مقدمه‌ای به گروههای لی

و گروههای تبدیلات

اثر: فیلیپ توندور

دانشگاه ایلینویز، اوربانا، III

ویرایش دوم

ترجمهٔ: مهدی نجفی‌خواه

Philippe Tondeur, Introduction to Lie groups and Lie algebras, LNM 7, Springer Verlag, Berlin, New Yourk, 2nd ed., 1969.

فهرست مندرجات

مقدمه

این نوشته به جهت تدریس درسهایی مقدماتی در خصوص گروههای لی و گروههای تبدیلات نوشته شده، که در دانشگاههای بوینس آیرس[1] و نیز زوریخ[2] ارائه شده است. مفاهیم منیفلد دیفرانسیلپذیر، نگاشت دیفرانسیلپذیر و میدان برداری مفروض دانسته می‌شوند. ضمیمه‌ای در خصوص، کاتگوری و فانکتور نیز به کتاب افزوده شده است.

انگیزهٔ دو فصل اول، مقاله ای [۱۲] از ر. پالیس است. قسمتهای زیادی از بخشهای ۲.۵ و ۳.۵ بر گرفته از کتاب س. کوبایاشی و ک. نومیزو [۱۱] می‌باشد. در فصل ۷ از س. هلگاسون [٦] استفاده شده است. البته، از س. شوالی [۳] قویاً بهره گرفته شده است. قسمت مراجع منابع مختلفی را برای مطالعه بیشتر معرفی می‌کند. مشخصهٔ بارز این نوشته آن است که به شکلی موزون بکارگیری دستگاههای مختصاتی موضعی جلوگیری شده است. این امر امکان تعمیم نظریه مطرح شده به حالت گروهای لی روی منیفلدهای باناخ را فراهم می‌سازد. به ب. میسن [۱۰] توجه شود.

فیلیپ توندور، ژوئن ۱۹٦۴

[1] Buenos Aires
[2] Zurich

فصل ۱

G–شیء

دو بخش نخست از این فصل در ادامه بسیار بکار می‌آیند، حال آنکه از بخشهای ۳.۱ و ۴.۱ تنهادر ۲.۲ استفاده می‌شود و جای دیگری بکار نمی‌آیند. برای آشنایی با کاتگوری و فانگتور به ضمیمه مراجعه شود.

۱.۱ تعریف و مثال

اگر X یک شیء از کاتگوری $\mathbf{C}$ باشد، گروه هم‌ارزیهای X با خودش را با نماد $\mathrm{Aut}(X)$ نشان می‌دهیم. گیریم G یک گروه است.

۱.۱.۱ تعریف. منظور از یک عمل از G به X، یک هومومورفیسم به شکل $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ می‌باشد. X را یک G–شیء نسبت به τ می‌نامیم.

هر عمل G بر X یک نمایش از G توسط اتومورفیسمهای X می‌باشد.

۲.۱.۱ مثال. G–شیء X در کاتگوری مجموعه‌ها $\mathbf{Set}$ عبارت است از یک مجموعه X به همراه یک هومومورفیسم $\tau : G \to \mathrm{Bij}(X)$ از G بتوی گروه تناظرهای دوسویی X. چنین هومومورفیسمی را به صورت معادل به شکل ذیل می‌توان معرفی نمود (که با همان نماد نشان داده می‌شود):

$$\tau : G \times X \longrightarrow X, \qquad (g, x) \longmapsto \tau_g(x), \tag{۱.۱}$$

که در روابط زیر صدق می‌کند:

الف) $\tau_{g_1 g_2}(x) = \tau_{g_1}(\tau_{g_2}(x))$ به ازای هر $g_1, g_2 \in G$ و $x \in X$؛ و

ب) $\tau_e(x) = e$ به ازای هر $x \in X$؛ e عنصر همانی G است.

این دو شرط موجب می‌شوند تا بتوانیم مفهوم معرفی شده در ۱.۱.۱ را عمل–چپ G بر X بنامیم.

در مقابل، عمل راست G بر X به معنی عمل گروه معکوس G° (یعنی گروهی که مجموعهٔ زمینه‌اش G است و عمل ترکیب آن $g_2 g_1 =: (g_1 g_2)^\circ$ می‌باشد) بر X است. به عبارت دیگر یک هومومورفیسم $\tau : G^\circ \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$. پس X یک G°–شیء است.

اغلب از اصطلاح عمل به عنوان عمل چپ استفاده می‌کنیم. مگر آنکه عمل راست ذکر گردد.

۳.۱.۱ مثال. فرض کنید G گروه است. اگر به هر $g \in G$، انتقال چپ L_g با ضابطهٔ:

$$L_g : G \longrightarrow G, \qquad \gamma \longmapsto g\gamma, \tag{۲.۱}$$

را نظیر کنیم، به یک عمل چپ از G بر مجموعهٔ زمینه‌ای اش G دست می‌یابیم. به صورت مشابه، با متناظر کردن انتقال راست R_g با ضابطهٔ:

$$R_g : G \longrightarrow G, \qquad \gamma \longmapsto \gamma g, \tag{۳.۱}$$

به هر $g \in G$، یک عمل راست از G بر مجموعهٔ زمینه‌ای اش حاصل می‌گردد.

۴.۱.۱ مثال. فرض کنید $\rho : G \longrightarrow G'$ یک هومومورفیسم بین گروهها است. به کمک آن یک عمل G بر مجموعهٔ زمینه‌ای G' می‌توان تعریف نمود: به هر $g \in G$ ای انتقال چپ $\tau_g = L_{\rho(g)}$ را نظیر می‌کنیم. به صورت مشابه، اگر به هر $g \in G$ ای انتقال راست $\sigma_g = R_{\rho(g)}$ را متناظر کنیم، به یک عمل راست از G بر G' می‌رسیم.

۵.۱.۱ مثال. فرض کنید H زیرگروهی از گروه G است و نگاشت $G \times H \longrightarrow G$ حاصل از تحدید ضرب $G \times G \longrightarrow G$ را در نظر بگیرید. به این ترتیب، به یک عمل راست از H بر G دست می‌یابیم.

٦.۱.۱ . گیریم G یک گروه است. به هر $g \in G$ ای اتومورفیسم درونی Inn_g با ضابطهٔ:

$$\mathrm{Inn}_g : \gamma \longmapsto g\gamma g^{-۱}, \qquad \gamma \in G, \tag{۴.۱}$$

را نظیر می‌کنیم. به این ترتیب به یک عمل از G برخودش دست می‌یابیم.

۷.۱.۱ مثال. گیریم G گروهی است که بر گروه مفروض G' توسط $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G')$ عمل می‌کند. قانون ضرب:

$$(g'_۱, g_۱)(g'_۲, g_۲) := (g'_۱\tau_{g_۱}(g'_۲), g_۱g_۲), \qquad g_۱, g_۲ \in G,\ g'_۲, g'_۲ \in G', \tag{۵.۱}$$

را بر مجموعهٔ $G' \times G$ تعریف می‌کنیم. این قانون یک ساختار گروهی بر $G' \times G$ تعریف می‌کند که آنرا حاصلضرب نیم مستقیم نامیده و با نماد $G' \propto_\tau G$ نشان می‌دهیم. هومومورفیسم‌های به شرح زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} j &: G' \longrightarrow G' \propto_\tau G, & j(g') &:= (g', e), & g' &\in G', \\ p &: G' \propto_\tau G \longrightarrow G, & p(g', g) &:= g, & g' &\in G',\ g \in G, \\ s &: G \longrightarrow G' \propto_\tau G, & s(g) &:= (e', g), & g &\in G. \end{aligned} \tag{٦.۱}$$

در این صورت، اگر $P = G' \propto_\tau G$ آنگاه دنبالهٔ:

$$\{e\} \longrightarrow G' \xrightarrow{j} P \xrightarrow{p} G \longrightarrow \{e\} \tag{۷.۱}$$

دقیق است و بعلاوه $p.s = 1_G$. بالعکس، هر دنبالهٔ دقیق به فرم (۷.۱) و هر هومومورفیسم $s : G \longrightarrow P$ صادق در $p.s = 1_G$ (تجزیه‌ای برای (۷.۱)) باعث تعریف یک عمل τ از G بر G' می‌گردد: اتومورفیسم τ_g از G' متناظر به $g \in G$ عبارتست از اتومورفیسم دورنی $s(g)$ از P، که به زیرگروه نرمال G' تحدید شده است. بنابراین G–گروهها و دنباله‌های دقیق تجزیه‌پذیر (۷.۱) در تناظر دوسویی هستند.

۸.۱.۱ مثال. در این حالت وضعیت کلی چنین است: گیریم V یک $\mathbf{C}$–فضای برداری با بعد متناهی است و $\mathrm{GL}(V)$ گروه اتومورفیسم‌های خطی V می‌باشد. در این صورت $\mathrm{GL}(V)$ بطور طبیعی بر V عمل می‌کند. حاصلضرب نیم – مستقیم $V \propto \mathrm{GL}(V)$ گروه حرکات آفین در V است. توجه شود که ضرب به تجزیهٔ طبیعی حرکات آفین متناظر است.

همواره کاتگوریهایی را در نظر می‌گیریم که اشیاء آنها دارای زمینه‌های مجموعه هستند و بعلاوه مورفیسم‌های آنها نگاشتهایی بین آن مجموعه‌ها هستند. به بیان دقیق‌تر همواره کاتگوری $\mathbf{C}$ را در نظر می‌گیریم که یک فانکتور $V : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ فراموشی (ساختار بر هر شیء X از $\mathbf{C}$) وجود دارد. برای اجتناب از تکرار این مطلب قرار دادی به شرح زیر اعمال می‌کنیم:

از این پس از نماد X برای خود شیء X و نیز مجموعهٔ زمینه‌ای آن $V(X)$ استفاده می‌کنیم.

هر عمل گروه G بر شیء X موجب تعریف یک عمل از G بر مجموعهٔ زمینه‌ای آن می‌گردد. در حالت کلی‌تر، داریم.

۹.۱.۱ گزاره. گیریم $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ یک فانکتور از کاتگوری $\mathbf{C}$ به کاتگوری $\mathbf{C}'$ است. هر عمل از گروه G بر $X \in \mathbf{C}$ موجب یک عمل خوش تعریف بر $F(X) \in \mathbf{C}'$ می گردد.

اثبات: F یک هومومورفیسم از $\mathrm{Aut}(X)$ به $\mathrm{Aut}(F(X))$ تعریف می‌کند: اگر $\alpha : X \longrightarrow X$ اتومورفیسم باشد، آنگاه $F\alpha : F(X) \longrightarrow F(X)$ یک اتومورفیسم است. با ترکیب این نگاشت با هومومورفیسم مفروض $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$، یک هومومورفیسم $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(F(X))$ بدست می آید که همان عمل G بر $F(X)$ می‌باشد.

۱۰.۱.۱ یادداشت. اگر تنها هم ارزیهای در یک کاتگوری مفروض $\mathbf{C}$ را به عنوان مورفیسم تلقی کنیم، به یک کاتگوری جدید $\mathbf{C}_{\mathrm{iso}}$ می‌رسیم. چنانچه تنها یک فانکتور $F : \mathbf{C}_{\mathrm{iso}} \longrightarrow \mathbf{C}_{\mathrm{iso}}$ داشته باشیم، همچنان حکم گزارهٔ ۹.۱.۱ صحیح است.

اگر $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ یک فانکتور کنترا واریان باشد، آنگاه هر عمل چپ G بر X یک عمل راست G بر $F(X)$ و هر عمل راست G بر X یک عمل چپ G بر $F(X)$ را موجب می‌گردد.

۱۱.۱.۱ مثال. فانکتور کواریان $P : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ که به هر مجموعهٔ مفروض X مجوعهٔ $P(X)$ همهٔ زیرمجموعه‌هایش را نظیر می‌کند و به هر نگاشت $X \longrightarrow X'$، نگاشت القایی $P(X) \longrightarrow P(X')$ بر زیرمجموعه‌ها را نظیر می‌کند و به هر نگاشت $X \longrightarrow X'$، نگاشت القایی $P(X) \longrightarrow P(X')$ بر زیرمجموعه‌ها را نظیر می‌کند، در نظر بگیرید. گیریم X یک G–مجموعه است. در این صورت، بنا به گزارهٔ ۹.۱.۱ مجموعهٔ $P(X)$ یک G–مجموعه است. فانکتور $P^{-1} : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ چنانچه به اشیاء X در $\mathbf{Set}$ تأثیر کند همچون P عمل می‌کند، اما به هر نگاشت $\varphi : X \longrightarrow X'$، نگاشت $\varphi^{-1} : P(X') \longrightarrow P(X)$ (معکوس بر زیرمجموعه‌ها) را متناظر می‌سازد. فانکتور P^{-1} هر G–مجموعهٔ مفروض X را به G°–مجموعهٔ $P(X)$ نظیر می‌سازد.

۱۲.۱.۱ تعریف. گیریم $\mathbf{C}$ یک شیء ثابت از کاتگوری $\mathbf{C}$ باشد. فانکتور کنترا واریان $h^R : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ با ضابطهٔ:

$$h^R(X) := \mathrm{Hom}(X, R) \qquad h^R(\varphi)(f) := f \circ \varphi \tag{۸.۱}$$

که در آنها $X \in \mathbf{C}$، $f : X' \longrightarrow R$ و $\varphi : X \longrightarrow X'$، یک عمل چپ از G بر X یک عمل راست از G بر مجموعهٔ $\mathrm{Hom}(X, R)$ نظیر می‌سازد. اگر $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ هومومورفیسم مفروض باشد، آنگاه هومومورفیسم القایی از G° بتوی گروه تناظرهای دو سویی $\mathrm{Hom}(X, R)$ را با نماد τ^* نشان می‌دهیم.

۱۳.۱.۱ یادداشت. گیریم A یک حلقه و $\mathbf{Mod}_A$ کاتگوری A–مدولهای چپ است. هر G–مدول X با یک عمل از G بر X توسط نگاشتهای بین A–مدولها (یعنی A–خطی‌ها) تعریف می‌گردد؛ به بیان دیگر یک نمایش از G در X به تعبیر معمولی بنا به گزارهٔ ۹.۱.۱ هر چنین نمایشی یک عمل از G بر مجموعهٔ زیرمدولهای X تعریف می‌کند.

نظریه قرار دادهایی که پذیرفته‌ایم، سخن گفتن از عضو در یک شیء X با معنی است.

۱۴.۱.۱ تعریف. عنصر x از G–شیء X را در صورتی ناوردا یا G–ناوردا گوئیم که نسبت به هر تبدیل τ_g ای ثابت بماند: به ازای هر $g \in G$ ای $\tau_g(x) = x$.

زیرمجموعه $M \subseteq X$ را در صورتی ناوردا گوئیم که یک عضو ناوردا از $P(X)$ نسبت به G–عمل القایی (مثال ۱۱.۱.۱) باشد؛ یعنی، به ازای هر $g \in G$ ای $\tau_g(M) \subseteq M$.

۱۵.۱.۱ مثال. گیریم X و X' دو G–شیء از $\mathbf{C}$ نسبت به $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ و $\tau' : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X')$ است. اگر بازاء $g \in G$ و $\varphi : X \longrightarrow X'$ ای تعریف کنیم $\sigma_g(\varphi) := \tau'_g \circ \varphi \circ \tau_{g^{-1}}$، آنگاه یک عمل σ از G بر مجموعهٔ مورفیسم‌های از X به X' حاصل می‌گردد. (مثال ۱۲.۱.۱ حالت خاصی از این وضیعت است، مشروط به آنکه G–عمل بدیهی بر X را در نظر بگیریم!) نشان دهید که فانکتور مناسبی وجود دارد که با توجه به گزارهٔ ۹.۱.۱ عمل مورد نظر را القاء می‌کند.

۲.۱ مورفیسم اکوئی‌واریان

گیریم G و G' گروه و $\mathbf{C}$ کاتگوری است. فرض کنید X یک G–شیء از $\mathbf{C}$ نسبت به هومورفیسم $\tau : G \to \mathrm{Aut}(X)$ است و X' یک G–شیء از $\mathbf{C}'$ نسبت به هومورفیسم $\tau' : G' \to \mathrm{Aut}(X')$ است.

۱.۲.۱ تعریف. منظور از یک مورفیسم ρ–اکوئی‌واریان $\varphi : X \to X'$ نسبت به هومورفیسم مفروض $\rho : G \to G'$، یک مورفیسم $\varphi : X \to X'$ است به گونه‌ای که بازاء هر $g \in G$ ای دیاگرام زیر در $\mathbf{C}$ تعویض پذیر باشد:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ {\scriptstyle \tau_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau'_{\rho(g)}} \\ X & \xrightarrow[\varphi]{} & X' \end{array}$$

یعنی بازاء هر $x \in X$ و هر $g \in G$ ای $\tau'_{\rho(g)}(\varphi(x)) = \varphi(\tau_g(x))$. در صورتی که $G = G'$ و $\rho = 1_G$، بجای مورفیسم ρ–اکوئی‌واریان تنها می‌گوئیم نگاشت اکوئی‌واریان .

۲.۲.۱ مثال. اگر X و X' بترتیب G–مجموعه و G'–مجموعهٔ با اعمال مطرح شده در مثال ۲.۱.۱ باشند، آنگاه وقتی و تنها وقتی نگاشت $\varphi : X \longrightarrow X'$ یک ρ–اکوئی‌واریان است که دیاگرام زیر تعویض پذیر باشد:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\tau} & X \\ {\scriptstyle \rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ G' \times X' & \xrightarrow[\tau']{} & X' \end{array}$$

۳.۲.۱ مثال. گیریم $\rho : G \longrightarrow G'$ یک همومورفیسم گروهها است. اگر G و G' همچون در مثال ۳.۱.۱ برخودشان از چپ عمل کنند، آنگاه وقتی و تنها وقتی نگاشت $\varphi : G \longrightarrow G'$ یک ρ–اکوئی‌واریان است که $\varphi(g_۱g_۲) = \rho(g_۱)\varphi(g_۲)$. بنابراین خود ρ نمونه‌ای از یک نگاشت ρ–اکوئی‌واریان نسبت به اعمال چپ هستند.
اگر اعمال G و G' برخودشان به صورت اتومورفیسم‌های درونی را در نظر بگیریم، در این صورت بازاء هر $g \in G$ ای دیاگرام زیر تعویض پذیر است:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\ {\scriptstyle \mathrm{Inn}_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Inn}_{\rho(g)}} \\ G & \xrightarrow[\varphi]{} & G' \end{array}$$

به عبارت دیگر، ρ یک ρ–اکویی ناوردا است.

۴.۲.۱ مثال. چنانچه عمل راست زیرگروه H از G بر G همانند مثال ۶.۱.۱ را در نظر بگیریم، در این صورت هر همومورفیسم $\rho : G \longrightarrow G$ موجب می‌شود که H را بعنوان یک نگاشت $\rho|_H$–اکویی ناوردا در نظر بگیریم؛ که $\rho|_H$ نمایشگر تحدید ρ به H است.

۵.۲.۱ مثال. هر انتقال راست از یک گروه، یک نگاشت اکوئی‌واریان از G–مجموعهٔ G تعریف شده توسط انتقال چپ است. این درست همان شرکتپذیری در G است.

۶.۲.۱ مثال. اگر $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ یک عمل از G بر X تعریف کند، آنگاه بازاء هر $g \in G$ نگاشت $\tau_g : X \longrightarrow X$ یک Inn_g–اکوئی‌واریان است، که $\mathrm{Inn}_g : G \longrightarrow G$ نمایشگر همومورفیسم درونی نظیر به g در G است: $\mathrm{Inn}_g : \gamma \longmapsto g\gamma g^{-۱}$.

۷.۲.۱ مثال. گیریم X یک G–مجموعه است. بازاء هر $x_۰ \in X$ ثابت، نگاشتی $p : G \longrightarrow X$ با ضابطهٔ $p(g) := \tau_g(x_۰)$ تعریف می‌کنیم. اگر عمل از G بر خودش به کمک انتقالهای چپ را در نظر بگیریم، آنگاه p یک نگاشت اکوئی‌واریان است.

۸.۲.۱ تعریف. اگر X، X' و $X"$ بترتیب G–شیء، G'–شیء و $G"$–شیء باشند، $\rho : G \longrightarrow G'$ و $\rho' : G' \longrightarrow G"$ همومورفیسم گروهها و $\varphi : X \longrightarrow X'$ و $\varphi' : X' \longrightarrow X"$ بترتیب مورفیسم ρ–اکوئی‌واریان و ρ'–اکوئی‌واریان باشند، آنگاه به وضوح $\varphi \circ \varphi$ یک مورفیسم $\rho \circ \rho'$–اکویی واریان است. بنابراین بازاء هر G ثابت، G–شیء‌های یک کاتگوری $\mathbf{C}$ به همراه مورفیسم اکوئی‌واریان (به عنوان مورفیسم‌ها) تشکیل یک کاتگوری $\mathbf{C}^G$ می‌دهند.

به عنوان متممی بر گزارهٔ ۹.۱.۱ داریم:

۹.۲.۱ گزاره. گیریم $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ یک فانکتور کواریان، X و X' بترتیب G–شیء در $\mathbf{C}$ و G'–شیء در $\mathbf{C}$ هستند و $\rho : G \longrightarrow G'$ یک همومورفیسم است و $\rho : X \longrightarrow X'$ یک مورفیسم ρ–اکوئی‌واریان می‌باشد. اعمال طبیعی القایی بر $F(X)$ و $F(X')$ را در نظر بگیرید. در این صورت $F(\varphi) := F(X) \longrightarrow F(X')$ نسبت به این اعمال ρ–اکوئی‌واریان است. چنانچه G ثابت فرض شود، با ارسال G–اشیاء در $\mathbf{C}$ به G–اشیاء در $\mathbf{C}'$، فانکتوری $F^G : \mathbf{C}^G \longrightarrow \mathbf{C}'^{G'}$ حاصل می‌گردد که توسیع نگاشت مطرح در گزارهٔ ۹.۱.۱ است.

اثبات: دیاگرام تعویض پذیر:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau_g"'] & X' \arrow[d, "\tau'_{\rho(g)}"] \\ X \arrow[r, "\varphi"'] & X' \end{tikzcd}$$

توسط F به دیاگرام تعویض پذیر:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "F(\tau_g)"'] & F(X') \arrow[d, "F(\tau'_{\rho(g)})"] \\ F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"'] & F(X') \end{tikzcd}$$

ارسال می‌گردد که نشان دهندهٔ ρ–اکوئی‌واریان بودن $F(\varphi)$ نسبت به اعمال القایی بر $F(X)$ و $F(X')$ می‌باشد. باقی مطالب بدیهی است.

اگر مورفیسم اکوئی‌واریان $\varphi : X \longrightarrow X'$ در $\mathbf{C}^G$ دارای وارون $\psi : X' \longrightarrow X$ در $\mathbf{C}$ باشد؛ به عبارت دیگر $\psi \circ \varphi = 1_X$ و $\varphi \circ \psi = 1_{X'}$، آنگاه الزاماً ψ اکوئی‌واریان است و بنابراین φ یک هم ارزی در $\mathbf{C}^G$ است.

فانکتوری کانونی $V : \mathbf{C}^G \longrightarrow \mathbf{C}$ که در آن G–عملها فراموش می‌شوند، می‌توان تعریف نمود. از سوی دیگر، با در نظر گرفتن G–عمل بدیهی $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ بر هر شیء دلخواه X از $\mathbf{C}$ (که G را به 1_X می‌نگارد). می‌توانیم یک فانکتور $I : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^G$ تعریف کنیم. بنابراین سخن گفتن از مورفیسمهای اکوئی‌واریان $\varphi : X \longrightarrow R$ که X یک G–شیء از $\mathbf{C}$ و R یک شیء دلخواه از $\mathbf{C}$/ است، بجا است. چنین نگاشتی را مورفیسم ناوردا مینامیم. به بیان دقیق‌تر:

۱۰.۲.۱ تعریف. گیریم X یک G–شیء از $\mathbf{C}$ و R یک شیء دلخواه از $\mathbf{C}$ است. مورفیسم $\varphi : X \longrightarrow R$ را در صورتی ناوردا گوئیم که بازاء همهٔ $g \in G$ ها دیاگرام زیر تعویض پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\tau_\varphi"'] & & \mathbb{R} \\ & X \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

۱۱.۲.۱ گزاره. گیریم X یک G–مجموعه، X' یک G'–مجموعه و $\varphi : X \longrightarrow X'$ یک نگاشت ρ–اکوئی‌واریان نسبت به هومومورفیسم $\rho : G \longrightarrow G'$ است. اگر $x \in X$ عنصر G–ناوردا باشد، آنگاه $\varphi(x)$ عنصری $\rho(G)$–ناوردا است.

