-3, 1972, Chapters 4-6, 1968, Hermann, Paris.

[6] Campbell, J. E.; *On a Law of combination of operators*; Proc. London Math. Soc. 29, 1898, 14-32.

[7] Cartan, E.; *Sur la structure des groups de transformations finis et continus*; These, 1894, Paris, Nony; $2^e$ edition, Vuibert, 1933.

[8] Cartan, E.; *Groups simples clos et ouverts et geometrie riemannienne*; J. Math. Pures Appl. 8, 1926, 1-33.

[9] Cartan, E.; *La theorie des groupes finis et l'analysis situs*; Memor. Sci. Math. 42, 1930.

[10] Carter, R. W.; *Simple groups and simple Lie algebras*; J. London Math. Soc. 40, 1965, 193-240.

[11] Cecchini, C.; *Lacunary Fourier series on compact Lie groups*; J. Functional Analysis 11, 1972, 191-203.

[12] Chevalley, C.; *Theory of Lie groups*; Volume 1 , Princeton University Press, Princeton, 1946.

[13] Coddington, E. A. and Levinson, N.; *Theory of ordinary differential equations*; McGraw-Hill, New York, Torento, London, 1955.

[14] Cohn, P. M.; *Lie groups*; Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 46, C.U.P., Cambridge, 1957.

[15] Dieudonne, J.; *Foundations of modern analysis*; Academic Press, New York, 1960.

[16] Dixmier J. and Douady, A.; *Champs continus d'espaces hilbertiens et de $C^*-$algebras*; Bull. Soc. Math. France 91, 1963, 227-284.

[17] Dugundji, J.; *Topology*; Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[18] Dounford, N. and Schwartz, J. T.; *Linear operators, Part 1: General theory*; Interscience, New York, London, 1958.

[19] Edwards, R. E.; *Functional analysis: Theory and applications*; Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.

[20] Edwards, R. E.; *Integration and harmonic analysis on compact Lie groups*; London Math. Soc. Lecture Notes, Volume 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

[21] Eells, J.; *A setting for global analysis*; Bull. Amer. Math. Soc. 72, 1966, 751-804.

[22] Eells, J and Elworthy, K. D. ; *Open Embeddings of certains Banach manifolds*; Ann. of Math. 91, 1970, 465-485.

[23] Feit, W.; *The current situation in the theory of finite simple groups*; Actes Congres Intern. Math., Tome 1, 1970,55-93.

[24] Figa-Talamanca, A. and Price, J. F.; *Applications of random Fourier series over compact groups to Fouries multipliers*; Pasific J. Math. Soc. 8, 1972, 531-541.

[25] Figa-Talamanca, A. and Price, J. F.; *Rudin Shapiro sequences on compact groups*; Bull. Austral. Math. Soc. 8, 1973, 241-245.

[26] Gleason, A.; *Groups without small subgroups*; Ann. of Math. 56 (1952), 193-212.

[27] Hausdorff, F.; *Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie*; Berichte der Sachsischen Akad. Wiss. (Math.-Phys. Kl.), Leipzig 58 (1906), 19-48.

[28] Helgason, S.; *Differential geometry and symmetric spaces*; Academic Press, New York, London, 1962.

[29] Henderson, D. W.; *Infinite dimensinal manifolds are open subsets of a Hilbert space*; Topology 9 (1970), 25-33.

[30] Hewitt, E. and Ross, Kenneth A.; *Abstract harmonic analysis: Volume 1*; Die Groundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 115. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New Yurk, 1963.

[31] Hewitt, E. and Ross, Kenneth A.; *Abstract harmonic analysis: Volume 2*; Die Groundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 152. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New Yurk, 1970.

[32] Horvath, J.; *Topological vector spaces and distributions*; Addison-Wesley, Reading, London, Don Mills, 1966.

[33] Hutchinson, M. F.; *Non-tall compact groups admit infinite Sidon sets*; J. Austral. Math. Soc. (to appear).

[34] Itzykson, C. and Nauenberg, M.; *Unitary groups: representation and decompositions*; Rev. Modern Phys. 38 (1966), 404-428.

[35] Jacobson, N.; *Lie algebras*; Interscience, New Yurk, London, 1962.

[36] Kallman, R. R.; *The topology of compact simple Lie groups is essentially unique*; Advanced in Math. 12 (1974) 416-417.

