دانشگاه علم و صنعت ایران
دانشکده ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض-هندسه

عنوان
تقارنهای تقریبی

نگارش
سعیده رشیدی

استاد راهنما
دکتر مهدی نجفی خواه

شهریور۹۰

دانشگاه علم و صنعت ایران
دانشکده ریاضی

رسالهٔ کارشناسی ارشد

تقارنهای تقریبی

نگارش: سعیده رشیدی

استاد راهنما: دکتر مهدی نجفی خواه   امضاء:

استاد ممتحن داخلی: دکتر آقاجانی و دکتر قائمی   امضاء:

استاد ممتحن خارجی: دکتر بهروز بید آباد   امضاء:

بنام بخشایشگر مهربان

تقدیم به پدر و مادر فداکارم،
استاد عزیز دکتر نجفی خواه
وتمامی کسانی که مرا در این امر یاری کردند

چکیده

در این مقاله یك نظریه جدید به نام گروه تقریبی،معرفی می شود.این نظریه روی آنالیز گروه تقریبی از معادلاتی که شامل یك پارامتر کوچك ϵ هستند،گسترش پیدا می کند. با کمك آنالیز گروهی کلاسیك ما قادریم بین معادلات مختلف فیزیك ریاضی، آن معادلاتی که ویژگی های تقارنی آنها قابل توجه هستند را شناسایی کنیم .البته هر گونه تغییر کوچك یا به عبارتی اختلال کوچك در یك معادله گروه تقارن آن معادله را تغییر می دهد.پس کارکردن روی روش های آنالیز گروهی که تحت تغییر های کوچك از معادلات پایدار هستند مفید به نظر می رسد.

در این مقاله سعی ما برآن است که چنین روش های که روی مفهوم یك گروه تقریبی از تبدیلات و تقارنهای تقریبی بنا شده اند را گسترش دهیم. قضیه ای از لی اثبات می شود که ما را قادر می سازد تقارن تقریبی بسازیم که تحت تغییر های کوچك معادلات دیفرانسیل پایا می باشد.

کلمات کلیدی:

تقارن،گروه تقارن،معادلات دیفرانسیل ،تقارن تقریبی،ناوردا،عمل گروه،مولد،جبر لی،قاب،
معادلات لی،تبدیل بی نهایت کوچك.

فهرست مطالب

لیست جداول

مقدمه

هدف اصلی روش‌های تحلیلی، به‌دست آوردن جواب‌های دقیق، تقارن‌ها، قوانین بقا و سایر خواص ریاضیاتی معادلات است که امکان تصمیم‌گیری‌های دقیق‌تری را در مطالعات علمی فراهم می‌کند.معادلاتی که پدیده های واقعی را توصیف می کنند، در مدل ریاضیاتی شکل های مختلفی را به خود می گیرند: معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزیی، معادلات انتگرال-دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل تابعی و بسیاری دیگر.

گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، گروهی است که جواب‌های یک دستگاه را به جواب‌های همان دستگاه می‌برد.از دیدگاه نظریه کلاسیک لی،این گروه‌ها شامل تبدیلات هندسی بر فضای متغییرهای مستقل و وابسته دستگاه می‌باشند و بر جواب‌ها به صورت تغییر گراف آن‌ها اثر می‌کند. در حالت معادلات دیفرانسیل معمولی، با داشتن شرایط ناوردایی تحت یک گروه تقارن یک‌پارامتری، می‌توان مرتبه معادله را یک واحد کاهش داد و درنهایت به جواب‌های عمومی رسید. اما برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جزیی، به طور کلی نمی‌توان از گروه‌های تقارن برای به‌دست آوردن جواب‌های عمومی دستگاه استفاده کرد. (به‌جز حالتی که می‌توان دستگاه را به دستگاه حل‌پذیر ساده‌تری مانند دستگاه خطی تبدیل کرد).

در کاربرد آنالیز گروه لی بر معادلات دیفرانسیل جزیی، استفاده از چندین مرحله ضروری است:اولین گام شامل ساخت یک تقارن (گروه لی پذیرفته توسط) معادله است. گام دوم استفاده از این تقارن ها برای یافتن متغیر های متعارفی و بازنوسی معادله با متغیر های جدید به فرم ساده تر و انتگرال پذیر و در نهایت انتگرال گیری از معادلات و یافتن جواب آنها است. توجه داشته باشید که برای معادلات دیفرانسیل جزیی مفهوم تقارن نیاز به بحث دارد که در این گفتار سه تعریف برای این مفهوم آمده است.

نظریه کلاسیک گروه لی، ابزاری کارا برای محاسبه گروه‌های تقارن دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل فراهم می‌کند.شاید درابتدا این‌طور به نظر برسد که روش‌های نظریه گروه لی برای تحلیل پدیده‌های مختلف، با کمک روش‌های ریاضیاتی و کاربرد آن‌ها بر معادلات دیفرانسیل کافی باشند. اما هر گونه تغییر کوچک یا به عبارتی اختلال کوچک در یک معادله گروه تقارن آن معادله را تغییر می دهد.پس کارکردن روی روش های آنالیز گروهی که تحت تغییر ها ی کوچک از معادلات پایدار هستند مفید به نظر می رسد . در این پایان نامه سعی شده است که چنین روش های که روی مفهوم یک گروه تقریبی از تبدیلات و تقارن های تقریبی بنا شده اند را گسترش دهیم . شایان ذکر است که بیشتر تحقیقات و مطالعات در زمینه گروه تبدیل تقریبی و تقارن های تقریبی معادلات توسط $NailH.Ibragimov$ و همکاران ایشان $VladimirF.Kovalev$ و $V.A.Baikov$ و $R.K.Gazizov$ انجام شده است. تا کنون الگوریتمی که در این پایان نامه آمده است بر روی معادلات معروفی از جمله معادله $Korteweg-deVries$ و $Burgers-Korteweg-deVries$ و معادلات $Maxwell$ پیاده سازی شده است.

در فصل اول این پایان نامه قصد داریم در مفهوم پایه ای گروه لی بحث کنیم . آنچه در فصل اول بیان می شود مقدمه ای برای فصول بعد است. در ابتدا گروه لی را معرفی کرده و تعاریف گروه تبدیل پیوسته و مولد گروه، ناوردا و معادلات ناوردا را می آوریم .در ادامه با معرفی مفهوم تقارن ،روش یافتن تقارن های معادلات دیفرانسیل معمولی را بیان می کنیم . و در انتهای فصل سعی می

کنیم با استفاده از تقارن های معادلات دیفرانسیل از آنها انتگرال گرفته و جواب آنها را بیابیم.
در فصل دوم ابتدا گروه تبدیلات را برای معادلات دیفرانسیل جزئی تعریف می کنیم و بعد گروه تقارن را برای این معادلات به دست می آوریم . برای درک بهتر مطلب گروه تقارن چند معادله دیفرانسیل جزئی را می یابیم.در انتها سه تعریف برای گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل ارائه می کنیم.بعد از اتمام این فصل قادر خواهیم بود گروه تقارن تمامی معادلات دیفرانسیل و نیز دستگاه های معادلات دیفرانسیل را محاسبه کنیم .
درفصل سوم که در واقع مطلب اصلی پایان نامه در آن ارائه می شود با استفاده از از مقدمات بیان شده در فصول اول و دوم سعی می کنیم گروه تبدیلات تقریبی را تعریف کنیم.متعاقباً معادلات تقریبی ، نگاشت نمایی تقریبی، گروه تقریبی از مرتبه دلخواه و ناورداهای تقریبی را با ارائه مثال های مفید به طور کامل تعریف می کنیم.با معادلات تقریبی آشنا می شویم و دو الگوریتم برای یافتن تقارن های تقریبی معادلات تقریبی بیان می کنیم .مطالب عنوان شده در این فصل را با ارائه الگوریتمی برای یافتن تقارن تقریبی معادلاتی به فرم $u_{tt} + \epsilon u_t = (\varphi(u)u_x)_x$ به پایان می بریم و سعی می کنیم این معادلات را طبقه بندی کنیم.
با نظر به مطالب گفته شده در فصل سوم پایان نامه ، در فصل چهارم قصد داریم کاربردی برای تقارن های تقریبی ارائه دهیم . بدیهی است کاربرد این تقارن ها در یافتن جواب معادلاتی است که شامل یک پارامتر کوچک مانند ϵ است . برای درک بهتر در این فصل مطالب با چند مثال مهم بیان می شوند و سعی داریم با معرفی متغیرهای متعارفی و ساده تر کردن شکل اصلی معادله ، با چند بار انتگرال گیری معادله را قابل حل کرده ، و جواب آن را بیابیم .

فصل ۱

آنالیز گروه لی

دراین فصل قصد داریم در مفهوم پایه ای گروه لی بحث کنیم. آنچه در این فصل بیان می شود مقدمه ای برای فصول بعد است. در ابتدا گروه لی را معرفی کرده و تعاریف گروه تبدیل پیوسته و مولد گروه ، ناوردا و معادلات ناوردا را می آوریم. در ادامه با معرفی مفهوم تقارن ،روش یافتن تقارن های معادلات دیفرانسیل معمولی را بیان می کنیم. و در انتها سعی می کنیم با استفاده از تقارن های معادلات دیفرانسیل از آنها انتگرال گرفته و جواب آنها را بیابیم.

۱.۱ گروه‌های تبدیلات نقطه ای پیوسته

بحث را با گروه های تبدیل یک پارامتری آغاز می کنیم.

۱.۱.۱ گروه های یک پارامتری

فرض کنیم T_a یک تبدیل وارون پذیر وابسته به یک پارامتر حقیقی و عمل کننده در یک صفحه (x, y)باشد.

$$\bar{x} = f(x, y, a), \qquad \bar{y} = g(x, y, a). \tag{۱.۱}$$

که توابع f, g در شرایط زیر صدق می کنند.

$$f|_{a=0} = x, \qquad g|_{a=0} = y. \tag{۲.۱}$$

البته شرط وارون پذیری ایجاب می کند که ژاکوبین f, g نسبت به x, y در همسایگی $a = 0$ صفر نشود. به علاوه فرض شده که توابع f, g و تمام مشتق های آنها که در بحث های بعدی می آیند در x, y, a پیوسته اند.

تعریف ۱.۱.۱. *یک مجموعهٔ G از تبدیل های(۱.۱) که شامل تبدیل همانی$I = T_0$ و نیز شامل وارون هر تبدیل یعنی T_a^{-1} باشدیک گروه تبدیلات یک پارامتری نامیده می شود. ضمن اینکه عمل گروه، ترکیب تبدیل هاست یعنی به صورت T_bT_a از همه عناصر $T_a, T_b \in G$ تعریف می شود که در اینجا a, b یک پارامترهای دلخواه مناسب هستند.*

عمل اصلی گروه میتواند به صورت زیر نوشته شود:

$$T_bT_a = T_{a+b}.$$

که داریم:

$$f(f(x,y,a),g(x,y,a),b)=f(x,y,a+b),$$
$$g(f(x,y,a),g(x,y,a),b)=g(x,y,a+b). \tag{۳.۱}$$

البته شرط (۳.۱) فقط برای مقادیر بسیار کوچک a,b برقرار باقی می ماند که در نتیجه ما به گروه های یک پارامتری موضعی G [۱] می‌رسیم که به‌اختصارگروه های موضعی نیز نامیده می‌شوند.

۲.۱.۱ تبدیل های بی نهایت کوچک

بسط توابع f,g به سری تیلور در همسایگی، $a=0$ با در نظر گرفتن شرط آغازی(۲.۱) تبدیل بی‌نهایت کوچک گروه G (۱.۱) را نتیجه می دهد:

$$\bar{x}\approx x+\xi(x,y)a, \quad \bar{y}\approx y+\eta(x,y)a. \tag{۴.۱}$$

که داریم:

$$\xi(x,y)=\left.\frac{\partial f(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0}, \quad \eta(x,y)=\left.\frac{\partial g(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0}. \tag{۵.۱}$$

بردار (ξ,η) با مولفه های (۵.۱)بردار مماس در نقطه (x,y) به منحنی که با تبدیلات نقطه ای $(\bar{x},\bar{y})$ توصیف می شود ، یا به عبارت دیگر بردار مماس از گروه G نامیده می‌شود.

مثال ۲.۱.۱. *گروه دوران ها*

$$\bar{x}=x\cos a+y\sin a, \qquad \bar{y}=y\cos a-x\sin a.$$

تبدیل بی‌نهایت کوچک زیر را دارد:

$$\xi=\frac{\partial f}{\partial a}=-x\sin a+y\cos a|_{a=0}=y,$$
$$\eta=\frac{\partial g}{\partial a}=-y\sin a-x\cos a|_{a=0}=-x.$$

$$\bar{x}\approx x+ya, \qquad \bar{y}\approx y-xa.$$

میدان برداری (۵.۱) در برخی مواقع به عنوان عملگر دیفرانسیلی مرتبه اول نوشته می‌شود:

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{۶.۱}$$

لی [۲] عملگر (۶.۱) را نماد تبدیل بینهایت (۴.۱) یا نمادی از گروه متناظر G نامید. عملگر (۶.۱) در اصطلاح درست مولد گروه G از تبدیلات (۱.۱) نامیده می‌شود.

مثال ۳.۱.۱. *مولد گروه دوران های مثال ۲.۱.۱ به صورت زیر است:*

$$X=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}. \tag{۷.۱}$$

[۱] one parameter local groups

[۲] (Lie)

۳.۱.۱ معادلات لی

فرض کنیم یک تبدیل بینهایت کوچک (۴.۱)،باعملگر(۶.۱) داده شده است. تبدیلات (۱.۱) از گروه یک پارامتری متناظر G با حل معادلات زیر به دست می آید. این معادلات، معادلات لی نامیده می شوند:

$$\begin{aligned}
&\frac{df}{da} = \xi(f,g), \qquad f|_{a=0} = x,\\
&\frac{dg}{da} = \eta(f,g), \qquad g|_{a=0} = y.
\end{aligned} \tag{۸.۱}$$

می توان معادلات (۸.۱) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{x}}{da} = \xi(\bar{x},\bar{y}), \qquad \bar{x}|_{a=0} = x,\\
&\frac{d\bar{y}}{da} = \eta(\bar{x},\bar{y}), \qquad \bar{y}|_{a=0} = y.
\end{aligned} \tag{۹.۱}$$

مثال ۴.۱.۱. *تبدیل بی نهایت کوچک زیر را در نظر بگیرید:*

$$\bar{x} \approx x + ax^2, \qquad \bar{y} \approx y + axy.$$

مولد متناظر شکل مقابل را دارد:

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}. \tag{۱۰.۱}$$

معادلات لی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{x}}{da} = \bar{x}^2, \qquad \bar{x}|_{a=0} = x,\\
&\frac{d\bar{y}}{da} = \bar{x}\bar{y}, \qquad \bar{y}|_{a=0} = y.
\end{aligned}$$

این دستگاه معادلات دیفرانسیل به سادگی حل می شود و داریم:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d\bar{x}}{\bar{x}^2} = \int da,\\
&-\frac{1}{\bar{x}} = a + C_1,\\
&\bar{x} = -\frac{1}{a+C_1}.
\end{aligned}$$

و از طرفی

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{y}}{da} &= -\frac{1}{a+C_1}\bar{y},\\
\int\frac{d\bar{y}}{\bar{y}} &= \int -\frac{da}{a+C_1},\\
\ln\bar{y} &= -\ln(a+C_1)+C_2 \rightarrow \bar{y}(a+C_1)=C_2,\\
\bar{y} &= \frac{C_2}{a+C_1}.
\end{aligned}$$

با استفاده از شرط آغازی داریم $C_2=-\frac{y}{x}$ و $C_1=-\frac{1}{x}$ ، در نتیجه به گروه یک پارامتری زیر از تبدیلات تصویری می رسیم:

$$\bar{x}=\frac{x}{1-ax},\qquad \bar{y}=\frac{y}{1-ax}. \tag{۱۱.۱}$$

۴.۱.۱ نگاشت نمایی

چنانچه ما مولد گروه را داشته باشیم راه دیگری نیز برای به دست آوردن گروه تبدیل آن مولد وجود دارد و آن استفاده از نگاشت نمایی است:

$$\bar{x}=\exp^{aX}(x),\quad \bar{y}=\exp^{aX}(y). \tag{۱۲.۱}$$

که می دانیم

$$\exp^{aX}=1+\frac{a}{1!}X+\frac{a^2}{2!}X^2+\cdots+\frac{a^s}{s!}X^s+\cdots. \tag{۱۳.۱}$$

مثال ۵.۱.۱. *برای درک بهتر مطلب مجددا مولد (۱۰.۱) را که در مثال۱ .۱ .۴ بحث شد را در نظر بگیرید:*

$$X=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

برای اینکه با استفاده از نگاشت نمایی گروه تبدیل را پیدا کنیم باید $X^s(y)$ و$X^s(x)$ را برای $s=1,2,\cdots$ پیدا کنیم ما اینجا چندین جمله را محاسبه می کنیم :

$$\begin{aligned}
&X(x)=x^2\frac{\partial}{\partial x}(x)+xy\frac{\partial}{\partial y}(x)=x^2,\\
&X^2(x)=X(X(x))=X(x^2)=x^2\frac{\partial}{\partial x}(x^2)+xy\frac{\partial}{\partial y}(x^2)=2x^3=2!x^3,\\
&X(x)=x^2\qquad X^2(x)=X(X(x))=X(x^2)=2!x^3\qquad X^3(x)=X(2!x^3)=3!x^4.
\end{aligned}$$

سپس حدس می زنیم:

$$X^s(x)=s!x^{s+1}.$$

که با کمک استقرا آن را ثابت می کنیم و جملات مراتب بالاتر را نیز حدس می زنیم:

$$X^{s+1}(x)=X(s!x^{s+1})=(s+1)!x^2x^s=(s+1)!x^{s+2}.$$

همچنین داریم:

$$X(y) = x^2\frac{\partial}{\partial x}(y) + xy\frac{\partial}{\partial y}(y) = xy,$$

$$X(y) = xy \qquad X^2(y) = X(xy) = yX(x) + xX(y) = yx^2 + xxy = 2!yx^2,$$

$$X^3(y) = 2![yX(x^2) + x^2X(y)] = 3!yx^3.$$

سپس حدس می‌زنیم:

$$X^s(y) = s!yx^s.$$

و بااستفاده از استقرا آن را اثبات می‌کنیم:

$$X^{s+1}(y) = s!X(yx^s) = s![syx^{s+1} + x^s(xy)] = (s+1)!yx^{s+1}.$$

با جانشانی این عبارت در نگاشت نمایی به عبارت زیر می رسیم که:

$$\exp^{aX}(x) = x + ax^2 + \cdots + a^s x^{s+1} + \cdots .$$

می توان طرف راست را اینطور بازنویسی کرد $x(1 + ax + \cdots + a^s x^s + \cdots)$ که سری داخل پرانتز آشکارا بسط تیلور تابع $\frac{1}{1-ax}$ به شرط $|ax| < 1$ است در نتیجه

$$\bar{x} = \exp^{aX}(x) = \frac{x}{1-ax}.$$

همچنین به دست می آوریم

$$\exp^{aX}(y) = y + ayx + a^2yx^2 + \cdots + a^s yx^s + \cdots ,$$
$$= y(1 + ax + a^2x^2 + \cdots + a^s yx^s + \cdots).$$

در نتیجه:

$$\bar{y} = \exp^{aX}(y) = \frac{y}{1-ax}.$$

بنابر این ما با این روش نیز به تبدیلات (۱۱.۱)رسیدیم:

$$\bar{x} = \frac{x}{1-ax}, \qquad \bar{y} = \frac{y}{1-ax}.$$

۵.۱.۱ متغیر های متعارفی

قضیه ۶.۱.۱. *هر گروه یک پارامتری از تبدیلات (۱.۱)را با استفاده از یک تغیر متغیر مناسب می توان به گروه انتقال‌های $\bar{t} = t + a$ و$\bar{u} = u$ با مولد $X = \frac{\partial}{\partial t}$ کاهش داد.*

$$t = t(x, y), \qquad u = u(x, y).$$

متغیر های t, u متغیرهای متعارفی نامیده می شوند.

تحت یک تغییر متغیر عملگر دیفرانسیلی(۶.۱) مطابق فرمول به شکل زیر تبدیل می شود:

$$X = X(t)\frac{\partial}{\partial t} + X(u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{۱۴.۱}$$

بنابر این ،متغیر های متعارفی از معادلات مشتق جزیی مرتبه اول زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} X(t) &\equiv \xi(x,y)\frac{\partial t(x,y)}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial t(x,y)}{\partial y} = 1,\\ X(u) &\equiv \xi(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{۱۵.۱}$$

۶.۱.۱ ناورداها و معادلات ناوردا

تعریف ۷.۱.۱. *تابع $F(x,y)$ را یک ناوردا از گروه G از تبدیلات(۱.۱) می نامیم اگر $F(\bar{x},\bar{y}) = F(x,y)$ یعنی:*

$$F(f(x,y,a), g(x,y,a)) = F(x,y). \tag{۱۶.۱}$$

که x,y متغیر و a پارامتر می باشد.

قضیه ۸.۱.۱. *یک تابع $F(x,y)$ یک ناوردای گروه G است اگر و فقط اگر حلی برای معادله دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه اول زیر باشد:*

$$XF \equiv \xi(x,y)\frac{\partial F}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{۱۷.۱}$$

اثبات. فرض کنید $F(x,y)$ یک ناوردا باشد بسط تیلور $F(f(x,y,a), g(x,y,a))$ را نسبت به a در نظر بگیرید:

$$F(f(x,y,a), g(x,y,a)) \approx F(x+a\xi, y+a\eta) \approx F(x,y) + a(\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y}),$$

$$F(\bar{x},\bar{y}) = F(x,y) + aX(F) + o(a).$$

که در آن $O(a)$ مقدار جملات بعدی بسط می باشد، و با جانشانی عبارت اخیر در معادله (۱۶.۱) داریم:

$$F(x,y) + aX(F) + o(a) = F(x,y).$$

این نشان می دهد که $aX(F) + o(a) = 0$ ودر نتیجه $X(F) = 0$ و این یعنی (۱۷.۱) را نتیجه می دهد. بر عکس فرض کنید $F(x,y)$ یک حل از معادله (۱۷.۱) باشد. فرض کنیم که تابع $F(x,y)$ تحلیلی است با استفاده از بسط تیلور آن می توان نگاشت نمایی (۱۲.۱) را به تابع $F(x,y)$ گسترش داد مانند زیر:

$$\begin{aligned} F(\bar{x},\bar{y}) = \exp^{aX} F(x,y) &= (1 + \frac{a}{1!}X + \frac{a^2}{2!}X^2 + \cdots + \frac{a^s}{s!}X^s + \cdots)F(x,y),\\ &= F(x,y) + \frac{a}{1!}XF(x,y) + \frac{a^2}{2!}X^2F(x,y) + \cdots . \end{aligned}$$

چون $XF(x,y) = 0$ ،می توان نوشت $X^2F = X(XF) = 0, \cdots, X^sF = 0$ ما نتیجه می گیریم که $F(\bar{x},\bar{y}) = F(x,y)$ و این یعنی معادله(۱۶.۱) و قضیه اثبات می شود. □

از قضیه۸.۱.۱ بر می آید که هر گروه یک پارامتری از تبدیلات در صفحه یک ناوردای مستقل دارد که می تواند به عنوان نخستین

جواب [۳] $\Psi(x,y)=C$ از معادله مشخصه برای(۱۷.۱) در نظر گرفته شود.

$$\frac{dx}{\xi(x,y)}=\frac{dy}{\eta(x,y)}. \tag{۱۸.۱}$$

هر ناوردای دیگر F نیز تابعی از Ψ است یعنی $F(x,y)=\Phi(\Psi(x,y))$.

مثال ۹.۱.۱. *مولد گروه زیر را در نظر بگیرید:*

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

معادله مشخصه به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2y}.$$

وبا اولین انتگرال گیری نتیجه می گیریم $\Psi=\frac{y}{x^2}$ در نتیجه هر ناوردای دیگر به صورت $F(x,y)=\Phi(\frac{y}{x^2})$ است که Φ یک تابع دلخواه است.

مفاهیم ارائه شده تا کنون به گروه های تبدیلات چند بعدی نیز تعمیم پیدا می‌کنند.

$$\bar{x}^i=f^i(x,a),\qquad i=1,\cdots,n. \tag{۱۹.۱}$$

که در فضای $n-$بعدی از نقاط $x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ مانند تبدیلات (۱.۱)در صفحه (x,y) عمل می کند. مولد گروه تبدیلات(۱۹.۱) اینگونه نوشته می شود:

$$X=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۲۰.۱}$$

که

$$\xi^i(x)=\left.\frac{\partial f^i(x,a)}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

معادلات لی(۹.۱) اینگونه نوشته می شوند:

$$\frac{d\bar{x}^i}{da}=\xi^i(\bar{x}),\qquad \bar{x}^i|_{a=0}=x^i. \tag{۲۱.۱}$$

نگاشت نمایی (۱۲.۱) اینگونه نوشته می شود:

$$\bar{x}^i=\exp^{aX}(x^i),\qquad i=1,\cdots,n. \tag{۲۲.۱}$$

که داریم:

$$\exp^{aX}=1+\frac{a}{1!}X+\frac{a^2}{2!}X^2+\cdots+\frac{a^s}{s!}X^s+\cdots. \tag{۲۳.۱}$$

تعریف۷.۱.۱ از توابع ناوردا اینجا نیز برقرار است. یعنی یک ناوردا با معادله $F(\bar{x})=F(x)$ تعریف می شود. محک ناوردایی نیز که با قضیه ۸.۱.۱ داده شد، با جایگذاری حالت n بعدی در فرمول (۱۷.۱) به عبارت زیر تبدیل می شود:

$$\sum_{i=1}^{n}\xi^i(x)\frac{\partial F}{\partial x^i}=0. \tag{۲۴.۱}$$

پس $n-1$ جواب نخست مستقل تابعی $\Psi_1(x),\cdots,\Psi_{n-1}(x)$ از دستگاه معادله مشخصه (۲۴.۱)

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)}=\frac{dx^2}{\xi^2(x)}=\cdots=\frac{dx^n}{\xi^n(x)}. \tag{۲۵.۱}$$

[۳] first integral

یک پایه ناوردا می‌سازد. یعنی هر ناوردای $F(x)$ اینگونه داده می شود:

$$F(x) = \Phi(\Psi_1(x), \cdots, \Psi_{n-1}(x)). \tag{۲۶.۱}$$

حال بیایید روی حالت ابعاد بالاتر تمرکز کنیم و دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیریم:

$$F_1(x) = 0, \cdots, F_s(x) = 0, \qquad s < n. \tag{۲۷.۱}$$

فرض کنیم رتبه ماتریس $\| \frac{\partial F_k}{\partial x^i} \|$ درتمام نقاط x که در دستگاه معادلات (۲۷.۱) صدق می کنند مساوی با s است. سپس این دستگاه یک رویهٔ $(n-s)-$بعدی Mرا مشخص می کند.

تعریف ۱۰.۱.۱. *دستگاه معادلات (۲۷.۱) نسبت به گروه G از تبدیلات (۱۹.۱) ناوردا گفته می شود اگر هر نقطه x روی سطح M با اعمال تبدیلات G دوباره روی سطح M باشد. این یعنی $x \in M$ به طور ضمنی بیان می کند که $\bar{x} \in M$.*

قضیه ۱۱.۱.۱. *دستگاه معادلات (۲۷.۱) نسبت به گروه G از تبدیلات (۱۹.۱) با مولد (۲۰.۱) X ناورداست اگر و فقط اگر*

$$XF_k\Big|_M = 0, \qquad k = 1, \cdots, s. \tag{۲۸.۱}$$

۲.۱ تقارنهای معادلات دیفرانسیل معمولی ODE

۱.۲.۱ رویه معادلات دیفرانسیل

هر معادله دیفرانسیل دارای دو مولفه است، یعنی رویه و کلاس حل ها مرجع [۸] را ببینید. برای مثال رویه معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

$$F(x, y, y') = 0.$$

رویه $F(x,y,p) = 0$ در فضای سه متغیر مستقل x, y, p است. آن با جایگذاری مشتق اول y' بامتغیر p در معادله دیفرانسیل $F(x,y,y') = 0$ به دست می آید. مرحله سخت در انتگرال گیری معادله دیفرانسیل ساده کردن رویه با متغیر های مناسب x, y است. آنالیز گروهای لی روش هایی برای ساده کردن رویه با استفاده از گروه های تقارن (یا گروه پذیرفته شده) معادلات دیفرانسیل پیشنهاد می دهد. به عنوان مثال معادله ریکاتی زیر را در نظر بگیرید:

$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0. \tag{۲۹.۱}$$

رویه آن با معادله جبری زیر تعریف شده است:

$$p + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0. \tag{۳۰.۱}$$

و یک سهمیوار هذلولوی است. برای معادله ریکاتی (۲۹.۱) یک گروه یک پارامتری متقارن با تبدیلات زیر به دست می آید.

$$\bar{x} = x \exp^a, \quad \bar{y} = y \exp^{-a}. \tag{۳۱.۱}$$

در حقیقت تبدیلات (۳۱.۱) بعد از بسط به مشتق اول y' و جایگذاری $y' = 0$ اینگونه نوشته می شوند:

$$\bar{x} = x \exp^a, \qquad \bar{y} = y \exp^{-a}, \qquad \bar{p} = p \exp^{-2a}. \tag{۳۲.۱}$$

می توان بررسی کرد که (۳۰.۱) نسبت به تبدیلات (۳۲.۱) ناورداست. اجازه بدهید شرط ناوردایی بی نهایت کوچک (۲۸.۱) را چک کنیم. مولد (۲۰.۱) از گروه تبدیلات (۳۲.۱) شکلی به این صورت دارد.