اثبات: $\tau_g(x) = x$ ایجاب می‌کند که:

$$\tau'_{\rho(g)}(\varphi(x)) = \varphi(\tau_g(x)) = \varphi(x) \tag{۹.۱}$$

و برهان تمام است.

بنابراین، زیرمجموعه‌های G–ناوردا از X به زیرمجموعه‌های $\rho(G)$–ناوردا از X' نگاشته می‌شوند.

۱۲.۲.۱ تمرین. $\mathbf{C}^G$ را به شکل یک کاتگوری از فانکتورها می‌توان در نظر گرفت (G را به صورت یک کاتگوری متشکل از یک شیء واحد و مورفیسم‌های g با $g \in G$ همراه با قانون ترکیب طبیعی، در نظر می‌گیریم.) در این صورت مورفیسم‌های اکوئی‌واریان دقیقاً به معنی تبدیلات طبیعی هستند. فانکتور F^G از گزارهٔ ۹.۲.۱ عبارت است از فانکتور کانونی القایی توسط F بین کاتگوریهای فانکتوری نظیر.

۱۳.۲.۱ تمرین. اگر X و X' در G–شیء از $\mathbf{C}$ باشند، مجموعهٔ مورفیسم‌های از X به X' با توجه به تمرین ۱۵.۱.۱ یک G–مجموعه تشکیل می‌دهند. عناصر ناوردای نسبت به این عمل، مورفیسم‌های اکوئی‌واریان $X \longrightarrow X'$ هستند. در حالت خاص، مورفیسم‌های ناوردای $X \longrightarrow \mathbf{C}$، که R شیء دلخواهی از کاتگوری $\mathbf{C}$ است، نسبت به عمل تعریف شده در مثال ۱۲.۱.۱، عناصر ناوردا هستند.

۳.۱ مدار

گیریم X نسبت به $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ یک G–مجموعه است.

۱.۳.۱ تعریف. منظور از یک مدار یا G–مدار عنصر $x \in X$ نسبت به عملی مفروض بر X، مجموعهٔ $\Omega(x) := \{\tau_g(x) | g \in G\}$ است.

۲.۳.۱ لم. اگر X یک G–مجموعه باشد، آنگاه مدارات X یک افراز برای X تشکیل می دهند.

اثبات: چون $x \in \Omega(x)$، پس مدارات کل X را در می‌نوردند. تنها کافی است نشان دهیم که: اگر $x, x' \in X$ دارای مدارات متقاطع $\Omega(x)$ و $\Omega(x')$ باشند، در این صورت $\Omega(x) = \Omega(x')$. گیریم $y \in \Omega(x) \cap \Omega(x')$، پس $y = \tau_g(x)$ و $y = \tau_{g'}(x')$ در این صورت، بازاء هر $z = \tau_\gamma(x)$ ای داریم:

$$z = (\tau_\gamma \circ \tau_{g^{-1}} \circ \tau_{g'})(x') \in \Omega(x') \qquad (۱۰.۱)$$

در نتیجه، $\Omega(x) \subseteq \Omega(x')$. این نشان می‌دهد که $\Omega(x) = \Omega(x')$. □

گیریم X/G مجموعهٔ مدارهای G–شیء X است و $\pi_X : X \longrightarrow X/G$ نگاشت کانونی است. هر مدار، مداری از هر یک از نقاطش است. در نتیجه، $\pi(\tau_g(x)) = \pi(x)$ و لذا π یک نگاشت ناوردا است. در حالت کلی‌تر، داریم:

۳.۳.۱ لم. گیریم X یک G–مجموعه است و $\pi_X : X \longrightarrow X/G$ نگاشت کانونی بروی مجموعهٔ مداری X/G است و R یک مجموعهٔ دلخواه است. بازاء هر نگاشت ناوردا $\varphi : X \longrightarrow R$، یک و تنها یک نگاشت $\psi : X/G \longrightarrow R$ وجود دارد به گونه‌ای که $\varphi = \psi \circ \pi_X$.

اثبات: اگر بازاء هر $g \in G$ ای $\varphi \circ \tau_g = \varphi$، آنگاه φ بر هر مدار $\Omega(x)$ ثابت است و بنابراین یک نگاشت $\psi : X/G \longrightarrow R$ با ویژگی مورد نظر وجود دارد: $\psi(\Omega(x)) := \varphi(x)$. از سوی دیگر، اگر ψ و ψ' دو نگاشت با این ویژگی باشند، آنگاه بازاء هر عضو $\Omega(x) \in X/G$ ای داریم:

$$\psi'(\Omega(x)) = \psi'(\pi(x)) = (\psi' \circ \pi)(x) = (\psi \circ \pi)(x) = \psi(\Omega(x)) \qquad (۱۱.۱)$$

و برهان تمام است. □

بالعکس، اگر $\psi : X/G \longrightarrow R$ یک نگاشت دلخواه باشد، با ترکیب آن با نگاشت $\pi_X : X \longrightarrow X/G$ به یک نگاشت ناوردا $\varphi = \psi \circ \pi$ دست می‌یابیم. یعنی، ثابت کردیم که:

۴.۳.۱ گزاره. گیریم X یک G–مجموعه؛ $\pi_X : X \longrightarrow X/G$ نگاشت کانونی بروی مجموعهٔ مداراتش و R مجموعه‌ای دلخواه باشد. در این صورت تناظر $\psi \longmapsto \psi \circ \pi$ که نگاشتهای از X/G به R را به نگاشتهای ناوردای از X به R می‌نگارد، دو سویی است. □

۵.۳.۱ یادداشت. با استدلالی ساده می‌توان نشان داد که با این خاصیت عام می‌توان X/G را در حد دو سویی کانونی مشخص کرد. بنابراین، ازاین گزاره می‌توان برای تعریف X/G در هر کاتگوری دلخواه تعریف نمود. البته، لازم است مدار – شیء را در یک کاتگوری دلخواه تعریف کنیم.

۶.۳.۱ گزاره. گیریم X یک G–مجموعه، X' یک G'–مجموعه، $\rho : G \longrightarrow G'$ یک همومورفیسم و $\varphi : X \longrightarrow X'$ یک نگاشت ρ–اکوئی‌واریان است. در این صورت یک و تنها یک نگاشت $\tilde{\varphi} : X/G \longrightarrow X'/G'$ می‌توان یافت به گونه‌ای که دیاگرام زیر تعویض پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & X' \arrow[d, "\pi_{X'}"] \\ X/G \arrow[r, "\varphi'"] & X'/G' \end{tikzcd}$$

اثبات: بنا به خاصیت عام مطرح شده در گزارهٔ ۴.۳.۱، کافی است نشان دهیم که $\pi_{X'} \circ \varphi : X \longrightarrow X'/G'$ نگاشتی ناوردا است. اما:

$$(\pi_{X'} \circ \varphi) \circ \tau_g = \pi_{X'} \circ (\pi \circ \tau_g) = \pi_{X'} \circ (\tau'_{\rho(g)} \circ \varphi) = (\pi_{X'} \circ \tau'_{\rho(g)}) \circ \varphi = \pi_{X'} \circ \varphi \qquad (۱۲.۱)$$

و در نتیجه $\pi_{X'}$ نگاشتی ناوردا است. اکنون با تجزیهٔ $\pi_{X'} \circ \varphi$ بر X/G می‌توان $\tilde{\varphi}$ را تعریف نمود. □

۷.۳.۱ مثال. گیریم G گروه و H زیرگروهی از G است که با انتقالهای از راست بر G عمل می‌کند (مثال ۵.۱.۱). در این صورت G/H نمایشگر مجموعهٔ مدارات، همان مجموعهٔ همدسته‌های چپ به پیمانهٔ H می‌باشد. گیریم G' گروهی دیگر است و H' زیرگروهی از G' می‌باشد. بعلاوه فرض کنیم $\varphi : G \longrightarrow G'$ نگاشتی است که $\varphi(H) \subseteq H'$ و بازاء هر $g \in G$ و هر $h \in H$ ای $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$. در این صورت، $\varphi|_H : H \longrightarrow H'$ همومورفیسم است و نگاشت φ یک $\varphi|_H$–اکوئی‌واریان می‌باشد. بنا به گزارهٔ ۶.۳.۱ یک و تنها یک نگاشت $\tilde{\varphi} : G/H \longrightarrow G'/H'$ وجود دارد، که نسبت به آن دیاگرام زیر تعویض پذیر است:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_{G'}"'] & G' \arrow[d, "\pi_{G'}"] \\ G/H \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & G'/H' \end{tikzcd}$$

در حالتی که H و H' زیرگروههای نرمال از G و G' هستند و φ همومورفیسم است، $\tilde{\varphi}$ یک مورفیسم بین گروههای خارج قسمتی القاء می‌کند.

حال گروه ثابتی G را در نظر بگیرید. بازاء هر G–مجموعهٔ X مفروضی، مجموعهٔ مداری X/G را می‌توانیم تعریف کنیم. بعلاوه بنا به گزارهٔ ۶.۳.۱، هر نگاشت اکوئی‌واریان $\varphi : X \longrightarrow X'$ یک و تنها یک نگاشت $\tilde{\varphi} : X/G \longrightarrow X'/G$ القاء می‌کند. به این ترتیب به یک فانکتور کوواریان $\mathcal{B} : \mathbf{Set}^G \longrightarrow \mathbf{Set}$ از کاتگوری G–مجموعه‌ها به کاتگوری مجموعه‌ها بدست می‌آوریم: $B(X) := X/G$ و $B(\varphi) = \tilde{\varphi}$. یک نتیجهٔ استاندارد این بحث چنین است: هر نگاشت هم ارزی $\varphi : X \longrightarrow X'$ در $\mathbf{Set}^G$ یک نگاشت دوسویی $\tilde{\varphi} : X/G \longrightarrow X'/G$ القاء می‌کند.

۸.۳.۱ یادداشت. اگر فانکتور فراموشی $V : \mathbf{Set}^G \longrightarrow \mathbf{Set}$ که به صورت فراموشی ساختار G–مجموعه‌ای تعریف می‌شود را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم که $\pi : V \longrightarrow B$ یک تبدیل طبیعی از V به B است.

در آغاز کار در خصوص G–مجموعه‌ها، نگاشتی $\Omega : X \longrightarrow P(X)$ که مطرح کردیم که آنرا به صورت نگاشت $\Omega = \pi_X^{-1} \circ \pi_X$ با $\pi_X : X \longrightarrow X/G$ می‌توان معرفی کرد. سمت راست را به کل $P(X)$ می‌توان توسیع داد و به نگاشتی از $P(X)$ به $P(X)$ رسید. Ω را به صورت $\pi_X^{-1} \circ \pi_X : P(X) \longrightarrow P(X)$ می‌توان قلمداد کرد. اگر $M \subseteq X$، آنگاه $\Omega(M)$ دقیقاً عبارتست از مدار M تحت G–عمل القایی بر $P(X)$. به بیان دقیق‌تر، داریم:

$$\Omega(M) = \{\tau_g(x) | g \in G, x \in M\} \qquad (۱۳.۱)$$

بنابراین، $\Omega(M)$ اشباع M نسبت به G است. یعنی، اجتماع همهٔ G–مدارهای در X است که M را قطع می‌کنند.

ناوردایی $M \subseteq X$ را به صورت $\Omega(M) = M$ می‌توان تشریح کرد. اگر $M \subseteq X$، آنگاه مجموعهٔ $\Omega(M)$ عبارتست از مقطع همهٔ مجموعه‌های ناوردایی که M را در بر دارند. مدارها، کوچکترین مجموعه‌های ناوردا هستند.

۹.۳.۱ تعریف. گروه ایزوتروپی. گیریم X یک G–مجموعه و $x \in X$ است. در این صورت مجموعهٔ $G_x := \{g \in G | \tau_g(x) = x\}$ زیرگروهی از G است.

۱۰.۳.۱ تعریف. G_x را گروه ایزوتروپی x می‌نامیم.

۱۱.۳.۱ گزاره. بازاء هر $x \in X$ و $g \in G$ ای $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.

اثبات: در اینجا به جهت ایجاد سهولت در بحث فرض کرده‌ایم $\tau_g(x) = gx$. پس اگر $h \in G_x$ آنگاه $ghg^{-1}.gx = ghx = gx$ و در نتیجه $gG_xg^{-1} \subseteq G_{gx}$. چون $g^{-1}.gx = x$، با استدلالی مشابه داریم $g^{-1}G_{gx}g \subseteq G_x$ یا $G_{gx} \subseteq gG_xg^{-1}$، که اثبات کامل است. $\square$

۱۲.۳.۱ تعریف. نوع مداری. نگاشت $\varphi : X \longrightarrow S(G)$ با ضابطهٔ $\varphi(x) = G_x$ که عنصر $x \in X$ را به زیر گروه ایزوتروپی G_x در مجموعهٔ همهٔ زیرگروههای G می‌نگارد، در نظر بگیرید. در این صورت G با اتومورفیسم‌های درونی بر $S(G)$ عمل می‌کند و مدارهای این عمل عبارتند از دسته‌های تزویجی زیرگروههای در G. بنا به گزارهٔ ۱۱.۳.۱ دیاگرام:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau_g"'] & S(G) \arrow[d, "\mathrm{Inn}_g"] \\
X \arrow[r, "\varphi"] & S(G)
\end{tikzcd}$$

بازاء هر $g \in G$ ای تعویض پذیر است. به عبارت دیگر φ یک نگاشت اکوئی‌واریان می‌باشد. پس بنا به گزارهٔ ۶.۳.۱ نگاشت φ یک نگاشت به فرم $\tilde{\varphi} : X/G \longrightarrow S(G)/G$ القاء می‌کند. یعنی، نگاشتی که هر مدار $\Omega(x)$ از X را به دستهٔ تزویجی $[G_x]$ خوش تعریف از زیر گروههای در G را نسبت می‌دهد. $\tilde{\varphi}(\Omega(x))$ را نوع – مداری مدار $\Omega(x)$ می‌نامیم.

دسته‌های تزویجی $\{e\}$ و G انواع خاص نوع – مداری هستند. گیریم $x_\circ$ در مدار $\Omega(x_\circ)$ از نوع مداری $\{e\}$ باشد. در این صورت بازاء هر $x \in \Omega(x_\circ)$ ای یک و تنها یک $g \in G$ وجود دارد به گونه‌ای که $gx_\circ = x$. اگر $x_\circ$ عنصری از مدار $\Omega(x_\circ)$ با نوع – مداری G باشد، آنگاه $x_\circ$ یک G–ناوردا است و $\Omega(x_\circ) = \{x_\circ\}$. بنابراین، نقاط ثابت دقیقاً عبارتند از مدارهای از نوع مداری G.

۱۳.۳.۱ مثال. گروه خطی کامل $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ متشکل از ماتریسهای $n\times n$ حقیقی با دترمینان ناصفر را در نظر بگیرید، که بر $\mathbb{R}^n$ بطور طبیعی عمل می‌کند. مبداء 0 و متمم آن $\mathbb{R}^n-\{0\}$ مدارهای این عمل هستند. نوع — مداری 0 عبارت از $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ می‌باشد.

۱۴.۳.۱ مثال. $\mathbb{R}^n$ همراه با متد اقلیدسی استاندارد و نیز گروه تبدیلات متعامد $O(n,\mathbb{R})$ بر $\mathbf{C}^n$ را در نظر بگیرید. مدارهای عمل طبیعی $O(n,\mathbb{R})$ بر $\mathbb{R}^n$ عبارتند از مبداء و کرات به مرکز مبداء در $\mathbb{R}^n$. گروه ایزوتروپی هر نقطهٔ بجز مبداء با گروه متعامد $O(n-۱,\mathbb{R})$ ایزومورف است.

۱۵.۳.۱ مثال. گیریم X عبارت از صفحهٔ مختلط $\mathcal{C}$ به همراه نقطهٔ در بینهایت است. گروه تبدیلات به فرم $x\longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ با $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ و $ad-bc\neq ۰$ بر X عمل می‌کند. در این صورت X مدار هر یک از اعضائش می‌باشد.

۱۶.۳.۱ مثال. عمل گروه G بر خودش توسط اتومور فیسمهای درونی را در نظر بگیرید. نقاط ثابت عبارتند از اعضاء مرکز Z_G گروه G. کمی قبل G–عمل القایی بر مجموعهٔ $S(G)$ زیرگروههای G را مطرح کردیم. مدار هر زیرگروه، دستهٔ تزویج آن می‌باشد. بنابراین زیرگروههای ناوردای در G دقیقاً عبارتند از نقاط ثابت همین عمل. بعلاوه، می‌توان بی‌درنگ نتیجه گرفت که دسته‌های تزویج گروه G، مجموعهٔ $S(G)$ را افراز می‌کنند.

در گزارهٔ زیر تأثیر نگاشت اکوئی‌واریان برگروههای ایزوتروپی را بررسی می‌کنیم:

۱۷.۳.۱ گزاره. گیریم X یک G–مجموعه، X' یک G'–مجموعه، $\rho:G\longrightarrow G'$ یک هومومورفیسم و $\varphi:X\longrightarrow X'$ یک نگاشت ρ–اکوئی‌واریان است. در این صورت $\rho(G_x)\subseteq G'_{\varphi(x)}$.

اثبات: گیریم $g\in G_x$؛ یعنی $gx=x$. در این صورت $\rho(g)\varphi(x)=\varphi(gx)=\varphi(x)$ یعنی $\rho(g)\in G'_{\varphi(x)}$. □

۱۸.۳.۱ تمرین. گیریم X یک G–مجموعه، X' یک G'–مجموعه، $\rho:G\longrightarrow G'$ یک همورفیسم و $\tilde{\varphi}:X/G\longrightarrow X'/G'$ یک نگاشت دلخواه است. شرایطی را بیابید که طی آنها $\tilde{\varphi}$ بتواند توسط یک نگاشت ρ–اکوئی‌واریان $\varphi:X\longrightarrow X'$ به تعبیر در گزارهٔ ۶.۳.۱ القاء گردد.

۱۹.۳.۱ تمرین. فرض کنید X یک G–مجموعه است و نگاشت $\Omega=\pi_X^{-۱}\circ\pi_X:P(X)\longrightarrow P(X)$ را در نظر بگیرید. در این صورت، نشان دهید که Ω خواص ذیل را دارد:

الف) بازاء زیرمجموعهٔ تهی $\varphi\subseteq X$، داریم $\Omega(\varphi)=\varphi$.

ب) بازاء $M\subseteq X$ داریم $M\subseteq\Omega(M)$.

ج) بازاء هر $M\subseteq X$ ای $\Omega(\Omega(M))=\Omega(M)$.

د) بازاء هر خانواده $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ از $M_\lambda\subseteq X$ ها $\Omega(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega(M_\lambda)$.

بنابراین Ω یک عملگر — کوراتوفسکی بر X است و در نتیجه می‌تواند یک توپولوژی بر X تعریف کند: $M\subseteq X$ را در صورتی بسته گوئیم که $\Omega(M)=M$ بالعکس. همچنین مطلب را می‌توان با در نظر گرفتن رابطهٔ هم ارزی دلخواه R بر X (که لزومی ندارد توسط گروه G تعریف گردد) و نگاشت $\Omega=\pi_X^{-۱}\circ\pi_X:P(X)\longrightarrow P(X)$ بدست آورد، که $\pi_X:X\longrightarrow X/R$ نگاشت کانونی بروی مجموعهٔ خارج قسمتی X/R می‌باشد. نشان دهید که برای رابطهٔ دلخواه R بر مجموعهٔ X، عملگر اشباع $\Omega:P(X)\longrightarrow P(X)$ با ضابطهٔ:

$$M\subseteq X\ \Rightarrow\ \Omega(M):=\{y\in X\,|\,xRy \text{ بازاء یک } x\in M \text{ ای}\}\qquad(۱۴.۱)$$

وقتی و تنها وقتی در شرایط صدق می‌کند که R رابطه بازتابی و متعدی بر X باشد.

۲۰.۳.۱ تمرین. توپولوژی تعریف شده در تمرین ۱۹.۳.۱ بر مجموعهٔ X مجهز به رابطهٔ هم ارزی R را در نظر بگیرید. خواص زیر را نشان دهید:

۱) وقتی و تنها وقتی $M \subseteq X$ بسته است که M اجتماعی از دسته‌های هم‌ارزی باشد.

۲) وقتی و تنها وقتی $M \subseteq X$ بسته است که M باز باشد. چه شرایطی بر X/R لازم است تا توپولوژی خارج قسمتی در شرایط زیر صدق کند:
۱) در اصل موضوع دوم شمارایی صدق کند؟ ۲) فشرده باشد؟ ۳) همبند باشد؟

۲۱.۳.۱ تمرین. گیریم X یک G–مجموعه و R مجموعه‌ای دلخواه و $\varphi : X \longrightarrow R$ نگاشتی دلخواه باشد. فرض کنید X با توپولوژی مطرح شده در تمرین ۱۹.۳.۱ همراه است و R با توپولوژی گسسته توأم می‌باشد. در این صورت وقتی و تنها وقتی φ ناوردا است که φ پیوسته باشد.

۴.۱ مجموعه‌های خاص

گیریم X یک G–مجموعه است که بوسیلهٔ هومورفیسم $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Bij}(X)$ تعریف شود. خواص مشخصی را می‌توان بر آن اعمال کرد.

۱.۴.۱ تعریف. در صورتی می‌گوئیم عمل τ مؤثر است که τ یکبیک باشد؛ به عبارت دیگر $\mathrm{Ker}(\tau) = \{e\}$.

ملاحظه می‌کنیم که $\mathrm{Ker}(\tau) = \bigcap_{x\in X} G_x$، یعنی عضوی از G در $\mathrm{Ker}(\tau)$ قرار می‌گیرد که در هر یک از زیرگروههای ایزوتروپی نقاط X قرار داشته باشد. اگر τ مؤثر نباشد، آنگاه تجزیه‌ای برای $\tilde{\tau}$ در راستای $G/\mathrm{Ker}(\tau)$ وجود دارد:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr] & & \mathrm{Bij}(X) \\ & G/\mathrm{Ker}(\tau) \arrow[ur, "\tilde{\tau}"'] & \end{tikzcd}$$

و $G/\mathrm{Ker}(\tau)$ بر X بطور مؤثر عمل می‌کند.

۲.۴.۱ مثال. هستهٔ عمل τ گروه G با اتومورفیسمهای داخلی بر خودش، مرکز $Z_G := \mathrm{Ker}(\tau)$ گروه می‌باشد.

۳.۴.۱ تعریف. در صورتی عمل τ آزاد است که اگر بازاء یک $x \in X$ ای $\tau_g(x) = x$ آنگاه ایجاب گردد که $g = e$. یعنی، بازاء هر $g \in G$ ای تبدیل τ_g نقطهٔ ثابت ندارد، مگر آنکه $g = e$. آزاد به معنی «رها از نقاط ثابت» است.

در این حالت، گروههای ایزوتروپی به $\{e\}$ تقلیل می‌یابند: بازاء هر $x \in X$ ای $G_x = \{e\}$. در چنین وضعیتی، X را یک G–مجموعهٔ اصلی می‌نامیم. توجه شود که هر عمل آزاد، متعدی است.

۴.۴.۱ مثال. عمل گروه G بر خودش با انتقالهای از چپ، آزاد است. گیریم H زیرگروهی از G است که با انتقالهای از راست بر G عمل می‌کند. این عمل نیز آزاد است.

۵.۴.۱ تعریف. عمل τ در صورتی متعدی است که بازاء هر $x_1, x_2 \in X$، یک $g \in G$ ای یافت گردد به گونه‌ای که $\tau_g(x_1) = x_2$. در صورتی τ را متعدی ساده می‌گوییم که عنصر g در بالا منحصر بفرد باشد.

