دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج
دانشکده علوم- گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه دکتری Ph.D

گرایش
هندسه و توپولوژی

عنوان

گروههای تبدیلات لی و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مستخرج از مکانیک سیالات

استادان راهنما
دکتر مگردیچ تومانیان و دکتر مهدی نجفی‌خواه

استاد مشاور
دکتر مهدی علائیان

نگارش
وحید شیروانی شاه عنایتی

زمستان ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیر و تشکر

خداوند بزرگ را سپاس می گویم که فرصت تحصیل علم و دانش برایم فراهم آمد تا بتوانم در حد تواناییهای خود از این سرچشمه معرفت بهرمند شوم.

بر خود لازم می دانم که سپاس بی پایان خود و خانواده‌ام را از استاد گرانقدر، مهربان و دانشمندم جناب آقای پرفسور مگردیچ تومانیان اعلام دارم که در این مقطع تحصیلی و همچنین در طی دوره کارشناسی ارشد با راهنمایی های صحیح، دلسوزانه و راهگشا مسیری درست، هدفمند و هموار را پیش رویم نهاد تا بتوانم آن را طی کرده و در صورت امکان به یاری خداوند اندوختهٔ ناچیزم را در اختیار آیندگان و کسانی که بنده افتخار معلمی آنها را خواهم داشت قرار دهم.

همچنین سپاس و قدردانی ویژهٔ خود را خدمت استاد بزرگوار و عالم جناب آقای دکتر مهدی نجفی خواه ابراز میدارم که با راهنمایی های مفید و به روز خود مسیر جدیدی از علم و دانش را در پیش روی من قرار دادند و همواره با صبر و دقت فراوان پاسخگوی سوالات اینجانب بوده اند.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر مهدی علائیان که زحمت مشاوره رساله را بر عهده داشته اند صمیمانه تشکر می نمایم.

از اساتید گرامی آقایان دکتر سید رضا حجازی، دکتر احمدرضا فروغ و جناب آقای دکتر رضا عزتی که زحمت داوری این رساله را بر عهده گرفتند نهایت سپاسگزاری را داشته و از نظرات سودمندشان کمال تشکر را دارم.

در پایان نهایت احترام و ارادت خود را به خانواده عزیزم، مخصوصاً همسر مهربانم که در این مسیر از هیچ فداکاری دریغ نکرده و همواره یار و همراه من بوده، ابراز می دارم.

وحید شیروانی
زمستان ۹۱

تقدیم به

همسر عزیز و مهربانم

فهرست مطالب

چکیده

در این رساله، روش تقارن لی را برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به منظور یافتن انواع گروههای تقارنی، جوابهای ناوردا، جوابهای دقیق و جوابهای عمومی مورد مطالعه قرار می دهیم. با یافتن نمایش الحاقی از گروه تقارنهای بدست آمده روی جبرهای لی متناظر آنها، طبقه بندی از جوابهای ناوردا را خواهیم یافت، به این منظور که بقیه چنین جوابهایی را می توان از آن بدست آورد. روشهای مختلف یافتن قوانین بقا معادلات دیفرانسیل مورد بررسی قرار خواهند گرفت و در نهایت روشی بهینه برای محاسبه قوانین بقا ارائه می گردد. در پایان ارتباط بین تقارنها و قوانین بقا را برای یافتن قوانین بقا جدید مطالعه خواهیم کرد.

کلمات کلیدی: *معادلات دیفرانسیل، گروههای تبدیلات لی، تقارن لی، جوابهای ناوردا، قوانین بقا.*

مقدمه

در اواخر قرن نوزدهم سوفوس لی حل معادلات دیفرانسیل را توسط گروههای تقارنی و ناورداهای تولید شده توسط آنها مورد بررسی قرار داد، ایده این کار از آنجا شکل گرفته بود که گالوا از گروه های جبری برای حل معادلات جبری استفاده کرده بود. این روش که مبتنی بر انتگرالگیری از معادلات دیفرانسیل است لی را بر آن داشت تا توان اعجاب انگیز خود را صرف گسترش نظریهٔ معادلات دیفرانسیل بر اساس مفهوم گروههای لی کند. زیرا این گروهها علاوه بر کاربردهایی که در ریاضیات محض و کاربردی دارند در فیزیک، مهندسی و سایر علوم پایه نیز به کار گرفته می شوند. شاخه‌هایی چون توپولوژی جبری، هندسهٔ دیفرانسیل، نظریهٔ ناورداها، نظریهٔ انشعاب، توابع خاص، آنالیز عددی، نظریهٔ کنترل، مکانیک کلاسیک و کوانتوم، نسبیت و ... به شدت با گروههای لی و کاربردهای آن سروکار دارند و هر کس که به یکی از این علوم اشراف داشته باشد جالب است که بداند که منبع اصلی کاربرد گروههای لی در این رشته‌ها معادلات دیفرانسیل است. البته شایان ذکر است که گروههای لی در بیشتر مواقع با دیدگاه محض خود در ریاضیات به کار برده نمی شوند، بلکه گاهی اوقات تحت عنوان گروه تقارنی یک دستگاه دینامیکی از معادلات دیفرانسیل ظاهر می شوند که بسیاری از ویژگیهای ریاضی آن مثل حلپذیری، نیم-سادگی و ... به طور مستقیم یا غیر مستقیم رفتار دستگاه را تحلیل می کنند.

بنیاد کاربرد گروههای لی بر عمل آن روی فضای حالت فیزیکی مفروض است که در بیشتر مواقع این عمل غیرخطی و موضعاً حول عضو همانی گروه می باشد. کاربرد گروههای لی در معادلات دیفرانسیل نخستین بار توسط لی و نوتر بنیانگذاری شد و الی کارتان اولین بار آن را به سبک امروزی خود در هندسهٔ دیفرانسیل معنا بخشید. از آن به بعد تلاشهای گسترده‌ای در تعمیم کاربرد گروههای لی انجام شد به طوریکه افرادی همچون اووزیاناکوف مدرسه‌ای در این زمینه در اتحاد جماهیر شوروی بنا نهاد.

اگر خواسته باشیم به طور اجمالی در مورد گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل صحبت کنیم، می توان گفت که این گروهها شامل تبدیلاتی هستند که جوابهای دستگاه را به هم تبدیل می کنند. از دیدگاه لی تقارنها تبدیلاتی هندسی هستند که روی فضای شامل متغیرهای مستقل و وابستهٔ دستگاه عمل کرده و روی جوابهای دستگاه با تبدیلاتی که روی گراف آنها اعمال کرده، عمل می کند. این گروهها را می توان از یک حیث به دو دستهٔ گروههای تقارنی شامل تبدیلات پیوسته (که موضوع مورد مطالعهٔ این رساله است.) و گروههای تقارنی شامل تبدیلات گسسته رده بندی کرد. اما بزرگترین مزیت دستهٔ اول به دستهٔ دوم صریح شدن محاسبات در خلال کار است، بدین معنا که روند محاسبات اگرچه ممکن است در برخی مواقع بسیار پیچیده باشد، اما ابزار محاسبه

ابزارهای کلاسیک حساب دیفرانسیل و انتگرال است. با این وجود این مسئله چیزی از اهمیت گروههای گسسته در معادلات دیفرانسیل نمی کاهد[1]، بلکه کار با آنها نیازمند روشهای آنالیزی غیر کلاسیک متفاوتی است.

یکی از مهمترین اکتشافات لی در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل آن است که وی توانست نشان دهد که می توان شرایط غیرخطی پیچیدهٔ حاکم بر یک دستگاه دینامیکی را بوسیلهٔ ناوردایی بینهایت کوچک آن دستگاه تحت مولدهای گروه تقارنش موضعاً به شرایطی خطی مبدل کرد که در فیزیک از اهمیت به سزایی برخوردار است. این امر منجر به کارگیری کامپیوتر و نرم افزارهای بسیاری در این زمینه گشت زیرا کار با گروههای پیوسته دارای محاسباتی است که از روندی الگوریتمی پیروی می کند.

داشتن گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مزیتهای بسیاری دارد که از جملهٔ آن می توان به طبقه‌بندی جوابهای دستگاه معادلات دیفرانسیل اشاره کرد. این رده‌بندی اینگونه است که هر دو جوابی را در یک دسته درنظر می گیریم که بوسیلهٔ برخی از مولدهای گروه تقارن قابل تبدیل به هم باشند. از دیگر استفاده‌هایی که از این گروهها می شود آن است که معادلات دیفرانسیل را می توان براساس پارامتر یا تابعی دلخواه طبقه‌بندی کرد.

اگر با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی درگیر باشیم، گروه تقارنی به ما کمک می کند تا با کاهش مرتبه معادله، جواب را با یک بار انتگرالگیری بدست آوریم و در حالتیکه معادلهٔ مورد نظر مرتبه اول باشد جواب عمومی نیز بدست خواهد آمد. اما متأسفانه چنین چیزی در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی برقرار نیست، یعنی جواب عمومی چنین معادلاتی را نمی توان لزوماً با داشتن گروه تقارنها بدست آورد (مگر در حالتیکه دستگاه قابل تبدیل به یک دستگاه خطی باشد). در این شرایط تنها برخی از جوابها بدست می آیند که تحت برخی از زیرگروههای گروه تقارن ناوردا هستند. این جوابها که در فصل سوم به آن خواهیم پرداخت، به جوابهای ناوردای گروهی مشهورند که شامل تعداد متغیر مستقل کمتری نسبت به دستگاه اصلی هستند.

از دیگر کاربردهای گروه تقارن قوانین بقاء در فیزیک است. نوتر در سال ۱۹۱۸ دو قضیهٔ مهمی را ارائه داد که ارتباط بین گروههای تقارن یک انتگرال تغییرات با ویژگیهای معادلات اویلر-لاگرانژ را نشان می داد. او در قضیهٔ اول نشان داد که چگونه گروههای تقارن تغییرات یک پارامتری منجر به تولید قوانین بقاء برای معادلات اویلر-لاگرانژ می شوند. مثلاً قوانین بقاء انرژی یک مسئلهٔ ناوردایی تحت تقارن انتقال نسبت به زمان است در حالیکه بقاء گشتاور خطی و زاویه‌ای یک مسئلهٔ ناوردایی تحت تبدیلات انتقال و دوران است. در فصل چهارم مرجع [۷۰] می توان دید که چگونه در قضیهٔ نوتر از ویژگیهای هندسی تقارنها استفاده می شود.

از دیگر کارهای نوتر برقرار کردن یک تناظر یک به یک میان گروههای تقارن و قوانین بقاء است. این تناظر منجر به ارائه نوعی از تقارنها به نام تقارنهای تعمیم یافته گردید که در فصل دوم مختصری به آن اشاره کرده‌ایم. تفاوت اصلی این تقارنها با تقارنهای هندسی در آن است که علاوه بر آنکه به متغیرهای مستقل و وابسته بستگی دارند در آنها مشتقات متغیرهای وابسته نیز ظاهر می شوند. هر گروه یک پارامتری یک مسئله تغییراتی که چه از تقارنهای هندسی یا تقارنهای تعمیم یافته نشأت بگیرد می تواند منجر به تولید قوانین بقاء گردد و به طور معکوس هر قانون بقائی را می توان به یک مسئله تغییراتی این تقارنها نظیر کرد. انواع دیگری از تقارنها برحسب نیاز

[1] D.A. Hejhal, Monodromy groups and linearly polymorphic functions, *Acta Math.* 135 (1975), 1-55.

ساخته شدند که از مهمترین آنها می شود به تقارنهای برخوردی اشاره کرد که در فیزیک و مکانیک بسیار کاربرد دارد، تقارنهایی مانند تقارن ضعیف، تقارنهای آینه‌ای، تقارنهای غیر کلاسیک و ... نیز وجود دارند، که هرکدام می تواند زمینه تحقیقاتی مناسبی برای علاقه مندان باشد.

در مطالعه معادلات دیفرانسیل قوانین بقاء دارای فواید زیادی می باشند. آنها کمیتهای فیزیکی از قبیل، جرم، انرژی، تکانه، تکانه زاویه ای، همچنین بار الکتریکی و ثابتهای حرکت را توضیح می دهند. آنها برای تحقیق انتگرال پذیری، نگاشتهای خطی و برای اثبات وجود و یکتایی جوابها مهم هستند، همچنین برای آنالیز پایداری و رفتار عمومی جوابها استفاده می شوند. بعلاوه، آنها نقش اساسی در توسعه روشهای عددی دارند و نقش مهمی در نقطه شروع یافتن دستگاههای وابسته غیر موضعی و متغیرهای پتانسیلی برعهده دارند.

قانون بقاء یک معادله ریاضی است، که چگونگی تاثیر یک کمیت توسط شار را بیان می کند. دلایل زیادی برای محاسبه چگالی و شارهای یک دستگاه PDE وجود دارد. اول اینکه، کدامیک از کمیتهای فیزیکی در یک دستگاه که به کمک PDE بیان شده است، ثابت می ماند. قوانین بقاء در مطالعه خواص کیفی PDE ها، مانند ساختار همیلتونی داشتن و عملگرهای کاهشی مفید هستند [۱۲]. وجود تعداد قابل توجهی قانون بقاء بیانگر انتگرل پذیری کامل دستگاه می باشد [۳۶]. دلیل دیگر، هنگام مطالعه جوابهای عددی PDE می باشد. برای مثال، می توان بررسی کرد آیا مقادیر حفاظت شده ثابت هستند [۳۴].

روشهای مختلفی برای یافتن قوانین بقاء وجود دارد از قبیل قضیه نوتر، روش ضرایب تابعی، روش مستقیم، رابطه بین مولد های تقارن لی-بکلاند و PDE ها ... که علاقمندان می توانند به مراجع [۲۱]، [۲۲]، [۲۵]، [۴۰]، [۷۰] رجوع کنند.

در این رساله ابتدا به یاد آوری مطالبی از گروههای لی خواهیم پرداخت . فصل دوم به بیان تعاریف و قضیه های تبدیلات لی و معرفی انواع تقارنهای معادلات دیفرانسیل، مورد نیاز در فصل های بعد، همچنین نحو محاسبه آنها برای PDE هایی که تا کنون مورد بررسی قرار نگرفته اند اختصاص دارد. در فصل سوم، نحوه ساختن جوابهای ناوردا از دو روش فرم ناوردا و روش جایگذاری مستقیم بیان خواهد شد. در ادامه طبقه بندی جبرها و زیرجبرهای لی جوابهای ناوردا به کمک دستگاههای بهینه برای چندین معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی انجام خواهد شد، همچنین جوابهای دقیق قابل توجهی برای معادلات مورد مطالعه بدست خواهد آمد. در فصل چهارم چندین روش مختلف برای یافتن قوانین بقاء معرفی خواهد شد، ازجمله روش مستقیم به کمک ضرایب تابعی که نقش مهمی را دراین رساله ایفا خواهد کرد. در ادامه محدودیتهای این روشها مورد بررسی قرار می گیرد و در نهایت الگوریتمی ارائه خواهد شد که این الگوریتم از ترکیب دو روش بدست آمده و در حقیقت بهینه سازی روش مستقیم در یافتن قوانین بقاء می باشد. برای بیان کارایی الگوریتم جدید آنرا برای PDE هایی که تا کنون مورد بررسی قرار نگرفته اند اجرا می کنیم، و مشاهده خواهد شد که قوانین بقاء با شارها و چگالی های به طور صریح بدست می آیند. در پایان ارتباط بین ضرایب تابعی قوانین بقاء را با تقارنهای نقطه ای PDE ها مورد مطالعه قرار می دهیم که به کمک آن می توان قوانین بقاء جدید از قوانین بقاء قبلی بدست آورد.

فصل ۱

یادآوری

با توجه به نقش مهمی که گروههای لی در رساله ایفا می کنند در این فصل به مرور مباحث بنیادی گروههای لی و تعاریف و قضایایی که در فصلهای آینده به کار گرفته می شوند خواهیم پرداخت. در ادامه به مقدمات و تعاریف مربوط به قوانین بقا اشاره خواهد شد که از این مفاهیم در قسمت دوم پایان نامه استفاده خواهد شد. برای مطالعه بیشتر، علاقمندان می توانند به مراجع [۸۶]، [۱۷]، [۵۴] و [۷۰] مراجعه نمایند.

۱.۱ گروههای لی و تبدیلات

یک گروه لی، منیفلدی هموار چون G است به طوریکه دارای ساختار جبری گروه بوده و دونگاشت ضرب و وارون ساز m و i که با ضابطه‌های

$$m : G \times G \to G, \qquad i : G \to G$$
$$m(g,h) = g \cdot h, \qquad i(g) = g^{-1}$$

تعریف می‌شوند هموار باشند. اگر G یک منیفلد توپولوژیکی و m و i پیوسته باشند آنگاه G را گروه توپولوژیکی می‌نامند.

همانند زیر منیفلدها، زیر گروههای لی قابل تعریفند.

۱.۱.۱ تعریف. فرض کنید G یک گروه لی و $H \subseteq G$ یک زیر مجموعهٔ آن باشد. H یک *زیرگروه لی* است هرگاه، H یک زیر گروه G بوده و H خود یک زیر منیفلد G باشد. بعلاوه دو نگاشت i, m تعریف شده برای H نیز هموار باشند.

۲.۱.۱ قضیه کارتان. هر گاه G یک گروه لی و H یک زیرگروه بستهٔ G باشد آنگاه H یک زیرگروه لی G است [۵۴].

۳.۱.۱ تعریف. یک گروه تبدیل مثل G که روی یک منیفلد هموار مانند M عمل می‌کند یک گروه لی می‌باشد با این شرط که نگاشت $\phi : G \times M \to M$ با ضابطهٔ $(g,p) \longmapsto g \cdot p$ که دارای ویژگیهای (i) و (ii) است هموار باشد.

i) $(g \cdot h) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$

ii) $e \cdot p = p$

در این حالت گویند G از چپ روی M عمل می‌کند. به همین شکل میتوان عمل از سمت راست را تعریف نمود.

هرگاه G یک گروه تبدیل روی M و $g \in G$ باشد آنگاه g را یک *تبدیل* گویند. به ازای هر تبدیل g نگاشت تبدیل ϕ را می‌توان به صورت $\phi_g : M \to M$ باز نویسی کرد. به اختصار قرار می‌دهیم $\phi_g = g$. فرض کنید $p \in M$ باشد در این صورت مجموعه تمام تبدیلات p تحت گروه تبدیل G یعنی

$$G \cdot p = \{g \cdot p : g \in G\}$$

را *مدار* p تحت تبدیل G می‌نامند. مداراها همگی زیر منیفلد هستند.

آن دسته از اعضای G که به صورت عضو همانی عمل می‌کنند را به ازای $p \in M$ به صورت

$$G_p = \{g : g.p = p\} ,$$

نمایش می‌دهند. G_p یک زیر گروه G می‌باشد که به آن زیر گروه پایدار ساز p می‌گویند.

گروه تبدیلات G به طور *آزاد* روی M عمل می‌کند، هرگاه به ازای هر $p \in M$، $G_p = \{e\}$؛ و *بطور موضعاً آزاد* عمل می‌کند، اگر زیر گروههای ایزوتروپیک در یک همسایگی هر عضو $g \neq e$ بدیهی شوند.

قرار دهید $G_M = \bigcap_{p\in M} G_p$ آنگاه G_M را *زیر گروه پایدارساز فراگیر* G می‌گویند. هر گاه $G_M = \{e\}$ باشد، آنگاه گویند G *بطور موثر* عمل می‌کند و اگر ساختار G_M گسسته باشد، گویند G *بطور موضعاً موثر* عمل می‌کند.

هر گاه عمل G تنها یک مدار تولید کند عمل را *متعدی* می‌نامند. در نهایت، عمل G را *نیم منظم* می نامند هرگاه کلیه مدارات G هم بعد باشند و *منظم* نامند اگر هر نقطه $p \in M$ دارای یک همسایگی به دلخواه کوچک باشد به طوریکه اشتراک آن با مدار p همبند باشد.

به عنوان نمونه‌ای از عمل گروه، عمل گروه تبدیلات $\mathrm{GL(n)}$ روی $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید که با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \mathrm{GL(n)} \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (A, a) &\mapsto Aa \,. \end{aligned}$$

این عمل دو مدار تولید می کند، یکی مبداء $\{0\}$ و دیگری $\mathbb{R}^n - \{0\}$ بنابراین عمل فوق متعدی نمی باشد، همچنین عمل آزاد هم نیست. اما اگر به جای $\mathrm{GL}(n)$ گروه $\mathrm{SL}(n)$ را در نظر بگیریم باز ویژگیهای مذکور در عمل بالا

برقرار است. هرگاه دو گروه تبدیل یاد شده روی $\mathbb{R}^n - \{0\}$ عمل کنند آنگاه عمل متعدی و آزاد خواهد بود زیرا تنها مدار تولید شده خود $\mathbb{R}^n - \{0\}$ است.

۴.۱.۱ تعریف. فرض کنید G یک گروه تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. یک *تابع $G-$ ناوردای موضعی*، تابعی حقیقی مانند $I : M \to \mathbb{R}$ است که روی زیر مجموعه باز $U \subset M$ تعریف می شود به قسمی که $I(g \cdot x) = I(x)$، برای هر $x \in U$ و برای هر تبدیل $g \in V_x$ در همسایگی $V_x \subset G$ از عضو همانی. اگر $I(g \cdot x) = I(x)$ برای هر $x \in U$ و $g \in G$ به طوریکه $g \cdot x \in U$، آنگاه I را ناوردای سراسری می نامند.

۵.۱.۱ گزاره. فرض کنید $I : M \to \mathbb{R}$. شرایط زیر معادلند:

i) I یک تابع $G-$ ناوردا است.

ii) I روی هر مدار G ثابت است.

iii) مجموعه های تراز $\{I(x) = c\}$ از I، زیر مجموعه های $G-$ ناوردا از M می باشند.

اثبات. [۷۱]. □

۶.۱.۱ تعریف. فرض کنید G یک گروه تبدیلات روی منیفلد M باشد. میدان برداری $\mathbf{v}$ روی M را *$G-$ناوردا* گویند هرگاه $g_*(\mathbf{v}_x) = \mathbf{v}_{g \cdot x}$ به ازای هر $g \in G$ و $x \in M$ که $g.x$ تعریف شود.

۷.۱.۱ تعریف. فرض کنید G روی خودش از چپ (راست) عمل کند مجموعهٔ تمام میدانهای برداری ناوردای چپ (راست) را *جبرلی چپ (راست)* G گویند . ثابت می‌شود جبرلی چپ و راست با هم ایزومورف هستند. در همه جا جبرلی گروه‌لی G را با $\mathfrak{g}$ نمایش می‌دهیم. در تمام طول رساله منظورمان از جبرلی، جبرلی چپ است.

۸.۱.۱ گزاره. اگر G یک گروه لی باشد در این صورت پیش برنده نگاشت وارون ساز یعنی i_* یک ایزومورفیسم بین جبر لی چپ و جبر لی راست برقرار می‌کند.

اثبات. فرض کنیم R_g و L_g به ترتیب ضابطه عمل راست و چپ G روی خودش و

$$i : G \to G ,$$

نگاشت وارون ساز G باشد ثابت می‌کنیم

$$i_* : \mathfrak{g}_R \to \mathfrak{g}_L ,$$

ایزومورفیسم است. ($\mathfrak{g}_R$ و $\mathfrak{g}_L$ نمایش دهندهٔ جبرهای لی راست و چپ G هستند.) هرگاه $h \in G$ باشد آنگاه

$$\begin{aligned}(R_g \circ i)h &= R_g(i(h)) \\ &= R_g(h^{-1}) \\ &= h^{-1}g \\ &= (g^{-1}h)^{-1} \\ &= (i \circ L_{g^{-1}})h.\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}_l$ و $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ باشد در این صورت

$$\begin{aligned}R_{g*}(i_*\mathbf{v}_h)f &= (R_{g*} \circ i_*)(\mathbf{v}_h)f \\ &= (R_g \circ i)_*(\mathbf{v}_h)f \\ &= (i \circ L_{g^{-1}})_*(\mathbf{v}_h)f \\ &= (i_* \circ L_{g^{-1}*})(\mathbf{v}_h)f \\ &= i_*(L_{g^{-1}*}\mathbf{v}_h)f \\ &= i_*(\mathbf{v}_{hg^{-1}})f \\ &= \mathbf{v}f(i(g^{-1}h)) \\ &= \mathbf{v}f(h^{-1}g) \\ &= \mathbf{v}_{h^{-1}g}f.\end{aligned}$$

□

۹.۱.۱ قضیه. فرض کنید گروه لی G به طور نیم منظم روی منیفلد $m-$بعدی M با مدارهای $s-$بعدی عمل کند. برای هر $x \in M$، $m-s$ ناوردای موضعی مستقل تابعی $I_1, \cdots, I_{m-s}$ روی همسایگی U از x با این ویژگی تعریف می شوند که، هر ناوردای موضعی I تعریف شده روی U را می توان به صورت تابعی از ناورداهای اساسی $I = H(I_1, \cdots, I_{m-s})$ نوشت. اگر G به طور منظم عمل کند، آنگاه I_νها را به طور سراسری روی U می توان انتخاب کرد. همچنین در حالت منظم دو نقطه $y, z \in U$ در یک مدار از G قرار دارند اگر و تنها اگر تمام ناورداها دارای مقدار یکسان باشند $I_\nu(y) = I_\nu(x)$، $\nu = 1, \cdots, m-s$.

اثبات. با استفاده از قضیه فربنیوس (قضیه ۱.۴۳ از [۷۰])، می توان مختصات موضعی $y = \psi(x)$ نزدیک x برای دستگاهی از میدانهای برداری $\mathfrak{g}$ که توسط مولدهای بینهایت کوچک از G تولید می شوند را طوری یافت که، مدارهای G برشهای $\{y^1 = c_1, \ldots, y^{m-s} = c_{m-s}\}$ باشند. بنابراین مختصات های جدید $y^1 =$

$I_1(x), \ldots, y^{m-s} = I_{m-s}(x)$ خودشان ناورداهای موضعی برای G خواهند شد، که روی هر برش ثابت می باشند. بعلاوه، هر ناوردای موضعی برای G باید روی این برشها ثابت باشد، که فقط همان $y^1, \ldots, y^{m-s}$ هستند. اگر G به طور منظم عمل کند، می توان مختصات تخت را طوری انتخاب کرد که هر مدار فقط با یک برش اشتراک داشته باشد. در این حالت $y^1, \ldots, y^{m-s}$ ناورداهای سراسری را تشکیل می دهند. □

۱۰.۱.۱ قضیه. هرگاه G یک گروه لی باشد در این صورت $\mathfrak{g} \simeq T_eG$.

اثبات. [۵۴]. □

قضیه فوق بیان می‌کند که با یافتن فضای مماس هر گروه لی در عضو همانی گروه می‌توان جبرلی آن را یافت.

۱۱.۱.۱ مثال. در این اینجا بدون محاسبه تنها به ارائه چند جبرلی می‌پردازیم. محاسبهٔ جبرهای لی با استفاده از یافتن فضاهای مماسی کار چندان پیچیده‌ای نیست و به اطلاعاتی از هندسه منیفلد نیاز دارد.

الف) جبرلی گروه لی خطی عام $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ مجموعه ماتریسهای مربعی $n \times n$ می‌باشد به عبارت دیگر

$$T_{I_n}\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = M(n \times n, \mathbb{R}) \ .$$

ب) جبرلی گروه لی خطی خاص $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ مجموعه ماتریسهای $n \times n$ با اثر صفر می‌باشد یعنی

$$T_I\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \mathrm{tr}\ A = 0\} \ . \qquad (۱.۱)$$

پ) جبرلی دایره S^1 اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

ت) جبرلی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ خود $\mathbb{R}^n$ است.

۱۲.۱.۱ تعریف. گروه لی G با جبرلی $\mathfrak{g}$ را در نظر می‌گیریم در این صورت نگاشت $\exp : \mathfrak{g} \to G$ را *نگاشت نمایی* گویند. هرگاه U یک همسایگی $0 \in \mathfrak{g}$ و V یک همسایگی $e \in G$ باشند آنگاه $\exp$ یک دیفئومورفیسم بین U و V برقرار می‌کند.

۱۳.۱.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه لی همبند با جبرلی $\mathfrak{g}$ باشد در این صورت برای هر $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k \in \mathfrak{g}$ هر عضو G مثل g قابل بیان به صورت ضرب نگاشتهای نمایی می‌باشد بدین معنا که

$$g = \exp(\mathbf{v}_1) \circ \cdots \circ \exp(\mathbf{v}_k) \ .$$

تعبیر قضیه فوق آن است که با داشتن اعضای یک جبرلی می‌توان با محاسبهٔ نگاشتهای نمایی متناظر با هر عضو و ضرب آنها در هم ضابطه تبدیل گروه را بدست آورد. اثبات این قضیه در [۴۱] آمده است.

۱۴.۱.۱ تعریف. هرگاه G یک گروه لی $\mathfrak{g}$ باشد که روی M عمل می‌کند آنگاه به ازای هر $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ مولد بینهایت کوچک $\hat{\mathbf{v}}$ متناظر با $\mathbf{v}$ در نقطه $p \in M$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\mathbf{v}}_p = \phi_{*p}(\mathbf{v}_e) \ . \qquad (۲.۱)$$

نگاشت ϕ به صورت $\phi_p : G \to M$ تعریف می‌شود به طوریکه $g \mapsto g \cdot p$.

۱۵.۱.۱ مثال. عمل گروه $\mathrm{SL}(2)$ روی $\mathbb{RP}^1$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم .

$$p \longmapsto \frac{ap+b}{cp+d} \qquad p \in \mathbb{RP}^1 \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2) \qquad (۳.۱)$$

جبرلی $\mathrm{SL}(2)$ ماتریسهای 2×2 با اثر صفر است بنابراین این جبر با ماتریسهای زیر تولید می‌شود .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (۴.۱)$$

بنابراین اگر $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ مولدهای بینهایت کوچک متناظر با هر یک از ماتریسهای A_1 و A_2 و A_3 باشند آنگاه

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \partial_p \ , \qquad \hat{\mathbf{v}}_2 = 2p\partial_p \ , \qquad \hat{\mathbf{v}}_3 = -p^2\partial_p \ . \qquad (۵.۱)$$

(در این مثال و سایر جاها منظور از عبارتی مثل ∂_x همان $\frac{\partial}{\partial x}$ است.) در قضیهٔ زیر حالتی خاص از قضیهٔ اتوکشی در میدانهای برداری را می آوریم که در آینده اثبات برخی از قضایا را ساده‌تر کرده و کمک می کند تا با حجم کمتری از محاسبات روبرو شویم. اثبات این قضیه را می توان در بیشتر کتابهای هندسهٔ منیفلد دید.

۱۶.۱.۱ قضیه اتوکشی. فرض کنیم Gیک گروه لی باشد که روی منیفلد $n-$بعدی M عمل می کند، $\mathfrak{g}$ جبرلی و $\mathbf{v}$ یک مولد بینهایت کوچک از آن باشد به طوریکه در نقطهٔ $x_0 \in M$ غیر صفر باشد. آنگاه یک دستگاه مختصات مانند $\mathbf{y} = (y^1, ..., y^n)$ در x_0 موجود است به طوریکه در این مختصات $\mathbf{v} = \partial/\partial y^1$.

اثبات. [۷۱]. □

۱.۱.۱ ناوردایی بینهایت کوچک

فرض کنیم G یک گروه تبدیلات همبند باشد که روی M عمل کند. تابع حقیقی $I : M \to \mathbb{R}$ تحت عمل گروه G ناورد است اگر و تنها اگر برای هر $p \in M$ و $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$

$$\mathbf{v}_p(I) = 0 \ . \tag{۶.۱}$$

هر گاه $u = I(\mathbf{x})$ یک تابع یک پارامتری و $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(\mathbf{x})\partial/\partial x^i$ یک مولد بینهایت کوچک باشد برای آنکه I یک ناوردا تحت G باشد باید $\mathbf{v}(I) = 0$ و بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0.$$

حال برای یافتن I دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{dx^1}{\xi^1(\mathbf{x})} = \frac{dx^2}{\xi^2(\mathbf{x})} = \cdots = \frac{dx^n}{\xi^n(\mathbf{x})} \ . \tag{۷.۱}$$

۱۷.۱.۱ مثال. عمل گروه $\mathrm{SO}(2)$ را روی فضای سه متغیره به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x, y, z) \longmapsto \left(x\cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, \frac{\sin t + z \cos t}{\cos t - z \sin t} \right) \tag{۸.۱}$$

مولد بینهایت کوچک حاصل از این عمل به فرم

$$\mathbf{v} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2)\frac{\partial}{\partial z} \ , \tag{۹.۱}$$

می‌باشد. با حل دستگاه

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{1+z^2} \ ,$$

دو تابع ناوردا به صورت $r = \sqrt{x^2+y^2}$ و $\omega = \dfrac{xz - y}{yz + x}$ بدست می‌آید.

۲.۱.۱ امتداد دهی

یک تابع حقیقی هموار مانند $f : X \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(\mathbf{x}) = f(x^1, ..., x^p)$ دارای تعداد $p_k = \binom{p+k-1}{k}$ مشتق جزئی متمایز از مرتبهٔ k–ام نسبت به متغیرهایش می باشد. اگر $J = (j_1, ..., j_k)$ یک اندیس چندگانه از متغیرهای تابع f باشد مشتق جزئی تابع f نسبت به J به صورت $\partial_J f(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x^{j_1} \cdots \partial x^{j_k}}$، نمایش داده می شود. مرتبه اندیس چند گانهٔ J را که با $\#J \equiv k$ نشان می دهند دلالت بر آن دارد که چند بار از تابع مشتق گرفته شده است. فرض کنید $f : X \to U$ یک تابع p متغیرهٔ q مقداری با ضابطهٔ $\mathbf{u} = f(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), ..., f^q(\mathbf{x}))$ باشد. فضای تمام مشتقات جزئی این تابع تا مرتبهٔ n–ام را با ، $U^{(n)} := U \times U_1 \times \cdots \times U_n$ نشان می دهند به طوریکه U_i

ها به ازای $i = 1, ..., n$ نمایندهٔ فضای مشتقات جزئی از مرتبهٔ i−ام می باشند. از این پس هر نقطه در $U^{(n)}$ را به صورت $\mathbf{u}^{(n)}$ نشان می دهیم، بنابراین $\mathbf{u}^{(n)}$ دارای $qp^{(n)}$ متغیر متمایز به شکل u_J^α, $\alpha = 1, ..., q,$ می باشد و $J = (j_1, ..., j_k)$ یک اندیس چند گانه با شرایط $1 \leq j_k \leq p$ و $0 \leq k \leq p$ است.

با اضافه کردن فضای متغیرهای مستقل به $U^{(n)}$ فضای

$$\mathbf{J}^n = X \times U^{(n)}, \tag{۱۰.۱}$$

حاصل خواهد شد که به آن *فضای* جت مرتبهٔ n−ام تابع $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$ گویند و با نمادهای $j^n f$ یا $\mathbf{J}^n f$ نشان داده می شود. واضح است که بعد فضای جت مرتبهٔ n−ام برابر است با $p + qp^{(n)}$.

با بررسی ساده ای می توان دید که $\mathbf{J}^n$ یک ساختار هندسی دارد و این ساختار چیزی نیست جز یک کلاف برداری روی منیفلد X که بعد تارهای آن $qp^{(n)}$ است. این فضا دقیقاً فضای لازم برای نشان دادن بسط تیلور تابع f است.

۱۸.۱.۱ مثال. فرض کنید $u = f(x, y)$ یک تابع با دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته باشد. برای یافتن $\mathbf{J}^2$ کافیست که مشتقات جزئی تابع را تا مرتبه دوم بنویسیم. بنابراین داریم:

$$\mathbf{J}^2 = \Big\{(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})\Big\} \simeq \mathbb{R}^8.$$

۱۹.۱.۱ تعریف. به فضای جت مرتبهٔ n−ام یک تابع منهای متغیرهای مستقلش *امتداد تابع* تا مرتبهٔ n−ام می نامیم و آن را با $\mathbf{u}^{(n)} = f^{(n)}(\mathbf{x})$ نشان می دهیم.

بنابراین امتداد مرتبهٔ دوم تابع f در مثال (۱۸.۱.۱) برابر است با:

$$f^{(2)}(x, y) = (f; f_x, f_y; f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}).$$

فصل ۲

هندسه معادلات دیفرانسیل

۱.۲ تبدیلات نقطه ای

۱.۱.۲ تعریف. فرض کنید

$$R(x,u) := \Delta_\nu(x,u,u^{(n)}) = 0, \qquad \nu = 1,\dots,l,$$

دستگاهی شامل l معادله دیفرانسیل با p متغیر مستقل $x = (x^1,...,x^p)$ و q متغیر وابسته $u = (u^1,...,u^q)$ باشد. فضای اقلیدسی $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^{p+q}$ متشکل از متغیر های مستقل و وابسته x و u را فضای کامل برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$ می نامند. جواب چنین دستگاهی تابعی به فرم $u = f(x)$ می باشد که در آن

$$u^\alpha = f^\alpha(x^1,...,x^p), \quad \alpha = 1,...,q,$$

تابعی هموار از متغیرهای مستقل $x = (x^1,...,x^p)$ است.

مشتقات جزئی تابع u از مرتبه r را با نماد زیر نمایش می دهند

$$\begin{aligned}\partial^r u &= \{u^\alpha_{j_1\dots j_k} | \ \alpha = 1,\dots,q; \ \ j_1,\dots,j_k = 1,\dots,p\}\\ &= \{\frac{\partial^r u^\alpha(x)}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_k}} | \ \alpha = 1,\dots,q; \ \ j_1,\dots,j_k = 1,\dots,p\}.\end{aligned}$$

یک تبدیل نقطه ای، تبدیل یک به یکی است که روی فضای $p+q$ بعدی (x,u) عمل می کند. در حالت خاص،

تبدیل نقطه ای به فرم زیر است:

$$x^* = f(x,u),$$
$$u^* = g(x,u). \tag{۱.۲}$$

تبدیل نقطه ای به طور طبیعی، به تبدیلی یک به یک که روی فضای $(x, u, \partial u, \ldots, \partial^r u)$ عمل می کند قابل توسیع است (در صورت لزوم می توان فرض کرد تبدیل (۱.۲) دیفرانسیل پذیر است). توسیع یافته تبدیل (۱.۲) از مرتبه r توسط روابط زیر بیان می شود

$$\begin{aligned}
(x^*)^i &= f^i(x,u),\\
(u^*)^\alpha &= g^\alpha(x,u),\\
(u^*)^\alpha_i &= h^\alpha_i(x,u,\partial u),\\
&\vdots\\
(u^*)^\alpha_{i_1\ldots i_r} &= h^\alpha_{i_1\ldots i_r}(x,u,\partial u,\ldots,\partial^r u).
\end{aligned} \tag{۲.۲}$$

که $i, i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, p, \alpha = 1, \ldots, q$ و $(u^*)^\alpha_i = \partial (u^*)^\alpha / \partial (x^*)^i$.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که تبدیل نقطه ای (۱.۲)، یک گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای بصورت زیر باشد

$$\begin{aligned}
(x^*)^i &= f^i(x,u,\varepsilon) = x^i + \varepsilon \xi^i(x,u) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, \ldots, p\\
(u^*)^\alpha &= g^\alpha(x,u,\varepsilon) = u^\alpha + \varepsilon \eta^\alpha(x,u) + O(\varepsilon^2), \quad \alpha = 1, \ldots, q
\end{aligned} \tag{۳.۲}$$

با مولد بی نهایت کوچک

$$V = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{۴.۲}$$

گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای که روی فضای $(x, u, \partial u), \ldots, (x, u, \partial u, \ldots, \partial^r u)$ عمل می کند

به صورت زیر تولید می شود

$$\begin{aligned} (u^*)^\alpha_i &= u^\alpha_i + \varepsilon\eta^{(1)\alpha}_i(x,u,\partial u) + O(\varepsilon^2),\\ &\vdots \\ (u^*)^\alpha_{i_1\cdots i_r} &= u^\alpha_{i_1\cdots i_r} + \varepsilon\eta^{(r)\alpha}_{i_1\cdots i_r}(x,u,\partial u,\dots,\partial^r u) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \qquad (۵.۲)$$

که در آن $\eta^{(1)\alpha}$ و $\eta^{(r)\alpha}$ عبارتند از

$$\begin{aligned} \eta^{(1)\alpha}_i &= D_i\eta^\alpha - (D_i\xi^j)u^\alpha_j,\\ \eta^{(r)\alpha}_{i_1\cdots i_r} &= D_{i_r}\eta^{(r-1)\alpha}_{i_1\cdots i_{r-1}} - (D_{i_r}\xi^j)u^\alpha_{i_1\cdots i_{r-1}j}. \end{aligned} \qquad (۶.۲)$$

$\alpha = 1,\dots,q$ و $i, i_j = 1,\dots,p$ برای $j = 1,\dots,r$ با $k = 2,3,\dots$.

امتداد مرتبه k–ام مولد بی نهایت کوچک V عبارت است از

$$\begin{aligned} V^{(k)} &= x^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \eta^{(1)\alpha}_i(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha_i}\\ &\quad + \cdots + \eta^{(k)\alpha}_{i_1\cdots i_k}(x,u,\partial u,\dots,\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1\cdots i_k}}\\ &= V + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{I=i_1\cdots i_k}\eta^\alpha_I(x,u^{(k)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha_I} \end{aligned} \qquad (۷.۲)$$

۲.۱.۲ تعریف. تابع مشخصه Q از مولد بی نهایت کوچک (۴.۲) طبق رابطه زیر بیان می شود

$$Q = \xi^i u_i - \eta. \qquad (۸.۲)$$

بنابه تعریف فوق می توان نوشت

$$\begin{aligned} \xi^j &= \frac{\partial Q}{\partial u_j},\\ \eta &= u_i\frac{\partial Q}{\partial u_i} - Q,\\ \eta^{(1)}_j &= -\frac{\partial Q}{\partial x^j} - u_j\frac{\partial Q}{\partial u}, \end{aligned}$$

۲.۲ تقارنهای نقطه ای

۱.۲.۲ تعریف. دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$ از *رتبهٔ ماکسیمال* است هرگاه ماتریس ژاکوبین آن

$$\mathbb{J}_\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = \Big(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_J^\alpha}\Big)_{m\times(p+qp^{(n)})},$$

از رتبهٔ m باشد.

۲.۲.۲ تعریف. گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای، دستگاه $\Delta = 0$ را ناوردا نگه می دارد اگر و تنها اگر k-امین امتداد تبدیلات نیز منیفلد جوابهای دستگاه را ناوردا نگه دارد، یعنی، خانواده ای از جوابهای دستگاه را به خانواده ای از جوابهای دیگر دستگاه بنگارد. در این حالت گروه لی یک پارامتری از تبدیلات را تقارنهای نقطه ای دستگاه $\Delta = 0$ می نامند.