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} - 2p\frac{\partial}{\partial p}.$$

می توان بررسی کرد که در شرط ناوردایی صدق می کند.

$$X(p + y^2 - \frac{2}{x^2}) = -2p - 2y^2 + \frac{4}{x^2} = -2(p + y^2 - \frac{2}{x^2}).$$

و درنتیجه $X(p + y^2 - \frac{2}{x^2})\Big|_{(30.1)} = 0$ برای تبدیلات (۳۱.۱) متغیرهای متعارفی به صورت زیر هستند:

$$t = \ln x, \qquad u = xy. \tag{۳۳.۱}$$

با متغیر های متعارفی (۳۳.۱) معادله ریکاتی (۲۹.۱) به صورت زیر در می آید:

$$u' + u^2 - u - 2 = 0, \qquad (u' = \frac{du}{dt}). \tag{۳۴.۱}$$

و رویه باجایگذاری $u' = q$ در (۳۴.۱) به دست می آید وبا معادله جبری زیر داده می شود:

$$q + u^2 - u - 2 = 0. \tag{۳۵.۱}$$

در طرف چپ معادله(۳۵.۱) متغیر t ظاهر نمی‌شود. بنابر این رویه خمیده (۳۰.۱) به یک رویه استوانه ای که در راستای محور t کشیده شده کاهش پیدا می کند. یعنی به یک استوانهٔ سهموی تبدیل می شود. بنابر این ما می بینیم که در انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل مرحله قطعی ساده کردن رویه با تبدیل آن به یک استوانه است. برای چنین منظوری کافی است گروه تقارن را با معرفی متغیرهای متعارفی ساده کنیم. در نتیجه معادله ریکاتی به (۲۹.۱) شکل انتگرال پذیر (۳۴.۱) تبدیل می شود.

۲.۲.۱ توسیع عمل گروه ها به مشتق ها

تبدیل مشتق های $y', y'', \cdots$ تحت عمل تبدیلات نقطه ای (۱.۱) ،خوش تعریف است. نوشتن این تبدیلات به صورت فرمولی با استفاده از عملگر دیفرانسیل کلی ساده است:

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + \cdots .$$

سپس فرمول تبدیل برای مشتق مرتبه اول ودوم اینگونه نوشته می شود:

$$\bar{y}' \equiv \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{Dg}{Df} = \frac{g_x + y'g_y}{f_x + y'f_y} \equiv p(x, y, y', a), \tag{۳۶.۱}$$

$$\bar{y}'' \equiv \frac{d\bar{y'}}{d\bar{x}} = \frac{Dp}{Df} = \frac{p_x + y'p_y + y''p_{y'}}{f_x + y'f_y}. \tag{۳۷.۱}$$

یعنی اگر از گروه G از تبدیلات نقطه ای(۱.۱) شروع کنیم و سپس تبدیلات (۳۶.۱) را اضافه کنیم می توان گروه $G_{(1)}$ که در فضای سه متغیر (x, y, y') عمل میکند به دست آورد. به علاوه با اضافه کردن تبدیل (۳۷.۱) گروه $G_{(2)}$ که در فضای (x, y, y', y'')عمل می کند به دست می آید.

تعریف ۱.۲.۱. *گروه $G_{(2)}$ و $G_{(1)}$ امتداد مرتبه اول و مرتبه دوم از G نامیده می شوند. امتداد های مرتبه بالاتر نیز به طور مشابه تعریف می شوند.*

۳.۲.۱ مولد های گروه های مرتبه بالاتر

با جایگذاری تبدیل های بی نهایت کوچك (۴.۱) در (۳۶.۱) و (۳۷.۱)

$$\bar{x} \approx x + a\xi, \qquad \bar{y} \approx y + a\eta.$$

و در نظر نگرفتن جملات مرتبه بالاتر در a، تبدیلات بی نهایت کوچک زیر از مشتق ها به دست می آید:

$$\begin{aligned}
\bar{y}' = \frac{y' + aD(\eta)}{1 + aD(\xi)} &\approx [y' + aD(\eta)][1 - aD(\xi)], \\
&\approx y' + [D(\eta) - y'D(\xi)]a \equiv y' + a\zeta_1, \\
\bar{y}'' = \frac{y'' + aD(\zeta_1)}{1 + aD(\xi)} &\approx [y'' + aD(\zeta_1)][1 - aD(\xi)], \\
&\approx y'' + [D(\zeta) - y''D(\xi)]a \equiv y'' + a\zeta_2.
\end{aligned}$$

بنابر این مولد های گروه های امتداد داده شده $G_{(1)}$ و $G_{(2)}$ اینگونه هستند:

$$X_{(1)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial y'}, \qquad \zeta_1 = D(\eta) - y'D(\xi), \tag{۳۸.۱}$$

$$X_{(2)} = X(1) + \zeta_2\frac{\partial}{\partial y''}, \qquad \zeta_2 = D(\zeta_1) - y''D(\xi). \tag{۳۹.۱}$$

اینها امتداد مرتبه اول و دوم عملگر بی نهایت کوچک (۶.۱) نامیده می شوند. از این پس به جای به کار بردن عبارت طولانی زیر فقط به گفتن جمله امتداد بسنده می کنیم.

$$\zeta_1 = D(\eta) - y'D(\xi) = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2\xi_y, \tag{۴۰.۱}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_2 = D(\zeta_1) - y''D(\xi) &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - y'^3\xi_{yy} \\
&\quad + (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y))y''.
\end{aligned} \tag{۴۱.۱}$$

۴.۲.۱ تعریف یک گروه تقارن

فرض کنیدG یک گروه از تبدیلات نقطه ای باشد و فرض کنید $G_{(1)}$ و $G_{(2)}$ امتداد های مرتبه اول ودوم آن باشند.

تعریف ۲.۲.۱. *گروه G از تبدیلات نقطه ای (۱.۱) را یک گروه تقارن از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول می گوییم اگر:*

$$F(x, y, y') = 0. \tag{۴۲.۱}$$

یا به عبارت دیگر می گوییم معادله (۴۲.۱) گروه G را می پذیرد. اگر معادله (۴۲.۱) تحت تبدیلات (۱.۱) ناوردا باشد یا به عبارت دیگر اگر قاب معادله (۴۲.۱) نسبت به امتداد مرتبه اول $G_{(1)}$ از گروه G ناوردا باشد. به علاوه یک معادله دیفرانسیل مرتبه nام

$$F(x, y, y' \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{۴۳.۱}$$

یگ گروه G را می پذیرد اگر وریته (رویه در فضای $x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$)نسبت به امتداد مرتبه nام $G_{(n)}$ از G ناوردا باشد.

۵.۲.۱ ویژگی اصلی گروه تقارن

معادله (۴۳.۱) را که نسبت به $y^{(n)}$ حل شده است را در نظر بگیرید:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}). \quad (۴۴.۱)$$

که f یک تابع هموار است. این ویژگی اصلی گروه تقارن که در قضیه بعد آورده می شود ،نخستین بار توسط لی[۴] اثبات شد. (برهان این مطلب برای معادلات مرتبه اول در کتاب لی 1891 فصل ۱۶ بخش اول قضیه اول آمده است.)

قضیه ۳.۲.۱. *یک گروهG یک گروه تقارن برای معادله(۴۴.۱) است اگر وفقط اگر G هر حل کلاسیک معادله (۴۴.۱) را به حل دیگر از همین معادله ببرد.*

۶.۲.۱ محاسبه تقارن های بی نهایت کوچک

مطابق بخش ۳.۱.۱برای پیدا کردن تقارن های بی نهایت کوچک، کافی است مولد های(۶.۱) از گروه تقارن را بیابیم. اینجا این مسئله را برای معادلات مرتبه دوم بررسی می کنیم:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (۴۵.۱)$$

محک ناوردایی بینهایت کوچک اینجا ساختار زیر را دارد:

$$X_{(2)}F\Big|_{F=0} \equiv (\xi F_x + \eta F_y + \zeta_1 F_{y'} + \zeta_2 F_{y''})\Big|_{F=0} = 0. \quad (۴۶.۱)$$

که ζ_1 و ζ_2 از فرمول امتداد معادلات (۴۰.۱) و (۴۱.۱) محاسبه می شود. عبارت (۴۶.۱) معادله مشخصه برای گروه پذیرفته شده با معادله دیفرانسیل (۴۵.۱) نامیده می شود. اگر معادله دیفرانسیل به طور زیر نوشته شود

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (۴۷.۱)$$

معادله مشخصه (۴۶.۱) ،بعد از جانشانی مقادیر ζ_1 و ζ_2 از (۴۰.۱) و (۴۱.۱) و y'' که با طرف راست از(۴۷.۱) داده می شود.

$$\begin{aligned}\eta_{xx} &+ (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 \\ &- y'^3\xi_{yy} + (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)f \\ &- [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2\xi_y]f_{y'} - \xi f_x - \eta f_y = 0. \end{aligned} \quad (۴۸.۱)$$

که اینجا $f(x, y, y')$ یک تابع معلوم است. ما با یک معادله دیفرانسیل سر وکار داریم در حالی که توابع مختصاتی η و ξ توابعی نا معلوم از x, y هستند. چون طرف چپ (۴۸.۱) شامل کمیت y' است که به عنوان متغیر مستقل از x, y در نظر گرفته می شود،معادله مشخصه به چندین معادله مستقل شکافته می شود ،بنابر این یک دستگاه فرا معین از معادلات دیفرانسیل برای $\eta(x, y)$ و $\xi(x, y)$ داریم. برای حل این دستگاه ما همه تقارن های بی نهایت کوچک معادله (۴۷.۱) را پیدا می کنیم.

[۴] S.Lie

۷.۲.۱ یک مثا ل

اجازه بدهید نخست عملگر هایی راپیدا کنیم:

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

که توسط معادله مرتبه دوم زیر پذیرفته شده است:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \exp^y = 0. \tag{۴۹.۱}$$

اینجا $f = \exp^y - \frac{1}{x}y'$ و معادله تعیین (۴۸.۱) شکلی به صورت زیر دارد:

$$\begin{aligned} &\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 \\ &- y'^3\xi_{yy} + (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)\left(\exp^y - \frac{y'}{x}\right) \\ &+ \frac{1}{x}[\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2\xi_y] - \xi\frac{y'}{x^2} - \eta\exp^y = 0. \end{aligned}$$

طرف چپ این معادله نسبت به y' یک چند جمله ای درجه سوم است. بنابر این معادله مشخصه به چهار معادله زیر تجزیه می شود. با مساوی صفر قرار دادن توان های مختلف y' داریم:

$$(y')^3 : \quad \xi_{yy} = 0, \tag{۵۰.۱}$$

$$(y')^2 : \quad \eta_{yy} - 2\xi_{yy} + \frac{2}{x}\xi_y = 0, \tag{۵۱.۱}$$

$$(y') : \quad 2\eta_{xy} - \xi_{xx} + \left(\frac{\xi}{x}\right)_x - 3\xi_y\exp^y = 0, \tag{۵۲.۱}$$

$$(y')^0 : \quad \eta_{xx} + \frac{1}{x}\eta_x + (\eta_y - 2\xi_x - \eta)\exp^y = 0. \tag{۵۳.۱}$$

با انتگرال گیری از معادلات (۵۰.۱)و(۵۱.۱) نسبت به y داریم:

$$\xi = p(x)y + a(x), \qquad \eta = (p' - \frac{p}{x})y^2 + q(x)y + b(x).$$

حال باید این ξ, η را در معادله (۵۲.۱) و(۵۳.۱) جایگزین کنیم. با توجه به این که وابستگی ξ, η به y چند جمله ای است و طرف چپ (۵۲.۱) و (۵۳.۱) شامل $\exp^y$ است باید داشته باشیم:

$$\xi_y = 0, \qquad \eta_y - 2\xi_x - \eta = 0.$$

ابتدا $p = 0$ می شود که این تساوی $\xi = a(x)$ را نتیجه می دهد. با این محاسبه شرط دوم این گونه نوشته می شود:

$$q(x) - 2a'(x) - b(x) - q(x)y = 0.$$

در نتیجه $q = 0$ و $2a' + b = 0$ بنابر این ،

$$\xi = a(x), \quad \eta = -2a'(x).$$

با جایگذاری اینها در معادله (۵۲.۱) داریم:

$$(a' - \frac{a}{x})' = 0.$$

که نتیجه می گیریم $a = C_1 x\ln x + C_2 x$ به عنوان حل کلی ما جواب معادله مشخصه(۵۰.۱)-(۵۳.۱) را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\xi = C_1 x\ln x + C_2 x, \qquad \eta = -2[C_1(1+\ln x) + C_2 x].$$

با ضرایب C_1, C_2 و در نهایت ما حل کلی را به صورت یک ترکیب خطی از دو حل مستقل داریم:

$$\xi_1 = x\ln x, \qquad \eta_1 = -2(1+\ln x).$$
$$\xi_2 = x, \qquad \eta_2 = -2.$$

این یعنی این که (۴۹.۱) دو عملگر مستقل خطی می پذیرد:

$$X_1 = x\ln x\frac{\partial}{\partial x} - 2(1+\ln x)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}. \tag{۵۴.۱}$$

و در نهایت این مطلب را یاد آور می شویم که مجموعه تمام عملگر های قابل قبول یک فضای برداری دو بعدی با پایه (۵۴.۱) است.

۸.۲.۱ جبر لی

تعریف ۴.۲.۱. *فرض کنید X, X' عملگر های دیفرانسیلی مرتبه اول به صورت زیر باشند:*

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X' = \xi'(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta'(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{۵۵.۱}$$

کروشه لی $[X, X']$ اینگونه تعریف می شود،$[X, X'] = XX' - X'X$ این یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه اول است و شکلی به صورت زیر دارد:

$$[X, X'] = (X(\xi') - X'(\xi))\frac{\partial}{\partial x} + (X(\eta') - X'(\eta))\frac{\partial}{\partial y}. \tag{۵۶.۱}$$

تعریف ۵.۲.۱. *یک فضای برداری L از عملگر ها (۶.۱) یک لی جبر نامیده می شود اگر تحت کروشه لی بسته باشد،یعنی برای هر $X, X' \in L$ ، داریم $[X.X'] \in L$. لی جبر با همان L نشان داده می شود و بعد آن همان بعد فضای برداری L است. اگر یک لی جبر L بعد $r < \infty$ را داشته باشد آن را با L_r نشان می دهیم. اگر فضای برداری L_r با عملگر های خطی $X_1, \cdots, X_r$ تولید شود ،سپس عملگر های $X_1, \cdots, X_r$ یک پایه برای لی جبر L_r تولید می کنند. شرط اینکه برای هر $X, X' \in L$ ،$[X, X'] \in L$ با مطلب زیر هم ارز است:*

$$[X, X'] = C_{ij}^k X_k, \qquad C_{ij}^k = const, \qquad i,j,k = 1, \cdots, r. \tag{۵۷.۱}$$

تعریف ۶.۲.۱. *فرض کنید L_r یک لی جبر تولید شده با $X_1, \cdots, X_r$ باشد. یک زیر فضای K_s که $(s < r)$ از فضای برداری L_r که با عملگر های خطی $Y_1, \cdots, Y_s \in L_r$ تولید می شود زیر جبر از L_r نامیده می شوداگر*

$$[Y, Y'] \in K_s \qquad \text{برای هر} \qquad Y, Y' \in K_s.$$

این شرط هم ارز با مطلب زیر است:

$$[Y_i, Y_j'] \in K_s \qquad i,j = 1, \cdots, s.$$

حال بیایید دوباره به ویژگی اصلی معادلات مشخصه برگردیم . همانطور که در (۴۸.۱) دیدیم یک معادله مشخصه یک معادله

دیفرانسیل جزیی خطی با توابع نامعلوم ξ, η از متغییر های x, y است. بنابر این مجموعه حل های آن یک فضای برداری تشکیل می دهند. ویژگی خاص دیگری از معادلات مشخصه با قضیه زیر داده می شود که توسط لی اثبات شد.

قضیه ۷.۲.۱. *مجموعه همهٔ حل های هر معادله مشخصه یک لی جبر تشکیل می دهند.*

بررسی معادلات مشخصه برای تقارن های مرتبه دوم معادلات دیفرانسیل معمولی، لی را به نتیجه مهم زیر راهنمایی کرد.

قضیه ۸.۲.۱. *برای یک معادله مرتبه دوم (۴۷.۱) لی جبر متقارن L بعد $r \leq 8$ را دارد. بعد ماکسیمال $r = 8$ اگر وفقط اگر وقتی به دست می آید که معادله (۴۷.۱) خطی باشد یا بتواند با یک تغییر متغییر خطی شود.*

۳.۱ انتگرال گیری از معادلات مرتبه اول

بیایید با روش انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول با استفاده از تقارن بی نهایت کوچک آشنا شویم.

۱.۳.۱ عامل انتگرال گیری لی

ما با روش عامل انتگرال گیری لی آغاز می کنیم. یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$Q(x,y)dx + P(x,y)dy = 0. \tag{۵۸.۱}$$

لی نشان داد که اگر معادله (۵۸.۱) یک گروه یک پارامتری با عملگر (۶.۱) را بپذیرد:

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

و اگر $\xi Q + \eta P \neq 0$ سپس تابع

$$\mu = \frac{1}{\xi Q + \eta P}. \tag{۵۹.۱}$$

یک عامل انتگرال گیری برای معادله (۵۸.۱) است و با ضرب آن در معادله انتگرال گیری از معادله ساده می شود.

مثال ۱.۳.۱. *معادله ریکاتی را در نظر بگیرید:*

$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0. \tag{۶۰.۱}$$

گروه تقارن آن اینگونه است $\bar{x} = ax$ و $\bar{y} = by$ و با جایگذاری آنها در (۶۰.۱) داریم:

$$\bar{y}' + \bar{y}^2 - \frac{2}{x^2} = \frac{b}{a}y' + b^2y^2 - \frac{2}{a^2x^2}.$$

با توجه به ناوردایی معادله (۶۰.۱) باید $\frac{b}{a} = b^2 = \frac{1}{a^2}$. در نتیجه $b = \frac{1}{a}$ پس در واقع می توان گروه تقارن معادله را به شکل $\bar{x} = x\exp^{a}$ و $\bar{y} = y\exp^{-a}$ با مولد زیر نوشت:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{۶۱.۱}$$

با بازنویسی (۶۰.۱) به صورت (۵۸.۱)داریم:

$$dy + (y^2 - \frac{2}{x^2})dx = 0. \tag{۶۲.۱}$$

حال با به کارگیری فرمول(۵۹.۱) می توان عامل انتگرال گیری را به دست آورد:

$$\mu = \frac{x}{x^2y^2 - xy - 2}.$$

فرمول(۶۲.۱) بعد از ضرب در عامل بالا به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{xdy + (xy^2 - \frac{2}{x})dx}{x^2y^2 - xy - 2} = \frac{xdy + ydx}{x^2y^2 - xy - 2} + \frac{dx}{x} = d\left(\ln x + \frac{1}{3}\ln\frac{xy - 2}{xy + 1}\right) = 0.$$

که سرانجام داریم:

$$\frac{xy - 2}{xy + 1} = \frac{C}{x^3} \quad \text{یا} \quad y = \frac{2x^3 + C}{x(x^3 - C)}.$$

۲.۳.۱ روش متغیر های متعارفی

با داشتن یک گروه یک پارامتری متقارن می توان ،از متغییر های متعارفی که در بخش ۵.۱.۱ معرفی شد نیز می توان برای انتگرا لگیری از معادله های مرتبه اول استفاده کرد. چون ویژگی ناوردایی یک معادله نسبت به یک گروه، مستقل از انتخاب متغیر هاست.

مثال ۲.۳.۱. *دوباره معادله ریکاتی را در نظر بگیرید این بار می خواهیم با استفاده از روش متغیر های متعارفی آن را حل کنیم:*

$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0.$$

با استفاده از تقارن (۶۱.۱)

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

با حل معادلات مشتق جزیی زیر:

$$X(t) = x\frac{\partial t}{\partial x} - y\frac{\partial t}{\partial y} = 1, \qquad X(u) = x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

متغیر های متعارفی زیر به دست می آیند:

$$t = \ln|x|, \qquad u = xy.$$

به معادله (۶۰.۱) برمی گردیم با متغیرهای متعارفی داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{u}{x}) = -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{u}{x^2} + \frac{u'}{x^2}.$$

بنابر این طرف چپ معادله صورت سوال به شکل زیر در می آید:

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - \frac{2}{x^2} = \frac{u'}{x^2} - \frac{u}{x^2} + \frac{u^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2}(u' + u^2 - u - 2) = 0.$$

پس معادله ریکاتی به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\frac{du}{dt} + u^2 - u - 2 = 0.$$

با جدا سازی متغییر ها و انتگرا ل گیری از آن داریم:

$$\frac{du}{u^2 - u - 2} = -dt.$$

با تجزیه انتگرالده به کسر های متعارفی اولیه:

$$\frac{1}{u^2 - u - 2} = \frac{1}{3}[\frac{1}{u - 2} - \frac{1}{u + 1}].$$

ما انتگرال را به صورت توابع اولیه محاسبه می کنیم وبه دست می آوریم:

$$\ln\left(\frac{u-2}{u+1}\right) = -3t + \ln C.$$

حال معادله را نسبت به u حل می کنیم:

$$u = \frac{C + 2\exp^{3t}}{\exp^{3t} - C}.$$

با جایگذاری $t = \ln|x|$ و $u = xy$ به حل معادله ریکاتی می رسیم:

$$y = \frac{2x^3 + C}{x(x^3 - C)}.$$

مثال ۳.۳.۱. معادله:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}. \tag{۶۳.۱}$$

یک معادله همگن است و گروه زیر را می پذیرد:

$$\bar{x} = x\exp^a, \qquad \bar{y} = y\exp^a.$$

بامولد:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{۶۴.۱}$$

متغیر های متعارفی برای عملگر های (۶۴.۱) اینگونه اند:

$$t = \ln|x|, \qquad u = \frac{y}{x}. \tag{۶۵.۱}$$

با بازنویسی معادله (۶۳.۱) با این متغییر ها داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = u + x\frac{du}{dx} = u + x\frac{du}{dt}.\frac{dt}{dx} = u + x\frac{du}{dt}.\frac{1}{x} = u + \frac{du}{dt},$$
$$u + \frac{du}{dt} = u + u^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = u^2 \Rightarrow \frac{1}{u} = C - t.$$

و در نهایت داریم:

$$y = \frac{x}{C - \ln|x|}.$$

مثال ۴.۳.۱. معادله:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^4}. \tag{۶۶.۱}$$

گروه تبدیل های تصویری زیر را می پذیرد:

$$\bar{x} = \frac{x}{1-ax}, \qquad \bar{y} = \frac{y}{1-ax}.$$

با مولد:

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}. \tag{۶۷.۱}$$

با متغیر های متعارفی

$$t = -\frac{1}{x}, \qquad u = \frac{y}{x}. \tag{۶۸.۱}$$

ما معادله (۶۰.۱) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{dy}{dx}=d(ux)=u+x\frac{du}{dx}=u+x\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}=u+x\frac{du}{dt}\frac{1}{x^2}=u+\frac{1}{x}\frac{du}{dt}.$$

و درنهایت داریم:

$$u+\frac{1}{x}\frac{du}{dt}=u-u^3t\Rightarrow -t\frac{du}{dt}=-u^3t\rightarrow\frac{du}{dt}=u^3.$$

وبا انتگرال گیری به دست می آوریم:

$$u=\pm\frac{1}{\sqrt{C-2t}}.$$

با جایگذاری t,u درحل ما حل کلی زیر را برای معادله به دست می آوریم:

$$y=\pm x\sqrt{\frac{x}{2+Cx}}.$$

۴.۱ انتگرال گیری از معادله مرتبه دوم

لی در این روش متغیر های متعارفی را در لی جبر دو بعدی برای انتگرال گیری از یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم به کار می گیرد. این متغیر ها هر معادله دیفرانسیل مرتبه دومی که پذیرنده یک لی جبر دو بعدی L_2 باشد را به یک صورت انتگرالپذیر کاهش می دهد.

۱.۴.۱ متغییر های متعارفی در لی جبر L_2

متغیر های متعارفی یک پایه از هر لی جبر دو بعدی L_2 را به ساده ترین شکل کاهش می دهند و چهار صورت استاندارد از معادلات مرتبه دوم با دو تقارن را می سازند. یک گزاره اساسی در زیر می آید.

قضیه ۱.۴.۱. *هر لی جبر دو بعد ی می تواند با یک انتخاب از پایه و متغییر های t,u که متغییر های متعارفی نامیده می شود به یکی از ۴ شکل استاندارد و غیر مشابه در جدول ۱.۱ تبدیل شود.*

نوع	ساختار L_2	صورت استاندارد L_2
I	$[X_1,X_2]=0,\quad \xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2\neq 0$	$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial u}$
II	$[X_1,X_2]=0,\quad \xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2=0$	$X_1=\frac{\partial}{\partial u},\quad X_2=t\frac{\partial}{\partial u}$
III	$[X_1,X_2]=X_1,\quad \xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2\neq 0$	$X_1=\frac{\partial}{\partial u},\quad X_2=t\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial u}$
IV	$[X_1,X_2]=X_1,\quad \xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2=0$	$X_1=\frac{\partial}{\partial u},\quad X_2=u\frac{\partial}{\partial u}$

جدول ۱.۱: ساختار و صورت استاندارد L_2

ملاحظه ۲.۴.۱. *د رحالت های III و IV شرط $[X_1,X_2]=X_1$ با یک تغییر پایه مناسب می تواند در L_2 صدق کند البته در صورتیکه $[X_1,X_2]\neq 0$.*

یک معادله مرتبه دوم را فرض کنید:

$$y''=f(x,y,y'). \qquad (۶۹.۱)$$

دو یا بیشتر تقارن می پذیرد اجازه بدهید از این تقارن ها یک لی جبر دو بعدی جدا کنیم. نوع آن را مطابق جدول ۱.۱ مشخصه کنید متغیر های متعارفی را پیدا کنید،و معادله (۶۲.۱) را با متغیر های u, t بازنویسی کنید:

$$u'' = g(t, u, u'). \tag{۷۰.۱}$$

قضیه ۱.۴.۱ تضمین می کند که معادله (۷۰.۱) به یکی از چهار معادله انتگرال داده شده در جدول ۲.۱ تعلق دارد

نوع	صورت استاندارد L_2	صورت متعارفی معادله
I	$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u}$	$u'' = f(u')$
II	$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = t\frac{\partial}{\partial u}$	$u'' = f(t)$
III	$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}$	$u'' = \frac{1}{t}f(u')$
IV	$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = u\frac{\partial}{\partial u}$	$u'' = f(t)u'$

جدول ۲.۱: چهار نوع از معادلات مرتبه دومی که L_2 را می پذیرند.

۲.۴.۱ روش انتگرال گیری

روش انتگرا لگیری از معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دوم (۶۹.۱)به محاسبات زیر نیاز دارد، اول از همه باید تقارن های معادله در سوال را پیدا کنیم فرض کنید معادله دو یا بیشتر تقارن دارد ما از این تقارن ها یک لی جبر دو بعدی L_2 جدا می کنیم و نوع آن را مطابق ساختار ستون جدول ۱.۱ مشخصه می کنیم سپس متغیر های متعارفی را با حل معادلات زیر متناسب با نوع آن می یابیم:

$$\begin{aligned}
&typeI: \quad X_1(t) = 1, X_2(t) = 0, X_1(u) = 0, X_2(u) = 1,\\
&typeII: \quad X_1(t) = 0, X_2(t) = 0, X_1(u) = 1, X_2(u) = t,\\
&typeIII: \quad X_1(t) = 0, X_2(t) = t, X_1(u) = 1, X_2(u) = u,\\
&typeIV: \quad X_1(t) = 0, X_2(t) = 0, X_1(u) = 1, X_2(u) = u.
\end{aligned} \tag{۷۱.۱}$$

حال ما معادله دیفرانسیل را در متغییر های متعارفی با انتخاب t به عنوان یک متغییر مستقل جدید و u به عنوان وابسته بار دیگر می نویسیم که یکی از صورت های انتگرال پذیر جدول قبل را دارد. انتگرال گیری از معادله حاصل و نوشتن حل با متغیر های اصلی x, y این روند انتگرا لگیری را کامل می شود.