هر عمل متعدی ساده، آزاد است. بالعکس، هر عمل آزاد بر هر یک از مدارهایش متعدی ساده است. زیرا اگر $x = g_1 x_\circ$ و $x = g_2 x_\circ$، آنگاه $x_\circ = g_2^{-1}.x = g_2^{-1} g_1.x_\circ$ و بنابراین $g_2^{-1} g_1 \in G_{x_\circ} = \{e\}$ و در نتیجه $g_1 = g_2$.

تعریف عمل متعدی را به صورت ذیل نیز می‌توان تشریح کرد: عنصری $x_\circ \in X$ چنان وجود دارد که $\Omega(x_\circ) = X$. پس، X مدار هر یک از نقاط آن است. به این ترتیب، مجموعهٔ مداری X/G تک نقطه‌ای است.

این ویژگی، امکان تعریف عمل متعدی در هر کاتگوری دلخواه را فراهم می‌سازد، مشروط به اینکه در آن کاتگوری، مفهوم نقطه تعریف شود.

۶.۴.۱ تعریف. G–مجموعهٔ X را در صورتی همگن گوییم که G بر X بطور متعدی عمل کند.

۷.۴.۱ مثال. گروه متعامد $O(n;\mathbb{R})$ بر کرهٔ واحد $\mathbb{S}^{n-1}$ در $\mathbb{R}^n$ بطور متعدی عمل می‌کند. در کل، هر گروهی بر هر یک از مدارهایش بطور متعدی عمل می‌کند.

به صورت ذیل می‌توان به یکی از بنیادی‌ترین مثالها از G–مجموعه‌های همگن دست یافت: یک گروه G و زیرگروهی از آن که بر G با انتقالهای از راست عمل می‌کند را در نظر بگیرید. در این صورت می‌توانیم عمل G بر مجموعهٔ مداری G/H را تعریف کنیم. انتقال چپ $L_g : G \longrightarrow G$ در رابطهٔ $L_g(\gamma H) = g\gamma H$ صدق می‌کند و بنابراین $\sigma_g(\gamma H) := g\gamma H$ نگاشتی σ_g از G/H به G/H تعریف می‌کند. σ نگاشت مورد لزوم است، که G/H را به یک G–مجموعه تبدیل می‌کند و به وضوح همگن است.

۸.۴.۱ یادداشت. گروه ایزوتروپی H در G/H خود H است.

نشان خواهیم داد که بازاء هر G–مجموعهٔ همگن دلخواه X، زیرگروهی H از G و یک هم ارزی $\varphi : G/H \longrightarrow X$ از G–مجموعه‌ها وجود دارد، به گونه‌ای که G/H به تعبیر بالا یک G–مجموعه است.

ابتدا فرض کنیم X یک G–مجموعهٔ دلخواه است و $x_\circ \in X$. گیریم $H = G_{x_\circ}$ و نگاشت $\varphi : G/H \longrightarrow \Omega(x_\circ) = X$ را به صورت $\varphi(gH) := g.x_\circ$ تعریف می‌کنیم.

۹.۴.۱ لم. φ اکوئی‌واریان و یکبیک است.

اثبات: بازاء هر $\gamma \in G$ ای داریم $(\tau_\gamma \circ \varphi)(gH) = \tau_\gamma(gx_\circ) = \gamma g x_\circ$ و $(\varphi \circ \tau_\gamma)(gH) = \varphi(\gamma g H) = \gamma g x_\circ$ و بنابراین $\tau_\gamma \circ \varphi = \varphi p \sigma_\gamma$. به عبارت دیگر، φ اکوئی‌واریان می‌باشد. برای نشان دادن یکبیک بودن φ، فرض کنیم $g_1, g_2 \in G$ و $\varphi(g_1 H) = \varphi(g_2 H)$. این یعنی $g_1 x_\circ = g_2 x_\circ$ یا $g_2^{-1} g_1 x_\circ = x_\circ$ و بنابراین $g_2^{-1} g_1 \in H$. اما از $g_1 \in g_2 H$ ایجاب می‌شود $g_1 H = g_2 H$ و کار تمام است. □

اگر X همگن باشد، آنگاه $\Omega(x_\circ) = X$ و φ هم ارزی است. ثابت کرده‌ایم.

۱۰.۴.۱ گزاره. گیریم X یک G–مجموعهٔ همگن است و $x_\circ \in X$. گیریم H زیرگروه ایزوتروپی $x_\circ$ است و G–عمل G بر G/H با انتقالهای از چپ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، نگاشت $\varphi : G/H \longrightarrow X$ با ضابطهٔ $\varphi(gH) = gx_\circ$ یک هم ارزی بین G–مجموعه‌ها است. □

گروه H به نقطهٔ انتخابی $x_\circ \in X$ بستگی دارد، اما با توجه به متعدی بودن عمل، دستهٔ تزویجی زیرگروه H خوشتعریف است.

این فصل را با ذکر نکاتی بر اعمال مؤثر متعدی بر مجموعه‌ها به پایان می‌بریم. نظریه گزارهٔ قبل، بدون کاسته شدن از کلیت بحث می‌توانیم G–مجموعه‌ها را تنها از نوع G/H، که H زیرگروهی از G می‌باشد. هستهٔ هومومورفیسم K عمل G بر G/H مقطع زیرگروههای ایزوتروپی است و بنابراین:

$$K = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}, \tag{۱۵.۱}$$

زیرگروهی ناوردا (نرمال) از G است که در H قرار دارد. بالعکس، اگر L زیرگروهی نرمال از G با $L \subseteq H$ باشد، آنگاه $L \subseteq K$، زیرا با توجه به اینکه $Lg = gL$ و پس $l' \in L$ ای هست که $lgH = gl'H$ و بعلاوه $lgH = gH$.

۱۱.۴.۱ گزاره. گیریم G یک گروه است و H زیرگروهی از آن است و G–عمل G/H بر G بوسیلهٔ انتقالهای از چپ را در نظر می‌گیریم. هستهٔ هومومورفیسم تعریف شده توسط این عمل $\sigma : G \longrightarrow \mathrm{Bij}(G/H)$ بزرگترین زیرگروه نرمال از G واقع در H است و آنرا به صورت زیر می‌توان بیان نمود:

$$K = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}. \tag{۱۶.۱}$$

۱۲.۴.۱ نتیجه. G وقتی و تنها وقتی بر G/H بطور متعدی عمل می‌کند که H هیچ زیرگروه نرمالی از G بجز $\{e\}$ را در بر نداشته باشد. □

۱۳.۴.۱ تمرین. تأثیر انتخاب نقطهٔ $x_\circ \in X$ در گزارهٔ ۱۰.۴.۱ را بررسی کنید.

فصل ۲

G–فضا

۱.۲ تعریف و مثال

۱.۱.۲ تعریف. گروه توپولوژیک G عبارت است از یک گروه همراه با ساختار یک فضای برداری بر آن، به گونه‌ای که نگاشتهای زیر پیوسته‌اند:

$$\begin{array}{ccccccc} G\times G & \longrightarrow & G & \qquad & G & \longrightarrow & G \\ (g_۱,g_۲) & \longmapsto & g_۱g_۲ & \qquad & g & \longmapsto & g^{-۱} \end{array} \tag{۱.۲}$$

۲.۱.۲ تعریف. گیریم G یک فضای توپولوژیک است. G'–فضا X عبارت است از یک فضای توپولوژی که نسبت به یک نگاشت $\tau : G\times X \longrightarrow X$، G–مجموعه است. بعلاوه، فرض می‌شود که این نگاشت τ پیوسته است. زوج مرتب (G,X) را گروه تبدیلات توپولوژیک می‌نامند.

روشن است که گروه G بر X توسط همومورفیسمها عمل می‌کند و بنابراین X یک G–شیء در کاتگوری فضاهای توپولوژیک است.

گیریم G و G' گروه توپولوژیک هستند.

۳.۱.۲ تعریف. همومورفیسم $\rho : G \longrightarrow G'$ بین گروههای توپولوژی عبارت است از یک همومورفیسم بین گروهها که همزمان پیوسته است.

گیریم X یک G–فضا و X' یک G'–فضا است و $\rho : G \longrightarrow G'$ همومورفیسم است.

۴.۱.۲ تعریف. نگاشت ρ–اکویی واریان $\varphi : X \longrightarrow X'$ عبارت است از یک نگاشت ρ–اکویی واریان به تعبیر در تعریف ۱.۲.۱ که پیوسته است.

نگاشت φ دیاگرام زیر را تعویض پذیر می‌سازد و پیوسته است، پس بنا به خاصیت عام توپولوژی حاصل ضربی، نگاشت $\rho\times\varphi$ نیز پیوسته است:

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ G' \times X' \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

هم ارزی بین G–فضاهای X و X' عبارت است از یک هم ارزی $\varphi : X \longrightarrow X'$ بین G–مجموعه‌ها که هومومرفیسم نیز هست.

۵.۱.۲ مثال. گیریم G یک گروه توپولوژیک است. عمل G بر G با استفاده از انتقالهای از راست و یا چپ، G را به یک G–فضا تبدیل می‌کند. عمل G با اتومورفیسمهای درونی برخود G نیز، آنرا به یک G–فضا تبدیل می‌کند.

۶.۱.۲ یادداشت. گیریم X یک فضای توپولوژیک و G گروه هومومرفیسمهای آن است. در این صورت، توپولوژی گسسته بر G، موجب می‌شود تا X یک G–فضا باشد.
گیریم X یک G–فضای هاوسدورف و فشرده است. گروه $\mathrm{Aut}X$ هومومرفیسمهای با توپولوژی باز — فشرده را در نظر بگیرید. می‌توان ثابت کرد که $\mathrm{Aut}X$ یک گروه توپولوژیک است و نگاشت $G \times X \longrightarrow X$ پیوسته می‌باشد.

۲.۲ فضای مداری

گیریم G یک گروه توپولوژیک است و X یک G–فضا می‌باشد. مجموعهٔ مدارات X/G و نگاشت کانونی $\pi : X \longrightarrow X/G$ را در نظر بگیرید. توپولوژی خارج — قسمتی بر X/G قوی‌ترین توپولوژی بر X/G است که نسبت به آن π_X پیوسته می‌باشد. مجموعه‌های باز در X/G عبارت از مجموعه‌های باز اشباع شده در X می‌باشد.

۱.۲.۲ تعریف. فضای مداری X/G نظیر به G–فضای مفروض X عبارت است از مجموعهٔ مدارات به همراه توپولوژی خارج قسمتی.

۲.۲.۲ گزاره. نگاشت $\pi_X : X \longrightarrow X/G$ باز است. توپولوژی بر X/G این طور توصیف می‌گردد که توپولوژی منحصر بفردی بر X/G است که نسبت به آن نگاشت π_X پیوسته و باز می‌باشد.

۳.۲.۲ یادداشت. گیریم $M \subseteq X$ باز است. $\tau_g(M)$ باز است و بنابراین $\Omega(M) = (\pi_X^{-1} \circ \pi_X)(M)$ زیرا اجتماعی از مجموعه‌های $\tau_g(M)$ می‌باشد. اما این بدان معنی است که بنا به تعریف توپولوژی خارج قسمتی، $\tau_X(M)$ باز است. برای اثبات گزارهٔ دوم، نگاشتی کلی‌تر $\varphi : X \longrightarrow Y$ از X به Y در نظر می‌گیریم. هر دو توپولوژی بر Y باعث می‌شوند تا φ پیوسته و نیز باز باشد، الزاماً منطبق هستند. چون $\mathcal{O}$ نسبت به توپولوژی اول در Y باز است، $\varphi^{-1}(\mathcal{O})$ در X باز می‌باشد و لذا $\mathcal{O} = \varphi(\varphi^{-1}(\mathcal{O}))$ در توپولوژی دوم هم باز است.

۴.۲.۲ مثال. گیریم G گروه توپولوژی و H زیرگروهی از G با توپولوژی نسبی است. عمل H بر G توسط انتقالهای از راست، G را به یک H فضا تبدیل می‌کند. نگاشت $\pi_G : G \longrightarrow G/H$ (کانونی) بروی فضای مداری پیوسته و باز است.

توپولوژی خارج قسمتی بر X/G را به این صورت می‌توان مشخص کرد: گیریم R یک فضای توپولوژی دلخواه است. نگاشت $\psi \mapsto \psi \circ \pi$ که نگاشتهای پیوستهٔ از X/R به R را بروی نگاشتهای پیوستهٔ ناوردا از X به R می‌نگارد، یک به یک است.

۵.۲.۲ گزاره. گیریم G و G' گروه توپولوژیکند، $\rho : G \longrightarrow G'$ یک همورفیسم و X و X' بترتیب G–فضا و G'–فضا هستند. هر نگاشت ρ–اکویی واریان $\varphi : X \longrightarrow X'$ یک و تنها یک نگاشت پیوسته $\widetilde{\varphi}: X/G \longrightarrow X'/G'$ چنان القاء می‌کند، که نسبت به آن دیاگرام زیر تعویض پذیر است:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & X' \arrow[d, "\pi_{X'}"] \\
X/G \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & X'/G'
\end{tikzcd}$$

۶.۲.۲ یادداشت. کافی است پیوستگی $\widetilde{\varphi}$ را نشان دهیم. اما نظر به گزارهٔ ؟؟، این مطلب نتیجه‌ای از پیوستگی $\pi_{X'} \circ \varphi$ می‌باشد.

۷.۲.۲ تمرین. یک G–فضا X با عملی متعدی از G بر X در نظر بگیرید. فرض کنید $x_0 \in X$ و H گروهن ایزوتروپی x_0 می‌باشد. همانند در گزارهٔ ۱۰.۴.۱ نگاشت $\varphi : G/H \longrightarrow X$ را تعریف می‌کنیم. این نگاشت یک هم ارزی پیوسته بین G–مجموعه‌ها است، ولی لزومی ندارد که هومورفیسم باشد. مثال نقض ذیل از بورباکی اقتباس شده است:

گیریم $\mathbb{R}$ به صورت $\tau_\lambda(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha(\lambda), x_2 + \alpha(\theta\lambda))$ بر مجموعهٔ $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ عمل کند، که $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ هومورفیسمی کانونی است و θ عددی گنگ می‌باشد و بعلاوه $(x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$. با ثابت نگاشت داشتن $(x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$ نگاشت $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}^2$ را همچون در لم ۹.۴.۱ تعریف می‌کنیم، که پیوسته و یک به یک می‌باشد. تصویر $X = \Omega(x_1, x_2)$ همراه با توپولوژی نسبی را در نظر می‌گیریم. $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ دوسویی و پیوسته است، ولی هومورفیسم نیست. چون X در $\mathbb{T}^2$ چگال است و نمی‌تواند با کل فضای $\mathbb{R}$ هومورف باشد.

۸.۲.۲ تمرین. گیریم G یک گروه توپولوژی و H زیرگروه بازی از آن است. در این صورت H در G بسته است. (افراز G توسط عناصر G/H را در نظر بگیرید.)

۹.۲.۲ تمرین. گیریم G گروه توپولوژی همبند است و U همسایگی‌ای از e می‌باشد. همسایگی $V := U \cap U^{-1}$ این خواص را دارد: $V \subseteq U$ و $V^{-1} = V$. مجموعه‌های $V^n = \{g_1 \cdots g_n | g_i \in V, i = 1, \cdots, n\}$ را در نظر بگیرید. اجتماع $V^\infty = UV^n$ گروه است، گروه تولید شده توسط V. چون $e \in V \subseteq^\infty$، پس e یک نقطهٔ درونی V^∞ است. بنابراین، هر نقطه از V^∞ یک نقطهٔ درونی است، چرا که انتقالهای از چپ، هومورفیسم‌های حافظ V^∞ هستند. V^∞ زیرگروهی باز از G است و بنابراین بسته می‌باشد. چون G همبند است، این نشان می‌دهد که $V^\infty = G$. این ثابت می‌کند که G با هر همسایگی دلخواه V از e تولید می‌گردد.

۱۰.۲.۲ تمرین. گیریم G گروه توپولوژی است و G_0 مؤلفهٔ همبندی عنصر همانی $e \in G$ می‌باشد: مؤلفهٔ همانی G. نشان دهید که G_0 زیرگروهی بسته و ناوردا از G می‌باشد.

فصل ۳

G–منیفلد

در این فصل مفاهیم بنیادی این درسها مطرح می‌گردد. در فصلهای بعدی G–منیفلدها و گروههای لی را با جزئیات مطالعه می‌کنیم.

۱.۳ تعریف و مثالهایی از گروههای لی

منیفلد به معنی منیفلد هاوسدورف است، نه الزاماً همبند.

۱.۱.۳ تعریف. گروه لی عبارت است از یک گروه G همراه با ساختار یک منیفلد تحلیلی به گونه‌ای که نگاشتهای زیر تحلیلی‌اند:

$$\begin{array}{ll} G\times G\longrightarrow G & G\longrightarrow G \\ (g_1,g_2)\longmapsto g_1g_2 & g\longmapsto g^{-1} \end{array} \qquad (۱.۳)$$

معمولاً منظور ما از دیفرانسیلپذیری، C^∞ بودن است. اگر در تعریف بالا بجای تحلیلی بودن، شرط دیفرانسیلپذیری را قرار دهیم، هیچ تغییری صورت نخواهد گرفت؛ به عبارت دیگر، تحلیلی بودن خود به خود نتیجه می‌گردد (صفحهٔ ۱۹۱ از کتاب پنترياگين [۱۴] را ملاحظه کنید). البته، عملاً در قالب موارد ما تنها از شرط دیفرانسیلپذیری گروه لی استفاده می‌کنیم.

در تعریف بالا، تحلیلی بودن منیفلد به معنی تحلیلی بودن حقیقی است. چنانچه آنرا با تحلیلی بودن مختلط عوض کنیم، به مفهوم گروه لی مختلط دست می‌یابیم.

هر دو مؤلفهٔ G_1، G_2 گروه لی دلخواه G بطور تحلیلی دیفئومورفند. زیرا اگر $g_1\in G_1$ و $g_2\in G_2$ آنگاه نگاشت $g\mapsto g_2g_1^{-1}g$ دیفئومورفیسم است و G_1 را بروی G_2 می‌نگارد. بنابراین، همهٔ مولفه‌های همبندی G همبند هستند و لذا سخن گفتن از بعد گروه لی با معنی است.

۲.۱.۳ مثال. گروه جمعی $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$، $\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$، $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$، گروه تحلیلی ماتریسهای با n سطر و دترمینان مخالف صفر.

۳.۱.۳ مثال. گیریم G گروه لی و TG کلاف مماس به آن است. در این صورت TG گروه لی است. این از این واقعیت نتیجه می‌گردد که فانکتور T ضرب داخلی را حفظ می‌کند.

۴.۱.۳ مثال. گیریم G_1 و G_2 گروه لی هستند. در این صورت حاصلضرب مستقیم $G_1 \times G_2$ گروه لی است.

۵.۱.۳ تعریف. گیریم G_1 و G_2 گروه لی‌اند. منظور از یک هومومورفیسم گروهای لی ρ از G_1 به G_2، هومومورفیسمی تحلیلی از گروه G_1 به G_2 است.

۶.۱.۳ یاداشت. توجه شود که در اغلب نوشتجات، اصطاح هومورفیسم به معنی هومورفیسم تحلیلی بین گروهها است، طوری که نگاشت $\rho : G \longrightarrow \rho(G)$ باز است.

۷.۱.۳ مثال. گیریم V یک فضای برداری n–بعدی بر $\mathbb{R}$ است. با انتخاب یک پایه $e_1, \cdots, e_n$ برای V، ایزومورفیسمی از گروه $\mathrm{GL}(V)$ به روی $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ بدست می آید، که امکان صدور ساختار گروه لی از $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ به گروه اتومورفیسمهای خطی $\mathrm{GL}(V)$ فضای برداری V با ایزومورفیسمهایی از $\mathrm{GL}(V)$ به $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ نظیرند که اختلاف آنها در یک اتومورفیسم درونی $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ می‌باشد.

۸.۱.۳ مثال. گیریم G گروه لی و TG کلاف مماس با ساختار گروه لی‌اش باشد (مثال ۳.۱.۳). فضای مماس T_eG به G در عنصر همانی e گروه لی G و نگاشت یک به یک طبیعی $j : T_eG \longrightarrow TG$ را در نظر بگیرید. اگر T_eG با ساختار گروهی جمع توأم شود، یک گروه لی خواهد بود و بعلاوه نگاشت j هومورفیسمی بین گروههای لی خواهد بود. تصویر طبیعی $p : TG \longrightarrow G$ که هر بردار مماس را به مبدأش می‌نگارد، نیز هومورفیسم گروههای لی می‌باشد. دنبالهٔ:

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{T_eG} \xrightarrow{\mathrm{j}} \mathrm{TG} \xrightarrow{\mathrm{p}} \mathrm{G} \longrightarrow \{\mathrm{e}\} \qquad (۲.۳)$$

دقیق است. بعلاوه، یک تجزیهٔ صادق در $p \circ s = 1_G$ برای p وجود دارد، نگاشت یک به یک طبیعی $j : G \longrightarrow TG$.

۹.۱.۳ تمرین. گیریم G گروه توپولوژی ۱–موضعاً اقلیدسی است؛ یعنی، یک همسایگی هومورف با زیر مجموعه‌ای باز از فضای اقلیدسی برای e دارد. مؤلفهٔ همانی $G_\circ$ گروه G با پایهٔ شمارا است. بنابراین G پیرافشرده است.

۱۰.۱.۳ تمرین. هر گروه لی موضعاً همبند است.

۱۱.۱.۳ تمرین. مؤلفهٔ همانی $G_\circ$ هر گروه لی، زیرگروهی باز از G می‌باشد.

۲.۳ تعریف و مثالهایی از G–منیفلد

۱.۲.۳ تعریف. گیریم G گروه لی است. منظور از یک G–منیفلد X، منیفلدی دیفرانسیلپذیر X است که نسبت به نگاشتی دیفرانسیلپذیر $G \times X \longrightarrow X$ یک G–مجموعه است. در این صورت زوج (G, X) را گروه تبدیلات لی نیز می‌نامند.

گروه G با دیفئومورفیسمها بر X عمل می‌کند و بنابراین یک G–شیء در کاتگوری – منیفلدهای دیفرانسیلپذیر است. بعلاوه، دیفرانسیلپذیری نگاشت $G \times X \longrightarrow G$ الزامی است.

گیریم X یک G–منیفلد و X' یک G'–منیفلد و $\rho : G \longrightarrow G'$ هومورفیسمی بین گروههای لی است.

۲.۲.۳ تعریف. نگاشت $\varphi : X \longrightarrow X'$ را در صورتی ρ–اکویی واریان گویند که به تعبیر در تعریف ۱.۲.۱ ρ–اکویی واریان و دیفرانسیلپذیر باشد.

۳.۲.۳ مثال. $\mathbb{R}$–منیفلدها در نظریهٔ G–منیفلدها نقشی اساسی ایفاء می‌کنند. آنها اسمی خاص برای خود دارند: گروههای یک پارامتری از تبدیلات. در فصل ۵ به مطالعهٔ گروههای یک پارامتری از تبدیلات خواهیم پرداخت.

۴.۲.۳ مثال. عمل گروه لی دلخواه G بر منیفلد زمینه‌اش بتوسط انتقالهای از چپ، G را به یک G–منیفلد مبدل می‌کند. عمل G بر خودش توسط اتومورفیسمهای درونی نیز موجب می‌گردد که G یک G–منیفلد بگردد.

۵.۲.۳ مثال. گیریم V یک فضای برداری حقیقی و با بعد متناهی است. در این صورت $\mathrm{GL}(V)$ یک گروه لی است. گیریم G گروه لی و $\tau : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ هomomorfیسم باشد. در این صورت τ را نمایشی برای G در V می‌نامیم.