۳.۲.۲ قضیه. فرض کنیم $\Delta = 0$ یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل از رتبهٔ ماکسیمال تعریف شده در یک زیر مجموعهٔ باز از E مانند $\mathcal{O}$ باشد. اگر G گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی $\mathcal{O}$ عمل کرده و $\mathbf{v}$ یک مولد بینهایت کوچک آن باشد، آنگاه $\Delta = 0$، G را به عنوان یک گروه تقارن می پذیرد اگر:

$$\mathbf{v}^{(n)}(\Delta) = 0, \quad \text{هرگاه} \quad \Delta = 0. \qquad (۹.۲)$$

اثبات. [۷۱]. □

قضیهٔ (۳.۲.۲) نحوهٔ ارتباط بین گروههای تقارن و ناوردایی یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل تحت مولدهای بینهایت کوچک را بیان می دارد.

۴.۲.۲ قضیه. فرض کنید $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دو میدان برداری روی $\mathcal{O} \subset E$ باشند. در اینصورن برای هر $n \in \mathbb{N}$ ویژگیهای زیر برقرارند.

$$i)\ (\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w})^{(n)} = \alpha\mathbf{v}^{(n)} + \beta\mathbf{w}^{(n)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$
$$ii)\ [\mathbf{v}, \mathbf{w}]^{(n)} = [\mathbf{v}^{(n)}, \mathbf{w}^{(n)}].$$

۵.۲.۲ نتیجه. فرض کنید $\Delta = 0$ یک دستگاه معادلات تعریف از رتبهٔ ماکسیمال تعریف شده روی $\mathcal{O} \subset E$ باشد. مجموعهٔ تمام تقارنهای بینهایت کوچک این دستگاه یک جبر لی از میدانهای برداری روی $\mathcal{O}$ می سازد. علاوه بر آن اگر این جبر لی با بعد متناهی باشد، گروه تقارنهای این سیستم یک گروه لی موضعی از تبدیلات روی $\mathcal{O}$ است.

قضیه (۳.۲.۲) یک روش کاملاً مؤثر برای یافتن تقارنهای معادلات دیفرانسیل به دست می دهد. این روش با در نظر گرفتن ضرایب $\xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ و $\phi^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ از میدان برداری که روی فضای کامل نظیر معادله تعریف شده

با یافتن ϕ_α^J ها آغاز می شود. سپس با اثر $\mathbf{v}^{(n)}$ روی دستگاه معادلات و متحد با صفر قرار دادن ضرایب u_J^α در دو طرف به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی PDE که به دستگاه *معادلات مشخصه* می رسیم که با حل آن (در صورت سازگاری) ضرایب ξ^i ها و ϕ_α ها به دست می آیند. تقارنهایی که با این روش محاسبه می شوند به تقارنهای *نقطه‌ای، هندسی* یا *لی* مشهورند که دستهٔ وسیعی از تقارنها را در بر گرفته و بسیار کاربردی هستند. تبدیل نظیر این تقارنها که با استفاده از قضیهٔ (۳.۲.۲) بدست می آیند همان تبدیلات نقطه‌ای هستند که متغیرهای مستقل و وابسته را با هم حرکت می دهند. اما تقارنهای متنوع دیگری نیز موجودند که بر حسب اهمیت در بخش آخر این فصل به تعدادی از آنها اشاره خواهد شد. در ادامه با مثالهای متنوعی روش یافتن تقارنهای یک معادلهٔ دیفرانسیل (دستگاه معادلات) را بررسی می کنیم.

۶.۲.۲ مثال. [۳۵] در فیزیک و مکانیک سیالات *لایه های مرزی* سطوحی هستند که یک مایع با سرعت ابتدایی به درون آن تراوش می کند. به عنوان مثال در اتمسفر زمین لایه های جو نزدیک زمین هستند که تحت تأثیر روزانهٔ جریانات هوای گرم یا رطوبت قرار می گیرند، یا برای یک فضا پیما لایه های مرزی آنهایی هستند که نزدیک بال فضا پیما در جریان هستند. وجود لایه های مرزی در جریان یک مایع غیر چسبناک رخ می دهد. پدیدهٔ لایه های مرزی در صنعت نیز کاربرد دارد، مثلاً در شکل دادن مواد پلیمری، سرد کردن و شکل دهی فلزات گداخته، در صنعت شیشه سازی و...می توان از این تئوری استفاده کرد.

در مکانیک سیالات جریان یک مایع نیوتنی تراکم ناپذیر به درون لایه های مرزی یک سطح متخلخل توسط دستگاه معادلات زیر توصیف می شود.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \\ \bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\Big(\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}\Big) - \dfrac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \dfrac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x}, \\ \bar{u}\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu\Big(\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}\Big) - \dfrac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \dfrac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}, \end{cases} \tag{۱۰.۲}$$

به طوریکه ρ چگالی، $\bar{p}$ فشار، ν چسبندگی جنبشی مایع در یک نقطه، $\bar{u}$ و $\bar{v}$ مؤلفه های میانگین سرعت و u' و v' سرعت تغییرات و نوسان مایع هستند به طوریکه $u = \bar{u} + u'$ و $v = \bar{v} + v'$. با بهره گیری از آنالیز مقیاسها در فیزیک (ابزاری قدرتمند در ریاضی برای ساده کردن معادلات [۲۴]) دستگاه (۱۰.۲) را می توان به دستگاه

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \\ \bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \dfrac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{۱۱.۲}$$

کاهش داد.

جملهٔ $\bar{u'v'}$ در دستگاه (۱۱.۲) را *قطع تنش رینولد* نامیده که تانسوریست در فیزیک و به شکل زیر

$$R_{ij} \equiv \rho\overline{u'v'}, \qquad (۱۲.۲)$$

نوشته می شود. با استفاده از معادلات *ناویر-استوکس* برای مایعات نیوتنی تانسور (۱۲.۲) به شکل

$$R_{ij} \equiv \mu\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j},$$

نوشته می شود، که μ ضریب چسبندگی مایع می باشد، بنابراین آخرین جملهٔ معادلهٔ دوم در دستگاه (۱۱.۲) برابر با $\mu\partial\bar{u}/\partial y$ است.

چون دستگاه (۱۱.۲) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ است پس لازم است برای یافتن تقارنها یک میدان برداری به شکل:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \xi^1(x,y,\bar{u},\bar{v},\bar{p})\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x,y,\bar{u},\bar{v},\bar{p})\frac{\partial}{\partial y} + \phi_1(x,y,\bar{u},\bar{v},\bar{p})\frac{\partial}{\partial\bar{u}} \\ +\phi_2(x,y,\bar{u},\bar{v},\bar{p})\frac{\partial}{\partial\bar{v}} + \phi_3(x,y,\bar{u},\bar{v},\bar{p})\frac{\partial}{\partial\bar{p}},\end{aligned}$$

انتخاب شود. چون دستگاه مرتبه دو است پس میدان برداری فوق با فرمول زیر تا مرتبه دوم امتداد داده می شود.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v} + \phi_1^x\partial_{\bar{u}_x} + \phi_1^y\partial_{\bar{u}_y} + \phi_2^x\partial_{\bar{v}_x} + \phi_2^y\partial_{\bar{v}_y} + \phi_3^x\partial_{\bar{p}_x} + \phi_3^y\partial_{\bar{p}_y} + \phi_1^{xx}\partial_{\bar{u}_{xx}} \\ +\phi_2^{xx}\partial_{\bar{v}_{xx}} + \phi_3^{xx}\partial_{\bar{p}_{xx}} + \phi_1^{xy}\partial_{\bar{u}_{xy}} + \phi_2^{xy}\partial_{\bar{v}_{xy}} + \phi_3^{xy}\partial_{\bar{p}_{xy}}\end{aligned}$$

حال با توجه به اینکه دستگاه (۱۱.۲) دارای سه مشخصه تقارن به صورت

$$\begin{aligned}Q_1 &= \phi_1 - \xi^1\bar{u}_x - \xi^2\bar{u}_y, \\ Q_2 &= \phi_2 - \xi^1\bar{v}_x - \xi^2\bar{v}_y, \\ Q_3 &= \phi_3 - \xi^1\bar{p}_x - \xi^2\bar{p}_y,\end{aligned}$$

است ضرایب امتداد را با استفاده از روابط زیر بدست می آوریم.

$$
\begin{aligned}
&\phi_1^x = D_xQ_1 + \xi^1\bar{u}_{xx} + \xi^2\bar{u}_{xy}, && \phi_2^x = D_xQ_2 + \xi^1\bar{v}_{xx} + \xi^2\bar{v}_{xy},\\
&\phi_3^x = D_xQ_3 + \xi^1\bar{p}_{xx} + \xi^2\bar{p}_{xy}, && \phi_1^y = D_yQ_1 + \xi^1\bar{u}_{xy} + \xi^2\bar{u}_{yy},\\
&\phi_2^y = D_yQ_2 + \xi^1\bar{v}_{xy} + \xi^2\bar{v}_{yy}, && \phi_3^y = D_yQ_3 + \xi^1\bar{p}_{xy} + \xi^2\bar{p}_{yy},\\
&\phi_1^{xx} = D_x^2Q_1 + \xi^1\bar{u}_{xxx} + \xi^2\bar{u}_{xxy}, && \phi_2^{xx} = D_x^2Q_2 + \xi^1\bar{v}_{xxx} + \xi^2\bar{v}_{xxy},\\
&\phi_3^{xx} = D_x^2Q_3 + \xi^1\bar{p}_{xxx} + \xi^2\bar{p}_{xxy}, && \phi_1^{yy} = D_y^2Q_1 + \xi^1\bar{u}_{xyy} + \xi^2\bar{u}_{yyy},\\
&\phi_2^{yy} = D_y^2Q_2 + \xi^1\bar{v}_{xyy} + \xi^2\bar{v}_{yyy}, && \phi_3^{yy} = D_y^2Q_3 + \xi^1\bar{p}_{xyy} + \xi^2\bar{p}_{yyy},\\
&\phi_1^{xy} = D_xD_yQ_1 + \xi^1\bar{u}_{xxy} + \xi^2\bar{u}_{xyy}, && \phi_2^{xy} = D_xD_yQ_2 + \xi^1\bar{v}_{xxy} + \xi^2\bar{v}_{xyy},\\
&\phi_3^{xy} = D_xD_yQ_3 + \xi^1\bar{p}_{xxy} + \xi^2\bar{p}_{xyy}.
\end{aligned}
$$

اکنون با جایگذاری این ضرایب در $\mathbf{v}^{(2)}$ و اثر آن به روی دستگاه معادلات (۱۱.۲) به دستگاه معادلات تعیین کننده زیر می رسیم.

$$
\begin{aligned}
&\xi_y^1 = 0, && \xi_{\bar{u}}^1 = 0, && \xi_{\bar{v}}^1 = 0, && \xi_{xx}^1 = 0, && \xi_x^2 = 0,\\
&\xi_{\bar{u}}^2 = 0 && \xi_{\bar{v}}^2 = 0, && \xi_{\bar{p}}^2 = 0, && \xi_{yy}^2 = 0, && \phi_{1x} = 0,\\
&\phi_{1y} = 0, && \phi_{1\bar{u}} = 0, && \phi_{1\bar{v}} = 0, && \phi_{1\bar{p}} = 2, && \xi_x^1 = 4\xi_y^2,\\
&\xi_y^2 = -\phi_3, && \phi_2 = \bar{u}(\xi_x^1 - 2\xi_y^2).
\end{aligned}
$$

با حل دستگاه فوق ضرایب $\mathbf{v}$ عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
&\xi^1 = c_1 + c_4x, && \xi^2 =, c_2 + c_5y,\\
&\phi_1 = c_4\bar{u} - 2c_5\bar{u}, && \phi_2 = -c_5\bar{v},\\
&\phi_3 = c_3 + 2c_4\bar{p} - 4c_5\bar{p}.
\end{aligned}
$$

بنابراین دستگاه (۱۱.۲) یک جبر لی پنج-بعدی از تقارنها با مولدهای زیر می پذیرد.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}_1 = \partial_x, && \mathbf{v}_2 = \partial_y, && \mathbf{v}_3 = \partial_{\bar{p}},\\
&\mathbf{v}_4 = x\partial_x + \bar{u}\partial_{\bar{u}} + 2\bar{p}\partial_{\bar{p}}, && \mathbf{v}_5 = y\partial_y - 2\bar{u}\partial_{\bar{u}} - \bar{v}\partial_{\bar{v}} - \bar{p}\partial_{\bar{p}}.
\end{aligned}
$$

جدول لی زیر جبرلی ساختن تقارنهای فوق را اثبات می کند.

$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$
$\mathbf{v}_1$	0	0	0	$\mathbf{v}_1$	0
$\mathbf{v}_2$	0	0	0	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_3$	0	0	0	$\mathbf{v}_3$	$-4\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$	$-\mathbf{v}_1$	0	$-2\mathbf{v}_3$	0	0
$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_2$	$4\mathbf{v}_3$	0	0

۷.۲.۲ مثال. در این مثال به بررسی معادله *هیروتا- رمانی* [۱] (H-R) خواهیم پرداخت که عبارتست از:

$$u_t - u_{x^2t} + au_x(1-u_t) = 0, \tag{۱۳.۲}$$

برای این منظور گروه لی یک پارامتری از تبدیلات بی نهایت کوچک روی $(x^1 = x, x^2 = t, u^1 = u)$ را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + s\xi(x,t,u) + O(s^2), \\ \tilde{t} &= t + s\eta(x,t,u) + O(s^2), \\ \tilde{u} &= u + s\varphi(x,t,u) + O(s^2), \end{aligned} \tag{۱۴.۲}$$

s پارامتر گروه و $\xi^1 = \xi, \xi^2 = \eta, \varphi^1 = \varphi$ تبدیلات بی نهایت کوچک برای متغیرهای مستقل و وابسته می باشند. میدان برداری متناظر با آنها را به فرم زیر در نظر بگیرید

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\partial_x + \eta(x,t,u)\partial_t + \varphi(x,t,u)\partial_u. \tag{۱۵.۲}$$

چون معادله از مرتبه سه می باشد باید میدان فوق را تا مرتبه سه امتداد داد

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(3)} &= \mathbf{v} + \varphi^x\,\partial_{u_x} + \varphi^t\,\partial_{u_t} + \varphi^{x^2}\,\partial_{u_{x^2}} + \varphi^{xt}\,\partial_{u_{xt}} + \varphi^{t^2}\,\partial_{u_{t^2}} \\ &\quad + \varphi^{x^3}\,\partial_{u_{x^3}} + \varphi^{x^2t}\,\partial_{u_{x^2t}} + \varphi^{xt^2}\,\partial_{u_{xt^2}} + \varphi^{t^3}\,\partial_{u_{t^3}}. \end{aligned} \tag{۱۶.۲}$$

[۱] Hirota-Ramani

مشابه مثال قبل داریم

$$
\begin{aligned}
\varphi^{x} &= D_x(\varphi - \xi\, u_x - \eta\, u_t) + \xi\, u_{x^2} + \eta\, u_{xt},\\
\varphi^{t} &= D_t(\varphi - \xi\, u_x - \eta\, u_t) + \xi\, u_{xt} + \eta\, u_{t^2},\\
&\vdots\\
\varphi^{t^3} &= D_t^3(\varphi - \xi\, u_x - \eta\, u_t) + \xi\, u_{xt^3} + \eta\, u_{t^4},
\end{aligned}
\tag{۱۷.۲}
$$

بنابه قضیه (۳.۲.۲)، میدان برداری $\mathbf{v}$ گروه تقارن یک پارامتری از معادله (H-R) است اگر وتنها اگر

$$
\begin{cases}
\mathbf{v}^{(3)}[u_t - u_{x^2t} + au_x(1-u_t)] = 0,\\
u_t - u_{x^2t} + au_x(1-u_t) = 0.
\end{cases}
\tag{۱۸.۲}
$$

یا به طور معادل

$$
\begin{cases}
(1-au_x)\varphi^t + a(1-u_t)\varphi^x - \varphi^{x^2t} = 0,\\
u_t - u_{x^2t} + au_x(1-u_t) = 0.
\end{cases}
\tag{۱۹.۲}
$$

با جایگذاری φ^t، φ^x و φ^{x^2t} در رابطه فوق دستگاه معادلات مشخصه زیر حاصل خواهد شد

$$
\begin{array}{lll}
\xi_t = 0, & \xi_u = 0, & \xi_x = -\varphi_u,\\
\eta_x = 0, & \eta_u = 0, & \eta_t = 3\varphi_u,\\
\varphi_t = 2\varphi_u, & \varphi_{uu} = 0, & \varphi_x = -2/a\varphi_u,
\end{array}
$$

با حل دستگاه فوق ضرایب میدان برداری عبارتند از:

$$
\xi = \frac{-x}{3}c_1 + c_3, \qquad \eta = c_1 t + c_2, \qquad \varphi = (\frac{2t}{3} + \frac{u}{3} - \frac{2x}{3a})c_1 + c_4.
$$

که در آن ضرایب c_1، c_2، c_3 و c_4 ثابتهای دلخواه هستند. بنابراین معادله (H-R) جبر لی $\mathfrak{g}$ چهار بعدی از تقارنها با مولدهای زیر می پذیرد

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{v}_1 = \partial_x, & \mathbf{v}_2 = \partial_t,\\
\mathbf{v}_3 = \dfrac{1}{a}\partial_u, & \mathbf{v}_4 = 3t\partial_t - x\partial_x + (2t + u - \dfrac{2x}{a})\partial_u.
\end{array}
\tag{۲۰.۲}
$$

روابط جابجایی بین میدانهای برداری $\mathbf{v}_i$ در جدول زیر بیان شده است.

$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$
$\mathbf{v}_1$	0	0	0	$-\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_2$	0	0	0	$3\mathbf{v}_2 + 2a\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_3$	0	0	0	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3$	$-3\mathbf{v}_2 - 2a\mathbf{v}_3$	-$\mathbf{v}_3$	0

جبر لی $\mathfrak{g}$ حل پذیر است، زیرا با فرض $\mathfrak{g}^{(1)} = \langle \mathbf{v}_i, [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]\rangle = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ برای $i = 1, \cdots, 4$ در اینصورت داریم

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \langle \mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_4\rangle, \qquad \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = \langle -\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3, 3\mathbf{v}_2 + 2a\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3\rangle$$

بنابراین زنجیری از ایده آلها به صورت $\mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset 0$ وجود دارد که بیانگر حل پذیری جبرلی $\mathfrak{g}$ می باشد.

برای بدست آوردن گروه تبدیلاتی که توسط مولدهای بی نهایت کوچک $\mathbf{v}_i$ برای $i = 1, \cdots, 4$ باید دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر را حل نمود

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{x}(s)}{ds} &= \xi_i(\tilde{x}(s), \tilde{t}(s), \tilde{u}(s)), \quad \tilde{x}(0) = x,\\
\frac{d\tilde{t}(s)}{ds} &= \eta_i(\tilde{x}(s), \tilde{t}(s), \tilde{u}(s)), \quad \tilde{t}(0) = t, \qquad i = 1, \cdots, 4\\
\frac{d\tilde{u}(s)}{ds} &= \varphi_i(\tilde{x}(s), \tilde{t}(s), \tilde{u}(s)), \quad \tilde{u}(0) = u.
\end{aligned}$$

با اثر نگاشت نمایی بر روی تقارنهای معادله (H-R) یعنی $\exp(s\mathbf{v}_i)(x,t,u) = (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})$، گروههای یک پارامتری G_i تولید شده توسط $\mathbf{v}_i$ به صورت زیر حاصل می شوند

$$\begin{aligned}
&G_1 : (t, x, u) \longmapsto (x + s, t, u),\\
&G_2 : (t, x, u) \longmapsto (x, t + s, u),\\
&G_3 : (t, x, u) \longmapsto (x, t, u + s/a),\\
&G_4 : (t, x, u) \longmapsto (x\mathrm{e}^{-s}, t\mathrm{e}^{3s}, t\mathrm{e}^{3s} + \frac{x}{a}\mathrm{e}^{-s} + (u - t - \frac{x}{a})\mathrm{e}^{\mathrm{s}}).
\end{aligned} \tag{۲۱.۲}$$

۸.۲.۲ نتیجه. اگر یک $u=f(x,t)$ جواب معادله (H-R) باشد آنگاه توابع زیر نیز جواب معادله می باشند

$$\begin{aligned}
&G_1(s)\cdot f(x,t)=f(x-s,t),\\
&G_2(s)\cdot f(x,t)=f(x,t-s),\\
&G_3(s)\cdot f(x,t)=f(x,t)+s/a,\\
&G_4(s)\cdot f(x,t)=\mathrm{e}^s f(x\mathrm{e}^s,t\mathrm{e}^{-3s})+\frac{x}{a}(1-\mathrm{e}^{2s})+t(1-\mathrm{e}^{-2s}).
\end{aligned} \tag{۲۲.۲}$$

۹.۲.۲ مثال. در این مثال به بررسی معادله *کدریاشف - سینل چیخف*[۲] (K-S) خواهیم پرداخت که عبارتست از:

$$u_t+auu_x+bu_{x^3}+cu_{x^4}+du_{x^5}=eu_{x^2}. \tag{۲۳.۲}$$

که در آن a,b,c,d,e ثابت های مثبت می باشند. این معادله اخیراً توسط کدریاشف و سینل چیخف معرفی شده است که حالت کلی معادله مشهور *کاواهارا*[۳] است. این معادله در حقیقت نتیجه تحقیقاتی بر روی فرایند امواج غیر خطی در تیوبهای ویسکوالاستیک است که از اهمیت ویژه ای در این زمینه برخوردار است. همانند مثالهای قبل الگوریتم لی را برای یافتن تقارنها استفاده نمایید. برای این منظور گروه لی یک پارامتری از تبدیلات بی نهایت کوچک روی $(x^1=x,x^2=t,u^1=u)$ را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= x+s\xi(x,t,u)+O(s^2),\\
\tilde{t} &= t+s\eta(x,t,u)+O(s^2),\\
\tilde{u} &= u+s\varphi(x,t,u)+O(s^2),
\end{aligned} \tag{۲۴.۲}$$

s پارامتر گروه و $\xi^1=\xi,\xi^2=\eta,\varphi^1=\varphi$ تبدیلات بی نهایت کوچک برای متغیرهای مستقل و وابسته می باشند. میدان برداری متناظر با آنها را به فرم زیر در نظر بگیرید

$$\mathbf{v}=\xi(x,t,u)\partial_x+\eta(x,t,u)\partial_t+\varphi(x,t,u)\partial_u. \tag{۲۵.۲}$$

[۲] Kudryashov-Sinelshchikov

[۳] Kawahara

چون معادله از مرتبه پنج می باشد باید میدان فوق را تا مرتبه پنج امتداد داد

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(5)} &= \mathbf{v} + \varphi^{x}\,\partial_{u_x} + \varphi^{t}\,\partial_{u_t} + \varphi^{x^2}\,\partial_{u_{x^2}} + \varphi^{xt}\,\partial_{u_{xt}} + \cdots \\ &\quad \cdots + \varphi^{t^2}\,\partial_{u_{t^2}} + \varphi^{xt^4}\,\partial_{u_{xt^4}} + \varphi^{t^5}\,\partial_{u_{t^5}}. \qquad (۲۶.۲)\end{aligned}$$

با اثر امتداد یافته میدان برداری بر روی معادله به مد خود معادله (K-S) یعنی

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(5)}\Big(u_t + auu_x + bu_{x^3} + cu_{x^4} + du_{x^5} - eu_{x^2}\Big) = 0, \\ u_t + auu_x + bu_{x^3} + cu_{x^4} + du_{x^5} - eu_{x^2} = 0. \end{cases}$$

داریم

$$\begin{cases} au_x\varphi + au\varphi^x + \varphi^t - e\varphi^{x^2} + b\varphi^{x^3} + c\varphi^{x^4} + d\varphi^{x^5} = 0, \\ u_t + auu_x + bu_{x^3} + cu_{x^4} + du_{x^5} - eu_{x^2} = 0. \end{cases}$$

که ضرایب امتداد در آن، با توجه به مشخصه $Q = \varphi - \xi\, u_x - \eta\, u_t$ از روابط زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned} \varphi^x &= D_xQ + \xi u_{xx} + \eta u_{xt}, & \varphi^t &= D_tQ + \xi u_{xt} + \eta u_{tt}, \\ \varphi^{x^2} &= D_x^2Q + \xi u_{x^3} + \eta u_{x^2t}, & \varphi^{x^3} &= D_x^3Q + \xi u_{x^4} + \eta u_{x^3t}, \\ \varphi^{x^4} &= D_x^4Q + \xi u_{x^5} + \eta u_{x^4t}, & \varphi^{x^5} &= D_x^5Q + \xi u_{x^6} + \eta u_{x^6t}, \end{aligned}$$

با جایگذاری ضرایب امتداد، دستگاه معادلات مشخصه به صورت زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} &\xi_t = \varphi, && \xi_u = 0, && \xi_x = 0, \\ &\eta_x = 0, && \eta_u = 0, && \eta_t = 0, \\ &\varphi_t = 0, && \varphi_u = 0, && \varphi_x = 0, \end{aligned}$$

با حل دستگاه معادلات مشخصه، ضرایب میدان برداری حاصل می شوند

$$\xi = c_2at + c_3, \qquad \eta = c_1, \qquad \varphi = c_2.$$

که در آن ضرایب که در آن ضرایب c_1، c_2 و c_3 ثابتهای دلخواه هستند. بنابراین معادله (K-S) جبر لی $\mathfrak{g}$ سه بعدی از تقارنها با مولدهای زیر را می پذیرد

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \qquad \mathbf{v}_2 = \partial_t, \qquad \mathbf{v}_3 = t\partial_x + (\frac{1}{a})\partial_u.$$

روابط جابجایی بین میدانهای برداری $\mathbf{v}_i$ در جدول زیر بیان شده است.

$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_1$	0	0	0
$\mathbf{v}_2$	0	0	$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$	0	$-\mathbf{v}_1$	0

گروههای یک پارامتری G_i تولید شده توسط $\mathbf{v}_i$ به صورت زیر حاصل می شوند

$$G_1 : (t, x, u) \longmapsto (x + s, t, u),$$
$$G_2 : (t, x, u) \longmapsto (x, t + s, u),$$
$$G_3 : (t, x, u) \longmapsto (x + ts, t, u + s/a).$$

۱۰.۲.۲ نتیجه. اگر $u = f(x,t)$ جواب معادله (K-S) باشد آنگاه توابع زیر نیز جواب معادله می باشند

$$G_1(s) \cdot f(x, t) = f(x - s, t),$$
$$G_2(s) \cdot f(x, t) = f(x, t - s),$$
$$G_3(s) \cdot f(x, t) = f(x - ts, t) + s/a.$$

۱۱.۲.۲ مثال. یکی از معادلاتی که در مباحث مکانیک سیالات مورد توجه می باشد معادله *کاماسا- هلم*[۴] ، (C-H) است

$$u_t - u_{x^2t} + 3uu_x = 2u_xu_{x^2} + uu_{x^3},$$

که در سال ۱۹۹۳ توسط کاماسا و هلم، هنگام مطالعه امواج آب سطحی بدست آمده. در این معادله $u(x,t)$ بیانگر سرعت سیاله در زمان t در جهت x می باشد. مطالعات بیشتر بر روی این معادله سبب شد تا مدلهای مختلفی از معادله بدست آید از جمله معادله عمومی (gC-H)[۵] و معادله مرتبه بالاتر (hC-H)[۶] که در این مثال

---

[۴] Camassa-Holm

[۵] generalized Chamassa-Holm

[۶] higher order Camassa-Holm

مورد بررسی قرار می گیرند. ابتدا معادله (hC-H) را در نظر بگیرید که عبارتست از:

$$\begin{aligned}
B_k(u,u) &:= A_k^{-1}C_k(u) - uu_x,\\
A_k(u) &:= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\partial_x^2 ju,\\
C_k(u) &:= -uA_k(\partial_x u) + A_k(u\partial_x u) - 2\partial_x u A_k(u).
\end{aligned}$$

k عدد نامنفی است. در حالتی که $k=0$ و $k=1$ معادله فوق به ترتیب به معادلات اینویسید برگر [۷] و کاماسا-هلم تبدیل می شود. فرمول این معادله در سال ۲۰۰۹ توسط هلدن،[۸] کوکلیتد[۹] و کارلسن [۱۰] بدست آمده است. فرض کنید $k=2$ در این صورت

$$\Delta := u_t - u_{x^2t} + u_{x^4t} + 3uu_x - 2u_xu_{x^2} - uu_{x^3} + 2u_xu_{x^4} + uu_{x^5} = 0.$$

گروه لی یک پارامتری از تبدیلات بی نهایت کوچک و میدان برداری متناظر با آنها همانند مثال قبل می باشد همچنین امتداد میدان نیز باید تا مرتبه پنج صورت گیرد، زیرا مرتبه معادله پنج می باشد درنتیجه

$$\mathbf{v}^{(5)}\Big(u_t - u_{x^2t} + u_{x^4t} + 3uu_x - 2u_xu_{x^2} - uu_{x^3} + 2u_xu_{x^4} + uu_{x^5}\Big)\Big|_{\Delta=0} = 0$$

که معادل است با

$$\begin{aligned}
&(3u_x - u_{x^3} + u_{x^5})\varphi + \varphi^t + (3u - 2u_{x^2} + 2u_{x^4})\varphi^x - 2u_x\varphi^{x^2}\\
&\qquad -u\varphi^{x^3} - \varphi^{x^2t} + 2u_x\varphi^{x^4} + u\varphi^{x^5} + \varphi^{x^4t}\Big|_{\Delta=0} = 0,
\end{aligned}$$

با جایگذاری ضرایب امتداد در رابطه فوق، دستگاه معادلات مشخصه زیر حاصل خواهد شد

$$\begin{aligned}
&\xi_t = 0, && \xi_u = 0, && \xi_x = 0,\\
&\eta_x = 0, && \eta_u = 0, && \eta_t = -\frac{1}{u}\varphi,\\
&\varphi_t = 0, && \varphi_u = \frac{1}{u}\varphi, && \varphi_x = 0,
\end{aligned}$$

---

[۷] inviscid Burgers

[۸] Holden

[۹] Coclite

[۱۰] Karlsen

با حل دستگاه فوق ضرایب میدان برداری عبارتند از:

$$\xi = c_3, \qquad \eta = c_1 t + c_2, \qquad \varphi = -c_1 u.$$

که در آن ضرایب c_1، c_2 و c_3 ثابتهای دلخواه هستند. بنابراین معادله (hC-H) جبر لی $\mathfrak{g}$ سه بعدی از تقارنها با مولدهای زیر می پذیرد

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \qquad \mathbf{v}_2 = \partial_t, \qquad \mathbf{v}_3 = t\partial_t - u\partial_u.$$

روابط جابجایی بین میدانهای برداری $\mathbf{v}_i$ در جدول زیر بیان شده است.

$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_1$	0	0	0
$\mathbf{v}_2$	0	0	$\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_3$	0	$-\mathbf{v}_2$	0

جبر لی $\mathfrak{g}$ حل پذیر است، زیرا با فرض $\mathfrak{g}^{(1)} = \langle \mathbf{v}_i, [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] \rangle = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ برای $i = 1, 2, 3$ در اینصورت داریم

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle, \qquad \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = \langle \mathbf{v}_2 \rangle$$

بنابراین زنجیری از ایده آلها به صورت $\mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset 0$ وجود دارد که بیانگر حل پذیری جبرلی $\mathfrak{g}$ می باشد.

گروههای یک پارامتری G_i تولید شده توسط $\mathbf{v}_i$ به صورت زیر حاصل می شوند

$$\begin{aligned} G_1 &: (t, x, u) \longmapsto (x + s, t, u), \\ G_2 &: (t, x, u) \longmapsto (x, t + s, u), \\ G_3 &: (t, x, u) \longmapsto (x, \mathrm{e}^{s} t, \mathrm{e}^{-s} u). \end{aligned}$$

۱۲.۲.۲ نتیجه. اگر $u = f(x, t)$ جواب معادله (hC-H) باشد آنگاه توابع زیر نیز جواب معادله می باشند

$$\begin{aligned} G_1(s) \cdot f(x, t) &= f(x - s, t), \\ G_2(s) \cdot f(x, t) &= f(x, t - s), \\ G_3(s) \cdot f(x, t) &= f(x, t\mathrm{e}^{-s})\mathrm{e}^{-s}. \end{aligned}$$

معادله (gC-H) دارای فرمول زیر می باشد

$$u_t - u_{x^2t} + 3uu_x - 2u_xu_{x^2} - uu_{x^3} + k(u_x - u_{x^3}) = 0.$$

که در آن $k \neq 0$، دارای تقارنهایی به فرم

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \qquad \mathbf{v}_2 = \partial_t, \qquad \mathbf{v}_3 = t\partial_t + kt\partial_x - u\partial_u.$$

است که تشکیل جبر لی حل پذیر می هند زیرا، زنجیری از ایده آلها به صورت $0 \subset \mathfrak{g}^{(2)} \subset \mathfrak{g}^{(1)}$ وجود دارد که در آن

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle, \qquad \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = \langle k\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle$$

روابط جابجایی بین میدانهای برداری $\mathbf{v}_i$ در جدول زیر بیان شده است.

$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_1$	0	0	0
$\mathbf{v}_2$	0	0	$k\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_3$	0	$-k\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$	0

گروههای یک پارامتری G_i تولید شده توسط $\mathbf{v}_i$ به صورت زیر حاصل می شوند

$$G_1 : (t, x, u) \longmapsto (x + s, t, u),$$
$$G_2 : (t, x, u) \longmapsto (x, t + s, u),$$
$$G_3 : (t, x, u) \longmapsto (kt(\mathrm{e}^s - 1) + x, \mathrm{e}^s t, \mathrm{e}^{-s} u).$$

۱۳.۲.۲ نتیجه. اگر $u = f(x, t)$ جواب معادله (hC-H) باشد آنگاه توابع زیر نیز جواب معادله می باشند

$$G_1(s) \cdot f(x, t) = f(x - s, t),$$
$$G_2(s) \cdot f(x, t) = f(x, t - s),$$
$$G_3(s) \cdot f(x, t) = f(x + kt(\mathrm{e}^{-s} - 1), t\mathrm{e}^{-s})\mathrm{e}^s.$$

۱۴.۲.۲ مثال. معادله *دسته-ویتهام*[۱۱] مدلی است برای بیان انحرافات امواج کوتاه در الاستیکهای فشرده که عبارت است از

$$u_{xt} = 2uu_{xx} + u_x^2,$$

برای یافتن تقارنهای این معادله، میدان برداری **v** را همانند مثالهای قبل در نظر بگیرید و امتداد مرتبه دوم آن را بر معادله اثر دهید

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(2)}\left(u_{xt} - 2uu_{xx} - u_x^2\right) = 0, \\ u_{xt} = 2uu_{xx} + u_x^2. \end{cases} \tag{۲۷.۲}$$

معادلات مشخصه حاصل از آن عبارتند از

$$\begin{aligned} &\xi_t = -2\varphi + 2u\varphi_u, && \xi_u = 0, && \xi_x = \varphi_u + \eta_t, && \varphi_{tu} = 0, \\ &\eta_x = 0, && \eta_u = 0, && \eta_{tt} = -2\varphi_x, && \varphi_{uu} = 0, \\ &\varphi_{tx} = 0, && \varphi_{xu} = 0, && \varphi_{xx} = 0, \end{aligned}$$

دستگاه فوق دارای جواب زیر با ضرایب ثابت و دلخواه $c_1, \cdots, c_5$ و تابع مشتق پذیر $f(t)$ می باشد

$$\begin{aligned} &\xi = (c_1 t + c_2 + c_4)x - 2f(t) + c_5, && \eta = \frac{1}{2}c_1 t^2 + c_2 t + c_3, \\ &\varphi = -\frac{1}{2}c_1 x + c_4 u + f'(t). \end{aligned}$$

بنابراین تقارنهای معادله ویتهام عبارتند از

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 = \partial_x, && \mathbf{v}_2 = \partial_t, \\ &\mathbf{v}_3 = x\partial_x + t\partial_t, && \mathbf{v}_4 = x\partial_x + u\partial_u, \\ &\mathbf{v}_5 = tx\partial_x + \frac{t^2}{2}\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_u, && \mathbf{v}_6 = f'(t)\partial_u - 2f(t)\partial_x. \end{aligned}$$

[۱۱] Whitham-type

گروههای یک پارامتری G_i تولید شده توسط $\mathbf{v}_i$ به صورت زیر خواهند بود

$$
\begin{aligned}
&G_1 : (t, x, u) \longmapsto (x + s, t, u),\\
&G_2 : (t, x, u) \longmapsto (x, t + s, u),\\
&G_3 : (t, x, u) \longmapsto (\mathrm{e}^s x, \mathrm{e}^s t, u),\\
&G_4 : (t, x, u) \longmapsto (\mathrm{e}^s x, t, \mathrm{e}^s u),\\
&G_5 : (t, x, u) \longmapsto (\frac{4x}{(ts-2)^2}, \frac{2t}{2-ts}, \frac{xs + tus - 2u}{ts - 2}),\\
&G_6 : (x, t, u) \longmapsto (x - 2f(t)s, t, f'(t)s + u).
\end{aligned}
$$

۱۵.۲.۲ نتیجه. اگر $u = h(x, t)$ جواب معادله ویتهام باشد آنگاه توابع زیر نیز جواب معادله می باشند

$$
\begin{aligned}
&G_1(s) \cdot h(x, t) = h(x - s, t),\\
&G_2(s) \cdot h(x, t) = h(x, t - s),\\
&G_3(s) \cdot h(x, t) = h(x\mathrm{e}^{-s}, t\mathrm{e}^{-s}),\\
&G_4(s) \cdot h(x, t) = \mathrm{e}^s h(x\mathrm{e}^{-s}, t),\\
&G_5(s) \cdot h(x, t) = \frac{h(\frac{4x}{(ts+2)^2}, \frac{2t}{ts+2})ts + 2h(\frac{4x}{(ts+2)^2}, \frac{2t}{ts+2}) - xs}{ts + 2},\\
&G_6(s) \cdot h(x, t) = h(x + 2f(t)s, t) + f'(t)s.
\end{aligned}
$$

۳.۲ تبدیلات برخوردی

حالتی را در نظر بگیرید که n متغیر مستقل $x = (x^1, ..., x^p)$ و یک متغیر وابسته $u(x)$ داشته باشیم.

۱.۳.۲ تعریف. تبدیل برخوردی تبدیلی است به فرم

$$
\begin{aligned}
(x^*)^i &= f^i(x, u, \partial u),\\
u^* &= g(x, u, \partial u),\\
u_i^* &= h_i(x, u, \partial u),
\end{aligned}
\qquad (۲۸.۲)
$$

$i = 1, \ldots, p$، که در فضای $(x, u, \partial u)$ یک به یک است و حافظ شرط برخوردی است، یعنی

$$du^* = u_i^* d(x^*)^i. \tag{۲۹.۲}$$

فرض بر آنست که توابع f^i و g نسبت به مشتقات مرتبه اول u وابستگی داشته باشند، در غیر اینصورت تبدیل برخوردی یک تبدیل نقطه ای است.

۲.۳.۲ قضیه. روابط (۲۸.۲)، یک تبدیل برخوردی تعریف می کنند، اگر و تنها اگر توابع f^i، g، h_i برای $i = 1, \ldots, p$ در روابط زیر صدق کنند

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u_i} &= h_j \frac{\partial f^j}{\partial u_i}, \\ \frac{\partial g}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial g}{\partial u} &= h_j \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial f^j}{\partial u}\right). \end{aligned} \tag{۳۰.۲}$$

اثبات. [۵۵]. □

حال فرض کنید تبدیل برخوردی (۲۸.۲) گروه لی یک پارامتری از تبدیلات برخوردی بصورت زیر باشد

$$\begin{aligned} (x^*)^i &= x^i + \varepsilon \xi^i(x, u, \partial u) + O(\varepsilon^2), \\ u^* &= u + \varepsilon \eta(x, u, \partial u) + O(\varepsilon^2), \\ u_i^* &= u_i + \varepsilon \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{۳۱.۲}$$

برای $i = 1, \ldots, p$، با مولد بی نهایت کوچک

$$V = \xi^i(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u_i}. \tag{۳۲.۲}$$

۳.۳.۲ قضیه. روابط (۳۱.۲) گروه لی یک پارامتری از تبدیلات برخوردی تعریف می کنند اگر و تنها اگر توابع ξ^i و η در رابطه زیر صدق کنند

$$\frac{\partial \eta}{\partial u^i} - u_j \frac{\partial \xi^j}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, p. \tag{۳۳.۲}$$

اثبات. از رابطه (۳۱.۲) داریم

$$\eta_j^{(1)} = \frac{\partial \eta}{\partial x^j} + u_j \frac{\partial \eta}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial u_i} - [\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + u_j \frac{\partial \xi^k}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial \xi^k}{\partial u_i}] u_k, \quad j = 1, \ldots, p.$$

روابط (۳۱.۲) گروه لی یک پارامتری از تبدیلات برخوردی تعریف می کنند اگر و تنها اگر $\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial u_{ik}} = 0$ برای $i, j, k = 1, \ldots, p$ و این به اثبات قضیه منجر خواهد شد.

۴.۲ تبدیلات مرتبه بالاتر

ملاحضه گردید که تبدیلات برخوردی تبدیلاتی هستند با مشخصهٔ Q که مناسب برای تحلیل معادلات PDE مرتبه اول می باشند، اما چنین تبدیلاتی توانایی واکاوی و کنکاش در معادلات مرتبه بالاتر را ندارند. به همین جهت اولین بار لی به این موضوع پرداخت و سعی کرد تا با ارائهٔ تبدیلاتی به رفع این نقیصه بپردازد. به موازات لی، بکلاند[۱۲] پرسشی را اینگونه مطرح کرد که کدام تبدیلات هستند که فرمهای دیفرانسیلی به شکل

$$du = u_i dx^i, \qquad du_i = u_{ij} dx^j, \tag{۳۴.۲}$$

را ناوردا نگه می دارند؟ او پاسخ این سؤال را در تبدیلاتی یافت که به نوعی خاص از تبدیلات خمها در صفحه و رویه ها در فضای سه-بعدی هستند. اما در سال ۱۸۷۴ لی توضیح داد که تبدیلاتی از مراتب بالاتر موجودند که واجد شرایط فوق هستند و این کشف لی مشوق بکلاند شد تا نتایج خود را به صورت عمیق تر و اصلاح شده در سال ۱۸۷۶ ارائه دهد. بکلاند تبدیلاتی را با ضابطهٔ

$$\bar{x}^i = \xi^i(x, u^{(k)}), \qquad \bar{u}^\alpha = \psi^\alpha(x, u^{(k)}), \tag{۳۵.۲}$$

از فضای کامل E با متغیرهای مستقل $x = (x^1, ..., x^p)$ و $u = (u^1, ..., u^q)$ به فضای جت مرتبه $k-$ام E معرفی کرد و نشان داد چنین تبدیلاتی فرمهای (۳۴.۲) را ناوردا نگه می دارند. به اینگونه تبدیلات که در آن $u^{(k)}$ نشاندهندهٔ مشتقات جزئی u می باشد *تبدیلات مرتبه بالاتر* می گوییم که تبدیلیست یک به یک به توی $\mathbf{J}^k(E)$ به شرط آنکه نه نقطه‌ای باشد و نه برخوردی.

گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= f^i(x, u; \varepsilon) = e^{\varepsilon \mathbf{v}} x^i, && i = 1, ..., p, \\ \bar{u}^\alpha &= g^\alpha(x, u; \varepsilon) = e^{\varepsilon \mathbf{v}} u^\alpha, && \alpha = 1, ..., q, \end{aligned} \tag{۳۶.۲}$$

با مولد بینهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \eta_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

---
[۱۲] A.V. Backlund

حال خانواده ای از رویه های $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x)\}$ را در نظر بگیرید که تحت تبدیلات (۳۶.۲) ناوردا نیستند. برای برخی از مقادیر ε این تبدیلات نقطهٔ (x,u) روی رویهٔ Θ را به نقطهٔ $(\bar{x},\bar{u})$ با معادلات

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= f^i(x,\Theta(x);\varepsilon), && i=1,\dots,p, \\ \bar{u}^\alpha &= g^\alpha(x,\Theta(x);\varepsilon), && \alpha=1,\dots,q. \end{aligned} \tag{۳۷.۲}$$

تبدیل می کند. برای این ε، x را می توان از روابط (۳۷.۲) با جایگذاری

$$x = f(\bar{x},\bar{u};-\varepsilon),$$

حذف کرد. آنگاه

$$\begin{aligned} \bar{u} &= g\Big(f(\bar{x},\bar{u};-\varepsilon),\Theta(f(\bar{x},\bar{u};-\varepsilon));\varepsilon\Big) \\ &= g\Big(e^{-\varepsilon\mathbf{v}}\bar{x},\Theta(e^{-\varepsilon\mathbf{v}});\varepsilon\Big), \end{aligned} \tag{۳۸.۲}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \\ &= \sum_{i=1}^{p}\xi^i(\bar{x},\bar{u})\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\eta^\alpha(\bar{x},\bar{u})\frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha}. \end{aligned}$$

با جایگذاری (x,u,ε) به جای $(\bar{x},\bar{u},-\varepsilon)$ در (۳۸.۲) داریم:

$$\begin{aligned} u &= g\Big(e^{\varepsilon\mathbf{v}}x,\Theta(e^{\varepsilon\mathbf{v}}x);-\varepsilon\Big) \\ &= g\Big(f(x,u;\varepsilon),\Theta(f(x,u;\varepsilon));-\varepsilon\Big). \end{aligned} \tag{۳۹.۲}$$

۱.۴.۲ قضیه. فرض کنید خانوادهٔ رویه های $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x)\}$ تحت تبدیلات (۳۶.۲) ناوردا باشد. در اینصورت تبدیل (۳۹.۲) این خانواده از رویه ها را به خانوادهٔ رویه های یک پارامتری $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x;\varepsilon)\}$ تصویر می کند.

برای تعمیم گروههای یک پارامتری یا برخوردی به تبدیلات یک پارامتری مراتب بالاتر لازم است نحوهٔ تصویر رویه ها را از دیدگاه عمل گروه روی فضای توابع $u=u(x)$ به جای عمل روی فضای کامل یا فضای جت مرتبه اول بررسی کنیم. برای چنین کاری باید تبدیل خانوادهٔ رویه های $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x)\}$ به خانوادهٔ رویه های یک

پارامتری $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x;\varepsilon)\}$ تحت تبدیلات

$$\bar{x} = x,$$
$$\bar{u} = \eta(x;\varepsilon) = (e^{\varepsilon\tilde{\mathbf{v}}}u)\Big|_{u=\Theta(x)},$$

توصیف کرد.

اگر $\tilde{\mathbf{v}}$ مولد بینهایت کوچک نظیر تبدیل فوق باشد آنگاه تبدیلات (۳۷.۲) و (۳.۲) را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$\bar{x}^i = x^i + \varepsilon\xi^i(x,\Theta(x)) + O(\varepsilon^2), \qquad i = 1,...,p$$
$$\bar{u}^\alpha = u^\alpha + \varepsilon\eta^\alpha(x,\Theta(x)) + O(\varepsilon^2), \qquad \alpha = 1,...,q. \tag{۴۰.۲}$$

برای یافتن $\eta^\alpha(x;\varepsilon)$ باید x را از معادله دوم (۴۰.۲) حذف کرد. از معادله اول (۴۰.۲)داریم:

$$x^i = \bar{x}^i - \varepsilon\xi^i(\bar{x},\Theta(\bar{x})) + O(\varepsilon^2), \qquad i = 1,...,p, \tag{۴۱.۲}$$

حال باجایگذاری (۴۱.۲) در (۴۰.۲) و بسط آن حول $\varepsilon = 0$ تابع η^α محاسبه می شود.

$$\eta^\alpha(\bar{x};\varepsilon) = \Theta^\alpha(\bar{x}) + \varepsilon\Big[\eta^\alpha(\bar{x},\Theta(\bar{x})) - \frac{\partial\Theta^\alpha(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}\xi^i(\bar{x},\Theta(\bar{x}))\Big] + O(\varepsilon^2). \tag{۴۲.۲}$$

حال با جایگذاری x به جای $\bar{x}$ در (۴۲.۲) تصویر تبدیل خانوادهٔ رویه های $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x)\}$ را تحت تبدیلات یک پارامتری (۴۰.۲) بدست می آوریم. به بیان دیگر خانوادهٔ رویه های $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x;\varepsilon)\}$ تحت تبدیل

$$\begin{aligned}\bar{u}^\alpha &= \eta(x;\varepsilon)\\ &= \Theta^\alpha(x) + \varepsilon\Big[\eta^\alpha(x;\Theta(x)) - \frac{\partial\Theta^\alpha(x)}{\partial x^i}\xi^i(x,\Theta(x))\Big] + O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

تصویر می شوند. حال آن دسته از رویه هایی را در نظر بگیرید که تحت این تبدیل متغیرهای مستقل آنها ناوردا باقی می مانند به این معنا که

$$\bar{x}^i = x^i, \qquad i = 1,...,p,$$
$$\bar{u}^\alpha = u^\alpha + \varepsilon\Big[\eta^\alpha(x,u) - u_i^\alpha\xi^i(x,u)\Big] + O(\varepsilon^2), \tag{۴۳.۲}$$

بنابراین مولد بینهایت کوچک نظیر تبدیل فوق به شکل

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{\alpha=1}^{q} \Big[\eta^{\alpha}(x,u) - \sum_{i=1}^{p} u_i^{\alpha} \xi(x,u)\Big] \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}, \tag{۴۴.۲}$$

نوشته می شود. این مولد بینهایت کوچک را *شکل مشخصه* (*تکاملی*) مولد بینهایت کوچک $\mathbf{v}$ می نامند.

۲.۴.۲ مثال. اگر $E = \mathbb{R}^2$ و گروه تبدیل گروه یک پارامتری انتقال باشد، آنگاه

$$\bar{x} = x + \varepsilon, \qquad \bar{u} = u,$$

لذا در این حالت داریم

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \tilde{\mathbf{v}} = -u_x \frac{\partial}{\partial u}.$$

اما در حالتیکه تبدیل تجانس باشد،

$$\bar{x} = e^{\varepsilon} x, \quad \bar{u} = e^{2\varepsilon} u,$$

مولد بینهایت کوچک تبدیل به صورت زیر خواهد بود.

$$\mathbf{v} = x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = (2u - xu_x)\frac{\partial}{\partial u}.$$

۵.۲ تبدیلات موضعی

در ادامه نوعی دیگر از تبدیلات را معرفی خواهد شد که تعمیمی از مفهوم گروههای لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای با مولد بینهایت کوچک $\tilde{\mathbf{v}}$ به تبدیلی موضعی از تبدیلات یک پارامتری از مرتبه بالاتر با مولد بینهایت کوچک به شکل

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{\alpha=1}^{q} \tilde{\eta}^{\alpha}(x,u,u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}, \tag{۴۵.۲}$$

است به گونه ای که مؤ لفه های آن وابسته به مشتقات u تا حداکثر مرتبه $n \leq 1$ می باشد.

تبدیل نظیر مولد (۴۵.۲) را می توان به صورت

$$
\begin{aligned}
\bar{x}^i &= x^i, && i = 1, ..., n, \\
\bar{u}^\alpha &= u^\alpha + \varepsilon \tilde{\eta}^\alpha(x, u^{(k)}) + O(\varepsilon^2), && \alpha = 1, ..., q, \qquad (۴۶.۲)
\end{aligned}
$$

نمایش داد. برای محاسبهٔ جملات مراتب بالاتر در تبدیل (۴۶.۲) باید مولد بینهایت کوچک (۴۵.۲) امتداد داد تا بتوان عمل آن را بر مشتقات u بررسی کرد. بنابراین به ازای $k = 2, 3, ...$، $i, i_j = 1, ..., p$، $\alpha = 1, ..., q$، و

$$
\begin{aligned}
\tilde{\eta}_i^{(1)} &= D_i \tilde{\eta}^\alpha, \\
\tilde{\eta}_{i_1 \cdots i_k}^{(k)\alpha} &= D_{i_k} \tilde{\eta}_{i_1 \cdots i_{k-1}}^{(k-1)\alpha}, \qquad (۴۷.۲)
\end{aligned}
$$

امتداد مرتبه بینهایت مولد بینهایت کوچک (۴۵.۲) با میدان برداری زیر تعریف می شود.

$$
\tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)} = \tilde{\eta}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \tilde{\eta}_i^{(1)\alpha} \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \cdots + \tilde{\eta}_{i_1 \cdots i_k}^{(k)\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \cdots i_k}^\alpha} + \cdots , \qquad (۴۸.۲)
$$

پس

۱.۵.۲ تعریف. یک *تبدیل موضعی* مرتبه بالاتر از تبدیلات یک پارامتری به شکل

$$
\begin{aligned}
\bar{x}^i &= x^i, && i = 1, ..., p, \\
\bar{u}^\alpha &= e^{\varepsilon \tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)}} u^\alpha = u^\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} (\tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)})^{(j-1)} \tilde{\eta}^\alpha, && \alpha = 1, ..., q, \qquad (۴۹.۲)
\end{aligned}
$$

نوشته می شود.

هر تبدیل یک پارامتری از مرتبه بالاتر دارای دو ویژگی اصلی است که در ذیل به آن اشاره می شود.

۱) هر تبدیل موضعی یک پارامتری هم ارز یک گروه لی از تبدیلات موضعی یک پارامتری است اگر و تنها اگر هر $\tilde{\eta}^\alpha$به شکل

$$
\tilde{\eta}^\alpha = \eta^\alpha(x, u) - u_i^\alpha \xi^i(x, u),
$$

نوشته شود، یعنی هر $\tilde{\eta}^\alpha$ تنها نسبت به مشتقات مرتبه اول u_i^αها خطی باشد.

۲) هر تبدیل موضعی یک پارامتری هم ارز یک گروه لی از تبدیلات برخوردی یک پارامتری است اگر و تنها

اگر $q=1$ بوده و $\tilde{\eta}_\alpha$ را بتوان به صورت

$$\tilde{\eta}^\alpha = \tilde{\eta}^\alpha(x, u^{(1)}),$$

نوشت، یعنی $\tilde{\eta}^\alpha$ها به صورت ترکیب خطی یا غیر خطی از مشتقات مرتبه اول u باشد.

۲.۵.۲ قضیه. یک تبدیل موضعی یک پارامتری با مولد بینهایت کوچک

$$\mathbf{v} = Q(x, u, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u},$$

هم ارز یک تبدیل برخوردی از گروههای لی یک پارامتری با مولد بینهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{p} \eta_i^{(1)}(x, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u_i},$$

می باشد، به قسمی که ضرایب این مولد در عبارات زیر صدق می کنند.

$$\begin{aligned}
\xi^i(x, u^{(1)}) &= \frac{\partial Q}{\partial u_i},\\
\eta(x, u^{(1)}) &= u_i\frac{\partial Q}{\partial u_i} - Q, \qquad i = 1, ..., p,\\
\eta_i^{(1)}(x, u^{(1)}) &= -\frac{\partial Q}{\partial u_i} - u_i\frac{\partial Q}{\partial u}.
\end{aligned}$$

اثبات. [۱۷]. □

نتیجهٔ مستقیم این قضیه آن است که هر تبدیل موضعی یک پارامتری با مولد بینهایت کوچک

$$\eta(x, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u},$$

به طور یکتا هم ارز با مولد بینهایت کوچک یک تبدیل برخوردی از گروههای لی یک پارامتری می باشد که $\eta(x, u, u^{(1)})$ مشخصهٔ آن است.

نکته مهمی که باید به آن توجه کرد آن است که تبدیلات موضعی یک پارامتری مراتب بالاتر نه یک تبدیل موضعی یک پارامتری هستند و نه یک تبدیل برخوردی از گروههای لی یک پارامتری. به چنین تبدیلاتی *تبدیل لی- بکلاند* یا یک *تبدیل نوتر* می گویند.

۳.۵.۲ مثال. به ازای $p=q=1$ عملگر $\mathbf{v}=u_{xx}\partial/\partial u+\cdots$ تبدیل

$$\bar{x}=x, \qquad \bar{u}=u+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^j}{j!}u_{2j},$$

را تولید می کند که یک تبدیل مرتبه بالاتر است.

۴.۵.۲ مثال. مولد بینهایت کوچک

$$\tilde{\mathbf{v}}=\Big(\frac{1}{2}u^2u_x+2u_xu_{xx}+uu_{xxx}+\frac{3}{5}u_{xxxxx}\Big)\frac{\partial}{\partial u},$$

یک تبدیل مرتبه بالاتر برای معادلهٔ KdV، $u_t+uu_x+u_{xxx}=0$ است.

۶.۲ تقارنهای برخوردی و تقارنهای مرتبه بالاتر

تبدیل موضعی یک پارامتری (۴۹.۲) دستگاه معادلات جزئی $\Delta=0$ را ناوردا نگه می دارد اگر و تنها اگر امتداد مرتبه $n-$ام مولد بینهایت کوچک تبدیل یعنی میدان برداری

$$\mathbf{v}^{(n)}=\tilde{\eta}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u_i^{\alpha}}+\tilde{\eta}_i^{(1)\alpha}\frac{\partial}{\partial u_i^{\alpha}}+\cdots+\tilde{\eta}_{i_1\cdots i_n}^{(k)\alpha}\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_n}^{\alpha}}, \tag{۵۰.۲}$$

منیفلد جوابهای معادله را در فضای جت مرتبه $n-$ام آن ناوردا نگه دارد. یعنی هر خانواده از رویه جوابها را به خانواده دیگری از رویه جوابها بنگارد.

۱.۶.۲ تعریف. هر مولد بینهایت کوچک تبدیل (۴۹.۲) که امتداد مرتبه $n-$ام آن (۵۰.۲) دستگاه معادلات $\Delta=0$ را ناوردا نگه دارد یک *تقارن برخوردی* یا *تقارن مرتبه بالاتر* برای دستگاه است.

قضیه ای که در ادامه می آید الگوریتم محاسبه چنین تقارنهایی را ارائه داده و مشابه قضیه ناوردایی بینهایت کوچک برای یافتن تقارنهای نقطه‌ای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل است.

۲.۶.۲ قضیه. هرگاه $\mathbf{v}=\sum_{\alpha=1}^{q}\tilde{\eta}^{\alpha}(x,u,u_{(k)})\partial/\partial u^{\alpha}$ یک مولد بینهایت کوچک از مرتبه $k\geq 0$ برای تبدیل موضعی یک پارامتری (۴۹.۲) و $\mathbf{v}^{(n)}$ امتداد مرتبه $n-$ام آن باشد، آنگاه دستگاه معادلات $\Delta=0$، $\mathbf{v}$ را به عنوان یک تقارن نقطه‌ای، برخوردی یا مرتبه بالاتر می پذیرد اگر و تنها اگر $\mathbf{v}^{(n)}(\Delta)=0$.

در ادامه نوعی دیگر از تقارنها معرفی می شوند که تقارنهای نقطه‌ای، برخوردی و مرتبه بالاتر حالت خاصی از آنها هستند و از آنها به عنوان تقارنهای تعمیم یافته یاد می شود.

۳.۶.۲ تعریف. یک *میدان برداری تعمیم یافته* به صورت

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \eta^\alpha(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{۵۱.۲}$$

بیان می شود به قسمی که توابع ξ^i و η^α توابع هموار می باشند.

به عنوان مثال $\mathbf{v} = xu_x\partial_x + u_{xx}\partial_u$ یک میدان برداری تعمیم یافته روی فضای $E \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است.

۴.۶.۲ تعریف. *امتداد مرتبه $n-$ام* میدان برداری (۵۱.۲) یک میدان برداری به شکل

$$\mathbf{v}^{(n)} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=0}^{q} \sum_{\sharp J \leq n} \eta_J^\alpha(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha},$$

است به طوریکه J یک اندیس چندگانه بوده و

$$\eta_J^\alpha = D_J\Big(\eta^\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha\Big) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha. \tag{۵۲.۲}$$

با استفاده از این فرمول امتداد مرتبه اول میدان برداری در مثال فوق برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(1)} = xu_x \frac{\partial}{\partial x} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u} + \Big[u_{xxx} - (xu_{xx} + u_x)u\Big] \frac{\partial}{\partial u_x}.$$

ضریب $\partial/\partial u_x$ در امتداد فوق از طریق $D_x(u_{xx} - xu_x^2) = xu_xu_{xx} = D_x(u_{xx}) - D_x(xu_x)u_x$ محاسبه می شود.

همانند تبدیلات مراتب بالاتر در قسمت قبل می توان امتداد مرتبه بینهایت یک میدان برداری تعمیم یافته را تعریف کرد. به این صورت که اگر $\mathbf{v}$ یک میدان برداری تعمیم یافته باشد آنگاه:

$$\mathbf{v}^{(\infty)} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=0}^{q} \sum_{J} \eta_J^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{۵۳.۲}$$

و η_J^α با فرمول (۵۲.۲) بیان می شود. اما باید توجه کرد که اگر $F(x, u^{(n)})$ یک تابع دیفرانسیلی مرتبه $n-$ام باشد، $\mathbf{v}^{(\infty)}(F) = \mathbf{v}^{(n)}(F)$ مجدداً یک تابع دیفرانسیلی است. به ویژه اگر F تنها به مشتقات تا مرتبه متناهی u وابسته باشد تعداد متناهی از جملات (۵۳.۲) برای محاسبهٔ $\mathbf{v}^{(\infty)}(F)$ کافیست. از این گفته یک تعبیر هندسی برای میدانهای برداری تعمیم یافته می توان استخراج کرد و آن این است که هر میدان برداری تعمیم یافته را می توان به عنوان یک تقارن بینهایت کوچک برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مد نظر قرار داد. قضیهٔ ناوردایی بینهایت کوچک اینجا نیز برقرار است.

۵.۶.۲ قضیه. میدان برداری تعمیم یافته $\mathbf{v}$ یک تقارن بینهایت کوچک تعمیم یافته برای دستگاه معادلات

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \qquad \nu = 1, ..., m,$$

است، اگر و تنها اگر

$$\mathbf{v}^{(\infty)}(\Delta_\nu) = 0. \tag{۵۴.۲}$$

با توجه به این قضیه اگر ضرایب میدان برداری تعمیم یافته $\mathbf{v}$ به مشتقات مرتبه k−ام وابسته باشد، آنگاه سمت راست فرمول (۵۳.۲) به مشتقات مرتبه $(n+k)$−ام وابسته می شود. برای آنکه رابطهٔ (۵۴.۲) روی کلیهٔ جوابها اثر کند لازم است شرایطی روی Δ و امتداد مرتبه s−ام آن $\Delta^{(s)}$ برای $s = 0, 1, ...$ قرار دهیم.

فرض فراگیر: کلیهٔ دستگاههای معادلات دیفرانسیل کلاً غیر تباهیده هستند به این معنا که خود دستگاه و امتداد آنها هر دو از رتبهٔ ماکسیمال و موضعاً حلپذیرند.

محاسبهٔ تقارنهای تعمیم یافته در اصل مشابه محاسبهٔ تقارنهای نقطه‌ای معادلات دیفرانسیل است. اما پیش از آن نوعی خاص از میدانهای برداری را معرفی می کنیم.

۶.۶.۲ تعریف. فرض کنید $\mathbf{Q}(x, u^{(n)}) = (Q_1(x, u^{(n)}), ..., Q_q(x, u^{(n)}))$ یک q−تایی از توابع هموار دیفرانسیلی باشند. میدان برداری تعمیم یافته

$$\mathbf{v_Q} = \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{۵۵.۲}$$

را یک *میدان برداری تکاملی* و $\mathbf{Q}$ را *مشخصهٔ* آن می نامند. بنابراین می توان دید که یک میدان برداری تکاملی با صفر قرار دادن ضرایب ∂_{x^i} در میدان برداری تعمیم یافته ساخته می شود.

امتداد مرتبه بینهایت میدان برداری (۵۵.۲) با فرمول زیر بیان می شود.

$$\mathbf{v_Q} = \sum_{\alpha, J} D_J D_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}.$$

هر گاه مشخصهٔ یک میدان برداری تعمیم یافته را به صورت

$$Q_\alpha = \eta^\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha, \qquad \alpha = 1, ..., q, \tag{۵۶.۲}$$

بیان کنید آنگاه برای چنین میدان برداری تعمیم یافته‌ای می توان یک نمایش تکاملی بدست آورد. این مطلب در لم زیر آورده شده است.

۷.۶.۲ لم. یک میدان برداری تعمیم یافته یک تقارن دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$ است اگر و تنها اگر $\mathbf{v_Q}$ نمایش تکاملی آن باشد.

حال به نحوهٔ محاسبهٔ تقارنهای تعمیم یافته باز می گردیم. این روش تا حدودی شبیه محاسبهٔ سایر تقارنهاست با این شرط که ابتدا باید تقارن موردنظر را به حالت تکاملی آن تبدیل کرد زیرا این امر به کاهش تعداد توابع مجهول از $p+q$ به q کمک می کند. در ادامه برای تبیین این روش چند مثال می آوریم.

۸.۶.۲ مثال. هدف یافتن تقارنهای تعمیم یافته معادلهٔ موج غیر خطی $u_t = uu_x$ است. ابتدا فرض کنید $\mathbf{v}_Q = Q(x,t,u^{(n)})\partial_u$ یک تقارن تعمیم یافته آن به شکل تکاملی باشد. به ازای هریک از مشتقات u نسبت به t می توان مقدار آن یعنی uu_x را از معادله قرار داد. با این روند به جای u_{xt}، $uu_{xx} + u_x^2$، به جای u_{tt}، $u^2u_{xx} + 2uu_x^2$ و... قرار می دهیم. پس هر تقارن معادله به طور یکتا به مشخصهٔ $Q = Q(x,t,u,u_x,u_{xx},...)$ نظیر می شود. حال شرط ناوردایی را بر معادله اعمال می کنیم.

$$\mathbf{v}^{(\infty)}(u_t - uu_x) = 0 \quad \Rightarrow \quad D_tQ = uD_xQ + u_xQ. \tag{۵۷.۲}$$

اما برای محاسبهٔ تقارنهای مرتبه دوم به مشخصهٔ $Q = Q(x,t,u,u_x,u_{xx})$ نیازمندیم. لذا رابطهٔ (۵۷.۲) را می توان به صورت زیر ساده کرد.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - u\frac{\partial Q}{\partial x} + u_x^2\frac{\partial Q}{\partial u_x} + 3u_xu_{xx}\frac{\partial Q}{\partial u_{xx}} = u_xQ.$$

با حل این معادله تابع Q بدست می آید.

$$Q = u_xf\Big(x+tu, u, t+\frac{1}{u_x}, \frac{u_{xx}}{u_x^3}\Big).$$

مطابق فرمول (۵۶.۲) مشخصه معادله باید به صورت

$$Q = \eta(x,t,u) - u_x\xi^1(x,t,u) - uu_x\xi^2(x,t,u),$$

باشد که

$$\mathbf{v} = \xi^1\partial_x + \xi^2\partial_t + \eta\partial_u,$$

مولد بینهایت کوچک آن است. به ازای تابعی چون η

$$Q = u - x\eta(x+tu, u) + (tu_x + 1)\eta(x+tu, u),$$
$$\eta = -t\eta - \xi^1 - u\xi^2,$$

در اینصورت می توان مقادیر بیشماری برای ξ^1 و ξ^2 در نظر گرفت. در حالت خاصی که $\xi^1 + u\xi^2 = 0$، فرم تکاملی $\mathbf{v}$ بدیهی است، زیرا Q صفر می شود. پس هر تقارن هندسی معادله هم ارز با میدان برداری

$$\mathbf{v} = -(\eta + t\eta)\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u},$$

به ازای $\xi^2 = 0$ است. حال اگر مسئله را به تقارنهایی تحدید کنید که عمل نظیر آن بر متغیرهای مستقل، مستقل از متغیرهای وابسته باشد (تبدیلات تصویرپذیر)، زیر گروه نظیر این تبدیلات به مولدهای بینهایت کوچک زیر تولید می شوند.

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \qquad \mathbf{v}_2 = \partial_t, \qquad \mathbf{v}_3 = x\partial_x + t\partial_t,$$
$$\mathbf{v}_4 = a\partial_x + u\partial_u, \qquad \mathbf{v}_5 = t\partial_x - \partial_u, \qquad \mathbf{v}_6 = x\partial_t + u^2\partial_u,$$
$$\mathbf{v}_7 = xt\partial_x + t^2\partial_t - (x+tu)\partial_u, \qquad \mathbf{v}_8 = x^2\partial_x + xt\partial_t + (x+tu)u\partial_u.$$

۹.۶.۲ مثال. در این مثال تقارنهای تعمیم یافته معادلهٔ برگر $u_t = u_{xx} + u_x^2$ محاسبه می شوند. مولد بینهایت کوچک تکاملی $\mathbf{v} = Q(x, t, u^{(n)})\partial_u$ را به همراه تابع مشخصهٔ $Q = Q(x, t, u, u_x, u_{xx}, Q_{xxx})$ در نظر بگیرید. مطابق مثال قبل با اعمال شرایط ناوردایی خواهیم داشت:

$$D_t Q = D_x^2 Q + 2u_x D_x Q. \tag{۵۸.۲}$$

با جایگذاری ضرایب لازم در (۵۸.۲) (به جای مشتق u نسبت به t مقدار آن را از معادله قرار دهید.) Q نسبت به u_{xxx} دارای ترکیب آفین به شکل

$$Q = \alpha(t)u_{xxx} + Q'(x, t, u, u_x, u_{xx}),$$

است. با جایگذاری Q در (۵۸.۲) معادلهٔ زیر بدست می آید،

$$6\alpha u_{xx}u_{xxx} + \alpha_t u_{xxx} = Q'_{u_{xx}u_{xx}}u_{xxx}^2 + 2Q'_{u_x u_{xx}}u_{xx}u_{xxx}$$
$$+2Q'_{uu_{xx}}u_x u_{xxx} + 2Q'_{xu_{xx}}u_{xxx},$$

با حل آن این نتیجه حاصل می شود که Q' نسبت به u_{xx} دارای ترکیب آفین

$$Q' = 3\alpha u_x u_{xx} + \Big(\frac{1}{2}\alpha_t x + \beta(t)\Big) u_{xx} + Q''(x,t,u,u_x),$$

است. اما ضریب u_{xx}^2 در (۵۸.۲) به صورت

$$6\alpha u_x + \alpha_t x + 2\beta = Q''_{u_x u_x},$$

است، بنابراین

$$\begin{aligned} Q = {} & \alpha(u_{xxx} + 2u_x u_{xx} + u_x^3) + \Big(\frac{1}{2}\alpha_t x + \beta\Big)(u_{xx} + u_x^2) \\ & + \mathcal{A}(x,t,u) u_x + \mathcal{B}(x,t,u). \end{aligned}$$

همچنین عبارت

$$\Big(3\alpha_t u_x + \frac{1}{2}\alpha_{tt} x + \beta_t\Big) u_{xx} = (2\mathcal{A}_u u_x + 3\alpha_t u_x + 2\mathcal{A}_x) u_{xx},$$

تنها جمله ایست که شامل u_{xx} است. از این گفته برمی آید که $\mathcal{A}$ مستقل از u است و

$$\mathcal{A} = \frac{1}{8}\alpha_{tt} x^2 + \frac{1}{2}\beta_t x + \gamma(t).$$

ادامهٔ محاسبات نشان می دهد که

$$\mathcal{B}(x,t,u) = \rho(x,t) e^{-u} + \sigma(x,t).$$

با محاسبهٔ ضریب u_x،

$$\frac{1}{8}\alpha_{ttt} x^2 + \frac{1}{2}\beta_{tt} x + \gamma_t = 2\sigma_x + \frac{1}{4}\alpha_{tt},$$

ضابطهٔ تابع σ بدست می آید.

$$\sigma(x,t) = \frac{1}{48}\alpha_{ttt} x^3 + \frac{1}{8}\beta_{tt} x^2 + \Big(\frac{1}{2}\gamma_t - \frac{1}{8}\alpha_{tt}\Big) x + \delta(t).$$

در نهایت تنها جمله ای که در (۵۸.۲) که مستقل از مشتقات u است عبارت

$$\rho_t e^{-u} + \sigma_t = \rho_{xx} e^{-u} + \sigma_{xx},$$

است. پس می توان دید که تابع ρ یک جواب از معادلهٔ انتقال گرمای $\rho_t = \rho_{xx}$ است و توابع γ, β, α و δ در دستگاه معادلات زیر صدق می کنند.

$$\alpha_{tttt} = \beta_{ttt} = 0, \qquad \gamma_{tt} = \frac{1}{2}\alpha_{ttt}, \qquad \delta_t = \frac{1}{4}\beta_{tt}.$$

حل این دستگاه منتج به جوابهای

$$\begin{aligned} &\alpha(t) = c_9 t^3 + c_8 t^2 + c_7 t + c_6, && \beta(t) = c_5 t^2 + c_4 t + c_3, \\ &\gamma(t) = \frac{3}{2} c_9 t^2 + c_2 t + c_1, && \delta(t) = \tfrac{1}{2} c_5 t + c_0, \end{aligned}$$

شده به طوریکه $c_9, ..., c_0$ ثابتهای دلخواهی هستند. لذا تقارنهای تعمیم یافته مرتبه سوم معادلهٔ برگر دارای مشخصه هایی به صورت

$$\begin{aligned}
Q_0 &= 1, \\
Q_1 &= u_x, \\
Q_2 &= t u_x + \frac{1}{2} x, \\
Q_3 &= u_{xx} + u_x^2, \\
Q_4 &= t(u_{xx} + u_x^2) + \frac{1}{2} x u_x, \\
Q_5 &= t^2(u_{xx} + u_x^2) + t x u_x \Big(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} x^2\Big), \\
Q_6 &= u_{xxx} + 3 u_x u_{xx} + u_x^3, \\
Q_7 &= t(u_{xxx} + 3 u_x u_{xx} + u_x^3) + \frac{1}{2} x (u_{xx} + u_x^2), \\
Q_8 &= t^2(u_{xxx} + 3 u_x u_{xx} + u_x^3) + t x (u_{xx} + u_x^2) + \Big(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} x^2\Big) u_x, \\
Q_9 &= t^3(u_{xxx} + 3 u_x u_{xx} + u_x^3) + \frac{3}{2} t^2 x (u_{xx} + u_x^2) + \Big(\frac{3}{2} t^2 + \frac{3}{4} t x^2\Big) u_x + \Big(\frac{3}{4} t x + \frac{1}{8} x^3\Big),
\end{aligned}$$

به همراه یک مشخصهٔ بینهایت بعدی

$$Q_\rho = \rho(x,t) e^{-u},$$

است. به راحتی می توان دید که مشخصه های $Q_0, ..., Q_5$ به همراه Q_ρ تقارنهای نقطه‌ای معادله را تولید می کنند. مثلاً Q_4 هم ارز

$$\tilde{Q}_4 = tu_x + \frac{1}{2}xu_x,$$

بوده که مشخصهٔ نظیر مولد بینهایت کوچک

$$\mathbf{v}_4 = -\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x} - t\frac{\partial}{\partial t},$$

است.

فصل ۳

جوابهای دقیق ناوردا تحت تقارنها

مفهوم جوابهای ناوردای گروهی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی تا سال ۱۹۵۰ به طور متنوعی در متون مختلف ارائه شد تا اینکه لی دریکی از مقالاتش، [۵۷]، آن را به معنای امروزی بیان کرد. لی در این مقاله به آن دسته از جوابهای ناوردای گروهی پرداخت که تحت تبدیلات برخوردی ناوردا هستند. در این مقاله وی نشان داد که جوابهای معادلات دیفرانسیل جزئی با دو متغیر مستقل که تحت یک گروه یک-پارامتری ناورد هستند با حل معادلات دیفرانسیل معمولی امکانپذیر است. اما متأسفانه لی پیش از آنکه بتواند اکتشافات خود را کاربردی سازد چشم از جهان فرو بست. چندی پس از مرگ لی ا. جی. ا. مورگان، [۶۶]، و میچال، [۶۲]، حالتهای خاصی از نتایج لی در مورد گروه تقارن یک-پارامتری را گسترش دادند. به دنبال آنها اووزیاناکوف، [۷۵]، نیز نتایج تعمیم یافته‌تری را بدون آگاهی از یافته‌های لی بدست آورد. اما پیش از این تلاشها تعداد زیادی مثال در نوشته‌های مختلف در مورد جوابهای ناوردای گروهی ارائه شده بود غافل از آنکه همگی حالتهای خاصی از کشفیات ریاضیدانان فوق بوده است.

هنگامی که اووزیاناکوف به کاوش در روشهای کاهش برای یافتن جوابهای ناوردای گروهی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل پرداخت، متخصصین بسیاری در اتحاد جماهیر شوروی سابق، اروپا و ایالات متحدهٔ آمریکا نیز پیگیر آن بودند. این جوابها تأثیرات بسیار وسیعی در توضیح رفتار جوابهای دقیق دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی دارند. این مهم منجر به تألیف متون کاربردی بسیاری در این باره گشت. افرادی چون بارنبلت، [۱۴]، کاربردهای بسیاری از معادلات هذلولوی را بیان کرد. ابلوویتز و کوداما، [۲]، تحلیلهای جامعی در مورد جوابهای معادله KdV ارائه دادند. ارتباط بین معادلات به طور کامل انتگرالپذیر مانند معادله KdV و دسته‌ای خاص از معادلات دیفرانسیل معمولی که به معادلات نوع پینلوِ معروف است با استفاده از مفهوم ناوردای گروهی اولین بار توسط سه ریاضیدان به نامهای ابلوویتز، رمنی و سگار، [۳]، ارائه گشت. این سه نفر در یکی دیگر از مقالات خود، [۱]، محک خوبی برای انتگرالپذیری معادلات بیان کردند.

مفهوم نمایش الحاقی گروههای لی روی جبرهای لی آنها به پژوهشهای لی بازمی گردد. طبقه‌بندی زیرجبرهای لی یک جبرلی با استفاده از نمایش الحاقی جبرها مدیون تلاشهای اووزیاناکوف است و روشی را که در این فصل

به آن اشاره کردیم به طور کامل برگرفته از ایدهٔ نامبرده از کتاب [۷۴] است. افراد دیگری چون ویزنر، [۸۸]، و میلر، [۶۵]، تلاشهایی در این طبقه‌بندی انجام دادند که از معروفترین آنها طبقه‌بندی گروههای تقارن معادله گرماست که توسط ویزنر انجام شد.

اووزیاناکوف در [۷۴] و یکی دیگر از تألیفاتش، [۷۶]، مفهوم جوابهای ناوردای گروهی را تعمیم داد و این دسته از جوابها را جوابهای ناوردای جزئی نامید. تفاوت این جوابها با جوابهای ناوردای گروهی آن است که گراف آنها تحت گروه تبدیلات مفروض به طور کامل ناوردا نیست. گراف اینگونه جوابها را به یک زیرمنیفلد با بعد کمتر از منیفلد فضای کامل دستگاه مورد نظر تحدید می کنند. اگر p تعداد متغیرهای مستقل و r بعد مدارات عمل گروه باشد، بعد این زیرمنیفلد به طور اکید از $p+r$ کمتر است. تعمیمهای جدیدتری از مفهوم جوابهای ناوردای گروهی وجود دارند که می‌توان به روشی که بلومن و کول، [۱۹]، و امیس،[۴]، ارائه کردند و از آن تحت عنوان روش غیر کلاسیک در جوابهای ناوردای گروهی نام برده می‌شود اشاره کرد.

در این فصل، به بررسی روشهای تقارنی برای PDE ها خواهیم پرداخت. در حالت خاص نشان داده خواهد شد که چگونه روشهای تقارنی به طور سیستماتیک جوابهای خاصی از یک دستگاه PDE را خواهند ساخت. در فصل ۲ نشان داده شد که چگونه تقارنهای یک دستگاه PDE را می توان یافت. تقارنها خانواده ای از جوابها را به خانواده ای دیگر از جوابها می نگارند، در این بین جوابهایی هم وجود دارند که به خودشان نگاشته می شوند یعنی، نسبت به عمل تقارنهای دستگاه PDE ناوردا هستند. چنین جوابهایی را جوابهای ناوردا می نامند.

در این فصل ابتدا به نحوهٔ محاسبهٔ جوابهای ناوردای گروهی می پردازیم، سپس در پی آن روش طبقه بندی این جوابها و درنهایت روش کاهش یک دستگاه معادلات را خواهیم دید.

۱.۳ ساختن جوابهای ناوردای گروهی

دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی $R(x,u) := \Delta_\nu(x,u,u^{(n)}) = 0$ را با p متغیر مستقل $x = (x^1,...,x^p)$ و q متغیر وابسته $u = (u^1,...,u^q)$ از مرتبه n به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\Delta_\nu(x,u,u^{(n)}) = 0, \qquad \nu = 1,\dots,l,$$

که دارای تقارن نقطه ای با مولد بی نهایت کوچک

$$V = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \qquad (۱.۳)$$

یا، به طور معادل، فرم تکاملی مولد بی نهایت کوچک

$$\tilde{V} = \sum_{\alpha=1}^{q} \Big[\eta^\alpha(x,u) - \sum_{i=1}^{p} u_i^\alpha \xi(x,u)\Big] \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

قرار دهید $\xi(x,u) = (\xi^1(x,u), \ldots, \xi^p(x,u))$ و فرض کنید که$\xi(x,u) \neq 0$.

۱.۱.۳ تعریف. $u = \Theta(x)$، با مولفه های $u^\alpha = \Theta^\alpha(x)$، $\alpha = 1, \ldots, q$، جواب ناوردا از دستگاه PDE، $\Delta_\nu(x,u,u^{(n)}) = 0$ حاصل از تقارن نقطه ای است اگر و تنها اگر

(i) $u^\alpha = \Theta^\alpha(x)$ یک منیفلد ناوردا نسبت تقارن نقطه ای باشد برای هر $\alpha = 1, \ldots, q$.

(ii) $u = \Theta(x)$ جوابی از $\Delta_\nu(x,u,u^{(n)}) = 0$ باشد.

از تعریف نتیجه می شود که $u = \Theta(x)$ جواب ناوردا از دستگاه PDE، $\Delta_\nu(x,u,u^{(n)}) = 0$ حاصل از تقارن نقطه ای است اگر و تنها اگر $u = \Theta(x)$ در شرایط زیر صدق کند

(i)

$$\begin{aligned} & V(u^\alpha - \Theta^\alpha(x))|_{u=\Theta(x)} = 0, && \alpha = 1, \ldots, q \\ & \eta^\alpha(x,\Theta(x)) - \xi^i(x,\Theta(x)) \frac{\partial \Theta^\alpha(x)}{\partial x^i}, && \alpha = 1, \ldots, q \\ & \tilde{V} u^\alpha|_{u=\Theta(x)} = 0, && \alpha = 1, \ldots, q. \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

(ii)

$$\begin{aligned} & \Delta_\nu(x,u,\partial u, \ldots, \partial^{(n)} u) = 0, \quad ; u = \Theta(x) && \nu = 1, \ldots, l \\ & \Delta_\nu(x,\Theta(x),\partial\Theta(x), \ldots, \partial^{(n)}\Theta(x)) = 0, && \nu = 1, \ldots, l. \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

در (۳.۳)، $\partial^{(j)}\Theta(x)$ عبارت است از $\partial^{(j)}\Theta^\alpha(x)/(\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_j})$، $i_j = 1, \ldots, p$ با $j = q, \ldots, n$.
جوابهای معادلات در (۲.۳) رویه های ناوردایی نسبت به تقارن نقطه ای Vهستند. معادلات (۳.۳) و (۲.۳) در حقیقت بیانگر روشی برای یافتن جوابهای خاصی از دستگاه PDE، $\Delta_\nu(x,u,u^{(n)}) = 0$ می باشند.

با داشتن تقارن نقطه ای دستگاه PDE با مولد V برای حل دستگاه خطی از معادلات مشخصه (۳.۳) و (۲.۳) به دو روش می توان عمل کرد و جوابهای ناوردای $u = \Theta(x)$ را یافت.