مثال ۳.۴.۱. *بیایید روش شرح داده شده در بالا را در مورد معادله مرتبه دوم غیر خطی زیر به کار ببریم:*

$$y'' + \exp^{3y} y'^4 + y'^2 = 0. \tag{۷۲.۱}$$

نخست ما باید تقارن های معادله(۷۲.۱) را پیدا کنیم

$$f = -(\exp^{3y} y'^4 + y'^2).$$

و معادله مشخصه (۴۸.۱) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - \xi_{xy})y'^2 - y'^3\xi yy$$
$$+ 3\exp^{3y} y'^4\eta - (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)(\exp^{3y} y'^4 + y'^2)$$
$$+ [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2\xi_y](4\exp^{3y} y'^3 + 2y') = 0.$$

طرف چپ معادله یک چند جمله ای از درجه پنجم در y' است. و چون باید به صفر میل کند، ما باید ضرایب y'^4, y'^5 , $\cdots$ را مساوی صفر قرار می دهیم و چهار معادله مستقل زیر را به دست می آوریم:

$$(y')^5 : \xi_y = 0,$$
$$(y')^4 : 3(\eta_y + \eta) - 2\xi_x = 0,$$
$$(y')^3 : \eta_x = 0,$$
$$(y')^1 : \xi_{xx} = 0.$$

ضمناً یاد آور می شویم که ضریب $(y')^2$ می شود: $\eta_y + \eta_{yy} - 2\xi_{xy} + 2\eta_x = 0$ که با توجه به ضریب $(y')^3$ همان ضریب $(y')^4$ است ونیز ضریب $(y')^0$ برابر با $\eta_{xx} = 0$ است که تکرار ضریب $(y')^3$ است. چهار معادله بالا برحسب دو تابع $\xi(x,y), \eta(x,y)$ حل می شوند و داریم:

$$\xi_{xx} = 0 \to \xi = p(y)x + a(y).$$

و چون $\xi_y = 0$ پس $p(y), a(y)$ ثابت هستند پس:

$$\xi = C_1 + 3C_3x, \qquad \eta = 2C_3 + C_2\exp^{-y}, \qquad C_1, C_2, C_3 = const.$$

در نتیجه شکل کلی عملگرها

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

که معادله(۷۲.۱) می پذیرد، اینگونه است.

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3.$$

که

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \exp^{-y}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = 3x\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}. \qquad (۷۳.۱)$$

به عبارت دیگر معادله (۷۲.۱) لی جبر ۳- بعدی L_3 که به وسیله عملگر های (۷۳.۱) تولید می شود را می پذیرد. عملگر های X_1, X_2 یک زیر جبر دو بعدی $L_2 \subset L_3$ تولید می کند و نوع I را دارد. چون $[X_1, X_2] = 0$ و $\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi \neq 0$ پس متغیر های متعارفی t, u با حل معادله (۷۱.۱) برای نوع I به دست می آید ،یعنی معادله زیر:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 1, \qquad \exp^{-y}\frac{\partial t}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \exp^{-y}\frac{\partial u}{\partial y} = 1.$$

و ما حل زیر را برای دستگاه به دست می آوریم:

$$t = x, \qquad u = \exp^{y}.$$

حال با بازنویسی معادله با متغیر های متعارفی در معادله $y'' + \exp^{3y} y'^4 + y'^2 = 0$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln u)}{dx} = (\frac{u'}{u}) \to \frac{u'}{u} = y,\\
&y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(\frac{u'}{u})}{dx} = \frac{u''u - u^2}{u'^2},\\
&\frac{u''u - u'^2}{u^2} + u^3\frac{u'^4}{u^4} + \frac{u'^2}{u^2} = 0 \longrightarrow \frac{u'' + u'^4}{u} = 0 \longrightarrow u'' + u'^4 = 0.
\end{aligned}$$

که با جایگذاری استاندارد $u' = \nu$ به معادله درجه اول $\nu' + \nu^4 = 0$ کاهش می یابد. در نتیجه

$$\begin{aligned}
&\frac{d\nu}{dx} + \nu^4 = 0 \longrightarrow \frac{d\nu}{dx} = -\nu^4 \to \int \frac{d\nu}{\nu^4} = \int -dx\\
&\longrightarrow \nu^{-3} = 3x + C_1 \longrightarrow \nu = \frac{1}{\sqrt[3]{3x + C_1}},\\
&\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{3x + C_1}} \to \quad u = \frac{1}{2}[\sqrt[3]{(3x + C_1)^2} + C_2].
\end{aligned}$$

وبا جایگذاری عبارت برای t, u حل معادله (۷۲.۱) به دست می آید:

$$y = \ln|\sqrt[3]{(3x + C_1)^2} + C_2| - \ln 2.$$

مثال ۴.۴.۱. *از معادله غیر خطی زیر انتگرال بگیریم*

$$y'' + 2(y' - \frac{y}{x})^3 = 0. \tag{۷۴.۱}$$

در این مثال نیز الگوریتم بالا را اجرا می کنیم دقیقاً مانند مثال قبل عملگر ها را می یابیم این معادله جبر L_2 را از نوع II را می پذیرد که با عملگر های زیر تولید می شود:

$$X_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}. \tag{۷۵.۱}$$

حل معادلات $X_1(t) = 0, \quad X_1(u) = 1, \quad X_2(t) = 0, \quad X_2(u) = t,$ متغیر های متعارفی زیر را تولید می کند

$$t = \frac{y}{x}, \qquad u = -\frac{1}{x}. \tag{۷۶.۱}$$

چون متغییر y به متغییر t وابسته است، اگر بتوان جواب های تکین معادله(۷۴.۱) را مستثنی کرد، آنگاه t می تواند یک متغییر مستقل جدید باشد. البته تا زمانی که t ثابت است این جواب های تکین خط راست هستند:

$$y = Kx, \qquad K = const.$$

با این متغییر ها معادله (۷۴.۱) تبدیل می شود به:

$$u'' = 2.$$

در نتیجه $u = t^2 + C_1t_1 + C_2$ ودرنهایت داریم:

$$y^2 + C_1xy + C_2x^2 + x = 0.$$

با حل این معادله نسبت به y و معرفی توابع جدید $A = \frac{-C}{2}, B = A^2 - C_2$ ماحل به معادله(۷۴.۱) را به دست می‌آوریم:

$$y = Kx, \quad y = Ax \pm \sqrt{Bx^2 - x}. \tag{۷۷.۱}$$

به این ترتیب به کاربرد تقارن ها در انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل معمولی پی بردیم و در اینجا این فصل را به پایان می بریم.

فصل ۲

تقارنهای معادلات

در فصل قبل بعد از بیان مقدمات سعی مابر آن بود که به تقارنهای معادلات معمولی [۱] بپردازیم. در این فصل ابتدا گروه تبدیلات را برای معادلات دیفرانسیل جزئی [۲] تعریف می کنیم و بعد گروه تقارن را برای این معادلات به دست می آوریم. برای درک بهتر مطلب گروه تقارن چند معادله دیفرانسیل جزئی را می یابیم. در انتها سه تعریف برای گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل ارائه می کنیم. بعد از اتمام این فصل قادر خواهیم بود گروه تقارن تمامی معادلات دیفرانسیل و نیز دستگاه های معادلات دیفرانسیل را محاسبه کنیم.

۱.۲ تقارنهای معادلات دیفرانسیل جزئی

۱.۱.۲ مفاهیم اصلی معادلات تکامل

معادله دیفرانسیل جزئی تکاملی مرتبه دوم با یک متغیر x را در نظر بگیرید:

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}), \qquad \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \neq 0. \tag{۱.۲}$$

تعریف ۱.۱.۲. *یک گروه یک پارامتری G از تبدیلات (۱۹.۱) از متغییر های t, x, u :*

$$\bar{t} = f(t, x, u, a), \qquad \bar{x} = g(t, x, u, a), \qquad \bar{u} = h(t, x, u, a). \tag{۲.۲}$$

یک گروه پذیرفته شده توسط معادله (۱.۲)یا یک گروه تقارن از معادله (۱.۲) نامیده می شود ،اگر معادله (۱.۲) همان شکل را بر حسب متغییر های جدید $\bar{u}, \bar{x}, \bar{t}$ داشته باشد:

$$\bar{u}_{\bar{t}} = F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}). \tag{۳.۲}$$

مطابق این تعریف تبدیلات (۲.۲) از گروه G هر حل $u = u(t, x)$ از معادله (۱.۲) را به حل $\bar{u} = \bar{u}(\bar{t}, \bar{x})$ دیگر از معادله(۳.۲) می‌نگارد. چون معادله (۳.۲) با معادله (۱.۲) هم ارز است ، تعریف بالا را می توان به صورت زیر نیز بیان کرد.

تعریف ۲.۱.۲. *یک گروه یک پارامتری G از تبدیلات (۲.۲) یک گروه پذیرفته شده توسط معادله (۲.۱)نامیده می شود اگر تبدیلات(۲.۲) هر حل از معادله (۱.۲) را به یک حل از همان معادله نگاشت کنند.*

---

[۱] ODE

[۲] PDE

تبدیلات بی نهایت کوچک از گروه G از تبدیلات (۲.۲) به این صورت نوشته می شوند:

$$\bar{t} \approx t + a\tau(t,x,u), \qquad \bar{x} \approx x + a\xi(t,x,u), \qquad \bar{u} \approx u + a\eta(t,x,u). \tag{۴.۲}$$

و مولد های گروه G نیز به شکل زیر ظاهر می شوند:

$$X = \tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{۵.۲}$$

و با عمل روی هر تابع دیفرانسیل پذیر $J(t,x,u)$ داریم:

$$X(J) = \tau(t,x,u)\frac{\partial J}{\partial t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial J}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial J}{\partial u}.$$

مولد (۵.۲)از گروه G پذیرفته شده با معادله (۱.۲) در واقع به عنوان بی نهایت کوچک از معادله (۱.۲) شناخته می شود. اگر مولد گروه (۱.۲) را داشته باشیم با روش زیر می توان تبدیلات (۲.۲) را به دست آورد:

$$\frac{d\bar{t}}{da} = \tau(\bar{t},\bar{x},\bar{u}), \quad \frac{d\bar{x}}{da} = \xi(\bar{t},\bar{x},\bar{u}), \quad \frac{d\bar{u}}{da} = \eta(\bar{t},\bar{x},\bar{u}). \tag{۶.۲}$$

که شرط های آغازی به صورت زیر هستند:

$$\bar{t}|_{a=0} = t, \qquad \bar{x}|_{a=0} = x, \qquad \bar{u}|_{a=0} = u. \tag{۷.۲}$$

حال بیایید به معادله (۳.۲)برگردیم. کمیت های $\bar{u}_{\bar{t}}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}$ که در معادله (۳.۲) وجود دارند با قاعده تغییر مشتق و از معادله (۲.۲) به دست می آیند. و با توسیع عبارت حاصل برای $\bar{u}_{\bar{t}}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}$ با استفاده سری تیلور نسبت به پارامتر a می توان صورت بی نهایت کوچک آنها را به دست آورد:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{\bar{t}} &\approx u_t + a\zeta_0(t,x,u,u_t,u_x), \\
\bar{u}_{\bar{x}} &\approx u_x + a\zeta_1(t,x,u,u_t,u_x), \\
\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} &\approx u_{xx} + a\zeta_2(t,x,u,u_t,u_x).
\end{aligned} \tag{۸.۲}$$

که $\zeta_2, \zeta_1, \zeta_0$ با فرمول امتداد زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi), \\
\zeta_1 &= D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi), \\
\zeta_2 &= D_x(\zeta_1) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi).
\end{aligned} \tag{۹.۲}$$

اینجا D_t, D_x نشان دهنده مشتق کلی نسبت به t, x هستند:

$$\begin{aligned}
D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_x}, \\
D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}.
\end{aligned}$$

از جایگذاری (۴.۲) و (۸.۲) در معادله (۳.۲) داریم:

$$\bar{u}_{\bar{t}} - F(\bar{t},\bar{x},\bar{u},\bar{u}_{\bar{x}},\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}) \approx u_t - F(t,x,u,u_x,u_{xx}) + a(\zeta_0 - \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\zeta_2 - \frac{\partial F}{\partial u_x}\zeta_1 - \frac{\partial F}{\partial u}\eta - \frac{\partial F}{\partial x}\xi - \frac{\partial F}{\partial t}\tau).$$

بنابر این با خاصیت معادله (۱.۲) ، معادله (۳.۲) داریم

$$\zeta_0 - \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\zeta_2 - \frac{\partial F}{\partial u_x}\zeta_1 - \frac{\partial F}{\partial u}\eta - \frac{\partial F}{\partial x}\xi - \frac{\partial F}{\partial t}\tau = 0. \quad (۱۰.۲)$$

که در ζ_2,ζ_1,ζ_0 ، u_t با $F(t,x,u,u_x,u_{xx})$ جایگزین می شود. معادله (۱۰.۲)همه تقارنهای بی نهایت کوچک از معادله (۱.۲) را تعیین می کند،وبه همین دلیل ما آن را معادله مشخصه می نامیم. این معادله به طور قراردادی به صورت زیر نوشته می شود:

$$X(u_t - F(t,x,u,u_x,u_{xx}))\Big|_{u_t=F} = 0. \quad (۱۱.۲)$$

امتداد عملگر X (۳.۲) به مشتق مرتبه اول و دوم اینگونه است:

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \zeta_0\frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

و نماد $|_{u_t=F}$ یعنی اینکه u_t با $F(t,x,u,u_x,u_{xx})$ جایگزین می شود. معادله مشخصه (۱۰.۲) یا هم ارز آن (۱۱.۲) یک معادله جزئی همگن خطی از مرتبه دوم بر حسب توابع نا معلوم $\tau(t,x,u),\xi(t,x,u),\eta(t,x,u)$ است. پس مجموعه حل های معادله مشخصه یک فضای برداری است . از طرفی معادله مشخصه یک جبر لی نیز هست یعنی نسبت به کروشه لی بسته است .به عبارت دیگر اگر L شامل هر دو عملگر X_2, X_1 باشد شامل کروشه لی آنها $[X_1, X_2]$ نیز هست

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1.$$

به ویژه اگر $L = L_r$ متناهی البعد باشد و پایه $X_1, \cdots, X_r$ را داشته باشد ، سپس شرایط لی جبر به صورت زیر نوشته می شود

$$[X_\alpha, X_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma.$$

که با ضرایب ثابت $C^\gamma_{\alpha\beta}$ به عنوان ثوابت ساختاری شناخته می شوند. توجه کنید معادله مشخصه به یک دستگاه شامل چندین معادله تجزیه می شود. این دستگاه دارای سه تابع ناشناخته τ,ξ,η است لم زیر که توسط لی ارائه شد محاسبه تقارنهای معادله تکامل را ساده می کند.

لم ۳.۱.۲. *تقارنهای تبدیل های (۲.۲) از معادلات (۱.۲) شکل زیر را دارند:*

$$\bar{t} = f(t,a), \qquad \bar{x} = g(t,x,u,a), \qquad \bar{u} = h(t,x,u,a). \quad (۱۲.۲)$$

این یعنی می توان تقارنهای بی نهایت کوچک را به صورت زیر بررسی کرد.

$$X = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}. \quad (۱۳.۲)$$

برای عملگر های (۱۳.۲) فرمول امتداد به صورت زیر نوشته می شود:

$$\zeta_0 = D_t(\eta) - u_xD_t(\xi) - \tau'(t)u_t, \qquad \zeta_1 = D_x(\eta) - u_xD_x(\xi),$$

$$\zeta_2 = D_x(\zeta_1) - u_{xx}D_x(\xi) = D_x^2(\eta) - u_xD_x^2(\xi) - 2u_{xx}D_x(\xi). \quad (۱۴.۲)$$

مثال ۴.۱.۲. به عنوان یک مثال می خواهیم تقارن های معادله [۳] زیر را بیابیم

$$u_t = u_{xx} + uu_x. \tag{۱۵.۲}$$

مطابق لم ۳.۱.۲ تقارنهای بی نهایت کوچک شکل (۱۳.۲) را دارند. برای این معادله ، معادله مشخصه (۱۰.۲) شکل زیر را دارد

$$\zeta_0 - \zeta_2 - u\zeta_1 - \eta u_x = 0. \tag{۱۶.۲}$$

که $\zeta_2, \zeta_1, \zeta_0$ با فرمول های (۱۴.۲) داده می شود. می خواهیم ضرایب u_{xx} را مساوی صفر قرار دهیم. u_t را در ζ_2 با $u_{xx} + uu_x$ جایگزین می کنیم.

$$\begin{aligned} D_x^2(\xi) &= D_x(\xi_x + \xi_u u_x) = \xi_u u_{xx} + \xi_{uu} u_x^2 + 2\xi_{xu} u_x + \xi_{xx}, \\ D_x^2(\eta) &= D_x(\eta_x + \eta_u u_x) = \eta_u u_{xx} + \eta_{uu} u_x^2 + 2\eta_{xu} u_x + \eta_{xx}. \end{aligned} \tag{۱۷.۲}$$

$$\begin{aligned} &\eta_t + \eta_u u_{xx} + \eta_u uu_x - u_x\xi_t - \xi_u u_x u_{xx} - \xi_u uu_x^2 - \tau'(t)u_{xx} - \tau'(t)uu_x \\ &- \eta_u u_{xx} - \eta_{uu} u_x^2 - 2\eta_{xu} u_x - \eta_{xx} + \xi_u u_x u_{xx} + \xi_{uu} u_x^3 + 2\xi_{xu} u_x^2 \\ &+ \xi_{xx} u_x + 2u_{xx}\xi_x + 2\xi_u u_{xx} u_x - u\eta_x - \eta_u uu_x + \xi_x uu_x + \xi_u uu_x^2 - \eta u_x = 0. \end{aligned}$$

و در نهایت به معادله زیر می رسیم:

$$2\xi_u u_x + 2\xi_x - \tau'(t) = 0.$$

این معادله به دو معادله $\xi_u = 0$ و $2\xi_x - \tau'(t) = 0$ شکافته می شود. معادله نخست نشان می دهد که ξ فقط به t, x بستگی دارد و انتگرال از معادله دوم نتیجه می دهد که

$$\xi = \frac{1}{2}\tau'(t)x + p(t). \tag{۱۸.۲}$$

از (۱۸.۲) داریم که $D_x^2(\xi) = 0$ حال معادله مشخصه (۱۶.۲) به صورت زیر کاهش می یابد:

$$u_x^2\eta_{uu} + [\frac{1}{2}\tau'(t)u + \frac{1}{2}\tau''(t)x + p'(t) + 2\eta_{xu} + \eta]u_x + u\eta_x + \eta_{xx} - \eta_t = 0.$$

که‌با مساوی صفر قرار دادن ضرایب u_x به سه معادله تفکیک می شود:

$$\begin{aligned} &\eta_{uu} = 0, \\ &\frac{1}{2}(\tau'(t)u + \tau''(t)x) + p'(t) + 2\eta_{xu} + \eta = 0, \\ &u\eta_x + \eta_{xx} - \eta_t = 0. \end{aligned} \tag{۱۹.۲}$$

معادله اول (۱۹.۲) نتیجه می دهد $\eta = \sigma(t,x)u + \mu(t,x)$ ومعادله دوم (۱۹.۲) اینگونه می شود

$$(\frac{1}{2}\tau'(t) + \sigma)u + \frac{1}{2}\tau''(t)x + p'(t) + 2\sigma_x + \mu = 0.$$

---

[۳] Burgers

در نتیجه:

$$\sigma = -\frac{1}{2}\tau'(t), \qquad \mu = -\frac{1}{2}\tau''(t)x - p'(t).$$

بنابراین داریم:

$$\eta = -\frac{1}{2}\tau'(t)u - \frac{1}{2}\tau''(t)x - p'(t). \tag{۲۰.۲}$$

سرانجام جایگذاری (۲۰.۲) در معادله سوم نتیجه می دهد:

$$\frac{1}{2}\tau'''(t)u + p''(t) = 0.$$

در نتیجه $\tau'''(t) = 0, p''(t) = 0$ پس

$$\tau(t) = C_1t^2 + C_2t + C_3, \qquad p(t) = C_4t + C_5.$$

سر انجام حل کلی زیر از معادلات مشخصه را به دست می آوریم:

$$\tau(t) = C_1t^2 + C_2t + C_3,$$
$$\xi = C_1tx + C_2x + C_4t + C_5,$$
$$\eta = (C_1t + C_2)u - C_1x - C_4.$$

که شامل ۵ ثابت C_i است. در نتیجه تقارنهای بی نهایت کوچک از معادله (۱۵.۲) از لی جبر ۵- بعدی L_5 با عملگر های زیر تولید می شوند:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_5 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} - (x+tu)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{۲۱.۲}$$

یک روش ساده و راحت برای نشان دادن ساختار لی جبر L_r زیر جبر ها و دیگر ویژگی ها ،مرتب کردن عملگر های (۵۷.۱) از یک پایه L_r در جدول کروشه لی که درایه سطر X_i و X_j مقدار عبارت $[X_i, X_j]$ است چون کروشه لی (۵۶.۱) پادمتقارن است ،جدول کروشه لی نیز پادمتقارن است و مقدارش روی قطر اصلی صفر است. بیایید به عنوان یک مثال لی جبر ۵-بعدی با پایه های (۲۱.۲) را در نظر بگیرید:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	X_2	$2X_1$	X_4
X_2	0	0	0	X_2	X_3
X_3	$-X_2$	0	0	$-X_3$	0
X_4	$-2X_1$	$-X_2$	X_3	0	$2X_5$
X_5	$-X_4$	$-X_3$	0	$-2X_5$	0

جدول ۱.۲: کروشه لی

فرض کنید G یک گروه پذیرفته شده توسط معادله (۱.۲) باشد پس تبدیل (۲.۲) حلی از معادله (۱.۲) را به حل دیگر از همان معادله می برد این یعنی اینکه حل های یک معادله دیفرانسیل در درون مجموعه خودشان تحت عمل یک گروه تقارن تغییر می کنند. همچنین ممکن است حل ها تغیر نکنند که در این صورت آنها را حل های ناوردا یا به طور خاص گروه حل های ناوردا می نامیم.

۲.۱.۲ حل های ناوردا

همانطور که قبلاً گفته شد اگر یک گروه تبدیلات حلی را به خودش نگاشت کند ما به آن چیزی می رسیم که گروه حل های ناوردای معلوم نامیده می شود حل های ناوردا تحت گروه یک پارامتری تولید شده با X به صورت زیر به دست می آیند. با حل معادله دیفرانسیل جزئی خطی زیر

$$X(J) \equiv \tau(t,x,u)\frac{\partial J}{\partial t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial J}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial J}{\partial u} = 0.$$

ویا دستگاه مشخصه آن

$$\frac{dt}{\tau(t,x,u)} = \frac{dx}{\xi(t,x,u)} = \frac{du}{\eta(t,x,u)}. \qquad (۲۲.۲)$$

می‌توان دو ناوردای مستقل $J_1 = \lambda(t,x)$ و $J_2 = \mu(t,x,u)$ را به دست آورد و سپس می توان یکی از ناوردا ها را به عنوان تابعی از دیگری برگزید یعنی:

$$\mu = \phi(\lambda). \qquad (۲۳.۲)$$

و معادله (۲۳.۲)را نسبت به u حل کرد. سر انجام عبارت u را در معادله (۱.۲) محاسبه کرده ویک معادله دیفرانسیل معمولی برای تابع ناشناخته $\phi(\lambda)$ از یک متغیر به دست آورد این روند تعداد متغییر های مستقل را به یکی کاهش می دهد.

مثال ۵.۱.۲. *بیابید حل های معادله $(Burgers)$ که تحت تبدیلات زمان -که با مولد $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ از (۲۱.۲) تولید می شود- را بیابیم. شرط ناوردایی ما را به حل های زیر راهنمایی می کند:*

$$u = \Phi(x).$$

معادله $Burgers$ به صورت زیر نوشته می شود

$$\Phi''' + \Phi\Phi' = 0. \qquad (۲۴.۲)$$

با یکبار انتگرال گیری ما داریم:

$$\Phi' + \frac{\Phi^2}{2} = C_1.$$

حال ما این معادله را با قرار دادن $C_1 = 0$ و $C_1 = \nu^2 > 0$ و $C_1 = -\omega^2 < 0$ حل می کنیم و به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{2}{x+C} \\ \Phi(x) &= \nu th(C + \frac{\nu}{2}x), \\ \Phi(x) &= \omega tg(C - \frac{\omega}{2}x). \end{aligned} \qquad (۲۵.۲)$$

۳.۱.۲ تبدیلات گروهی حل ها

فرض کنید (۲.۲) یک گروه تبدیلات متقارن از معادله (۱.۲) باشد یک تابع $u = \Phi(t, x)$ را فرض کنید معادله (۱.۲) را حل کنید چون (۲.۲) یک تبدیل متقارن است حل بالا با متغیر های جدید نیز می تواند نوشته شود

$$\bar{u} = \Phi(\bar{t}, \bar{x}).$$

با جایگذاری $\bar{u}, \bar{x}, \bar{t}$ از (۲.۲) به عبارت زیر می رسیم:

$$h(t, x, u, a) = \Phi(f(t, x, u, a), g(t, x, u, a)). \tag{۲۶.۲}$$

با حل معادله (۲۶.۲) نسبت به u می توان یک خانواده یک پارامتری از حل های جدید از معادله (۱.۲) به دست آورد .

مثال ۶.۱.۲. *بار دیگر معادله $Burgers$ را در نظر بگیرید*

$$u_t = u_{xx} + uu_x.$$

روش توضیح داده شده در بالا را برای گروه یک پارامتری پذیرفته شده با عملگر X_5 از (۲۱.۲) به کار ببرید:

$$X_5 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tx \frac{\partial}{\partial x} - (x + tu) \frac{\partial}{\partial u}.$$

گروه یک پارامتری تولید شده با X_5 را پیدا می کنیم که اینجا به طور کامل نوشته شده است:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{t}}{da} = \bar{t}^2, \qquad \bar{t}|_{a=0} = t,\\
&\longrightarrow \frac{d\bar{t}}{\bar{t}^2} = da \Rightarrow \frac{-1}{\bar{t}} = a + C \to \frac{-1}{t} = C,\\
&\longrightarrow \bar{t} = \frac{-1}{C(\frac{a}{C} + 1)} = \frac{t}{(1 - at)}.
\end{aligned}$$

وبه همین شکل:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{x}}{da} = \bar{t}\bar{x}, \qquad \bar{x}|_{a=0} = x,\\
&\frac{d\bar{x}}{da} = \frac{t\bar{x}}{1 - at} \Rightarrow \int \frac{d\bar{x}}{\bar{x}} = \int \frac{tda}{1 - at},\\
&\Longrightarrow \ln \bar{x} = -\ln(1 - at) + C \Rightarrow \bar{x} = \frac{C_2}{1 - at} \Rightarrow \bar{x} = \frac{x}{1 - at}.
\end{aligned}$$

و بار دیگر داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{u}}{da} = -(\bar{x} + \bar{t}\bar{u}), \qquad \bar{u}|_{a=0} = u.\\
&\frac{d\bar{u}}{da} = -\left(\frac{C_2}{1 - at} + \frac{t}{1 - at}\bar{u}\right) \Rightarrow \frac{d\bar{u}}{C_2 + t\bar{u}} = \frac{-da}{1 - at},\\
&\to u = \frac{C}{t} - \frac{C_2}{t} \Longrightarrow \bar{u} = u(1 - at) - ax.
\end{aligned}$$

پس

$$\bar{t} = \frac{t}{1 - at}, \qquad \bar{x} = \frac{C_2}{1 - at}, \qquad \bar{u} = (1 - at)u - ax. \tag{۲۷.۲}$$

با استفاده از تبدیلات (۲۷.۲) و به کاربردن معادله (۲۶.۲) در مورد هر معادله معلوم $u = \Phi(t,x)$ از معادله $Burgers$ می توان یک دستگاه یک پارامتری از حل های زیر به دست آورد:

$$u = \frac{ax}{1-at} + \frac{1}{1-at}\Phi(\frac{t}{1-at}, \frac{x}{1-at}). \tag{۲۸.۲}$$

بیایید تبدیل (۲۸.۲) را به حل ایستای [۴] نخست (۲۵.۲) به کار ببریم:

$$\Phi(x) = \frac{2}{x+C}, \qquad C = cosnt.$$

و حل غیر ایستا [۵] زیر را که به پارامتر a وابسته است به دست آوریم:

$$u = \frac{ax}{1-at} + \frac{2}{x+C(1-at)}.$$

۲.۲ سه تعریف از گروه های تقارن

۱.۲.۲ رویه و رویه توسعه یافته

ابتدا به معرفی نمادهای جدیدی می پردازیم. متغیر های مستقل جبری را در نظر بگیرید

$$x = \{x^i\}, \quad u = \{u^\alpha\}, \quad u_{(1)} = \{u_i^\alpha\}, \quad u_{(2)} = \{u_{ij}^\alpha\}, \cdots . \tag{۲۹.۲}$$

که $\alpha = 1, \cdots, m$ و $i, j = 1, \cdots, n$ و همچنین فرض می شود که متغیر های $u_{ij}^\alpha, \cdots$ در اندیس ها متقارن باشند. یعنی $u_{ij}^\alpha = u_{ji}^\alpha$ و عملگر

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \cdots \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{۳۰.۲}$$

دیفرانسیل کلی نسبت به x^i نامیده می شود. عملگر D_i یک جمع فرمولی از یک تعداد نا متناهی جمله است. البته وقتی این عملگر روی یک تابع که شامل تعداد متناهی از متغیر ها مثل $x, u, u_{(1)}, \cdots$ است عمل می کند، متناهی می شود. در نتیجه دیفرانسیل کلی D_i روی مجموعه توابع وابسته به تعداد متناهی متغیر $x, u, u_{(1)}, \cdots$ خوش تعریف است. با وجود اینکه ما فرض کردیم که متغیر های (۳۰.۲) مستقل جبری هستند آنها به روابط دیفرانسیلی زیر وابسته هستند

$$u_i^\alpha = D_i(u^\alpha), \qquad u_{ij}^\alpha = D_j(u_i^\alpha) = D_j D_i(u^\alpha). \tag{۳۱.۲}$$

متغیرهای x^i متغیرهای مستقل هستند و متغیر های u^α به عنوان متغیر های وابسته معرفی می شوند و $u_{(1)}, u_{(2)}$ مشتق های پی درپی آنها هستند. ما همچنین فضای $\mathcal{A}$ را فضای توابع دیفرانسیلی وابسته به x, u و مشتقات u تا مراتب بالاتر می نامیم.