۶.۲.۳ یادداشت. همانطور که در پایان بخش ۱.۲ متذکر شدیم، در مورد G فضاهای موضعاً فشرده X، پیوستگی نگاشت $G \times X \longrightarrow X$ را به صورت پیوستگی همومورفیسم $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ تعریف کنندهٔ عمل می‌توان توضیح داد، مشروط به آنکه $\mathrm{Aut}(X)$ را با توپولوژی باز – فشرده همراه کنیم. همین موضوع را در مورد دیفرانسیلپذیری نگاشت $G \times X \longrightarrow X$ برای G–فضای X می‌توان مطرح کرد. اما برای این منظور لازم است که قبلاً گروه $\mathrm{Aut}(X)$ اتومورفیسمهای X منیفلد باشد (که بر یک فضای برداری توپولوژیک باندازهٔ کافی کلی مدل شده است) و این امر موجب مشکلاتی می‌گردد. این موضوع می‌تواند به بخشهای بسیار منجر گردد و از آن پرهیز می‌کنیم.

۷.۲.۳ مثال. گیریم X یک G–منیفلد است و T فانکتوری است که هر منیفلد دیفرانسیلپذیر را به کلاف مماسش می‌نگارد. در این صورت TX یک TG–منیفلد است، زیرا T ضرب مستقیم را حفظ می‌کند. چون (تمرین ۸.۱.۳) G زیرگروهی از TG است، پس TX هم یک G–فضا است. این موضوع در بسیاری مفاهیم در نظریهٔ گروههای تبدیلات بکار می‌آید.

۸.۲.۳ مثال. گیریم G و G' گروه لی اند و G' نسبت به عمل $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G')$ یک G–منیفلد است. در این صورت ضرب نیم – مستقیم $G' \propto_\tau G$ تعریف شده در مثال ۷.۱.۱ یک ساختار تحلیلی بر منیفلد حاصلضربی $G' \times G$ است. این موضوع تعمیم مثال ۴.۱.۳ است که به عمل بدیهی G بر G' متناظر بود.

گیریم V یک فضای برداری حقیقی با بعد متناهی است. گروه حرکات آفین در V، که حاصلضرب نیم – مستقیم $V \propto \mathrm{GL}(V)$ نسبت به عمل طبیعی $\mathrm{GL}(V)$ بر V است، بنا به مثال قبل یک گروه لی است.

۹.۲.۳ مثال. گیریم G گروه لی است و دنبالهٔ دقیق در مثال ۷.۱.۳ را در نظر می‌گیریم:

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{T_eG} \xrightarrow{\mathrm{j}} \mathrm{TG} \xrightarrow{\mathrm{p}} \mathrm{G} \longrightarrow \{\mathrm{e}\} \tag{۳.۳}$$

تجزیهٔ $s : G \longrightarrow TG$ حاصل از نگاشت یک به یک طبیعی از G به TG، موجب عمل G بر گروه جمعی T_eG به صورت $\tau_g := \mathrm{Inn}_{s(g)}|_{T_eG}$ می‌گردد (مثال ۷.۱.۱):

$$\tau_g : \boldsymbol{v}_e \longmapsto T_{\tau_{s(g)}}(\boldsymbol{v}_e) \qquad \mathrm{Inn}_{s(g)} : h \longmapsto s(g).h.s(g)^{-1} \tag{۴.۳}$$

این نمایش G در T_eG در نظریهٔ گروههای لی نقش مهمی را ایفاء می‌کند و به آن نمایش الحاقی گفته می‌شود. TG با ضرب نیم مستقیم $T_eG \propto_\tau G$ نسبت به این عمل τ ایزومورف است.

فصل ۴

میدان برداری

این فصل را با وارد شدن به جزئیات نظریهٔ G–منیفلدها و گروههای لی آغاز می‌کنیم. جبر لی یک گروه لی را تعریف نموده و خواص اصلی منتج از این ساخت را مطرح می‌کنیم.

۱.۴ توابع حقیقی

از این پس از تکرار صفت دیفرانسیلپذیر خودداری نموده و فرض می‌کنیم همهٔ منیفلدها و نگاشتها دیفرانسیلپذیرند.

گیریم X منیفلد است. در این صورت مجموعهٔ توابع با مقدار حقیقی بر X را با نماد $\mathcal{C}^\infty(X)$ نشان می‌دهیم. چنانچه اعمال بر $\mathcal{C}^\infty(X)$ را نقطه به نقطه تعریف می‌کنیم، $\mathcal{C}^\infty(X)$ یک حلقهٔ تعویض پذیر با عنصر همانی خواهد شد. بعلاوه، با یکی گیری مجموعهٔ توابع ثابت بر X با اعضاء $\mathbb{R}$، می‌توان X را بعنوان یک جبر بر $\mathbb{R}$ تلقی نمود.

گیریم X' منیفلد دیگری است. نگاشت دلخواه $\varphi : X \longrightarrow X'$ موجب نگاشتی با ضابطهٔ $\varphi^*(f') := f' \circ \varphi$ (که $f \in \mathcal{C}^\infty(X')$) از $\mathcal{C}^\infty(X')$ به $\mathcal{C}^\infty(X)$ می‌گردد. در این صورت φ^* هومومورفیسم حلقه‌ها است و حافظ یک نیز هست. چنانچه ساختار جبری بر $\mathcal{C}^\infty(X)$ و $\mathcal{C}^\infty(X')$ را در نظر بگیریم، در این صورت φ^* هومومورفیسمی حافظ عنصر یکانی از جبر $\mathcal{C}^\infty(X')$ به جبر $\mathcal{C}^\infty(X)$ خواهد بود. به این ترتیب، تناظرهای $X \longmapsto \mathcal{C}^\infty(X)$ و $\varphi \longmapsto \varphi^*$ یک فانکتور کنترا واریان $C : \mathbf{Man} \longrightarrow \mathbf{Rin}$ از کاتگوری $\mathbf{Man}$ منیفلدهای دیفرانسیلپذیر به کاتگوری $\mathbf{Rin}$ حلقه‌های تعویض پذیر یکدار تعریف می‌کند. این فانکتور بتوی کاتگوری $\mathbb{R}$–جبرهای تعویض پذیر یکدار نیز قابل تصور است.

حال فرض کنیم X یک G–منیفلد است. بر طبق گزارهٔ ۹.۱.۱ و یادداشت ۱۰.۱.۱، $\mathcal{C}^\infty(X)$ یک G°–حلقه است؛ یعنی G بر آن از راست عمل می‌کند. اگر $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ عمل مفروض باشد، عمل القایی را با نماد $\tau^* : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^\infty(X))$ نشان می‌دهیم. باز تعریف را تکرار می‌کنیم: بازاء هر $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ ای $\tau_g^* f := f \circ \tau_g$.

۱.۱.۴ تمرین. گیریم X و X' منیفلدند و $\mathcal{C}^\infty(X)$ و $\mathcal{C}^\infty(X')$ مجموعهٔ توابع با مقدار حقیقی نظیرند. نشان دهید که هر همورفیسم حلقه‌ای $\mathcal{C}^\infty(X') \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$ یک هومومورفیسم بین $\mathbb{R}$–جبرها است.

۲.۱.۴ تمرین. گیریم وضعیت مثل در تمرین ۱.۱.۴ است و $\varphi_i : X \longrightarrow X'$ (که $i = ۱, ۲$) نگاشتهایی با $\varphi_۱^* = \varphi_۲^*$ هستند. نشان دهید که در این صورت $\varphi_۱ = \varphi_۲$.

۳.۱.۴ تمرین. فرض کنیم وضعیت همچون در تمرین ۱.۱.۴ است و نگاشت:

$$\mathrm{Hom}(X, X') \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^\infty(X'), \mathcal{C}^\infty(X)) \qquad (۱.۴)$$

با ضابطهٔ $\varphi \longmapsto \varphi^*$ از مجموعهٔ نگاشتهای $X \longrightarrow X'$ به مجموعهٔ همومورفیسمهای حلقه‌ای $\mathcal{C}^\infty(X') \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$ را در نظر بگیرید. تمرین ۲.۱.۴ نشان می‌دهد که این نگاشت یک به یک است. نشان دهید که در مورد منیفلدهای پیرا فشردهٔ X و X'، نگاشت مذکور دوسویی است. (راهنمایی: سعی کنید از نظریهٔ دوگانی برای Λ−مدولهای برحلقهٔ Λ، با در نظر گرفتن $\mathcal{C}^\infty(X)$ بعنوان فضای دوگانه X، استفاده کنید) این حکم موجب می‌گردد که بتوانیم نظریهٔ منیفلدهای دیفرانسیلپذیر را به شکل کاملاً جبری مطالعه کنیم.

۴.۱.۴ تمرین. وقتی و تنها وقتی منیفلد X همبند است که حلقهٔ $\mathcal{C}^\infty(X)$ به صورت حاصلضرب مستقیمی از حلقه‌های غیر بدیهی قابل تجزیه نباشد.

۲.۴ عملگر و میدان برداری

گیریم X منیفلد است و $\mathcal{C}^\infty(X)$ مجموعهٔ توابع با مقدار حقیقی بر X است و بعنوان یک فضای برداری حقیقی در نظر گرفته می‌شود.

۱.۲.۴ تعریف. منظور از عملگر A بر X، نگاشتی است $\mathbb{R}$−خطی به شکل $A : \mathcal{C}^\infty(X) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$.

۲.۲.۴ مثال. هر اتومورفیسم $\mathcal{C}^\infty(X)$ یک عملگر است. هر میدان برداری بر X یک عملگر است. بعلاوه، در کل هر عملگر دیفرانسیلپذیر بر X، یک عملگر است.

گیریم $\mathcal{O}(X)$ نمایشگر $\mathbb{R}$−جبر همه عملگرهای بر X است. اگر X' منیفلدی دیگر باشد و $\varphi : X \longrightarrow X'$ دیفئومورفیسم باشد، در این صورت φ ایزومورفیسمی $\varphi_* : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X')$ با ضابطهٔ کلی $\varphi_* A = \varphi^{*^{-1}} \circ A \circ \varphi^*$ القاء می‌کند.

$$(\varphi_* A)(f) = \varphi^{*^{-1}}(A(\varphi^* f)) = \varphi^{*^{-1}}(A(f \circ \varphi)) = (A(f \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1} \qquad (۲.۴)$$

این تعریف به معنی تعویض‌پذیری دیاگرام زیر می‌باشد:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(X) & \xleftarrow{\varphi^*} & \mathcal{C}^\infty(X') \\ {\scriptstyle A}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_* A} \\ \mathcal{C}^\infty(X) & \xleftarrow{\varphi} & \mathcal{C}^\infty(X') \end{array} \qquad (۳.۴)$$

روشن است که تناظر $\varphi \mapsto \varphi_*$ از X به $\mathcal{O}(X)$ یک فانکتور کواریان $\mathcal{O} : \mathbf{Man}_{\mathrm{iso}} \longrightarrow \mathbf{Alg}_{\mathrm{iso}}$ از کاتگوری منیفلدها و دیفئومورفیسم‌ها به کاتگوری $\mathbb{R}$−جبرها و ایزومورفیسمهای جبری تعریف می‌کند.

حال فرض کنیم X یک G−منیفلد با همومورفیسم مربوطهٔ $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ است. در این صورت، بنا به گزارهٔ ۹.۱.۱، $\mathcal{O}(X)$ یک G−شیء در کاتگوری $\mathbb{R}$−جبرها است. بعلاوه عناصر ناوردا نسبت به این عمل یک $\mathbb{R}$−زیر جبر از $\mathcal{O}(X)$ به صورت زیر تشکیل می‌دهد:

یک A−جبر شرکتپذیر $\mathcal{O}$ بر حلقهٔ یکدار A را در نظر بگیرید. در این صورت، به شکل زیر یک ضرب جدید $[,] : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ می‌توان تعریف نمود:

$$[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1 \qquad (A_1 A_2 \in \mathcal{O}) \qquad (۴.۴)$$

این ضرب دو خطی است و در اتحادهای زیر صدق می‌کند:

۱) $[A, A] = 0$ به ازای هر $A \in \mathcal{O}$.

۲) $[A_۱, [A_۲, A_۳]] \neq [A_۲, [A_۳, A_۱]] + [A_۳, [A_۱, A_۲]] = 0$ به ازای هر $A_۱, A_۲, A_۳ \in \mathcal{O}$؛ (اتحاد ژاکوبی)

و به این ترتیب، $\mathcal{O}$ به یک جبر لی تبدیل می‌گردد:

۳.۲.۴ تعریف. A–مدول $\mathcal{O}$ بر حلقهٔ A همراه با نگاشتی خطی $[,] : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ که بازاء هر $A \in \mathcal{O}$ ای $[A, A] = 0$ و در اتحاد ژاکوبی صدق می‌کند را جبر لی بر A می‌نامیم.

۳.۲.۴ منظور از یک هomomorfیسم $h : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ بین جبرهای لی $\mathcal{O}$ و $\mathcal{O}'$ بر حلقهٔ A، یک نگاشت A–خطی صادق در شرط ذیل است:

$$h[A_۱, A_۲] = [hA_۱, hA_۲] \qquad (A_۱, A_۲ \in \mathcal{O}) \tag{۵.۴}$$

با داشتن یک A–جبر $\mathcal{O}$ می‌توانیم یک A–جبر لی به $\mathcal{O}$ نظیر کنیم. این ساخت فانکتوری است؛ یعنی $h : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ همومورفیسم بین A–جبرها باشد، آنگاه h همومورفیسم بین A جبرهای لی نظیر نیز خواهد بود. با اعمال این حکم در مورد $\mathbb{R}$–جبرهای از عملگرهای بر X، به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

۴.۲.۴ گزاره. گیریم X یک G–منیفلد و $\mathcal{O}(X)$ مجموعهٔ عملگرهای بر X است. با تعریف:

$$(\tau_g)_*(A) := (\tau_g^*)^{-۱} \circ A \circ \tau_g^* \qquad (A \in \mathcal{O}(X)) \tag{۶.۴}$$

یک G–مجموعه $\mathcal{O}(X)$ ساخته می‌شود. این عمل ساختار $\mathbb{R}$–جبر بر $\mathcal{O}(X)$ و همچنین ساختار شرکتپذیری $\mathbb{R}$–جبرهای لی را حفظ می‌کند. بویژه، عناصر ناوردا نسبت به این عمل یک $\mathbb{R}$–جبر و نیز یک $\mathbb{R}$–جبر لی تشکیل می‌دهند.

۵.۲.۴ گزاره. گیریم X یک G–منیفلد، X' یک G'–منیفلد و $\varphi : X \longrightarrow X'$ یک دیفئومورفیسم ρ – اکویی واریان نسبت به همومورفیسم $\rho : G \longrightarrow G'$ است. در این صورت $\varphi_* : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X')$ نسبت به اعمال تعریف شده در گزارهٔ ۴.۲.۴ ρ–اکویی واریان است. بعلاوه، φ_* عملگرهای G–ناوردا بر X را به عملگرهای $\rho(G)$–ناوردا بر X' می‌نگارد.

اثبات: این حکم از یادداشت ۱۰.۱.۱ و گزاره‌های ۹.۲.۱ و ۱۱.۲.۱ نتیجه می‌گردد. □

اکنون این بحث را به میدانهای برداری می‌بریم. گیریم X یک منیفلد و A یک میدان برداری بر X است. در این صورت، A نگاشتی از $\mathcal{C}^\infty(X)$ به $\mathcal{C}^\infty(X)$ است و در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $A(f_۱ + f_۲) = Af_۱ + A_۲$ به ازای هر $f_۱, f_۲ \in \mathcal{C}^\infty(X)$؛

۲) $A(f_۱ f_۲) = Af_۱.f_۲ + f_۱.Af_۲$ به ازای هر $f_۱, f_۲ \in \mathcal{C}^\infty(X)$؛ و

۳) $A(\lambda) = ۰$ به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$.

بنابراین، $A \in \mathcal{O}(X)$.

در واقع این خواص، میدانهای برداری را توصیف می‌کنند. ترکیب میدانهای برداری در $\mathcal{O}(X)$، میدان برداری نیست، ولی ترکیب آنها به کمک ساختار جبرلی حقیقی حاصل از $[,] : \mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ یک میدان برداری است. در اینجا (۲) اساسی است. بنابراین میدانهای برداری بر X تشکیل یک $\mathbb{R}$–جبر لی می‌دهند و لذا زیر جبر لی از $\mathcal{O}(X)$ هستند. این $\mathbb{R}$–جبر لی متشکل از میدانهای برداری بر X را با نماد $\mathcal{D}(X)$ نشان می‌دهیم.

گیریم X و X' منیفلد و $\varphi : X \longrightarrow X'$ دیفئومورفیسم است، در این صورت ایزومورفیسم $\varphi_* : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X')$ تعریف شده در ابتدای این بخش که از φ القاء می‌گردد، $\mathcal{D}(X)$ را به $\mathcal{D}(X)'$ می‌فرستد. بنابراین، با اعمال گزارهٔ ۴.۲.۴ داریم:

$$\begin{aligned} \tau_g^*(f) &= f \circ \tau_g \\ ((\tau_g)_* A)(f) &= ((\tau_g^*)^{-۱} \circ A)(f \circ \tau_g) = (A(f \circ \tau_g))\tau_{g^{-۱}} \\ ((\tau_g)_* A)(f)(x) &= g^{-۱}.A(f(g.x)) \end{aligned} \tag{۷.۴}$$

۶.۲.۴ نتیجه. گیریم X یک G–منیفلد و $\mathcal{D}(X)$، $\mathbb{R}$–جبر لی میدانهای برداری بر X است. با تعریف $(\tau_g)_*(A) := (\tau_g^*)^{-۱} \circ A \circ \tau_g^*$ برای $A \in \mathcal{D}(X)$ ها، $\mathbb{R}$–جبر لی $\mathcal{D}(X)$ نسبت به عمل $\tau_* : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{D}(X))$ یک $\mathbb{R}$–جبر لی می‌گردد. بویژه، عناصر ناوردای $\mathcal{D}(X)$ نسبت به این عمل، یک جبر لی حقیقی تشکیل می‌دهند. □

و گزارهٔ ۵.۲.۴ ایجاب می‌کند که:

۷.۲.۴ نتیجه. گیریم X یک G–منیفلد، X' یک G'–منیفلد و $\varphi : X \longrightarrow X'$ یک دیفئومورفیسم ρ–اکویی واریان نسبت به هومومورفیسم $\rho : G \longrightarrow G'$ است. در این صورت، $\varphi_* :\longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ نسبت به اعمال تعریف شده در نتیجهٔ ۶.۲.۴ یک ρ–اکویی واریان است. بعلاوه، φ_* میدانهای برداری G–ناوردای X را به میدانهای برداری $\rho(G)$–ناوردا بر X' می‌نگارد. □

به منظور استفادهٔ در آینده، شکل صریح تأثیر φ_* را مطرح می‌کنیم:

۸.۲.۴ لم. گیریم $\varphi : X \longrightarrow X'$ دیفومورفیسم است و $\varphi_* : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ ایزومورفیسم القایی بر میدانهای برداری است که به صورت $\varphi_* A = (\varphi^*)^{-۱} \circ A \circ \varphi^*$ تعریف می‌گردد. گیریم $x \in X$ و $f' \in \mathcal{C}^\infty(X')$. در این صورت، $(\varphi_* A)_{\varphi(x)} f' = A_x(\varphi^* f')$. اگر $T_x\varphi : T_x X \longrightarrow T_{\varphi(x)} X'$ نگاشت خطی القایی بین فضاهای مماس توسط φ باشد، آنگاه $(\varphi_* A)_{\varphi(x)} = \varphi_{*x} A_x$.

اثبات: بنا به تعریف φ_* داریم:

$$((\varphi_* A)f')(\varphi(x)) = \varphi^*((\varphi_* A)f')(x) = ((A\varphi^*)f')(x) \tag{۸.۴}$$

این به معنی $(\varphi_* A)_{\varphi(x)} f' = A_x(\varphi^* f')$. سمت راست دقیقاً تعریف $(T_x\varphi A_x)f'$ است و بنابراین $(\varphi_* A)_{\varphi(x)} = T_x\varphi A_x$.
□

۳.۴ جبر لی یک گروه لی

گیریم G گروه لی است.

۱.۳.۴ تعریف. جبر لی $L(G)$ گروه لی G عبارت است از $\mathbb{R}$–جبر لی میدانهای برداری ناوردا نسبت به عمل G بوسیلهٔ انتقالهای از چپ.

به بیان صریح‌تر، وقتی و تنها وقتی $A \in L(G)$ که بازاء هر $g \in G$ ای $(L_g)_* A = A$. بنا به نتیجهٔ ۶.۲.۴، $L(G)$ یک جبر لی است. حرف L ناوردایی از چپ را بعنوان یک فانکتور از نظریهٔ کاتگوری منتسب به سوفس لی، می‌توان قلمداد نمود.

لم زیر وجود بسیاری از میدانهای برداری ناوردای چپ بر یک گروه لی مفروض را نشان می‌دهد.

۲.۳.۴ لم. گیریم G گروه لی است، $L(G)$ جبر لی آن، G_e فضای مماس به G در عنصر همانی e و $A_e \in G_e$ است. در این صورت، یک و تنها یک $\tilde{A} \in L(G)$ وجود دارد که $\tilde{A}_e = A_e$؛ یعنی در e برابر A_e است.

اثبات: اگر $\tilde{A}$ وجود داشته باشد، آنگاه بازاء هر $g \in G$ ای $\tilde{A} = (L_g)_*\tilde{A}$ و بخصوص داریم $\tilde{A}_g = ((L_g)_*\tilde{A})_g$. نظریه لم ۸.۲.۴ این به معنی:

$$\tilde{A}_g = (L_g)_{*e}A_e \qquad (۹.۴)$$

است. این مطلب برای اثبات یکتایی $\tilde{A}$ کفایت می‌کند. اکنون $\tilde{A}$ را با این فرمول تعریف می‌کنیم. چون $L_e = ۱_G$، ملاحظه می‌کنیم که $\tilde{A}_e = A_e$. ناوردایی چپ $\tilde{A}$ از فرمول زیر نتیجه می‌شود:

$$((L_g)_*\tilde{A})_{g\gamma} = (L_g)_{*\gamma}(L_\gamma)\tilde{A}_\gamma = (L_g)_{*\gamma}(L_\gamma)_{*e}A_e = (L_{g\gamma})_{*e}A_e = \tilde{A}_{g\gamma}. \qquad (۱۰.۴)$$

کافی است نشان دهیم که خانوادهٔ $\{\tilde{A}_g\}_{g\in G}$ یک میدان برداری است (یعنی، میدان برداری — دیفرانسیلپذیر است)، که این به معنی $\tilde{A}(Z_G) \subseteq Z_G$. گیریم $f \in Z_G$. بنا به لم ۸.۲.۴:

$$((L_g)_*\tilde{A})_g f = A_e(L_g^* f) \qquad (۱۱.۴)$$

و بنابراین:

$$(\tilde{A}f)(g) = A_e(L_g^* f) \qquad (۱۲.۴)$$

گیریم $\gamma : I \longrightarrow G$ که I بازه‌ای از $\mathbb{R}$ و شامل ۰ است، یک منحنی دیفرانسیلپذیر در G باشد که $\frac{d}{dt}\gamma_t\big|_{t=۰} = A_e$. در این صورت:

$$A_e(L_g^* f) = \frac{\partial}{\partial t}\Big[(L_g^* f)(\gamma_t)\Big]_{t=۰} = \frac{\partial}{\partial t} f(g\gamma_t)\Big|_{t=۰} \qquad (۱۳.۴)$$

که نشان دهندهٔ $\tilde{A}f \in Z_G$ است. □

تناظر $\tilde{A} \longmapsto A_e$ در لم ۲.۳.۴ نگاشتی دوسویی $\# : T_eG \longrightarrow L(G)$ تعریف می‌کند که خواهیم دید، در اثر وجود (۱) یک ایزومورفیسم بین $\mathbb{R}$–فضاهای برداری است.

۳.۳.۴ قضیه. گیریم G گروه لی و $L(G)$ جبر لی آن است و T_eG فضای مماس به G در عنصر همانی است. در این صورت فرمول:

$$(\#(A_e))_g := (L_g)_{*e}A_e \qquad (g \in G, A_e \in T_eG) \qquad (۱۴.۴)$$

نگاشتی $\# : T_eG \longrightarrow L(G)$ تعریف می کند که ایزومورفیسم بین $\mathbb{R}$–فضاهای برداری است. □

این نگاشت # امکان حرکت دادن ساختار $\mathbb{R}$–جبر لی از $L(G)$ به T_eG را فراهم می‌سازد. به همین دلیل، اغلب T_eG را جبر لی G خطاب می‌کنند.