۱.۱.۳ روش فرم ناوردا

در این روش ابتدا شرایط ناوردایی رویه (۲.۳)، با توجه به معادلات مشخصه برای $u = \Theta(x)$ که به صورت زیر می باشند، حل می شوند

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x,u)} = \cdots = \frac{dx^p}{\xi^p(x,u)} = \frac{du^1}{\eta^1(x,u)} = \cdots = \frac{du^q}{\eta^q(x,u)}. \qquad (۴.۳)$$

اگر $y^1(x,u), \ldots, y^{p-1}(x,u)$ و $v^1(x,u), \ldots, v^q(x,u)$، $p+q-1$ ثابتهای مستقل تابعی حاصل از حل دستگاه معادلات مشخصه از ODE، (۴.۴) با ژاکوبین $\partial(v^1, \ldots, v^q)/\partial(u^1, \ldots, u^q) \neq 0$ باشند، آنگاه جواب عمومی $u = \Theta(x)$ از معادلات (۲.۳) به صورت ضمنی به شکل ناوردایی زیر بیان می شود

$$v^\lambda(x,u) = H^\lambda(y^1(x,u), \ldots, y^{p-1}(x,u)), \qquad (۵.۳)$$

که H^λ تابع دیفرانسیل پذیر دلخواه است و $\lambda = 1, \ldots, q$. توجه داشته باشید که $y^1(x,u), \ldots, y^{p-1}(x,u)$ و $v^1(x,u), \ldots, v^q(x,u)$، $p+q-1$ ناورداهای مستقل تابعی نسبت به گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای با مولد V می باشند، بنابراین مختصات کانونیک برای گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای با مولد V هستند. قرار دهید $y^p(x,u)$، $p+q$امین مختصات کانونیک باشد که در $Vz^p = 1$ صادق است. اگر دستگاه $R(x,u)$ توسط تبدیل نقطه ای معکوس پذیر متناظرش به دستگاه $S(y,v)$، با متغیرهای مستقل $y = (y^1, \ldots, y^p)$ و متغیرهای وابسته $v = (v^1, \ldots, v^q)$ تبدیل شود، آنگاه دستگاه تبدیل شده $S(y,v)$، دارای تقارن نقطه ای انتقال است که عبارتست از

$$\begin{aligned}
(y^*)^i &= y^i, \qquad i = 1, \ldots, p-1 \\
(y^*)^p &= y^p + \varepsilon, \\
(v^*)^\lambda &= v^\lambda, \qquad \lambda = 1, \ldots, q.
\end{aligned}$$

بنابراین متغیر y^p به طور صریح در دستگاه PDE تبدیل شده $S(y,v)$ ظاهر نمی شود و درنتیجه این دستگاه دارای جوابهایی خصوصی به فرم (۵.۳) است که به نوبه خود، به طور ضمنی، توابع $u = \Theta(x)$ را تعریف می کند به طوریکه آنها جوابهای ناوردا از دستگاه $R(x,u)$ می باشند، یعنی، دستگاه $R(x,u)$ دارای جوابهای ناوردایی است که به طور ضمنی بر اساس فرم ناوردای (۵.۳) بدست می آیند. در حالت خاص، این جوابهای ناوردا با حل دستگاه کاهش یافته از معادلات دیفرانسیل با $p-1$ متغیر مستقل $y^1, \ldots, y^{p-1}$ و q متغیر وابسته $v^1, \ldots, v^q$ حاصل می شوند. دستگاه کاهش یافته از معادلات دیفرانسیل با جایگذاری فرم ناوردا (۵.۳) در دستگاه $R(x,u)$ بدست می آید. فرض برآنست که این حالت به دستگاه معادلات دیفرانسیل با معادله تکین منجر نشود. توجه کنید که اگر $\partial\xi/\partial u = 0$ آنگاه برای $i = 1, \ldots, p-1$، $y^i = y^i(x)$. در این حالت وقتی $R(x,u)$ دارای دو

متغیر مستقل است، یعنی، $p=2$، دستگاه کاهش یافته یک دستگاه ODE خواهد شد با متغیر مستقل $y^i = y^1$.

۲.۱.۳ روش جایگذاری مستقیم

این شیوه وقتی ضروری است که نتوان معادلات شرط رویه ناوردا (۲.۳) را حل کرد، یعنی، نتوان جواب عمومی برای دستگاه ODE مشخصه (۴.۳) یافت. بدون کاستن از کلیت مسئله می توان فرض کرد که $\xi^p(x,u) \neq 0$. در اینصورت دستگاه PDE (۲.۳) را می توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{\partial u^\lambda}{\partial x^p} = \frac{\eta^\lambda(x,u)}{\xi^p(x,u)} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\xi^i(x,u)}{\xi^p(x,u)} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^i}, \qquad \lambda = 1, \dots, q. \tag{۶.۳}$$

بنابه (۶.۳) و دیفرانسیل آن نتیجه می شود که هر جمله ای شامل مشتقات u نسبت به متغیر مستقل x^p را می توان بر حسب جملاتی از x و u همانند مشتقات u نسبت به متغیرهای مستقل $x^1, \dots, x^{p-1}$ نمایش داد. بنابراین بعد از جایگذاری مستقیم (۶.۳) و مشتقات آن برای هر مشتق جزئی نسبت به x^p که در دستگاه ظاهر شده است، به طور مستقیم یک دستگاه کاهش یافته از معادلات دیفرانسیل شامل q متغیر وابسته $u^1, \dots, u^q$، $p-1$متغیر مستقل $x^1, \dots, x^{p-1}$، مشتقات $u^1, \dots, u^q$ نسبت به $x^1, \dots, x^{p-1}$ و پارامتر x^p حاصل می شود. جواب $u = \Phi(x^1, \dots, x^{p-1}; x^p)$ از دستگاه معادلات کاهش یافته، سبب تولید جواب ناوردای $u = \Theta(x)$ برای $R(x,u)$ دستگاه می شود.

۲.۱.۳ مثال. معادله KdV معادله ایست با ضابطهٔ $u_{xxx} + uu_x + u_t = 0$ یک معادله PDE با یک گروه تقارن چهار-بعدی است که جبرلی نظیر آن با مولدهای زیر تولید می شوند:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \partial_x, && \text{انتقال مکان}\\
\mathbf{v}_2 &= \partial_t, && \text{انتقال زمان}\\
\mathbf{v}_3 &= t\partial_x + \partial_u, && \text{حرکت گالیله‌ای}\\
\mathbf{v}_4 &= x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u. && \text{تجانس}
\end{aligned}$$

می خواهیم معادله را نسبت به مولدهای انتقال جبرلی کاهش دهیم. محاسبه نشان می دهد که $y = x - ct$ و $v = u$ دو ناوردای نظیر تبدیلات انتقال معادله هستند. با استفاده از قاعدهٔ مشتق زنجیره‌ای مشتقات موجود در معادله را برحسب y و v می نویسیم.

$$\begin{aligned}
&u_t = u_y y_t = v_y y_t = -cv_y, \qquad u_x = u_y y_x = v_y,\\
&u_{xxx} = v_{yyy} y_x = v_{yy}.
\end{aligned}$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله KdV معادله ODE

$$v_{yyy} + vv_y - cv_y = 0, \qquad (۷.۳)$$

حاصل می شود که با دو بار انتگرالگیری پی در پی معادله مرتبهٔ اول

$$3v_y^2 + v^3 - 3cv^2 - 6k_1v + k_2 = 0, \qquad (۸.۳)$$

بدست می آید. ملاحظه می شود آنچه که از قضیهٔ لی-بیانچی انتظار می رفت در این معادله رخ داده است. زیرا جبر تقارنهای معادله که با معادله (۷.۳) هم ارز است حلپذیر بوده و معادله (۷.۳) یک معادله مرتبهٔ سه بوده که با انتگرالگیری قابل کاهش به یک معادله مرتبهٔ $4-3=1$ است که همان معادله (۸.۳) می باشد. جواب عمومی معادله KdV که با حل معادله (۸.۳) حاصل می شود تابع بیضوی $u = \mathcal{P}(x - ct + \delta)$ است. اگر $u \to 0$ و $|x| \to \infty$ آنگاه در معادله (۸.۳) k_1 و k_2 هر دو صفر شده و جواب

$$v = 3c\mathrm{sech}^2\Big(\frac{1}{2}\sqrt{c}y + \delta\Big),$$

بدست می آید که در آن پارامتر c سرعت انتشار موج است. با جایگذاری $x - ct$ به جای y در این جواب، جواب

$$u(x,t) = 3c\mathrm{sech}^2\Big[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - ct) + \delta\Big],$$

حاصل می شود که به ازای $c = 0$ جواب تکین $u = -12/(x+\delta)^2$ بدست خواهد آمد. جوابهای فوق نمونه ای از جوابهای ناوردای گروهی برای معادله KdV هستند که از آن به عنوان جوابهای *موج سیار* یاد می شود. اما جوابهای ناوردای گروهی به این نوع از جوابها محدود نمی شوند، در ادامه می خواهیم جوابهای ناوردای گروهی نظیر تبدیل حرکت گالیله‌ای را بدست آوریم. به ازای $t > 0$، $y = t$ و $v = tu - x$ ناورداهای مستقل تابعی این تبدیل بوده و مشتقات جدید عبارتند از:

$$u_t = (yv_y - v - x)y^{-2}, \quad u_x = y^{-1}, \quad u_{xxx} = 0.$$

حال با جایگذاری این مشتقات در معادله KdV معادله

$$v_y = 0,$$

بدست آمده که حل آن منجر به جواب ناوردای گروهی

$$u = \frac{x+\delta}{t},$$

برای تبدیل حرکت گالیله‌ای می گردد. اما به ازای $t > 0$

$$y = t^{-1/3}x, \qquad v = t^{2/3}u,$$

دو ناوردای مستقل نظیر تبدیل تجانس می باشند و مشتقات جدید با در نظر گرفتن این ناورداها عبارتند از:

$$u_t = -\frac{1}{3}t^{-5/3}(yv_y + 2v), \qquad u_x = t^{-1}v_y, \qquad u_{xxx} = t^{-5/3}v_{yyy}.$$

بنابراین معادله کاهش یافته تحت این تبدیل ODE زیر است:

$$v_{yyy} + vv_y - \frac{1}{3}yv_y - \frac{2}{3}v = 0.$$

حل این معادله مرتبهٔ سوم با روشهای موجود ممکن نیست اما تحت تبدیل $v = dw/dy - 1/6w^3$ معادله فوق به معادله

$$w_{yyy} - \frac{1}{6}w^2w_y - \frac{1}{3}yw_y - \frac{1}{3}w = 0,$$

تبدیل شده که با یک بار انتگرالگیری به معادله

$$w_{yy} - \frac{1}{18}w^3 - \frac{1}{3}yw - k = 0,$$

کاهش می یابد که قابل حل است و حل آن جواب ناوردای گروهی نظیر تبدیل تجانس را می سازد.

۲.۳ دستگاه بهینه

فرض کنیم H یک زیرگروه $s-$پارامتری از گروه تقارنهای G یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با $p-$متغیر مستقل باشد به طوریکه $p > s$، در این حالت می توان دید که جوابهای ناوردای گروهی نظیر زیر گروه H از یک دستهٔ خاصی از جوابها قرار می گیرد. در این بخش به نوعی خاص از روش طبقه بندی چنین جوابهایی می پردازیم که از آن به *دستگاه بهینه* یاد می شود و هر نوع جواب دیگر را می توان از این دستهٔ خاص از جوابها بدست آورد. هدف اصلی یافتن آن دسته از تبدیلات $g \in G$ است به طوریکه هریک از جوابهای دستگاه معادلات مورد نظر در

یکی از مدارات این تبدیلات قرار بگیرد.

۱.۲.۳ گزاره. فرض کنید G یک گروه تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$ و H یک زیرگروه $s-$پارامتری آن باشد. اگر $u = \Theta(x)$ یک جواب $H-$ناوردا برای Δ و $g \in G$ تبدیلی از گروه G باشد آنگاه تابع $\bar{u} = \bar{\Theta}(x) = g \cdot \Theta(x)$ یک جواب $H-$ناوردای دستگاه است به طوریکه $\bar{H} = gHg^{-1}$ یک زیرگروه مزدوج H متناظر با تبدیل g است.

از گزارهٔ فوق بلافاصله این نکته استنباط می شود که مسئلهٔ طبقه بندی جوابهای ناوردای گروهی به مسئلهٔ طبقه بندی زیرگروههای گروه تقارنی G تحت عمل مزدوج گیری تبدیل می گردد. بنابراین ابتدا باید به برخی از مهمترین ویژگیهای نگاشت مزدوج $h \mapsto ghg^{-1}$ اشاره کرد.

۳.۳ نمایش الحاقی

فرض کنید G یک گروه لی باشد. به ازای هر $g \in G$ نگاشت مزدوج $K_g : G \to G$ با ضابطهٔ $K_g(h) = ghg^{-1}$ برای هر $h \in G$ یک دیفئومورفیسم روی G تعریف می کند. به سادگی می توان دید که کلیهٔ نگاشتهای مزدوجی که روی یک گروه لی تعریف می شوند خود تحت عمل ترکیب توابع ساختار گروه لی می پذیرد. نگاشت مشتق نگاشت مزدوج یعنی $K_{g_{*h}} : T_hG \to T_{K_gh}G$ حافظ میدانهای برداری و یک نگاشت خطی روی جبرلی G به شکل

$$\mathrm{Ad}g(\mathbf{v}) = K_{g_*}(\mathbf{v}), \qquad \mathbf{v} \in \mathfrak{g}, \tag{۹.۳}$$

می سازد که با آن *نمایش الحاقی* می گویند. می توان دید که این نمایش بیانگر عمل فراگیر خطی G روی $\mathfrak{g}$ است:

$$\begin{aligned} &G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \\ &\mathrm{Ad}(gg') = \mathrm{Ad}g \circ \mathrm{Ad}g', \qquad \mathrm{Ad(e)} = \mathrm{Id}. \end{aligned}$$

با استفاده از لم (۱.۲۲) در [۷۰] می توان دید که اگر $\mathbf{v}$ مولد زیرگروه یک-پارامتری $H = \{\exp(\varepsilon\mathbf{v}) | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ باشد، $\mathrm{Ad}g(\mathbf{v})$ مولد زیرگروه مزدوج $K_g(H) = gHg^{-1}$ است. لذا می توان زیرگروههای مراتب بالاتر را با استفاده از زیرگروه مرتبهٔ قبلی آن بدست آورد.

۱.۳.۳ گزاره. فرض کنید H و $\bar{H}$ دو زیرگروه $s-$پارامتری همبند گروه لی G با زیرجبرهای $\mathfrak{h}$ و $\bar{\mathfrak{h}}$ از جبرلی $\mathfrak{g}$ باشند. در این صورت $\bar{H} = gHg^{-1}$ یک زیرگروه مزدوج G است اگر و تنها اگر $\bar{h} = \mathrm{Ad}g(\mathfrak{h})$ یک زیرجبر مزدوج از $\mathfrak{g}$ باشد.

نمایش الحاقی یک گروه لی، روی جبرلی نظیر آن، معمولاً توسط مولدهای بینهایت کوچک جبرلی آن ساخته می شود. به عنوان مثال اگر $\mathbf{v}$ مولد زیرگروه یک-پارامتری $\{\exp(\varepsilon\mathbf{v}) | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ باشد، آنگاه $\mathrm{ad}\mathbf{v}$ را می توان به

عنوان مولد گروه یک-پارامتری نمایش الحاقی

$$\mathrm{ad}\mathbf{v}(\mathbf{w}) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}))\mathbf{w}, \qquad \mathbf{w}\in\mathfrak{g}, \tag{۱۰.۳}$$

مد نظر قرار داد.

هرگاه $\mathfrak{g}\simeq T_eG$ جبرلی نظیر گروه G باشد، (۹.۳) و (۱۰.۳) هر دو ایجاب می کنند که

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(\mathbf{v})(\mathbf{w}) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[K_{*\exp(\varepsilon\mathbf{v})}(\mathbf{w}_e)-\mathbf{w}_e\Big]\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[\exp_*(\varepsilon\mathbf{v})(\mathbf{w}_{\exp(-\varepsilon\mathbf{v})})-\mathbf{w}_e\Big].\end{aligned}$$

حال با جایگزینی $-\varepsilon$ به جای ε در می یابیم که حد دوم همان تعریف مشتق لی $\mathbf{w}$ نسبت به $\mathbf{v}$ می باشد لذا

$$\mathrm{ad}(\mathbf{v})(\mathbf{w}) = [\mathbf{w},\mathbf{v}] = -[\mathbf{v},\mathbf{w}].$$

نمایش فوق برای نگاشت ad وقتی به کار می رود که $\mathbf{w}$ یک میدان برداری ناوردای راست است. اگر $\mathbf{w}$ یک میدان برداری ناوردای چپ باشد بدیهی است که

$$\mathrm{ad}(\mathbf{v})(\mathbf{w}) = [\mathbf{v},\mathbf{w}].$$

۲.۳.۳ گزاره. فرض کنید G یک گروه لی با جبرلی $\mathfrak{g}$ باشد. برای هر $\mathbf{v}\in\mathfrak{g}$ بردار الحاقی $\mathrm{ad}(\mathbf{v})$ در $\mathbf{w}\in\mathfrak{g}$ برابر است با:

$$\mathrm{ad}(\mathbf{v})(\mathbf{w}) = [\mathbf{w},\mathbf{v}]. \tag{۱۱.۳}$$

در حالتی که G یک زیرگروه لی از $\mathrm{GL}(n)$ با جبرلی $\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{g}l(n)$ باشد محاسبهٔ (۱۱.۳) آسانتر خواهد بود. زیرا اگر به ازای هر $A,B\in G$، $K_A(B)=ABA^{-1}$ باشد نگاشت الحاقی با مزدوجگیری زیر ساخته می شود:

$$\mathrm{Ad}(A)(X) = AXA^{-1}, \qquad A\in G, \quad X\in\mathfrak{g}.$$

قرار دهید $A=e^{\varepsilon Y}$، به ازای $Y\in\mathfrak{g}$ با مشتقگیری از A نسبت به ε داریم

$$\mathrm{ad}(Y)(X) = [Y,X],$$

سمت راست تساوی فوق کروشهٔ لی روی $\mathfrak{g}l(n)$ است.

روندی که در بالا شرح داده شده است آن است که نمایش الحاقی جبرلی یک گروه لی خاص با مشتقگیری از نگاشت مزدوج تعریف شده روی آن حاصل می شود. عکس این روند هم برقرار است، به این معنا که با داشتن عمل الحاقی مولدهای بینهایت کوچک $\mathfrak{g}$، می توانیم نمایش الحاقی $\mathrm{Ad}(G)$ را بسازیم که این فرآیند انتگرالگیری از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\varepsilon} = \mathrm{ad}(\mathbf{v})(\mathbf{w}), \qquad \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \tag{۱۲.۳}$$

با جواب

$$\mathbf{w}(\varepsilon) = \mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}))\mathbf{w}_0,$$

و یا محاسبهٔ سری لی

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}))\mathbf{w}_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}(\mathrm{ad}(\mathbf{v}))^n(\mathbf{w}_0) \\ &= \mathbf{w}_0 - \varepsilon[\mathbf{v}, \mathbf{w}_0] + \frac{\varepsilon^2}{2}[\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}_0]] + \cdots , \end{aligned} \tag{۱۳.۳}$$

است.

۳.۳.۳ مثال. در این مثال نمایش الحاقی تقارنهای مولدهای بینهایت کوچک جبرلی معادله KdV را می یابیم. به عنوان نمونه

$$\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}_1))(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 - \varepsilon[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] + \frac{1}{2}\varepsilon^2[\mathbf{v}_1, [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]] + \cdots = \mathbf{v}_2,$$

و یا

$$\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}_2))(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_4 - \varepsilon[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4] + \frac{1}{2}\varepsilon^2[\mathbf{v}_2, [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4]] + \cdots = \mathbf{v}_4 - 3\varepsilon\mathbf{v}_2.$$

در ادامه به مفهوم بسیار مهم بر آمده از نگاشت الحاقی به نام فرم کیلینگ اشاره می کنیم که اطلاعات بسیار مهمی دربارهٔ ویژگیها و ساختار جبرلی یک گروه لی ارائه می کند.

فرض کنیم G یک گروه لی با جبرلی $\mathfrak{g}$ باشد. نگاشت دوخطی متقارن

$$\Phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R},$$

را تحت گروه اتومورفیسم های درونی روی $\mathfrak{g}$ ناوردا می گوییم هرگاه به ازای هر اتومورفیسم مانند A و $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{g}$،

$$\Phi(A(\mathbf{v}), A(\mathbf{w})) = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \tag{۱۴.۳}$$

اگر به ازای اتومورفیسم A در سمت چپ تساوی فوق قرار دهیم $A = A(\varepsilon)$، با مشتقگیری از آن نسبت به ε در نقطهٔ $\varepsilon = 0$ شرط ناوردایی

$$\Phi([\mathbf{v}, \mathbf{w}], \mathbf{u}) + \Phi(\mathbf{v}, [\mathbf{u}, \mathbf{w}]) = 0, \tag{۱۵.۳}$$

بدست می آید که معادل تساوی (۱۴.۳) است.

یکی از مفاهیم مهم در نظریهٔ ساختاری گروهها، ساختن نگاشت دو خطی خاصی است که با مفهوم اثر ماتریس یک نگاشت خطی ساخته می شود. اثر نگاشت خطی $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ بوسیلهٔ اثر ماتریس این نگاشت ساخته می شود. بدیهیست که اگر (A_{ij}) ماتریس این نگاشت باشد، آنگاه اثر آن را که با tr نشان می دهیم برابر است با:

$$\mathrm{tr}A = \sum_i A_{ii}.$$

۴.۳.۳ تعریف. فرم دو خطی متقارن

$$\mathcal{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$
$$\mathcal{K}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(\mathbf{v}) \circ \mathrm{ad}(\mathbf{w})),$$

را *فرم کیلینگ* جبرلی $\mathfrak{g}$ می نامیم. این فرم در شرط ناوردایی (۱۵.۳) صدق می کند.

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}([\mathbf{v}, \mathbf{u}]) \circ \mathrm{ad}(\mathbf{w}) + \mathrm{ad}(\mathbf{v}) \circ \mathrm{ad}([\mathbf{w}, \mathbf{u}]) &= (\mathrm{ad}(\mathbf{v}) \circ \mathrm{ad}(\mathbf{w})) \circ \mathrm{ad}(\mathbf{u}) \\ &\quad - \mathrm{ad}(\mathbf{u}) \circ (\mathrm{ad}(\mathbf{v}) \circ \mathrm{ad}(\mathbf{w})).\end{aligned}$$

۴.۳ طبقه بندی زیرگروهها و زیرجبرهای لی

مسئلهٔ طبقه بندی زیرجبرهای لی با بعد متناهی یک مسئلهٔ مهم و اساسی در تحلیل گروهی معادلات دیفرانسیل است. این مهم با داشتن اتومورفیسم های درونی روی جبرلی $\mathfrak{g}$ بدست خواهد آمد، زیرا تحت عمل یک اتومورفیسم هر زیرجبرلی به یک زیرجبر هم بعد خودش تصویر می شود و بنابراین مسئلهٔ طبقه بندی زیرجبرهای لی را می توان در حد طبقه بندی این اتومورفیسمها بررسی کرد.

۱.۴.۳ تعریف. فرض کنید $\mathfrak{h}$ و $\bar{\mathfrak{h}}$ دو زیرجبر از جبرلی $\mathfrak{g}$ باشند. این دو زیرجبر را *هم‌ارز* گویند هرگاه یک اتومورفیسم درونی مانند A روی $\mathfrak{g}$ طوری یافت شود که $A(\mathfrak{h}) = \bar{\mathfrak{h}}$.

این تعریف ایجاب می کند که یک جبرلی با بعد متناهی مانند $\mathfrak{g}$ را می توان به چند دستهٔ خاص از زیرجبرهایش طبقه بندی کرد.

۲.۴.۳ تعریف. فرض کنید G یک گروه لی باشد. یک *دستگاه بهینه* از زیرگروههای $s-$پارامتری مجموعه ای هم ارز از زیرگروههای $s-$پارامتری تحت نگاشت مزدوج است. به این معنا که هر زیرگروه دیگر از گروه G مزدوج با یکی از اعضای مجموعهٔ فوق خواهد بود. به طور مشابه یک مجموعه از زیرجبرهای $s-$پارامتری یک سیستم بهینه می سازند هرگاه هر زیرجبر $s-$پارامتری $\mathfrak{g}$ هم ارز تنها یکی از عناصر دستگاه بهینهٔ فوق تحت نگاشت Ad باشد. یعنی اگر $\mathfrak{h}$ و $\bar{\mathfrak{h}}$ دو زیرجبر $\mathfrak{g}$ باشند آنگاه به ازای یک $g \in G$، $\bar{\mathfrak{h}} = \mathrm{Ad}g(\mathfrak{h})$. چنین دستگاه بهینه ای را با O_s نشان می دهیم. بنابراین اگر $\mathfrak{g}$ یک جبر $n-$بعدی باشد می توان در صورت وجود O_i را برای $i = 1, ..., n-1$ یافت.

فرض کنیم $\{\mathbf{v}_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ یک پایه از حبرلی $n-$بعدی $\mathfrak{g}$ بوده و $C_{\beta\gamma}^{\alpha}$ ها ثابتهای ساختاری آن باشند. در اینصورت هر میدان برداری دیگر مانند $X_i = \sum_\alpha a_{i\alpha}\mathbf{v}_\alpha (i = 1, ..., s < n)$ در $\mathfrak{g}$ پایه ای برای یک زیرجبر $s-$بعدی از $\mathfrak{g}$ مانند $\mathfrak{h}$ تولید می کند اگر و تنها اگر رتبهٔ ماتریس تبدیل آن یعنی $A = (a_{i\alpha})$ برابر با s بوده و رابطهٔ

$$[X_i, X_j] = \sum_\alpha C_{\beta\gamma}^{\alpha} a_{i\beta} a_{j\gamma} = \sum_\alpha \tilde{C}_{ij}^{k} a_{k\alpha}, \quad (i, j = 1, ...s;\ \alpha = 1, ..., n), \qquad (۱۶.۳)$$

برقرار باشد به قسمی که $\tilde{C}_{ij}^{k}$ ثابتهای ساختاری زیرجبر $\mathfrak{h}$ هستند. در نتیجه مسئلهٔ طبقه بندی به حل یک دستگاه معادلات جبری با ضرایب غیر مشخص $a_{i\alpha}$ و $\tilde{C}_{ij}^{k}$ کاهش می یابد.

به ازای $s \leq 3$، یافتن O_s با محاسبات جبری ساده ای میسر خواهد بود اما در ابعاد بالاتر محاسبات جبری تا حدودی صورت پیچیده تری به خود می گیرند، که در این قسمت به طور خلاصه به نحوه ساختن آنها اشاره می کنیم و برای مطالعه دقیق تر و مشاهده مثالهایی در این زمینه به [۳۵] مراجعه کنید. محاسبهٔ O_s برای جبرلی مفروضی چون $\mathfrak{g}$ مستلزم آن است که ابتدا مرکز جبر را بیابیم. زیرا اگر $\mathfrak{c}$ مرکز $\mathfrak{g}$ باشد هر عضوی از آن مانند Z تحت نگاشت الحاقی ناورداست یعنی به ازای هر $X \in \mathfrak{g}$، $[Z, X] = 0$. پس عناصر مرکزی جبر $\mathfrak{g}$ ایده‌آلی از $\mathfrak{g}$ می سازند که تحت اتومورفیسمهای الحاقی ثابت می مانند. لذا اگر جبرلی $\mathfrak{g}$ دارای مرکز غیر بدیهی $\mathfrak{c}$ باشد مسئلهٔ طبقه بندی زیرجبر ها را برای $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ بررسی می کنیم. الگوریتمی که در زیر به آن اشاره خواهد شد مربوط به آن دسته از حبرهای لی فاقد مرکز است.

فرض کنیم $\mathfrak{g}$ یک جبرلی $n-$بعدی با پایهٔ $\{\mathbf{v}\}_{\alpha=1}^{n}$ باشد. در اینصورت اتومورفیسمهای درونی $\mathfrak{g}$ به n متغیر بستگی داشته و توسط فرمول

$$A(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = A_1(\varepsilon_1) \circ \cdots \circ A_n(\varepsilon_n), \qquad (۱۷.۳)$$

بدست می آید که ε_i ها پارامتر زیرگروههای یک-پارامتری و A_i اتومورفیسم نظیر می باشد. برای ساختن O_1 ابتدا یک بردار غیر صفر مانند $X = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ با تصویر $X' = AX$ انتخاب می کنیم. که بوسیلهٔ نگاشت (۱۷.۳) بدست آمده است. اگر $(A_{\alpha\beta})$ ماتریس نظیر نمایش A باشد آنگاه مؤلفه های بردار X' در معادلات

$$x'^{\alpha} = \sum_{\sigma=1}^{n} A_{\alpha\sigma} x_\sigma,$$

صدق می کند. گام بعدی انتخاب مقادیر مناسبی برای پارامترهای $\varepsilon_n, ..., \varepsilon_1$ است به طوریکه مؤلفه های $(x'^1, ..., x'^n)$ از بردار X' ساده ترین حالت ممکن خود را اختیار کند. به این دلیل که ردهای که انتخاب می گردد و X به آن تعلق دارد ساده ترین صورت خود را داشته باشد. برای این کار باید تا آنجا که ممکن است مؤلفههای بردار X' را صفر کنیم و در نهایت برداری که بدست می آید یکی از ردههای O_1 را می سازد.

برای ساختن O_2 نیاز به دو بردار داریم که یکی از آنها از ردههای O_1 انتخاب می شود. فرض کنیم $X = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ یکی از اعضای O_1 بوده و $Y = \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ یک بردار دلخواه از $\mathfrak{g}$ در پایهٔ $\{\mathbf{v}_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ باشد. دستگاه معادلات (۱۶.۳) را برای این دو بردار بازنویسی کرده و به دستگاه

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma} x^{\beta} y^{\gamma} = \lambda y^{\alpha} + \mu x^{\alpha}, \qquad (\alpha = 1, ..., r), \tag{۱۸.۳}$$

که شامل $n+2$ مجهول y^α، λ و μ است می رسیم. یافتن جوابهای دستگاه (۱۸.۳) منجر به یافتن یک جبر دو-بعدی می شود که شامل بردار X است. در صورت لزوم با انتخاب مقادیر مناسبی از X و Y، عضوی از O_2 بدست می آید. این مضارب با انتخاب λ و μ مناسبی انجام می پذیرد. مسئله را با انتخاب $(\lambda, \mu) = (0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ در نظر می گیریم. اگر $(\lambda, \mu) = (1,1)$ باشد آنگاه با تبدیل $Y \mapsto Y + X$ می توان μ را برابر صفر قرار داد. اما در حالتیکه $(\lambda, \mu) = (0,1)$ باشد هیچ بردار جدیدی بدست نمیآید. در حالتیکه μ صفر است، دستگاه معادلات (۱۸.۳) شکل مسئلهٔ مقدار ویژه برای تبدیل خطی $\mathrm{ad}(X)$ با درایه های ماتریسی $(C^{\alpha}_{\beta\gamma} x^{\beta})$ به خود می گیرد و قابل بیان به صورت $\mathrm{ad}(X)(Y) = \lambda Y$ می باشد. لذا

$$\det(\lambda \mathcal{I}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{ad}(X)) = \lambda^n - \tau_1(X)\lambda^{n-1} + \tau_2(X)\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^{\ell}\tau_{n-\ell}(X)\lambda^{\ell}, \tag{۱۹.۳}$$

به طوریکه $\tau_{n-\ell}(X) \neq 0$ و $\ell \geq 0$. متناظر با هریک از ریشه هایاین چندجملهای یک یا چند جواب مستقل خطی برای دستگاه (۱۸.۳) بدست می آید. (در حالتیکه $\ell > 0$ باشد همچنان یک یا بیش از یک جواب نظیر ریشهٔ $\lambda = 0$ بدست می آید. اگر $\ell = 1$ باشد هیچ ریشهٔ حقیقی غیر صفری موجود نیست لذا X به هیچیک از جبرهای دو-بعدی با شرط $\mu = 0$ متعلق نیست.) چند جمله ای (۱۹.۳) به ازای هر $X \in \mathfrak{g}$ *چندجملهای کیلینگ* یا *چندجملهای مشخصه* برای جبرلی $\mathfrak{g}$ نامیده می شود. حداکثر مقدار عددی ℓ در این چندجملهای زمانی رخ می دهد که X روی تمام $\mathfrak{g}$ تعریف شود که در این حالت عدد ℓ را *رتبهٔ جبرلی* $\mathfrak{g}$ می نامیم. پس از یافتن O_2 به ازای

هر عضو O_1 لازم است که بوسیلهٔ اتومورفیسمهای موجود آنها را به ساده ترین شکل خود همانند آنچه که برای O_1 شرح داده شد ساده کنیم.

برای یافتن O_3 داشتن O_2 ضروریست. برای این کار یک زیرجبر دو-بعدی از O_2 مانند $\langle X_1, X_2\rangle$ و برداری دلخواه چون $Y = \sum_{\alpha=1}^{n} y^\alpha \mathbf{v}_\alpha$ از جبرلی را درنظر می گیریم به قسمی که سه تایی $\langle X_1, X_2, Y\rangle$ یک جبرلی سه-بعدی بسازند. حال مجدداً اگر دستگاه (۱۶.۳) را برای این سه بردار به شکل

$$
\begin{aligned}
C^\alpha_{\beta\gamma} x_{1\beta} y^\gamma &= \lambda_1 y^\alpha + \mu_1 x_{1\alpha} + \nu_1 x_{2\alpha},\\
C^\alpha_{\beta\gamma} x_{2\beta} y^\alpha &= \lambda_2 y^\alpha + \mu_2 x_{1\alpha} + \nu_2 x_{2\alpha},
\end{aligned}
$$

بازنویسی می کنیم که دارای $n+6$ مجهول $\mu_i, \lambda_i, y^\alpha$ و ν_i می باشد. هر جواب از این دستگاه ترکیبی خطی از $\langle X_1, X_2\rangle$ بوده و یک زیرجبرلی سه-بعدی از $\mathfrak{g}$ بدست می دهد. اما نکتهٔ مهم آن است که آیا روش فوق کلیهٔ زیرجبرهای لی سه-بعدی را مشخص می کند؟ به بیان بهتر آیا کلیهٔ زیرجبرهای سه-بعدی موجود در جبرلی زیرجبرهای دو-بعدی را شامل می شوند؟ به طور کلی آیا یک جبرلی حقیقی سه-بعدی موجود است که فاقد زیرجبر دو-بعدی باشد؟ جواب این سؤال مثبت است. جبرلی $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\rangle$ با ساختار

$$
[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \mathbf{v}_3, \qquad [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \mathbf{v}_1, \qquad [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1] = \mathbf{v}_2,
$$

مثالی برای پاسخ این سؤال است. این جبرلی همان $\mathfrak{so}(3)$ است. لم زیر وضعیت چنین جبرهایی را مشخص می کند.

۳.۴.۳ لم. هر جبرلی حقیقی سه-بعدی فاقد زیرجبر دو-بعدی یکریخت با جبرلی گروه دورانهای $\mathrm{SO}(3)$ است.

اثبات. [۷۴]. □

روند یافتن O_s ها را می توان به ازای $s = 4, 5, \ldots$ به شکل الگوریتم قبلی ادامه داد. اما باید توجه کرد که این روش ممکن است تمامی زیرجبر ها را بدست ندهد.

۵.۳ طبقه بندی و دستگاه بهینه جوابهای ناوردا

ابتدا با یک تعریف آغاز می کنیم.

۱.۵.۳ تعریف. یک دستگاه *بهینه* از جوابهای ناوردای گروهی s-پارامتری برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مجموعه ای از جوابهای به صورت $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$ است که در شرایط زیر صدق کند.

۱) هر جواب این مجموعه حداقل تحت یکی از عناصر گروه s-پارامتری تقارنهای دستگاه ناورداست.

۲) اگر $\mathbf{u} = \bar{f}(\mathbf{x})$ یکی دیگر از جوابهای ناوردا تحت گروه تقارنهای $s-$پارامتری باشد، آنگاه تقارنی مانند g برای دستگاه موجود است که $f = g \cdot \bar{f}$.

۲.۵.۳ گزاره. فرض کنید G گروه تقارنهای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$ باشد. هرگاه $\{O_\alpha\}$ یک دستگاه بهینه از زیرگروههای $s-$پارامتری G باشد، آنگاه مجموعه ای از جوابهای $O_\alpha-$ناوردا یک دستگاه بهینه از جوابهای ناوردای گروهی برای $\Delta = 0$ می سازد.

۳.۵.۳ مثال. در مثال (۲.۱.۳) تعدادی جواب ناوردای گروهی برای معادله KdV بدست آمد. در این مثال یکی از جوابهای ناوردای گروهی نظیر دستگاه بهینهٔ یک-بعدی برای معادله را بدست می آوریم. محاسبه نشان می دهد که $\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_2$ یکی از اعضای O_1 با تابع ناوردای $x - ct$ است. بنابراین با جایگذاری

$$\bar{f}(x,t) = f(x - ct) + c,$$

در معادله KdV به معادله

$$f''' + ff' = 0,$$

می رسیم که حل آن منجر به جواب

$$u = 3c\text{sech}^2\Big(\frac{1}{2}\sqrt{c}x + \delta\Big) - c,$$

می شود که یک جواب ناوردای گروهی نظیر O_1 برای معادله KdV است.

در ادامه به بررسی جوابهای ناوردا و یافتن دستگاههای بهینه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که در فصل قبل مورد مطالعه قرار گرفتند و تقارنهای آنهای محاسبه گردید خواهیم پرداخت.

۶.۳ معادله هیروتا-رمانی

در مثال (۷.۲.۲) مشاهده شد که این معادله دارای تقارنهایی به صورت زیر می باشد

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \qquad \mathbf{v}_2 = \partial_t,$$
$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{a}\partial_u, \qquad \mathbf{v}_4 = 3t\partial_t - x\partial_x + (2t + u - \frac{2x}{a})\partial_u.$$

بنابه تعریف سری لی و جدول روابط جابجایی تقارنهای فوق، جدول نمایش الحاقی آنها عبارت است از

Ad	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$
$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4+\varepsilon(\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_3)$
$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4-\varepsilon(3\mathbf{v}_2+2a\mathbf{v}_3)$
$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4-\varepsilon\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_1-\varepsilon(\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_3)$	$\mathbf{v}_2+\varepsilon(3\mathbf{v}_2+2a\mathbf{v}_3)$	$\mathbf{v}_3+\varepsilon\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$

۱.۶.۳ گزاره. دستگاه بهینه از جبرهای لی یک بعدی از معادله هیروتا-رمانی عبارت است از:

$$1)\ \mathbf{v}_4, \qquad 2)\ \alpha\mathbf{v}_1+\beta\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3,$$

$$3)\ \alpha\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \qquad 4)\ \mathbf{v}_1.$$

<u>*اثبات.*</u> فرض کنید $\mathfrak{g}$ جبرلی تقارنهای معادله باشد و نگاشت خطی $F_i^s:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ با ضابطه $\mathbf{v}\mapsto \mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}_i)\mathbf{v})$، برای $i=1,\cdots,4$. تعریف شود. ماتریسهای M_i^ε از نگاشت F_i^ε بر اساس پایه $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_4\}$ عبارتند از

$$M_1^\varepsilon=\begin{pmatrix}1&0&0&-\varepsilon\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\varepsilon\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ M_2^\varepsilon=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&3\varepsilon\\0&0&1&2a\varepsilon\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$M_3^\varepsilon=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&\varepsilon\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ M_4^\varepsilon=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\varepsilon}&0&0&0\\0&\mathrm{e}^{-3\varepsilon}&0&0\\\mathrm{e}^{\varepsilon}-\mathrm{e}^{-\varepsilon}&a\mathrm{e}^{-\varepsilon}\left(\mathrm{e}^{-2\varepsilon}-1\right)&\mathrm{e}^{-\varepsilon}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

فرض کنید $\mathbf{V}=\sum_{i=1}^4 a_i\mathbf{v}_i$ میدان برداری مخالف صفر در $\mathfrak{g}$ باشد. هدف ساده کردن ضرایب a_i است، با ضرب این ماتریسها در $\mathbf{V}$، تا زمانی که این عمل امکان پذیر باشد.

در ابتدا فرض کنید $a_4\neq 0$، بدون اینکه به اثبات خللی وارد شود، می توان فرض کرد $a_4=1$، در اینصورت با ضرب M_1^ε و M_2^ε به ترتیب در $\mathbf{V}$، می توان ضرایب میدانهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_3$ و $\mathbf{v}_2$ را صفر کرد، در نهایت $\mathbf{V}$ به حالت (1) کاهش می یابد.

اگر $a_4=0$ و $a_3\neq 0$، آنگاه نمی توان ضرایب $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ را با ضرب ماتریسهای فوق صفر کرد. با فرض $a_3=1$، در این حالت $\mathbf{V}$ به فرم (2) خواهد بود.

قرار دهید $a_4=a_3=0$ و $a_2\neq 0$، در این حالت نیز ضریب $\mathbf{v}_1$ را نمی توان صفر نمود در نتیجه با فرض $a_2=1$، $\mathbf{V}$ به فرم (3) خواهد بود.

تنها زیر جبرهای یک بعدی باقیمانده که توسط تقارنهای معادله تولید می شوند حالتی است که $a_4=a_3=$

$a_2 = 0$. اگر $a_1 \neq 0$ با فرض $a_1 = 1$، آنگاه حالت (4) نتیجه می شود. $\square$

در ادامه جوابهای ناوردای معادله مورد مطالعه قرار می گیرد. در این قسمت می توان ترکیبات خطی متفاوتی از تقارنهای معادله را در نظر گرفت و همینطور می توان ازدستگاه بهینه برای ساختن جوابهای ناوردا کمک گرفت.

ابتدا ترکیب $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \partial_t + \frac{1}{a}\partial_u$ را در نظر بگیرید. معادله مشخصه آن به صورت زیر است

$$\frac{dx}{0} = \frac{dt}{1} = \frac{a\,du}{1}.$$

که با حل آن، ناورداهای $y = x$ و $v = u - \frac{t}{a}$ حاصل می شوند. با بدست آوردن u و مشتقهای آن بر اساس y و v داریم

$$u = v(y) + \frac{t}{a}, \quad u_x = v_y, \quad u_{x^2} = v_{yy}, \quad u_{x^2t} = 0, \quad u_t = \frac{1}{a}.$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله هیروتا-رمانی ، معادله ODE

$$(a-1)v_y + 1/a = 0,$$

نتیجه خواهد شد، که دارای جواب $v = \frac{-y}{a(a-1)} + c$ است. این جواب در معادله اصلی نیز صادق است و داریم

$$u = \frac{x}{a(1-a)} + \frac{t}{a} + c.$$

با تکرار این روند برای بقیه تقارنها و ترکیبهای خطی آنها نتایج زیر حاصل می شود که در دو جدول زیر بیان شده است

operators	y	v	u
$\mathbf{v}_1$	t	u	$v(y)$
$\mathbf{v}_2$	x	u	$v(y)$
$\mathbf{v}_4$	$xt^{1/3}$	$(u-2x/a-t)t^{-1/3}$	$v(y)t^{1/3}+2x/a+t$
$\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_3$	t	$u-x$	$v(y)+x$
$\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$	x	$u-t/a$	$v(y)+t/a$
$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$	$x-t$	u	$v(y)/a$

operators	
$\mathbf{v}_1$	$v_y = 0$
$\mathbf{v}_2$	$av_y = 0$
$\mathbf{v}_4$	$t^{-2/3}v + (t^{1/3}x + av + axt^{1/3}v_y)v_y + v_{yy} + xt^{1/3}v_{yyy} = 3$
$\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_3$	$(1-a)v_y + a = 0$
$\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$	$(a-1)v_y + 1/a = 0$
$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$	$-v_y + v_{yyy} + av_y(1+v_y) = 0$

۷.۳ معادله کدریاشف-سینل چیخف

در فصل قبل مشاهده شد که این معادله دارای تقارنهایی به فرم

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \qquad \mathbf{v}_2 = \partial_t, \qquad \mathbf{v}_3 = t\partial_x + (\frac{1}{a})\partial_u.$$

است. جدول نمایش الحاقی این تقارنها عبارت است از

$\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}_i))\mathbf{v}_j$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3 - \varepsilon\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2 + \varepsilon\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_3$

۱.۷.۳ گزاره. دستگاه بهینه از جبرهای لی یک بعدی از معادله کدریاشف-سینل چیخف عبارت است از

$$1)\ \mathbf{v}_2, \qquad 2)\ \mathbf{v}_3 + \alpha\mathbf{v}_2.$$

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{g}$ جبرلی تقارنهای معادله باشد و $\mathbf{V} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3$ میدان برداری غیر صفر در $\mathfrak{g}$ باشد. ابتدا فرض کنید $a_3 = 1$، با اثر $Ad(\exp(a_1\mathbf{v}_2))$ بر $\mathbf{V}$ می توان ضریب $\mathbf{v}_1$ را صفر نمود در نتیجه میدان برداری $\mathbf{V}$ به فرم $\mathbf{V} = Ad(\exp(a_1\mathbf{v}_2))\mathbf{V} = \alpha\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ خواهد شد. با توجه به علامت α، می توان ضریب $\mathbf{v}_2$ را 1 یا -1 یا 0 در نظر گرفت. به عبارت دیگر هر زیرجبر یک بعدی تولید شده توسط $\mathbf{V}$ با $a_3 \neq 0$ هم ارز $\alpha\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ خواهد شد. حال فرض کنید $a_3 = 0$ و $a_2 \neq 0$، می توان فرض کرد $a_2 = 1$، مانند حالت قبل با اثر $Ad(\exp(a_1\mathbf{v}_2))$ بر $\mathbf{V}$ می توان ضریب $\mathbf{v}_1$ را صفر نمود. بنابراین هر زیرجبر یک بعدی تولید شده توسط $\mathbf{V}$ با $a_3 = 0$ و $a_2 \neq 0$ هم ارز $\mathbf{v}_2$ خواهد بود. □

برای مطالعه جوابهای ناوردای معادله ابتدا ترکیبهای خطی مختلفی از تقارنهای معادله را درنظر میگیریم.