[37] Kelley, J. L.; *General topology*; (Van Nostrand, Princeton, Toronto, London, New York, 1955).

[38] Killing, W. K. J.; *Die zusammensentzung der stetigen endlichen transformatiodgrouppen*; I Math. Ann. 31 (1888), 252-90; nflbid. 33 (1889), 1-48; mibid 34 (1889), 57-122; IV ibid. 36 (1890), 161-89.

[39] Kobayashi, S. and Nomizo, K.; *Foundations of differential geometry: Vol I*; (Interscience, New York, London, 1963).

[40] Lang, S.; *Analysis II*; (Addison-Wesley, Reading, London, Don Mills, Ontario, 1969).

[41] Lang, S.; *Differentiable manifolds*; (Addison-Wesley, Reading, Don Mills, London, 1972).

[42] Lie, S.; *Theorie der transformationsgrouppen*; Math. Ann, 16 (1880), 441-528; a translation appears in Sophus Lie's 1880 transformation group paper, translated by M. Ackerman, comments by R, Hermann (Math. ScL Press, Massachusetts, 1975).

[43] MacLean, S.; *Categories for the working mathematician*; (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971).

[44] Mgnus, W., Karass, A. and Solitar, D.; *Combinatorial group theory: Presentation of groups in the terms of generators and relations*; (Interscience, New York, London, Sydney, 1966).

[45] Mayer, W. and Thomas, T. W.; *Foundations of the theory of Lie groups*; Ann of Math. 36 (1935), 770-822.

[46] McMullen, J. R. and Price, J. F.; *Rudin-Shapiro sequences for arbitrary compact group*; J. AustraL Math. Soc. (to appear).

[47] Mityagini, B. S.; *The homotopy structure of the linear group of a Banach spase*; Russian Math. Surveys 25 (5) (1970), 59-103.

[48] Zippin, L. and Montgomery, D.; *Small subgroups of finite dimensional groups*; Ann, of Math, 56 (1952), 213-41.

[49] Zippin, L. and Montgomery, D.; *Tolpological transformation groups*; (Interscience, New York, London,

[50] Naimark, M. A.; *Normed rings*; (Wolters-Noordhoff, Groningen, 1970).

[51] Ponterjagin, L. S.; *Topological groups*; (Princeton Univ. Press, Princeton, 1939).

[52] Ponterjagin, L. S.; *Sur les groups topologique compacts et le cinquieme probleme de M. Hilbert*; C. R. Acad. Scie. Paris 198 (1934), 238-40.

[53] Rider, D.; *Centeral lacunary sets*; Monatsh. Math. 76 (1972), 328-38.

[54] Robinson, A.; *Non-standard analysis*; (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966).

[55] SAGLE, A. A. and WALED, RALPH E.; *Introduction to Lie groups and Lie algebras*; (Academic Press, New York, London, 1973).

[56] SAMELSON, H.; *Notes on Lie algebras*; (Van Nostrand-Reinhold, New York, Cincinnati, Toronto, London, Melbourne, 1969).

[57] STEENROD, N. J.; *The topology of fibre boundles*; (Princeton University Press, Princeton, 3951).

[58] SPIVAK, M.; *Differential geometry*; (Michael Spivak, Brandeis University, 1970).

[59] VON NEUMANN, J. ; *Die einfuhrung analytischer parameter in topologischen grouppen*; Ann. Math. 34 (1933), 170-9C.

[60] WEIL, A.; *L'integration dans les groups topologiques et ses applications*; (Hermann, Paris, 1940).

[61] WEYL, H.; *Theorie der Darstellung kontinielicher halbeinfacher grouppen durch lineare transformationen: I. II. III und Nachtrag*; Math. Z. 23 (1925), 271-309; 24(1926), 328-76; 377-95; 789-91.

[62] YAMABE, H.; *A generalization of a theorem of Gleason*; Ann, Math. 58 (1953), 351-65.

[63] YU, YING-KING; *Topological semisimple groups*;

[64] HAUSNER, M. and SCHWARTZ, J.; *Lie groups and Lie algebras*; (Gordon and Breach, New York, 1968).

[65] HOCHSCHILD, G.; *The structure of Lie groups*; (Holden-Day, San Francisco, 1965).