تعریف ۱.۲.۲. *یک تابع تحلیلی موضعی (تابعی که بتوان با استفاده از سری تیلور نسبت به همه آرگمان های آن، آن را توسیع داد) از یک تعداد متناهی متغیر (۲۹.۲) یک تابع دیفرانسیلی نامیده می شود. بالاترین مرتبه از مشتق های ظاهر شده در تابع دیفرانسیلی مرتبه این تابع نامیده می شود. مجموعه همه توابع دیفرانسیلی از همه مرتبه های متناهی را با $\mathcal{A}$ نشان می دهیم. این مجموعه با جمع معمولی توابع یک فضای برداری است و اگر ضرب با ضرب معمولی توابع تعریف شود، یک جبر شرکت پذیر است. یک ویژگی مهم از فضای $\mathcal{A}$ این است که تحت عمل مشتق کلی (۳۰.۲) بسته است.*

[۴] stationary

[۵] non-stationary

تعریف ۲.۲.۲. *یک گروه از تبدیلات به صورت*

$$\bar{x}^i = f^i(x,u,a), \qquad f^i|_{a=0} = x^i, \tag{۳۲.۲}$$

$$\bar{u}^\alpha = \phi^\alpha(x,u,a), \qquad \phi^\alpha|_{a=0} = u^\alpha. \tag{۳۳.۲}$$

یک گروه تبدیلات نقطه ای در فضای متغیر های مستقل و وابسته نامیده می شود. مولد گروه G اینگونه است

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{۳۴.۲}$$

که

$$\xi^\alpha = \frac{\partial f^i}{\partial a}|_{a=0}, \qquad \eta^\alpha = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial a}|_{a=0}. \tag{۳۵.۲}$$

فرض کنیم $F_k \in \mathcal{A}$ یک تابع دیفرانسیلی دلخواه و فرض کنیم p یک مرتبه ماکسیمم از توابع دیفرانسیلی F_k ,$(k = 1, \cdots, s)$ باشد. دستگاه معادلات زیررا در نظر بگیرید

$$F_k(x,u,u_{(1)},\cdots,u_{(p)}) = 0, \qquad k = 1,\cdots,s. \tag{۳۶.۲}$$

اگر بتوان متغیر های u^α رابه عنوان توابع x تلقی کرد چنانچه

$$u^\alpha = u^\alpha(x), \qquad u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^i}, \cdots.$$

سپس می توان به مفهوم معمولی معادلات از مرتبه p رسید.

تعریف ۳.۲.۲. *فرض کنید $x, u, u_{(1)}, \cdots$ متغیرهای مستقل تابعی هستند که فقط به روابط دیفرانسیلی (۳۱.۲)وابسته اند. سپس معادلات (۳۵.۲) یک رویه در فضای متغیرهای مستقل $x, u, u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}$ تعیین می کند که رویه یک دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۶.۲) نامیده می شود.*

تعریف ۴.۲.۲. *رویه معادله (۳۶.۲)و حاصل دیفرانسیل های آن را در نظر بگیرید،*

$$F_k = 0, \quad D_iF_k = 0, \quad D_iD_jF_k = 0, \cdots. \tag{۳۷.۲}$$

تمام نقاطی $(x, u, u_{(1)}, \cdots)$ که در معادلات(۳۷.۲) صدق می کند رویه توسعه یافته یافته دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۶.۲) نامیده می شود و با $[F]$ نشان داده می شود.

البته ما فرض می کنیم که معادلات دیفرانسیل در شرط زیر صادق هستند.

$$rank\left\|\frac{\partial F_k}{\partial x^i}, \frac{\partial F_k}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial F_k}{\partial u_i^\alpha}, \cdots\right\| = s.$$

۲.۲.۲ اولین تعریف از گروه تقارن

تعریف نخست از گروه تقارن یک دستگاه دلخواه از معادلات دیفرانسیل با تعریف۱.۱.۲ از یک معادله تکامل [۶] مطابقت می کند.

تعریف ۵.۲.۲. *اگر تبدیلات (۳۲.۲) و (۳۳.۲) هر حلی از دستگاه (۳۶.۲) را به‌حل دیگر از همین دستگاه ببرد،آنگاه دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۶.۲) تحت گروه تبدیلات (۳۲.۲) و (۳۳.۲) ناوردا نامیده می شود. البته منظور از حل های معادلات دیفرانسیل یعنی*

[۶] evolution

همان نمونه کلاسیک آن به شکل $u^\alpha = u^\alpha(x)$ که توابع هموار هستند. اگر دستگاه معادلات (۳۶.۲) تحت گروه G ناوردا باشد ،سپس G به عنوان یک گروه تقارن برای آن دستگاه نامیده می شود.

۳.۲.۲ دومین تعریف از گروه تقارن

تعریف ۶.۲.۲. *دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۶.۲) تحت گروه G ناوردا گفته می شود اگر رویه دستگاه، نسبت به امتداد تبدیلات (۳۲.۲) و (۳۳.۲) از گروه G به مشتق های $u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}$ یک رویه ناوردا باشد. مطابق با این تعریف و محک ناوردایی معادلات که با قضیه ۱۱.۱.۱ عنوان شد،ما محک بی نهایت کوچک زیر را برای تقارن های دستگاه معادلات دیفرانسیل به دست می آوریم.*

قضیه ۷.۲.۲. *دستگاه معادلات دیفرانسیل(۳۶.۲) ،گروه G را با مولد X به عنوان گروه تقارن می پذیرد اگر و فقط اگر:*

$$X_p F_k \Big|_{(36.2)} = 0 \qquad k = 1, \cdots, s. \tag{۳۸.۲}$$

که X_p امتداد p-ام از X و $|_{(2.36)}$ یعنی رویه دستگاه از معادلات دیفرانسیل (۳۶.۲) مقدار گذاری می شود. معادله (۳۸.۲) به عنوان معادلات مشخصه شناخته می شود.

فرض کنید که $Z_0 = (x_0, u_0, \cdots, u_{0(p)})$ یک نقطه از رویه دستگاه (۳۶.۲) باشد یعنی $F_k(x_0, u_0, \cdots, u_{0(p)}) = 0$ و $(k = 1, \cdots, s)$ اگر یک حل گذرنده از نقطه Z_0 وجود داشته باشد آنگاه،دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۶.۲) در Z_0 به طور موضعی حل پذیر گفته می شود. به عبارت دیگر یعنی یک حل $u = h(x)$ از معادلات دیفرانسیل (۳۶.۲) وجود دارد که در یک همسایگی از نقطه x_0 تعریف شده چنانچه $u_0 = h(x_0), \cdots, u_{0(p)} = \frac{\partial_p}{\partial x_p} h(x_0)$. در ضمن اگر این ویژگی در هر نقطه از رویه برقرار باشد دستگاه به طور موضعی حل پذیر گفته می شود. می توان نشان داد که برای هر دستگاه موضعاً حل پذیر اولین و دومین تعریف هم ارزند.

۴.۲.۲ سومین تعریف از گروه تقارن

اگر دستگاه (۳۶.۲) موضعاً حل پذیر نباشد یعنی اگر دستگاه فرامعین باشد ، ممکن است حالتی پیش بیاید که تعریف ۶.۲.۲ فقط یک زیر گروه از گروه تقارن که باتعریف ۵.۲.۲ به دست می آید را فراهم کند. بنابر این در این بخش تعریف سومی پیشنهاد شده است و نیز یک محک بینهایت کوچکی برای ناوردایی دستگاه معادلات دیفرانسیل فرامعین اثبات شده است.

تعریف ۸.۲.۲. *دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۶.۲) تحت گروه G ناوردا گفته می شود اگر رویه توسیع یافته $[F]$ نسبت به امتداد مرتبه بی نهایت از G ناوردا باشد. محک بی نهایت کوچک برای ناوردایی به صورت زیر داده می شود.*

قضیه ۹.۲.۲. *فرض کنید X یک مولد گروه G باشد. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۶.۲) با تعریف ۸.۲.۲ تحت گروه G ناوردا است اگر وفقط اگر معادلات زیر صادق باشند:*

$$X_{(p)} F_k \Big|_{[F]} = 0, \qquad k = 1, \cdots, s. \tag{۳۹.۲}$$

معادلات (۳۹.۲) معادلات مشخصه برای دستگاه فرامعین نیز نامیده می شوند.

برای دستگاه های موضعاً حل پذیر هر سه تعریف هم ارزند. برای دستگاه های فرا معین اولین و سومین تعریف هم ارزند چون دومین تعریف فقط یک زیر گروه از گروه تقارن داده شده با سومین تعریف فراهم می کند.

مثال ۱۰.۲.۲. دستگاه فرا معین زیر را در نظر بگیرید:

$$u_t = (u_x)^{\frac{-4}{3}} u_{xx}, \quad \nu_t = -3(u_x)^{\frac{-1}{3}}, \quad \nu_x = u. \tag{۴۰.۲}$$

این یک دستگاه از سه معادله برای دو متغیر وابسته u, ν است. بیشترین مرتبه ای که در معادلات وجود دارد $p = 2$ است. اول معادله مشخصه (۳۸.۲) را حل می کنیم. طرف چپ معادله (۳۸.۲) با توجه به امتداد دادن به متغیر های $\nu_{xx}, u_{xt}, u_{xx}, u_x, \nu, u, t, x$ بستگی دارد. با حل معادلات مشخصه به لی جبر ۶-بعدی می رسیم که توسط مولد های زیر تولید می شود:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial \nu}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial \nu},$$
$$X_5 = 4t\frac{\partial}{\partial t} + 3u\frac{\partial}{\partial u} + 3\nu\frac{\partial}{\partial \nu}, \qquad , X_6 = 2x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u} + \nu\frac{\partial}{\partial \nu}. \tag{۴۱.۲}$$

این لی جبر گروه تقارن ماکسیمال برای معادلات (۴۰.۲) است که با تعریف دوم به دست آمده است. حال معادلات مشخصه (۳۹.۲) را در نظر بگیرید. دیفرانسیل از سومین معادله(۴۰.۲) نتیجه می دهد $\nu_{xx} = u_x$ بنابر این ما ν_{xx} را با u_x جایگزین می کنیم. سپس طرف چپ معادله (۳۰.۲) فقط متغییر های $u_{xt}, u_{xx}, u_x, \nu, u, t, x$ را در گیر می کند. با حل معادله معین (۳۹.۲) لی جبر ۷- بعدی تولید شده با عملگر های (۴۱.۲) به دست می آید وبا

$$x_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + x\nu\frac{\partial}{\partial \nu} + (\nu - xu)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{۴۲.۲}$$

بنابر این سومین تعریف۲.۲.۸ یک گروه تقارن بیشتر از تعریف دوم ایجاد می‌کند.

فصل ۳

گروه تبدیلات تقریبی و تقارن های تقریبی معادلات

در این فصل که در واقع مطلب اصلی پایان نامه در آن ارائه می شود با کمک گیری از مقدمات بیان شده در فصول اول و دوم سعی می کنیم گروه تبدیلات تقریبی را تعریف کنیم. در ادامه معادلات تقریبی ، نگاشت نمایی تقریبی، گروه تقریبی از مرتبه دلخواه و ناورداهای تقریبی را با ارائه مثال های مفید به طور کامل تعریف می کنیم. با معادلات تقریبی آشنا می شویم و دو الگوریتم برای یافتن تقارن های تقریبی معادلات تقریبی بیان می کنیم . مطالب عنوان شده در این فصل را با ارائه الگوریتمی برای یافتن تقارن تقریبی معادلاتی به شکل $u_{tt}+\epsilon u_t=(\varphi(u)u_x)_x$ به پایان می بریم و سعی می کنیم این معادلات را طبقه بندی کنیم.

۱.۳ گروه های تبدیلات تقریبی

۱.۱.۳ نمادها وتعریف ها

در این فصل ما با توابع $f(x,\epsilon)$ سر وکار داریم که از n متغییر $x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ و یک پارامتر ϵ تشکیل شده است که این پارامتر موضعاً در یک همسایگی $\epsilon=0$ در نظر گرفته می شود این توابع و مشتق های مرتبه بالاتر آنها در X,ϵ پیوسته هستند. اگر یک تابع $f(x,\epsilon)$ در شرط روبرو صدق کند

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x,\epsilon)}{\epsilon^p}=0.$$

به صورت $f(x,\epsilon)=O(\epsilon^p)$ نوشته می شود. و در این صورت f از مرتبه کمتر از ϵ^p گفته می شود. شرط بالا را به صورت دیگری نیز می توان بیان کرد، می گوییم یک ثابت $C>0$ وجود دارد که

$$|f(x,\epsilon)|\leqslant C|\epsilon|^{p+1}.$$

یابه طور معادل می توان گفت یک تابع تحلیلی $\varphi(x,\epsilon)$ در یک همسایگی $\epsilon=0$ وجود دارد که:

$$f(x,\epsilon)=\epsilon^{p+1}\varphi(x,\epsilon).$$

اگر داشته باشیم

$$f(x,\epsilon)-g(x,\epsilon)=O(\epsilon^p).$$

آنگاه توابع f, g (با یک خطای $O(\epsilon^p)$) تقریباً مساوی گفته می شوند و به صورت زیر نیز نوشته می شود

$$f(x, \epsilon) = g(x, \epsilon) + O(\epsilon^p).$$

یا می توان به اختصار نوشت $f \approx g$. تساوی تقریبی که در بالا تعریف شد یک رابطه هم ارزی تعریف می کند. می توان کلاس هم ارزی را اینگونه تعریف کرد که $f(x, \epsilon)$ و$g(x, \epsilon)$ اعضای یک کلاس هستند اگر وفقط اگر $f \approx g$. یک تابع $f(x, \epsilon)$ را در نظر بگیرید فرض کنید

$$f_0(x) + \epsilon f_1(x) + \cdots + \epsilon^p f_p(x).$$

چند جمله ای تقریبی از درجه p است که از بسط تیلور $f(x, \epsilon)$ حول $\epsilon = 0$ در توانهای ϵ به دست آمده است. سپس هر تابع $g \approx f$ حتی خود تابع f شکل اینگونه دارد:

$$g(x, \epsilon) = f_0(x) + \epsilon f_1(x) + \cdots + \epsilon^p f_p(x) + O(\epsilon^p).$$

در نتیجه تابع

$$f_0(x) + \epsilon f_1(x) + \cdots + \epsilon^p f_p(x).$$

یک نمایش متعارف از کلاس هم ارزی توابع شامل f نامیده می شود. بنابر این ،کلاس هم ارزی از توابع $g(x, \epsilon) \approx f(x, \epsilon)$ با مرتب کردن مجموعه $p + 1$ تابع $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_p(x)$ به دست می آید. واقعیت این است که در تئوری گروه های تبدیلات تقریبی مجموعه های مرتب از توابع برداری هموار وابسته به x و پارامتر گروهی a در نظر گرفته می شود:

$$f_0(x, a), f_1(x, a), \cdots, f_p(x, a).$$

با توابع مختصاتی

$$f_0^i(x, a), f_1^i(x, a), \cdots, f_p^i(x, a), \qquad i = 1, \cdots, n.$$

حال خانواده یک پارامتری G از تبدیلات تقریبی را تعریف می کنیم:

$$\bar{x}^i \approx f_0^i(x, a) + \epsilon f_1^i(x, a) + \cdots + \epsilon^p f_p^i(x, a) \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{۱.۳}$$

که نقاط $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ را به نقاط $\bar{x} = (\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n) \in \mathbb{R}^n$ می برد. مانند کلاس تبدیلات وارون پذیر

$$\bar{x} = f(x, a, \epsilon). \tag{۲.۳}$$

با توابع برداری $f = f(f^1, \cdots, f^n)$ چنانچه

$$f^i(x, a, \epsilon) \approx f_0^i(x, a) + \epsilon f_1^i(x, a) + \cdots + \epsilon^p f_p^i(x, a) \qquad i = 1, \cdots, n.$$

اینجا a یک پارامتر حقیقی است و در ضمن شرط زیر را داریم:

$$f(x, 0, \epsilon) \approx x.$$

به علاوه تبدیل (۲.۲) که در فصل دوم تعریف کردیم اینجا نیز برای هر مقدار a در یک همسایگی کوچک $a = 0$ تعریف می شود و این که در این همسایگی معادله $f(x, a, \epsilon) \approx x$ نتیجه می دهد $a = 0$.

تعریف ۱.۱.۳ (تبدیلات تقریبی). *مجموعه تبدیلات (۱.۳) گروه تبدیلات تقریبی یک پارامتری نامیده می شود اگر*

$$f(f(x, a, \epsilon), b, \epsilon) \approx f(x, a + b, \epsilon).$$

برای همه تبدیلات (۲.۳) این برقرار است.

ملاحظه ۲.۱.۳. *اینجا برعکس تئوری گروه لی ،هرجا لازم باشد می توان f را با هر تابع دیگری مثل $f \approx g$ جایگزین کرد.*

مثال ۳.۱.۳. *فرض کنیم $n = 1$ و توابع زیر را در نظر می گیریم.*

$$f(x, a, \epsilon) = x + a(1 + \epsilon x + \frac{1}{2}\epsilon a),$$
$$g(x, a, \epsilon) = x + a(1 + \epsilon x)(1 + \frac{1}{2}\epsilon a).$$

آنها در اولین مرتبه دقت مساوی هستند ،یعنی

$$g(x, a, \epsilon) = f(x, a, \epsilon) + \epsilon^2 \varphi(x, a), \qquad \varphi(x, a) = \frac{1}{2}a^2 x.$$

و در ویژگی گروه تقریبی صدق می کنند در حقیقت

$$\begin{aligned} f(g(x, a, \epsilon), b, \epsilon) &= g(x, a, \epsilon) + b(1 + \epsilon g(x, a, \epsilon) + \frac{1}{2}\epsilon b) \\ &= x + a(1 + \epsilon x)(1 + \frac{1}{2}\epsilon a) + b[1 + \epsilon x + \epsilon a(1 + \epsilon x)(1 + \frac{1}{2}\epsilon a) + \frac{1}{2}\epsilon b] \\ &= x + (a + b)[1 + \epsilon x + \frac{1}{2}(a + b)] + \epsilon^2 \varphi(x, a, b, \epsilon), \\ f(g(x, a, \epsilon), b, \epsilon) &= f(x, a + b, \epsilon) + \epsilon^2 \varphi(x, a, b, \epsilon). \end{aligned}$$

که $\varphi(x, a, b, \epsilon) = \frac{1}{2}a(ax + ab + 2bx + \epsilon abx)$ *است.*

مولد یک گروه تقریبی G که با (۲.۳) داده می شود کلاس عملگر های خطی دیفرانسیلی مرتبه اول است.

$$X = \xi^i(x, \epsilon)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۳.۳}$$

به طوریکه:

$$\xi^i(x, \epsilon) \approx \xi_0^i(x) + \epsilon \xi_1^i(x) + \cdots + \epsilon^p \xi_p^i(x).$$

که میدان های برداری $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_p$ اینگونه به دست می آیند:

$$\xi_\nu^i(x) = \frac{\partial f_\nu^i(x, a)}{\partial a}|_{a=0}, \qquad \nu = 0, \cdots, p; i = 1, \cdots, n.$$

پس مولد گروه تقریبی به صورت زیر است:

$$X \approx (\xi_0^i(x) + \epsilon \xi_1^i(x) + \cdots + \epsilon^p \xi_p^i(x))\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

که ازین به بعد به صورت ساده زیر آن را بیان می کنیم:

$$X = (\xi_0^i(x) + \epsilon \xi_1^i(x) + \cdots + \epsilon^p \xi_p^i(x))\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۴.۳}$$

در بحث های تئوری ،برابری ها با یک خطای $O(\epsilon^p)$ از یک مرتبه دلخواه $p \geqslant 1$ در نظر گرفته می شود و نیز با قرار دادن $p = 1$ عبارت ها ساده تر می شوند.

۲.۱.۳ معادلات تقریبی لی

گروه های تبدیل تقریبی یک پارامتری را در مرتبه اول دقت ،به طوریکه معادلات (۱.۳) به شکل زیر باشند ، در نظر بگیرید:

$$\bar{x}^i \approx f_0^i(x,a)+\epsilon f_1^i(x,a), \qquad i=1,\cdots,n. \tag{۵.۳}$$

فرض کنید

$$X = X_0 + \epsilon X_1. \tag{۶.۳}$$

یک عملگر تقریبی داده شده باشد که

$$X_0 = \xi_0^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad X_1 = \xi_1^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

تبدیل تقریبی متناظر(۵.۳) از نقاط x به نقاط $\bar{x} = \bar{x}_0 + \epsilon\bar{x}_1$ با مختصات زیر می باشد:

$$\bar{x}^i = \bar{x}_0^i + \epsilon\bar{x}_1^i. \tag{۷.۳}$$

که داریم:

$$\bar{x}_0^i = f_0^i(x,a), \qquad \bar{x}_1^i = f_1^i(x,a).$$

بامعادلات زیر تعیین می شوند

$$\frac{d\bar{x}_0^i}{da} = \xi_0^i(\bar{x}_0), \qquad \bar{x}_0^i|_{a=0} = x^i, \qquad i=1,\cdots,n, \tag{۸.۳}$$

$$\frac{d\bar{x}_1^i}{da} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\xi_0^i(x)}{\partial x^k}|_{x=\bar{x}_0}\bar{x}_1^k + \xi_1^i(\bar{x}_0), \qquad \bar{x}_1^i|_{a=0} = 0. \tag{۹.۳}$$

معادلات (۸.۳) و (۹.۳) معادلات تقریبی لی نامیده می شود. پس اگر مولد را داشته باشیم با کمک این معادلات می توان تبدیلات را تعیین کرد. در ادامه بعد از بیان دو قضیه چند مثال ذکر خواهیم کرد.

قضیه ۴.۱.۳. *فرض کنید که توابع $f(x,\epsilon)$ و $g(x,\epsilon)$ که در یک همسایگی از نقطه $(x_0,0)$ تحلیلی هستند در شرط زیر صدق می کنند:*

$$g(x,\epsilon) = f(x,\epsilon) + O(\epsilon^p).$$

و نیز فرض کنید که $x = x(t,\epsilon)$ و $\bar{x} = \bar{x}(t,\epsilon)$ به ترتیب جواب هایی از مساله های زیر باشند:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\epsilon), \qquad x|_{t=0} = \alpha(\epsilon),$$
$$\frac{d\bar{x}}{dt} = g(\bar{x},\epsilon), \qquad \bar{x}|_{t=0} = \beta(\epsilon).$$

که $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ و $\beta(\epsilon) = \alpha(\epsilon) + O(\epsilon^p)$ سپس

$$\bar{x}(t,\epsilon) = x(t,\epsilon) + O(\epsilon^p).$$

مساله تقارن کوشی [۱] را در نظر می گیریم.

$$\frac{dx}{dt} \approx f(x,\epsilon),$$
$$x|_{t=0} \approx \alpha(\epsilon).$$

می توان معادله را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\frac{dx}{dt} = g(x,\epsilon) \quad \text{با} \quad g(x,\epsilon) \approx f(x,\epsilon).$$

و شرط را نیز می توان اینگونه بازنویسی کرد

$$x|_{t=0} = \beta(\epsilon) \quad \text{با} \quad \beta(\epsilon) \approx \alpha(\epsilon).$$

این قضیه یکتایی حل را نتیجه می دهد. یعنی در صورت وجود یک جواب برای مساله کوشی هر جواب دیگری که با جواب اولیه تقریبا برابر باشد البته با یک خطای از مرتبه $O(\epsilon^p)$ نیز یک جواب از این مساله است.

قضیه ۵.۱.۳. *فرض کنید که تبدیلات (۲.۳) یک گروه تقریبی با میدان برداری مماس زیر تشکیل می دهند:*

$$\xi(x,\epsilon) \approx \frac{\partial f(x,a,\epsilon)}{\partial a}|_{a=0}.$$

سپس تابع $f(x,a,\epsilon)$ در خاصیت زیر صدق می کند

$$\frac{\partial f(x,a,\epsilon)}{\partial a} \approx \xi(f(x,a,\epsilon),\epsilon).$$

برعکس ،برای هر تابع هموار $\xi(x,\epsilon)$، حل $x' = f(x.a,\epsilon)$ از مساله تقریبی کوشی

$$\frac{dx'}{da} \approx \xi(x',\epsilon),$$
$$x'|_{a=0} \approx x.$$

یک گروه یک پارامتری با پارامتر گروهی a تعیین می کند.

البته یادآوری این نکته بی ضرر نیست که مساله تقریبی کوشی همان معادله تقریبی لی است.