$\mathbf{v}_3 = t\,\partial_x + \frac{1}{a}\partial_u$ (1

این ترکیب دارای معادله مشخصه

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{t} = \frac{a\,du}{1}$$

می باشد. با حل معادله مشخصه، ناورداهای $y = t, v = u - \frac{x}{a\,t}$ بدست می آیند، بنابراین $u = f(x, y, v) = v + \frac{x}{a\,t}$ و مشتقات آن عبارتند از

$$u_x = \frac{1}{a\,t}, \quad u_{x^2} = u_{x^3} = u_{x^4} = u_{x^5} = 0, \quad u_t = v_y - \frac{1}{a\,t^2}\,x.$$

با جایگذاری u و مشتقهای آن در معادله K-S ، معادله دیفرانسیل معمولی زیر نتیجه می شود

$$v_y + \frac{1}{y}\,v = 0,$$

معادله فوق دارای جوابی به فرم $v = \frac{c_1}{y}$، بنابراین جواب دقیق

$$u(x, t) = \frac{x + a\,c_1}{a\,t}.$$

برای معادله K-S بدست می آید.

$\mathbf{v}_2 + c_0\,\mathbf{v}_1 = c_0\,\partial_x + \partial_t$ (2

در این حالت، ناورداهای $y = x - c_0\,t$ و $v = u$ حاصل می شوند که معادله کاهش یافته توسط آنها عبارت است از:

$$-c_0\,v_y + a\,v\,v_y + b\,v_{y^3} + c\,v_{y^4} + d\,v_{y^5} - e\,v_{y^2} = 0.$$

خانواده ای از جوابهاب متناوب این معادله برای $a = 1$ به صورت زیر هستند

$$v = a_0 + A\,sn^4\{m\,y, k\} + B\,sn\{m\,y, k\}\,\frac{d}{d\chi}sn\{m\,y, k\}.$$

که $sn\{m\,y, k\}$ بیانگر تابع بیضوی ژاکوبی است.

$\mathbf{v}_3+\beta\mathbf{v}_2=t\,\partial_x+\beta\partial_t+\frac{1}{a}\partial_u$ (3

ناورداهای این ترکیب عبارتند از $y=x-\frac{t^2}{2\beta}$ و $v=u-\frac{t}{a\beta}$ و معادله کاهش یافته توسط آنها عبارت است از

$$\frac{1}{a\beta}-\frac{t}{\beta}v_y+a\,v\,v_y+b\,v_{y^3}+c\,v_{y^4}+d\,v_{y^5}-e\,v_{y^2}=0.$$

$\mathbf{v}_2=\partial_t$ (4

در اینصورت ناورداهای $y=x$ و $v=u$ باعث کاهش معادله اصلی به معادله زیر می شوند

$$a\,v\,v_y+b\,v_{y^3}+c\,v_{y^4}+d\,v_{y^5}-e\,v_{y^2}=0.$$

$\mathbf{v}_1=\partial_x$ (5

برای میدان برداری $\mathbf{v}_1$، با ناورداهای $y=t$ و $v=u$ معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته از معادله اصلی به صورت $v_y=0$ که دارای جواب $u(x,t)=cte$ برای معادله اصلی می باشد.

۸.۳ معادله دسته-ویتهام

در این بخش به کمک روش فرم ناوردا جوابهاب دقیقی قابل ملاحضه ای برای معادله دسته-ویتهام بدست خواهد آمد. همانطور که در مثال (۱۴.۲.۲) مشاهده شد، این معادله دارای تقارنهایی به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}_1=\partial_x, && \mathbf{v}_2=\partial_t,\\
&\mathbf{v}_3=x\partial_x+t\partial_t, && \mathbf{v}_4=x\partial_x+u\partial_u,\\
&\mathbf{v}_5=tx\partial_x+\frac{t^2}{2}\partial_t-\frac{1}{2}x\partial_u, && \mathbf{v}_6=f'(t)\partial_u-2f(t)\partial_x.
\end{aligned}$$

در ادامه ترکیبهای مختلفی از تقارنها را برای یافتن جوابهای دقیق ناوردا در نظر گرفته خواهد شد. در تمام جوابهای بدست آمده c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه هستند.

$\alpha\,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ (1

ترکیب خطی $\alpha\,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\alpha\partial_x+\partial_t$ که در آن α ثابتی است که سرعت موج را مشخص می نماید، دارای ناورداهای زیر است

$$\zeta=x-\alpha\,t,\qquad \phi=u,$$

بنابراین $u(x,t)=\phi(x-\alpha\,t)=\phi(\zeta)$. با جایگذاری u و مشتقهای آن در معادله ویتهام، معادله دیفرانسیل معمولی

$$(2\phi+\alpha)\phi''+\phi'^2=0,$$

حاصل خواهد شد، که در آن $\phi'=\frac{d\phi}{d\zeta}$. جواب این معادله عبارت است از

$$\phi(\zeta)=\frac{1}{2}(3c_1\zeta+3c_2)^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2},$$

بنابراین جواب دقیق ناوردا برای معادله ویتهام به صورت زیر است

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(3c_1(x-\alpha\,t)+3c_2)^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}.$$

2) $t\,\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_4$

ترکیب خطی $t\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_4=x\partial_x+t\partial_t+u\partial_u$ دارای معادله مشخصه

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{t}=\frac{du}{u}.$$

است، که جواب این معادلات ناورداهای $\zeta=x/t$ و $u=x\,\phi(\zeta)$ می باشد. معادله کاهش یافته توسط ناورداها عبارت است از

$$(2\phi+\zeta/t)\phi''+\phi'^2=0,$$

جواب تولید شده توسط معادله فوق برای معادله اصلی به صورت زیر است

$$u(x,t)=\frac{-x{c_2}^2+\left(\left(x/t-c_1\right){c_2}^2t\right)^{2/3}}{2{c_2}^2t}.$$

3) $\mathbf{v}_2$

برای مولد $\mathbf{v}_2=\partial_t$ ناورداهای $\zeta=x$ و $u=\phi(\zeta)$ حاصل می شوند که معادله کاهش یافته به کمک آنها عبارتست از

$$2\phi\phi''+\phi'^2=0,$$

که جواب آن و در نتیجه جواب معادله اصلی به فرم زیر است

$$u = \phi = (3/2\,(c_1\,x + \,c_2))^{2/3}\,.$$

4) $\mathbf{v}_3$

مولد $\mathbf{v}_3 = x\partial_x + t\partial_t$ دارای معادله مشخصه $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{0}$ با جوابهای $\zeta = x/t$ و $u = \phi(\zeta)$ می باشد. معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته در این حالت عبارت است از

$$(2v + \zeta)\phi'' + (1 + \phi')\phi' = 0,$$

جواب تولید شده برای معادله اصلی به کمک معادله فوق عبارتست از

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{xc_1 + 2\,utc_1}}{t} - \frac{c_1\,\ln\left(\sqrt{xc_1 + 2\,utc_1} \pm c_1\right)}{t} - (\frac{3x}{2t} + c_2).$$

5) $\mathbf{v}_4$

تقارن $\mathbf{v}_4 = x\partial_x + u\partial_u$ دارای معادله مشخصه

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{u},$$

با جوابهای $\zeta = t$ و $u = x\phi(\zeta)$ می باشد. معادله دیفرانسیل معمولی کاهش یافته در این حالت عبارت است از

$$\phi' = 2x\,\phi\phi' + \phi^2,$$

جواب تولید شده برای معادله اصلی به کمک معادله فوق عبارتست از

$$t + x/u + 2\,x\ln{(x/u)} + c_1 = 0.$$

6) $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4$

برای ترکیب خطی $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = t\partial_t - u\partial_u$ ناورداها ی حاصل از معادله مشخصه

$$\frac{dx}{0} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{u},$$

عبارتند از $\zeta = x$ و $u = 1/t\,\phi(\zeta)$. معادله کاهش یافته به صورت

$$2\phi\phi'' + {\phi'}^2 + \phi' = 0,$$

می باشد که جواب تولید شده توسط آن برای معادله اصلی عبارت است از

$$x + 2\sqrt{c_1 tu} - c_1\,\ln\left(c_1 + \sqrt{c_1 tu}\right) + c_1\,\ln\left(c_1 - \sqrt{c_1 tu}\right)$$
$$+\,tu + c_1\,\ln\left(c_1 - tu\right) - c_1 = 0.$$

فصل ۴

قوانین بقاء معادلات دیفرانسیل

قانون بقاء یک دستگاه PDE نمایشی به فرم دیورژانس است که روی تمام جوابهای دستگاه PDE صفر می شود. در حالت کلی، هر نمایش دیورژانس غیر بدیهی که قانون بقاء موضعی از دستگاه PDE را نتیجه می دهد، از ضرایب موضعی (فاکتورها)، وابسته به متغیرهای مستقل و وابسته همچنین به تعداد متناهی مشتقات متغیرهای وابسته، بدست می آیند. ثابت می شود که هر نمایش دیورژانس، وابسته به متغیرهای مستقل و وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته، توسط عملگرهای اویلر پوچ می شود. برعکس، اگر عملگرهای اویلر مربوط به متغیرهای وابسته ظاهر شده در نمایشی شامل متغیرهای مستقل و مشتقات متغیرهای وابسته، نمایش را پوچ سازد، آنگاه آن نمایش یک نمایش دیورژانس خواهد بود. بنابراین هر دستگاه PDE دارای قانون بقاء است اگر و تنها اگر مجموعه ای از ضرایب موضعی موجود باشد که ترکیب خطی آنها با هر PDE در دستگاه، توسط عملگرهای اویلر مربوط به هر متغیر وابسته پوچ شود.

بنابراین مسئله یافتن قوانین بقاء دستگاه PDE، به مسئله یافتن مجموعه ای از ضرایب موضعی منتهی می شود که ترکیب خطی آنها با هر PDE دستگاه توسط عملگرهای اویلر پوچ می شود. بعلاوه، برای هر مجموعه ای از ضرایب موضعی که باعث تولید قانون بقاء می شود یک فرمول انتگرالی برای بدست آوردن شار و چگالی های قانون بقاء وجود دارد [۶]، [۷]، [۵]. اغلب آنها از محاسبه مستقیم بعد از مشخص شدن ضرایب موضعی بدست می آیند که معمولاً از آن به عنوان روش مستقیم برای محاسبه قوانین بقاء یاد می کنند [۹۰].

در سال ۱۹۱۸ نوتر نشان داد که اگر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل یک اصل تغییراتی را بپذیرد، آنگاه هر گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای که عمل تابعی را پایا نگه دارد یک قانون بقاء را نتیجه خواهد داد [۶۹]. در حالت خاص، نوتر فرمولی برای شار قوانین بقاء ارائه نمود. در سال ۱۹۲۱ باسل-هاگن قضیه نوتر را توسیع دادند [۱۵]. در سال ۱۹۶۷ بویر نشان داد که تمام چنین قوانین بقائی چگونه توسط گروههای لی از تبدیلات نقطه ای به فرم پیچشی حاصل می شوند [۲۵].

در مطالعه معادلات دیفرانسیل قوانین بقاء دارای فواید زیادی می باشند. آنها کمیتهای فیزیکی از قبیل، جرم، انرژی، تکانه، تکانه زاویه ای، همچنین بار الکتریکی و ثابتهای حرکت را توضیح می دهند. آنها برای تحقیق انتگرال

پذیری، نگاشتهای خطی و برای اثبات وجود و یکتایی جوابها مهم هستند. آنها همچنین برای آنالیز پایداری و رفتار عمومی جوابها استفاده می شوند. بعلاوه، آنها نقش اساسی در توسعه روشهای عددی دارند و نقش مهمی در نقطه شروع یافتن دستگاههای وابسته غیر موضعی و متغیرهای پتانسیلی برعهده دارند.

۱.۴ قوانین بقاء موضعی

دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی $R(x,u) := \Delta_\nu(x,u,u^{(n)}) = 0$ را با p متغیر مستقل $x = (x^1,...,x^p)$ و q متغیر وابسته $u = (u^1,...,u^q)$ از مرتبه n به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\Delta_\nu(x,u,u^{(n)}) = 0, \qquad \nu = 1,\dots,l, \tag{۱.۴}$$

۱.۱.۴ تعریف. قانون بقاء موضعی برای دستگاه PDE، $R(x,u)$ نمایشی به فرم دیورژانس

$$D_i\Phi^i[u] = D_1\Phi^1[u] + \cdots + D_n\Phi^n[u] = 0 \tag{۲.۴}$$

است که برای همه جوابهای دستگاه PDE برقرار است. در رابطه (۲.۴)، $\Phi^i[u] = \Phi^i(x,u,\partial u,\cdots,\partial^r u)$ برای $i = 1,\cdots,n$، را شارهای قانون بقاء نامند و و بزرگترین مرتبه مشتق (r) که در نمایش $\Phi^i[u]$ ظاهر شده است را مرتبه قانون بقاء گویند.

۲.۱.۴ تبصره. اگر یکی از متغییرهای مستقل $R(x,u)$ زمان t باشد، آنگاه قانون بقاء (۲.۴) به فرم زیر خواهد شد

$$D_t\Psi[u] + D_1\Phi^1[u] + \cdots + D_{n-1}\Phi^{n-1}[u] = 0 \tag{۳.۴}$$

در اینجا $\Psi[u]$ را چگالی قانون بقاء می نامند.

۳.۱.۴ تعریف. قانون بقاء (۲.۴)، از دستگاه $R(x,u)$ است اگر $\Phi^i[u] = M^i[u] + H^i[u]$ شارهای آن باشند که، $M^i[u]$ و $H^i[u]$ توابعی از x,u و مشتقات u باشند به طوریکه $M^i[u]$ روی جوابهاب دستگاه صفر شود و $D_iH^i[u] \equiv 0$.

به عنوان مثال دستگاه PDE

$$v_x = u, \qquad v_t = K(u)u_x.$$

دارای قانون بقاء بدیهی از مرتبه اول به صورت زیر می باشد

$$D_t\Big(u(u-v_x)\Big)+D_x\Big(2(v_t-K(u)u_x)\Big)=0,$$

همچنین دارای قانون بقاء بدیهی از مرتبه دوم به فرم

$$D_t\big(u_{xx}\big)-D_x\big(u_t x\big)=0.$$

است. به عنوان یک مثال مهم از قانون بقاء بدیهی می توان $div(curl f)=0$ را در نظر گرفت که در آن $f(x)$ تابعی برداری در $\mathbb{R}^3$ است.

۴.۱.۴ تعریف. دو قانون بقاء $D_i\Phi^i[u]=0$ و $D_i\Psi^i[u]=0$ را معادل نامند اگر

$$D_i(\Phi^i[u]-\Psi^i[u])=0,$$

قانون بقاء بدیهی باشد. یک کلاس هم ارزی از قوانین بقاء شامل قوانین بقاء معادل با یک قانون بقاء غیر بدیهی است.

در ادامه به بررسی انواع روشها مختلف برای یافتن قوانین بقاء یک دستگاه PDE خواهیم پرداخت.

۲.۴ ضرایب نامعین تابعی برای قوانین بقاء

در حالت کلی، برای دستگاه $R(x,u)$، قوانین بقاء غیر بدیهی از ترکیب خطی معادلات دستگاه $R(x,u)$ با ضرایب تابعی خاصی (فاکتورها، مبین ها) که نمایش دیورژانس غیر بدیهی را نتیجه می دهند، بدست می آیند. برای یافتن چنین نمایشهایی، متغیرهای وابسته (و مشتقات آنها) که در دستگاه PDE یا ضرایب تابعی ظاهر شده اند، با توابع دلخواهی (و مشتقات آنها) جایگزین می شوند. با چنین عملی نمایشهای دیورژانسی حاصل روی تمام جوابهای دستگاه PDE، $R(x,u)$ صفر می شوند.

در حالت خاص، مجموعه ای از ضرایب تابعی $\{\Lambda_\nu(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U)\}_{\nu=1}^{l}=\{\Lambda_\nu[U]\}_{\nu=1}^{l}$ برای دستگاه PDE، $R(x,u)$ نمایش دیورژانسی را تولید می کنند اگر اتحاد

$$\Lambda_\nu[U]\Delta_\nu[U]\equiv D_i\Phi^i[U] \tag{۴.۴}$$

برای توابع دلخواه $U(x)$ برقرار باشد، آنگاه روی جواب $U(x)=u(x)$، اگر $\Lambda_\nu[U]$ ناتکین باشد، دارای قانون

بقاء است

$$\Lambda_\nu[u]\Delta_\nu[u] = D_i\Phi^i[u] = 0. \tag{۵.۴}$$

ضریب تابعی $\Lambda_\nu[U]$ تکین است، هرگاه روی جواب $U(x) = u(x)$ از دستگاه PDE $R(x,u)$ محاسبه می شود تابع تکین باشد. در عمل ضرایب تابعی ناتکین مورد استفاده قرار می گیرند، زیرا با در نظر گرفتن ضرایب تابعی تکین می توان به نمایشهای دیورژانسی رسید که قانون بقاء برای دستگاه نمی باشند.

در این حالت، یافتن قوانین بقاء موضعی برای دستگاه PDE، $R(x,u)$ به یافتن مجموعه ای از ضرایب تابعی موضعی کاهش پیدا می کند.

۱.۲.۴ تعریف. *عملگر اویلر* برای U^j به صورت زیر تعریف می شود

$$E_{U^j} = \frac{\partial}{\partial U^j} - D_i\frac{\partial}{\partial U^j_i} + \cdots + (-1)^s D_{i_1}\cdots D_{i_s}\frac{\partial}{\partial U^j_{i_1\cdots i_s}} + \cdots \tag{۶.۴}$$

برای $j = 1,\cdots,q$.

با محاسبه مستقیم، می توان دید که عملگر اویلر هر نمایش دیورژانس $D_i\Phi^i[U] = 0$ را پوچ می کند. در حالت خاص اتحاد زیر برای هر $U(x)$ دلخواه برقرار است

$$E_{U^j}(D_i\Phi^i(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U)) \equiv 0, \quad j = 1,\cdots,q. \tag{۷.۴}$$

عکس این مطلب نیز برقرار است. در حالت خاص، تنها نمایش اسکالری که توسط عملگر اویلر پوچ می شود نمایش دیورژانس است. این موضوع به قضیه زیر منتج می شود.

۲.۲.۴ قضیه. معادلات $E_{U^j}F(x,U,\partial U,\cdots,\partial^s U) \equiv 0$، $j = 1,\cdots,q$ برای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است اگر وتنها اگر

$$F(x,U,\partial U,\cdots,\partial^s U) \equiv D_i\Psi^i(x,U,\partial U,\cdots,\partial^{s-1}U),$$

برای توابع $\Psi^i(x,U,\partial U,\cdots,\partial^{s-1}U)$، که در آن $i = 1,\cdots q$ برقرار باشد.

اثبات. [۱۷]. □

بنابه قضیه (۲.۲.۴)، قضیه زیر ارتباط بین ضرایب تابعی موضعی و قوانین بقاء موضعی را مشخص می کند.

۳.۲.۴ قضیه. مجموعه ای از ضرایب تابعی موضعی ناتکین $\{\Lambda_\nu(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U)\}_{\nu=1}^{l}$ قوانین بقاء دستگاه $R(x,u) = \Delta_\nu(x,u^{(n)})$ را تولید می کند اگر وتنها اگر اتحاد

$$E_{U^j}(\Lambda_\nu(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U)\Delta_\nu(x,u^{(n)}))\equiv 0,\quad j=1,\cdots q, \tag{۸.۴}$$

برای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار باشد.

از مجموعه معادلات (۸.۴) مجموعه ای از معادلات مشخصه خطی برای یافتن تمام ضرایب تابعی قوانین بقاء دستگاه $R(x,u)$ نتیجه می شود. چون معادلات (۸.۴) برای هر تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است، می توان U^j و تمام مشتقهای آن را به عنوان متغیرهای مستقلی نسبت به x^i در نظر گرفت، بنابراین دستگاه PDE خطی (۸.۴) به دستگاه خطی از معادلات خطی مشخصه تبدیل می شود که جوابهای آن مجموعه هایی از ضرایب تابعی موضعی برای دستگاه PDE، $R(x,u)$ خواهند بود.

توجه به این نکته مهم است برای دستگاه PDE که بر اساس *مشتقات پیشرو* قابل حل باشد، عکس قضیه (۳.۲.۴) وجود خواهد داشت. در حالت خاص، فرض کنید هر PDE از دستگاه مرتبه r، $R(x,u)$ را بتوان به فرم حل شده زیر نوشت

$$R^\nu[u]=u^{j_\nu}_{i_{\nu,1}\cdots i_{\nu,s}}-G^\nu(x,u,\partial u,\ldots,\partial^r u)=0,\ \ \nu=1,\cdots l, \tag{۹.۴}$$

که $s\leqslant k$، $1\leqslant j_\nu\leqslant q$، $1\leqslant i_{\nu,1}\cdots i_{\nu,s}\leqslant p$ برای تمام $\nu=1,\cdots l$. در (۹.۴) ، $\{u^{j_\nu}_{i_{\nu,1}\cdots i_{\nu,s}}\}$ مجموعه ای شامل l مشتقات پیشرو مستقل خطی از مرتبه s است با این ویژگی که هیچ کدام از آنها و مشتقات مربوط به آنها در $\{G^\nu[u]\}_{\nu=1}^{l}$ ظاهر نشده اند. بنابراین بدون کاستن از کلیت مسئله تمام مشتقات پیشرو و مشتقات مربوط به آنها را می توان در شارهای $\Phi^i[U]$ از قوانین بقاء حذف کرد. قضیه زیر از این مطلب نتیجه می شود.

۴.۲.۴ قضیه. برای هر قانون بقاء موضعی $D_i\Phi^i[U]=0$ از دستگاه $R(x,u)$ که به فرم حل شده (۹.۴) بیان شده، قوانین بقاء موضعی معادلی وجود دارد که می توان آنها را به فرم مشخصه زیر نوشت

$$D_i\tilde{\Phi}^i[U]=\tilde{\Lambda}_\nu[U](U^{j_\nu}_{i_{\nu,1}\cdots i_{\nu,s}}-G^\nu[U]) \tag{۱۰.۴}$$

با جملاتی از مجموعه ضرایب موضعی ناتکین $\{\tilde{\Lambda}_\nu[U]\}_{\nu=1}^{l}$ و شارهایی که شامل جملات $U^{j_\nu}_{i_{\nu,1}\cdots i_{\nu,s}}$ نیستند.

<u>*اثبات.*</u> [۱۷]. □

اهمیت اصلی قضیه (۴.۲.۴) در اینست که به طور اساسی تمام قوانین بقاء حاصل شده از ضرایب تابعی، دستگاه $R(x,u)$ را که به فرم حل شده بیان شده، تا حد هم ارزی مشخص می کند.

۳.۴ روش مستقیم برای ساختن قوانین بقاء

قضیه های (۳.۲.۴) و (۴.۲.۴)، روش سیتماتیکی برای یافتن قوانین بقاء ارائه می دهند که به آن روش مستقیم می گویند و می توان الگوریتم آن را به صورت زیر بیان کرد:

۱) برای دستگاه $R(x,u)$ مجموعه ضرایب تابعی $\{\Lambda_\nu(x,U,\partial_U,\cdots,\partial_U^r)\}_{\nu=1}^{l}$ را بیابید.

۲) معادلات مشخصه (۸.۴) را برای تابع دلخواه $U(x)$ به منظور یافتن تمام ضرایب تابعی حل کنید.

۳) شارهای متناظر با ضرایب تابعی $\Phi^i[u]=\Phi^i(x,u,\partial u,\cdots,\partial^r u)$ را پیدا کنید که، در رابطه زیر صدق می کنند

$$\Lambda_\nu(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U)\Delta_\nu(x,u^{(n)})\equiv D_i\Phi^i(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U). \qquad (۱۱.۴)$$

۴) هر شار و ضریب تابعی یک قانون بقاء $D_i\Phi^i(x,u,\partial u,\cdots,\partial^r u)\equiv 0$ برای تمام جوابهای $u(x)$ نتیجه می دهد.

در عمل، برای حل معادلات مشخصه (۸.۴) بهتر است دستگاه $R(x,u)$ را در حالت حل شده نسبت به مشتقهای پیشرو نوشت. در حالت خاص، وقتی دستگاه $R(x,u)$ به صورت حل شده نوشته می شود قضیه (۴.۲.۴) تضمین می کند که، تمام قوانین بقاء موضعی بدست آیند. بعلاوه، در حالت دستگاه حل شده، ضرایب تابعی تکین (که قانون بقاء تولید نمی کنند) و بدیهی (که قوانین بقاء بدیهی را نتیجه می دهند) حذف خواهند شد و درنتیجه، شارهای را می توان به صورت مستقیم با مقایسه طرفین معادله (۱۱.۴)، یا در حالتهای پیچیده از ضرایب تابعی یا دستگاه PDE با انتگرال گیری پیدا کرد. البته انتگرال گیری نیز در برخی موارد بسیار پیچده خواهد شد که ما برای رفع این مشکل از عملگر هوموتوپی استفاده خواهیم کرد که در ادامه فصل به آن اشاره خواهد شد.

۱.۳.۴ فرم کوشی-کوالسکی

در حالت کلی، تناظر یک به یک بین مجموعه های ضرایب تابعی موضعی غیر بدیهی و شارهای غیر بدیهی تنها برای دستگاههای PDE که فرم کوشی-کوالسکی می پذیرند برقرار است.

۱.۳.۴ تعریف. دستگاه $R(x,u)$ به فرم کوشی-کوالسکی نسبت به متغیر مستقل x^j است، اگر دستگاه نسبت به بیشترین مرتبه مشتق هر متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل x^j قابل حل باشد، یعنی

$$\frac{\partial^{s_\nu}}{\partial(x^j)^{s_\nu}}u^\nu=G^\nu(x,u,\partial u,\cdots,\partial^r u),\quad 1\le s_\nu\le r,\quad \nu=1,\ldots,q, \qquad (۱۲.۴)$$

که در آن همه مشتقهای نسبت به x^j که در سمت راست هر PDE از (۱۲.۴) ظاهر شده است دارای مرتبه کمتری از مشتقهای سمت چپ است.

۲.۳.۴ قضیه. فرض کنید دستگاه PDE فرم کوشی-کوالسکی (۱۲.۴) را بپذیرد. در اینصورت تمام قوانین بقاء موضعی غیر بدیهی از ضرایب تابعی نتیجه می شود. بعلاوه تناظر یک به یکی بین کلاسهای هم ارزی از قوانین بقاء و مجموعه های ضرایب تابعی مستقل از مشتقهای u^ν نسبت به x^j وجود دارد.

اثبات. [۷]. □

باید به این نکته توجه نمود که فرم کوشی-کوالسکی از یک دستگاه PDE نسبت به مشتقهای پیشرو برای تمام متغیرهای وابسته حالت خاصی از دستگاه حل شده است. بنابراین یک دستگاه PDE فرم کوشی-کوالسکی می پذیرد اگر تعداد متغیرهای وابسته آن با تعداد PDEهای دستگاه برابر باشد.

برای درک بهتر روش مستقیم قوانین بقاء مثال زیر را بررسی می کنیم.

۳.۳.۴ مثال. دستگاه تلگراف غیرخطی $(u^1 = u, u^2 = v)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} R^1[u,v] &= v_t - (u^2+1)u_x - u = 0, \\ R^2[u,v] &= u_t - v_x = 0. \end{aligned} \tag{۱۳.۴}$$

این دستگاه به فرم کوشی-کوالسکی مرتبه اول، با مشتقهای پیشرو v_t و u_t است. باید ضرایب تابعی موضعی به فرم

$$\Lambda_1 = \xi(x,t,U,V), \qquad \Lambda_2 = \phi(x,t,U,V) \tag{۱۴.۴}$$

را برای دستگاه PDE (۱۳.۴) بیابیم. جملات عملگر اویلر عبارتند از

$$E_U = \frac{\partial}{\partial U} - D_x\frac{\partial}{\partial U_x} - D_t\frac{\partial}{\partial U_t}, \quad E_V = \frac{\partial}{\partial V} - D_x\frac{\partial}{\partial V_x} - D_t\frac{\partial}{\partial V_t}$$

معادلات مشخصه (۸.۴) برای ضرایب تابعی (۱۴.۴) به صورت زیر خواهند شد

$$\begin{aligned} &E_U[\xi(x,t,U,V)(V_t - (U^2+1)U_x - U) + \phi(x,t,U,V)(U_t - V_x)] \equiv 0, \\ &E_V[\xi(x,t,U,V)(V_t - (U^2+1)U_x - U) + \phi(x,t,U,V)(U_t - V_x)] \equiv 0, \end{aligned} \tag{۱۵.۴}$$

که $U(x,t)$ و $V(x,t)$ توابع دلخواه هستند. معادلات (۸.۴) نسبت به U_t, V_t, U_x, V_x به دستگاه PDE خطی

زیر تجزیه می شوند.

$$\phi_V - \xi_U = 0, \qquad \phi_U - (U^2+1)\xi_V = 0,$$
$$\phi_x - \xi_t - U\xi_V = 0, \qquad (U^2+1)\xi_x - \phi_t - U\xi_U - \xi = 0, \tag{۱۶.۴}$$

جوابهای دستگاه مشخصه (۱۶.۴) پنج مجموعه از ضرایب تابعی موضعی از مرتبه صفر می باشد

$$(\xi_1,\phi_1) = (0,1), \qquad (\xi_2,\phi_2) = (t, x - \frac{1}{2}t^2),$$
$$(\xi_3,\phi_3) = (1,-t), \qquad (\xi_4,\phi_4) = (e^{x+\frac{1}{2}U^2+V}, Ue^{x+\frac{1}{2}U^2+V}),$$
$$(\xi_5,\phi_5) = (e^{x+\frac{1}{2}U^2-V}, -Ue^{x+\frac{1}{2}U^2-V}). \tag{۱۷.۴}$$

هر (ξ,ϕ) یک قانون بقاء غیر بدیهی از مرتبه صفر با مشخصه زیر تولید می کند

$$D_t\Psi(x,t,U,V) + D_x\Phi(x,t,U,V) \equiv \xi(x,t,U,V)R^1[U,V] + \phi(x,t,U,V)R^2[U,V].$$

با مساوی قرار دادن جملات مشتق مشابه در طرفین رابطه فوق، روابط زیر حاصل می شوند

$$\Psi_U = E_U\Psi = \phi, \qquad \Psi_V = E_V\Psi = \xi,$$
$$\Phi_U = \xi\frac{\partial R^1}{\partial U_x} + \phi\frac{\partial R^2}{\partial U_x}, \qquad \Phi_V = \xi\frac{\partial R^1}{\partial V_x} + \phi\frac{\partial R^2}{\partial V_x} = -\phi,$$
$$\Psi_t + \Phi_x = -U\xi. \tag{۱۸.۴}$$

با انتگرال گیری از معادلات (۱۸.۴) برای هر مجموعه ای از ضرایب تابعی، پنج قانون بقاء مستقل خطی مرتبه صفر برای دستگاه PDE (۱۳.۴) به صورت زیر حاصل می شود

$$\begin{aligned}
&D_tu + D_x[-v] = 0,\\
&D_t[(x - \frac{1}{2}t^2)u + tv] + D_x[(-x + \frac{1}{2}t^2)v - t(\frac{1}{3}u^3 + u)] = 0,\\
&D_t[v - tu] + D_x[(tv - (\frac{1}{3}u^3 + u)] = 0,\\
&D_t[e^{x+\frac{1}{2}u^2+v}] + D_x[-ue^{x+\frac{1}{2}u^2+v}] = 0,\\
&D_t[e^{x+\frac{1}{2}u^2-v}] + D_x[ue^{x+\frac{1}{2}u^2-v}] = 0,
\end{aligned} \tag{۱۹.۴}$$

برای جزئیات بیشتر به [۲۱] مراجعه نمایید.

۴.۴ قضیه نوتر

در سال ۱۹۱۸ نوتر [۶۹] الگوریتم مشهور خود (قضیه نوتر) برای یافتن قوانین بقاء موضعی برای دستگاههای معادلات دیفرانسیلی که *اصل تغییر* را می پذیرند را ارائه نمود. وقتی که دستگاه معادلات دیفرانسیل اصل تغییر را می پذیرد، آنگاه اکسترمم های اصل تغییر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را نتیجه می دهد که آنرا معادلات اویلر-لاگرانژ می نامند. در این حالت، نوتر نشان داد که اگر یک تقارن نقطه ای از اصل تغییر موجود باشد، آنگاه شارهای قانون بقاء موضعی توسط فرمولی صریح شامل بی نهایت کوچک هایی از تقارن نقطه ای و لاگرانژین (چگالی لاگرانژین) از اصل تغییر بدست می آیند.

۱.۴.۴ معادلات اویلر-لاگرانژ

تابعک $J[u]$ با n متغیر مستقل $x = (x^1, \ldots, x^n)$ و m تابع دلخواه $U = (U^1(x), \ldots, U^m(x))$ و مشتقهای آنها تا مرتبه k، که روی دامنه Ω تعریف شده اند را در نظر بگیرید

$$J[U] = \int_\Omega L[U]dx = \int_\Omega L(x, U, \partial U, \ldots, \partial^k U)dx. \qquad (۲۰.۴)$$

تابع $L[U] = L(x, U, \partial U, \ldots, \partial^k U)$ را *لاگرانژین* و تابعک $J[U]$ را *اصل تغییر* می نامند. تغییر بی نهایت کوچک از U را به صورت $U(x) \to U(x) + \varepsilon v(x)$ که $v(x)$ هر تابعی است که خودش و مشتقات آن از مرتبه $k-1$ بر روی مرز $\partial\Omega$ از دامنه Ω صفر می شوند. تغییر متناظر در لاگرانژین $L[U]$ به صورت زیر خواهد شد

$$\begin{aligned}\delta L &= L(x, U + \varepsilon v, \partial U + \varepsilon \partial v, \ldots, \partial^k U + \varepsilon \partial^k v) - L(x, U, \partial U, \ldots, \partial^k U) \\ &= \varepsilon\Big(\frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma} v^\sigma + \frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_j} v^\sigma_j + \ldots + \frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_{j_1\cdots j_k}} v^\sigma_{j_1\cdots j_k}\Big) + O(\varepsilon^2)\end{aligned} \qquad (۲۱.۴)$$

با انتگرال گیری جز به جز، می توان نشان داد که

$$\delta L = \varepsilon(v^\sigma E_{U^\sigma}(L[U]) + D_i W^i[U, v]) + O(\varepsilon^2), \qquad (۲۲.۴)$$

که E_{U^σ} عملگر اویلر نسبت به U^σ است و

$$\begin{aligned}W^i[U, v] &= v^\sigma\Big(\frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_i} + \ldots + (-1)^{k-1} D_{j_1}\cdots D_{j_{k-1}} \frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_{ij_1\cdots j_{k-1}}}\Big) \\ &+ v^\sigma_{j_1}\Big(\frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_{ij_1}} + \ldots + (-1)^{k-2} D_{j_2}\cdots D_{j_{k-1}} \frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_{ij_1 j_2\cdots j_{k-1}}}\Big) \\ &+ \cdots + v^\sigma_{j_1\cdots j_{k-1}} \frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_{ij_1 j_2\cdots j_{k-1}}}.\end{aligned} \qquad (۲۳.۴)$$

بنابه نمایش (۲۲.۴) و قضیه دیورژانس، تغییر متناظر در $J[U]$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \delta J &= J[U+\varepsilon v] - J[U] \\ &= \int_{\Omega} \delta L dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} \Big(v^{\sigma} E_{U^{\sigma}}(L[U]) + D_l W^l[U,v] \Big) dx + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \Big(\int_{\Omega} v^{\sigma} E_{U^{\sigma}}(L[U]) dx + \int_{\partial\Omega} W^l[U,v] n^l dS \Big) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{۲۴.۴}$$

که $\int_{\partial\Omega}$ بیانگر انتگرال سطح روی مرز $\partial\Omega$ از دامنه Ω با $n=(n^1,\cdots,n^n)$ بردار نرمال برون سوی یکه هستند. بنابراین، اگر $U=u(x)$ اکسترمم $J[U]$ باشد، آنگاه جمله $O(\varepsilon)$ از δJ باید صفر شود و بنابراین

$$\int_{\Omega} v^{\sigma} E_{u^{\sigma}}(L[U]) dx = 0 \tag{۲۵.۴}$$

برای $v(x)$ دلخواه تعریف شده روی دامنه Ω. بنابراین، اگر $U=u(x)$ اکسترمم $J[U]$ باشد، آنگاه $u(x)$ باید در دستگاه PDE زیر صدق کند

$$E_{u^{\sigma}}(L[U]) = \frac{\partial L[U]}{\partial u^{\sigma}} + \ldots + (-1)^k D_{j_1}\cdots D_{j_k} \frac{\partial L[u]}{\partial u^{\sigma}_{j_1\cdots j_k}} = 0, \quad \sigma = 1\ldots,m. \tag{۲۶.۴}$$

معادلات (۲۶.۴) را *معادلات اویلر-لاگرانژ* می نامند که اکسترمم $U=u(x)$ از اصل تغییر $J[U]$ در این معادلات صادق است. بنابراین قضیه زیر اثبات می شود.

۱.۴.۴ قضیه. اگر تابع هموار $U(x)=u(x)$ اکسترمم اصل تغییر

$$J[U] = \int_{\Omega} L[U] dx,$$

با $L[U]=L(x,U,\partial U,\ldots,\partial^k U)$ باشد، آنگاه $u(x)$ در معادلات اویلر-لاگرانژ (۲۶.۴) صدق می کند.

۲.۴.۴ الگوریتم نوتر از قضیه نوتر

در این بخش به بیان الگوریتم نوتر از قضیه نوتر خواهیم پرداخت. در این الگوریتم، لازم است که اصل تغییر $J[U]$ (۲۰.۴) تحت گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= x^i + \varepsilon \xi^i(x,U) + O(\varepsilon^2), \quad i=1,\ldots,n \\ \tilde{U}^{\alpha} &= U^{\alpha} + \varepsilon \eta^{\alpha}(x,U) + O(\varepsilon^2), \quad \alpha=1,\ldots,m \end{aligned} \tag{۲۷.۴}$$

با مولد بی نهایت کوچک

$$V = \xi^i(x, Uu)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, U)\frac{\partial}{\partial U^\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\xi^i(x, U)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{m}\eta^\alpha(x, U)\frac{\partial}{\partial U^\alpha}. \qquad (۲۸.۴)$$

پایا باشد. ناوردایی برقرار است اگر و تنها اگر

$$\int_{\tilde{\Omega}} L[\tilde{U}]d\tilde{x} = \int_{\Omega} L[U]dx,$$

که $\tilde{\Omega}$ تصویر Ω تحت تبدیل نقطه ای (۲۷.۴) است. ژاکوبین تبدیل (۲۷.۴) عبارتست از:

$$\jmath = det(D_i\tilde{x}^j) = 1 + \varepsilon D_i\xi^i(x, U) + O(\varepsilon^2) \qquad (۲۹.۴)$$

در اینصورت $d\tilde{x} = dx\jmath$. بعلاوه، چون (۲۷.۴) گروه لی از تبدیلات است، بنابراین $L[\tilde{U}] = e^{\varepsilon V^{(k)}}L[U]$ با جملاتی از توسیع مرتبه $k-$ام مولد بی نهایت کوچک (۲۸.۴) . درنتیجه، در الگوریتم نوتر، گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای (۲۷.۴) تقارن نقطه ای برای $J[U]$ است اگر وتنها اگر رابطه

$$\int_{\Omega}(\jmath e^{\varepsilon V^{(k)}} - 1)L[U]dx = \varepsilon\int_{\Omega}\Big(L[U]D_i\xi^i(x, U) + V^{(k)}L[U]\Big)dx + O(\varepsilon^2) \qquad (۳۰.۴)$$

برای هر $U(x)$ برقرار باشد. بنابراین، اگر $J[U]$ دارای تقارن نقطه ای (۲۷.۴) باشد، آنگاه جمله $O(\varepsilon)$ در (۳۰.۴) صفر خواهد شد و درنتیجه اتحاد زیر برقرار است

$$L[U]D_i\xi^i(x, U) + V^{(k)}L[U] \equiv 0. \qquad (۳۱.۴)$$

در بخش ۴ از فصل دوم، نشان داده شد که گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای (۲۷.۴) با خانواده ای از تبدیلات موضعی به فرم زیر معادل است

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= x^i, \quad i = 1, \ldots, n \\ \tilde{U}^\alpha &= U^\alpha + \varepsilon[\eta^\alpha(x, U) - U^\alpha_i\xi^i(x, U)] + O(\varepsilon^2), \quad \alpha = 1, \ldots, m \end{aligned} \qquad (۳۲.۴)$$

با مولد بی نهایت کوچک امتدادیافته مرتبه $k-$ام متناظرش یعنی $\tilde{V}^{(k)}$ که توسط روابط (۴۳.۲) و (۴۴.۲) بیان شدند، با u به جای U.