۴.۳.۴ نتیجه. گیریم G گروه لی n بعدی است. در این صورت جبر لی $L(G)$ نیز n بعدی است. □

بازاء هر $g \in G$ ای نگاشت $(L_g)_{*e} : T_eG \longrightarrow T_gG$ ایزومورفیسم است. کلی تر اینکه، بازاء هر $g_۱, g_۲ \in G$ ای نگاشتهای $(L_{g_۲})_{*e} \circ ((L_{g_۱})^{-۱})_{*e} : T_{g_۱}G \longrightarrow T_{g_۲}G$ دارای خواص مشروح در ذیل هستند:

۱) $P(g_۲, g_۳)P(g_۱, g_۲) = P(g_۱, g_۳)$ به ازای هر $g_۱, g_۲, g_۳ \in G$؛

۲) $P(y,g)=1_{T_gG}$ به ازای هر $g\in G$.

۵.۳.۴ تعریف. گیریم X منیفلد و $T(g_1,g_2):T_{g_1}(X)\longrightarrow T_{g_2}(X)$ بازاء هر $(g_1,g_2)\in X\times X$ ای نگاشت $\mathbb{R}$–خطی است و در روابط (۱) و (۲) از بالا صدق می‌کند و بعلاوه بازاء g_1 ای در g_2 دیفرانسیلپذیر است. در این صورت منیفلد X را توازی پذیر می‌نامیم.

نگاشتهای $P(g_1,g_2)$ الزاماً ایزومورفیسم هستند و سخن گفتن از بعد X با معنی است.

گیریم e نقطهٔ ثابتی از X است و A_{i_e} (که $i=1,\cdots,n$) پایه‌ای برای فضای برداری T_eX است. در این صورت $A_{i_g}:=P(e,g)A_{i_e}$ که $(i=1,\cdots,n)$ میدانهای برداری بر X تعریف می‌کنند و بعلاوه بازاء هر $g\in X$ ای یک پایه برای T_gX تشکیل می‌دهند.

۶.۳.۴ نتیجه. منیفلد زمینهٔ هر گروه لی G، توازی پذیر است. □

۷.۳.۴ مثال. $\mathbb{R}$ به همراه ساختار گروه لی جمعی‌اش را در نظر بگیرید. در این صورت $L(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$ بعنوان فضای برداری، زیرا بردار مماس به $\mathbb{R}$ در 0 به شکل $a\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0$ است که آنرا با a می‌توان یکی گرفت. با تعریف $[\lambda_1,\lambda_2]=0$ برای همهٔ $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ ها، تنها یک ساختار جبر لی ممکن بر $\mathbb{R}$ وجود دارد.

با همین استدلال در مورد گروه جمعی $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ داریم $LS^1\simeq\mathbb{R}$.

حال فرض کنیم V یک فضای برداری حقیقی است و $G=\mathrm{GL}(V)$. ابتدا یادآور می‌شویم که با در نظر گرفتن $\mathrm{GL}(V)\subseteq L(V)$ (که $L(V)$ جبراند و مورفیسمهای $\mathbb{R}$–خطی از V است)، بازاء هر $g\in G$ ای می‌توان T_gG را با $L(V)$ یکی گرفت. در این صورت، ضرب در $L(V)$ عبارت از تحدید نگاشت دو خطی $L(V)\times L(V)\longrightarrow L(V)$ تعریف کنندهٔ ضرب در $L(V)$ است. این مطلب نشان می‌دهد که بازاء هر $g\in\mathrm{GL}(V)$ و هر $A_\gamma\in T_\gamma G$ ای $(T_\gamma L_g)A_\gamma=gA_\gamma$. بنابراین:

۸.۳.۴ گزاره. پس از یکی گیری کانونی $L(\mathrm{GL}(V))$ با فضای مماس در عنصر همانی، به عنوان جبرهای لی داریم $L(\mathrm{GL}(V))=L(V)$، که $L(V)$ همراه با ساختار جبر لی معرفی شده در بخش ۲.۴ است (ساختار جبری طبیعی بر آن).

اثبات: گیریم $A_1,A_2\in L(\mathrm{GL}(V))$. به کمک چارت فراگیر حاصل از نشانندهٔ $\mathrm{GL}(V)\subseteq L(V)$ می‌توان فرمول زیر را مطرح نمود:

$$[A_1,A_2]_g=\left(\frac{d}{dg}A_{2_g}\right)(g)A_{1_g}-\left(\frac{d}{dg}A_{1_g}\right)(g)A_{2_g}\qquad(۱۵.۴)$$

نظر به اینکه $A_{i_g}=gA_{i_g}$، داریم:

$$\left(\frac{d}{dg}A_{i_g}\right)(g)A_{j_g}=A_{j_g}A_{i_g}\qquad(۱۶.۴)$$

که این به معنی:

$$[A_1,A_2]_g=A_{1_g}A_{2_g}-A_{2_g}A_{1_g}\qquad(۱۷.۴)$$

است. اما سمت راست دقیقاً همان تعویض گر $[A_1,A_2]$ در $L(V)$ است. اکنون بازاء $g=e$ حکم مورد نظر نتیجه می‌گردد. □

جبر لی $L(G)$ گروه لی G را با در نظر گرفتن عمل G بر G با انتقالهای از چپ تعریف نمودیم. با انجام همین کار توسط انتقالهای از راست، به یک جبر لی دیگر $R(G)$ می‌رسیم. یعنی: $R(G)$ جبر لی میدانهای ناوردای راست می‌باشد. می‌توان همانند قضیهٔ ۳.۳.۴ ایزومورفیسمی $T_eG \longrightarrow R(G)$ بین فضاهای برداری حقیقی تعریف نمود، و نتیجه گرفت که بعنوان فضاهای برداری حقیقی $L(G) \cong R(G)$. در بخش ٦.۴ خواهیم دید که یک ایزومورفیسم طبیعی $L(G) \cong R(G)$ بعنوان $\mathbb{R}$−جبر لی نیز وجود دارد.

۹.۳.۴ تمرین. گیریم G گروه لی و Z_G فضای برداری حقیقی مرکب از توابع با مقدار حقیقی بر G، $\mathcal{D}(G)$ جبر لی حقیقی مرکب از میدانهای برداری بر G و $L(G)$ جبر لی نظیر به G است. نشان دهید که در این صورت $\mathcal{D}(G) = Z_G \otimes_{\mathbb{R}} L(G)$.

۴.۴ تأثیر نگاشت بر عملگر و میدان برداری

در بخش ۲.۴ تأثیر دیفئومورفیسمها بر عملگرها را مشاهده کردیم. اکنون می‌خواهیم تأثیر نگاشتهای دلخواه (که مطابق فرض دیفرانسیلپذیرند) را بررسی کنیم.

گیریم X و X' منیفلد و A و A' عملگرهایی بترتیب بر X و X' هستند.

۱.۴.۴ تعریف. در صورتی می‌گوئیم A و A' نسبت به نگاشت $\varphi : X \longrightarrow X'$، φ−مرتبطند که دیاگرام ذیل تعویض پذیر باشد:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(X) & \xleftarrow{\varphi^*} & \mathcal{C}^\infty(X') \\ {\scriptstyle A}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle A'} \\ \mathcal{C}^\infty(X) & \xleftarrow{\varphi^*} & \mathcal{C}^\infty(X') \end{array} \qquad (۱۸.۴)$$

اگر φ دیفئومورفیسم باشد، آنگاه عملگرهای A و φ_*A، φ−مرتبطند. اما در حالت کلی، لزومی ندارد که بازاء هر A عملگر A' وجود داشته باشد که A و A'، φ−مرتبط باشند. بعلاوه A' در صورت وجود ممکن است منحصر بفرد نباشد.

۲.۴.۴ لم. گیریم $\varphi : X \longrightarrow X'$ نگاشت است. در این صورت:

۱) اگر A_i و A'_i (که $i = ۱, ۲$) عملگرهای φ−مرتبط باشند (بترتیب بر X و X')، آنگاه عملگرهای زیر دو به دو φ−مرتبط هستند:

$$A_۱ + A_۲ \text{ و } A'_۱ + A'_۲ \qquad A_۱ \circ A_۲ \text{ و } A_۱ \circ A_۲ \qquad [A_۱, A_۲] \text{ و } [A_۱, A_۲]$$

۲) اگر A و A' عملگرهای φ−مرتبط بترتیب بر X و X' باشند، آنگاه بازاء هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ای عملگرهای λA و $\lambda A'$ نیز φ−مرتبط هستند.

اثبات: ۱) گیریم $f' \in \mathcal{C}^\infty(X')$. در این صورت:

$$\varphi^*((A'_۱ + A_۲)f') = \varphi^*(A'_۱ f' + A'_۲ f') = \varphi^*(A_۱ f') + \varphi^*(A'_۲ f') \qquad (۱۹.۴)$$

$$= A_۱(\varphi^* f') + A_۲(\varphi^* f') = (A_۱ + A_۲)(\varphi^* f') \qquad (۲۰.۴)$$

درنتیجه $A_۱ + A_۲$ و $A'_۱ + A'_۲$ عملگرهای φ−مرتبطند. φ−مرتبط بودن $A_۱A_۲$ و $A'_۱A'_۲$ با مقایسهٔ دو دیاگرام تعریف کنندهٔ φ−مرتبط بودن A_i و A'_i نتیجه می‌گردد و حکم سوم نیز نتیجه‌ای از (۲) است.

۲) با توجه به مفروضات، داریم:

$$\varphi^*((\lambda A')f') = \varphi^*(\lambda(A'f')) = \varphi^*\lambda.\varphi^*(A'f') = \lambda.A(\varphi^*f') = (\lambda A)(\varphi^*f') \tag{۲۱.۴}$$

و برهان تمام است. □

این لم را می‌توان در حالت خاص میدانهای برداری تأثیر داد. به این ترتیب داریم:

۳.۴.۴ گزاره. گیریم X و X' منیفلد، $\varphi : X \longrightarrow X'$ نگاشت و A و A' میدانهای برداری بترتیب بر X و X' هستند. در این صورت، وقتی و تنها وقتی A و A'، $\varphi-$مرتبط هستند که بازاء هر $x \in X$ ای $\varphi_{*x}A_x = A'_{\varphi(x)}$.

اثبات: گیریم $f' \in \mathcal{C}^\infty(X')$. در این صورت بنا به تعریف $T_x\varphi$ داریم:

$$\varphi_{*x}(A_x)f' = A_x(\varphi^*f') = (A(\varphi^*f'))(x) \tag{۲۲.۴}$$

از سوی دیگر:

$$A'_{\varphi(x)}f' = (A'f')(\varphi(x)) = (\varphi^*(A'f'))(x) \tag{۲۳.۴}$$

و با مقایسه این دو حکم نتیجه می‌گردد. □

۵.۴ فانکتور L

قبلاً بازاء هر گروه لی مفروض G، یک جبر لی $L(G)$ تعریف نمودیم. دراین بخش برآنیم که این بحث را به فانتکوری از کاتگوری گروههای لی به کاتگوری جبرهای لی توسیع دهیم.

۱.۵.۴ لم. گیریم G و G' گروه لی، $\rho : G \longrightarrow G'$ هومومورفیسمی بین گروههای لی و $A \in L(G)$. در این صورت یک و تنها یک $A' \in L(G')$ وجود دارد که A و A'، $\rho-$مرتبطند.

اثبات: فرض کنید A' ای با خاصیت مذکور وجود داشته باشد. بنا به گزارهٔ ۳.۴.۴ داریم:

$$A'_{e'} = (\rho)_{*e}A_e \tag{۲۴.۴}$$

که e و e' عنصر همانی بترتیب G و G' هستند. بنا به لم ۲.۳.۴ تنها یک $\tilde{A}' \in L(G')$ وجود دارد طوری که $\tilde{A}'_{e'} = A'_{e'}$. این یکتایی را اثبات می‌کند. اکنون (بالعکس) A' را به صورت عنصر منحصر بفردی از $L(G')$ که در (۱) صدق می‌کند، تعریف می‌کنیم. کافی است نشان دهیم که A و A'، $\rho-$مرتبطند. در این صورت از $\rho \circ L_g = L_{\rho(g)} \circ \rho$ ایجاب می‌گردد:

$$\rho_{*g}A_g = \rho_{*g}(L_g)_{*e}A_g = (L_{\rho(g)})_{*e'}\rho_{*e}A_e = A'_{\rho(g)} \tag{۲۵.۴}$$

که با توجه به گزارهٔ ۳.۴.۴ همان حکم مورد نظر ما است. □

در اثبات لم ۱.۵.۴ تنها از تحدید ρ به یک همسایگی از $e \in G$ استفاده نمودیم. به همین دلیل طرح مفهوم مربوطه می‌تواند مفید باشد.

۲.۵.۴ تعریف. گیریم G و G' گروه لی هستند و U زیرمجموعه‌ای باز از $e \in G$ است. منظور از یک هومومورفیسم موضعی $G \longrightarrow G'$ تعریف شده بر U، نگاشتی است دیفرانسیلپذیر $\rho : U \longrightarrow G'$ که بازاء هر $g_۱, g_۲ \in U$ با $g_۱ g_۲ \in U$ در رابطهٔ $\rho(g_۱ g_۲) = \rho(g_۱)\rho(g_۲)$ صدق می‌کند.

تحدید هومومورفیسم $\rho : G \longrightarrow G'$ به هر همسایگی باز از $e \in G$، یک هومومورفیسم موضعی $G \longrightarrow G'$ است. چنانچه هر نگاشت را با تحدیدش بر زیرمجموعه‌های باز در دامنه‌اش یکی بگیریم، به یک کاتگوری مرکب از گروههای لی و هومومورفیسم‌های موضعی می‌رسیم. به هم ارزیهای در این کاتگوری، ایزومورفیسم‌های موضعی می‌گوئیم. به بیان دقیق‌تر:

۳.۵.۴ تعریف. دو گروه لی G و G' را در صورتی موضعاً ایزومورف گوئیم که همسایگیهای باز U و U' بترتیب از e و e' در G و G' و یک دیفئومورفیسم $\rho : U \longrightarrow U'$ دارای معکوس $\rho' : U' \longrightarrow U$ چنان یافت گردد که ρ و ρ' هومومورفیسم موضعی باشند.

۴.۵.۴ قضیه. گیریم G و G' گروه لی، U همسایگی بازی از e در G و $\rho : U \longrightarrow U'$ یک هومومورفیسم موضعی است. در این صورت، فرمول:

$$(L(\rho)A)_{e'} = \rho_{*e}(A_e) \qquad (A \in L(G)) \tag{۲۶.۴}$$

هومومورفیسمی $L(\rho) : L(G) \longrightarrow L(G')$ بین جبرهای لی تعریف می‌کند. دیاگرام زیر تعویض پذیر است که در آن $\#$ و $\#'$ ایزومورفیسم معرفی شده در قضیهٔ ۳.۳.۴ است.

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{\rho_{*e}} & T_{e'}G' \\ {\scriptstyle \#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \#} \\ LG & \xrightarrow[L(\rho)]{} & L(G') \end{array} \tag{۲۷.۴}$$

بعلاوه، بازاء هر $A \in L(G)$ ای میدانهای برداری $A\Big|_U$ و $L(\rho)A \in L(G')$، $\rho-$مرتبطند.

اثبات: تعویض پذیری دیاگرام:

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{L(\rho)} & L(G') \\ {\scriptstyle \subseteq}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \subseteq} \\ \mathcal{D}G & \xrightarrow[\rho^*]{} & \mathcal{D}(G') \end{array}$$

را باید نشان دهیم. گیریم $A \in L(G)$. در این صورت، داریم:

$$(L(\rho)A)_{\rho(g)} = ((L_{\rho(g)})_{*e} \circ \rho_{*e}A_e = \rho_*((L_g)_{*e}A_e) \tag{۲۸.۴}$$

از سوی دیگر $(\rho_* A)_{\rho(g)} = (T_g(\rho))A_g$ بنا به لم ۸.۲.۴. این حکم مورد نظر را نشان می‌دهد. □

چون $L(\rho)$ تنها وقتی معنی دارد که ρ دیفئومورفیسم باشد، در کل نمی‌توان $L(\rho)$ را بکمک ρ_* تعریف نمود.

۵.۵.۴ قضیه. گیریم $\mathbf{Lie}_{\text{loc}}$ کاتگوری گروههای لی و هومومورفیسمهای موضعی بین گروههای لی است، $\mathbf{LieAlg}$ کاتگوری $\mathbb{R}$–جبرهای لی و هومومورفیسمهای بین جبرهای لی است. در این صورت $G \longmapsto L(G)$ و $L(\rho) \longmapsto \rho$ یک فانکتور کواریان $L : \mathbf{Lie}_{\text{loc}} \longrightarrow \mathbf{LieAlg}$ تعریف می کند.

اثبات: این قضیه، براساس قضیهٔ ۴.۵.۴ بدیهی است. $\square$

فانکتور $G \longmapsto T_eG$ و $\rho \longmapsto \rho_{*e}$ را نیز می‌توانیم در نظر بگیریم. تعویض پذیری دیاگرام در قضیهٔ ۴.۵.۴ را می‌توان این طور توضیح داد که $\#$ یک تبدیل طبیعی از این فانتکتور بتوی L است و عملاً یک هم ارزی طبیعی است.

۶.۵.۴ نتیجه. جبر لی دو گروه موضعاً ایزومورف، ایزومورفند.

اثبات: $\mathcal{L}$ هم ارزیهای در $\mathbf{Lie}_{\text{loc}}$ را به هم ارزیهای در $\mathbf{LieAlg}$ می‌نگارد. اکنون ι را به نگاشت یک به یک طبیعی $G_\circ \longrightarrow G$ از مؤلفهٔ همبندی عنصر همانی بتوی G اعمال می‌کنیم، که موضعاً ایزومورفیسم است. بنابراین $L(G)_\circ \cong L(G)$. بنابراین، جبر لی $L(G)$ عملاً به $G_\circ$ مربوط می‌شود، یعنی، به یک همسایگی دلخواه از عنصر همانی (چرا؟). و برهان تمام است. $\square$

۷.۵.۴ مثال. هومومورفیسم کانونی $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ یک ایزومورفیسم موضعی است. بنابراین $L(\mathbb{R}) \cong L(\mathbb{T})$ که قبلاً می‌دانستیم.

۸.۵.۴ لم. اگر $\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ هومومورفیسم باشد، آنگاه $\rho = \circ$.

اثبات: چون $\mathbb{T}$ فشرده است، $\rho(\mathbb{T})$ در بازه‌ای بسته از $\mathbb{R}$ مانند I قرار دارد. فرض کنیم $t \in \mathbb{T}$ با $\rho(t) \neq \circ$. پس عدد مثبت و صحیح n ای وجود دارد که $n\rho(t) \notin I$. این تناقض است. $\square$

این اثبات می‌کند که هیچ هومومورفیسمی $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود ندارد که بتواند ایزومورفیسم $L(\mathbb{T}) = L(\mathbb{R})$ را القاء کند. در حالی که ایزومورفیسم طبیعی این کار را به شکل موضعی انجام می‌دهد.

۹.۵.۴ مثال. گیریم V یک $\mathbb{R}$–فضای برداری با بعد متناهی است و $\tau : G \longrightarrow G : (V)$ نمایشی برای گروه لی G در V است. در گزارهٔ ۸.۳.۴ اثبات نموده‌ایم که $L(V)$ جبر لی $\mathrm{GL}(V)$ است. ملاحظه می‌گردد که نگاشت τ دیفرانسیلپذیر است و هومومورفیسمی $L(\tau)$ از $L(G)$ به $L(V)$ القاء می‌کند.

۱۰.۵.۴ تعریف. گیریم Λ یک حلقه، V یک Λ–مدول و $L(V)$، Λ–جبر لی متشکل از همهٔ Λ–اندومورفیسم‌های V باشد. منظور از نمایش Λ–جبر O در V یک هومومورفیسم $\sigma : O \longrightarrow L(V)$ است. V را O–مدول نسبت به σ می‌نامیم.

با توجه به مثال ۹.۵.۴ نتیجه می‌شود که هر نمایش برای جبر لی G در یک $\mathbb{R}$–فضای برداری با بعد متناهی V، نمایشی از جبر لی $L(G)$ در V را ترتیب می‌دهد.

حال هومومورفیسم $\det : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ بتوی گروه ضربی $\mathbb{R}^*$ اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. جبر لی $\mathbb{R}^*$ با $\mathbb{R}$ یکی است. ثابت می‌کنیم:

۱۱.۵.۴ گزاره. هومومورفیسم جبر لی $L(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ القایی توسط هومومورفیسم $\det : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ نگاشت اثر است.

اثبات: گیریم $A \in L(V)$ و α_t یک خم در $\mathrm{GL}(V)$ با $\alpha_\circ = e$ و $\alpha_\circ = A$ است. در این صورت:

$$\det_{*e} A = \frac{d}{dt}\{\det \alpha_t\}\Big|_{t=\circ} \qquad (۲۹.۴)$$

اکنون بازاء هر n–فرم ناتباهیدهٔ ω بر V (که $n = \dim V$) و هر n–تایی از بردارها $v_1, \cdots, v_n$ از V داریم:

$$\omega(v_1, \cdots, v_n). \det \alpha_t = \omega(\alpha_t v_1, \cdots, \alpha_t v_n) \tag{۴.۳۰}$$

و بنابراین:

$$\begin{aligned} \omega(v_1, \cdots, v_n). \det_{*e} A &= \frac{d}{dt}\{\omega(\alpha_t v_1, \cdots, \alpha_t v_n)\}\Big|_{t=0} \\ &= \sum_i \omega(\alpha_t v_1, \cdots, \alpha_t v_{i-1}, \alpha_t v_i, \alpha_t v_{i+1}, \cdots, \alpha_t v_n)\Big|_{t=0} \\ &= \sum_i \omega(v_1, \cdots, Av_i, \cdots, v_n) \\ &= \omega(v_1, \cdots, v_n).\mathrm{tr}A \end{aligned}$$

که در نتیجه، $\det_{*e} A = \mathrm{tr}A$. با توجه به قضیهٔ ۴.۵.۴، این مطلب حکم مورد نظر را نتیجه می‌دهد. □

۱۲.۵.۴ نتیجه. بازاء هر $A, B \in L(V)$ ای $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

اثبات: چون $\mathrm{tr} : L(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ همومورفیسم بین جبرهای لی است، بازاء هر $A, B \in L(V)$ داریم:

$$\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}[A, B] = [\mathrm{tr}A, \mathrm{tr}B] = 0 \tag{۴.۳۱}$$

که براکت آخر در $\mathbb{R}$ بدیهی است. □

۱۳.۵.۴ مثال. گیریم G گروه لی است و:

$$\{0\} \hookrightarrow \mathrm{T_eG} \hookrightarrow \mathrm{TG} \xrightarrow{\pi} \mathrm{G} \longrightarrow \{\mathrm{e}\} \tag{۴.۳۲}$$

دنبالهٔ در مثال ۸.۱.۳ است. این دنباله، دنباله‌ای از همومورفیسم‌های جبر لی به شرح زیر القاء می‌کند:

$$\{0\} \hookrightarrow (\mathrm{L(T_eG)}) \hookrightarrow \mathrm{L(TG)} \longrightarrow \mathrm{L(G)} \longrightarrow \{0\} \tag{۴.۳۳}$$

که در اینجا $L(T_eG) = T_eG$ (به مثال ۴.۶.۴ در ذیل توجه گردد). برای اثبات دقیق بودن این دنباله به ۸.۵.۷ توجه شود. احتمال $G \hookrightarrow TG$ یک همومورفیسم $L(G) \longrightarrow L(TG)$ القاء می‌کند.