اثبات. ابتدا طرف رفت را اثبات می کنیم. فرض کنید که $f(x,a,\epsilon)$ یک گروه تقریبی از تبدیلات $x' = f(x,a,\epsilon)$ می دهد. آنگاه بنابر تعریف ۱.۱.۳ داریم:

$$\begin{aligned} & f(f(x,a,\epsilon),b,\epsilon) \approx f(x,a+b,\epsilon), \\ & \Rightarrow f(f(x,a,\epsilon),0,\epsilon) + \left.\frac{\partial f(f(x,a,\epsilon),b,\epsilon)}{\partial b}\right|_{b=0}.b + O(b) \\ & \approx f(x,a,\epsilon) + \frac{\partial f(x,a,\epsilon)}{\partial a}.b + O(b). \end{aligned}$$

البته عبارت بالا در مرتبه اول دقت نسبت به b است. با استفاده از این مطلب که $x \approx f(x,0,\epsilon)$ و نیز فرض قضیه و تقسیم دو طرف

[۱] Cauchy

عبارت اخیر بر b و در نهایت میل دادن عبارت حاصل به سمت صفر داریم:

$$\begin{aligned}
&f(x,a,\epsilon)+\xi(f(x,a,\epsilon),\epsilon).b+O(b),\\
&\approx f(x,a,\epsilon)+\frac{\partial f(x,a,\epsilon)}{\partial a}.b+O(b),\\
&\text{با تقسیم بر } b\ \ \xi(f(x,a,\epsilon),\epsilon)+\frac{O(b)}{b}\approx\frac{\partial f(x,a,\epsilon)}{\partial a}+\frac{O(b)}{b},\\
&\Longrightarrow \xi(f(x,a,\epsilon),\epsilon)\approx\frac{\partial f(x,a,\epsilon)}{\partial a}.
\end{aligned}$$

پس طرف رفت اثبات شد. برای اثبات برگشت فرض کنید که تابع $x'=f(x,a,\epsilon)$ یک حل از مساله تقریبی کوشی است. برای اثبات اینکه $f(x,a,\epsilon)$ یک گروه تقریبی تعیین می کند ،کافی است شرط تقریبی زیر را بررسی کنیم

$$f(f(x,a,\epsilon),b,\epsilon)\approx f(x,a+b,\epsilon).$$

طرف چپ و طرف راست عبارت بالا رابا $k(b,\epsilon)$ و $k'(b,\epsilon)$ را به عنوان توابعی از (b,ϵ) نشان می دهیم.(این توابع در x,a ثابت هستند.) با توجه به فرض برگشت آنها در مساله تقریبی کوشی صدق می کنند:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial k}{\partial b}\approx\xi(k,\epsilon), \qquad k|_{b=0}\approx g(x,a,\epsilon),\\
&\frac{\partial k'}{\partial b}\approx\xi(k',\epsilon), \qquad k'|_{b=0}\approx g(x,a,\epsilon).
\end{aligned}$$

حال با توجه به قضیه ۱.۱.۳ این جواب یکتا است و تساوی تقریبی $k(b,\epsilon)\approx k'(b,\epsilon)$ را داریم و این شرط تقریبی مورد نظر را نتیجه می دهد. □

مثال ۶.۱.۳. *فرض کنید $n=1$ باشد و نیز فرض کنید*

$$X=(1+\epsilon x)\frac{\partial}{\partial x}.$$

اینجا $\xi_0(x)=1$ و $\xi_1(x)=x$ و معادلات (۸.۳) و (۹.۳) به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{x}_0}{da}=1, \qquad \bar{x}_0|_{a=0}=x,\\
&\frac{d\bar{x}_1}{da}=\bar{x}_0, \qquad \bar{x}_1|_{a=0}=0.
\end{aligned}$$

و با حل آنها داریم:

$$\begin{aligned}
\int d\bar{x}_0=\int da\Rightarrow\bar{x}_0=a+C\Rightarrow\bar{x}_0=a+x,\\
\frac{d\bar{x}_1}{da}=\bar{x}_0\Rightarrow\int d\bar{x}_1=\int(a+C)da,\\
\Longrightarrow\bar{x}_1=\frac{a^2}{2}+ax+C\Rightarrow\bar{x}_1=ax+\frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$

در نتیجه گروه تبدیل تقریبی اینگونه است:

$$\bar{x} \approx x + a + \epsilon(ax + \frac{a^2}{2}).$$

این فرمول به وضوح جملات اولیه در سری تیلور با بسط نسبت به ϵ است:

$$\bar{x} \approx x\exp^{(a\epsilon)} + \frac{\exp^{(a\epsilon-1)}}{\epsilon} = (x+a) + a(x+\frac{a}{2})\epsilon + \frac{a^2}{2}(x+\frac{a}{3})\epsilon^2 + \cdots .$$

مثال ۷.۱.۳. فرض کنید $n=2$ باشد و مولد زیر را در نظر بگیرید:

$$X = (1+\epsilon x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \epsilon xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

اینجا $\xi_0(x,y) = (1,0)$ و $\xi_1(x,y) = (x^2, xy)$ و معادلات (۸.۳) و (۹.۳) به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\frac{d\bar{x}_0}{da} = 1, \qquad \frac{d\bar{y}_0}{da} = 0, \qquad \bar{x}_0|_{a=0} = x, \qquad \bar{y}_0|_{a=0} = y,$$
$$\frac{d\bar{x}_1}{da} = (\bar{x}_0)^2, \qquad \frac{d\bar{y}_1}{da} = \bar{x}_0\bar{y}_0, \qquad \bar{x}_1|_{a=0} = 0, \qquad \bar{y}_1|_{a=0} = 0.$$

با انتگرال گیری داریم:

$$\Rightarrow \bar{x}_0 = x + a, \qquad \bar{y}_0 = y,$$
$$\Rightarrow \bar{x}_1 = \int (x+a)^2 da = \int (x^2 + 2ax + a^2) da,$$
$$\bar{x}_1 = ax^2 + a^2x + \frac{a^3}{3},$$
$$\Rightarrow \bar{y}_1 = \int (xy + ay) da,$$
$$\bar{y}_1 = xya + \frac{a^2}{2}y.$$

پس گروه تقریبی زیر را داریم:

$$\bar{x} \approx x + a + \epsilon(ax^2 + a^2x + \frac{a^3}{3}),$$
$$\bar{y} \approx y + \epsilon(axy + \frac{a^2}{2}y).$$

مثال ۸.۱.۳. در این مثال نیز می خواهیم معادلات تقریبی لی را حل کنیم و گروه تبدیل تقریبی را برای مولد زیر بیابیم:

$$X = (t + \frac{\epsilon}{6}t^2)\frac{\partial}{\partial t} - (u + \frac{\epsilon}{3}tu)\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (۱۰.۳)$$

در اینجا $\xi_0(t,u) = (t,-u)$ و $\xi_1(t,u) = (\frac{1}{6}t^2, \frac{-1}{3}tu)$ پس معادلات تقریبی لی به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\frac{d\bar{t}_0}{da} = \bar{t}_0, \qquad \bar{t}_0|_{a=0} = t,$$
$$\frac{d\bar{u}_0}{da} = -\bar{u}_0, \qquad \bar{u}_0|_{a=0} = u.$$

و نیز داریم

$$\frac{d\bar{t}_1}{da} = \frac{1}{6}\bar{t}_0, \qquad \bar{t}_1|_{a=0} = 0,$$
$$\frac{d\bar{u}_1}{da} = \frac{-1}{3}\bar{t}_0\bar{u}_0, \qquad \bar{u}_1|_{a=0} = 0.$$

که با انتگرال گیری از آنها داریم:

$$\ln \bar{t}_0 = a + C \Rightarrow \ln t = C \Rightarrow \bar{t}_0 = \exp^{a+t},$$
$$\ln \bar{u}_0 = C - a \Rightarrow \bar{u}_0 = \exp^{u-a}.$$

و

$$\frac{d\bar{t}_1}{da} = \frac{1}{6}(\exp^{a+t}) \Rightarrow \bar{t}_1 = \int (\frac{1}{6}\exp^{a+t})da \Rightarrow \bar{t}_1 = \frac{1}{6}\exp^{a+t},$$
$$\frac{d\bar{u}_1}{da} = \frac{1}{3}(\exp^{a+t})(\exp^{u-a}) \Longrightarrow \bar{u}_1 = \frac{1}{3}\exp^{t+u} a.$$

پس گروه تبدیلات تقریبی اینگونه می شود:

$$\bar{t} \approx \exp^{a+t} + \epsilon\frac{1}{6}\exp^{a+t},$$
$$\bar{u} \approx \exp^{u-a} + \epsilon\frac{1}{3}\exp^{t+u} a.$$

۳.۱.۳ نگاشت نمایی تقریبی

یک روش دیگر نیز برای به دست آوردن گروه تبدیلات تقریبی با استفاده از مولد گروه تقریبی وجود دارد که به روش نگاشت نمایی معروف است که در زیر به آن می پردازیم.

قضیه ۹.۱.۳. *یک عملگر داده شده*

$$X = X_0 + \epsilon X_1. \tag{۱۱.۳}$$

با یک پارامتر کوچک ϵ که

$$X_0 = \xi_0^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_1 = \xi_1^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۱۲.۳}$$

گروه تبدیل تقریبی متناظر زیر را تولید می کند:

$$\bar{x}^i = \bar{x}_0^i + \epsilon\bar{x}_1^i, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{۱۳.۳}$$

که با معادلات زیر تعیین می شوند:

$$\bar{x}_0^i = \exp^{(aX_0)}(x^i), \quad \bar{x}_1^i = \ll aX_0, aX_1 \gg (\bar{x}_0^i), \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{۱۴.۳}$$

که

$$\exp^{aX_0} = 1 + aX_0 + \frac{a^2}{2!}X_0^2 + \frac{a^3}{3!}X_0^3 + \cdots . \qquad (۱۵.۳)$$

و

$$\ll aX_0, aX_1 \gg = aX_1 + \frac{a^2}{2!}[X_0, X_1] + \frac{a^3}{3!}[x_0, [x_0, x_1]] + \cdots . \qquad (۱۶.۳)$$

به عبارت دیگر عملگر تقریبی $X = X_0 + \epsilon X_1$ *گروه تبدیل تقریبی یک پارامتری تولید می کند که با نگاشت نمایی زیر به دست می آید.*

$$\bar{x}^i = (1 + \epsilon \ll aX_0, aX_1 \gg) \exp^{aX_0}(x^i) \qquad i = 1, \cdots, n. \qquad (۱۷.۳)$$

اثبات. با جایگذاری عملگر(۱۱.۳)

$$X_0 + \epsilon X_1.$$

و نیز با توجه به تعریف (۱۳.۱) از فصل اول داریم که:

$$\exp^{(X_0+\epsilon X_1)} = 1 + a(X_0 + \epsilon X_1) + \frac{a^2}{2!}(X_0 + \epsilon X_1)^2 + \frac{a^3}{3!}(X_0 + \epsilon X_1)^3 + \cdots .$$

حالا ما جملات از درجه یک در ϵ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}\exp^{a(X_0+\epsilon X_1)} &\approx 1 + aX_0 + \frac{a^2}{2!}X_0^2 + \frac{a^3}{3!}X_0^3 + \cdots + \epsilon\{aX_1 \\ &+ \frac{a^2}{2!}(X_0X_1 + X_1X_0) + \frac{a^3}{3!}(X_0^2X_1 + X_0X_1X_0 + X_1X_0^2) \\ &+ \frac{a^4}{4!}(X_0^3X_1 + X_0^2X_1X_0^2 + X_1X_0^3) + \cdots\}. \end{aligned} \qquad (۱۸.۳)$$

با جایگذاری های زیر

$$\begin{aligned} &X_0X_1 = X_1X_0 + [X_0, X_1], \\ &X_0^2X_1 + X_0X_1X_0 = 2X_1X_0^2 + 3[X_0, X_1]X_0 + [X_0, [X_0, X_1]], \cdots . \end{aligned}$$

و حالا معادله (۱۸.۳) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$\begin{aligned}\exp^{a(X_0+\epsilon X_1)} &\approx 1 + aX_0 + \frac{a^2}{2!}X_0^2 + \frac{a^3}{3!}X_0^3 + \cdots \\ &+ \epsilon\{aX_1\left(1 + ax_0 + \frac{a^2}{2!}X_0^2 + \frac{a^3}{3!}x_0^3 + \cdots\right) \\ &+ \frac{a^2}{2!}[X_0, X_1]\left(1 + aX_0 + \frac{a^2}{2!}X_0^2 + \frac{a^3}{3!}X_0^3 + \cdots\right) \\ &+ \frac{a^3}{3!}[X_0, [X_0, X_1]]\left(1 + aX_0 + \frac{a^2}{2!}X_0^2 + \frac{a^3}{3!}X_0^3 + \cdots\right) + \cdots\}. \end{aligned}$$

از این رو با استفاده از نگاشت نمایی داریم:

$$\exp^{a(X_0+\epsilon X_1)} \approx (1 + \epsilon \ll aX_0, aX_1 \gg) \exp^{aX_0} . \qquad (۱۹.۳)$$

به عبارت دیگر نگاشت نمایی $\bar{x}^i = \exp^{aX}(x^i)$ که برای عملگر (۱۱.۳) نوشته شده و در مرتبه اول دقت نسبت به ϵ محاسبه شده صورت (۱۷.۳) را دارد. با محاسبه (۱۳.۳) به معادله (۱۴.۳) می رسیم و این برهان را کامل می کند. $\square$

مثال ۱۰.۱.۳. *حال بیایید با استفاده از قضیه ۳.۱.۳ گروه تبدیل تقریبی عملگر $X = (1+\epsilon x)\frac{\partial}{\partial x}$ را به دست آوریم. اینجا $X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}$ و $X_0 = \frac{\partial}{\partial x}$ بنابر این*

$$X_0(x) = 1, \quad X_0^2(x) = X_0^3(x) = \cdots = 0.$$

و

$$[X_0, X_1] = \frac{\partial}{\partial x} = X_0,$$
$$[X_0, [X_0, X_1]] = [X_0, X_0] = 0, \cdots .$$

در نتیجه

$$\bar{x}_0 = \exp^{aX_0}(x) = x + a,$$
$$\ll aX_0, aX_1 \gg = \left(aX + \frac{a^2}{2!}\right)\frac{\partial}{\partial x}.$$

پس

$$\bar{x}_1 = \ll aX_0, aX_1 \gg (\bar{x}_0) = \left(ax + \frac{a^2}{2!}\right)\frac{\partial}{\partial x}(x+a) = ax + \frac{a^2}{2!},$$
$$\bar{x} \approx x + a + \epsilon\left(ax + \frac{a^2}{2!}\right).$$

مثال ۱۱.۱.۳. *به عنوان یک مثال دیگر بیایید قضیه ۳.۱.۳ را در مورد عملگر مثال ۳.۱.۳ به کار ببریم. در این حالت داریم*

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

بنابر این چون $X_0(x) = 1, \quad X_0^2(x) = X_0^3(x) = \cdots = 0$ پس نتایج زیر را داریم یک بار این عملیات به طور کامل توضیح

داده می شوند و در سایر مثال ها از بیان جزئیات پرهیز می کنیم.

$$\begin{aligned}\bar{x}_0 &= \exp^{aX_0}(x)\\ &=(1+aX_0+\frac{a^2}{2!}X_0^2+\frac{a^3}{3!}X_0^3+\cdots)(x)\\ &=((x)+aX_0(x)+\frac{a^2}{2!}X_0^2(x)+\frac{a^3}{3!}X_0^3(x)+\cdots)\\ &=x+a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[X_0,X_1] &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y})-(x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y})\frac{\partial}{\partial x},\\ &= 2x\partial_x+x^2\partial_x^2+y\partial_y+xy\partial_{xy}-x^2\partial_x^2-xy\partial_{xy}\\ &= 2x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

و نیز داریم

$$\begin{aligned}[X_0,[X_0,X_1]] &= \partial_x(2x\partial_x+y\partial_y)-(2x\partial_x+y\partial_y)\partial_x\\ &= 2\partial_x+2x\partial_x^2+y\partial_{xy}-2x\partial_x^2-y\partial_{xy}\\ &= 2\partial_x=2X_0.\end{aligned}$$

البته واضح است که اینجا منظور از به کاربردن ∂_x همان $\frac{\partial}{\partial x}$ است. و به همین ترتیب داریم

$$[X_0,[X_0,[X_0,X_1]]]=0,\cdots.$$

و با استفاده از فرمول (۱۶.۳)داریم

$$\begin{aligned}\ll aX_0,aX_1\gg &= aX_1+\frac{a^2}{2!}\left(2x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)+2\frac{a^3}{3!}\frac{\partial}{\partial x}\\ &= \left(ax^2+a^2x+\frac{a^3}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(axy+\frac{a^2}{2}y\right)\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &=\ll aX_0,aX_1\gg(\bar{x}_0)=\left(ax^2+a^2x+\frac{a^3}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x}(x+a),\\ \bar{y}_1 &=\ll aX_0,aX_1\gg(\bar{y}_0)=\left(axy+\frac{a^2}{2}y\right)\frac{\partial}{\partial y}(y).\end{aligned}$$

که درنهایت نتیجه می گیریم

$$\bar{x}_1=ax^2+a^2x+\frac{a^3}{3},\qquad \bar{y}_1=axy+\frac{a^2}{2}y.$$

بنابر این ما با این روش نیز به نتیجه مثال ۳.۱.۳ می رسیم:

$$\bar{x} \approx x + a + \epsilon\left(ax^2 + a^2x + \frac{a^3}{3}\right),$$
$$\bar{y} \approx y + \epsilon\left(axy + \frac{a^2}{2}y\right).$$

حال با یک مثال کامل تر این بخش را به پایان می بریم.

مثال ۱۲.۱.۳. عملگر زیر را در نظر بگیرید:

$$X = (1 + \epsilon[(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2])\frac{\partial}{\partial x^1} + 2\epsilon x^1\left(x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3} + x^4\frac{\partial}{\partial x^4}\right).$$

در اینجا $X = X_0 + \epsilon X_1$ را به صورت زیر داریم:

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x^1},$$
$$X_1 = ((x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2)\frac{\partial}{\partial x^1} + 2x^1\left(x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3} + x^4\frac{\partial}{\partial x^4}\right).$$

عملگر X_0 گروه تبدیل زیر را تولید می کند

$$X_0(x^1) = 1, \qquad X_0^2(x^1) = X_0^3(x^1) = \cdots = 0,$$
$$\bar{x}_0^1 = \exp^{aX_0}(x^1) = x^1 + a,$$
$$\bar{x}_0^j = x^j, \quad j = 2, 3, 4.$$

و نیز داریم

$$[X_0, X_1] = 2\left(x^1 + \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3} + x^4\frac{\partial}{\partial x^4}\right),$$
$$[X_0, [X_0, X_1]] = 2\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad [X_0, [X_0, [X_0, X_1]]] = 0, \cdots.$$

در نتیجه معادله (۱۶.۳) شکل زیر را می گیرد:

$$\ll aX_0, aX_1 \gg = \left([(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2]a + x^1a^2 + \frac{1}{3}a^3\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + (2ax^1 + a^2)\left(x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3} + x^4\frac{\partial}{\partial x^4}\right).$$

بنابر این (۱۴.۳) نتیجه می دهد که

$$\bar{x}_1^1 = \ll aX_0, aX_1 \gg (\bar{x}_0^1) = [(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2]a + x^1a^2 + \frac{1}{3}a^3,$$
$$\bar{x}_1^j = (2ax^1 + a^2)x^j, \qquad j = 2, 3, 4.$$

و ما به گروه تبدیل تقریبی زیر می رسیم

$$\bar{x}^1 \approx \bar{x}_0^1 + \epsilon\bar{x}_1^1 = x^1 + a + \epsilon\left([(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2]a + x^1a^2 + \frac{1}{3}a^3\right),$$
$$\bar{x}^j \approx \bar{x}_0^j + \epsilon\bar{x}_1^j = x^j + \epsilon(2ax^1 + a^2)x^j, \quad j = 2, 3, 4.$$

۴.۱.۳ گروه تقریبی از مرتبه $O(\epsilon^p)$ با p دلخواه

برای ساختن یك گروه تقریبی(ازمرتبه $O(\epsilon)$با p دلخواه)ما به یك فرمول برای بخش اولیه (نسبت به ϵ) تابع به صورت $F(y_0 + \epsilon y_1 + \cdots + \epsilon^p y_p)$نیاز داریم. که بسط تیلور آن به صورت زیر است:

$$F(y_0 + \epsilon y_1 + \cdots + \epsilon^p y_p) = F(y_0) + \sum_{|\sigma|=1}^{p} \frac{1}{\sigma} F^{(\sigma)}(y_0)(\epsilon y_1 + \cdots + \epsilon^p y_p)^\sigma + O(\epsilon^p). \qquad (۲۰.۳)$$

که داریم:

$$F^{(\sigma)} = \frac{\partial^{|\sigma|} F}{(\partial z^1)^{\sigma_1} \cdots (\partial z^N)^{\sigma_N}}, \quad (\epsilon y_1 + \cdots + \epsilon^p y_p)^\sigma = \prod_{k=1}^{N} (\epsilon y_1^k + \cdots + \epsilon^p y_p^k)^{\sigma_k}. \qquad (۲۱.۳)$$

در اینجا $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_N)$یك اندیس چند گانه است و$|\sigma| = \sigma_1 + \cdots + \sigma_N$ و $\sigma! = \sigma_1! \cdots \sigma_N!$ و اندیس های $\sigma_1, \cdots \sigma_N$ از صفر تا Pمی چرخند. در آخرین عبارت ما جملات را تا مرتبه ϵ^p متمایز می کنیم:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{N} (\epsilon y_1^k + \cdots + \epsilon^p y_p^k)^{\sigma_k} &= \prod_{k=1}^{N} \left(\sum_{i_1, \cdots, i_{\sigma_k}=1}^{p} y_{i_1}^k \cdots y_{i_{\sigma_k}}^k \epsilon^{i_1 + \cdots + i_{\sigma_k}} \right) \\
&\approx \prod_{k=1}^{N} \left(\sum_{\nu_k=\sigma_k}^{p} \epsilon^{\nu_k} \sum_{i_1 + \cdots + i_{\sigma_k} = \nu_k} y_{i_1}^k \cdots y_{i_{\sigma_k}}^k \right) \equiv \prod_{k=1}^{N} \sum_{\nu_k=\sigma_k}^{p} \epsilon^{\nu_k} y_{(\nu_k)}^k \\
&\approx \sum_{j=|\sigma|} \epsilon^j \left(\sum_{\nu_1 + \cdots + \nu_N = j} y_{(\nu_1)}^1 \cdots y_{(\nu_N)}^N \right) \equiv \sum_{j=|\sigma|}^{p} \epsilon^j \sum_{|\nu|=j} y_{(\nu)}.
\end{aligned} \qquad (۲۲.۳)$$

که نمادها در زیر معرفی می شوند

$$y_{(\nu_k)}^k \equiv \sum_{i_1 + \cdots + i_{\sigma_k} = \nu_k} y_{i_1}^k \cdots y_{i_{\sigma_k}}^k, \qquad y_{(\nu)} = y_{(\nu_1)}^1 \cdots y_{(\nu_N)}^N. \qquad (۲۳.۳)$$

که اندیس های $i_1, \cdots, i_{\sigma_k}$ از 0 تا p می چرخند و $\nu = \nu(\sigma) = (\nu_1, \cdots, \nu_N)$ یك اندیس چند گانه وابسته به اندیس چند گانه σ است. در این روش اگر اندیس σ_s در σ مساوی صفر باشد،سپس اندیس متناظر ν_s را در ν نداریم و هر یك از اندیس های باقیمانده ν_k مقدار σ_k تا p را مي گيرند. برای مثال در اندیس $\sigma = (0, \sigma_2, \sigma_3, 0, \cdots, 0)$ با $\sigma_2, \sigma_3 \neq 0$ ما داریم $\nu = (\nu_2, \nu_3)$ چنانچه $y_{(\nu)} = y_{(\nu_2)}^2 y_{(\nu_3)}^3$. با جایگذاری (۲۲.۳) در (۲۰.۳) جابه جا کردن جمع ها روی σ و j ما به فرمول زیر می رسیم برای بخش

اولیه داریم:

$$F(y_0+\epsilon y_1+\cdots+\epsilon^p y_p)=F(y_0)+\sum_{j=1}^{p}\epsilon^j\sum_{|\sigma|=1}^{j}\frac{1}{\sigma!}F^{(\sigma)}(y_0)\sum_{|\nu|=j}y_{(\nu)}+O(\epsilon^P). \tag{۲۴.۳}$$

که در آن از نمادهای (۲۱.۳) و استفاده می شود. برای مثال،

$$\begin{aligned}
&F(y_0+\epsilon y_1+\epsilon^2 y_2+\epsilon^3 y_3)\\
&=F(y_0)+\epsilon\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial F(y_0)}{\partial z^k}y_1^k\\
&+\epsilon^2\Bigg(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial F(y_0)}{\partial z^k}y_2^k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial^2 F(y_0)}{\partial z^k\partial z^l}y_1^k y_1^l\Bigg)\\
&+\epsilon^3\Bigg(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial F(y_0)}{\partial z^k}y_3^k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial^2 F(y_0)}{\partial z^k\partial z^l}\times(y_1^k y_2^l+y_1^l y_2^k)\\
&\qquad+\frac{1}{3!}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial^2 F(y_0)}{\partial z^k\partial z^l\partial z^m}y_1^k y_1^l y_1^m\Bigg)+O(\epsilon^3).
\end{aligned}$$

ما به یك تعمیم از فرمول (۲۴.۳)نیز برای عبارت زیر نیاز داریم.

$$\sum_{i=0}^{p}\epsilon^i F_i(Y_0+\epsilon y_1+\cdots+\epsilon^p y_p).$$

با استفاده از فرمول (۲۴.۳) برای هر F_i و نیز معرفی نماد زیر برای اختصار

$$\tau_{j,i}=\sum_{|\sigma|=1}^{j}\frac{1}{\sigma!}F_i^{(\sigma)}(y_0)\sum_{|\nu|=j}y_{(\nu)}.$$

ما داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p}\epsilon^i F_i(y_0+\epsilon y_1+\cdots+\epsilon^p y_p)&\approx\sum_{i=0}^{p}\epsilon^i\Bigg[F_i(y_0)+\sum_{j=1}^{p}\epsilon^j\tau_{j,i}\Bigg]\\
&\approx\sum_{i=0}^{p}\epsilon^i F_i(y_0)+\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{p-i}\epsilon^{i+j}\tau_{j,i}.
\end{aligned}$$

البته تبدیلات تا مرتبه دلخواه نسبت به توان ϵدرآخرین جمله استفاده می شوند.

$$\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{p-i}\epsilon^{i+j}\tau_{j,i}=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{l=i+1}^{p}\epsilon^l\tau_{l-i,i}=\sum_{l=1}^{p}\epsilon^l\sum_{i=0}^{l-1}\tau_{l-i,i}=\sum_{l=1}^{p}\epsilon^l\sum_{j=1}^{l}\tau_{j,l-j}.$$

حال به عنوان یك نتیجه ما به تعمیم زیر از فرمول (۲۴.۳) می رسیم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{p}\epsilon^i F_i(y_0+\epsilon y_1+\cdots+\epsilon^p y_p)\\
&\approx F_0(y_0)+\sum_{i=1}^{p}\epsilon^i\Bigg[F_i(y_0)+\sum_{j=1}^{i}\sum_{|\sigma|=1}^{j}\frac{1}{\sigma!}F_{i-j}^{(\sigma)}(y_0)\sum_{|\nu|=j}y_{(\nu)}\Bigg].
\end{aligned} \tag{۲۵.۳}$$

در فرمول بالا از نمادهای (۲۱.۳) و استفاده شده است. دوباره به هدفمان یعنی ساختن یك گروه تقریبی از مرتبه $O(\epsilon^p)$ با p دلخواه برمی گردیم. برای مولد بی نهایت کوچك زیر

$$X = [\xi_0(z) + \epsilon\xi_1(z) + \cdots + \epsilon^p\xi_p(z)]\frac{\partial}{\partial z}.$$

گروه تقریبی از تبدیلات

$$\bar{z} \approx f_0(z,a) + \epsilon f_1(z,a) + \cdots + \epsilon^p f_p(z,a). \tag{۲۶.۳}$$

با معادله تقریبی لی زیر تعیین می شوند

$$\frac{d}{da}(f_0 + \epsilon f_1 + \cdots + \epsilon^p f_p) \approx \sum_{i=0}^{p} \epsilon^i \xi_i(f_0 + \epsilon f_1 + \cdots + \epsilon^p f_p). \tag{۲۷.۳}$$

با تبدیل طرف راست این معادله مطابق (۲۵.۳) ،وبرابری ضرایب در توان های شبیه به هم در ϵ ما به دستگاه معادلات زیر می رسیم لازم به ذکر است اینجا نیز از نمادهای (۲۱.۳) استفاده می کنیم.

$$\frac{df_0}{da} = \xi_0(f_0), \tag{۲۸.۳}$$

$$\frac{df_i}{da} = \xi_i(f_0) + \sum_{j=1}^{i}\sum_{|\sigma|=1}^{j}\frac{1}{\sigma!}\xi_{i-j}^{(\sigma)}(f_0)\sum_{|\nu|=j} f_{(\nu)}, \quad i = 1, \cdots, p. \tag{۲۹.۳}$$

این دستگاه هم ارز با معادله تقریبی (۲۷.۳) است. پس می توان برای یافتن گروه تقریبی دستگاه (۲۸.۳) و (۲۹.۳) را با شروط آغازی زیر حل کرد.

$$f_0|_{a=0} = z, \qquad f_i|_{a=0} = 0, \quad i = 1, \cdots, p. \tag{۳۰.۳}$$

برای روشن شدن بهتر مطلب ما چند معادله اول از دستگاه (۲۸.۳) و (۲۹.۳)را می نویسیم.

$$\begin{aligned}
\frac{df_0}{da} &= \xi_0(f_0),\\
\frac{df_1}{da} &= \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial\xi_0(f_0)}{\partial z^k}f_1^k + \xi_1(f_0)\\
\frac{df_2}{da} &= \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial\xi_0(f_0)}{\partial z^k}f_2^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial^2\xi_0(f_0)}{\partial z^k\partial z^l}f_1^k f_1^l + \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial\xi_1(f_0)}{\partial z^k}f_1^k + \xi_2(f_0).
\end{aligned} \tag{۳۱.۳}$$

مثال ۱۳.۱.۳. *بیایید سیستم (۲۸.۳) و (۲۹.۳) را برای عملگر زیر بنویسیم.*

$$X = (1+\epsilon x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \epsilon xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

که در اینجا $N = 2$ و $z = (x,y)$ ، $f_k = (f_k^1, f_k^2)$ ، $k = 0,1,\cdots,p$ ، $\xi_0 = (1,0)$، $\xi_1 = (x^2, xy)$ و $\xi_l = 0$ برای $l \geq 2$ است. از (۳۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{df_0^1}{da} = 1, \qquad \frac{df_0^2}{da} = 0,\\
&\frac{df_1^1}{da} = (f_0^1)^2, \qquad \frac{df_1^2}{da} = f_0^1 f_0^2\\
&\frac{df_2^1}{da} = 2f_0^1 f_1^1, \qquad \frac{df_2^2}{da} = f_0^2 f_1^1 + f_0^1 f_1^2.
\end{aligned}$$

برای $i \geq 2$ به خاطر شکل خاص بردار ξ معادله (۲۹.۳)ساده می شود. یعنی چون ξ_0 ثابت است و $\xi_l = 0$ برای همه $l \geq 2$ فقط جملات با $j = i - 1$ در طرف راست (۲۹.۳) ظاهر می شوند،و در واقع می توان نوشت:

$$\frac{df_i}{da} = \sum_{|\sigma|=1}^{i-1} \frac{1}{\sigma!}\xi_1^{(\sigma)}(f_0) \sum_{|\nu|=i-1} f_{(\nu)}.$$

البته می توان این معادلات را باز هم مختصر تر کرد. اینبار برای ξ_1 ،چون $\xi_1^1 = x^2$ و $\xi_1^2 = xy$ فقط $\sigma = (1,0)$ و $\sigma = (2,0)$ در اولین مولفه معادلات مورد بحث استفاده می شوندو در دومین مولفه فقط σ با $(1,0)$ و $(0,1)$ و $(1,1)$ مساوی است. پس در نتیجه ما سیستم زیر را داریم:

$$\frac{df_i^1}{da} = 2f_0^1 f_{i-1}^1 + \sum_{i_1+i_2=i-1} f_{i_1}^1 f_{i_2}^1,$$
$$\frac{df_i^2}{da} = f_0^2 f_{i-1}^1 + f_0^1 f_{i-1}^2 + \sum_{i_1+i_2=i-1} f_{i_1}^1 f_{i_2}^2.$$

مثال ۱۴.۱.۳. می خواهیم گروه تقریبی تبدیلات از مرتبه ϵ^p که با مولد $X = (1+\epsilon x)(\frac{\partial}{\partial x})$ تولید می شود را محاسبه کنیم. در این حالت سیستم (۲۸.۳) و (۲۹.۳) شکل زیر را می گیرد:

$$\frac{df_0}{da} = 1, \quad \frac{df_i}{da} = f_{i-1}, \quad i = 1, \cdots, p,$$
$$N = 1, \xi_0 = 1, \quad \xi_1 = x, \quad \xi_l = 0 \quad \forall l \geq 2,$$
$$z = (x), \quad f_k = (f_k^1), \quad k = 0, \cdots, p.$$

تحت شروط آغازی (۳۰.۳) داریم:

$$f_i = x\frac{a^i}{i!} + \frac{a^{i+1}}{(i+1)!}, \qquad i = 0, \cdots, p.$$

گروه تقریبی متناظر اینگونه است:

$$\bar{x} \approx \sum_{i=0}^{p} \frac{a^i}{l!}(x + \frac{a}{i+1})\epsilon^i. \qquad (۳۲.۳)$$

در واقع چون f_1 از روی f_0 تعیین می شود و f_2 از روی f_1 و....پس داریم:

$$\int df_1 = \int (a+x)da,$$
$$f_1 = ax + \frac{a^2}{2!} \Longrightarrow f_2 = \frac{a^2}{2}x + \frac{a^3}{3!}, \cdots.$$

۲.۳ تقارنهای تقریبی

در این بخش ما روش بی نهایت کوچک از فصل اول را به تقارنهای تقریبی تعمیم می دهیم. به عبارت دیگر اینجا معادلات دیفرانسیل یک گروه تقریبی با پارامتر کوچک ϵ را به عنوان تقارن می پذیرند.