تحت تبدیل (۳۲.۴) ، تغییر بی نهایت کوچک $U(x) \to U(x) + \varepsilon v(x)$ دارای مولفه های

$$v^\alpha(x) = \tilde{\eta}^\alpha[U] = \eta^\alpha(x,U) - U_i^\alpha \xi^i(x,U),$$

با جملاتی از تبدیل (۳۲.۴) می باشند. بعلاوه، بنابه خواص گروهی از (۳۲.۴) ، نتیجه می شود که

$$\delta L = \varepsilon \tilde{V}^{(k)} L[U] + O(\varepsilon^2), \tag{۳۳.۴}$$

بنابراین

$$\int_\Omega \delta L dx = \varepsilon \int_\Omega \tilde{V}^{(k)} L[U] dx + O(\varepsilon^2). \tag{۳۴.۴}$$

بعد از مقایسه روابط (۳۴.۴) و (۲۴.۴) با $v^\alpha(x) = \tilde{\eta}^\alpha[U] = \eta^\alpha(x,U) - U_i^\alpha \xi^i(x,U)$، داریم

$$\tilde{V}^{(k)} L[U] \equiv \tilde{\eta}^\alpha[U] E_{U^\alpha}(L[U]) + D_i W^i[U, \tilde{\eta}^\alpha[U]], \tag{۳۵.۴}$$

$W^i[U, \tilde{\eta}^\alpha[U]]$ توسط رابطه (۲۳.۴) بیان می شود.

۲.۴.۴ لم. فرض کنید $V^{(k)}$ امتداد مرتبه $k-$ام مولد بی نهایت کوچک از گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای (۲۷.۴) و $\tilde{V}^{(k)}$ امتداد مرتبه $k-$ام مولد بی نهایت کوچک از خانواده ای تبدیلات یک پارامتری معادل آن (۳۲.۴) باشد. اگر $F(U) = F(x, U, \partial U, \dots, \partial^k U)$ تابع دلخواهی باشد، آنگاه اتحاد زیر برقرار است

$$V^{(k)} F[U] + F[U] D_i \xi^i(x,U) \equiv \tilde{V}^{(k)} F[U] + D_i\big(F[U]\xi^i(x,U)\big). \tag{۳۶.۴}$$

اثبات. [۱۷]. □

بنابه آنچه در بالا آمد، قضیه زیر نتیجه می شود.

۳.۴.۴ قضیه. (قضیه نوتر) فرض کنید دستگاه $R(x,u)$ (۱.۴) ، از اصل تغییر نتیجه شده باشد، یعنی، دستگاه PDE مفروض، مجموعه ای از معادلات اویلر-لاگرانژ (۲۳.۴) باشد که جوابهای $u(x)$ اکسترمم $U(x) = u(x)$ اصل تغییر $J[U]$ (۲۰.۴) با لاگرانژین $L[U]$ باشد. فرض کنید گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای (۲۷.۴) تقارن نقطه ای از $J[U]$ باشد. فرض کنید $W^l[U,u]$ برای توابع دلخواه $U(x)$ و $v(x)$ توسط رابطه (۲۳.۴) تعریف شده باشد. دراینصورت

(1) رابطه

$$\tilde{\eta}^\alpha[U] E_{U^\alpha}(L[U]) \equiv -D_i\Big(\xi^i(x,U)L[U] + W^i[U, \tilde{\eta}[U]]\Big) \tag{۳۷.۴}$$

برای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است، یعنی، $\{\tilde{\eta}^\alpha[U]\}_{\alpha=1}^m$ مجموعه ای از ضرایب تابعی از دستگاه اویلر-لاگرانژ (۲۳.۴) است.

(2) قانون بقاء موضعی

$$D_i\Big(\xi^i(x,u)L[u]+W^i[u,\tilde{\eta}[u]]\Big)=0, \tag{۳۸.۴}$$

برای هر جواب $u=\Theta(x)$ از دستگاه اویلر لاگرانژ (۲۳.۴) برقرار است.

اثبات. در اتحاد (۳۶.۴) قرار دهید $F[U]=L[U]$. دراینصورت از اتحاد (۳۱.۴) نتیجه می شود، رابطه

$$\tilde{V}^{(k)}L[U]+D_i\Big(L[U]\xi^i(x,U)\Big)\equiv 0. \tag{۳۹.۴}$$

برای توابع دلخواه $U(x)$ برقرار است. در رابطه (۳۹.۴) به جای $\tilde{V}^{(k)}L[U]$ از رابطه (۳۶.۴) مساویش را قرار دهید، آنگاه رابطه (۳۷.۴) حاصل می شود. اگر $U(x)=u(x)$ جواب دستگاه اویلر-لاگرانژ (۲۳.۴) باشد، آنگاه سمت چپ رابطه (۳۷.۴) صفر می شود و قانون بقاء (۳۸.۴) بدست می آید. □

۳.۴.۴ تعمیم قضیه نوتر

در سال ۱۹۶۷ بویر، قضیه نوتر را برای یافتن قوانین بقاء حاصل از تبدیلات مرتبه بالاتر تعمیم داد. در حالت خاص، اصل تغییر $J[U]$ (۲۰.۴) نسبت به تبدیل مرتبه بالاتر یک پارامتری پایا است اگر لاگرانژین آن یعنی $L[U]$ تا حد دیورژانس نسبت به چنین تبدیلاتی ناوردا باشد.

۴.۴.۴ تعریف. فرض کنید

$$\tilde{V}=\sum_{\alpha=1}^{m}\tilde{\eta}^\alpha(x,U,U^{(s)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{۴۰.۴}$$

مولد بی نهایت کوچک تبدیلات موضعی مرتبه بالاتر (۴۶.۲) با امتداد $\tilde{V}^{(\infty)}$ باشد، که توسط روابط (۴۷.۲) و (۴۸.۲) در فصل دوم تعریف شد. فرض کنید $\tilde{\eta}^\alpha[U]=\tilde{\eta}^\alpha(x,U,U^{(s)})$. این تبدیل تقارن موضعی از $J[U]$ است اگر وتنها اگر

$$\tilde{V}^{(\infty)}L[U]\equiv D_iA^i[U], \tag{۴۱.۴}$$

برای مجموعه ای از توابع $A^i[U]=A^i(x,U,\partial U,\ldots,\partial^r U)$، $i=1\ldots,n$.

۵.۴.۴ تعریف. تبدیل موضعی(۴۶.۲) با مولد بی نهایت کوچک $\tilde{V}$ که تقارن موضعی از $J[U]$ است، تقارن تغییراتی برای $J[U]$ می نامند.

۶.۴.۴ قضیه. (تعمیم قضیه نوتر) فرض کنید دستگاه PDE، (۱.۴)، از اصل تغییر نتیجه شده باشد، یعنی، دستگاه PDE مفروض، مجموعه ای از معادلات اویلر-لاگرانژ (۲۳.۴)باشد که جوابهای $u(x)$ اکسترمم $U(x) = u(x)$ اصل تغییر $J[U]$ (۲۰.۴) با لاگرانژین $L[U]$ باشد. فرض کنید گروه لی یک پارامتری از تبدیلات موضعی با مولد بی نهایت کوچک (۴۰.۴) تقارن تغییراتی از $J[U]$ باشد. فرض کنید $W^l[U,u]$ برای توابع دلخواه $U(x)$ و $v(x)$ توسط رابطه (۲۳.۴) تعریف شده باشد. دراینصورت

(1) رابطه

$$\tilde{\eta}^\alpha[U]E_{U^\alpha}\big(L[U]\big) \equiv D_i\Big(A^i[U] - W^i[U,\tilde{\eta}[U]]\Big) \tag{۴۲.۴}$$

برای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است، یعنی، $\{\tilde{\eta}^\alpha[U]\}_{\alpha=1}^m$ مجموعه ای از ضرایب تابعی از دستگاه اویلر-لاگرانژ (۲۳.۴) است.

(2) قانون بقاء موضعی

$$D_i\Big(W^i[U,\tilde{\eta}[u]] - A^i[u]\Big) = 0, \tag{۴۳.۴}$$

برای هر جواب $u = \Theta(x)$ از دستگاه اویلر-لاگرانژ(۲۳.۴) برقرار است.

<u>*اثبات*</u>. برای تبدیل موضعی با مولد (۴۰.۴)، نتیجه می شود که تغییر بی نهایت کوچک $U(x) \to U(x) + \varepsilon v(x)$ دارای مولفه های $\tilde{v}^\alpha(x) = \tilde{\eta}^\alpha[U]$ است. بنابراین ، معادله (۳۳.۴) به صورت زیر می شود

$$\delta L = \varepsilon \tilde{V}^{(\infty)} L[U] + O(\varepsilon^2), \tag{۴۴.۴}$$

اما از (۲۲.۴) داریم

$$\delta L = \varepsilon\Big(\tilde{\eta}^\alpha[U]E_{U^\alpha}\big(L[U]\big) + D_i\big(W^i[U,\tilde{\eta}[U]]\big)\Big) + O(\varepsilon^2), \tag{۴۵.۴}$$

بنابراین

$$\tilde{V}^{(\infty)} L[U] = \tilde{\eta}^\alpha[U]E_{U^\alpha}\big(L[U]\big) + D_i\Big(W^i[U,\tilde{\eta}[U]]\Big) \tag{۴۶.۴}$$

برای توابع دلخواه $U(x)$ برقرار است. چون تبدیل موضعی (۴۰.۴)تقارن تغییراتی $J[U]$ است، بنابراین معادلات (۴۱.۴) برقرار است. با جایگزینی $\tilde{V}^{(\infty)}L[U]$ در (۴۶.۴) از (۴۱.۴)، اتحاد (۴۲.۴) نتیجه می شود. اگر $U(x) = u(x)$ جواب دستگاه اویلر-لاگرانژ (۲۳.۴) باشد، آنگاه سمت چپ رابطه (۴۲.۴) صفر می شود و

قانون بقاء (۴۳.۴) بدست می آید. □

۷.۴.۴ قضیه. اگر قانون بقاء از قضیه نوتر حاصل شده باشد، آنگاه قانون بقاء مذکور از تعمیم قضیه نوتر (الگوریتم بویر) نیز بدست می آید.

اثبات. فرض کنید گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای (۲۷.۴) قانون بقاء را نتیجه داده باشد. در اینصورت اتحاد (۳۹.۴) برقرار است. درنتیجه،

$$\tilde{V}^{(k)}L[U] = \tilde{V}^{\infty}L[U] = D_i A^i[U], \qquad (۴۷.۴)$$

که $A^i[U] = D_i(L[U]\xi^i(x,U))$. اما معادله (۴۷.۴) تنها شرایطی است برای گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای که تقارن تغییراتی از $J[U]$ است. بنابراین، قانون بقاء یکسانی برای تعمیم قضیه نوتر بدست می آید. □

۴.۴.۴ محدودیت های قضیه نوتر

محدودیت های ذاتی مختلفی برای استفاده از قضیه نوتر به منظور یافتن قوانین موضعی دستگاه $R(x,u)$ وجود دارد. اولین آنها به دستگاه های تغییراتی مربوط می شود. از طرفی برای استفاده از این روش لاگرانژین دستگاه باید خود الحاق باشد، درنتیجه تعداد PDE های دستگاه باید با تعداد متغییرهای وابسته یکسان باشند برای اطلاع از جزئیات بیشتر می توانید به مراجع [۱۷] و [۷۰] مراجعه نمایید. بعلاوه باید فرمول صریحی برای لاگرانژین $L[U]$ یافت که معادلات اویلر-لاگرانژ آن دستگاه تغییراتی را نتیجه می دهد.

همچنین مشکلاتی در محاسبه تقارنهای تغییراتی از دستگاه PDE تغییرات وجود دارد. اول اینکه، برای دستگاه PDE مفروض، باید تقارنهای موضعی وابسته به مشتقات متغیرهای وابسته را تا مرتبه مورد نظر یافت. دوم، بعد از یافتن فرمول صریح برای لاگرانژین $L[U]$ باید بررسی نمود که کدام یک از تقارنهای دستگاه، لاگرانژین $L[U]$ را تا حد دیورژانس پایا نگه می دارند، یعنی کدام تقارن، تقارن تغییراتی است.

سرانجام، روش نوتر وابسته به مختصات است، زیرا تحت عمل تبدیلات نقطه ای (برخوردی) دستگاه معادلاتی که دارای اصل تغییراتی است ممکن است به دستگاهی تبدیل شود که دارای اصل تغییراتی نباشد.

روش مستقیم برای یافتن قوانین بقاء فارغ از تمام مسائل فوق می باشد. این روش را می توان به طور مستقیم برای هر دستگاه PDE به کار برد، دستگاه تغییراتی باشد یا نباشد. بعلاوه لزومی برای داشتن اطلاعاتی از لاگرانژین نیست، که وجود دارد یا ندارد.

روش مستقیم مستقل از انتخاب مختصات می باشد. این نتیجه می دهد که تبدیلات نقطه ای (برخوردی) قوانین بقاء را به قوانین بقاء می نگارند.

در روش مستقیم معادلات مشخصه (۸.۴) برای هر تابع دلخواهی مانند $U(x)$ برقرارند، درصورتیکه در دستگاه های تغییراتی، معادلات مشخصه تقارن ها زیر مجموعه ای از معادلات مشخصه ضرایب تابعی هستند. از طرفی حل معادلات مشخصه ضرایب تابعی به سختی حل معادلات مشخصه تقارن های موضعی نیستند.

اگر دستگاه PDE، دارای اصل تغییراتی باشد و لاگرانژین آن بدست آمده باشد می توان روش مستقیم را با روش نوتر ترکیب نمود، به این ترتیب که ابتدا، با استفاده از روش مستقیم ضرایب تابعی مربوط به قوانین بقاء موضعی را یافت و سپس تقارن های تغییراتی هر کدام را محاسبه کرد. در مرحله دوم، برای هر تقارن تغییراتی فرم دیورژانس متناظر با هر کدام را توسط الگوریتم بویر بدست آورد. در مرحله سوم، با استفاده از فرمول (۲۳.۴) در ارتباط با فرمول بویر (۴۳.۴) قوانین بقاء را یافت. البته با این ترکیب ضعف روش مستقیم که همان یافتن شار و چگالی متناظر با هر ضریب تابعی است برطرف خواهد شد ولی با این روش سختی کار همچنان باقیست. برای درک بهتر مفاهیم بیان شده به بررسی مثال زیر می پردازیم برای مشاهده جزئیات بیشتر محاسبات می توانید به [۲۲] مراجعه نمایید.

۸.۴.۴ مثال. معادله موج *کلین-گردن*[۱] به فرم زیر است

$$R[u] = u_{tx} + g(u) = 0, \qquad (۴۸.۴)$$

با جمله برهم کنش غیرخطی عمومی $g(u)$. این معادله دارای اصل تغییرات به صورت زیر می باشد

$$J[U] = \int L[U]dtdx \qquad (۴۹.۴)$$

با لاگرانژین

$$L[U] = -\frac{1}{2}U_tU_x + h(U), \quad h'(U) = g(U). \qquad (۵۰.۴)$$

برای $g(u)$ عمومی، تقارنهای نقطه ای معادله کلین-گردن انتقال در t و x و تجانس می باشند

$$V_1 = u_t\frac{\partial}{\partial u}, \quad V_2 = u_x\frac{\partial}{\partial u}, \quad V_3 = (tu_t - xu_x)\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (۵۱.۴)$$

هر سه تقارن فوق، تقارن های تغییراتی برای اصل تغییر $J[U]$ هستند. عمل امتداد یافته تقارن های فوق روی لاگرانژین (۵۰.۴)نمایش دیورژانس های زیر را نتیجه می دهد

$$\tilde{V}_1^{\infty}L[U] = -D_t(\frac{1}{2}U_tU_x + h(U)),$$
$$\tilde{V}_2^{\infty}L[U] = -D_x(\frac{1}{2}U_tU_x + h(U)), \qquad (۵۲.۴)$$
$$\tilde{V}_3^{\infty}L[U] = -D_t(\frac{1}{2}tU_tU_x + th(U)) + D_x(\frac{1}{2}xU_tU_x + xh(U)). \qquad (۵۳.۴)$$

[۱] Klein-Gordon

بنابه الگوریتم بویر تقارن های (۵۱.۴) ضرایب تابعی زیر را نتیجه می دهند

$$\Lambda_1[U] = \tilde{\eta}_1[U] = U_t, \quad \Lambda_2[U] = \tilde{\eta}_2[U] = U_x, \quad \Lambda_3[U] = \tilde{\eta}_3[U] = tU_t - xu_x. \tag{۵۴.۴}$$

در این مثال با توجه به سادگی ضرایب تابعی می توان با انتگرال گیری، شارهای قوانین بقاء را یافت ولی با استفاده از قضیه نوتر شارها را حساب می کنیم.

قرار دهید $x^1 = t, x^2 = x$ ، ابتدا مقادیر $W^i[U,v]$ (۲۳.۴) را برای $i = 1,2$، با استفاده از لاگرانژین (۵۰.۴) را محاسبه می کنیم

$$W^1[U,v] = -\frac{1}{2}vU_x, \quad W^2[U,v] = -\frac{1}{2}vU_t. \tag{۵۵.۴}$$

دراینصورت سه قانون بقاء، از (۵۲.۴) حاصل می شود

$$\begin{aligned}
\big(A_1^1, A_1^2\big) &= \Big(-\frac{1}{2}U_tU_x - h(U), 0\Big),\\
\big(A_2^1, A_2^2\big) &= \Big(0, -\frac{1}{2}U_tU_x - h(U)\Big),\\
\big(A_3^1, A_3^2\big) &= \Big(-\frac{1}{2}U_tU_x - th(U), \frac{1}{2}xU_tU_x + h(U)\Big).
\end{aligned} \tag{۵۶.۴}$$

بنابراین، با توجه به (۴۳.۴)، سه قانون بقاء معادله (۴۸.۴) متناظر با تقارن های تغییراتی (۵۱.۴) به صورت زیر می باشند

$$\begin{aligned}
&D_t\Big(h[u]\Big) - D_x\Big(\frac{1}{2}U_t^2\Big) = 0,\\
&D_t\Big(\frac{1}{2}U_x^2\Big) - D_x\Big(h[u]\Big) = 0,\\
&D_t\Big(\frac{1}{2}xU_x^2 + th[u]\Big) - D_x\Big(\frac{1}{2}tu_t^2 + xh[u]\Big) = 0.
\end{aligned} \tag{۵۷.۴}$$

۵.۴ بهینه سازی روش مستقیم

همانطور که مشاهده شد ضعف عمده روش مستقیم در محاسبه شارها و چگالی های قوانین بقاء موضعی بود، چرا که در این روش یا باید به صورت مستقیم بدنبال دو چند جمله ای براساس متغیرهای وابسته و مشتقات آنها می پرداختیم که در نمایش دیورژانسی صادق باشند یا اینکه با فرمولهای خاصی [۷۰] که معمولاً شامل انتگرال گیری از جملات متعدد می باشند به هدف خود می رسیدیم، درصورتیکه در موارد پیچده که دستگاه PDE شامل مشتقات مراتب بالا است انتگرال گیری به سادگی امکان پذیر نمی باشد. با ترکیب دو روش مستقیم و قضیه نوتر این مشکل برطرف می شود ولی همانطور که در بخش قبلی ذکر شد همیشه این امکان وجود ندارد و روش نوتر

محدودیتهای ویژه خود را دارا است.

در این بخش به معرفی روش دیگری برای یافتن قوانین بقاء خواهیم پرداخت، البته به طور خلاصه، که با ترکیب آن با روش مستقیم می توان ضعف روش مستقیم را تا حد زیادی برطرف کرد و سریعتر به شارها و چگالی های قوانین بقاء دست یافت.

۱.۵.۴ الگوریتم روش هرمان-پل

در سال ۲۰۱۰ *هرمان*[۲] و *پل*[۳] [۷۸]، [۷۹] روشی را برای یافتن قوانین بقاء ارائه کردند، که براساس روشهایی از حساب تغییرات، جبرخطی و هندسه دیفرانسیل استوار است. برای انجام محاسبات خود از نرم افزار متمتیکا استفاده نمودند و برای بیان الگوریتم خود، به محاسبه قوانین بقاء دو معادله *کازنتسو-زاخارف*[۴] (ZK) و *پتیاشویلی-کادوموتسو*[۵] (KP) با روش خود پرداختند. سپس روش خود را برای فضاهای چند بعدی تعمیم دادند.

اکنون به طور خلاصه، به بیان الگوریتم هرمان-پل برای یافتن قوانین بقاء موضعی می پردازیم.

مرحله اول: در این روش PDE مورد نظر باید به صورت تکاملی باشد یعنی، اگر t را به عنوان متغیر تکاملی در نظر بگیریم مشتق متغیر وابسته u نسبت به t باید براساس دیگر مشتقات متغیر وابسته بیان شود.

مرحله دوم: چگالی ها را به صورت ترکیب خطی (با ضرایب نامعین) از جملاتی در نظر بگیرید که، نسبت به تقارن های تجانس PDE ناوردا باشند.

مرحله سوم: حال چون معادله به فرم تکاملی است می توان تمام جملات u_t را از مسئله حذف کرد. نمایش باقی مانده باید دقیق باشد، پس از عملگر اویلر و این مطلب که اثر عملگر اویلر بر عبارت دقیق مقدارش صفر است، استفاده نموده تا به دستگاه خطی از ضرایب نامعین حاصل شود. و با حل آن چگالی درنظر گرفته شده مشخص می شود.

مرحله چهارم: بعد از مشخص شدن چگالی با استفاده از عملگر هوموتوپی (تعریف آن در ادامه ذکر خواهد شد)، شارهای متناظر با چگالی ها محاسبه می شوند.

مرحله پنجم: قوانین بقاء متناظر با چگالی و شارها محاسبه می شوند.

این روش نیز محدودیت های خاص خود را دارا می باشد. بارزترین آنها این است که معادله باید به فرم تکاملی نوشته شود، که در برخی موارد این امکان وجود ندارد. از طرفی چگال در نظر گرفته شده باید دارای تقارن های تجانسی باشد که ممکن است چنین تقارن هایی موجود نباشند.

در این بخش هدف ما ترکیب روش هرمان-پل با روش مستقیم است، تا ضعف روش مستقیم در محاسبه چگالی و شارها برطرف شود و روش بهینه تری برای محاسبه قوانین بقاء موضعی بدست آوریم. قبل از آن به

[۲] Hereman

[۳] Poole

[۴] Zakharov-Kuznetsov

[۵] Kadomtsev-Petviashvili

تعریف عملگر هوموتوپی در ابعاد مختلف خواهیم پرداخت.

۱.۵.۴ تعریف. عملگر هوموتوپی دو بعدی، عملگر برداری است با دو مولفه

$$\Big(H^{(x)}_{u(x,t)}f, H^{(t)}_{u(x,t)}f\Big), \tag{۵۸.۴}$$

که در آن

$$H^{(x)}_{u(x,t)}f=\int_0^1\Big(\sum_{j=1}^{q}I^{(x)}_{u^j}f\Big)[\lambda u]\frac{d\lambda}{\lambda},\qquad H^{(t)}_{u(x,t)}f=\int_0^1\Big(\sum_{j=1}^{q}I^{(t)}_{u^j}f\Big)[\lambda u]\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{۵۹.۴}$$

تابع زیر انتگرال $I^{(x)}_{u^j_{(x,t)}}f$ عبارتست از

$$I^{(x)}_{u^j}f=\sum_{k_1=1}^{M_1^j}\sum_{k_2=0}^{M_2^j}\Big(\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2}B^{(x)}u^j_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1-1}(-D_t)^{k_2-i_2}\Big)\frac{\partial f}{\partial u^j_{x^{k_1}t^{k_2}}}, \tag{۶۰.۴}$$

M_1^j، M_2^j، به ترتیب مرتبه مشتقات f در u نسبت x و t می باشند و ضریب ترکیبی به صورت زیر است

$$B^{(x)}=B(i_1,i_2,k_1,k_2)=\frac{\binom{i_1+i_2}{i_1}\binom{k_1+k_2-i_1-i_2-1}{k_1-i_1-1}}{\binom{k_1+k_2}{k_1}}. \tag{۶۱.۴}$$

به طور مشابه $I^{(t)}_{u^j_{(x,t)}}f$ به صورت زیر تعریف می شود

$$I^{(t)}_{u^j}f=\sum_{k_1=0}^{M_1^j}\sum_{k_2=1}^{M_2^j}\Big(\sum_{i_1=0}^{k_1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}B^{(t)}u^j_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1}(-D_t)^{k_2-i_2-1}\Big)\frac{\partial f}{\partial u^j_{x^{k_1}t^{k_2}}}, \tag{۶۲.۴}$$

که در آن $B^{(t)}(i_2,i_1,k_2,k_1)$ عبارتست از

$$B^{(x)}=B(i_2,i_1,k_2,k_1)=\frac{\binom{i_1+i_2}{i_2}\binom{k_1+k_2-i_1-i_2-1}{k_2-i_2-1}}{\binom{k_1+k_2}{k_2}}. \tag{۶۳.۴}$$

۲.۵.۴ تعریف. عملگر هوموتوپی سه بعدی، عملگر برداری است با سه مولفه

$$\Big(H^{(x)}_{u(x,t,z)}f, H^{(t)}_{u(x,t,z)}f, H^{(z)}_{u(x,t,z)}f\Big), \tag{۶۴.۴}$$

است که در آن مولفه x به فرم زیر است

$$H^{(x)}_{u(x,t,z)}f = \int_0^1 \Big(\sum_{j=1}^{q} I^{(x)}_{u^j}f\Big)[\lambda u]\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{۶۵.۴}$$

و مولفه های t و z به طور مشابه تعریف می شوند. تابع زیر انتگرال $I^{(x)}_{u^j_{(x,t)}}f$ عبارتست از

$$\begin{aligned} I^{(x)}_{u^j}f = \sum_{k_1=1}^{M_1^j}\sum_{k_2=0}^{M_2^j}\sum_{k_3=0}^{M_3^j}\Bigg(&\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2}\sum_{i_3=0}^{k_3} B^{(x)} u^j_{x^{i_1}t^{i_2}z^{i_3}} \\ &(-D_x)^{k_1-i_1-1}(-D_t)^{k_2-i_2}(-D_z)^{k_3-i_3}\Bigg)\frac{\partial f}{\partial u^j_{x^{k_1}t^{k_2}z^{k_3}}}, \end{aligned} \tag{۶۶.۴}$$

و ضریب ترکیبی به صورت زیر است

$$B^{(x)} = \frac{\begin{pmatrix} i_1+i_2+i_3 \\ i_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_2+i_3 \\ i_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1+k_2+k_3-i_1-i_2-i_3-1 \\ k_1-i_1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_2+k_3-i_2-i_3 \\ k_2-i_2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} k_1+k_2+k_3 \\ k_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_2+k_3 \\ k_2\end{pmatrix}}. \tag{۶۷.۴}$$

به طور مشابه $I^{(t)}_{u^j_{(x,t,z)}}f$، $I^{(z)}_{u^j_{(x,t,z)}}f$، $B^{(t)}$ و $B^{(z)}$تعریف می شوند.

۳.۵.۴ قضیه. فرض کنید f تابعی دقیق باشد، یعنی، $f = DivF$ برای $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{M-1}(\mathbf{x}))$. دراینصورت، در حالت دو بعدی، $F = Div^{-1}f = \Big(H^{(x)}_{u(x,t)}f, H^{(t)}_{u(x,t)}f\Big)$. به طور مشابه در حالت سه بعدی داریم $F = Div^{-1}f = \Big(H^{(x)}_{u(x,t,z)}f, H^{(t)}_{u(x,t,z)}f, H^{(z)}_{u(x,t,z)}f\Big)$.

<u>اثبات.</u> [۸۰]. □

۲.۵.۴ روش مستقیم بهینه شده

همانطور که قبلاً مشاهده شد، الگوریتم روش مستقیم در چهار مرحله انجام می شد. مرحله اول درنظر گرفتن ضریب تابعی نامعینی برای یافتن مجموعه ضرایب تابعی نامعین قوانین بقاء موضعی. می توان در این مرحله از محکی استفاده نمود، تا مرتبه مشتقات تابع وابسته، نسبت به متغیر های مستقل تا حدودی مشخص شود. این

محک استفاده از دستور فاکتور انتگرال برای دستگاه PDE می باشد، می توان فاکتورهای انتگرال دستگاه PDE را به کمک نرم افزار میپل با یک دستور ساده حساب نمود. مرتبه مشتقاتی که در فاکتورهای انتگرال ظاهر می شود با مرتبه مشتقاتی که در ضرایب تابعی ظاهر می شود در اکثر موارد یکسان است. بنابراین وقتی ضرایب تابعی را در نظر می گیریم کافیست مرتبه مشتقات مورد نظر را تا مرتبه مشتقات فاکتورهای انتگرال در نظر بگیریم. این مسئله خود می تواند یک مسئله تحقیقاتی مناسب برای دانشجویان علاقمند باشد، که ارتباط دقیق بین فاکتورهای انتگرال و ضرابب تابعی نامعین قوانین بقاء دستگاه PDE را بررسی نمایند.

تغییر بعدی در مرحله سوم الگوریتم روش مستقیم است، جایی که شارها و چگالی به صورت مستقیم با حل (۱۱.۴) همانند مثال (۸.۴.۴) محاسبه می شوند اتفاق می افتد. چرا که در برخی موارد معادلات مشخصه (۱۱.۴) برای بعضی معادلات و دستگاه های PDE قابل حل نمی باشند. در این مرحله با استفاده از عملگر هوموتوپی شارها و چگالی را می یابیم که ابزار مفیدی برای اینکار می باشد.

با تغییراتی که بیان شد، الگوریتم روش مستقیم را به صورت زیر باز نویسی می کنیم:

۱) فاکتورهای انتگرال دستگاه PDE $R(x,u)$ را برای مشخص شدن مرتبه مشتقات ظاهر شده در ضرایب تابعی به کمک نرم افزار میپل محاسبه نمایید.

۲) برای دستگاه $R(x,u)$ مجموعه ضرایب تابعی $\{\Lambda_\nu(x,u,\partial u,\cdots,\partial^r u)\}_{\nu=1}^{l}$ را بیابید.

۳) معادلات مشخصه (۸.۴) را برای تابع دلخواه $u(x)$ به منظور یافتن تمام ضرایب تابعی حل کنید.

۴) از عملگر هوموتوپی برای یافتن شارهای متناظر با ضرایب تابعی $\Phi^i[u]=\Phi^i(x,u,\partial u,\cdots,\partial^r u)$ استفاده نمایید.

۵) هر شار و ضریب تابعی یک قانون بقاء $D_i\Phi^i(x,u,\partial u,\cdots,\partial^r u)\equiv 0$ برای تمام جوابهای $u(x)$ نتیجه می دهد.

برای بررسی الگوریتم بهینه شده روش مستقیم، در ادامه این روش را برای معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی مورد مطالعه قرار می دهیم.

۶.۴ قوانین بقاء معادله هیروتا-رمانی

برای معادله هیروتا-رمانی

$$u_t - u_{x^2t} + au_x(1-u_t) = 0,$$

ابتدا ضرایب تابعی را مشخص می کنیم. برای این منظور فرض کنید ضرایب تابعی به فرم

$$\Lambda = \xi(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}),$$

باشند. معادلات مشخصه (۸.۴) برای این معادله از رابطه زیر بدست می آیند

$$E_u[\xi(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt})(u_t - u_{x^2t} + au_x(1-u_t))] \equiv 0, \tag{۶۸.۴}$$

که $u(x,t)$ تابعی دلخواه می باشد. معادلات (۶۸.۴) بر حسب مشتقات مرتبه سوم u به یک دستگاه خطی از معادلات دیفرانسی تبدیل می شوند که عبارتند از

$$\begin{aligned}
&\xi_x = 0, && \xi_u = 0, && \xi_t = \frac{-2\,u_{tt}\left(-\xi + u_{tt}\xi_{u_{tt}} + u_{xx}\xi_{u_{xx}}\right)}{u_t - 1},\\
&\xi_{u_x} = 0, && \xi_{u_{xt}} = 0, && \xi_{u_t} = \frac{-\,u_{tt}\xi_{u_{tt}} - u_{xx}\xi_{u_{xx}} + \xi}{u_t - 1},\\
&\xi_{u_{xx}^2} = 0, && \xi_{u_{xx}u_{tt}} = 0, && \xi_{u_{tt}^2} = 0,
\end{aligned}$$

با حل دستگاه فوق جواب زیر حاصل می شود

$$\xi = c_1\,u_{xx} + \frac{1}{2}\,c_2(2\,tu_{tt} + u_t - 1) + c_3u_{tt}, \tag{۶۹.۴}$$

که در آن c_1، c_2 و c_3 ثابتهای دلخواه هستند. بنابراین ضرایب موضعی قوانین بقاء به فرم زیر می باشند

$$\begin{aligned}
&1)\ \Lambda_1 = \xi_1 = u_{xx}, && 2)\ \Lambda_2 = \xi_2 = u_{tt},\\
&3)\ \Lambda_3 = \xi_3 = tu_{tt} + \frac{1}{2}u_t - \frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{۷۰.۴}$$

هر کدام از ضرایب تابعی $\Lambda_i = \xi_i$ یک قانون بقاء به صورت $D_t\Psi^i + D_x\Phi^i = 0$ با مشخصه

$$D_t\Psi^i + D_x\Phi^i \equiv \xi_i\Big(u_t - u_{x^2t} + au_x(1-u_t)\Big), \tag{۷۱.۴}$$

تولید می کنند. برای محاسبه شار Φ و چگالی Ψ برای هرکدام از ضرایب Λ_i از عملگر هوموتوپی دو بعدی (۱.۵.۴) $\left(H^{(x)}_{u(x,t)}f, H^{(t)}_{u(x,t)}f\right)$ استفاده می کنیم.

قانون بقاء متناظر با $\Lambda_1=\xi_1$

ابتدا برای ضریب تابعی $\Lambda_1=\xi_1=u_{xx}$ محاسبات را انجام می دهیم. در این حالت

$$f=u_{xx}\Big(u_t-u_{x^2t}+au_x(1-u_t)\Big), \qquad (۷۲.۴)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
I_u^{(x)}f&=\sum_{k_1=1}^{2}\sum_{k_2=0}^{1}\left(\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2}B^{(x)}u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1-1}(-D_t)^{k_2-i_2}\right)\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}}\\
&=u\Big(au_{xx}-au_tu_{xx}\Big)+\Big(u(-D_x)+u_x\Big)\Big(u_t-u-xxt+au_x-au_xu_t\Big)\\
&\quad+\Big(\frac{2}{3}u(-D_x)(-D_t)+\frac{1}{3}u_t(-D_x)+\frac{1}{3}u_x(-D_t)+\frac{2}{3}u_{xt}\Big)\Big(u_{xx}\Big)\\
&=u_xu_t-\frac{2}{3}u_xu_{x^2t}+a{u_x}^2-a{u_x}^2u_t-uu_{xt}+\frac{1}{3}uu_{x^3t}\\
&\quad+auu_xu_{xt}-\frac{2}{3}u_{x^2}u_{xt}+\frac{1}{3}u_tu_{x^3},
\end{aligned} \qquad (۷۳.۴)$$

به طور مشابه برای $I_u^{(t)}f$ داریم

$$\begin{aligned}
I_u^{(t)}f&=\sum_{k_1=0}^{2}\sum_{k_2=1}^{1}\left(\sum_{i_1=0}^{k_1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}B^{(t)}u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1}(-D_t)^{k_2-i_2-1}\right)\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}}\\
&=u\Big(u_{xx}-au_xu_{xx}\Big)+\frac{1}{3}\Big(u(-D_x)^2+u_x(-D_x)+u_{xx}\Big)\Big(-u_{xx}\Big)\\
&=uu_{xx}-auu_xu_{xx}-\frac{1}{3}u_xx^2+\frac{1}{3}u_xu_{x^3}-\frac{1}{3}uu_{x^4},
\end{aligned} \qquad (۷۴.۴)$$

حال با جایگذاری λu به جای u در روابط (۷۳.۴) و (۷۴.۴) و انتگرال گیری از آنها نسبت به λ روی بازه $[0,1]$ داریم

$$\begin{aligned}
H_{u(x,t)}^{(x)}f&=\int_0^1\Big(\lambda u_xu_t-\frac{2}{3}\lambda u_xu_{xxt}+a\lambda u_x^2-a\lambda^2u_x^2u_t-\lambda uu_{xt}\\
&\quad+\frac{1}{3}\lambda uu_{x^3t}+a\lambda^2uu_xu_{xt}-\frac{2}{3}\lambda u_{x^2}u_{xt}+\frac{1}{3}\lambda u_tu_{x^3}\Big)\,d\lambda\\
&=\frac{1}{2}u_xu_t-\frac{1}{3}u_xu_{x^2t}+\frac{1}{2}au_x^2-\frac{1}{3}au_x^2u_t-\frac{1}{2}uu_{xt}+\frac{1}{6}uu_{x^3t}\\
&\quad+\frac{1}{3}auu_{xt}u_x-\frac{1}{3}u_{xx}u_{xt}+\frac{1}{6}u_tu_{x^3},
\end{aligned}$$

$$(۷۵.۴)$$

$$\begin{aligned}
H_{u(x,t)}^{(t)}f&=\int_0^1\Big(\lambda uu_{xx}-a\lambda^2uu_xu_{xx}-\frac{1}{3}\lambda u_x^2+\frac{1}{3}\lambda u_xu_{x^3}+\frac{1}{3}\lambda uu_{x^4}\Big)d\lambda\\
&=-\frac{1}{3}auu_xu_{xx}+\frac{1}{2}uu_{x^2}-\frac{1}{6}u_{xx}^2-\frac{1}{6}u_xu_{x^3}-\frac{1}{6}uu_{x^4},
\end{aligned}$$

با انتخاب $\Phi^1 = H^{(x)}_{u(x,t)}f$ و $\Psi^1 = H^{(t)}_{u(x,t)}f$ قانون بقاء موضعی متناظر با ضریب تابعی $\Lambda_1 = \xi_1 = u_{xx}$ برای معادله هیروتا-رمانی عبارتست از

$$D_t\Psi^1 + D_x\Phi^1 \equiv \xi_1\Big(u_t - u_{x^2t} + au_x(1-u_t)\Big) = 0, \qquad (۷۶.۴)$$

به عبارت دیگر داریم

$$\begin{aligned} &D_t\Big(-\tfrac{1}{3}auu_xu_{xx} + \tfrac{1}{2}uu_{x^2} - \tfrac{1}{6}u_{xx}^2 - \tfrac{1}{6}u_xu_{x^3} - \tfrac{1}{6}uu_{x^4}\Big) + D_x\Big(\tfrac{1}{2}u_xu_t - \tfrac{1}{3}u_xu_{x^2t} \\ &+\tfrac{1}{2}au_x^2 - \tfrac{1}{3}au_x^2u_t - \tfrac{1}{2}uu_{xt} + \tfrac{1}{6}uu_{x^3t} + \tfrac{1}{3}auu_{xt}u_x - \tfrac{1}{3}u_{xx}u_{xt} + \tfrac{1}{6}u_tu_{x^3}\Big) = 0. \end{aligned} \qquad (۷۷.۴)$$

قانون بقاء متناظر با $\Lambda_2 = \xi_2$

حال قانون بقاء متناظر با ضریب تابعی $\Lambda_2 = \xi_2 = u_{tt}$ را محاسبه می کنیم. در این حالت

$$f = u_{tt}\Big(u_t - u_{x^2t} + au_x(1-u_t)\Big), \qquad (۷۸.۴)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I^{(x)}_u f &= \sum_{k_1=1}^{2}\sum_{k_2=0}^{2}\Big(\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2} B^{(x)}u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1-1}(-D_t)^{k_2-i_2}\Big)\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}} \\ &= u\Big(au_{tt} - au_tu_{tt}\Big) + \Big(\frac{2}{3}u(-D_x)(-D_t) + \frac{1}{3}u_t(-D_x) + \frac{1}{3}u_x(-D_t) + \frac{2}{3}u_{xt}\Big)\Big(u_{tt}\Big) \\ &= auu_{tt} - auu_tu_{tt} - \frac{2}{3}uu_{xt^3} + \frac{1}{3}u_tu_{xt^2} + \frac{1}{3}u_xu_{t^3} - \frac{2}{3}u_{xt}u_{tt}, \end{aligned} \qquad (۷۹.۴)$$

به طور مشابه برای $I^{(t)}_u f$ داریم

$$\begin{aligned} I^{(t)}_u f &= \sum_{k_1=0}^{2}\sum_{k_2=1}^{2}\Big(\sum_{i_1=0}^{k_1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} B^{(t)}u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1}(-D_t)^{k_2-i_2-1}\Big)\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}} \\ &= u\Big(u_{tt} - au_xu_{tt}\Big) + \Big(u(-D_t) + u_t\Big)\Big(u_t - u_{x^2t} + au_x - au_xu_t\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(u(-D_x)^2 + u_x(-D_x) + u_xx\Big)\Big(-u_{tt}\Big) \\ &= u_{t^2} - u_tu_{x^2t} + au_xu_t - au_xu_{t^2} + \frac{2}{3}uu_{x^2t^2} \\ &\quad -auu_{xt} + auu_{xt}u_t + \frac{1}{3}u_xu_{xt^2} - \frac{1}{3}u_{x^2}u_{t^2}. \end{aligned} \qquad (۸۰.۴)$$

حال با جایگذاری λu به جای u در $I_u^{(x)} f$ و $I_u^{(t)} f$ و انتگرال گیری از آنها نسبت به λ روی بازه $[0,1]$ داریم

$$\begin{aligned} H_{u(x,t)}^{(x)} f &= \int_0^1 \Big(a\lambda u u_{tt} - a\lambda^2 u u_t u_{tt} - \frac{2}{3}\lambda u u_{xt^3} + \frac{1}{3}\lambda u_t u_{xt^2} + \frac{1}{3}\lambda u_x u_{t^3} - \frac{2}{3}\lambda u_{xt} u_{tt} \Big)\, d\lambda \\ &= \frac{a}{2} u u_{tt} - \frac{a}{3} u_t u_{tt} - \frac{1}{3} u u_{xt^3} + \frac{1}{6} u_t u_{xt^2} + \frac{1}{6} u_x u_{t^3} - \frac{1}{3} u_{xt} u_{tt} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} H_{u(x,t)}^{(t)} f = \int_0^1 \Big(& u_{t^2} - \lambda u_t u_{x^2 t} + a\lambda u_x u_t - a\lambda u_x u_{t^2} + \frac{2}{3}\lambda u u_{x^2 t^2} \\ & - a\lambda u u_{xt} + a\lambda^2 u u_{xt} u_t + \frac{1}{3}\lambda u_x u_{xt^2} - \frac{1}{3}\lambda u_{x^2} u_{t^2} \Big) d\lambda \\ = {} & \frac{1}{2} u_{t^2} - \frac{1}{2} u_t u_{x^2 t} + \frac{a}{2} u_x u_t - \frac{a}{3} u_x u_{t^2} + \frac{1}{3} u u_{x^2 t^2} \\ & - \frac{a}{2} u u_{xt} + \frac{a}{3} u u_{xt} u_t + \frac{1}{6} u_x u_{xt^2} - \frac{1}{6} u_{x^2} u_{t^2}. \end{aligned}$$