۶.۴ کابرد فانکتور بودن $\mathcal{L}$

۱.۶.۴ جبر لی حاصلضرب دو گروه. گیریم G_1 و G_2 گروه لی‌اند و $G_1 \times G_2$ گروه حاصلضربی است. تصاویر کانونی $p_i : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_i$ (که $i = 1, 2$) همومورفیسم بین گروههای لی‌اند و نیز همومورفیسم‌های جبر لی القایی $L(p_i) := L(G_1 \times G_2) \longrightarrow L(G)_i$ هستند. گیریم e_1 و e_2 عنصر همانی بترتیب G_1 و G_2 هستند. بنا به قضیهٔ ۴.۵.۴، دیاگرام زیر تعویض پذیر است که در آن # طبیعی عمل می‌کند:

$$\begin{tikzcd}
T_{(e_1,e_2)}(G_1 \times G_2) \arrow[rr, "p_{1*(e_1,e_2)}"] \arrow[dr, "p_{2*(e_1,e_2)}"] \arrow[dd, "\#_{G_1 \times G_2}"'] & & G_1 \arrow[dd, "\#_{G_2}"] \\
& G_2 \arrow[dd, "\#_{G_1}"] & \\
L(G_1 \times G_2) \arrow[rr, "L(p_2)"] \arrow[dr, "L(p_1)"'] & & L(G_1) \\
& L(G_2) &
\end{tikzcd}$$

پیکانهای عمودی ایزومورفیسم هستند. بنابراین $\mathbb{R}$–ایزومورفیسم خطی:

$$T_{e_1,e_2)}(G_1 \times G_2) \cong T_{e_1}G_1 \times T_{e_2}G_2 \qquad (۳۴.۴)$$

موجب ایزومورفیسم $\mathbb{R}$–فضای برداری:

$$L(G_1 \times G_2) \cong L(G)_1 \times L(G)_2 \qquad (۳۵.۴)$$

می‌گردد. اگر $q_i : L(G)_1 \times L(G)_2 \longrightarrow L(G)_i$ (که $i = 1, 2$) تصاویر کانونی باشد، این ایزومورفیسم بوسیلهٔ دیاگرام تعویض پذیر ذیل ساخته می‌شود:

$$\begin{tikzcd}
L(G_1 \times G_2) \arrow[rrr, "\alpha"] \arrow[dr, "L(p_1)"'] \arrow[drr, "L(p_2)"] & & & L(G_1 \times G_2) \arrow[dll, "q_1"'] \arrow[dl, "q_2"] \\
& L(G_1) & L(G_2) &
\end{tikzcd}$$

اکنون می‌خواهیم ساختار جبر لی $L(G_1 \times G_2)$ را به $L(G)_1 \times L(G)_2$ منتقل کنیم. بازاء هر $A \in L(G_1 \times G_2)$ داریم $\alpha(A) = (L(p_1)A, L(p_2)A) = (A_1, A_2)$ که $A_i = L(p_i)A$ با $i = 1, 2$. به صورت مشابه بازاء هر $A' \in L(G_1 \times G_2)$ ای داریم $\alpha(A') = (A'_1, A'_2)$ که $A'_i = L(p_i)A'$ با $i = 1, 2$. در نتیجه، چون $L(p_i)$ ها هومورفیسم بین جبرهای لی هستند، داریم:

$$\alpha[A, A'] = (L(p_1)[A, A'], L(p_2)[A, A']) = ([A_1, A'_1], [A_2, A'_2])$$

به این ترتیب، تعریف می‌کنیم:

$$[\alpha(A), \alpha(A')] = \alpha[A, A'] \qquad (۳۶.۴)$$

که این یعنی بازاء هر $A_i, A'_i \in L(G)_i$ که $i = 1, 2$ داریم:

$$[(A_1, A_2), (A'_1, A'_2)] := ([A_1, A'_1], [A_2, A'_2]) \qquad (۳۷.۴)$$

با این تعریف، α یک ایزومورفیسم بین جبرهای لی است.

کلی‌تر، فرض کنیم Λ یک حلقه و O_1 و O_2 دو Λ–جبرلی‌اند. مدول حاصلضرب $O_1 \times O_2$ با نگاشت با ضابطهٔ (۱) از $(O_1 \times O_2) \times (O_1 \times O_2)$ بتوی $O_1 \times O_2$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $O_1 \times O_2$ یک Λ جبر لی است.

۲.۶.۴ تعریف. حاصلضرب مستقیم دو Λ–جبر لی O_1 و O_2 عبارت است از جبر لی $O_1 \times O_2$ با ضرب با ضابطهٔ (۱).

اکنون اذعان می‌داریم که:

۳.۶.۴ گزاره. گیریم $G_۱$ و $G_۲$ گروه لی‌اند و $G_۱ \times G_۲$ حاصلضرب مستقیم آنها است. در این صورت، جبر لی $L(G_۱ \times G_۲)$ بطور کانونی با حاصلضرب مستقیم $L(G)_۱ \times L(G)_۲$ دو جبر لی $L(G)_۱$ و $L(G)_۲$ ایزومورف است.

یادآور می‌شویم که تعویض پذیری در یک جبر لی به معنی $[A_۱, A_۲] = ۰$ بازاء هر $A_۱$ و هر $A_۲$ است. بنابراین روشن است که حاصلضرب جبرهای لی تعویض پذیر، تعویض پذیر است.

۴.۶.۴ مثال. $L(\mathbb{R}^n) = L(\mathbb{R}) \times \cdots \times L(\mathbb{R})$. اما قبلاً ملاحظه شده است که $L(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ با ساختار جبر لی بدیهی (۷.۳.۴) است. بنابراین $L(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ با ساختار جبر لی بدیهی. به صورت مشابه $(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}^n$ بازاء گروه جمعی $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

۵.۶.۴ رابطهٔ بین $L(G)$ و $R(G)$. گیریم G گروه لی، G° گروه وارون و $\iota : G \longrightarrow G^\circ$ ایزومورفیسم با ضابطهٔ $g \longmapsto g^{-۱}$ (که $g \in G$) است.

۶.۶.۴ لم. $\iota_{*e} = -1_{T_eG}$.

اثبات: نگاشت $\varphi : G \longrightarrow G$ با ضابطهٔ $\varphi(g) = gg^{-۱}$ را در نظر بگیرید. چون φ ثابت است، پس $\varphi_{*g} : T_gG \longrightarrow T_eG$ صفر است. اما:

$$\varphi_{*g} = (R_{g^{-۱}})_{*g} + (L_g)_{*g^{-۱}} \circ \iota_{*g} \qquad (۳۸.۴)$$

و بنابراین:

$$\iota_{*g} = -\big((L_g)_{*g^{-۱}}\big)^{-۱} \circ T_g(R_{g^{-۱}}) = -(L_{g^{-۱}})_{*e} \circ (R_{g^{-۱}})_{*e} \qquad (۳۹.۴)$$

اکنون بازاء $g = e$ داریم $\iota_{*e} = -1_{T_eG}$ و برهان تمام است. □

۷.۶.۴ یادداشت. در برهان بالا نشان دادیم که:

$$\iota_{*g} = -(L_{g^{-۱}})_{*e} \circ (R_{g^{-۱}})_{*g} \qquad (g \in G) \qquad (۴۰.۴)$$

این بدان معنی است که نگاشت مماس به نگاشت $\iota : G \longrightarrow G$ در هر نقطه‌ای به توسط نگاشت مماس به انتقالها قابل توصیف است. این را در دیفرانسیلپذیری ضرب $G \times G \longrightarrow G$ بر منیفلد حاصلضرب $G \times G$ میتوان استفاده نمود و در نتیجه $\iota : G \longrightarrow G$ دیفرانسیلپذیر است.

گیریم Λ یک حلقه و $\mathcal{A}$ یک جبر لی بر Λ است. جبر لی وارون $\mathcal{A}^\circ$ عبارت است از Λ–مدول $\mathcal{A}$ همراه با ساختار جبر لی تعریف شده بوسیلهٔ براکت زیر:

$$[A_۱, A_۲]^\circ := -[A_۱, A_۲] \qquad A_۱, A_۲ \in \mathcal{A} \qquad (۴۱.۴)$$

۸.۶.۴ گزاره. گیریم G گروه لی و G° گروه وارون آن است. با یکی گیری $L(G)$ با T_eG و $L(G^\circ)$ با TG° توسط ایزومورفیسم کانونی # در قضیهٔ ۳.۳.۴، داریم $L(G^\circ) = (L(G))^\circ$؛ که در اینجا $(L(G))^\circ$ جبر لی وارون $L(G)$ می‌باشد.

اثبات: پس از اعمال یکی گیری‌های مشروح در بالا، در مورد ایزومورفیسم $\iota : G \longrightarrow G^\circ$ داریم $L(I) = \iota_{*e}$. به هر $A_i \in L(G)$ (که $i = ۱, ۲$) عنصر $T_e(I)A_i = -A_i \in L(G^\circ)$ را نظیر می‌کنیم، اکنون به $[A_۱, A_۲] \in L(G)$ عنصر $-[A_۱, A_۲]_{L(G)^\circ}$ نظیر می‌گردد که همان $[-A_۱, -A_۲]_{L(G^\circ)}$ می‌باشد، زیرا ι ایزومورفیسم است. بنابراین:

$$[A_۱, A_۲]_{L(G^\circ)} = -[A_۱, A_۲]_{L(G)} = [A_۱, A_۲]_{(L(G))^\circ} \qquad (۴۲.۴)$$

و برهان تمام است. □

۹.۶.۴ نتیجه. گیریم G گروه لی، $L(G)$ جبر لی میدانهای برداری ناوردای چپ و $R(G)$ جبر لی میدانهای برداری ناوردای راست می‌باشد. با یکی گیریهای کانونی قضیهٔ ۳.۳.۴ $L(G)$ و $R(G)$ را با T_eG یکی می‌گیریم. در این صورت $R(G) = (L(G))^\circ$.

اثبات: ملاحظه می‌شود که انتقالهای چپ در G همان انتقالهای راست در G° هستند و بالعکس، در نتیجه $L(G) = R(G^\circ)$ و $R(G) = L(G^\circ)$. پس از اعمال یکی گیریها، بنا به گزارهٔ ۸.۶.۴ داریم $L(G^\circ) = (L(G))^\circ$، که در نتیجه $R(G) = (L(G))^\circ$. □

بحث بالا البته نشان می‌دهد که $R(G) \cong L(G)$ بطور طبیعی ایزومورفند. بعلاوه:

۱۰.۶.۴ نتیجه. گیریم G گروه لی است. اگر G تعویض پذیر باشد. آنگاه $L(G)$ نیز هست.

اثبات: تعویض پذیری G ایجاب می‌کند که $R(G) = L(G)$. اما $R(G) = (L(G))^\circ$ و بنابراین $L(G) = (L(G))^\circ$ و برهان تمام است. □

در فصل ٦ خواهیم دید که عکس این حکم برای حالت گروه لی همبند G صحیح است.

۱۱.۶.۴ مثال. گیریم V یک $\mathbb{R}$–فضای برداری با بعد متناهی است و نمایش طبیعی $\mathrm{GL}(V)$ در V را در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌کنیم که $L(\mathrm{GL}(V))$ را بطور کانونی با فضای برداری مماس در عنصر همانی می‌شود یکی گرفت. به این ترتیب $L(V)$ حاصل می‌شود. بنا به ۹.۶.۴ می‌توان $R(G)$ را با فضای برداری در عنصر همانی یکی گرفت: $L(V)^\circ$.

۷.۴ نمایش الحاقی یک جبر لی

عمل G بر خودش توسط اتومورفیسمهای داخلی $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ را در نظر بگیرید (به مثال ۵.۱.۱ توجه گردد). فانکتور L موجب می‌شود که G–گروه G به G–جبر لی $L(G)$ به طبق گزارهٔ ۹.۱.۱ تبدیل گردد. تعریف G–عمل القایی بر G را تکرار می‌کنیم: عبارت است از ترکیب:

$$G \xrightarrow{\tau} \mathrm{Aut}(G) \xrightarrow{L} \mathrm{Aut}(L(G)) \qquad (۴۳.۴)$$

۱.۷.۴ تعریف. نمایش الحاقی گروه لی مفروض G عبارت است از نمایشی از G در $L(G)$ که توسط عمل G بر خودش با اتومورفیسمهای داخلی القاء می‌گردد $\mathrm{Ad}(g) := L(\tau_g)$.

۲.۷.۴ گزاره. گیریم G و G' گروه لی‌اند و $\rho : G \longrightarrow G'$ هomomorfism است. دراین صورت $L(\rho) : L(G) \longrightarrow L(G')$ یک نگاشت ρ–اکویی واریان نسبت به نمایشهای الحاقی G و G' در $L(G)$ و $L(G')$ است.

اثبات: تعویض پذیری دیاگرام:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & G' \\ {\scriptstyle \mathrm{Inn}_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Inn}_{\rho(g)}} \\ G & \xrightarrow{A} & G' \end{array}$$

(به مثال ۳.۲.۱ توجه شود) و فانکتور بودن L گزاره را اثبات می‌کند. □

ایزومورفیسم کانونی $\# : T_eG \longrightarrow L(G)$ در قضیهٔ ۳.۳.۴ امکان تعبیر T_eG به صورت جبر لی G را فراهم می‌سازد. از قضیهٔ ۴.۵.۴ نتیجه می‌گردد که تأثیر $\mathrm{Ad}(g) : L(G) \longrightarrow L(G)$ بر T_eG به صورت نگاشت $T_e(\tau_g) : T_eG \longrightarrow T_eG$ است. این امر اثبات می‌کند که عمل G بر T_eG به صورت در مثال ۹.۲.۳ دقیقاً عبارت است از نمایش الحاقی؛ البته پس ازاعمال یکی گیری T_eG و $L(G)$.

ذیلاً، توصیف دیگری برای نمایش الحاقی ارائه می‌دهیم:

۳.۷.۴ گزاره. گیریم G گروه لی است، $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(L(G))$ نمایش الحاقی می‌باشد و $A \in L(G)$. در این صورت:

$$\mathrm{Ad}(g)A := (R_{g^{-1}})_\alpha A \tag{۴۴.۴}$$

اثبات: بنا به ۴.۵.۴ داریم:

$$\mathrm{Ad}(g)A = L(\tau_g)A = (\tau_g)_* A \tag{۴۵.۴}$$

اما به دلیل $A \in L(G)$، داریم:

$$T(\tau_g)_* A = (R_{g^{-1}})_* \circ (L_g)_* A = (R_{g^{-1}})_* A \tag{۴۶.۴}$$

و برهان تمام است. □

این نشان می‌دهد که عمل G بر خودش با انتقالهای از راست موجب تعریف یک عمل راست از G بر $L(G)$ می‌شود و نمایش الحاقی عملاً تأثیر این عمل را توصیف می‌کند.

فصل ۵

میدان برداری و گروه ۱–پارامتری از تبدیلات

اطلاعات گسترده‌ای از گروه لی در جبر لی آن نهفته است. کلید فهم این موضوع، درک رابطهٔ بین میدانهای برداری و معادلات دیفرانسیل معمولی است، که در فصل حاضر به آن خواهیم پرداخت.

۱.۵ گروه ۱–پارامتری از تبدیلات

۱.۱.۵ تعریف. به $\mathbb{R}$–منیفلد X اصطلاحاً گروه ۱–پارامتری از تبدیلات می‌گوئیم.

گیریم X منیفلد است و $\gamma : I \longrightarrow X$ با ضابطهٔ $t \longmapsto \gamma_t$ یک خم بر X است. در اینجا I بازه‌ای باز از $\mathbb{R}$ شامل $\circ$ می‌باشد. بردار مماس به γ در نقطهٔ γ_t را با نماد $\dot{\gamma}_t := \frac{d}{dt}\gamma_t$ نشان می‌دهیم. در این صورت، داریم:

$$\dot{\gamma}_t f = \frac{d}{dt} f(\gamma_t) \qquad \text{بازاء هر } f \in \mathcal{C}^\infty(X) \tag{۱.۵}$$

که $\dot{\gamma}_t$ را کاملاً توضیح می‌دهد.

حال فرض کنیم $\varphi : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ با $(t,x) \longmapsto \varphi_t(x)$ یک گروه ۱–پارامتری از تبدیلات باشد. در این حالت همچنین گفته می‌شود که : φ یک گروه ۱–پارامتری از تبدیلات از X است. بازاء هر $x \in X$ ای تعریف می‌کنیم:

$$A_x := \frac{d}{dt}\varphi_t(x)\Big|_{t=\circ} = \dot{\varphi}_t(x)\Big|_{t=\circ} \tag{۲.۵}$$

در این صورت، $A = \{A_x\}_{x\in X}$ یک میدان برداری بر X می‌باشد.
اگر $t \longmapsto \varphi_t$ گروه ۱–پارامتری از تبدیلات باشد، آنگاه $\psi_t := \varphi_{st} \longmapsto t$ نیز هست. اگر A و B میدانهای برداری القاء شده توسط بترتیب φ_t و ψ_t باشد، آنگاه:

$$B_x = \frac{d}{dt}\{\psi_t(x)\}_{t=\circ} = \frac{d}{dt}\varphi_{st}(x)\Big|_{t=\circ} = sA_x \tag{۳.۵}$$

توجه شود که در این تعریف برای میدان برداری نظیر به یک گروه ۱–پارامتری از تبدیلات، از فراگیر بودن دامنهٔ تعریف φ_t استفاده‌ای نشده است.

۲.۱.۵ تعریف. گیریم $\varepsilon > 0$، I_ε بازهٔ باز $(-\varepsilon,\varepsilon)$ از $\mathbb{R}$ و U مجموعهٔ بازی در X است. منظور از یک گروه ۱-پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی X تعریف شده بر U، نگاشتی است به شکل $\varphi : I_\varepsilon \times U \longrightarrow X$ با $(t,x) \longmapsto \varphi_t(x)$ چنانکه:

۱) بازاء هر $t \in I_\varepsilon$ ای $\varphi_t : U \longmapsto \varphi_t(U)$ دیفئومورفیسم است.

۲) اگر $t, s, t+s \in I_\varepsilon$ و $x, \varphi_s(x) \in U$ آنگاه $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$.

معادلهٔ (۲.۵) همچنان برای $x \in U$ با معنی است و یک میدان برداری A بر U تعریف می‌کند. که به آن میدان برداری القاء شده بر U توسط φ_t می‌نامیم. برای اثبات این حکم، خواص گروه ۱-پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی استفاده نمی‌شوند، اما می‌توان اثبات نمود که:

۳.۱.۵ گزاره. گیریم $\varphi : I_\varepsilon \times U \longrightarrow X$ یک گروه ۱-پارامتری موضعی از تبدیلات X است، $\varepsilon > 0$، $I_\varepsilon = (-\varepsilon,\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$، U زیرمجموعه‌ای باز از X است و A میدان برداری القایی بر U می‌باشد. در این صورت، بازاء هر $x \in U$ ای خم $t \longmapsto \varphi_t(x)$ در معادله دیفرانسیل با مقدار اولیهٔ زیر صدق می کند:

$$\dot{\varphi}_t(x) A_{\varphi_t(x)} \qquad \varphi_0(x) = x \tag{۴.۵}$$

اثبات: گیریم $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$. در این صورت، بازاء هر $x \in U$ ثابت، داریم:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_t(x) f &= \frac{d}{dt} f(\varphi_t(x)) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{s}\{f(\varphi_{t+s}(x)) - f(\varphi_t(x))\} \\ &= \lim_{s \longrightarrow 0} \frac{1}{s}\{f(\varphi_s(\varphi_t(x))) - f(\varphi_t(x))\} = \frac{d}{ds} f(\varphi_s(\varphi_t(x)))\Big|_{s=0} = A_{\varphi_t(x)} f\end{aligned}$$

و به این ترتیب، برهان تمام است. □

۴.۱.۵ نتیجه. گیریم $\varphi, \psi : I_\varepsilon \times U \longrightarrow X$ دو گروه ۱-پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی تعریف شده بر U هستند. اگر آنها یک میدان برداری بر U القاء کنند، آنگاه منطبقند.

اثبات: این حکم دقیقاً همان قسمت یکتایی قضیهٔ وجود و یکتایی جواب برای معادلات دیفراسیل معمولی است. □

۵.۱.۵ گزاره. گیریم A میدان برداری بر X است. بازاء هر $x \in X$، یک $\varepsilon > 0$ ای و یک زیرمجموعهٔ باز U از X و یک گروه ۱-پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی $\varphi : I_\varepsilon \times U \longrightarrow X$ چنان وجود دارد که بر U همان میدان برداری A را القاء می‌کند.

اثبات: بازاء $x \in X$ ثابت، تعریف می‌کنیم $t \longmapsto \varphi_t(x)$ که جواب معادله دیفرانسیل با مقدار اولیهٔ:

$$\dot{\varphi}_t(x) = A_{\varphi_t(x)} \qquad , \varphi_0(x) = x \tag{۵.۵}$$

است. حال ثابت می‌کنیم که بازاء هر $t, s, t+s \in I_\varepsilon$ داریم $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$، مشروط به آنکه دو طرف تعریف شوند. گیریم $\alpha_1(x) := \varphi_{t+s}(x)$ و $\alpha_2(t) := \varphi_t(\varphi_s(x))$. در این صورت:

$$\dot{\alpha}_1(t) = \dot{\varphi}_{t+s}(x) = A_{\varphi_{t+s}(x)} = A_{\alpha_1(t)} \quad \text{و} \quad \dot{\alpha}_2(t) = \dot{\varphi}_t(\varphi_s(x)) = A_{\varphi_t(\varphi_s(x))} = A_{\alpha_2(t)}$$

یعنی، α_1 و α_2 جوابهای یک معادله دیفرانسیل هستند. چون $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \varphi_s(x)$، نتیجه می‌گیریم $\alpha_1 = \alpha_2$ و حکم ثابت شد. اکنون لازم است نشان دهیم که نگاشت $x \longmapsto \varphi_t(x)$ یک دیفئومورفیسم $\varphi_t : U \longrightarrow \varphi_t(U)$ است.

مشخصاً $\varphi_{\circ}$ تبدیل بدیهی است. می‌دانیم که $\varphi_t(x)$ بطور دیفرانسیلپذیر به x بستگی دارد. بنابراین، بازاء t های باندازهٔ کافی کوچک و $x \in U$ داریم:

$$\varphi_t(\varphi_{-t}(x)) = \varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = \varphi_{\circ}(x) = X \qquad (۶.۵)$$

و این اثبات می‌کند که φ_t دیفئومورفیسم است. □

۶.۱.۵ تعریف. میدان برداری A بر X را در صورتی کامل گوئیم که یک گروه ۱−پارامتری از تبدیلات القاء کند.

۷.۱.۵ مثال. فرض کنید A میدان برداری بر $\mathbb{R}$ است که در هر $x \in \mathbb{R}$ ای یک بردار یکهٔ با جهت مثبت را نظیر می‌کند. زیر منیفلد $(\circ; ۱) \subseteq \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. در این صورت، تحدید A به $(\circ, ۱)$ کامل نیست.

ذیلاً محکی برای کامل بودن را مطرح می‌کنیم.

۸.۱.۵ لم. میدان برداری A بر X را در نظر بگیرید. فرض کنید $\varepsilon > \circ$ و گروه ۱−پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی $\varphi : I_\varepsilon \times X \longrightarrow X$ میدان برداری A را القاء کرده باشند. در این صورت φ توسیعی به یک گروه ۱−پارامتری از تبدیلات دارد و بنابراین A کامل است.

اثبات: بازاء هر t که $|t| \leq \varepsilon$، نگاشت φ_t دیفئومورفیسم است. تنها کافی است φ_t را بازاء t های با $|t| > \varepsilon$ تعریف کنیم. فرض کنیم $t = k \times \frac{\varepsilon}{۲} + r$ که k عددی صحیح است و نیز $|r| < \frac{\varepsilon}{۲}$. اگر $k > \circ$، تعریف می‌کنیم $\varphi_t := (\varphi_{\frac{\varepsilon}{۲}})^k \circ \varphi_r$. اگر $k < \circ$، تعریف می‌کنیم $\varphi_t := (\varphi_{-\frac{\varepsilon}{۲}})^{-k} \circ \varphi_r$. اکنون φ_t در تمام شرایط مورد نظر صدق می‌کند. □

۹.۱.۵ مثال. گیریم X منیفلد فشرده است. در این صورت هر میدان برداری A بر X کامل است.