۱.۲.۳ تعریف تقارنهای تقریبی

تعریف ۱.۲.۳. *فرض کنید G یک گروه تبدیل تقریبی یک پارامتری باشد*

$$\bar{z}^i = f(z.a.\epsilon) \equiv f_0^i(z,a) + \epsilon f_1^i(z,a), \qquad i = 1, \cdots, N. \tag{۳۳.۳}$$

یک معادله تقریبی

$$F(z,\epsilon) \equiv F_0(z) + \epsilon F_1(z) \approx 0. \tag{۳۴.۳}$$

نسبت به G ناوردای تقریبی نامیده می شود و یا به عبارت دیگر G را می پذیرد اگر $F(\bar{z},\epsilon) \approx F(f(z,a,\epsilon),\epsilon) = O(\epsilon)$ که $z = (z^1, \cdots, z^N)$ در معادله (۳۴.۳) صدق می کند. اگر $z = (x, u, u_{(1)}, \cdots, u_{(k)})$ سپس (۳۴.۳) یک معادله تقریبی از مرتبه k نامیده می شود و G یک گروه تقارن تقریبی از معادلات دیفرانسیل است.

۲.۲.۳ معادلات مشخصه و تقارنهای پایدار

قضیه زیریک محک برای تعیین تقارنهای تقریبی یک معادله دیفرانسیل می دهد.

قضیه ۲.۲.۳. *معادله (۳۴.۳) تحت گروه تبدیلات تقریبی (۳۳.۳) بامولد*

$$X = X^0 + \epsilon X^1 \equiv \xi_0^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i} + \epsilon \xi_1^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}. \tag{۳۵.۳}$$

ناوردا است اگر وفقط اگر

$$[XF(z,\epsilon)]\Big|_{F\approx 0} = O(\epsilon).$$

یا

$$[X^0F_0(z) + \epsilon(X^1F_0(z) + X^0F_1(z))]_{(32.3)} = O(\epsilon). \tag{۳۶.۳}$$

اثبات. معادله (۳۶.۳) با جایگذاری (۳۴.۳) و (۳۵.۳)در معادله مشخصه که در فصل اول معرفی کردیم در مرتبه اول دقت نسبت به ϵبه دست می آید. عملگر (۳۵.۳) که در معادله (۳۶.۳) صدق می کند تقارن تقریبی بی نهایت کوچك ،یا عملگر تقریبی پذیرفته شده توسط معادله (۳۴.۳) نامیده می شود و در نتیجه معادله (۳۶.۳) معادله مشخصه برای تقارنهای تقریبی نامیده می شود. □

می خواهیم همین قضیه را به شکل کامل تری بیان کنیم و اثبات آن را بیاوریم.

قضیه ۳.۲.۳. *فرض کنید که تابع $F(z,\epsilon) = (F^1(z,\epsilon), \cdots, F^n(z,\epsilon))$، $n < N$ در متغیر های z,ϵ تواما تحلیلی باشد و در شرط زیر صدق کند:*

$$rank F'(z,0)|_{F(z,0)=0} = n. \tag{۳۷.۳}$$

که $F'(z,\epsilon) = \parallel \frac{\partial F^\nu(z,\epsilon)}{\partial z^i} \parallel$ برای $\nu = 1, \cdots, n$ و $i = 1, \cdots, N$ برای اینکه معادله تقریبی

$$F(z,\epsilon) = O(\epsilon^p). \tag{۳۸.۳}$$

تحت گروه تقریبی از تبدیلات زیر

$$\bar{z} = f(z,a,\epsilon) + O(\epsilon^p).$$

با مولد

$$X = \xi(z,\epsilon)\frac{\partial}{\partial z}, \quad \xi = \frac{\partial f}{\partial a}\bigg|_{a=0} + O(\epsilon). \tag{۳۹.۳}$$

ناوردا باشد لازم وکافی است که

$$XF(z,\epsilon)|_{(38.3)} = O(\epsilon). \tag{۴۰.۳}$$

اثبات. ابتدا لزوم را اثبات می کنیم. فرض کنید شرط $F(f(z,a,\epsilon),\epsilon) \approx 0$ برای ناوردایی معادله تقریبی (۳۸.۳) برقرار باشد:

$$F(f(z,a,\epsilon),\epsilon)|_{(38.3)} = O(\epsilon^p).$$

با استفاده از معادله تعیین که در فصل اول معرفی کردیم:

$$\begin{aligned}
&X = X^0 + \epsilon X^1 = \xi_0^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i} + \epsilon\xi_1^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}\\
&(\xi_0^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i} + \epsilon\xi_1^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i})(F_0(z) + \epsilon F_1(z))\bigg|_{F_0(z)+\epsilon F_1(z)\approx 0}\\
&\xi_0^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}F_0(z) + \epsilon\xi_0^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}F_1(z) + \epsilon\xi_1^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}F_0(z)\bigg|_{F(z,\epsilon)\approx 0} = 0.
\end{aligned}$$

و این (۴۰.۳) را نتیجه می دهد. حال برگشت را اثبات می کنیم فرض کنید که (۴۰.۳) برای تابع $F(z,\epsilon)$ برقرار باشد که در شرط (۳۷.۳) صادق است بیایید ناوردایی معادله تقریبی (۳۸.۳) را اثبات کنیم. برای این متغیرهای جدیدی را معرفی کنیم $y^N = H^{N-n}(z,\epsilon),\cdots,y^{n+1} = H^1(z,\epsilon), y^n = F^n(z,\epsilon),\cdots,y^1 = F^1(z,\epsilon)$ به جای $z^N,\cdots,z^1$با انتخاب $H^{N-n}(z,\epsilon),\cdots H^1(z,\epsilon)$ چنانچه توابع $H^{N-n},\cdots,H^1,F^n,\cdots,F^1$ مستقل تابعی هستند (برای ϵ به اندازه کافي کوچك)در متغیر های جدید معادله تقریبی اصلی (۳۸.۳) و (۳۹.۳) و شرط (۴۰.۳) به ترتیب شکل زیر را می گیرند:

$$\begin{aligned}
&y^\nu = \theta_p^\nu(y,\epsilon), \qquad \nu+1,\cdots,n,\\
&X = \eta^i(y,\epsilon)\frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad \eta^i \approx \xi^j(x,\epsilon)\frac{\partial y^i(x,\epsilon)}{\partial x^j},\\
&\eta^\nu(\theta_p^1,\cdots,\theta_p^n,y^{n+1},\cdots,y^N) = O(\epsilon), \quad \nu = 1,\cdots,n.
\end{aligned}$$

که $\theta_p^\nu = O(\epsilon^p)$.با قضیه متغیر های y با مساله تقریبی کوشی تعیین می شوند.

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{y}^\nu}{da} &\approx \eta^\nu(\bar{y}^1,\cdots,\bar{y}^n,\bar{y}^{n+1},\cdots,\bar{y}^N,\epsilon), \quad \bar{y}^\nu|_{a=0}\theta_p^\nu(y,\epsilon),\\
\frac{d\bar{y}^k}{da} &\approx \eta^k(\bar{y}^1,\cdots,\bar{y}^n,\bar{y}^{n+1},\cdots,\bar{y}^N,\epsilon), \quad \bar{y}^k|_{a=0} = y^k, \quad k = n+1,\cdots,N.
\end{aligned}$$

که شرط آغازی برای زیردستگاه نخست نوشته می شود. مطابق قضیه حل این مساله یکتا است و شکل $\bar{y} = (\theta_p^1,\cdots,\theta_p^n,y^{n+1},\cdots,y^N)$ را دارد با بازگشت به متغیر های اولیه ما به $F^\nu(\bar{z},\epsilon) = O(\epsilon^p)$ برای $\nu = 1,\cdots,n$ این یعنی معادله تقریبی $F(f(z,a,\epsilon),\epsilon) \approx 0$ و قضیه اثبات می شود. □

مثال ۴.۲.۳. فرض کنید $N = 2$ و $z = (x, y)$ و $p = 1$ ما گروه تقریبی از تبدیلات را در نظر می گیریم

$$\bar{x} \approx x + a + (x^2 a + x a^2 + \frac{a^3}{3})\epsilon,$$
$$\bar{y} \approx y + (xya + y\frac{a^2}{2})\epsilon. \qquad (۴۱.۳)$$

با مولد بی نهایت کوچك

$$X = (1 + \epsilon x^2)(\frac{\partial}{\partial x}) + \epsilon xy(\frac{\partial}{\partial y}). \qquad (۴۲.۳)$$

می خواهیم نشان دهیم معادله تقریبی زیر نسبت به تبدیلات (۴۲.۳) ناوردا است.

$$F(x, y, \epsilon) \equiv y^{2+\epsilon} - \epsilon x^2 - 1 = O(\epsilon). \qquad (۴۳.۳)$$

ما نخست ناوردایی (۴۳.۳) را بررسی می کنیم. برای اینکار ابتدا معادله (۴۳.۳) را با همان درجه دقت بازنویسی می کنیم:

$$\bar{F}(x, y, \epsilon) \equiv y^2 - \epsilon(x^2 - y^2 \ln y) - 1 \approx 0.$$

بعد از تبدیل (۴۱.۳) داریم

$$\begin{aligned}\bar{F}(\bar{x}, \bar{y}, \epsilon) &= \bar{y}^2 + \epsilon(\bar{x}^2 - \bar{y}^2 \ln \bar{y}) - 1 \approx y^2 - \epsilon(x^2 - y^2 \ln y) - 1 \\ &+ \epsilon(2xa + a^2)(y^2 - 1) \\ &= \bar{F}(x, y, \epsilon) + \epsilon(2xa + a^2)[\bar{F}(x, y, \epsilon) + \epsilon(x^2 - y^2 \ln y)] \\ &= [1 + \epsilon(2ax + a^2)]\bar{F}(x, y, \epsilon) + O(\epsilon).\end{aligned}$$

که در ضمن لزوم تساوی $F(f(z, a, \epsilon), \epsilon) \approx 0$ بیان می کندکه: $\bar{F}(\bar{x}, \bar{y}, \epsilon)|_{(43.3)} \approx 0$ این تابع در شرط ناوردایی (۳۷.۳) صدق می کند پس ناوردایی می تواند با کمك محك (۴۰.۳) برای عملگر (۴۲.۳) بررسی شود ما داریم که

$$\begin{aligned}XF &= (2 + \epsilon)\epsilon xy^{2+\epsilon} - 2\epsilon x(1 + \epsilon x^2) \\ &= 2\epsilon x(y^{2+\epsilon} - 1) + O(\epsilon) = 2\epsilon x(F + \epsilon x^2) + O(\epsilon) \\ &= 2\epsilon xF + 2\epsilon^2 x^3 + O(\epsilon) \\ &= 2\epsilon xF + O(\epsilon).\end{aligned}$$

چون $F = 0$ پس $XF = 0$ و این نشان می دهد معادله F نسبت به گروه ناوردا است.

ملاحظه ۵.۲.۳. معادله مشخصه (۳۶.۳) می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$X^0 F_0(z) = \lambda(z) F_0(z), \qquad (۴۴.۳)$$

$$X^1 F_0(z) + X^0 F_1(z) = \lambda(z) F_1(z). \qquad (۴۵.۳)$$

که $\lambda(z)$ با معادله (۴۴.۳) تعیین می شود وسپس در معادله (۴۵.۳) جایگذاری می شود. معادله اخیر باید برای تمام حل های

$F_0(z) = 0$ برقرار باشد.

با مقایسه معادله (۴۴.۳) با معادله مشخصه تقارنهای دقیق،گزاره زیر را به دست می آوریم.

قضیه ۶.۲.۳. *اگر معادله (۳۴.۳) گروه تقریبی با مولد $X = X^0 + \epsilon X^1$ را بپذیرد که $X^0 \neq 0$ ،سپس عملگر*

$$X^0 = \xi_0^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}. \tag{۴۶.۳}$$

تقارن کامل از معادله زیر است.

$$F_0(z) = 0. \tag{۴۷.۳}$$

ملاحظه ۷.۲.۳. *از معادله (۴۴.۳)و (۴۵.۳) واضح است که اگر X^0 یك تقارن کامل از معادله (۴۷.۳) باشد، آنگاه $X = \epsilon X^0$ یك تقارن تقریبی از معادله (۳۴.۳)است.*

تعریف ۸.۲.۳. *معادله (۴۷.۳) و (۳۴.۳) به ترتیب یك معادله غیر اختلال (غیر آشفته)ویك معادله اختلال نامیده می شوند. تحت شرایط قضیه ۶.۲.۳ عملگر X^0 یك تقارن پایدار ازمعادله غیر اختلال (۴۷.۳) نامیده می شود. مولد تقارن تقریبی متناظر $X = X^0 + \epsilon X^1$ برای معادله اختلال $F_0(z) + \epsilon F_1(z) \approx 0$ در واقع یك تحول از تقارن بی نهایت کوچك X^0 از معادله (۴۷.۳) با اختلال $\epsilon F_1(z)$ می باشد. و اگر بیشتر تقارن های لی جبر از معادله (۴۷.۳) پایدار باشد می گوییم که معادله اختلال (۳۴.۳) تقارنهای معادله غیر اختلال را به ارث می برد.*

۳.۲.۳ محاسبه تقارن های تقریبی

در این قسمت مابه دو روش برای یافتن تقارن های معادلات اشاره می کنیم. البته شایان ذکر است که این دو روش در راستای یکدیگر هستند. تنها تفاوت این است که در روش دوم ما از یك تابع کمکی H استفاده می کنیم. در ادامه به روش نخست می پردازیم. ساخت گروه تقریبی که معادله $F(z, \epsilon) \approx 0$ تحت آن ناوردا است به حل معادله زیر کاهش می یابد.

$$XF(z,\epsilon)\Big|_{F\approx 0} \approx 0. \tag{۴۸.۳}$$

که توابع مختصاتی عملگر بی نهایت کوچك $X = \xi(\frac{\partial}{\partial z})$ ،به صورت $\xi^k(z,\epsilon)$ هستند. برای حل این معادله با $O(\epsilon)$ لازم است که ξ^k, F, z را به صورت زیر نشان دهیم :

$$z \approx y_0 + \epsilon y_1 + \cdots + \epsilon^p y_p, \quad F(z,\epsilon) \approx \sum_{i=0}^{p} \epsilon^i F_i(z),$$
$$\xi^k(z,\epsilon) \approx \sum_{i=0}^{p} \epsilon^i \xi_i^k(z). \tag{۴۹.۳}$$

با جایگذاری آنها در XF و متمایز کردن جملات اصلی داریم:

$$\begin{aligned} XF &= \xi^k \frac{\partial F}{\partial z^k} \\ &= \Big[\sum_{i=0}^{p} \epsilon^i \xi_i^k(y_0 + \epsilon y_1 + \cdots + \epsilon^p y_p)\Big].\Big[\sum_{j=0}^{p} \epsilon^j \frac{\partial}{\partial z^k} F_j(y_0 + \epsilon y_1 + \cdots + \epsilon^p y_p)\Big]. \end{aligned}$$

با استفاده از (۲۵.۳) ونمادهای زیر

$$A_i^k = \xi_i^k(y_0) + \sum_{j=1}^{i}\sum_{|\sigma|=1}^{j}\frac{1}{\sigma!}(\xi_{i-j}^k)(\sigma)(y_0)\sum_{|\nu|=j} y_{(\nu)}, \tag{۵۰.۳}$$

$$B_{j,k} = \frac{\partial F_j(y_0)}{\partial z^k} + \sum_{i=1}^{j}\sum_{|\omega|=1}^{i}\frac{1}{\omega!}\left(\frac{\partial F_{j-i}}{\partial z^k}\right)^{(\omega)}(y_0)\sum_{|\mu|=i} y_{(\mu)}. \tag{۵۱.۳}$$

ما داریم:

$$XF = \left[\xi_0^k(y_0) + \sum_{i=1}^{p}\epsilon^i A_i^k\right].\left[\frac{\partial F_0(y_0)}{\partial z^k} + \sum_{j=1}^{p}\epsilon^j B_{j,k}\right].$$

که به طور ضمنی بیان می کند که،

$$\begin{aligned} XF =& \xi_0^k(y_0)\frac{\partial F_0(y_0)}{\partial z^k} + \epsilon\left[\xi_0^k(y_0)B_{1,k} + A_1^k\frac{\partial F_0(y_0)}{\partial z^k}\right] \\ &+ \sum_{s=2}^{p}\epsilon^s\left[\xi_0^k(y_0)B_{s,k} + A_s^k\frac{\partial F_0(y_0)}{\partial Z^k} + \sum_{i+j=s} A_i^k B_{j,k}\right]. \end{aligned} \tag{۵۲.۳}$$

با ترکیب (۴۸.۳) -(۵۲.۳) و (۲۵.۳) ما به شکل زیر از معادله مشخصه می رسیم:

$$\begin{aligned} &\xi_0^k(y_0)\frac{\partial Fo(y_0)}{\partial z^k} = 0, \qquad \xi_0^k(y_0)B_{1,k} + A_1^k\frac{\partial F_0(y_0)}{\partial z^k} = 0, \\ &\xi_0^k(y_0)B_{l,k} + A_l^k\frac{\partial F_0(y_0)}{\partial z^k} + \sum_{i+j=l} A_i^k B_{j,k} = 0, \quad l = 2,\cdots,p. \end{aligned} \tag{۵۳.۳}$$

این معادله ها روی مجموعه همه $y_0,\cdots,y_p$ برقرار می ماند ودر دستگاه زیر صدق می کنند

$$F_0(y_0) = 0, \quad F_i(y_0) + \sum_{j=1}^{i}\sum_{|\sigma|=1}^{j}\frac{1}{\sigma!}F_{i-j}^{(\sigma)}(y_0)\sum_{|\nu|=j} y_{(\nu)}, \quad i = 1,\cdots,p. \tag{۵۴.۳}$$

که هم ارز معادله تقریبی (۳۸.۳) است. در واقع مساله حل معادله تقریبی (۴۸.۳) به حل دستگاه معادلات کامل (۵۳.۳) و(۵۴.۳) کاهش می یابد. مامعادلات مشخصه را برای $p = 1$ می نوسیم. اینجا برای اختصار یك نماد معرفی می کنیم.

$$y_1^l\frac{\partial}{\partial z^l}\left(\xi_0^k(y_0)\frac{\partial F_0(y_0)}{\partial z^k}\right) \equiv \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} y_1^l\frac{\partial}{\partial z^l}\left(\xi_0^k(z)\frac{\partial F_0(z)}{\partial z^k}\right)\Bigg|_{z=y_0}.$$

پس معادلات (۵۳.۳)و (۵۴.۳) دراین حالت اینگونه می شوند:

$$\xi_0^k(y_0)\frac{\partial F_0(y_0)}{\partial z^k} = 0, \tag{۵۵.۳}$$

$$\xi_1^k(y_0)\frac{\partial F_0(y_0)}{\partial z^k} + \xi_0^k(y_0)\frac{\partial F_1(y_0)}{\partial z^k} + y_1^l\frac{\partial}{\partial z^l}\left(\xi_0^k(y_0)\frac{\partial F_0(y_0)}{\partial z^k}\right) = 0. \tag{۵۶.۳}$$

البته با شروط زیر

$$F_0(y_0) = 0, \quad F_1(y_0) + y_1^l\frac{\partial F_0(y_0)}{\partial z^l} = 0. \tag{۵۷.۳}$$

مثال ۹.۲.۳. *معادله تقریبی (۴۳.۳) را در نظر بگیرید*

$$F(x,y,\epsilon) \equiv y^{2+\epsilon} - \epsilon x^2 - 1 = O(\epsilon).$$

با استفاده از مثال قبل داریم

$$F_0(x,y) = y^2 - 1, \quad F_1(x,y) = y^2 \ln y - x^2.$$

چون $y > 0$، معادلات (۵۷.۳) بیان می کند که $y_0 = 1$, $y_1 = \frac{x_0^2}{2}$ معادلات مشخصه (۵۵.۳) و (۵۶.۳) می تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\xi_0^2(x_0,y_0) = 0, \quad \frac{\partial \xi_0^2(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \tag{۵۸.۳}$$

$$y_0\xi_1^2(x_0,y_0) - x_0\xi_0^1(x_0,y_0) + \frac{x_0^2}{2}\frac{\partial \xi_0^2(x_0,y_0)}{\partial y} = 0. \tag{۵۹.۳}$$

بعد از تفکیك نسبت به x_1 ،و جایگذارای $y_1 = \frac{x_0^2}{2}$ هر عملگر

$$X = [\xi_0^1(x,y) + \epsilon\xi_1^1(x,y)]\frac{\partial}{\partial x} + [\xi_0^2(x,y) + \epsilon\xi_1^2(x,y)]\frac{\partial}{\partial y}.$$

با مختصات های که در (۵۹.۳) صادق هستند،با $y_0 = 1$ و مقدار دلخواه از x_0 یك گروه تقریبی که معادله (۴۳.۳) نسبت به آن ناوردا است می دهد. (از مرتبه $O(\epsilon)$) برای مثال

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2(y-1)\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2-1)\frac{\partial}{\partial y}.$$

عملگر هایی از این قبیل هستند چون در شرط ها صادق هستند

$$X_1 \quad \text{برای} \quad \xi_0^2(x_0,y_0) = 2(y_0-1) = 2(1-1) = 0,$$
$$\frac{\partial \xi_0^2(x_0,y_0)}{\partial x} = 0.$$
$$y_0\xi_1^2(x_0,y_0) - x_0\xi_0^1(x_0,y_0) + \frac{x_0^2}{2}\frac{\partial \xi_0^2(x_0,y_0)}{\partial y} = 0,$$
$$\Rightarrow 0 - x_0x_0 + \frac{x_0^2}{2}.2 = 0.$$

$$X_2 \quad \text{برای} \quad \xi_0^2(x_0,y_0) = (y_0^2-1) = (1-1) = 0,$$
$$\frac{\partial \xi_0^2(x_0,y_0)}{\partial x} = 0.$$
$$y_0\xi_1^2(x_0,y_0) - x_0\xi_0^1(x_0,y_0) + \frac{x_0^2}{2}\frac{\partial \xi_0^2(x_0,y_0)}{\partial y} = 0,$$
$$\Rightarrow 0 - x_0x_0y_0 + \frac{x_0^2}{2}.2y_0 = 0.$$

ملاحظه ۱۰.۲.۳. *اگر برخی متغیر های z^k در معادله $F(z,\epsilon) \approx 0$ ظاهر نشوند، سپس باید z^k را به شکل $\sum_{i\geqslant 0} y_i^k \epsilon^i$ در معادله مشخصه نوشت.*

قبل از بیان چند مثال دیگر ابتدا به بیان روش دوم یافتن تقارن های تقریبی یك معادله دیفرانسیل می پردازیم.

ملاحظه ۱۱.۲.۳. *قضیه ۲.۳ .۶ یك روش بی نهایت کوچك برای محاسبه تقارن های تقریبی (۳۵.۳) از معادلات دیفرانسیل با پارامتر*

کوچک،تعیین می کند. پیاده سازی این روش سه مرحله (گام) زیر را نیاز دارد.

اولین گام: محاسبه تقارن های دقیق X^0 از معادلات غیر اختلال $F_0(z) = 0$ ،با حل معادله مشخصه زیر

$$X^0 F_0(z)\Big|_{F_0(z)=0} = 0. \tag{۶۰.۳}$$

دومین گام: تعیین تابع کمکی H با خاصیت معادلات (۳۴.۳) و (۴۴.۳) و (۴۵.۳) ،و با معلوم بودن $X^0, F_1(z)$ به صورت زیر

$$H = \frac{1}{\epsilon}\Big[X^0(F_0(z) + \epsilon F_1(z))\big|_{F_0(z)+\epsilon F_1(z)=0}\Big]. \tag{۶۱.۳}$$

سومین گام: محاسبه عملگر های X^1 با حل معادله مشخصه به صورت زیر

$$X^1 F_0(z)\Big|_{F_0(z)=0} + H = 0. \tag{۶۲.۳}$$

۴.۲.۳ مثال های از تقارن های تقریبی

مثال ۱۲.۲.۳. *بیابید تقارن های تقریبی معادله غیر خطی موج را محاسبه کنیم*

$$u_{tt} - (u^2 u_x)_x + \epsilon u_t = 0. \tag{۶۳.۳}$$

مولدهای گروه تقریبی را در صورت زیر می نویسیم:

$$X = X^0 + \epsilon X^1 \equiv (\tau_0 + \epsilon\tau_1)\frac{\partial}{\partial t} + (\xi_0 + \epsilon\xi_1)\frac{\partial}{\partial x} + (\eta_0 + \epsilon\eta_1)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{۶۴.۳}$$

که $\tau_\nu, \xi_\nu, \eta_\nu (\nu = 0, 1)$ توابع ناشناخته ای از t, x, u هستند.