با انتخاب $\Phi^2 = H_{u(x,t)}^{(x)} f$ و $\Psi^2 = H_{u(x,t)}^{(t)} f$ قانون بقاء موضعی متناظر با ضریب تابعی $\Lambda_2 = \xi_2 = u_{tt}$ برای معادله هیروتا-رمانی عبارتست از:

$$D_t \Psi^2 + D_x \Phi^2 \equiv \xi_2 \Big(u_t - u_{x^2 t} + a u_x (1 - u_t) \Big) = 0, \qquad (۸۱.۴)$$

به عبارت دیگر داریم

$$\begin{aligned} & D_t \Big(\tfrac{1}{2} u_{t^2} - \tfrac{1}{2} u_t u_{x^2 t} + \tfrac{a}{2} u_x u_t - \tfrac{a}{3} u_x u_{t^2} + \tfrac{1}{3} u u_{x^2 t^2} - \tfrac{a}{2} u u_{xt} + \tfrac{a}{3} u u_{xt} u_t + \tfrac{1}{6} u_x u_{xt^2} - \tfrac{1}{6} u_{x^2} u_{t^2} \Big) \\ & + D_x \Big(\tfrac{a}{2} u u_{tt} - \tfrac{a}{3} u_t u_{tt} - \tfrac{1}{3} u u_{xt^3} + \tfrac{1}{6} u_t u_{xt^2} + \tfrac{1}{6} u_x u_{t^3} - \tfrac{1}{3} u_{xt} u_{tt} \Big) = 0. \end{aligned}$$

قانون بقاء متناظر با $\Lambda_3 = \xi_3$

حال قانون بقاء متناظر با ضریب تابعی $\Lambda_3 = \xi_3 = t u_{tt} + \frac{1}{2} u_t - \frac{1}{2}$ را محاسبه می کنیم. در این حالت f به صورت زیر خواهد بود

$$f = \Big(t u_{tt} + \frac{1}{2} u_t - \frac{1}{2} \Big) \Big(u_t - u_{x^2 t} + a u_x (1 - u_t) \Big), \qquad (۸۲.۴)$$

مشابه محاسباتی که انجام دادیم مولفه های عملگر هوموتوپی را می یابیم

$$\begin{aligned} I_u^{(x)} f = &-\frac{1}{2}au + auu_t + atuu_{t^2} - atuu_tu_{t^2} - \frac{1}{2}auu_t{}^2 - uu_{xt^2} - \frac{2}{3}tuu_{xt^3} \\ &+\frac{1}{3}tu_tu_{xt^2} - \frac{1}{6}u_tu_{xt} + \frac{1}{2}u_xu_{t^2} + \frac{1}{3}tuu_{t^3} + \frac{1}{3}u_{xt} - \frac{2}{3}tu_{xt}u_{t^2}, \end{aligned} \tag{۸۳.۴}$$

برای $I_u^{(t)} f$ داریم

$$\begin{aligned} I_u^{(t)} f = &-\frac{1}{2}u + \frac{1}{3}uu_{x^2t} + \frac{2}{3}\,tuu_{x^2t^2} + \frac{1}{3}tu_xu_{xt^2} + \frac{1}{6}u_xu_{xt} \\ &+\frac{1}{6}u_{x^2} - \frac{1}{3}tu_{x^2}u_{t^2} - \frac{1}{6}u_{x^2}u_t - atuu_{xt} + atuu_tu_{xt} + tu_t{}^2 \\ &-tu_tu_{x^2t} + atu_tu_x - atu_xu_t{}^2, \end{aligned} \tag{۸۴.۴}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} H_{u(x,t)}^{(x)} f = &-\frac{1}{2}au + \frac{1}{2}auu_t + \frac{1}{2}atuu_{t^2} - \frac{1}{3}atuuu_{t^2} - \frac{1}{6}auu_t{}^2 \\ &-\frac{1}{2}uu_{xt^2} - \frac{1}{3}\,tuu_{xt^3} + \frac{1}{6}tu_tu_{xt^2} - \frac{1}{12}u_tu_{xt} + \frac{1}{4}u_xu_{t^2} \\ &+\frac{1}{6}tu_xu_{t^3} + \frac{1}{3}u_{1,2} - \frac{1}{3}tu_{xt}u_{t^2}, \end{aligned}$$

(۸۵.۴)

$$\begin{aligned} H_{u(x,t)}^{(t)} f = &-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}u_{x^2t} + \frac{1}{3}\,tuu_{x^2t^2} + \frac{1}{6}tu_xu_{xt^2} + \frac{1}{12}u_xu_{xt} \\ &+\frac{1}{6}u_{x^2} - \frac{1}{6}tu_{x^2}u_{t^2} - \frac{1}{12}u_{x^2}u_t - \frac{1}{2}atuu_{xt} + \frac{1}{3}\,atuu_tu_{xt} \\ &+\frac{1}{2}tu_t{}^2 - \frac{1}{2}\,tu_tu_{x^2t} + \frac{1}{2}\,atu_tu_x - \frac{1}{3}atu_xu_t{}^2, \end{aligned}$$

با انتخاب $\Phi^3 = H_{u(x,t)}^{(x)} f$ و $\Psi^3 = H_{u(x,t)}^{(t)} f$ قانون بقاء موضعی متناظر با ضریب تابعی $\Lambda_3 = \xi_3$ برای معادله هیروتا-رمانی عبارتست از

$$D_t\Psi^3 + D_x\Phi^3 \equiv \xi_3\Big(u_t - u_{x^2t} + au_x(1-u_t)\Big) = 0, \tag{۸۶.۴}$$

به عبارت دیگر داریم

$$\begin{aligned}
&D_t\Big(-\frac{1}{2}\,u+\frac{1}{6}\,uu_{x^2t}+\frac{1}{3}\,tuu_{x^2t^2}+\frac{1}{6}\,tu_xu_{xt^2}+\frac{1}{12}\,u_xu_{xt}\\
&\quad+\frac{1}{6}\,u_{x^2}-\frac{1}{6}\,tu_{x^2}u_{t^2}-\frac{1}{12}\,u_{x^2}u_t-\frac{1}{2}\,atuu_{xt}+\frac{1}{3}\,atuu_tu_{xt}\\
&\quad+\frac{1}{2}\,tu_t{}^2-\frac{1}{2}\,tu_tu_{x^2t}+\frac{1}{2}\,atu_tu_x-\frac{1}{3}\,atu_xu_t{}^2\Big)\\
&+D_x\Big(-\frac{1}{2}\,au+\frac{1}{2}\,auu_t+\frac{1}{2}\,atuu_{t^2}-\frac{1}{3}\,atuuu_{t^2}-\frac{1}{6}\,auu_t{}^2\\
&\quad-\frac{1}{2}\,uu_{xt^2}-\frac{1}{3}\,tuu_{xt^3}+\frac{1}{6}\,tu_tu_{xt^2}-\frac{1}{12}\,u_tu_{xt}+1/4\,u_xu_{t^2}\\
&\quad+\frac{1}{6}\,tu_xu_{t^3}+\frac{1}{3}\,u_{1,2}-\frac{1}{3}\,tu_{xt}u_{t^2}\Big)=0.
\end{aligned} \tag{۸۷.۴}$$

۷.۴ قوانین بقاء معادله فرونبرگ-ویتهام

در سال ۱۹۶۷ ، نتیجه مطالعه و بررسی کیفی شکست امواج توسط *فرونبرگ* [۶] و ویتهام معادله زیر شد

$$u_t-u_{xxt}+u_x=uu_{xxx}-uu_x+3u_xu_{xx}, \tag{۸۸.۴}$$

در این قسمت قوانین بقاء این معادله را به عنوان مثالی دیگر برای روش مستقیم بهینه شده می یابیم. برای این منظور فرض کنید ضرایب تابعی به فرم $\Lambda=\xi(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt})$ باشند. معادلات مشخصه (۸.۴) برای این معادله از رابطه زیر بدست می آیند

$$E_u\Big(\xi(u_t-u_{xxt}+u_x-uu_{xxx}+uu_x-3u_xu_{xx})\Big)\equiv 0, \tag{۸۹.۴}$$

که $u(x,t)$ تابعی دلخواه می باشد. معادلات (۸۹.۴) بر حسب مشتقات مرتبه سوم u به یک دستگاه خطی از معادلات دیفرانسیل تبدیل می شوند که عبارتند از

$$\begin{aligned}
&\xi_{tt}=0, &&\xi_u=(u_{x^2}-1)\xi_{u_{xt}}+(u_{xt}-uu_{x^2}+2u)\xi_{u_{tt}},\\
&\xi_{tu_{tt}}=0, &&\xi_{u_x}=2\xi_{u_{xt}}+(u_t-2uu_x)\xi_{u_{tt}},\\
&\xi_{u_t}=\xi_{u_{tt}}, &&\xi_{u_{xx}}=u(\xi_{u_{xt}}-u\xi_{u_{tt}}),\\
&\xi_{u_{xt}u_{tt}}=0, &&\xi_x=\frac{\xi_t}{uu_{xx}-u+u_x^2+u_{xt}-1},\\
&\xi_{u_{xt}^2}=0, &&\xi_{u_{xt}}=\frac{\xi_t}{uu_{xx}-u+u_x^2+u_{xt}-1}, &&\xi_{u_{tt}^2}=0,
\end{aligned}$$

---

[۶] Fronberg

جواب دستگاه فوق عبارتست از

$$\Lambda = \xi = c_1((u_{xx}-1)u + u_{xt} - 1 + u_x^2)t + c_3((u_{xx}-1)u + u_x^2 + u_{xt}) \\ + \frac{1}{2}(2u_{xt}u + u^2 + 2u_{tt} + 2u_t u_x)c_2 + c_1 x + c_4, \qquad (۹۰.۴)$$

که c_i، $i = 1, \cdots, 4$ ثابت های دلخواه هستند. بنابراین ضرایب تابعی قوانین بقاء عبارتند از

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \xi_1 = 1, \\ \Lambda_2 &= \xi_2 = uu_{xx} - u + u_x^2 + u_{xt}, \\ \Lambda_3 &= \xi_3 = uu_{xt} + \tfrac{1}{2}u^2 + u_{tt} + u_t u_x, \\ \Lambda_4 &= \xi_4 = tuu_{xx} - tu - t + tu_x^2 + tu_{xt} + x. \end{aligned} \qquad (۹۱.۴)$$

هرکدام از ضرایب $\Lambda_i = \xi_i$، $i = 1, \cdots, 4$ یک قانون بقاء موضعی به فرم $D_t\Psi^i + D_x\Phi^i = 0$ با مشخصه

$$D_t\Psi^i + D_x\Phi^i \equiv \xi_i\Big(u_t - u_{xxt} + u_x - uu_{xxx} + uu_x - 3u_x u_{xx}\Big) = 0, \qquad (۹۲.۴)$$

بر روی جواب های معادله تولید می کنند. مرحله بعدی یافتن Ψ^i و Φ^i به کمک عملگر هوموتوپی می باشد که مانند مثال قبل عمل می کنیم.

قانون بقاء متناظر با $\Lambda_1 = \xi_1$

ابتدا برای ضریب تابعی $\Lambda_1 = \xi_1 = 1$ محاسبات را انجام می دهیم. در این حالت

$$f = u_t - u_{xxt} + u_x - uu_{xxx} + uu_x - 3u_x u_{xx}, \qquad (۹۳.۴)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I_u^{(x)} f &= \sum_{k_1=1}^{3}\sum_{k_2=0}^{1}\Big(\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2} B^{(x)} u_{x^{i_1}t^{i_2}} (-D_x)^{k_1-i_1-1}(-D_t)^{k_2-i_2}\Big)\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}} \\ &= u + u^2 - 2u_x^2 - \frac{2}{3}u_{xt} - 2uu_{x^2}, \end{aligned} \qquad (۹۴.۴)$$

به طور مشابه برای $I_u^{(t)} f$ داریم

$$I_u^{(t)} f = \sum_{k_1=0}^{3}\sum_{k_2=1}^{1}\Big(\sum_{i_1=0}^{k_1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} B^{(t)} u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1}(-D_t)^{k_2-i_2-1}\Big)\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}}$$
$$= u - \frac{1}{3}u_{xx} \qquad (۹۵.۴)$$

حال با جایگذاری λu به جای u در روابط (۹۴.۴) و (۹۵.۴) و انتگرال گیری از آنها نسبت به λ روی بازه $[0,1]$ داریم

$$H_{u(x,t)}^{(x)} f = \int_0^1 \Big(u + \lambda u^2 - 2\lambda u_x^2 - \frac{2}{3}u_{xt} - 2\lambda u u_{xx}\Big)\, d\lambda$$
$$= u + \frac{1}{2}u^2 - u_x^2 - \frac{2}{3}u_{xt} - u u_{xx}$$

همچنین

$$H_{u(x,t)}^{(t)} f = \int_0^1 \Big(u - \frac{1}{3}u_{xx}\Big) d\lambda$$
$$= u - \frac{1}{3}u_{xx},$$

با انتخاب $\Phi^1 = H_{u(x,t)}^{(x)} f$ و $\Psi^1 = H_{u(x,t)}^{(t)} f$ قانون بقاء موضعی متناظر با ضریب تابعی $\Lambda_1 = \xi_1 = 1$ برای معادله عبارتست از:

$$D_x\big(u + \tfrac{1}{2}u^2 - u_x^2 - \tfrac{2}{3}u_{xt} - u u_{xx}\big) + D_t\big(u - \tfrac{1}{3}u_{xx}\big) = 0. \qquad (۹۶.۴)$$

قانون بقاء متناظر با $\Lambda_2 = \xi_2$

برای ضریب تابعی $\Lambda_2 = \xi_2 = u u_{xx} - u + u_x^2 + u_{xt}$ تابع f به صورت زیر است

$$f = \Big(u_{xx}u - u + u_x^2 + u_{xt}\Big)\Big(u_t - u_{xxt} + u_x - u u_{xxx} + u u_x - 3u_x u_{xx}\Big), \qquad (۹۷.۴)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
I_u^{(x)} f &= \sum_{k_1=1}^{3}\sum_{k_2=0}^{1}\Big(\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2} B^{(x)} u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1-1}(-D_t)^{k_2-i_2}\Big)\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}}\\
&= 3\,u_{x^2}u^2-\frac{1}{6}\,u_xu_t+3\,u_x^2u+\frac{11}{6}\,u_{xt}u-2\,u_{x^2}^2u^2+2\,u_x^2u^2\\
&\quad -\frac{1}{2}\,u_{xt}u^2-\frac{1}{2}\,uu_{t^2}-\frac{1}{6}\,u^2u_{x^3t}-\frac{1}{6}\,uu_{x^2t^2}+\frac{1}{2}\,u_t^2\\
&\quad -\frac{1}{6}\,u_tu_{x^2t}-u^2-u^3-\frac{1}{6}\,uu_xu_{x^2t}+2\,uu_xu_t-4\,uu_x^2u_{x^2}\\
&\quad -\frac{19}{6}\,uu_{xt}u_{x^2}-\frac{1}{3}\,uu_tu_{x^3}-\frac{1}{6}\,u_tu_xu_{x^2}-2\,u_{xt}u_x^2+\frac{1}{3}\,u_xu_{xt^2}\\
&\quad -\frac{2}{3}\,u_{xt}^2-2\,u_x^4, \qquad (۹۸.۴)
\end{aligned}$$

به طور مشابه برای $I_u^{(t)} f$ داریم

$$\begin{aligned}
I_u^{(t)} f &= \sum_{k_1=0}^{3}\sum_{k_2=1}^{1}\Big(\sum_{i_1=0}^{k_1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} B^{(t)} u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1}(-D_t)^{k_2-i_2-1}\Big)\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}}\\
&= \frac{1}{2}\,u_{x^2}u^2-u^2+uu_x^2+\frac{1}{2}\,uu_{xt}+\frac{1}{2}\,uu_1u_{x^3}\\
&\quad +\frac{1}{6}\,u_{x^2}u+\frac{1}{6}\,uu_{x^2}^2+\frac{1}{6}\,u^2u_{x^4}+\frac{1}{6}\,uu_{x^3t}\\
&\quad +\frac{1}{2}\,u_xu_t-\frac{1}{6}\,u_xu_{x^2t}+\frac{1}{6}\,u_x^2-\frac{5}{6}\,u_x^2u_{x^2}-\frac{1}{3}\,u_{x^2}u_{xt}, \qquad (۹۹.۴)
\end{aligned}$$

حال با جایگذاری λu به جای u در روابط (۹۸.۴) و (۹۹.۴) و انتگرال گیری از آنها نسبت به λ روی بازه $[0,1]$ داریم

$$
\begin{aligned}
H^{(x)}_{u(x,t)}f &= \int_0^1 \Big(3\,\lambda^2 u_{x^2}u^2 - \frac{1}{6}\lambda\, u_x u_t + 3\,\lambda^2 u_x^2 u + \frac{11}{6}\lambda\, u_{xt}u \\
&\quad -2\lambda^3\, u_{x^2}^2 u^2 + 2\lambda^3\, u_x^2 u^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 u_{xt}u^2 - \frac{1}{2}\lambda\, u u_{t^2} - \frac{1}{6}\lambda^2 u^2 u_{x^3t} \\
&\quad -\frac{1}{6}\lambda\, u u_{x^2t} + \frac{1}{2}\, u_t^2 - \frac{1}{6}\lambda\, u_t u_{x^2t} - \lambda u^2 - \lambda^2 u^3 - \frac{1}{6}\lambda^2 u u_x u_{x^2t} \\
&\quad +2\,\lambda^2 u u_x u_t - 4\lambda^3 u u_x^2 u_{x^2} - \frac{19}{6}\,\lambda^2 u u_{xt}u_{x^2} - \frac{1}{3}\lambda^2 u u_t u_{x^3} \\
&\quad -\frac{1}{6}\lambda^2 u_t u_x u_{x^2} - 2\,\lambda^2 u_{xt}u_x^2 + \frac{1}{3}\lambda\, u_x u_{xt^2} - \frac{2}{3}\lambda\, u_{xt}^2 - 2\,\lambda^3 u_x^4\Big)\, d\lambda \\
&= u_{x^2}u^2 - \frac{1}{12}\, u_x u_t + u_x^2 u + \frac{11}{12}\, u_{xt}u - \frac{1}{2}\, u_{x^2}^2 u^2 + \frac{1}{2}\, u_x^2 u^2 \\
&\quad -\frac{1}{6}\, u_{xt}u^2 - 1\frac{1}{4}\, u u_{t^2} - \frac{1}{18}\, u^2 u_{x^3t} - \frac{1}{12}\, u u_{x^2t^2} + \frac{1}{4}\, u_t^2 \\
&\quad -\frac{1}{12}\, u_t u_{x^2t} - \frac{1}{2}\, u^2 - \frac{1}{3}\, u^3 - \frac{1}{18}\, u u_x u_{x^2t} + \frac{2}{3}\, u u_x u_t - \, u u_x^2 u_{x^2} \\
&\quad -\frac{19}{18}\, u u_{xt}u_{x^2} - \frac{1}{9}\, u u_t u_{x^3} - \frac{1}{18}\, u_t u_x u_{x^2} - \frac{2}{3}\, u_{xt}u_x^2 + \frac{1}{6}\, u_x u_{xt^2} \\
&\quad -\frac{1}{3}\, u_{xt}^2 - \frac{1}{2}\, u_x^4,
\end{aligned}
$$

همچنین

$$
\begin{aligned}
H^{(t)}_{u(x,t)}f &= \int_0^1 \Big(\frac{1}{2}\lambda^2 u_{x^2}u^2 - \lambda u^2 + \lambda^2 u u_x^2 + \frac{1}{2}\lambda\, u u_{xt} + \frac{1}{2}\lambda^2 u u_1 u_{x^3} \\
&\quad +\frac{1}{6}\lambda\, u_{x^2}u + \frac{1}{6}\lambda^2 u u_{x^2}^2 + \frac{1}{6}\lambda^2 u^2 u_{x^4} + \frac{1}{6}\lambda\, u u_{x^3t} \\
&\quad +\frac{1}{2}\lambda\, u_x u_t - \frac{1}{6}\lambda\, u_x u_{x^2t} + \frac{1}{6}\lambda\, u_x^2 - \frac{5}{6}\lambda^2 u_x^2 u_{x^2} - \frac{1}{3}\lambda\, u_{x^2}u_{xt}\Big) d\lambda \\
&= \frac{1}{6}\, u_{x^2}u^2 - \frac{1}{2}\, u^2 + \frac{1}{3}\, u u_x^2 + 1/4\, u u_{xt} + \frac{1}{6}\, u u_1 u_{x^3} \\
&\quad +\frac{1}{12}\, u_{x^2}u + \frac{1}{18}\, u u_{x^2}^2 + \frac{1}{18}\, u^2 u_{x^4} + \frac{1}{12}\, u u_{x^3t} \\
&\quad +\frac{1}{4}\, u_x u_t - \frac{1}{12}\, u_x u_{x^2t} + \frac{1}{12}\, u_x^2 - \frac{5}{18}\, u_x^2 u_{x^2} - \frac{1}{6}\, u_{x^2}u_{xt},
\end{aligned}
$$

قانون بقاء موضعی متناظر با ضریب تابعی $\Lambda_2 = \xi_2 = u u_{xx} - u + u_x^2 + u_{xt}$ عبارتست از

$$
\begin{aligned}
&D_x\Big(-\frac{1}{18}uu_xu_{xxt}+\frac{2}{3}uu_xu_t-uu_x^2u_{xx}-\frac{19}{18}uu_{xt}u_{xx}-\frac{1}{9}uu_tu_{xxx}\\
&\quad-\frac{1}{18}u_xu_tu_{xx}-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{3}u_{xt}^2-\frac{2}{3}u_{xt}u_x^2+\frac{1}{6}u_xu_{xtt}\\
&\quad-\frac{1}{2}u_x^4+u_{xx}u^2-\frac{1}{12}u_xu_t+uu_x^2+\frac{11}{12}uu_{xt}-\frac{1}{2}u_{xx}^2u^2+\frac{1}{2}u_x^2u^2\\
&\quad-\frac{1}{6}u_{xt}u^2-\frac{1}{4}uu_{tt}-\frac{1}{18}u^2u_{xxxt}-\frac{1}{12}uu_{xxtt}+\frac{1}{4}u_t^2-\frac{1}{12}u_tu_{xxt}\Big)\\
&+D_t\Big(\frac{1}{6}u_{xx}u^2-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}uu_x^2+\frac{1}{4}uu_{xt}+\frac{1}{6}uu_xu_{xxx}+\frac{1}{12}u_{xx}u\\
&\quad+\frac{1}{18}uu_{xx}^2+\frac{1}{18}u^2u_{xxxx}+\frac{1}{12}uu_{xxxt}+\frac{1}{4}u_xu_t-\frac{1}{12}u_xu_{xxt}\\
&\quad+\frac{1}{12}u_x^2-\frac{5}{18}u_x^2u_{xx}-\frac{1}{6}u_{xx}u_{xt}\Big)=0.
\end{aligned}
$$

قانون بقاء متناظر با $\Lambda_3=\xi_3$

برای ضریب تابعی $\Lambda_3=\xi_3=uu_{xt}+\frac{1}{2}u^2+u_{tt}+u_tu_x$ داریم

$$
\begin{aligned}
I_u^{(x)}f &= \sum_{k_1=1}^{3}\sum_{k_2=0}^{2}\Big(\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2}B^{(x)}u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1-1}(-D_t)^{k_2-i_2}\Big)\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}}\\
&= -3uu_tu_xu_{x^2}-\frac{1}{2}u_{xt}u^2+u_{t^2}u+\frac{1}{2}u_{xt}u^3-2u^3u_{x^2}\\
&\quad+\frac{1}{2}u_{t^2}u^2+uu_t^2-\frac{1}{2}u^3u_{x^3t}-\frac{7}{6}u^2u_{x^2t^2}+\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u^4\\
&\quad+2u_tu_xu-2uu_tu_{x^2t}-\frac{8}{3}uu_{t^2}u_{x^2}-\frac{7}{2}u_{xt}u^2u_{x^2}-\frac{3}{2}u_tu^2u_{x^3}\\
&\quad+\frac{3}{2}u_tu_xu^2+\frac{1}{2}u^2u_xu_{x^2t}+2uu_x^2u_{xt}+uu_xu_{xt^2}-\frac{2}{3}u_{xt}u_{t^2}-2uu_{xt}^2\\
&\quad-\frac{2}{3}uu_{xt^3}-\frac{5}{3}u_x^2u_{t^2}-2u_tu_x^3+\frac{1}{3}u_xu_{t^3}+\frac{1}{3}u_t^2u_{x^2}+\frac{1}{3}u_tu_{xt^2}+\frac{2}{3}3u_xu_tu_{xt}, \qquad (۱.۰۰.۴)
\end{aligned}
$$

به طور مشابه برای $I_u^{(t)}f$ داریم

$$
\begin{aligned}
I_u^{(t)}f &= \sum_{k_1=0}^{3}\sum_{k_2=1}^{2}\Big(\sum_{i_1=0}^{k_1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}B^{(t)}u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1}(-D_t)^{k_2-i_2-1}\Big)\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}}\\
&= -u_{xt}u+u_tu_x+{u_x}^2u-\frac{1}{2}\,u_{xt}u^2+\frac{1}{2}\,u_x^2u^2\\
&\quad-u_{x^2}u^2-\frac{1}{2}\,u_{x^2}u^3+\frac{3}{2}\,u^2u_{x^2}^2+\frac{1}{2}\,u^3u_{x^4}+\frac{7}{6}\,u^2u_{x^3t}\\
&\quad+2\,uu_2u_x+\frac{4}{3}\,uu_xu_{x^2t}+u_xu^2u_{x^3}-3\,uu_x^2u_{x^2}-\frac{1}{3}\,uu_2u_{x^3}\\
&\quad+\frac{5}{3}\,uu_{x^2}u_{xt}-3\,u_xu_tu_{x^2}+\frac{1}{2}\,u^3+\frac{2}{3}\,uu_{x^2t^2}+\frac{2}{3}\,u_x^2u_{xt}\\
&\quad+\frac{1}{3}\,u_xu_{xt^2}-\frac{1}{3}\,u_{x^2}u_{t^2}+u_t^2-u_tu_{x^2t},
\end{aligned}
$$

حال با جایگذاری λu به جای u در $I_u^{(x)} f$ و $I_u^{(t)} f$ و انتگرال گیری از آنها نسبت به λ روی بازه $[0,1]$ داریم

$$\begin{aligned} H_{u(x,t)}^{(x)} f = & -\frac{1}{6}u_{xt}u^2 - \frac{1}{2}u_{xx}u^3 + \frac{1}{8}u_{xt}u^3 + \frac{1}{6}u_{tt}u^2 + \frac{1}{3}u{u_t}^2 - \frac{1}{8}u^3u_{xxxt} \\ & -\frac{7}{18}u^2u_{xxtt} - \frac{1}{3}u_{xt}u_{tt} - \frac{2}{3}u{u_{xt}}^2 - \frac{1}{3}uu_{xttt} - \frac{5}{9}{u_x}^2u_{tt} - \frac{1}{2}u_t{u_x}^3 \\ & +\frac{1}{6}u_xu_{ttt} + \frac{1}{9}{u_t}^2u_{xx} + \frac{1}{6}u_tu_{xtt} + \frac{1}{2}uu_{tt} - \frac{3}{4}uu_tu_xu_{xx} + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{8}u^4 \\ & +\frac{1}{3}u_xuu_{xtt} + \frac{1}{2}{u_x}^2uu_{xt} - \frac{3}{8}u_tu^2u_{xxx} - \frac{7}{8}\,u_{xt}u^2u_{xx} + \frac{1}{8}u_xu^2u_{xxt} \\ & +\frac{3}{8}u_tu_xu^2 + \frac{2}{3}uu_2u_x - \frac{8}{9}\,uu_{tt}u_{xx} + \frac{2}{9}u_tu_xu_{xt} - \frac{2}{3}uu_tu_{xxt}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} H_{u(x,t)}^{(t)} f = & -\frac{1}{2}\,u_{xt}u + \frac{1}{2}\,u_tu_x + \frac{1}{3}{u_x}^2u - \frac{1}{6}\,u_{xt}u^2 + \frac{1}{8}{u_x}^2u^2 - \frac{1}{3}\,u_{xx}u^2 \\ & -\frac{1}{8}\,u_{xx}u^3 + \frac{3}{8}u^2{u_{xx}}^2 + \frac{1}{8}u^3u_{xxxx} + \frac{7}{18}u^2u_{xxxt} + \frac{2}{3}\,uu_tu_x + \frac{4}{9}\,uu_xu_{xxt} \\ & +\frac{1}{4}\,u_xu^2u_{xxx} - \frac{3}{4}\,u{u_x}^2u_{xx} - \frac{1}{9}\,uu_tu_{xxx} + \frac{5}{9}\,uu_{xx}u_{xt} - u_xu_tu_{xx} + \frac{1}{6}u^3 \\ & +\frac{1}{3}\,uu_{xxtt} + \frac{2}{9}{u_1}^2u_{xt} + \frac{1}{6}\,u_xu_{xtt} - \frac{1}{6}\,u_{xx}u_{tt} + \frac{1}{2}{u_t}^2 - \frac{1}{2}\,u_tu_{xxt}, \end{aligned}$$

با انتخاب $\Phi^3 = H_{u(x,t)}^{(x)} f$ و $\Psi^3 = H_{u(x,t)}^{(t)} f$ قانون بقاء موضعی متناظر با ضریب تابعی $\Lambda_3 = \xi_3$ برای معادله عبارتست از:

$$D_x\Phi^3 + D_t\Psi^3 = 0. \qquad (۱۰۱.۴)$$

قانون بقاء متناظر با $\Lambda_4 = \xi_4$

برای $\Lambda_4 = \xi_4 = tuu_{xx} - tu - t + tu_x^2 + tu_{xt} + x$ محاسبات را همانند حالت های قبل انجام می دهیم و دراینصورت داریم

$$
\begin{aligned}
I_u^{(x)} f &= \sum_{k_1=1}^{3}\sum_{k_2=0}^{1}\Big(\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2} B^{(x)} u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1-1}(-D_t)^{k_2-i_2}\Big)\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}}\\
&= -\frac{19}{6}\,utu_{xt}u_{x^2} + 2\,utu_xu_t - 4\,utu_x^2u_{x^2} - \frac{1}{6}\,utu_xu_{x^2t}\\
&\quad -\frac{1}{6}\,u_2tu_xu_{x^2} - \frac{1}{3}\,u_x + \frac{1}{3}\,u_t + \frac{2}{3}\,tu_{xt} - tu + 2\,tu_x^2\\
&\quad +xu - 2\,tu^2 + xu^2 - tu^3 + \frac{11}{6}\,uu_x - \frac{1}{2}\,uu_t - \frac{1}{6}\,uu_{x^2t}\\
&\quad -\frac{1}{6}\,u^2u_{x^3} - \frac{1}{2}\,u^2u_x + \frac{1}{2}\,tu_t^2 + 2\,tu_{x^2}u + 3\,tu_{x^2}u^2\\
&\quad +\frac{11}{6}\,tu_{xt}u + 3\,tu_x^2u - \frac{1}{6}\,tu_xu_t - 2\,tu_{x^2}^2u^2 - \frac{1}{2}\,tu_{xt}u^2\\
&\quad +2\,tu_x^2u^2 - 2\,uxu_{x^2} - \frac{1}{6}\,uu_1u_{x^2} - \frac{1}{2}\,utu_{t^2} - \frac{1}{6}\,tu^2u_{x^3t}\\
&\quad -\frac{1}{6}\,utu_{x^2t^2} - \frac{1}{6}\,u_ttu_{x^2t} - 2\,tu_{xt}u_x^2 + \frac{1}{3}{u_x}^3 - 2\,tu_x^4\\
&\quad -2\,xu_x^2 + \frac{1}{3}\,u_xu_{xt} + \frac{1}{3}\,u_xtu_{xt^2} - \frac{2}{3}\,tu_{xt}^2 - \frac{2}{3}\,u_{xt}x\\
&\quad -\frac{1}{3}\,uu_ttu_{x^3}
\end{aligned}
$$

برای تابع زیر انتگرال مولفه دوم عملگر هوموتوپی نیز داریم

$$
\begin{aligned}
I_u^{(t)} f &= \sum_{k_1=0}^{3}\sum_{k_2=1}^{1}\Big(\sum_{i_1=0}^{k_1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} B^{(t)} u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1}(-D_t)^{k_2-i_2-1}\Big)\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}}\\
&= \frac{1}{2}\,utu_xu_{x^3} + \frac{1}{3}\,u_x + \frac{1}{3}\,tu_{x^2} - tu + \frac{1}{6}\,tu_x^2\\
&\quad -tu^2 + ux + \frac{1}{6}\,tu_{x^2}u + \frac{1}{2}\,tu_{x^2}u^2 + utu_x^2\\
&\quad +\frac{1}{2}\,utu_{xt} + \frac{1}{6}\,utu_{x^2}^2 + \frac{1}{6}\,tu^2u_{x^4} + \frac{1}{6}\,utu_{x^3t}\\
&\quad +\frac{1}{2}\,u_xtu_t - \frac{1}{6}\,u_xtu_{x^2t} - \frac{5}{6}\,tu_x^2u_{x^2} - \frac{1}{3}\,u_{x^2}tu_{xt} - \frac{1}{3}\,u_{x^2}x,
\end{aligned}
$$

حال با جایگذاری λu به جای u در $I_u^{(x)}f$ و $I_u^{(t)}f$ و انتگرال گیری از آنها نسبت به λ روی بازه $[0,1]$ داریم

$$\begin{aligned} H^{(x)}_{u(x,t)}f &= -\frac{19}{18}\,utu_{xt}u_{x^2}+\frac{2}{3}\,utu_xu_t-utu_x^2u_{x^2}-\frac{1}{18}\,utu_xu_{x^2t}\\ &-\frac{1}{18}\,u_2tu_xu_{x^2}-\frac{1}{3}\,u_x+\frac{1}{3}\,u_t+\frac{2}{3}\,tu_{xt}-tu\\ &+tu_x^2+xu-tu^2+\frac{1}{2}\,xu^2-\frac{1}{3}\,tu^3+\frac{11}{12}\,uu_x\\ &-\frac{1}{4}\,uu_t-\frac{1}{12}\,uu_{x^2t}-\frac{1}{18}\,u^2u_{x^3}-\frac{1}{6}\,u^2u_x\\ &+\frac{1}{4}\,tu_t^2+tu_{x^2}u+tu_{x^2}u^2+\frac{11}{12}\,tu_{xt}u+tu_x^2u\\ &-\frac{1}{12}\,tu_xu_t-\frac{1}{2}\,tu_{x^2}^2u^2-\frac{1}{6}\,tu_{xt}u^2+\frac{1}{2}\,tu_x^2u^2\\ &-uxu_{x^2}-\frac{1}{18}\,uu_1u_{x^2}-\frac{1}{4}\,utu_{t^2}-\frac{1}{18}\,tu^2u_{x^3t}\\ &-\frac{1}{12}\,utu_{x^2t^2}-\frac{1}{12}\,u_ttu_{x^2t}-\frac{2}{3}\,tu_{xt}u_x^2+\frac{1}{9}\,u_x{}^3\\ &-\frac{1}{2}\,tu_x^4-xu_x^2+\frac{1}{6}\,u_xu_{xt}+\frac{1}{6}\,tu_xu_{xt^2}-\frac{1}{3}\,tu_{xt}^2\\ &-\frac{2}{3}\,u_{xt}x-\frac{1}{9}\,uu_ttu_{x^3} \end{aligned}$$

(۱۰۲.۴)

$$\begin{aligned} H^{(t)}_{u(x,t)}f &= \frac{1}{6}\,utu_xu_{x^3}+\frac{1}{3}\,u_x+\frac{1}{3}\,tu_{x^2}-tu+\frac{1}{12}\,tu_x^2\\ &-\frac{1}{2}\,tu^2+ux+\frac{1}{12}\,tu_{x^2}u+\frac{1}{6}\,tu_{x^2}u^2+\frac{1}{3}\,utu_x^2\\ &+1/4\,utu_{xt}+\frac{1}{18}\,utu_{x^2}^2+\frac{1}{18}\,tu^2u_{x^4}+\frac{1}{6}\,utu_{x^3t}\\ &+\frac{1}{2}\,u_xtu_t-\frac{1}{12}\,tu_xu_{x^2t}-\frac{5}{18}\,tu_x^2u_{x^2}-\frac{1}{6}\,tu_{x^2}u_{xt}-\frac{1}{3}\,u_{x^2}x, \end{aligned}$$

با انتخاب $\Phi^4=H^{(x)}_{u(x,t)}f$ و $\Psi^4=H^{(t)}_{u(x,t)}f$ قانون بقاء موضعی متناظر با ضریب تابعی $\Lambda_4=\xi_4$ برای معادله عبارتست از:

$$D_x\Phi^4+D_t\Psi^4=0. \qquad (۱۰۳.۴)$$

۸.۴ قوانین بقاء معادله دسته-ویتهام

به عنوان آخرین مثال، قوانین بقاء معادله $u_{xt}=2uu_{xx}+u_x^2$ که در [۸۱]، به عنوان مدلی برای بیان اختلال امواج کوتاه در الاستیک یک بعدی معرفی شده است از روش مستقیم بهینه شده محاسبه می کنیم. فرض کنید ضرایب تابعی به فرم $\Lambda=\xi(x,t,u,u_x,u_t)$ باشند. معادلات مشخصه (۸.۴) برای این معادله از رابطه زیر بدست می

آیند

$$E_u\Big(\xi(u_{xxt}-2uu_{xx}-u_x^2)\Big)\equiv 0, \qquad (۱۰۴.۴)$$

که $u(x,t)$ تابعی دلخواه می باشد. معادلات (۱۰۴.۴) بر حسب مشتقات مرتبه دوم u به یک دستگاه خطی از معادلات دیفرانسیل تبدیل می شوند که عبارتند از

$$\begin{aligned}
&\xi_{xx}=0, && \xi_u=0,\\
&\xi_{u_t^2}=0, && \xi_{u_xu_t}=0,\\
&\xi_{xu_t}=0, && \xi_{tx}=-2\xi_{tu_t}u_x^2,\\
&\xi_{xu_x}=\xi_{tu_t}, && \xi_{t^2u_t}=-2\xi_{tu_t}u_x+2\xi_x,\\
&\xi_{tu_x}=-2\xi_{u_x}u_x-2u_t\xi_{u_t}+2\xi-u_x^2\xi_{u_x^2},
\end{aligned}$$

با حل دستگاه فوق ضرایب تابعی زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}
\xi_1&=u_t,\\
\xi_2&=xu_x+tu_t,\\
\xi_3&=xtu_x+\frac{1}{2}t^2u_t+\frac{1}{2}x,\\
\xi_4&=\frac{1}{2}(c+2u_x)\exp(ct),\\
\xi_5&=(c-2u_x)\exp(\frac{c(tu_x+1)}{u_x})
\end{aligned} \qquad (۱۰۵.۴)$$

هرکدام از ضرایب $\Lambda_i=\xi_i$، $i=1,\cdots,4$ یک قانون بقاء موضعی به فرم $D_t\Psi^i+D_x\Phi^i=0$ با مشخصه

$$D_t\Psi^i+D_x\Phi^i\equiv\xi_i(u_{xxt}-2uu_{xx}-u_x^2)=0, \qquad (۱۰۶.۴)$$

بر روی جواب های معادله تولید می کنند که در ادامه به آنها اشاره خواهد شد.

قانون بقاء متناظر با $\xi_1 = u_t$

در این حالت داریم

$$D_t\Big(\frac{1}{4}uu_{xt}-\frac{2}{3}u^2u_{xx}-\frac{1}{3}uu_x^2+\frac{1}{4}u_xu_t\Big)$$
$$+D_x\Big(-\frac{2}{3}uu_tu_x-\frac{1}{4}uu_{tt}+\frac{1}{4}u_t^2+\frac{2}{3}u^2u_{xt}\Big)=0.$$

قانون بقاء متناظر با $\xi_2 = xu_x + tu_t$

$$D_x\Big(\frac{1}{4}\,xuu_{xt}-xuu_x{}^2-\frac{2}{3}\,tuu_tu_x-\frac{1}{4}\,uu_t-\frac{1}{4}\,tuu_{tt}+\frac{1}{4}\,xu_tu_x$$
$$+\frac{1}{4}\,tu_t{}^2+\frac{2}{3}u^2u_x+\frac{2}{3}\,tu^2u_{xt}\Big)+D_t\Big(\frac{1}{4}\,tuu_{xt}-\frac{2}{3}\,tu^2u_{xx}$$
$$-\frac{1}{3}\,tuu_x{}^2-\frac{1}{4}\,uu_x-\frac{1}{4}\,xuu_{xx}+\frac{1}{4}\,xu_x{}^2+\frac{1}{4}\,tu_xu_t\Big)=0.$$

قانون بقاء متناظر با $\xi_3 = xtu_x + \frac{1}{2}t^2u_t + \frac{1}{2}x$

$$D_t\Big(\frac{1}{8}t^2uu_{xt}-\frac{1}{3}t^2u^2u_{xx}-\frac{1}{6}t^2uu_x{}^2-\frac{1}{4}\,tuu_x-\frac{1}{4}\,u-\frac{1}{4}\,xtuu_{xx}$$
$$+\frac{1}{4}\,xtu_x{}^2+\frac{1}{8}t^2u_xu_t+\frac{1}{4}\,xu_x\Big)+D_x\Big(\frac{1}{4}\,xtuu_{xt}-xtuu_x{}^2$$
$$-\frac{1}{3}t^2uu_tu_x-\frac{3}{4}\,xuu_x-\frac{1}{4}\,tuu_t-\frac{1}{8}t^2uu_{tt}+\frac{1}{4}\,xtu_tu_x$$
$$+\frac{1}{8}t^2u_t{}^2+\frac{1}{4}\,xu_t+\frac{2}{3}\,tu^2u_x+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}t^2u^2u_{xt}\Big)=0.$$

قانون بقاء متناظر با $\xi_4 = \frac{1}{2}(c+2u_x)\exp(ct)$

$$D_x\Big(-\frac{3}{4}c\,\exp(ct)uu_x+\frac{1}{4}\exp(ct)uu_{xt}-\exp(ct)uu_x^2-\frac{1}{4}\,c^2exp(ct)u$$
$$+\frac{1}{4}c\,\exp(ct)u_t+\frac{1}{4}\exp(ct)u_tu_x\Big)+D_t\Big(-\frac{1}{4}\exp(ct)uu_{xx}$$
$$+\frac{1}{4}\,c\exp(ct)u_x+\frac{1}{4}\exp(ct)u_x^2\Big)=0.$$

قانون بقاء متناظر با $\xi_5=(c-2u_x)\exp(\frac{c(tu_x+1)}{u_x})$

$$D_t\Big(\exp(ct+\frac{c}{u_x})(-uu_{xx}c-u_x^3+uu_{xx}u_x)/2u_x\Big)$$
$$+D_x\Big(\exp(ct+\frac{c}{u_x})(cuu_{xt}-cuu_x^2-u_x^2u_t-uu_xu_{xt}+4uu_x^3)/2u_x\Big)=0.$$

۹.۴ ارتباط بین تقارنها و قوانین بقاء

در این بخش، نشان خواهیم داد که اگر دستگاه PDE، $R(x,u)$ تحت تبدیلی معکوس پذیر (تبدیل نقطه ای یا برخوردی) به دستگاه PDE، $S(x,u)$ نگاشته شود آنگاه، هر قانون بقاء از $R(x,u)$ به یک قانون بقاء $S(x,u)$ نگاشته خواهد شد. وقتی که تبدیل معکوس پذیر، تقارنی از دستگاه $R(x,u)$ باشد آنگاه، قانون بقاء متناظر، قانون بقاء $R(x,u)$ خواهد بود [۲۳].

دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی $R(x,u)$ را با n متغیر مستقل $x=(x^1,...,x^n)$ و m متغیر وابسته $u=(u^1,...,u^m)$ از مرتبه k به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$R[u]=R^\nu(x,u,\partial u,\dots,\partial^k u)=0,\qquad \nu=1,\dots,l, \tag{۱۰۷.۴}$$

قرار دهید

$$R[U]=R^\nu(x,U,\partial U,\dots,\partial^k U)=0,\qquad \nu=1,\dots,l,$$

که $U(x)=(U^1(x),\dots,U^m(x))$ تابع دلخواه با $U(x)=u(x)$ به عنوان حل دستگاه PDE (۱۰۷.۴) می باشد.

تبدیل نقطه ای معکوس پذیر زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(z,W), \qquad i=1,\dots,n, \\ U^\alpha &= U^\alpha g(z,W), \qquad \alpha=1,\dots,m, \end{aligned} \tag{۱۰۸.۴}$$

که $U(x)=(U^1(x),\dots,U^m(x))$، $z=(z^1,\dots,z^m)$ و $W(z)=(W^1(z),\dots,W^m(Z))$.

تحت تبدیل نقطه ای (۱۰۸.۴) و امتداد یافته آن، هر تابع $R^\nu[U]$ به تابع

$$S^\nu[W]=S^\nu(z,W,\partial W,\dots,\partial^k W),$$

نگاشته می شود. در حالت خاص

$$S^{\nu}[W]=R^{\nu}[U] \tag{۱۰۹.۴}$$

وقتی که مولفه های $z, W, \partial W, \ldots, \partial^k W$ بر اساس مولفه های $x, U, \partial U, \ldots, \partial^k U$ در (۱۰۸.۴) بیان شوند. اگر $U(x)=u(x)$ به عنوان حل دستگاه PDE، (۱۰۷.۴) باشد، آنگاه $W(z)=w(z)$ جواب دستگاه PDE $S(z,w)$ که بصورت زیر بیان می شود خواهد بود

$$S^{\nu}[w]=S^{\nu}(z,w,\partial w,\ldots,\partial^k w)=0, \qquad \nu=1,\ldots,l, \tag{۱۱۰.۴}$$

با n متغیر مستقل $x=(z^1,...,z^n)$ و m متغیر وابسته $u=(w^1,...,w^m)$.

۱.۹.۴ قضیه. فرض کنید $D_i\Phi^i[u]=0$ قانون بقاء از دستگاه PDE، (۱۰۷.۴) باشد. تحت تبدیل نقطه ای (۱۰۸.۴)، توابع $\{\Psi^i[W]\}_{i=1}^n$ وجود دارند به طوریکه فرمول

$$J[W]D_i\Phi^i[U]=\tilde{D}_i\Psi^i[W] \tag{۱۱۱.۴}$$

برقرار است، وقتی که $\Psi^i[W]$ به طور واضح بر اساس جملات دترمینانی که از جایگذاری i امین ستون از دترمینان ژاکوبین

$$J[W]=\frac{D(x^1,\ldots,x^n)}{D(z^1,\ldots,z^n)} \tag{۱۱۲.۴}$$

با ستون $\begin{bmatrix}\Phi^1[U]\\ \vdots \\ \Phi^{(n)}[U]\end{bmatrix}$ بدست می آیند که عبارتند از

$$\Psi^1[u]=\begin{vmatrix}\Phi^1[\tilde{u}] & D_2\tilde{x}^1 & \cdots & D_n\tilde{x}^1\\ \Phi^2[\tilde{u}] & D_2\tilde{x}^2 & \cdots & D_n\tilde{x}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \Phi^n[\tilde{u}] & D_2\tilde{x}^n & \cdots & D_n\tilde{x}^n\end{vmatrix},\cdots,\Psi^n[u]=\begin{vmatrix}D_1\tilde{x}^1 & \cdots & D_{n-1}\tilde{x}^1 & \Phi^1[\tilde{u}]\\ D_1\tilde{x}^2 & \cdots & D_{n-1}\tilde{x}^2 & \Phi^2[\tilde{u}]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ D_1\tilde{x}^n & \cdots & D_{n-1}\tilde{x}^n & \Phi^n[\tilde{u}]\end{vmatrix} \tag{۱۱۳.۴}$$

D_i و $\tilde{D}_i$ عملگر مشتق کلی می باشند.

اثبات. [۲۳]. □

اکنون حالتی در نظر می گیریم که تبدیل نقطه ای (۱۰۸.۴) تقارنی از دستگاه PDE، (۱۰۷.۴) باشد. چون هر تقارن از دستگاه PDE، $R(x,u)$، منیفلد جوابهای $R(x,u)$ پایا نگه می دارد، بنابراین توابعی مانند $A^{\nu}_{\tau}[W]$

وجود دارند به طوریکه رابطه (۱۰۹.۴) به صورت زیر خواهد شد

$$R^\nu[W] = S^\nu[W] = A^\nu_\tau[W]R^\tau[W] \tag{۱۱۴.۴}$$

۲.۹.۴ نتیجه. اگر تبدیل نقطه ای $(x,u) \longrightarrow (\tilde{x}(x,u), \tilde{u}(x,u))$ تقارنی از دستگاه PDE $R(x,u)$ (۱۰۷.۴) باشد، آنگاه قانون بقاء $D_i\Psi^i[u]=0$ از دستگاه $R(x,u)$ قانون بقاء $D_i\Phi^i[u]=0$ از دستگاه $R(x,u)$ با شارهای زیر نتیجه می دهد

$$\Psi^1[u] = \begin{vmatrix} \Phi^1[\tilde{u}] & D_2\tilde{x}^1 & \cdots & D_n\tilde{x}^1 \\ \Phi^2[\tilde{u}] & D_2\tilde{x}^2 & \cdots & D_n\tilde{x}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi^n[\tilde{u}] & D_2\tilde{x}^n & \cdots & D_n\tilde{x}^n \end{vmatrix}, \cdots, \Psi^n[u] = \begin{vmatrix} D_1\tilde{x}^1 & \cdots & D_{n-1}\tilde{x}^1 & \Phi^1[\tilde{u}] \\ D_1\tilde{x}^2 & \cdots & D_{n-1}\tilde{x}^2 & \Phi^2[\tilde{u}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1\tilde{x}^n & \cdots & D_{n-1}\tilde{x}^n & \Phi^n[\tilde{u}] \end{vmatrix} \tag{۱۱۵.۴}$$

اثبات. از (۱۱۴.۴) نتیجه می شود که $S^\nu[U] = A^\nu_\tau[U]R^\tau[U]$ برای هر تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است. بنابراین $S^\nu[u]=0$ برای هر جواب $U(x)=u(x)$ از دستگاه $R(x,u)$ برقرار است. درنتیجه بنابه قضیه (۱.۹.۴) قانون بقاء $D_i\Psi^i[u]=0$ با شارهای Ψ^i که توسط فرمول (۱۱۳.۴) بیان می شوند بعد از جایگذاری x^i با $\tilde{x}^i$، u^α با $\tilde{u}^\alpha$ و آنگاه z^i با x^i، $W^\alpha(z)$ با $u^\alpha(x)$ و W^α_i با u^α_i بدست می آید. □

نتیجه فوق نشان می دهد که عمل تبدیل تقارنی دستگاه $R(x,u)$ روی قانون بقاء $D_i\Phi^i[u]=0$ از دستگاه $R(x,u)$ قانون بقاء جدید $D_i\Psi^i[u]=0$ از دستگاه $R(x,u)$ را نتیجه می دهد. حال قضیه و نتیجه فوق را برای ضرایب تابعی قانون بقاء بازنویسی می کنیم. به این ترتیب که از ضرایب تابعی موجود، ضرایب تابعی جدید بسازیم.

۳.۹.۴ قضیه. فرض کنید تبدیل نقطه ای (۱۰۸.۴) ، تقارنی از دستگاه PDE، $R(x,u)$ (۱۰۷.۴) باشد. اگر $\Lambda_\nu[U]^l_{\nu=1}$ مجموعه ای از ضرایب تابعی قانون بقاء دستگاه $R(x,u)$ با شارهای $\Phi^i[u]$ باشد، آنگاه

$$\tilde{\Lambda}_\tau[W]R^\tau[W] = \tilde{D}_i\Psi^i[W], \tag{۱۱۶.۴}$$

که

$$\tilde{\Lambda}_\tau[W] = J[W]A^\nu_\tau[W]\Lambda_\nu[U(z,W)], \quad \tau = 1,\ldots,l \tag{۱۱۷.۴}$$

$U(z,W)$ و مشتقهای آن توسط تبدیل (۱۰۸.۴) بیان می شود. در (۱۱۶.۴)، $\Psi^i[W]$ توسط رابطه (۱۱۳.۴) و در (۱۱۷.۴)، ژاکوبین دترمینان $J[W]$ و $A^\nu_\tau[W]$ به ترتیب توسط روابط (۱۱۲.۴) و (۱۱۴.۴) بیان می شوند.

اثبات. چون تبدیل (۱۰۸.۴) تقارن دستگاه $R(x,u)$ است، بنابراین معادله (۱۱۴.۴) برای توابع دلخواه $W(z)$ برقرار است. چون $\Lambda_\nu[U]_{\nu=1}^{l}$ مجموعه ضرایب تابعی قانون بقاء دستگاه $R(x,u)$ با شارهای $\Phi^i[u]$ است، بنابراین رابطه زیر برای هر تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است

$$\Lambda_\nu[U]R^\nu[U] \equiv D_i\Phi^i[U], \tag{۱۱۸.۴}$$

از جایگذاری رابطه (۱۱۴.۴) در (۱۱۸.۴) رابطه زیر نتیجه می شود

$$D_i\Phi^i[U] = \Lambda_\nu[U]R^\nu[U] = \Lambda_\nu[U]A^\nu_\tau[W]R^\tau[W]. \tag{۱۱۹.۴}$$

بعد از ضرب رابطه (۱۱۹.۴) در $J[W]$ و استفاده از رابطه (۱۱۱.۴) داریم

$$J[W](D_i\Phi^i[U]) = J[W]\Lambda_\nu[U]R^\nu[U] = \Lambda_\nu[U]A^\nu_\tau[W]R^\tau[W] = \tilde{D}_i\Psi^i[W]. \tag{۱۲۰.۴}$$

بنابراین

$$\tilde{\Lambda}_\tau[W]R^\tau[W] = \tilde{D}_i\Psi^i[W], \tag{۱۲۱.۴}$$

که $\tilde{\Lambda}_\tau$ توسط رابطه (۱۱۷.۴) بیان می شود. □

بعد از جایگذاری مختصات z^i با x^i، $W^\alpha(z)$ با $U^\alpha(x)$ و W^α_i با U^α_i، در (۱۱۶.۴)، نتیجه زیر بدست می آید.

۴.۹.۴ نتیجه. اگر $\Lambda_\nu[U]_{\nu=1}^{l}$ مجموعه ای از ضرایب تابعی برای قانون بقاء دستگاه PDE، $R(x,u)$ باشد و دستگاه $R(x,u)$ تحت تبدیل $(x,u) \longrightarrow (\tilde{x}(x,u),\tilde{u}(x,u))$ ناوردا باشد، آنگاه $\tilde{\Lambda}_\tau[U]_{\nu=1}^{l}$ ضرایب تابعی جدید برای قانون بقاء دستگاه $R(x,u)$ می باشد و $\tilde{\Lambda}_\tau[U] = J[\tilde{U}]A^\alpha_\tau[\tilde{U}]\Lambda_\alpha[U]$.

قضیه زیر نشان می دهد که کدام مجموعه از ضرایب تابعی $\Lambda_\nu[U]_{\nu=1}^{l}$ قانون بقاء جدید برای دستگاه PDE $R(x,u)$ تولید می کنند.

۵.۹.۴ قضیه. مجموعه ضرایب تابعی $\tilde{\Lambda}_\tau[U]_{\nu=1}^{l}$ قانون بقاء جدید برای دستگاه PDE، $R(x,u)$ (۱۰۷.۴) تولید می کند اگر وتنها اگر این مجموعه روی تمام جوابهای $U(x)=u(x)$ از دستگاه $R(x,u)$ نسبت به ضرایب تابعی $\Lambda_\nu[U]_{\nu=1}^{l}$ مستقل خطی باشد، یعنی، $\tilde{\Lambda}_\tau[U] \neq c\Lambda_\tau[U]$ برای هر ثابت دلخواه c.

اثبات. دو قانون بقاء از دستگاه PDE، $R(x,u)$ هم ارز هستند اگر وتنها اگر شارهای آنها تنها در جمله تاو $D_jH^{ij}[u]$ روی تمام جوابهای $U(x)=u(x)$ از دستگاه $R(x,u)$ متفاوت باشند (که $H^{ij}[u] = -H^{ji}[u]$). برای $R(x,u)$ در حالت کوشی-کوالسکی، تمام قوانین بقاء هم ارز $R(x,u)$ دارای مجموعه یکسان از ضرایب

تابعی روی تمام جوابهای $U(x) = u(x)$ می باشند [۸]. بنابراین دو مجموعه از ضرایب تابعی هم ارز هستند وقتی که روی جوابهای $U(x) = u(x)$ از $R(x,u)$ یکسان باشند. بنابراین تناظر یک به یکی (تا حد هم ارزی) بین قوانین بقاء غیر بدیهی و ضرایب غیر بدیهی وجود دارد. □

به طور خلاصه از قضایا و نتایج فوق چنین نتیجه می شود که، برای یافتن قوانین بقاء جدید از قوانین بقاء قبلی به جای اثر تبدیلات نقطه ای بر دستگاه از اثر تقارن های دستگاه روی ضرایب تابعی استفاده می شود. این فرایند باعث ایجاد ضرایب تابعی جدید می شود، که هر کدام یک قانون بقاء جدید را نتیجه می دهد، البته مشروط بر اینکه ضرایب جدید نسبت به ضرایب قدیم روی تمام جوابهای دستگاه PDE مستقل خطی باشند و در شرط ضرایب تابعی (۸.۴) صادق باشند. از مزیتهای این روش آنست که تنها با تقارنهای نقطه ای می توان به نتایج جدیدی دست یافت و لزومی به استفاده از تقارنهای تغییراتی که در روش نوتر استفاده می شدند نیست.

از این روش ما بر روی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی دسته-ویتهام استفاده کردیم و ضرایب تابعی جدیدی بدست آوردیم که مثال زیر به آن اختصاص دارد.

۶.۹.۴ مثال. همانطور که در مثال (۱۴.۲.۲) مشاهده شد، معادله دسته-ویتهام دارای تقارنهایی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} V_1 &= \partial_x, & V_2 &= \partial_t, \\ V_3 &= x\partial_x + t\partial_t, & V_4 &= x\partial_x + u\partial_u, \\ V_5 &= tx\partial_x + \frac{t^2}{2}\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_u, & V_6 &= f'(t)\partial_u - 2f(t)\partial_x. \end{aligned}$$

حال اثر میدانهای برداری فوق را بر روی ضرایب تابعی این معادله که عبارتند از

$$\begin{aligned} \xi_1 &= u_t, \\ \xi_2 &= xu_x + tu_t, \\ \xi_3 &= xtu_x + \frac{1}{2}t^2u_t + \frac{1}{2}x, \\ \xi_4 &= \frac{1}{2}(c + 2u_x)\exp(ct), \\ \xi_5 &= (c - 2u_x)\exp\Big(\frac{c(tu_x+1)}{u_x}\Big). \end{aligned} \tag{۱۲۲.۴}$$

در جدول زیر بیان می کنیم. بنابراین

$$\zeta_1 = u_x, \quad \zeta_2 = tu_x + \frac{1}{2}. \tag{۱۲۳.۴}$$

ضرایب تابعی جدید می باشند، زیرا در شرط ضرایب تابعی (۸.۴) صادقند و نسبت به ξ_i برای $i = 1,\dots,5$

$V_i\xi_j$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
V_1	0	u_x	$tu_x+\frac{1}{2}$	0	0
V_2	0	ξ_1	ξ_2	$c\xi_4$	$c\xi_5$
V_3	0	ξ_2	$x(tu_x+\frac{1}{2})+t\xi_2$	$ct\xi_4$	$ct\xi_5$
V_4	0	xu_x	$x(tu_x+\frac{1}{2})$	0	0
V_5	0	$xtu_x+\frac{t^2}{2}u_t$	$tx(tu_x+\frac{1}{2})+\frac{t^2}{2}\xi_2$	$\frac{ct^2}{2}\xi_4$	$\frac{ct^2}{2}\xi_5$
V_6	0	$-2f(t)u_x$	$-2f(t)(tu_x+\frac{1}{2})$	0	0

مستقل خطی می باشند.

۷.۹.۴ مثال. حال معادله فرنبرگ-ویتهام را در نظر بگیرید، که دارای تقارنهای زیر است

$$V_1=\partial_x,\qquad V_2=\partial_t,\qquad V_3=t\partial_x+\partial_u. \tag{۱۲۴.۴}$$

همانطور که قبلاً مشاهد شد این معادله دارای ضرایب تابعی به فرم زیر است

$$\begin{aligned}
\Lambda_1&=\xi_1=1,\\
\Lambda_2&=\xi_2=uu_{xx}-u+u_x^2+u_{xt},\\
\Lambda_3&=\xi_3=uu_{xt}+\tfrac{1}{2}u^2+u_{tt}+u_tu_x,\\
\Lambda_4&=\xi_4=tuu_{xx}-tu-t+tu_x^2+tu_{xt}+x.
\end{aligned} \tag{۱۲۵.۴}$$

اثر تقارنها بر روی ضرایب تابعی عبارتست از:

$V_i\xi_j$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
V_1	0	0	0	1
V_2	0	0	0	ξ_2
V_3	0	$u_{xx}-1$	$u_{xt}+u$	tu_{xx}

از جدول فوق نتیجه می شود که ضریب تابعی جدیدی حاصل نشده است.

کتاب‌نامه

[1] Ablowitz M.J., Ramani A. and Segue H., *A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of $P-$type. I*, J. Math. Phys., 21, 1980, 715-721.

[2] Ablowitz M.J. and Kodama Y., *Note on asymptotic solutions of the KdV equation with solutions*, Stud. Appl. Math., 66, 1982, 159-170.

[3] Ablowitz M.J., A. Ramani and Segue H., *Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevé type*, Lett. Nuovo Cim., 23, 1978, 333-338.

[4] Ames W.F., *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*, Academic Press. New York, 1972.

[5] Anco S.C., *Conservation laws of scaling-invariant field equations*, J. Phys., A 36, 2003, 8623-8638.

[6] Anco S.C. and Bluman, G.W., *Direct construction of conservation laws from field equations*, *Phys. Rev. Lett.*, 78, 1997, 2869-2873.

[7] Anco S.C. and Bluman, G.W., *Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. Part I: Examples of conservation law classifications*, Eur. J. Appl. Math., 13, 2002, 545-566.

[8] Anco S.C. and Bluman G.W., *Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. Part II:General treatment*, Eur. J. Appl. Math., 13, 2002, 567-585.

[9] Anko S. and The D., *Symmetries, conservation laws and cohomology of Maxwell's equations using potentials*, Acta Appl. Math., 89, 2005, 1-89.

[10] Appell P. , *Sur l'équation $z_{xx} - z_y = 0$ et la théorie de la chaleur*, J. de Math. Pures et Appl., 8(4), 1892, 187-216.

[11] Arnold V.I., *Lectures on partial differential equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg and PHASIS Moscow, 2004.

[12] Baldwin D.E., Hereman W., *A symbolic algorithm for computing recursion operators of nonlinear partial differential equations*, International Journal of Computer Mathematics, 87, 2010, 1094-1119.

[13] Banos B., *On symplectic classification of effective 3-forms and Monge-Ampère equations*, Diffe. Geom. Appl., 19, 2003, 147-166.

[14] Barenblatt I.G., *Similarity self-similarity, and intermediate asymptotics*, Consultants Bureau, New York, 1979.

[15] Bessel-Hagen E., *Uber die erhaltungssatze der elektrodynamik*, Math. Ann., 84, 1921, 258-276.

[16] Bateman H., *The conformal transformations of a space of for dimensions and their applications to geometrical optics*, Proc. London Math. Soc., 7, 1909, 70-89.

[17] Bluman G.W., Cheviakov A.F. and Anko S.C., *Application of symmetry methods to partial differential equations*, Springer, New York, Dordrecht Heudelberg London, 2010.

[18] Bluman G.W. and Cole J.D., *Similarity methods for differential equations*, Appl. Math. Sci., No. 13, Springer-Verlag, New York, 1974.

[19] Bluman G.W. and Cole J.D., , *The general similarity solution of the heat equation*, J. Math. Mech. 18, 1969, 1025-1042.

[20] Bluman G.W. and Kumei S., *Symmetry and differential equations*, Applied Mathematical Sciences, No. 81, Spriger-Verlag, New York, 1989.

[21] Bluman G.W. and Temuerchaolu, *Conservation laws for nonlinear tele-graph equations*, J. Math. Anal. Appl., 310, 2005, 459-476.

[22] Bluman G.W. and Temuerchaolu, *Comparing symmetries and conservation laws of nonlinear telegraph equations*, J. Math. Phys., 46, 2005, 073513.

[23] Bluman G.W., Temuerchaolu, and Anco, S.C., *New conservation laws obtained directly from symmetry action on a known conservation law*, J. Math. Anal. Appl., 322, 2006, 233-250.

[24] Boutros Y.Z., Abd-el-Malek M.B., Badran N.A. and Hassan H.S., *Lie group method of solution for steady two-dimensional boundary-layar stagnation-point flow towards a heated stretching sheet placed in a porus medium*, Meccanica, Springer Science+Bosiness Media B.V., 41, 2006, 681-691.

[25] Boyer T.H., *Continuous symmetries and conserved currents*, Ann.Physics, 42, 1967, 445-466.

[26] Cariñena J.F., Grabowski J. and Marmo G., *Superposition rules, Lie theorem and partial differential equations*, Supported by the Polish ministry of scientific research and information technology under the grant No. 2 P03A 036 25, 2006.

[27] Cartan E., *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*, Mém. Sci. Math. No. 42, Gauthier-Villars, Paris, 1930.

[28] Cartan E., *La topologie des groupes de Lie*, Exp. de Géométrie, vol. 8, Hermann, Paris, 1936.

[29] Cohen A., *An introduction to the Lie theory of one-parameter groups, with applications to the solution of differential equations*, D.C. Heath and Co., New York, 1911.

[30] Cunningham E., *The principle of relativity in electrodynamics and an extension there of* Proc. London Math. Soc., 8, 1909, 77-98.

[31] Erdmann K. and Wildon M.J., *Introduction to Lie algebras*, Springer-Verlag, 2006.

[32] Frobenius G., *Über das pfaffsche probleme*, J. Reine Angew. Math., 82, 1877, 230-315.

[33] Goff J.A., *Transformations leaving invariant the heat equation of physics*, Amer. J. Math., 49, 1927, 117-122.

[34] Göktas U., Hereman W., *Computation of conservation laws for nonlinear lattices*, Physica D, 123, 1998, 425-436.

[35] Hejazi, S.R., *Contact geometry and symmetry analysis of differential equations*, Ph.D. dissertation, Iran University of Science and Technology, Tehran, 2011.

[36] Hereman W., *Symbolic Computation of conservation laws of nonlinear partial differential equations in multi-dimensions*, International Journal of Quantum Chemistry, 106, 2006, 278-299.

[37] Hopf E., *The partial differential equation* $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math., 3, 1950, 201-230.

[38] Hydon P.E., *Symmetry methods for differential equations. A Beginner's Guide*, cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.

[39] Ibragimov N.H., *Elementary group analysis and ordinary differential equations*, New York, 1999.

[40] Ibragimov N.H., ed., *CRC handbook of Lie groups analysis of differential equations,* Vol. 1, CRC Press, Boca Raton. Fl., 1994.

[41] Ibragimov N.H., Torrisi M. and Valenti A., *Perliminary group classification of equations* $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$, J. Math. Phys., 32, 1991, 2988-2995.

[42] Ince E.L., *Ordinary differential equations*, Longmans, Green and Co., London, 1926.

[43] Jacobson N., *Lie algebras*, Wiley (Interscience), New York, 1962.

[44] Kent Harrison B., *The differential form method for finding symmetries*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, Vol. 1, paper 001, 2005, 12 pages.

[45] Krasilshchik I.S., Lychagin V. and Vinigradov A.M., *Geometry of jet spaces and nonlinear partial differential equations*, New York, Gordon and Breach, 1986.

[46] Kruglikov B.S., *Symplectic and contact Lie algebras with applications to the Monge-Apmere equations*, Tr. Math. Inst., Steklova, 221, 1998, 232-246.

[47] Kruglikov B.S., *Classification of Monge-Ampere equations with two variables*, CAUSTICS 98, Warsa, Polish Academu of Sciences, 1999.

[48] Kruglikov B.S. and Lychagin V., *On equivalence of differential equations*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math., 1999, 7-29.

[49] Kruglikov B.S. and Lychagin V., *Mayer brackets and solvability of PDEs*, Diffe. Geom. Appl., 17, 2002, 251-272.

[50] Konopelchenko B.G., *Non-linear integrable equations.*, Lecture Notes in physics No. 270, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[51] Kumei S., *Invariance transformations, invariance group transformations and invariance group of the Sine-Gordon equations*, J. Math. Phys., 16, 1975, 2461-2468.

[52] Kumei S., *A group analysis on non-linear differential equations*, Ph.D. Thesis, University of British Colombia Vancouver, BC, 1981.

[53] Kushner A., Lychagin V. and Bubstov V. *Contact geometry and non-linear differential equations*, Cambridge University Press, New York, 2007.

[54] Lee J.M., *Introduction to smooth manifolds*, GTM, Springer, New York, 2002.

[55] Lie S., *Theorie der transformations gruppen*, B.G. Teubner, Leipzing, 1893.

[56] Lie S., *Klassification und integration von transformationen gestatten*, Math, Ann., 32, 1888, 213-281.

[57] Lie S., *Zur allgemeinen theorie der partillen differentialgleichungen beliebeger ordung*, Leipz, Berich. 1, 1895, 53-128.

[58] Lie S., *Über die integration durch bestimmte integrale einer klasse linera partieller differentialgleichung*, Arch. for Math., 6, 1881, 328-368.

[59] Lychagin V., *Contact geometry and second order non-linear differential equations*, Russian Math, 34, 1979, 137-165.

[60] Markus L., *Group theory and differential equations*, Lecture Notes, University of Minnesota, Minneapolis, 1960.

[61] Matsuda M., *Two methods of integrating Monge-Ampère equations I*, Trans. Amer. Math. Soc., 150, 1970, 327-343.

[62] Michal A.D., *Differential Invariants and invariant partial differential equations under continuous transformation groups in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci., 37, 1951, 623-637.

[63] Mikhailov A.V., Shabat A.B. and Yamilov R.I., *The symmetry approach to the classification of non-linear equations. Complete list of integrable systems*, Russ. Math. Surveys, 42, 1987, 1-63.

[64] Miller Jr.W., *Lie theory and special functions,* Academic Press, New York, 1968.

[65] Miller W.Jr., *Symmetry group and their applications*, Academic Press, New York, 1972.

[66] Morgan A.J.A., *The reduction by one of the number of indepemdent variables in some systems of partial differential equations*, Quart, J. Math. Oxsford., 3, 1952, 250-259.

[67] Miličić D., *Lectures on lie groups*, www.math.utah.edu/ milicic/Eprints/lie.pdf

[68] Nielden J., *On the intermidiate integral for Monge-Ampère equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 128, 2000, 527-531.

[69] Noether, E. *Invariante variations probleme*, Nachr. KÄonig. Gesell. Wis- sen. GÄottingen, Math.-Phys. Kl., 1918, 235-257.

[70] Olver P.J., *Applications of Lie groups to differential equations*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1993.

[71] Olver P.J., *Equivalence, invariants, and symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[72] Olver P.J., *Noether's theorem and systems of Cauch-Kovalevskaya type in non-linear systems of PDE in applied mathematics*, B. Nicholaenko, D.D. Holm, and J.M. Hyman, eds., Lectures in Applied Math., vol. 23, part 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1986, pp. 81-104.

[73] Olver P.J., *Symmetry groups and group invariant solutions of partial differential equations*, J. Diff. Geom., 14, 1979, 497-542.

[74] Ovsiannikov L.V., *Group analysis of differential equations*, Academic Press, New York, 1982.

[75] Ovsiannikov L.V., Groups ang group invariant solutions of differential equations, Dokl, Akad. Nauk. USSR, 118, 1958, 439-442.

[76] Ovsiannikov L.V., *Group properties of differential equations*, Novosibirsk, Moscow, 1962.

[77] Poincaré H., *Les méthodes nouvelles de la mrmmécanique Céleste*, vol. 3, Gauthiers-Villars, Paris, 1892.

[78] Poole D, Hereman W., *The homotopy operator method for symbolic integration by parts and inversion of divergences with applications*, Applicable Analysis: An International Journal , 89, 2010, 433–455.

[79] Poole D, Hereman W., *Symbolic computation of conservation laws for nonlinear partial differential equations in multiple space dimensions*, Journal of Symbolic Computation, 46, 2011, 1355–1377.

[80] Poole D, Hereman W., *Symbolic computation of conservation laws of nonlinear partial differential equations using homotopy operators*, Ph.D. dissertation, Colorado School of Mines, Golden, Colorado, 2009.

[81] Prykarpatsky A.K , Prytula M.M., *The gradient-holonomic integrability analysis of a Whitham-type nonlineadynamical model for a relaxing medium with spatial memory*, Nonlinearity, 19, 2006, 2115-2122.

[82] Pucci E. and Saccomandi G., *Potential symmetries and solutions by reduction of partial differential equations*, J. Phys. A, 26, 1993, 681-690.

[83] Rosenau P. and Schwarzmeier, J.L., *On similarity solutions of Boussiesq-type equations*, Phys. Lett. A, 115, 1986, 75-77.

[84] Stephani H., *Differential equations, their solutions using symmetries*, Camridge University Press, Cambridge New York, 1989.

[85] Stormark O. *Lie's structural approach to PDE systems*, Cambridge University Press, 2002.

[86] Warner F.W., *Foundations of differentible manifolds and Lie groups*, Scott, Foresman and Co., Glenview, III., 1971.

[87] Webb G., Sorensen M.P., Brio M., Zakharian A.R. and Moloney J.V., *Variational principles, Lie point symmetries and similarity solutions of the vector Maxwell equations in non-linear optics*, Physica D, 191, 2004, 49-80.

[88] Weisner L., *Generating functions for Hermite functions*, Canad. J. Math., 11, 1959, 141-147.

[89] Wilczynski E.J., *An application of group theory to hydrodynamics*, Trans. Amer. Math. soc., 1, 1990, 339-352.

[90] Wolf T., *Investigating differential equations with CRACK, LiePDE, Applysymm and ConLaw*, Handbook of Computer Algebra, Foundations, Applications, Systems (J. Grabmeier, E. Kaltofen, and V. Weispfenning, Eds.), Springer, New York, 2002 pp. 465-468.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

□ A, a	
action	عمل
annihilator	پوچساز
□ B, b	
boundary layer	لایه‌های مرزی
□ C, c	
Cartan	کارتان
case study	مطالعهٔ حالت به حالت
charactrestic symmetry	تقارن مشخصه
codimension	بعد نقصان
conservation laws	قوانین بقاء
contact form	فرم برخوردی
contact invariant	ناوردای برخوردی
contact manifold	منیفلد برخوردی
contact symmetry	تقارن برخوردی
contact transformation	تبدیل برخوردی
contact vector field	میدان برداری برخوردی
□ D, d	
Darboux theorem	قضیهٔ داربو
differential invariant	ناوردای دیفرانسیلی
dependent variable	متغیر وابسته
differential operator	عملگر دیفرانسیلی
differential form	فرم دیفرانسیلی
distribution	توزیع
□ E, e	
equivalence	هم ارزی
evolution equation	معادله تکاملی
exponential map	نگاشت نمایی
effectively freely	به طور آزاد موثر
effective action	عمل موثر
effective form	فرم مؤثر
equivalent	هم ارز
evolution vector field	میدان برداری تکاملی
□ F, f	
free action	عمل آزاد
F fully regular	به طور کامل منظم
functionallay independent	مستقل تابعی
□ G, g	
general linear group	گروه خطی عام

generalized symmetry	تقارن تعمیم یافته
generating function	تابع مولد
generic orbit	مدار عمومی
global isotropy subgroup	زیر گروه پایدار سازفراگیر
group action	عمل گروه
group invariant solutions	جوابهای ناوردای گروهی
global	فراگیر
□ H, h	
Hamiltonian mechanic	مکانیک همیلتونی
hidden symmetry	تقارن نهفته
higher order local transformation	تبدیل موضعی مرتبهٔ بالاتر
horizontal	افقی
□ I, i	
infinitesimal generator	مولد بینهایت کوچک
independent variable	متغیر مستقل
infinitesimal	بینهایت کوچک
infinitesimal method	روش بینهایت کوچک
integral factor	فاکتور انتگرال
integral manifold	منیفلد انتگرال
inversion map	نگاشت وارون ساز
integrand	انتگرالده
independent variable	متغیر مستقل
infinitesimal generator	مولد بینهایت کوچک
infinitesimal group action	عمل گروه بینهایت کوچک
infinitesimal method	روش بینهایت کوچک
isomorphism	یکریختی
isotropy subgroup	زیر گروه پایدار ساز
integrand	انتگرالده
invariant	ناوردا
independent	مستقل
inversion map	نگاشت وارون ساز
□ J, j	
jet space	فضای جت
□ K, k	
Killing form	فرم کیلینگ
□ L, l	
Lagrange coefficients	ضرایب لاگرانژ
Lagrangian space	فضای لاگرانژی
Lepage theorem	قضیهٔ لپگ
Levi decomposition	تجزیهٔ لوی
Lie algebra	جبرلی
Lie-Bianchi theorem	قضیهٔ لی-بیانچی
Lie bracket	کروشه‌لی
Lie group	گروه لی
linear symmetry	تقارن خطی
Liouville form	فرم لیوویل
local coordinate	مختصات موضعی
locally Euclidean	موضعا اقلیدسی

locally free action	عمل موضعا آزاد
locally solvable	موضعا حلپذیر
locally effectively action	عمل موضعا موثر
☐ M, m	
manifold	منیفلد
maximal rank	رتبهٔ ماکسیمال
mirror symmetry	تقارن آینه‌ای
model differential equation	معادلهٔ دیفرانسیل مدل
multi indices	اندیس چندگانه
multi-parameter symmetry	تقارن چند-پارامتری
☐ N, n	
Newtonian incompressible flow	جریان نیوتنی تراکم ناپذیر
non-classical symmetry	تقارن غیر کلاسیک
normal differential equation	معادله دیفرانسیل نرمال
☐ O, o	
odd symmetry	تقارن فرد
one-parameter symmetry	تقارن یک-پارامتری
orbit	مدار
order of stablization	مرتبه پایدار سازی
ordinary differential equation	معادلهٔ دیفرانسیل معمولی
☐ P, p	
partial differential equation	معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی
point transformation	تبدیل نقطه‌ای
potential symmetry	تقارن پتانسیل
prolongation	امتداد
☐ R, r	
regular action	عمل منظم
☐ S, s	
self-adjoint	خود الحاق
submanifold	زیر منیفلد
scale analysis	آنالیز مقیاسها
subgroup	زیرگروه
section	برش
semi-regular action	عمل نیم منظم
similarity solutions	جوابهای متشابه
skew-adjoint	الحاقی اریب
smooth	هموار
solvable group (algebra)	گروه (جبر) حلپذیر
stable orbit	بعد پایداری
stablization	پایداری
strictly functionlly indepedent	اکیداً مستقل تابعی
symmetry of differential equation	تقارن معادله دیفرانسیل
stable dimension	بعد پایداری
superposition principle	اصل برهمنهی
symmetry	تقارن
☐ T, t	
tangent vector	بردار مماس
transitive action	عمل متعدی
topological space	فضای توپولوژیکی

tangent space	فضای مماسی
tangent bundle	کلاف مماسی
tangent space	فضای مماسی
theoretical physic	فیزیک نظری
total derivative	مشتق کامل
total space	فضای کامل
totally non-degenerate	کلاً غیر تباهیده
transformation group	گروه تبدیل
transitive action	عمل متعدی
traveling wave solutions	جوابهای موج سیار
Triccomi equation	معادلهٔ تریکامی
turbulent	متخلخل
□ V, v	
variational problems	مسائل تغییراتی
variational symmetry	تقارن تغییراتی
vector bundle	کلاف برداری
vector field	میدان برداری
variety	چندگونا
□ W, w	
weak symmetry	تقارن ضعیف
wedge product	ضرب گوه‌ای
□ Z, z	
Zabolotskaya-Khokhlov equation	معادلهٔ زابولتسکی-خوخلوف

نمادهای بکار رفته

C^∞	هموار
D	مشتق کامل
$\mathcal{D}$	عملگر دیفرانسیلی
$\det$	دترمینان
D_i	مشتق کامل نسبت به متغیر x^i
$\dim$	بُعد
d_n	دیفرانسیل مرتبهٔ $n-$ام
E	فضای کامل
$\exp$	نگاشت نمایی
$\mathfrak{g}$	جبرلی
$\mathrm{GL(n)}$	گروه خطی عام
$G^{(n)}$	گروه امتداد یافته
G_x	زیر گروه ایزوتروپیک
$\mathbf{J}^n$	فضای جت مرتبه n
$q^{(n)}$	بعد فضای تاری جت
TM	کلاف مماسی
$U^{(n)}$	فضای مشتقات از مرتبهٔ حداکثر n
$\mathbf{v}^{(n)}$	میدان برداری امتداد یافته
Γ_f	گراف تابع
θ^α_J	فرم برخوردی بنیادی
φ^α_J	ضرایب میدان برداری امتداد یافته
$\wedge$	ضرب گوه‌ای
$\binom{n}{k}$	ضریب دو جمله‌ای
$\mathbb{J}$	ژاکوبین یک نگاشت
Δ	دستگاه معادلات دیفرانسیل
$\mathbb{D}$	مشتق یک نگاشت
$\mathrm{SO}(n)$	گروه دورانها
$\mathrm{SL}(n)$	گروه تبدیلات تصویری
$\trianglelefteq$	زیرگروه یا زیرجبر ایده‌آل
$\otimes$	ضرب تانسوری
$\oplus$	جمع مستقیم
Ad	نگاشت نمایش الحاقی
ad	مشتق نگاشت نمایش الحاقی
s	سیستم بهینهٔ $s-$بعدی
$\mathrm{Sym}(P)$	تقارنهای بینهایت کوچک توزیع P
$\mathcal{L}_X$	مشتق لی نسبت به میدان برداری
$\mathcal{V}(P)$	میدانهای برداری روی توزیع P
$\mathrm{Ann}(P)$	پوچساز توزیع P

X_1	میدان برداری ریب
Hess	هِسین

پیوست آ

مقالات مستخرج از رساله

1. Mehdi Nadjafikhah and Vahid Shirvani-Sh, Lie symmetries and conservation laws of the Hirota–Ramani equation, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 17 (2012), 4064–4073.

   Abstract. In this paper, Lie symmetry method is performed for the Hirota–Ramani (H–R) equation. We will find the symmetry group and optimal systems of Lie subalgebras. Furthermore, preliminary classification of its group invariant solutions, symmetry reduction and nonclassical symmetries are investigated. Finally conservation laws of the H–R equation are presented.

2. Mehdi Nadjafikhah and Vahid Shirvani-Sh, Lie Symmetry Analysis of Kudryashov-Sinelshchikov Equation, *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2011, Article ID 457697, 9 pages doi:10.1155/2011/457697.

   Abstract. The Lie symmetry method is performed for the fifth-order nonlinear evolution Kudryashov- Sinelshchikov equation. We will find ones and two-dimensional optimal systems of Lie subalgebras. Furthermore, preliminary classification of its group-invariant solutions is investigated.

3. Vahid Shirvani-Sh and Megerdich Toomanian, Lie symmetry analysis of generalized Camassa-Holm equation with dispersive effect term, *The 6^{th} Seminar on Geometry and Topology*, 18-20 September 2011, Bonab Uninersity, Bonab, Iran.

   Abstract. In this paper, the Lie symmetry method is performed for the generalized Camassa-Holm equation (GCH). we will find the preliminary classification of its group-invariant solutions for the GCH equation. This latter provides a reduced forms of GCH equation. Furthermore, optimal systems of Lie algebras are investigated.

4. Vahid Shirvani-Sh and Mehdi Nadjafikhah, Conservation laws and exact solutions of the Whitham-type equations, *Submited.*

   Abstract. In this paper, we study conservation laws for some partial differential equations. It is shown that interesting conserved quantities arise from multipliers by using homotopy operator that is a powerful algorithmic tool. Furthermore, the invariance properties of the conserved flows with respect to the Lie point symmetry generators are investigated via the symmetry action on the multipliers. Furthermore, the similarity reductions and exact explicit solutions are provided.

5. Vahid Shirvani-Sh and Mehdi Nadjafikhah, Symmetry classification and conservation laws for higher order Camassa-Holm equation, *Submited*.

Abstract. Lie symmetry group method is applied to study for the higher order Camassa-Holm equation. The symmetry group and its optimal system are given. Furthermore, preliminary classification of its group invariant solutions, symmetry reduction and nonclassical symmetries are investigated. Finally conservation laws for the higher order Camassa-Holm equation are presented.

Abstract

In this thesis, we study Lie symmetry method for partial differential equations to find symmetry groups, invariant solutions, exact solutions and general solutions. Also, by study the adjoint representation of the obtained symmetry groups on its Lie algebras, we will find the preliminary classification of its group-invariant solutions from which every other solution can be derived. Different methods to find conservation laws will be reviewed and finally, optimal method for calculating conservation laws is presented. Finally some connections between symmetries and conservation laws will be studied to find new conservation laws.

Keywords: *Partial differential equations, Lie transformation groups , Lie symmetry, Invariant solutions, Conservation laws.*

Islamic Azad University, Karaj Branch

School of Science

Department of Pure Mathematics

Ph.D Thesis

On

Geometry and Topology

Title

Lie transformation groups and its application to partial differential equations derived from fluid mechanics

Supervisors

Dr. Megerdich Toomanian and Dr. Mehdi Nadjafikhah

Consulting Advisor

Dr. Mehdi Alaeiyan

By

Vahid Shirvani Shahenayati

Winter 2013