یادآور می‌شویم که ارتباط بین میدانهای برداری و گروههای ۱−پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی که در این بخش مطرح گردید، در تصویر میدانهای برداری به صورت تبدیل بینهایت کوچک نقش بسیار مهمی ایفاء می‌کند.

۲.۵ گروه ۱−پارامتری از تبدیلات و نگاشت اکوئی‌واریان

۱.۲.۵ چند قرارداد. اگر یک گروه ۱−پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی بر X مفروض باشد، آنرا با نماد ψ_t نشان می‌دهیم و بدون اینکه دامنهٔ تعریف را مشخص کنیم، بی‌هیچ تردیدی از میدان برداری A بر X سخن می‌گوئیم. همچنین، اگر A میدان برداری مفروضی بر X باشد، آنگاه از نماد ψ_t برای گروه ۱−پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی القاء کنندهٔ A بر زیرمجموعه‌ای از X استفاده می‌کنیم. فرمولها مادامی که معنی دهند، درستند. البته، چنانچه از گروه ۱−پارامتری از تبدیلات بحث در میان باشد، این قرارداد خیلی کمک می‌کند.

۲.۲.۵ گزاره. گیریم ψ_t و ψ'_t گروه ۱−پارامتری موضعی از تبدیلات بترتیب بر X و X' هستند، A و A' میدانهای برداری القاء شده توسط آنها هستند و $\varphi : X \longrightarrow X'$ یک نگاشت است. اگر بازاء هر t ای $\varphi \circ \psi_t = \psi'_t \circ \varphi$، آنگاه A و A'، φ−مرتبطند.

اثبات: با مشتق گیری نسبت به t داریم $T_{\psi_t(x)}(\varphi)A_{\psi_t(x)} = A'_{\psi_t(\varphi(x))}$؛ یا:

$$(\psi(t)\varphi_*)A_{\psi(t)} = A'_{\varphi(\psi(t))} \qquad (۷.۵)$$

که نظر به لم ۳.۴.۴ گزاره ثابت شد. □

مرسوم است که نگاشت $\varphi : X \longrightarrow X'$ صادق در رابطهٔ $\varphi \circ \psi_t = \psi'_t \circ \varphi$ را اکوئی‌واریان نسبت به گروههای ۱–پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی ψ_t و ψ'_t بنامیم. بنا به گزارهٔ بالا، میدانهای برداری القایی A و A'، φ–مرتبطند. این موضوع مشخصهٔ نگاشتهای اکوئی‌واریان است. دقیقاً، داریم:

۳.۲.۵ گزاره. گیریم X و X' منیفلد، A و A' میدانهای برداری بترتیب بر X و X'، ψ_t و ψ'_t گروههای ۱–پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی نظیرند و $\varphi : X \longrightarrow X'$ نگاشت است. اگر A و A'، φ–مرتبط باشند، آنگاه:

$$\varphi \circ \psi_t = \psi'_t \circ \varphi \tag{۸.۵}$$

اثبات: بازاء هر $x \in X$ ای فرض می‌کنیم $\alpha_1(t) := \varphi(\psi_t(x))$ و $\alpha_2(t) := \psi'_t(\varphi(x))$. در این صورت $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \varphi(x)$. با نشان دادن اینکه α_1 و α_2 در یک معادله دیفرانسیل واحد صدق می‌کنند، ثابت می‌کنیم $\alpha_1 = \alpha_2$. اما بنا به لم ۳.۴.۴ و اینکه A و A'، φ–مرتبطند، داریم:

$$\dot{\alpha}_1(t) = (T_{\psi_t(x)}\varphi)A_{\psi_t(x)} = A'_{\alpha_1(t)} \tag{۹.۵}$$

و بنابراین $\dot{\alpha}_2(t) = A'_{\alpha_2(t)}$ و برهان تمام است. □

۴.۲.۵ نتیجه. گیریم X و X' منیفلدند و $\varphi : X \longrightarrow X'$ دیفئومورفیسم است. اگر A با میدان برداری بر X باشد که گروه ۱–پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی ψ_t را تولید می‌کند، آنگاه میدان برداری $\varphi_* A$ بر X' گروه ۱–پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی $\varphi \circ \psi_t \circ \varphi^{-1}$ تولید می‌کند.

اثبات: کافی است توجه شود که A و $\varphi_* A$، φ–مرتبطند. □

با استفاده از حکم بالا در مورد اتومورفیسمها، داریم:

۵.۲.۵ نتیجه. گیریم X منیفلد است، A میدانی برداری بر X است که گرون ۱–پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی ψ_t را تولید می‌کند و $\varphi : X \longrightarrow X$ دیفئومورفیسم می‌باشد. در این صورت، وقتی و تنها وقتی $\varphi_* A = A$ که بازاء همهٔ t ها $\varphi \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi$.

ملاحظه می‌کنیم که حکم اخیر در مورد اتومورفیسمهای موضعی X نیز صحیح است؛ به عبارت دیگر، در مورد نگاشت $\varphi : U \longrightarrow X$ که بر زیرمجموعه‌ای باز از X تعریف می‌شود و تحدید آن یک دیفئومورفیسم است. دراین صورت، $\varphi_* A$ را به صورت یک میدان برداری بر زیرمجموعه‌ای مناسب از X میتوان در نظر گرفت و آنرا با فرمول در لم ۸.۲.۴ تعریف کرد. بویژه، فرض کنید ψ_s را که به این تعبیر یک اتومورفیسم موضعی از X است، در نظر بگیرید. چون بازاء هر t ای $\psi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \psi_s$، ملاحظه می‌کنیم که بنا به نتیجهٔ ۵.۲.۵ داریم $(\psi_s)_* A = A$. این دقیقاً بدین معنی است که میدان برداری A شار ψ_t نسبت به شار ناوردا است و A را به صورت میدانی که شار ψ_t را ثابت نگاه می‌دارد، میتوان توضیح داد.

به عنوان کاربردی از نتیجهٔ ۵.۲.۵ داریم:

۶.۲.۵ لم. گیریم G گروه لی، $A \in L(G)$ و ψ_t یک گروه ۱–پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی تولید شده توسط A است. در این صورت:

$$L_g \circ \psi_t = \psi_t \circ L_g \qquad \text{بازاء هر } t \text{ و هر } g \in G \text{ ای} \tag{۱۰.۵}$$

اکنون ثابت می‌کنیم که:

۷.۲.۵ گزاره. گیریم G گروه لی است. در این صورت، هر میدان برداری ناوردای چپ بر G کامل است.

اثبات: گروه ۱−پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی ψ_t تولید شده توسط A را در نظر گرفته و نشان می‌دهیم که ψ_t دارای یک توسیع به گروه ۱−پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی $\tilde{\psi} : I_\varepsilon \times G \longrightarrow G$ است، که $\varepsilon > \circ$. در این صورت، گزاره از لم ۷.۱.۵ نتیجه می‌گردد. فرض کنیم بازاء $\varepsilon > \circ$ ای $\psi : I_\varepsilon \times U \longrightarrow G$ و U همسایگی‌ای از e در G است.

شرط لازم برای وجود توسیع $\tilde{\psi} : I_\varepsilon \times G \longrightarrow G$ عبارتست از:

$$\tilde{\psi}_t(g) = (\tilde{\psi}_t \circ L_g)(e) = (L_g \circ \tilde{\psi}_t)(e) = L_g(\psi_t(e)) \qquad (۱۱.۵)$$

بنا به لم ۶.۲.۵. اکنون، بالعکس $\tilde{\psi}$ را با این فرمول تعریف کرده و نگاشت مورد نظر $\tilde{\psi} : I_\varepsilon \times G \longrightarrow G$ را بدست می آوریم. □

نتیجه دیگر لم ۶.۲.۵ عبارتست از:

۸.۲.۵ گزاره. گیریم G گروه لی، $A \in L(G)$ و ψ_t گروه ۱−پارامتری از تبدیلات است که توسط A تولید شده است. در این صورت $\psi(t) = R_{\psi_t(e)}$.

اثبات: بنا به لم ۶.۲.۵، این حکم حالت خاصی از حکم بعدی است. □

۹.۲.۵ لم. گیریم G (به تعبیر در جبر) گروه است. وقتی و تنها وقتی نگاشت $\psi : G \longrightarrow G$ انتقال راست است (ولذا $R_{\psi(e)} = \psi$) که بازاء هر $g \in G$ ای $L_g \circ \psi = \psi \circ L_g$.

اثبات: شرکتپذیری، لزوم شرط را نشان می‌دهد. بالعکس، فرض کنیم بازاء هر $g \in G$ ای $L_g \circ \psi = \psi \circ L_g$. بازاء $\gamma \in G$ داریم $g\psi(\gamma) = \psi(g\gamma)$ و بویژه اینکه $g\psi(e) = \psi(g)$. به عبارت دیگر $\psi(g) = R_{\psi(e)}g$. □

۳.۵ براکت میدانهای برداری

تعبیری برای براکت دو میدان برداری مطرح می‌کنیم (که از صفحه ۱۵ کتاب نومیزو و کبایاش اقتباس شده است).

از ساختی که در بخش ؟؟ برای میدانهای برداری φ_*A بازاء میدانهای برداری A بر X و اتومورفیسم φ بر X استفاده می‌کنیم.

۱.۳.۵ گزاره. گیریم A و B میدان برداری بر منیفلد X اند و φ_t یک گروه ۱−پارامتری از تبدیلات موضعی تولید شده توسط A است. در این صورت بازاء هر $x \in X$ ای

$$[A, B] := \lim_{t \longrightarrow \circ} \frac{۱}{t}(B_x - ((\varphi_t)_* B)_x) \qquad (۱۲.۵)$$

۲.۳.۵ لم. گیریم $\varepsilon > \circ$، $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ و $f : I_\varepsilon \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ که بازاء هر $x \in X$ ای $f(\circ, x) = \circ$. در این صورت $g : I_\varepsilon \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ ای با $f(t,x) = tg(t,x)$ وجود دارد. بعلاوه، $g(\circ, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(\circ, x)$.

اثبات: کافی است تعریف کنیم $g(t,x) = \int_\circ^۱ \frac{\partial f}{\partial t}(tx, x)ds$. □

۳.۳.۵ لم. گیریم A باعث تولید φ_t می‌شود. در این صورت، بازاء هر $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ ای یک $g_t \in \mathcal{C}^\infty(X)$ وجود دارد که $f \circ \varphi_t = f + tg_t$ و $g_\circ = Af$. بعلاوه، تابع $g(t,x) = g_t(x)$ بازاء هر $x \in X$ ثابتی در بازهٔ $|t| < \varepsilon$ تعریف می‌گردد، که $\varepsilon > \circ$ به x بستگی دارد.

اثبات: $h(t,x) = f(\varphi_t(x)) - f(x)$ را در نظر گرفته و لم ۲.۳.۵ را بکار می‌گیریم. در این صورت $f \circ \varphi_t = f + tg_t$. داریم:

$$(Af)(x) = \lim_{t \longrightarrow \circ} \frac{۱}{t} \left(f(\varphi_t(x)) - f(x)\right) = \lim_{t \longrightarrow \circ} \frac{۱}{t} h(t,x) = \lim_{t \longrightarrow \circ} g(t,x) = g_\circ(x)$$

و برهان تمام است.

اثبات: گزارهٔ ۱.۳.۵. گیریم $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$. $g_t \in \mathcal{C}^\infty(X)$ را همچون در لم ۳.۳.۵ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x_t = \varphi_t^{-۱}(x)$، در این صورت:

$$((\varphi_t)_* B)_x f = (B(f \circ \varphi_t))(x_t) = (Bf)(x_t) + t(Bg_t)(x_t) \tag{۱۳.۵}$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned} \lim_{t \longrightarrow \circ} \frac{۱}{t} \left(B_x - ((\varphi_t)_* B)_x\right) f &= \lim_{t \longrightarrow \circ} ((Bf)(x) - (Bf)(x_t)) - \lim_{t \longrightarrow \circ} (Bg_t)(x_t) \\ &= A_x(Bf) - B_x g_\circ = A_x(Bf) - B_x(Af) = [A,B]_x f \end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۴.۳.۵ نتیجه. گیریم A و B میدان برداری بر منیفلد X هستند و φ_t گروه ۱–پارامتری از تبدیلات موضعی تولید شده توسط A است. در این صورت بازاء هر $s \in \mathbb{R}$ و هر $x \in X$ داریم:

$$((\varphi_s)_*[A,B])_x = \lim_{t \longrightarrow \circ} \frac{۱}{t} \left(((\varphi_s)_* B)_x - ((\varphi_{t+s})_* B)_x\right) \tag{۱۴.۵}$$

اثبات: گیریم $s \in \mathbb{R}$. در این صورت چون بنا به یادداشت پایان بخش ۲.۵ $(\varphi_s)_* A = A$، داریم:

$$(\varphi_s)_*[A,B] = [(\varphi_s)_* A, (\varphi_s)_* B] = [A, (\varphi_s)_* B] \tag{۱۵.۵}$$

اکنون با بکارگیری گزارهٔ ۱.۳.۵ نتیجه می‌گیریم:

$$[A, (\varphi_s)_* B]_x = \lim_{t \longrightarrow \circ} \frac{۱}{t} \left(((\varphi_s)_* B)_x - ((\varphi_t)_* (\varphi_s)_* B)_x\right) = \lim_{t \longrightarrow \circ} \frac{۱}{t} \left(((\varphi_s)_* B)_x - ((\varphi_{t+s})_* B)_x\right)$$

و برهان تمام است. □

۵.۳.۵ گزاره. گیریم X منیفلد و A و B میدانهای برداری بر X تولید کنندهٔ زیرگروههای ۱–پارامتری ازتبدیلات موضعی بترتیب φ_t و ψ_s هستند. دراین صورت، وقتی و تنها وقتی بازاء هر s,t ای $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ که $[A,B] = o$.

اثبات: اگر بازاء هر t,s ای $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ آنگاه بنا به نتیجهٔ ۵.۲.۵ داریم $(\varphi_t)_* B = B$. بنا به گزارهٔ ۱.۳.۵ باید $[A,B] = o$. بالعکس، فرض کنیم $[A,B] = \circ$، آنگاه بنا به نتیجهٔ ۴.۳.۵ باید بازاء هر t ای $\frac{d}{dt}((\varphi_t)_* B)_x = \circ$. بنابراین، بازاء هر t ای $(\varphi_t)_* B = B$ و بنا به نتیجهٔ ۵.۲.۵ φ_t با هر ψ_s ای تعویض می‌گردد. □

۶.۳.۵ گزاره. گیریم میدانهای برداری A و B بر X گروههای ۱–پارامتری از تبدیلات موضعی φ_t و ψ_t را بترتیب تولید کنند. فرض کنید $[A,B] = \circ$. دراین صورت، $x_t := \varphi_t \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi_t$ گروه ۱–پارامتری از تبدیلات موضعی است و توسط $A + B$ تولید می‌گردد.

اثبات: گزارهٔ ۵.۳.۵ نشان می‌دهد که $\mathcal{X}_t$ الزاماً یک گروه ۱–پارامتری از تبدیلات موضعی است. بعلاوه:

$$\dot{\mathcal{X}}_t(x) = \dot{\varphi}_t(\psi_t(x)) + T_{\psi_t(x)}(\varphi_t)\psi_t(x) = A_{\mathcal{X}_t(x)} + T_{\psi_t(x)}(\varphi_t)B_{\psi_t(x)} \qquad (۱۶.۵)$$

اما بنا به گزاره ۵.۳.۵ و نتیجهٔ ۵.۲.۵ داریم $(\varphi_t)_*B = B$. بنابراین:

$$T_{\psi_t(x)}(\varphi_t)B_{\psi_t(x)} = B_{\varphi_t(\psi_t(x))} = B_{\mathcal{X}_t(x)} \qquad (۱۷.۵)$$

و در نتیجه $\dot{\mathcal{X}}_t(x) = (A+B)_{\mathcal{X}_t(x)}$. □

۴.۵ زیرگروه ۱–پارامتری در گروه لی

۱.۴.۵ تعریف. منظور از یک زیرگروه ۱–پارامتری α از گروه لی G، هomomorfisمی به شکل $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G\mathbb{R}$ بین گروههای لی است.

۲.۴.۵ یادداشت. گیریم X منیفلد است و φ_t یک گروه ۱–پارامتری از تبدیلات بر X است. نگاشت $t \longmapsto \varphi_t$ را به صورت زیرگروهی ۱–پارامتری $\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ در $\mathrm{Aut}(X)$ می‌توان قلمداد نمود. البته، دیفرانسیلپذیری این نگاشت بی‌معنی است. به نکتهٔ پس از مثال ۵.۲.۳ توجه شود.

هومورفیسم بدیهی $O : \mathbb{R} \longrightarrow G$ یک زیرگروه ۱–پارامتری در G است.

همان طور که در مثال زیر مشهود است، لزومی ندارد هر زیرگروه ۱–پارامتری غیر بدیهی $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$ یک به یک باشد.

۳.۴.۵ مثال. هومورفیسم کانونی $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$ زیرگروهی ۱–پارمتری از $\mathbb{T}$ می‌باشد.

لم ۴.۵ نشان می‌دهد که هر زیرگروه ۱–پارامتری غیر بدیهی، ایمرشن است.

گیریم A یک میدان برداری کامل بر G است و φ_t یک گروه ۱–پارامتری از تبدیلات است که توسط A تولید شده است. اکنون، بازاء $e \in G$ تعریف می‌کنیم $\alpha_t := \varphi_t(e)$. دراین صورت، $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$ و $\alpha_\circ = \varphi_\circ(e) = e$، ولی لزومی ندارد که زیرگروهی ۱–پارامتری از G باشد. چنانچه $A \in L(G)$ در این حالت داریم:

۴.۴.۵ گزاره. گیریم G گروه لی، $A \in L(G)$، φ_t گروه ۱–پارامتری از تبدیلات در G تولید شده توسط A و $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$ نگاشت با ضابطهٔ $\alpha_t = \varphi_t(e)$ است. در این صورت، α یک زیرگروه ۱–پارامتری از G است. بعلاوه، $\varphi_t = R_{\alpha_t}$ و نگاشت φ_t می‌تواند α را بطور کامل توصیف کند.

اثبات: با بکار گیری لم ۶.۲.۵ داریم:

$$\alpha_{t_1+t_2} = \varphi_{t_1+t_2}(e) = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(e)) = (\varphi_{t_1} \circ L_{\varphi_{t_2}(e)})(e) = (L_{\varphi_{t_2}(e)} \circ \varphi_{t_1})(e) = \varphi_{t_2}(e)\varphi_{t_1}(e) = \alpha_{t_2}\alpha_{t_1}$$

نظریهٔ گزارهٔ ۸.۲.۵ داریم $\varphi_t = R_{\alpha_t}$. □

معمولاً $\varphi_t = R_{\alpha_t}$ را در نوشتجات به صورت ذیل می‌آورند: تبدیل بینهایت کوچک تولید شده توسط یک میدان برداری ناوردای چپ، یک انتقال راست می‌باشد.

α را زیرگروه ۱–پارامتری در G نامیده و با نماد $\Phi(\alpha)$ نمایش می‌دهیم. گیریم $L(G)$ نمایشگر مجموعهٔ زیرگروههای ۱–پارامتری در G است. نگاشتی به شکل $\Phi : L(G) \longrightarrow L(G)$ در بالا تعریف کرده‌ایم.

۵.۴.۵ لم. گیریم $A \in L(G)$ و $\alpha = \Phi(A) \in L(G)$. در این صورت α جواب معادله دیفرانسیل $\dot{\alpha}_t = A_{\alpha_t}$ با شرط آغازی $\alpha_\circ = e$ است.

اثبات: بنا به گزارهٔ ۳.۱.۵ داریم $\dot{\alpha}_t = \dot{\varphi}_t(e) = A_{\varphi_t(e)} = A_{\alpha_t}$ و بعلاوه $\alpha_\circ = \varphi_\circ(e) = e$. □

این لم توصیفی مستقیم و روشن از نگاشت $\Phi : L(G) \longrightarrow L(G)$ را فراهم ساخته و یک به یک بودن آن را نشان می‌دهد. خواهیم دید که Φ دوسویی است. ابتدا، ثابت می‌کنیم:

۶.۴.۵ لم. گیریم $\alpha \in LG$، در این صورت داریم $\dot{\alpha}_t = T_e(L_{\alpha_1})_*\dot{\alpha}_\circ = T_e(R_{\alpha_t})_*\dot{\alpha}_\circ$.

اثبات: با مشتق گیری از $\alpha_{t+s} = \alpha_t\alpha_s = \alpha_s\alpha_t$ نسبت به s، داریم:

$$\dot{\alpha}_{t+s} = T_{\alpha_s}(L_{\alpha_t})\dot{\alpha_s} = T_{\alpha_s}(R_{\alpha_1})\dot{\alpha_s} \tag{۱۸.۵}$$

و بازاء $s = \circ$ حکم مورد نظر نتیجه می‌گردد. □

۷.۴.۵ قضیه. گیریم G گروه لی، $L(G)$ جبر لی آن و $L(G)$ مجموعهٔ زیرگروههای ۱–پارامتری از G هستند. بازاء هر $A \in L(G)$ ای عنصر $\Phi(A) = \alpha \in L(G)$ را به صورت جواب معادله دیفرانسیل $\dot{\alpha}_t = A_{\alpha_t}$ با شرط آغازی $\alpha_\circ = e$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $\Phi : Lg \longrightarrow L(G)$ تناظر دوسویی است.

اثبات: گیریم $\alpha \in G$. اگر بازاء یک $A \in L(G)$ ای $\alpha = \Phi(A)$، آنگاه لزوماً $A_e\dot{\alpha}_\circ$ که یک به یک بودن Φ را نشان می‌دهد. بالعکس $A \in L(G)$ را به صورت میدان برداری با $A_e = \dot{\alpha}_\circ$ تعریف می‌کنیم که در نتیجه بنا به لم ۶.۴.۵ باید $A_{\alpha_t} = TL_{\alpha_t}(\dot{\alpha}_\circ) = \dot{\alpha}_t$؛ که پوشایی Φ را نشان می‌دهد. □

لم ۶.۴.۵ نشان می‌دهد که با همین تعریف به یک تناظر دوسویی $R(G) \longrightarrow L(G)$ می‌رسیم. در حقیقیت، بردارهای مماس به خم $t \longmapsto \alpha_t$ هم به میدان برداری ناوردای چپ و نیز راست تعریف شده توسط α متعلقند. این موضوع را به صورت زیر می‌توان تشریح کرد.

۸.۴.۵ گزاره. گیریم $A \in L(G)$، $\alpha = \Phi(A) \in L(G)$ و $g \in G$. در این صورت:

$$A_g = (g\alpha_t)^{\cdot} t = \circ \tag{۱۹.۵}$$

اثبات: گیریم φ_t گروه ۱–پارامتری از تبدیلات است که توسط A تولید شده است. در این صورت بازاء هر $g \in G$ ای $\dot{\varphi}_t(g) = A_{\varphi_t(g)}$. اکنون بازاء گزارهٔ ۴.۴.۵ داریم $\varphi_t(g) = R_{\alpha_t}(g) = g\alpha_t$ و بنابراین $\dot{\varphi}_t(g) = (g\alpha_t)^{\cdot}$. اکنون بازاء $t = \circ$ داریم $A_{\varphi_s(g)} = A_g = (g\alpha_t)^{\cdot}_{t=\circ}$. □

وارون قضیهٔ ۷.۴.۵ نیز صحیح است.

۹.۴.۵ گزاره. گیریم I بازه‌ای باز در $\mathbb{R}$ شامل $\circ$ است و $\alpha : I \longrightarrow G$ یک همومورفیسم موضعی بین گروههای لی است. در این صورت یک زیرگروه ۱–پارامتری منحصر بفرد $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \longrightarrow G$ از G با $\tilde{\alpha}\Big|_I = \alpha$ وجود دارد.