گام اول: با حل معادله مشخصه (۶۰.۳) برای تقارنهای دقیق X^0 از معادله غیر اختلال

$$u_{tt} - (u^2 u_x)_x = 0. \tag{۶۵.۳}$$

ما به دست می آوریم:

$$\tau_0 = C_1 + C_3 t, \quad \xi_0 = C_2 + (C_3 + C_4)x, \quad \eta_0 = C_4 u. \tag{۶۶.۳}$$

که $C_1, \cdots C_4$ ثوابت دلخواه هستند. در نتیجه

$$X^0 = (C_1 + C_3 t)\frac{\partial}{\partial t} + (C_2 + C_3 x + C_4 x)\frac{\partial}{\partial x} + C_4 u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{۶۷.۳}$$

به عبارت دیگر معادله (۶۵.۳) لی جبر چهار بعدی با پایه های زیر را می پذیرد

$$X_1^0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2^0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3^0 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4^0 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{۶۸.۳}$$

گام دوم: اگر عبارت (۶۷.۳) از مولد X^0 را در معادله (۶۱.۳) جایگذاری کنیم تابع معین زیر را به دست می آوریم.

$$H = C_3 u_t.$$

گام سوم: حل معادله تعیین (۶۲.۳) ، به صورت زیر نوشته می شود.

$$X^1(u_{tt} - u^2 u_{xx} - 2uu_x^2)\Big|_{(65.3)} + C_3 u_t = 0. \tag{۶۹.۳}$$

که فرمول بالا نشان دهنده امتداد عملگر $X^1 = \tau_1\frac{\partial}{\partial t} + \xi_1\frac{\partial}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial}{\partial u}$ به مشتق های u که در معادله (۶۳.۳) وجود دارند. با جایگذاری $u_{tt} = (u^2u_x)_x$ درطرف چپ معادله (۶۹.۳) به صورت یك چند جمله ای با متغیر های u_x, u_t, u_{xx}, u_{tx} می شود. با مساوی صفر قراردادن ضرایب،ما می رسیم به اینکه

$$\tau_1 = \tau_1(t), \quad \xi_1 = \xi_1(x), \quad 3\tau_1'' = C_3, \quad \xi_1'' = 0, \quad \eta_1 = [\xi_1'(x) - \tau_1'(t)]u.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= A_1 + A_3t + \frac{1}{6}C_3t^2,\\
\xi_1 &= A_2 + (A_3 + A_4)x,\\
\eta_1 &= (A_4 - \frac{1}{3}C_3t)u.
\end{aligned} \tag{۷۰.۳}$$

با جایگذاری(۶۶.۳) و (۷۰.۳) در (۶۴.۳) ما تقارن های تقریبی زیر را برای معادله (۶۳.۳) به دست می آوریم

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\epsilon}{6}(t^2\frac{\partial}{\partial t} - 2tu\frac{\partial}{\partial u})\\
&X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = \epsilon X_1, \quad X_6 = \epsilon X_2, \quad X_7 = \epsilon X_4, \quad X_8 = \epsilon X_3.
\end{aligned} \tag{۷۱.۳}$$

ملاحظه ۱۳.۲.۳. *توجه کنید که معادله (۷۰.۳) نتیجه می دهد $X_8 = \epsilon(t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x})$ البته در مرتبه اول دقت، عملگر X_8 می تواند به شکل داده شده در (۷۱.۳) نوشته شود. جدول زیر از کروشه لی ،که در مرتبه اول دقت محاسبه شده ،نشان می دهد که عملگر های (۷۱.۳) یك لي جبر ۸ بعدی تقریبی L_8 تولید می کند و در نتیجه یك گروه تبدیل تقریبی ۸ پارامتری تولید می کند ما اینجا برای راحتی فقط عناصر بالای قطر را می نویسیم. عناصر پایین قطر قرینه عناصر بالای قطر است.*

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	0	$X_1 + \frac{1}{3}(X_8 - X_7)$	0	0	0	0	X_5
X_2		0	X_2	X_2	0	0	X_6	X_6
X_3			0	0	$-X_5$	$-X_6$	0	0
X_4				0	0	$-X_6$	0	0
X_5					0	0	0	0
X_6						0	0	0
X_7							0	0
X_8								0

جدول ۱.۳: کروشه های تقریبی

جدول بالا نشان می دهد که اگرچه تقارن های X_8, X_7, X_6, X_5 بدیهی هستند،ولی مطابق نکته ۷.۲.۳برای ساختن جبر لی و در نتیجه برای ساختن گروه های تبدیل چند پارامتری نیز لازمند.

ملاحظه ۱۴.۲.۳. *معادلات (۷۱.۳) نشان می دهد که همه تقارنهای (۶۸.۳) از معادله (۶۵.۳) پایدار هستند در نتیجه معادله اختلال (۶۳.۳) تقارنهای معادله غیر اختلال (۶۵.۳) را به ارث می برد.*

مثال ۱۵.۲.۳. *معادله زیر را در نظر بگیرید*

$$u_{tt} - (u^{-4}u_x)_x + \epsilon u_t = 0. \tag{۷۲.۳}$$

گام اول: معادله غیر اختلال

$$u_{tt} - (u^{-4}u_x)_x = 0. \tag{۷۳.۳}$$

لی جبر ۵ بعدی L_5 عملگر های زیر را می پذیرد.

$$X^0 = (C_1 + C_3t + C_2t^2)\frac{\partial}{\partial t} + (C_2 + C_3x + C_4x)\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{-1}{2}C_4 + C_5t)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

یك پایه از لی جبر اینگونه است

$$\begin{aligned} X_1^0 &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2^0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3^0 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \\ X_4^0 &= x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tu\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{۷۴.۳}$$

گام دوم: معادله (۶۱.۳) تابع معین زیر را فراهم می کند

$$H = C_3u_t + 2C_5tu_t + C_5u.$$

گام سوم: معادله مشخصه (۶۲.۳) نتیجه می دهد که $C_3 = C_5 = 0$. مانند مثال قبل تقارنهای تقریبی از معادله اختلال (۷۲.۳) را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \epsilon(t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}), \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u}, \\ X_5 &= \epsilon X_1, \quad X_6 = \epsilon X_2, \quad X_7 = \epsilon X_4, \quad X_8 = \epsilon(t^2\frac{\partial}{\partial t} + tu\frac{\partial}{\partial u}). \end{aligned} \tag{۷۵.۳}$$

معادلات (۷۵.۳) نشان می دهد که همه تقارنهای (۷۴.۳) از معادله (۷۳.۳) پایدار نیستند یعنی عملگر های

$$X_3^0 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_5^0 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tu\frac{\partial}{\partial u}.$$

از معادله (۷۳.۳) غیر پایدارند. درنتیجه معادله اختلال (۷۲.۳) تقارنهای معادله غیر اختلال (۷۳.۳) رابه ارث نمی برد.

ملاحظه ۱۶.۲.۳. *معادلات (۶۳.۳) و (۷۲.۳) با پارامتر دلخواه $\epsilon \neq 0$ فقط سه تقارن دقیق دارد. یعنی تقارنهای دقیق معادله (۶۳.۳) عملگر های*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

از (۷۱.۳) و تقارنهای دقیق از معادله(۷۲.۳) عملگر های

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u}.$$

از معادله (۷۵.۳) هستند.

۵.۲.۳ تقارنهای تقریبی معادلات به صورت $u_{tt} + \epsilon u_t = (\varphi(u)u_x)_x$

تقارنهای تقریبی از معادلات دیفرانسیل را می توان با استفاده از تکنیك های امتداد دادن مولد های بی نهایت کوچك یافت. در آنجه می آید، ما تقارنهای مرتبه اول ($p = 1$) را در نظر می گیریم و مطابق با چنین تقارنهای معادلات مرتبه دوم را طبقه بندی می کنیم.

$$u_{tt} + \epsilon u_t = (\varphi(u)u_x)_x, \quad \varphi \neq const. \tag{۷۶.۳}$$

البته این معادلات شامل یك پارامتر کوچك ϵ هستند.می دانیم که مولد بی نهایت کوچك یك تقارن تقریبی به صورت زیر است:

$$X = (\xi_0^1 + \epsilon\xi_1^1)\frac{\partial}{\partial t} + (\xi_0^2 + \epsilon\xi_1^2)\frac{\partial}{\partial x} + (\eta_0 + \epsilon\eta_1)\frac{\partial}{\partial u}. \quad (۷۷.۳)$$

که توابع مختصاتی η, ξ از عملگر (۷۷.۳) به t, x, u بستگی دارد و در معادله مشخصه (۵۵.۳) و (۵۶.۳) صدق می کند به طوریکه

$$z = (t, x, u, , u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}), \quad F_0 = u_{tt} - (\varphi(u)u_x)_x, \quad F_1 = u_t.$$

با توجه به نکته ۱۰.۲.۳ چون متغیر های t, x به شکل صریح در (۷۶.۳) ظاهر نمی شوند، پس برای تجزیه $z = y_0 + \epsilon y_1$ کافی است بنویسیم:

$$u = u_0 + \epsilon u_1, \quad u_x = (u_0)_x + \epsilon(u_1)_x.$$

معادله (۵۵.۳) معادله مشخصه برای عملگر زیر است

$$X^0 = \xi_0^1\frac{\partial}{\partial t} + \xi_0^2\frac{\partial}{\partial x} + \eta_0\frac{\partial}{\partial u}. \quad (۷۸.۳)$$

که توسط معادله زیر پذیرفته می شود

$$u_{tt} = (\varphi(u)u_x)_x, \quad \varphi \neq const. \quad (۷۹.۳)$$

در نتیجه، اولین گام در طبقه بندی معادلات (۷۶.۳) ، مطابق با تقارنهای تقریبی طبقه بندی معادلات (۷۹.۳) مطابق تقارنهای کامل است. دومین گام حل معادله مشخصه (۵۶.۳) است با F_0 و مقادیر η_0, ξ_0^2, ξ_0^1 که توابع مختصاتی عملگر (۷۸.۳) هستند. یك طبقه بندی گروهی از معادلات (۷۹.۳) (مطابق تقارنهای نقطه ای دقیق) در جدول زیر آمده است.

	$\varphi(u)$	ξ_0^1	ξ_0^2	η_0
	تابع دلخواه	$C_1t + C_2$	$C_1x + C_3$	0
1	ku^σ	$C_1t + C_2$	$C_3x + C_4$	$\frac{2}{\sigma}(C_3 - C_1)u$
2	$ku^{-\frac{4}{3}}$	$C_1t + C_2$	$C_3x^2 + C_4x + C_5$	$-\frac{3}{2}(2C_3x + C_4 - C_1)u$
3	ku^{-4}	$C_1t^2 + C_2t + C_3$	$C_4x + C_5$	$(C_1t + \frac{C_2 - C_4}{2})u$
4	$k\exp^u$	$C_1t + C_2$	$C_3x + C_4$	$2(C_3 - C_1)u$

جدول ۲.۳: طبقه بندی معادلات (۷۹.۳)

که $k = \pm 1$ و σ یك پارامتر دلخواه و $C_1, \cdots, C_5$ ثابت هستند.

ما حال به سراغ دومین گام از ساختن تقارنهای تقریبی می رویم. برای $\varphi(u)$ حالت های دلخواه در نظر می گیریم. با جایگذاری مقادیر $\xi_0^1 = C_1t + C_2$ و $\xi_0^2 = C_1x + C_3$ در (۵۶.۳) ما می رسیم به اینکه $\eta_1 = 0, \xi_1^2 = k_1x + k_3, \xi_1^1 = k_1t + k_2, C_1 = 0$ که $k_i = const$ هستند. ما حال مشاهده می کنیم که معادله (۷۶.۳) هر عملگر X ونیز ϵX را می پذیرد. عملگر های $\epsilon(\frac{\partial}{\partial t})$ و $\epsilon(\frac{\partial}{\partial x})$ غیر ضروری هستند و می توانند حذف شوند. چنانچه ثوابت k_2, k_3 در حل معادله مشخصه (۵۶.۳) می توانند مساوی صفر قرار داده شوند. پس برای یك تابع دلخواه $\varphi(u)$ معادله (۷۶.۳) سه حل اساسی عملگر های تقارن تقریبی متناظر به k_1, C_3, C_2 وجود دارد. نتیجه در جدول بعدی آمده است .

به خاطر داشته باشید که در جدول قبل پایه های جبرهای پذیرفته شده برای تقارنهای دقیق داده شده اند. و عملگر های آنها برای تقارنهای تقریبی داده می شوند، یك پایه برای جبر متناظر با ضرب مولد ها در ϵ و حذف جملات از مرتبه ϵ^2 به دست می آید. برای مثال برای $\varphi(u) = ku^{-\frac{4}{3}}$ معادله (۷۹.۳) یك جبر ۵ بعدی می پذیرد و (۷۶.۳) یك جبر ۴ بعدی از تقارنهای دقیق و یك لی جبر ۱

	$\varphi(u)$	عملگر های (۳.۷۹)	تقارنهای دقیق	تقارنهای تقریبی
	تابع دلخواه	$X_1^0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2^0 = \frac{\partial}{\partial x}$ $X_3^0 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}$	$Y_1 = X_1^0$ $Y_2 = X_2^0$	$X_1 = X_1^0, \quad X_2 = X_2^0$ $X_3 = \epsilon X_3^0$
1	ku^σ	$X_4^0 = \sigma x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$	$Y = x_4^0$	$\tilde{X} = X_3^0 + \frac{\epsilon}{\sigma+4}(\frac{\sigma}{2}t^2\frac{\partial}{\partial t} - 2tu\frac{\partial}{\partial u})$ $X_4 = X_4^0$
2	$ku^{-\frac{4}{3}}$	$X_4^0 = 2x\frac{\partial}{\partial x} - 3u\frac{\partial}{\partial u}$ $X_5^0 = x^2\frac{\partial}{\partial x} - 3xu\frac{\partial}{\partial u}$	$Y_3 = X_4^0$ $Y_4 = x_5^0$	$\tilde{X} = X_3^0 - \frac{\epsilon}{4}(t^2\frac{\partial}{\partial t} + 3tu\frac{\partial}{\partial u})$ $X_4 = X_4^0, \quad X_5 = \epsilon X_5^0$
3	ku^{-4}	$X_4^0 = 2x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}$ $X_5^0 = t^2\frac{\partial}{\partial t} - tu\frac{\partial}{\partial u}$	$Y_3 = X_4^0,$ $Y_4 = x_5^0$	$X_4 = X_4^0,$ $X_5 = \epsilon X_5^0$
4	$k\exp^u$	$X_4^0 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial u}$	$Y_3 = X_4^0$	$\tilde{X}_3 = X_3^0 + \epsilon(\frac{t^2}{2}\frac{\partial}{\partial t} - t\frac{\partial}{\partial u}),$ $X_4 = X_4^0$

جدول ۳.۳: جدول مقایسه تقارنهای دقیق و تقریبی

بعدر از تقارنهای تقریبی با پایه زیر می پذیرد:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = (t - \frac{1}{4}\epsilon t^2)\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{4}\epsilon,$$
$$X_4 = 2x\frac{\partial}{\partial x} - 3u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x}3xu\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_6 = \epsilon X_1, \quad X_7 = \epsilon X_2,$$
$$X_8 = \epsilon(t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}), \quad X_9 = \epsilon X_4, \quad X_{10} = \epsilon X_5.$$

۳.۳ تقارنهای تقریبی معادلات به صورت $u_t = h(u) = u_t + \epsilon H$

چون در ادامه به تبدیلات لی بکلاند [۲] نیاز داریم،در اینجا یك تعریف جامع از تبدیلات لی بکلاند و عملگر های آنها می آوریم تا خواننده را از مطالعه یك کتاب دیگر بی نیاز کرده باشیم.

۱.۳.۳ عملگر های لی بکلاند

از لحاظ هندسي تبدیلات لی بکلاند در واقع تعمیم مرتبه بالاتر از تبدیلات برخوردی کلاسیك هستند. تعمیم مولد ها ی بی نهایت کوچك از تبدیلات نقطه ای و برخوردی، عملگر لی بکلاند نامیده می شود.

تعریف ۱.۳.۳. *فرض کنید $\xi^i, \eta^\alpha \in \mathcal{A}$ توابع دیفرانسیلی وابسته به هر تعداد متناهی از متغیر های*

[۲] Lie-Backlund

$x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \cdots$ باشند یك عملگر دیفرانسیلی

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \zeta_{i_1 i_2}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} + \cdots . \qquad (۸۰.۳)$$

که داریم

$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha) + \xi^i u_{ij}^\alpha, \qquad (۸۱.۳)$$

$$\zeta_{i_1 i_2}^\alpha = D_{i_1} D_{i_2}(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha) + \xi^i u_{j i_1 i_2}^\alpha, \cdots . \qquad (۸۲.۳)$$

یك عملگر لی بکلاند نامیده می شود. عملگر لی بکلاند (۸۲.۳) اغلب به صورت زیر مختصر می شود:

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \cdots . \qquad (۸۳.۳)$$

که با فرمول (۸۰.۳)-(۸۲.۳) امتداد داده می شود.

عملگر (۸۰.۳) در واقع یك جمع متناهی است،ولی وقتی روی هر تابع دیفرانسیلی عمل می کند کوتاه می شود. در نتیجه عمل عملگر های لی بکلاند روی فضای $\mathcal{A}$ خوش تعریف است.

دو عملگر لی بکلاند را در نظر بگیرید

$$X_{(\nu)} = \xi_\nu^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta_\nu^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \cdots \quad \nu = 1, 2.$$

کروشه آنها با فرمول زیر تعریف می شود:

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1.$$

قضیه ۲.۳.۳. *کروشه $[X_1, X_2]$ با عملگرهای لی بکلاند به صورت زیر تعریف می شود:*

$$[X_1, X_2] = (X_1(\xi_2^i) - X_2(\xi_1^i)) \frac{\partial}{\partial x^i} + (X_1(\eta_2^\alpha) - X_2(\eta_1^\alpha)) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \cdots . \qquad (۸۴.۳)$$

که جملاتی که نوشته نشده امتداد ضرایب $\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^i}$ هستند که با توجه به معادلات(۸۰.۳) و(۸۲.۳) داده می شود.

مطابق با قضیه ۲.۳.۳ مجموعه همه عملگر های لی بکلاند یك لی جبر با بعد نامتناهی نسبت به کروشه (۸۴.۳) تشکیل می دهد. که جبر لی بکلاند نامیده می شود،و با L_B نشان داده می شود.

جبر لی بکلاند با ویژگی های زیر نشان داده می شود:

I. $D_i \in L_B$ به عبارت دیگر عملگر، (۳۰.۲) که در فصل دوم آمده است،یك عملگر لی بکلاند است. به علاوه

$$\xi_*^i \in \mathcal{A} \quad \text{برای هر} \quad X_* = \xi_*^i D_i \in L_B. \qquad (۸۵.۳)$$

II. فرض کنید L_* مجموعه همه عملگر های لی بکلاند به شکل (۸۵.۳) است. پس L_* یك ایده آل از L_B است،یعنی برای هر $X \in L_B$ ، $[X, X_*] \in L_*$ در حقیقت:

$$[X, X_*] = (X(\xi_*^i) - X_*(\xi^i)) D_i \in L_*.$$

III. بر طبق ویژگی II ، دو عملگر هم ارز گفته می شوند (یعنی $X_1 \sim X_2$)اگر $X_1 - X_2 \in L_*$. به ویژه هر عملگر $X \in L_B$ هم ارز با یك عملگر (۸۰.۳) با $\xi^i = 0$ ؛ $i = 1, \cdots, n$ است یعنی $X \sim \tilde{X}$ که

$$\tilde{X} = X - \xi^i D_i = (\eta^\alpha - \xi^i u_i^\alpha) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \cdots . \qquad (۸۶.۳)$$

تعریف ۳.۳.۳. *عملگر هایی به صورت $\eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \cdots , \eta^\alpha \in \mathcal{A}$ عملگر های متعارف لی بکلاند نامیده می شود*

با استفاده از این تعریف ما می توانیم ویژگی III را به صورت زیر فرمولی کنیم

قضیه ۴.۳.۳. *هر عملگر $X \in L_B$ هم ارز یك عملگر متعارفی لی بکلاند است.*

مثال ۵.۳.۳. *بیایید فرض کنیم $n = m = 1$ و u_1 را با u_x نشان دهیم. مولد گروه تبدیلات انتقال در امتداد محور x ها با صورت متعارفی لی بکلاند به صورت زیر نوشته می شود:*

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \sim \tilde{X} = -u_x \frac{\partial}{\partial u} + \cdots .$$

مثال ۶.۳.۳. *فرض کنید x, y متغییر های مستقل باشند و $K, C = const$ مولد غیر همگن اتساع و صورت متعارفی لی بکلاند به صورت زیر نوشته می شود:*

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + Ky\frac{\partial}{\partial y} + Cu\frac{\partial}{\partial u} \sim \tilde{X} = (Cu - xu_x - Kyu_y)\frac{\partial}{\partial u} + \cdots .$$

مثال ۷.۳.۳. *فرض کنید متغییر های x, t مستقل باشند مولد حرکت های گالیله ای و صورت متعارفی آن به صورت زیر نوشته می شود:*

$$X = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} \sim \tilde{X} = (1 - tu_x)\frac{\partial}{\partial u} + \cdots .$$

Iv. قضیه زیر همه عملگر های لی بکلاند هم ارز به گروه تبدیلات نقطه ای لی و گروه تبدیلات برخوردی لی را توصیف می کند.

قضیه ۸.۳.۳. *فرض کنید $m = 1$. سپس عملگر (۸۰.۳) با عملگر بی نهایت کوچك از یك تبدیل برخورد یك پارامتری هم ارز است اگر و فقط اگر توابع مختصاتی آن به صورت زیر باشند:*

$$\xi^i = \xi^i_1(x, u, u_{(1)}) + \xi^i_*, \quad \eta = \eta_1(x, u, u_{(1)}) + \xi^i_* u_i.$$

که $\xi^i_* \in \mathcal{A}$ یك تابع دیفرانسیلی دلخواه و ξ^i_1, ξ^i_2, η_1 توابع دیفرانسیلی دلخواه مرتبه اول هستند به طوریکه به $x, u, u_{(1)}$ بستگی دارند.

بعد از این مقدمه کوتاه راجع به تبدیلات و عملگر های لی بکلاند به سراغ مطلب اصلی می رویم.
ما طبقه معادلات تکامل به صورت

$$u_t = h(u)u_1 + \epsilon H, \quad H \in \mathcal{A}. \tag{۸۷.۳}$$

که به ویژه شامل معادلات $Korteweg - devries$ و $Burgers - Korteweg - devries$ است را در نظر می گیریم.

قضیه ۹.۳.۳. *معادله (۸۷.۳) تقریباً با هر درجه دقت همه تقارنهای معادله $Hopf$ را به ارث می برد*

$$u_t = h(u)u_1. \tag{۸۸.۳}$$

یعنی هر عملگر لی بکلاند متعارفی $X^0 = f^0(\frac{\partial}{\partial u}) + \cdots$ که توسط معادله (۸۸.۳) پذیرفته می شود به یك تقارن تقریبی از هر مرتبه دلخواه برای (۸۷.۳) منجر می شود. که توابع مختصاتی عملگر متعارفی $X = f(\frac{\partial}{\partial u}) + \cdots$ اینگونه تعیین می شوند

$$f = \sum_{i=0}^{p} \epsilon^i f^i \quad f^i \in \mathcal{A}. \tag{۸۹.۳}$$

اثبات. تقارنهای تقریبی (۸۹.۳) از معادله (۸۷.۳) از معادله تعیین (۵۳.۳) به دست می آیند، که در این حالت این معادلات شکل زیر را می گیرند:

$$f_t^0 - h(u)f_x^0 + \sum_{\alpha\geq 0}[D^\alpha(hu_1) - hu_{1+\alpha}]f_\alpha^0 - h'(u)u_1 f^0 = 0, \tag{۹۰.۳}$$

$$\begin{aligned} f_t^i - h(u)f_x^i &+ \sum_{\alpha\geq 0}[D^\alpha(hu_1) - hu_{1+\alpha}]f_\alpha^i - h'(u)u_1 f^i \\ &= \sum_{\alpha\geq 0}[D^\alpha(f^{i-1}H_\alpha - f_\alpha^{i-1}D^\alpha(H)], \quad i = 1,\cdots,p. \end{aligned} \tag{۹۱.۳}$$

معادله (۹۰.۳) در f^0 یك معادله مشخصه برای گروه دقیق از تبدیلات پذیرفته شده با (۸۸.۳) است. فرض کنید f^0 یك حل دلخواه از (۹۰.۳) که یك تابع دیفرانسیل پذیر از مرتبه $K_0 \geq 0$ است، باشد. و فرض کنید H یك تابع دیفرانسیل پذیر از مرتبه $n \geq 1$ باشد به طوریکه:

$$f_0 = f^0(t,x,u,\cdots,u_{k_0}), \quad H = H(t,x,u,\cdots,u_n).$$

ما به دنبال یك حل f^1 از معادله (۹۱.۳) می گردیم، که دیفرانسیل پذیر و از مرتبه $k_1 = n + k_0 - 1$ است. سپس (۹۱.۳) یك معادله مشتق جزئی مرتبه اول خطی از تابع f^1 از $K - 1 + 3$ آرگمان $t, x, u, u_1, \cdots, u_{k_1}$ است، ودر نتیجه حل پذیر می باشد. با جایگذاری هر حل $f^1(t,x,u,.u_1,\cdots u_{k_1})$ در طرف راست معادله(۹۱.۳) با $i = 1$ می توان فهمید که f^2 را می توان به صورت دیفرانسیل پذیر از مرتبه $k_2 = n + k_1 - 1$ یافت و معادله متناظر f^2 حل پذیر است. باقیمانده ضرایب $f^i, i = 3,\cdots,p$ به شکل بازگشتی به دست می آید و قضیه اثبات می شود. □

از قضیه ۹.۳.۳ نتیجه می گیریم،به ویژه هر تقارن نقطه ای از (۸۸.۳) که با عملگر بی نهایت کوچك زیر تعیین می شود:

$$\begin{aligned} Y = \theta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} &+ [\varphi(x+tu,u) - t\psi(x+tu,u) - u\theta(t,x,u)]\frac{\partial}{\partial x} \\ &+ \psi(x+tu,u)\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

با توابع مختصاتی دلخواه φ, ψ وθ و با عملگر های لی بکلاند متعارفی متناظر با توابع مختصاتی

$$f^0 = [\varphi(x+tu,u) - t\psi(x+tu,u)]u_1 - \psi(x+tu,u).$$

به طور تقریبی توسط معادله (۸۷.۳) پذیرفته می شود. برای مثال معادله $Burgers - Korteweg - devries$

$$u_t = uu_1 + \epsilon(au_3 + bu_2). \tag{۹۲.۳}$$

تا مرتبه $O(\epsilon^2)$ عملگر زیر را می پذیرد:

$$\begin{aligned} f_u &= \varphi(u)u_1 + \epsilon(a\varphi' u_3 + 2a\varphi'' u_1 u_2 + \frac{1}{2}a\varphi''' u_1^3 + b\varphi' u_2 + b\varphi'' u_1^2) \\ &+ \epsilon^2(\frac{3}{5}a^2\varphi'' u_5 + \frac{5}{4}ab\varphi'' u_4 + \frac{1}{10}ab\varphi''\frac{u_2u_3}{u_1} - \frac{1}{20}\varphi''\frac{u_2^3}{u_1^2} + \frac{2}{3}b^2\varphi'' u_3 \\ &+ \frac{9}{5}a^2\varphi''' u_1u_4 + 3a^2\varphi''' u_2u_3 + \frac{7}{2}ab\varphi''' u_1u_3 + \frac{23}{10}ab\varphi''' u_2^2 \\ &+ \frac{5}{3}b^2\varphi''' u_1u_2 + \frac{23}{10}a^2\alpha^{(4)}u_1^2u_3 + \frac{31}{10}a^2\varphi^{(4)}u_1u_2^2 + \frac{15}{4}ab\varphi^{(4)}u_1^2u_2 \\ &+ \frac{1}{2}b^2\varphi^{(4)}u_1^3 + \frac{8}{5}a^2\varphi^{(5)}u_1^3u_2 + \frac{1}{2}ab\varphi^{(5)}u_1^4 + \frac{1}{8}a^2\varphi^{(6)}u_1^5) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{۹۳.۳}$$

با جایگذاری $a = 1$ و $b = 0$ در (۹۳.۳) ما به تقارن تقریبی معادله مرتبه دوم $Korteweg - devries$ می رسیم

$$u_t = uu_1 + \epsilon u_3. \tag{۹۴.۳}$$

ما یاد آور می شویم که در این حالت ضرایب f^k از تقارنهای تقریبی (۸۹.۳) ، یك تابع دیفرانسیل پذیر از مرتبه $2k+1$ است که شامل مشتق های φ از مرتبه $\leq k$ می باشد. این به طور ضمنی بیان می کند که اگر $\varphi(u)$ چند جمله ای باشد ،سپس تقارن تقریبی یك تقارن لی بکلاند دقیق می شود؛ سپس ما می توانیم قرار دهیم $\epsilon = 1$ وبه تقارنهای دقیق از معادله

$$u_t = u_3 + uu_1. \tag{۹۵.۳}$$

برسیم. برای مثال برای $p = 2$ و $\varphi = u^2$ ما به اینکه $f_u = u^2u_1 + 4u_1u_2 + 2uu_3 + \frac{6}{5}u_5$ برای (۹۳.۳) می رسیم.

فصل ۴

کابرد تقارنهای تقریبی

با نظر به مطالب گفته شده در فصل سوم پایان نامه، در این فصل قصد داریم کاربردی برای تقارن های تقریبی ارائه دهیم. بدیهی است کاربرد این تقارن ها در یافتن جواب معادلاتی است که شامل یک پارامتر کوچک مانند ϵ است. برای درک بهتر در این فصل مطالب با چند مثال مهم بیان می شوند و سعی داریم با معرفی متغیرهای متعارفی و ساده تر کردن شکل اصلی معادله ، با چند بار انتگرال گیری معادله را قابل حل کرده، و جواب آن را بیابیم. لازم به ذکر است آنچه می آید همه کاربرد تقارن تقریبی نیست بلکه استنباط بنده از مختصر تحقیقی است که در این پایان نامه انجام شده است.

۱.۴ انتگرال گیری بااستفاده از تقارنهای تقریبی

با استفاده از مثال هایی راجع به روش های گروهی انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل با یك پارامتر کوچك با تقارنهای تقریبی بحث می کنیم.

مثال ۱.۱.۴. *معادله مرتبه دوم*

$$y'' - x - \epsilon y^2 = 0. \tag{۱.۴}$$

اگر $\epsilon \neq 0$ به عنوان یك ضریب ثابت در نظر گرفته شود، هیچ تقارن نقطه ای دقیقی ندارد و در نتیجه نمی تواند با روش لی انتگرال گرفته شود. و با عامل انتگرال گیر نیز نمی تواند انتگرال گرفته شود. ولی این معادله دارای تقارنهای تقریبی است اگر ϵ به عنوان یك پارامتر کوچك در نظر گرفته می شود

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\epsilon}{3}\left[2x^3\frac{\partial}{\partial x} + (3yx^2 + \frac{11}{20}x^5)\frac{\partial}{\partial y}\right], \\ X_2 &= x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\epsilon}{6}\left[x^4\frac{\partial}{\partial x} + (2yx^3 + \frac{7}{30}x^6)\frac{\partial}{\partial y}\right]. \end{aligned} \tag{۲.۴}$$

براکت عملگر های (۲.۴) ، $[X_1, X_2] \approx 0$ است. در نتیجه آنها یك لی جبر آبلی تقریبی ۲-بعدی تولید می کنند و می توانند برای انتگرال گیری پشت سر هم از معادله (۱.۴) استفاده شوند. معادلات $X_1(t) \approx 1$ و $X_1(u) \approx 0$ متغیر های متعارفی زیر را نتیجه می دهد.

$$t = y - \epsilon(\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{11}{60}yx^5), \quad u = x - \epsilon\frac{2}{3}yx^3. \tag{۳.۴}$$

برای X_1 از (۲.۴) بنابراین داریم $X_1 \approx \frac{\partial}{\partial t}$ و با بازنویسی معادله (۱.۴) با متغیر های جدید

$$u'' + uu'^3 + \epsilon[3u^2u' + \frac{1}{6}(u^2u')^2 - \frac{11}{60}u^6p^2) = 0.$$

که با انتگرال گیری و جایگذاری استاندارد داریم:

$$p' + up^2 + \epsilon(3u^2 + \frac{1}{6}u^4p - \frac{11}{60}u^6p^2) = 0. \quad (۴.۴)$$

و به این ترتیب عملگر دوم به صورت زیر نوشته می شود

$$X_2 = p^2\frac{\partial}{\partial p} + \epsilon[\frac{1}{2}u^4\frac{\partial}{\partial u} + (2u^3p - \frac{13}{15}u^5p^2)]\frac{\partial}{\partial p}.$$

و به تبدیل بی نهایت کوچك زیر تبدیل می شود

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial \nu}.$$

با مقدمه بالا متغیر مستقل جدید z و متغیر وابسته ν به صورت زیر تعریف می شوند:

$$z = u + \epsilon\frac{u^4}{2p}, \quad \nu = -\frac{1}{p} + \epsilon(\frac{u^3}{p^2} - \frac{13}{15}\frac{u^5}{p}). \quad (۵.۴)$$

با این متغیر های (۵.۴) معادله (۴.۴) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\nu' + z + \frac{11}{60}\epsilon z^6 = 0.$$

و نتیجه می دهد که:

$$\nu = -\frac{11}{60}z^2 - \frac{11}{420}\epsilon z^7 + C.$$

با جایگذاری این عبارت برای ν در معادلات (۵.۴) و حذف z، تابع $p(u)$ به دست می آید.

$$\int \frac{du}{p(u)} = t + C.$$

در ادامه با جایگذاری در معادلات وبا استفاده از (۳.۴) جواب تقریبی از معادله (۱.۴) به دست می آید.

۲.۴ انتگرال گیری با استفاده از تقارنهای پایدار

معادله $vanderpol$

$$y'' + y = \epsilon(y' - y'^3), \quad \epsilon = const. \quad (۶.۴)$$

اگر ϵ به عنوان یك ثابت در نظر گرفته شود،فقط یك تقارن نقطه ای دقیق دارد یعنی انتقال با مولد

$$X = \frac{\partial}{\partial x}.$$

از طرف دیگر می توان نشان داد که معادله (۶.۴) با یك پارامتر کوچك ϵ همه ۸ تقارن نقطه ای از معادله غیر اختلال

$$y'' + y = 0. \quad (۷.۴)$$

را به ارث می برد. پایداری همه تقارنها شرط لازم برای وجود یك تبدیل تقریبی مربوط به معادلات اختلال و غیر اختلال است. (تعریف ۸.۲.۳ را ببینید). می خواهیم از این شرایط برای انتگرال گیری از معادله $vanderpol$ با معادله مرتبه اول دقت استفاده کنیم. ویژگی

مشخصه معادله غیر اختلال (۶.۴) این است که همگن است و مولد زیر را می پذیرد:

$$X^0 = y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{۸.۴}$$

محاسبات نشان می دهد که اگرچه معادله اختلال (۶.۴)همگن نیست ولی یك تقارن تقریبی می پذیرد. مولد آن نیز به صورت زیر تغییر شکل می دهد:

$$X = y - \frac{\epsilon}{4}[y^2y' + 3xy(y^2+y'^2)]\frac{\partial}{\partial y}. \tag{۹.۴}$$

ما معادله (۷.۴) را وتقارن آن را به ترتیب به شکل زیر می نویسیم:

$$z'' + z = 0, \tag{۱۰.۴}$$

$$X^0 = z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{۱۱.۴}$$

حال به دنبال یك تبدیل تقریبی به شکل $y = z + \epsilon f$ برای معادله (۶.۴) به صورت (۱۰.۴)هستیم. ما با ساختن تبدیل های تقریبی ، با نگاشت عملگر (۱۱.۴) به عملگر (۹.۴) شروع می کنیم. سپس تبدیل ها را به شرط اینکه به معادلات (۱۰.۴) و (۶.۴) مربوط باشند، جایگذاری می کنیم. توجه داشته باشید که تقارن تقریبی (۹.۴) یك عملگر لی بکلاند وابسته به مشتق مرتبه اول y' است. ما تبدیل های تقریبی را به صورت زیر جستجو خواهیم کرد.

$$y = z + \epsilon f(x,z,z'). \tag{۱۲.۴}$$

عملگر (۱۱.۴) برحسب متغیر y داده شده با (۱۲.۴) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\bar{X}^0 = X^0(y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

پس داریم:

$$X^0(y) = \left[z\frac{\partial}{\partial z} + z' + \frac{\partial}{\partial z'}\right](z + \epsilon f(x,z,z')) = z + \epsilon\left[z\frac{\partial f}{\partial z} + z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right].$$

چون $\bar{x}^0$ باید با عملگر (۹.۴) یکی باشد،در نتیجه داریم:

$$z + \epsilon\left[z\frac{\partial f}{\partial z} + z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right] = y - \frac{\epsilon}{4}[y^2y' + 3xy(y^2+y'^2)].$$

با جایگذاری عبارت (۱۲.۴) در طرف راست این معادله و توجه به این که $y = z$ تا جمله های مرتبه ϵ ،ما به این نتیجه می رسیم که:

$$z + \epsilon\left[z\frac{\partial f}{\partial z} + z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right] = z + \epsilon\{f - \frac{1}{4}[z^2z' + 3xz(z^2+z'^2)]\}.$$

به طوریکه

$$z\frac{\partial f}{\partial z} + z'\frac{\partial f}{\partial z'} = f - \frac{1}{4}[z^2z' + 3xz(z^2+z'^2)]. \tag{۱۳.۴}$$

بیایید معادله دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه اول غیر همگن (۱۳.۴) را حل کنیم. معادله نخست از دستگاه مشخصه

$$\frac{dz}{z} = \frac{dz'}{z'} = \frac{df}{f - \frac{1}{4}[z^2z' + 3xz(z^2+z'^2)]}.$$

با جایگذاری $z' = \lambda z$، ما معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول خطی زیر را برای f به دست می آوریم:

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{z}f - \frac{1}{4}[\lambda z^2 + 3x(1+\lambda^2)z^2].$$

انتگرال گیری نتیجه می دهد

$$f = -\frac{1}{8}[k(x)z + \lambda z^3 + 3xz(1+\lambda^2)z^2].$$

که ثابت انتگرال $k(x)$ یك تابع دلخواه از x است. با جایگذاری $\lambda z = z'$ ما به دست می آوریم:

$$f = -\frac{1}{8}[k(x)z + z^2 z' + 3xz(z^2 + z'^2)].$$

سرانجام به تبدیل زیر می رسیم (۱۲.۴) که عملگر (۱۱.۴) را به (۹.۴) نگاشت می کند:

$$y = z - \frac{\epsilon}{8}[k(x)z + z^2 z' + 3xz(z^2 + z'^2)]. \tag{۱۴.۴}$$

چون $y = z$ تامرتبه ϵ، وارون تبدیل (۱۱.۴) در مرتبه اول تقریب اینگونه داده می شود:

$$z = y + \frac{\epsilon}{8}[k(x)y + y^2 y' + 3xy(y^2 + y'^2)]. \tag{۱۵.۴}$$

حال $k(x)$ را تعیین می کنیم به طوریکه (۱۴.۴) معادله (۱۰.۴) را به معادله (۶.۴) نگاشت می کند. (۱۵.۴) را در معادله (۱۰.۴) جایگذاری می کنیم چون $y = z$ تا جملات مرتبه ϵ ، معادله $z'' = -z$ نتیجه می دهد که $y'' = -y$ البته باز تا مرتبه ϵ بنابر این از (۱۵.۴) داریم

$$z' = y' + \frac{\epsilon}{8}[k(x)y' + k'(x)y + 2y^3 + 5yy'^2 + 3x(y^2 y' + y'^3)],$$
$$z'' = y'' + \frac{\epsilon}{8}[2k'(x)y' + k''(x)y - k(x)y - y^2 y' + 8y'^3 - 3xy(y^2 + y'^2)].$$

درنتیجه

$$z'' + z = y'' + y + \frac{\epsilon}{8}[8y'^3 + 2k'(x)y' + k''(x)y].$$

این نشان می دهد که اگر قرار دهیم $k(x) = -4x$ما معادله (۶.۴) را به دست می آوریم. بنابراین ما به نگاشت تبدیل معادله (۱۰.۴) به معادله (۶.۴) رسیده ایم.

$$y = z + \frac{\epsilon}{8}[4xz - z^2 z' - 3xz(z^2 + z'^2)]. \tag{۱۶.۴}$$

با جایگذاری حل کلی $z = A\cos t + B\sin t$ در معادله (۱۶.۴) ما به حل تقریبی از معادله $vanderpol$ (۶.۴) می رسیم.

$$y = Acosx{+}Bsinx + \frac{\epsilon}{8}[(4 - 3(A^2 + B^2))x(A\cos x + B\sin x)$$
$$+ (A\sin x - B\cos x)(A\cos x + B\sin x)^2]. \tag{۱۷.۴}$$

اینجا اگر قرار دهیم $A = 1$ ، $B = 0$ و سپس قرار دهیم $A = 0$ ، $B = 1$ به مجموعه حل های پایه ای $z_1 = \cos x$ و $Z_2 = \sin x$ از معادله خطی $z'' + z = 0$ می رسیم. بنابر این حل های تقریبی ویژه از معادله (۶.۴) را به دست می آوریم:

$$y_1 = \cos x + \frac{\epsilon}{8}[x\cos x + \sin x\cos^2 x],$$
$$y_2 = \sin x + \frac{\epsilon}{8}[x\sin x - \cos x\sin^2 x].$$

۳.۴ حل های ناوردای تقریبی

مثال ۱.۳.۴. معادله زیر از فصل سوم را دوباره در نظر بگیرید:

$$u_{tt} - (u^2 u_x)_x + \epsilon u_t = 0. \qquad (۱۸.۴)$$

باتقارنهای تقریبی شناخته شده (۷۱.۳) و پیدا کردن حل های ناوردای تقریبی بنا شده روی تقارن تقریبی $X = X_3 - X_4$ با X_3 ، X_4 از (۷۱.۳) داریم:

$$X = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\epsilon}{6}\left(t^2\frac{\partial}{\partial t} - 2tu\frac{\partial}{\partial u}\right). \qquad (۱۹.۴)$$

ناوردای تقریبی برای عملگر (۱۹.۴) به صورت زیر نوشته می شود.

$$J(t, x, u, \epsilon) = J^0(t, x, u) + \epsilon J'(t, x, u) + O(\epsilon).$$

که با معادله $X(J) = O(\epsilon)$ می شوند. اگر از نماد زیر برای عملگر (۱۹.۴) استفاده کنیم

$$X = X^0 + \epsilon X^1.$$

که

$$X^0 = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X^1 = \frac{1}{6}\left(t^2\frac{\partial}{\partial t} - 2tu\frac{\partial}{\partial u}\right).$$

ما معادله مشخصه را برای ناورداهای تقریبی به صورت زیر خواهیم نوشت:

$$X^0(J^0) + \epsilon[X^0(J^1) + X^1(J^0)] = 0.$$

در نتیجه

$$X^0(J^0) = 0, \quad X^0(J^1) + X^1(J^0) = 0.$$

یا

$$\begin{aligned} & t\frac{\partial J^0}{\partial t} - u\frac{\partial J^0}{\partial u} = 0, \\ & t\frac{\partial J^1}{\partial t} - u\frac{\partial J^1}{\partial u} = -\frac{1}{6}\left(t^2\frac{\partial J^0}{\partial t} - 2tu\frac{\partial J^0}{\partial u}\right). \end{aligned} \qquad (۲۰.۴)$$

با حل معادلات (۲۰.۴) ما دو ناوردای مستقل تابعی زیر را برای عملگر (۱۹.۴) پیدا خواهیم کرد.

$$\begin{aligned} J_1 &= J_1^0(t, x, u) + \epsilon J_1^1(t, x, u), \\ J_2 &= J_2^0(t, x, u) + \epsilon J_2^1(t, x, u). \end{aligned} \qquad (۲۱.۴)$$

ملاحظه ۲.۳.۴. یادآوری می کنیم که توابع (۲۱.۴) وابسته تابعی گفته می شوند اگر $J_2 = \psi(J_1)$ ،به عبارت دیگر اگر معادله

$$J_2^0(t, x, u) + \epsilon J_2^1(t, x, u) = \psi(J_1^0(t, x, u) + \epsilon J_1^1(t, x, u)) + O(\epsilon).$$

اگر چنانچه تابع ψ وجود نداشته باشد توابع (۲۱.۴) مستقل تابعی گفته می شوند. واضح است که اگر توابع $J_1^0(t, x, u)$ و $J_2^0(t, x, u)$ مستقل تابعی باشند، توابع (۲۱.۴) نیز اینگونه هستند

معادله اول در (۲۰.۴) مختصراً دو حل مستقل تابعی دارد یعنی $J_1^0 = x, J_2^0 = tu$ با جایگذاری $J_1^0 = x$ در دومین معادله در (۲۰.۴) و با در نظر گرفتن ساده ترین حل $J_1^1 = 0$ یك ناوردا در (۲۱.۴) به دست می آوریم.

$$J_1 = x. \tag{۲۲.۴}$$

توجه کنید که آن متغیر وابسته u را در گیر نمی کند. حال ما حل $J^0 = tu$ از معادله نخست در (۲۰.۴) را در دومین معادله (۲۰.۴) جایگزین می کنیم و معادله خطی غیر همگن زیر را به دست می آوریم:

$$t\frac{\partial J_2^1}{\partial t} - u\frac{\partial J_2^1}{\partial u} = \frac{1}{6}t^2 u.$$

معادله نخست از دستگاه مشخصه

$$\frac{dt}{t} = -\frac{du}{u} = 6\frac{dJ_2^1}{t^2 u}.$$

جواب نخست $tu = \lambda = const$ را نتیجه می دهد. بنابراین دومین معادله

$$\frac{dt}{t} = 6\frac{dJ_2^1}{t^2 u}.$$

از دستگاه مشخصه با جایگذاری tu با λ ،به صورت $\lambda dt = 6dJ_2^1$ نوشته می شود و نتیجه می دهد

$$J_2^1 = \frac{1}{6}t\lambda + C = \frac{1}{6}t^2 u + C.$$

قرار می دهیم $C = 0$، و دومین معادله ناوردا را در (۲۱.۴) به دست می آوریم

$$J_2 = tu + \frac{\epsilon}{6}t^2 u. \tag{۲۳.۴}$$

با توجه به نکته ۲.۳.۴ ناورداهای (۲۲.۴) و (۲۳.۴) مستقل تابعی هستند. با جایگذاری $J_2 = \varphi(J_1)$ به طوریکه

$$(1 + \frac{\epsilon}{6}t)tu = \varphi(x).$$

و حل برای tu در مرتبه اول دقت

$$tu = (1 + \frac{\epsilon}{6}t)^{-1}\varphi(u) = (1 - \frac{\epsilon}{6}t)\varphi(x) + O(\epsilon).$$

ما شکل زیر را برای حل های ناوردای تقریبی به دست می آوریم:

$$u = (\frac{1}{t} - \frac{\epsilon}{6})\varphi(x). \tag{۲۴.۴}$$

ما (۲۴.۴) رادر معادله (۱۸.۴) جایگذاری می کنیم. با دیفرانسیل گیری از (۲۴.۴) نتیجه می گیریم:

$$u_t = -\frac{1}{t^2}\varphi, \quad u_{tt} = \frac{2}{t^3}\varphi, \quad u_x = (\frac{1}{t} - \frac{\epsilon}{6})\varphi'.$$

به علاوه

$$u^2 u_x = (\frac{1}{t} - \frac{\epsilon}{6})^3 \varphi^2\varphi' = (\frac{1}{t^3} - \frac{\epsilon}{2t^2})\varphi^2\varphi' + O(\epsilon).$$

و درنتیجه در تقریبمان به دست می آوریم:

$$(u^2 u_x)_x = (\frac{1}{t^3} - \frac{\epsilon}{2t^2})(\varphi^2\varphi')'.$$

پس:

$$u_{tt} - (u^2 u_x)_x + \epsilon u_t = \frac{1}{t^3}(1 - \frac{\epsilon}{2}t)[2\varphi - (\varphi^2\varphi')'].$$

بنابر این معادله (۱۸.۴) نتیجه می دهد:

$$(\varphi^2\varphi')' = 2\varphi. \tag{۲۵.۴}$$

حال بیایید از معادله (۲۵.۴) انتگرال بگیریم

$$\varphi^2\varphi'' + 2\varphi\varphi'^2 = 2\varphi.$$

یا

$$\varphi\varphi'' + 2\varphi'^2 = 2.$$

معادله اخیر به یك معادله مرتبه اول كاهش می یابدبا جایگذاری استاندارد $\varphi' = p(\varphi)$ چون $\varphi'' = pp'$ ما داریم:

$$\varphi pp' + 2p^2 = 2.$$

یا

$$\varphi\frac{dp^2}{d\varphi} + 4p^2 = 4.$$

حال ما نشان می دهیم $p^2 = \nu$ ،از معادله خطی $\varphi\frac{d\nu}{d\varphi} + 4\nu = 4$ انتگرال می گیریم و به دست می آوریم $\nu = 1 + C\varphi^{-4}$، معادله $p = \pm\sqrt{\nu}$ نیجه می گیریم:

$$p = \pm\sqrt{1 + C\varphi^{-4}}.$$

بنابراین

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm\sqrt{1 + C\varphi^{-4}}.$$

و انتگرال گیری حل کلی معادله (۲۵.۴) به صورت زیر را نتیجه می دهد:

$$\int\frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{\varphi^4 + C}} = C \pm x. \tag{۲۶.۴}$$

با جایگذاری $\varphi(x)$ در (۲۴.۴)که با حل (۲۶.۴) به دست می آید. ما حل ناوردای معادله (۱۸.۴) را به دست می آوریم. برای مثال با قرار دادن $C = 0$ ما شکل $\varphi(x) = \pm x$ را داریم و حل ناوردای (۲۴.۴) اینگونه است:

$$u = \pm(\frac{x}{t} - \epsilon\frac{x}{6}).$$

Abstract

In this article,a new theory named approximate symmetry is introduced.this theory is developed on approximate group analysis of differential equations with a small parameter.

Methods of mathematical of classical group analysis enable one to distinguish among all equation of mathematical physics the equations that are remarkable with respect to their symmetry properties.Ofcourse any small perturbation of an equation disturbs the group admitted.Therefore,it became necessary to work out group analysis methods that are stable under small perturbations of the differential equations.In this article we develop such a method that is based on the concepts of an approximate group of transformations and approximate symmetries.

An approximate Lie theorem is proved that enables one to construct approximate symmetries that are stable under small perturbations of differential equations.

Keywords: *Approximate symmetry,Differential equation,Frame, Generator,Group action,Invariant,Infinitesimal Transformation,Lie equation,Lie algebra, symmetry , symmetry group*

نمادهای بکار رفته

انتگرال .... $\int$
تساوی تقریبی .... $\approx$
ضرب .... $\prod$
فاکتوریل .... $!$
کروشه لی .... $[X, X']$
مجموع .... $\sum$
مشتق جزئی .... ∂
مشتق کلی .... D
هم ارزی .... $\equiv$

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آنالیز گروه لی	Lie Group Analysis
بی نهایت کوچك	Infinitesimal
تابع دیفرانسیلی	Differential Function
تابع ناوردا	Invariant Function
تبدیل تقریبی	Approximate Transformation
تساوی تقریبی	Approximate Equality
تقارن تقریبی	Approximate Symmetry
تقریبی	Approximate
جابه جاگر،کروشه	Commutator
جبر لی	Lie Algebra
جبرلی تقریبی	Approximate Lie Algebra
جواب تقریبی	Approximate Integration
حل تقریبی	Approximate Solution
حل ناوردای تقریبی	Approximate Invariant Solution
حل ناوردا	Invariant Solution
روش انتگرال گیری لی	Lie's Integration Method
عامل انتگرال گیری لی	Lie's Integrating Factor
گروه یك پارامتری	One Parameter Group
گروه تقارن	Symmetry Group
لی بك لاند	Lie Backlund
مستقل تابعی	Functionally Independent
معادله اختلال	Perturbed Equation
معادله غیر اختلال	Unperturbed Equation
معادلات تقریبی لی	Approximate Lie Equations
معادله دیفرانسیل	Differential Equation
معادله kdv	korteweg De Vries Equation
معادله لی	Lie Equation
معادله $maxwell$	Max Well Equation
معادله $vanderpol$	Van Der Pol Equation
معادله غیر خطی موج	Nonlinear Wave Equation
معادله مشخصه	Determining Equation
متغیر های متعارفی	Canonical Variables
مولد گروه تقریبی	Approximate Group Generator
ناوردای تقریبی	Approximate Invariant
نگاشت نمایی تقریبی	Approximate Exponential Map

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

گروه پذیرفته شده ... *AdmissibleGroup*
تقریبی ... *Approximate*
قانون بقای تقریبی ... *ApproximateConservationLaw*
تساوی تقریبی ... *ApproximateEquality*
نگاشت نمایی تقریبی ... *ApproximateExponentialMap*
مولد گروه تقریبی ... *ApproximateGroupGenerator*
جواب تقریبی ... *ApproximateIntegration*
حل ناوردای تقریبی ... *ApproximateInvariantSolution*
لی جبر تقریبی ... *ApproximateLieAlgebra*
معادله لی تقریبی ... *ApproximateLieEquations*
حل تقریبی ... *ApproximateSolution*
تقارن تقریبی ... *ApproximateSymmetry*
تبدیل تقریبی ... *ApproximateTransformation*
متغیر های کانونی ... *CanonicalVariables*
طبقه بندی ... *Classification*
جابه جا گر،کروشه ... *Commutator*
معادله مشخصه ... *DeterminingEquation*
تابع دیفرانسیلی ... *DifferentialFunction*
معادله *kdv* ... *kortewegDeVriesEquation*
معادله لی ... *LieEquation*
معادله *maxwell* ... *MaxWellEquation*
معادله غیر خطی موج ... *NonlinearWaveEquation*
معادله اختلال ... *PerturbedEquation*
معادله غیر اختلال ... *UnperturbedEquation*
معادله *vanderpol* ... *VanDerPolEquation*
مستقل تابعی ... *FunctionallyIndependent*
گروه یك پارامتری ... *OneParameterGroup*
عامل انتگرال گیری ... *IntegrationFactor*
معادله ناوردا ... *InvariantEquation*
تابع ناودا ... *InvariantFunction*
ناودا تقریبی ... *InvariantSolution*
بی نهایت کوچك ... *Infinitesimal*
جبر لی ... *LieAlgebra*
معادله لی ... *LieEquation*
آنالیز گروهی لی ... *LieGroupAnalysis*
عامل انتگرال گیری لی ... *Lie′sIntegratingFactor*
روش انتگرال گیری لی ... *Lie′sIntegrationMethod*
لی بك لاند ... *LieBacklund*
امتداد ... *Prolongation*
حل ناوردای تقریبی ... *ApproximatelyInvariantSolution*
زیر جبر ... *Subalgebra*
تقارن ... *Symmetry*
گروه تقارن ... *SymmetryGroup*
تبدیلات گالیله ای ... *GalileanTransformation*
معادله *vanderpol* ... *VanDerpolEquation*
متغیر های کانونی ... *CanonicalVariables*

نمایه

کتاب‌نامه

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/IUST

[2] Nail H. Ibragimov. and Vladimir F. Kovalev. Approximate and Renormgroup Symmetries, ALGA publications, Karlskrona, 2009,pp.1-73.

[3] A.V. Backlund. Ueber Flächentransformationen. Mathematische Annalen, IX:297-320, 1876. English translation surface transformation In: Lie group analysis: Classical heritage, ed. N.H.Ibragimove, ALGA Publications,Karlskrona, 2004, pp. 103-121.

[4] N.H.Ibragimove. Sur l' équisalence des équations d' évolution, qui admettent une algébre de Lie -Bäcklund infinie. C.R.Acad. Sci. Paris, Sér. I, 293:657-660, 1981. Reprinted in: N.H.Ibragimove, selected works, Vol. I, ALGA pubications, Kariskrona. 2006, papar 19, pp. 183-187.

[5] N.H. Ibragimov. Transformation groups in mathematical physics. Nauka, Moscow, 1983. English transl., Transformation groups applied to mathematical physics, Riedel, Dordrecht, 1985.

[6] N.H. Ibragimov. Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics (for the 150th anniversary of sophus Lie). Uspekhi Mat. Nauk, 47, No. 4:83-144, 1992. ENglish transl., Russian Math. Surveys, 47:2 (1992), 89-156. Reprinted in: N.H. Ibragimov, Selected Works, Vol.I, ALGA Publications, Karlskrona. 2006, Paper 21.

[7] N.H. Ibragimov, editor. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol. 2: Applications in engineering and physical sciences. CRC Press Inc., Boca Raton, 1995.

[8] N.H. Ibragimov, editor. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol. 3: New trends in theoretical developments and computational methods. CRS Press Inc., Boca Raton, 1996.

[9] N.H. Ibragimov. Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations. John Wiley & Sons, Chichester, 1999.

[10] N.H. Ibragimov. A practical course in differential equations and mathematical modelling. ALGA Publications, Karlskrona, 2nd edition, 2005.

[11] S.Lie Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse lineare partieller Differentialgleichungen. Archiv for Matematik og Naturvidenskab (Abbr. Arch. for Math), 6, Heft 3:328-368, 1881. English transl., CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 2: Applications in Engineering and Physical Sciences, ed. N.H. Ibragimov, CRC Press, Boca Roton, 1995. Reprinted also in the book Lie group analysis: Classical heritage, ed. N.H. Ibragimov, ALGA publications, Karlskrona, 2004,pp. 1-64.

[12] S.Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformation. (Bearbeited und herausgegeben von Dr.G. Scheffers), B.G. Teubner, Leipzig, 1891.

[13] V.A.Baikov,R,K.Gazizov,andN.H.Ibragimov . Approximate symmetries . Math.Sbornik ,136(178) , no.3:435-450,1988.English trans1.,Math.USSR Sb.,64(1989),No.2,pp.427-441.

[14] V.A. Baikov, R.K. Gazizov, and N.H. Ibragimov. Approximate symmetries and conservation laws. Trudy Matem. Inst. Steklova, 200:35-45, 1991. English transl. by AMS, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No.2 (1993), pp.35-47.

[15] N.H.Ibragimov,editor. CRC Hndbook of Lie group analysis of differential equations. Vol.3: New trends in theoretical developments and computational methods. CRC press Inc., Boca Raton, 1996.

[16] N.H.Ibragimov. Perturbation methods in group analysis. In Differential equations and chaos, pages 41-60, New Dehli, 1996. New Age International Publishers. Reprinted in: N.H.Ibragimov, Selected Works, Vol.II, ALGA Publications, Karlskrona. 2006, Paper 12.

[17] N.H.Ibragimov. Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations. John Wiley & Sons, Chichester, 1999.

[18] peter J.Olver . Applications of Lie Groups to Differential Equations .Univercity of Minnesota Minneapolis , MN 55455 USA.

Iran University of Science and Technology

School of Mathematics

Department of Pure Mathematics

Master of Science Thesis

Topic

APPROXIMATE SYMMETRIES

By

Saeede Rashidi

Supervisor

Dr.Mehdi Nadjafikhah

september 2011