اثبات: گیریم $A \in L(G)$ به صورت $\dot{\alpha}_\circ = A_e$ و $\bar{\alpha} = \Phi(A)$ تعریف می‌گردد. لم ۶.۴.۵ را مجدداً بر α می‌توان اعمال کرده و نتیجه می‌گیریم $\dot{\alpha}_t = T_e(L_{\alpha_t})\dot{\alpha}_\circ$ و بنابراین $A_{\alpha_t} = T_e(L_{\alpha_t})_*\dot{\alpha}_\circ = \dot{\alpha}_t$ اما $\tilde{\alpha}$ نیز جواب این معادله است. اکنون $\alpha_\circ = \tilde{\alpha}_\circ = e$ نشان می‌دهد $\tilde{\alpha}\Big|_I = \alpha$، و $\tilde{\alpha}$ توسیع α به زیرگروه ۱–پارامتری از G است. از یکتایی جواب نتیجه می‌گردد که تنها یک زیر گروه ۱–پارامتری α از G با $\dot{\alpha}_\circ$ وجود دارد. □

با مطالعهٔ ایزومورفیسم موضعی $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}$ مشاهده می‌گردد که لزومی ندارد، توسیع همومورفیسم موضعی $G \longrightarrow G'$ بین گروههای لی به همومورفیسم (فراگیر) وجود داشته باشد (به یادداشت پس از لم ۸.۵.۴ توجه گردد). از نظریهٔ گروههای توپولوژی نتیجه می‌گردد که اگر G همبند ساده باشد، آنگاه لزوماً چنین توسیعی وجود دارد (به لم ۵.۲.۷ نیز توجه شود). گزارهٔ ۹.۴.۵ حالت ساده‌ای از حکم زیر است.

۱۰.۴.۵ لم. گیریم G گروه لی، $A, B \in L(G)$، α و β عناصر در $L(G)$ متناظر به آنها و φ_t و ψ_t گروههای ۱-پارامتری از تبدیلات تولید شده توسط بترتیب A و B هستند. در این صورت، وقتی و تنها وقتی بازاء هر s, t ای $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ که بازاء هر s, t ای $\alpha_t\beta_s = \beta_s\alpha_t$.

اثبات: بازاء هر $g \in G$ ای بنا به لم ۶.۲.۵ داریم:

$$(\varphi_t \circ \psi_s)(g) = (\varphi_t \circ \psi_s \circ L_g)(e) = (L_g \circ \varphi_t \circ \psi_s)(e) \tag{۲۰.۵}$$

اکنون $\psi_s(e) = \beta_s = L_{\beta_s}(e)$ و بنابراین، به همین دلیل:

$$(L_g \circ \varphi_t \circ \psi_s)(e) = (L_g \circ \varphi_t o L_{\beta_s})(e) = (L_g \circ L_{\beta_s} \circ \varphi_t)(e) \tag{۲۱.۵}$$

و لذا ثابت شد که $(\varphi_t \circ \psi_s)(g) = g\beta_s\alpha_t$. به صورت مشابه $(\psi_s \circ \varphi_t)(g) = g\alpha_t\beta_s$. این حکم را اثبات می‌کند. □

عبارت $(\varphi_t \circ \psi_s)(g) = g\beta_s\alpha_t$ که در اثبات بالا ظاهر شد را در نظر بگیرید. به ویژه $(\varphi_t \circ \psi_t)(e) = \beta_t\alpha_t$. اگر $[A, B] = ۰$، آنگاه بنا به گزارهٔ ۶.۳.۵ $\mathcal{X}_t = \varphi_t \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi_t$ یک گروه ۱-پارامتری از تبدیلات است و $\mathcal{X}_t(e) = \beta_t\alpha_t = \alpha_t\beta_t$ یک زیر گروه ۱-پارامتری است و میدان برداری نظیر به آن $A + B$ است. بنابراین، داریم:

۱۱.۴.۵ گزاره. گیریم $A.B \in L(G)$ و $\alpha, \beta \in L(G)$ زیر گروههای ۱-پارامتری نظیرند. فرض کنیم که $[A, B] = ۰$. در این صورت $\gamma_t = \alpha_t\beta_t = \beta_t\alpha_t$ زیر گروهی ۱-پارامتری را تعریف می‌کند و میدان برداری ناوردای چپ نظیرش عبارت از $A + B$ است.

با ترکیب این حکم و گزارهٔ ۵.۳.۵، از لم ۱۰.۴.۵ نتیجه می‌گیریم.

۱۲.۴.۵ گزاره. گیریم $A, B \in L(G)$، φ_t و ψ_t گروههای ۱-پارامتری از تبدیلات تولید شده توسط بترتیب A و B هستند و α و β زیرگروههای ۱-پارامتری نظیر از G هستند. در این صورت احکام زیر معادلند:

۱) $[A, B] = ۰$،

۲) بازاء هر s, t ای $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$،

۳) بازاء هر s, t ای $\alpha_t\beta_s = \beta_s\alpha_t$.

در فصل ۶ خواهیم دید که این شرایط حتی با این حکم که «بازاء هر t ای $\alpha_t\beta_t = \beta_t\alpha_t$» نیز معادلند (به گزارهٔ ۴.۵.۶ توجه گردد).

حال همومورفیسمی $\rho : G \longrightarrow G'$ بین گروههای لی در نظر بگیرید. اگر زیرگروه ۱-پارامتری $\alpha \in L(G)$ را با ρ ترکیب کنیم، به عنصری $\rho \circ \alpha$ از $L(G)'$ می‌رسیم. اگر ρ همومورفیسم موضعی باشد آنگاه $\rho \circ \alpha$ نیز یک همومورفیسم موضعی $\mathbb{R} \longrightarrow G'$ است، اما بنا به گزارهٔ ۹.۴.۵ این $\rho \circ \alpha$ را به صورتی یکتا به یک زیرگروه ۱-پارامتری از G' میتوان تعمیم داد، که آنرا نیز با نماد $\rho \circ \alpha$ نشان می‌دهیم. در نتیجه، نگاشت $L(\rho) : L(G) \longrightarrow L(G)'$ تعریف شده، با نگاشت Φ در قضیه‌ی ۷.۴.۵ سازگار است. به بیان دقیقتر داریم.

۱۳.۴.۵ گزاره. گیریم G و G' گروه لی اند و $\rho : G \longrightarrow G'$ هومومورفیسم موضعی است. در این صورت دیاگرام زیر تعویض پذیر است:

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{L(\rho)} & L(G) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_g} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_{g'}} \\ \mathcal{L}(G) & \xrightarrow[\mathcal{L}(\rho)]{} & \mathcal{L}(G') \end{array}$$

که $L(\rho)$ ترکیب ρ، Φ_G و $\Phi_{G'}$ (نگاشتهای قضیهٔ ۷.۴.۵) است.

اثبات: بازاء $\alpha \in L(G)$ داریم $T_e(\rho)\dot{\alpha}_\circ = (\rho\circ\alpha)\dot{}_t\Big|_{t=\circ}$. این معنی تعویض پذیری دیاگرام:

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{\rho_{*e}} & T_{e'}G' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \#_G} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \#_{G'}} \\ L(G) & \xrightarrow{L(\rho)} & L(G) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_g} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_{g'}} \\ \mathcal{L}(G) & \xrightarrow[\mathcal{L}(\rho)]{} & \mathcal{L}(G') \end{array}$$

است. $L(\rho)$ با پر کردن نقطه چین در دیاگرام بالا تعریف می‌گردد. چون $\odot_G$ پوشا است، (و عملاً دوسویی است) گزاره اثبات می‌گردد. □

فرض کنید $V : \text{LieAlg} \longrightarrow \mathbf{Set}$ فانکتور فراموش است که هر جبر لی را به مجموعه‌ی زمینه‌اش و هر هومومورفیسم جبرهای لی را به نگاشت بین مجموعه‌های زمینه‌اش می‌نگارد. در این صورت، گزارهٔ ۱۳.۴.۵ اذعان می‌دارد که $\Phi : V\circ L \longrightarrow L$ یک تبدیل طبیعی است و در واقع یک هم ارزی طبیعی می‌باشد.

۵.۵ میدانهای برداری کیلینگ

رابطهٔ بین زیرگروههای ۱–پارامتری از یک گروه لی G و گروههای ۱–پارامتری از تبدیلات از یک G–منیفلد X را در این بخش مطالعه می‌کنیم.

گیریم X یک G–منیفلد نسبت به هومومورفیسم $\tau : G \longrightarrow \text{Aut}(X)$ است و $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$ یک زیرگروه ۱–پارامتری از G است. در این صورت، هومومورفیسم ترکیبی $\mathbb{R} \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\tau} \text{Aut}(X)$ یک زیرگروه ۱–پارامتری از تبدیلات φ_t از X را تعریف می‌کند. در واقع، نگاشت زیر دیفرانسیل پذیر است:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}\times X & \longrightarrow & G\times X & \longrightarrow & X \\ (t,s) & \longmapsto & (\alpha_t, x) & \longmapsto & \tau_{\alpha_t}(x) = \varphi_t(x) \end{array} \qquad (۲۲.۵)$$

۱.۵.۵ تعریف. میدان برداری کیلینگ A^* بر X تعریف شده توسط $\alpha \in L(G)$ عبارت از میدان برداری القاء شده توسط گروه ۱–پارامتری از تبدیلات φ_t بر X.

۲.۵.۵ یادداشت. همان طور که در بخش ؟؟ ملاحظه شد، گروه ۱−پارامتری از تبدیلات φ_t را بعنوان زیرگروهی ۱−پارامتری $\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ از $\mathrm{Aut}(X)$ می‌توان در نظر گرفت. در این صورت φ_t بنا به آنچه که در بخش ؟؟ گفته شد، میدانی برداری بر $\mathrm{Aut}(X)$ تعریف می‌گردد. همان طور که قبلاً ملاحظه شد، در اینجا هم مشکلاتی وجود دارد.معادله دیفرانسیل $\dot{\varphi}_t(x) = A^*_{\varphi_t(x)}$ توصیف کنندهٔ رابطه بین φ_t و A^* را اغلب به شکل $\dot{\varphi}_t = A^*_{\varphi_t}$ میتوان نوشت، و در نتیجه A^* را به صورت میدانی برداری بر $\mathrm{Aut}(X)$ میتوان در نظر گرفت. البته، این بحث تنها A^* را در راستای خم $t \longmapsto \varphi_t$ بر $\mathrm{Aut}(X)$ میتوان توصیف کرد.

۳.۵.۵ مثال. اگر $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ یک گروه ۱−پارامتری از تبدیلات τ_t از X تعریف کند، آنگاه میدان برداری کیلینگ A^* تعرف شده توسط $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دقیقاً عبارت است از میدان برداری القاء شده توسط τ_t.

۴.۵.۵ گزاره. گیریم G با انتقالهای از چپ بر G عمل کند. در این صورت، میدان برداری کیلینگ بر G تعریف شده توسط $\alpha \in L(G)$ عبارت است از میدان برداری ناوردای راست $B \in R(G)$ مشخص شده توسط $\dot{\alpha}_\circ = B_e$.

اثبات: گروه ۱−پارامتری از تبدیلات $\varphi_t = L\alpha_t$ بر G القایی توسط گزارهٔ ۴.۴.۵ و قضیهٔ ۷.۴.۵ (بترتیب شبیه برای $R(G)$) یک میدان برداری ناوارای راست B بر G است. این میدان برداری به وسیلهٔ $B_e = \dot{\alpha}_\circ$ مشخص می‌گردد. □

۵.۵.۵ مثال. گیریم $\rho : G \longrightarrow G'$ هومومورفیسم است و $\tau : G \longrightarrow BijG'$ عمل G بر G' تعریف شده به صورت $\tau_g = L_{\rho(g)}$ است. فرض کنید $\alpha \in L(G)$ و گروه ۱−پارامتری از تبدیلات بر G' تعریف شده توسط α را در نظر بگیرید: $\varphi_t = L_{\rho(\alpha_t)} = L_{(\rho\circ\alpha)_t}$. این نگاشت، میدان برداری ناوارای راست B' بر G' مشخص شده به صورت:

$$B'_e = (\rho \circ \alpha)(t)^{\cdot}\Big|_{t=\circ} = T_e\rho(\dot{\alpha}_\circ) \tag{۲۳.۵}$$

راالقاء می‌کند. با ترکیب کردن تناظر $B' \longmapsto \alpha$ و نگاشت کانونی $L(G) \longrightarrow R(G)$ به وضوح به همان هومومورفیسم $R(\rho) : R(G) \longrightarrow R(G')$ تعریف شده توسط $\rho : G \longrightarrow G'$ می‌رسیم.

۶.۵.۵ مثال. یک فضای برداری حقیقی با بعد متناهی V و نمایش طبیعی $\mathrm{GL}(V)$ در V را در نظر بگیرید. گیریم α زیرگروه ۱− پارامتری از $\mathrm{GL}(V)$ است و $v \in V$. در این صورت، میدان برداری کیلینگ A^* بر V تعریف شده توسط α در رابطهٔ $A^*_v = \dot{v}_\circ$ صدق می‌کند، که $v_t = \alpha_t v$.

اما بنا به لم ۶.۴.۵ باید $\dot{v}_t = \dot{\alpha}_t v = \dot{\alpha}_\circ \alpha_t v$. بنابراین، میدان برداری کیلینگ A^* تعریف شده توسط زیرگروه ۱−پارامتری α در شرط $A^*_v = \dot{\alpha}_\circ v$ صدق می‌کند؛ به عبارت دیگر، میدان برداری است که به صورت کانونی به شکل اندومورفیسم $\dot{\alpha}_\circ \in L(V)$ مشخص می‌گردد.

اکنون از احکام اثبات شده در بخش ؟؟ استفاده کرده و در مورد میدانهای برداری کیلینگ ثابت می‌کنیم که:

۷.۵.۵ گزاره. گیریم X یک G−منیفلد نسبت به هومومورفیسم $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ است، α یک زیرگروه ۱−پارامتری از G است و A^* میدان برداری کیلینگ بر X تعریف شده توسط α است. اگر C یک میدان برداری دلخواه بر X باشد، آنگاه بازاء هر $x \in X$ ای:

$$[A^*, C]_x = \lim_{t\longrightarrow\circ} \frac{۱}{t}\{C_x - (\tau_{\alpha_t})_* C)_x\} \tag{۲۴.۵}$$

اثبات: $(\tau \circ \alpha)_t$ گروه ۱−پارامتری از تبدیلات از X است که توسط A^* تولید می‌گردد. بنابراین، این فرمول حالت خاصی از گزارهٔ ۱.۳.۵ می‌باشد. □

۸.۵.۵ نتیجه. گیریم G گروه لی، $\alpha \in L(G)$ و $B \in R(G)$ میدان برداری ناوردای راست نظیر به α است. اگر C یک میدان برداری دلخواه بر G باشد، آنگاه بازاء هر $g \in G$ ای

$$[B,C]_g = \lim_{t \longrightarrow \circ} \frac{۱}{t} \{C_g - ((L_{\alpha_t})_* C)_g\} \tag{۲۵.۵}$$

اثبات: گیریم G بر G توسط انتقالهای چپ عمل کند. بنا به گزارهٔ ۴.۵.۵ میدان برداری B عبارت است از میدان برداری کیلینگ تعریف شده توسط $\alpha \in L(G)$ نسبت به این عمل اکنون در وضعیتی هستیم که از گزارهٔ ۷.۵.۵ استفاده کنیم. □

لازم به ذکر است که اگر $C \in R(G)$، این فرمول براکت در $R(G)$ را توسط L_{α_t} بیان می‌کند. البته، فرمول مشابهی برای میدانهای برداری ناوردای چپ داریم. فرمول جالب زیر را داریم:

۹.۵.۵ گزاره. گیریم G گروه لی است و $A, C \in L(G)$. اگر $\alpha \in LC$ زیر گروه ۱–پارامتری تعریف شده توسط A است، در این صورت:

$$[A,C] = \frac{d}{dt}\{\mathrm{Ad}(\alpha_t)\}\Big|_{t=\circ} C \tag{۲۶.۵}$$

که $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}L(G)$ نمایشگر الحاقی G است.

اثبات: همانند نتیجهٔ ۸.۵.۵، بازاء هر $g \in G$ ای بدست می‌آوریم:

$$[A,C]_g = \lim_{t \longrightarrow \circ} \frac{۱}{t} \{C_g - ((R_{\alpha_۱})_* C)_g\} \tag{۲۷.۵}$$

اکنون $C \in L(G)$ و بنابراین $(L^{-۱}_{\alpha_t})_* C = C$؛ به عبارت دیگر $(R_{\alpha_t})_* C = \mathrm{Ad}(\alpha_t^{-۱})C$. این نشان می‌دهد:

$$[A,C]_g = -\frac{d}{dt}\left\{\mathrm{Ad}(\alpha_t^{-۱})C_g\right\}\Big|_{t=\circ} \tag{۲۸.۵}$$

که آنرا به صورت:

$$[-A,C]_g = \frac{d}{dt}\left\{\mathrm{Ad}(\alpha_t^{-۱})C_g\right\}\Big|_{t=\circ} \tag{۲۹.۵}$$

میتوان نوشت. اما زیر گروه $t \longmapsto \alpha_t^{-۱} = \alpha_{-t}$ به میدان برداری $-A \in L(G)$ متعلق است و این حکم مورد نظر را اثبات می‌کند. □

فرض می‌کنیم $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}L(G)$ هومورفیسمی بین گروههای لی است. اما، این مطلب را (در بخش ؟؟ از پیوستگی Ad نتیجه خواهیم گرفت.

۶.۵ هومورفیسم $\sigma : R(G) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ برای یک G–منیفلد X

اطلاعات این بخش و نیز بخش بعدی در ادامهٔ بحث مورد استفاده قرار نگرفته است و لزومی‌به آن نیست. می‌خواهیم نشان دهیم که هر عمل $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ یک هومورفیسم $\sigma : R(G) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ بین جبرهای لی تعریف می‌کند. ابتدا، ثابت می‌کنیم:

۱.۶.۵ لم. گیریم X یک G–منیفلد، X' یک G'–منیفلد، $\rho : G \longrightarrow G'$ یک هومورفیسم و نیز $\rho : X \longrightarrow X'$ یک ρ–اکوئی‌واریان است. عناصر $\alpha \in L(G)$ و $\alpha' = \rho \circ \alpha \in L(G)'$ و میدانهای برداری کیلینگ A^* و A'^* تعریف شده توسط α و α' را در نظر بگیرید. در این صورت، A^* و A'^*، φ–مرتبطند.

اثبات: گیریم ψ_t و ψ'_t گروههای ۱–پارامتری از تبدیلات بر X و X' اند که بترتیب توسط α و α' تعریف می‌کردند: $\psi_t = \tau_{\alpha_t}$ و $\psi'_t = \tau'_{\alpha'_t}$. نظر به گزارهٔ ۲.۲.۵، کافی است ثابت شود:

$$\varphi \circ \psi_t = \psi'_t \circ \varphi \qquad (۳۰.۵)$$

ρ–اکوئی‌واریانی φ تعویض پذیری دیاگرام:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\tau} & X \\ {\scriptstyle \rho\times\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ G' \times X' & \xrightarrow{\tau'} & X' \end{array}$$

را نتیجه می‌دهد. چون $\alpha' = \rho \circ \alpha$، تعویض پذیری دیاگرام:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times X & \xrightarrow{\alpha\times 1_X} & X \\ {\scriptstyle 1_{\mathbb{R}}\times\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho\times\varphi} \\ \mathbb{R} \times X' & \xrightarrow{\alpha'\times 1_{X'}} & G' \times X' \end{array}$$

نیز نتیجه می‌گردد. با تلفیق این دیاگرامها، به دیاگرام تعویض پذیر:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times X & \xrightarrow{\Psi} & X \\ {\scriptstyle 1_{\mathbb{R}}\times\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \mathbb{R} \times X' & \xrightarrow{\Psi'} & G' \times X' \end{array}$$

می‌رسیم، که ثابت می‌کند $\varphi \circ \psi_t = \psi'_t \circ \varphi$. □

اکنون در وضعیتی هستیم که حکم بنیادی زیر را ثابت کنیم.

۲.۶.۵ قضیه. گیریم G گروه لی، X منیفلد، $R(G)$ جبر لی میدانهای برداری ناوردای راست بر G و $\mathcal{D}(X)$ جبر لی میدانهای برداری بر X است. هر عمل $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ تعریف کنندهٔ ساختار G–منیفلد بر X، هومورفیسمی به شکل $\sigma : R(G) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ القاء می‌کند. اگر $B \in R(G)$ و $\alpha \in L(G)$ زیر گروه ۱–پارامتری تعریف شده توسط $\dot{\alpha}_t = B_{\alpha_t}$ باشد، آنگاه $\sigma(B)$ میدان برداری کیلینگ تعریف شده توسط α بر X است.

اثبات: گیریم $B \in R(G)$ و $\sigma(B) \in \mathcal{D}(X)$. نشان می‌دهیم که B و $\sigma(B)$ نسبت به تأثیر یک نگاشت $\rho : G \longrightarrow X$، ρ–مرتبط هستند. در این صورت، قضیه به کمک لم ۲.۴.۴ نتیجه می‌گردد.

فرض کنیم $x_\circ \in X$ دلخواه و از این پس ثابت است و نگاشت $\rho : G \longrightarrow X$ را به صورت $\rho(g) = \tau_g(x_\circ)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، دیاگرام:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{L_g} & G \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{\tau_g} & X \end{array}$$

تعویض پذیر است. عمل G با انتقال از چپ بر G را در نظر بگیرید، در این صورت از دیاگرام بالا نتیجه می‌گردد که ρ اکوئی‌واریان است. گیریم $\alpha \in L(G)$. بنا به لم ۱.۶.۵، میدانهای برداری کیلینگ بر G و نیز بر X با هم ρ–مرتبط هستند. بنا به گزارهٔ ۴.۵.۵، میدان برداری کیلینگ بر G که توسط α تعریف می‌گردد، عبارت از صفر $B \in R(G)$ می‌باشد. در حالی که، میدان برداری کیلینگ تعریف شده توسط α بر X دقیقاً عبارت است از $\sigma(B)$ و بنابراین B و $\sigma(B)$ با هم ρ–مرتبط هستند. □

مجموعهٔ میدانهای برداری کیلینگ بر G–منیفلد X را با نماد $\mathrm{Kil}(X)$ نشان می‌دهیم. در این صورت $\mathrm{Kil}(X) = Im\sigma$ و بنا به قضیهٔ ۲.۶.۵ $\mathrm{Kil}(X)$ یک جبر لی است.

۳.۶.۵ مثال. گیریم G با انتقال از چپ بر G عمل کند. بنا به گزارهٔ ۴.۵.۵، جبر لی میدانهای برداری کیلینگ برابر $R(G)$ است و هومورفیسم $\sigma : R(G) \longrightarrow R(G)$ همانی $1_{R(G)}$ است

۴.۶.۵ مثال. گیریم $\rho : G \longrightarrow G'$ یک هومورفیسم و $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Bij}G'$ عمل G بر G' با ضابطهٔ $\tau(g) = L_{\rho(g)}$ است. بنا به مثال ۵.۵.۵، جبر لی میدانهای برداری کیلینگ زیرجبری از $R(G')$ است و هومورفیسم $R(\rho) : R(G) \longrightarrow R(G')$ همان هومورفیسم σ از قضیهٔ ۲.۶.۵ است.

۵.۶.۵ مثال. گیریم V یک $\mathbb{R}$–فضای برداری با بعد متناهی است و نمایش طبیعی $G = \mathrm{GL}(V)$ در V را در نظر می‌گیریم. با ایزومورفیسمهای کانونی $R(G)$ و $L(G)$ را با G_e یکی می‌گیریم. از گزارهٔ ۸.۳.۴ نتیجه می‌گیریم که $L(G) = L(V)$. اما بنا به نتیجهٔ ۹.۶.۴، داریم که $R(G) = (L(G))^\circ$. بنابراین، پس از یکی گیری $R(G)$ با G_e داریم $R(G) = (L(V))^\circ$. اکنون از مثال ۶.۵.۵ استنباط می‌گردد که در این حالت، هومورفیسم $\sigma : R(G) \longrightarrow \mathrm{Kil}(V)$ دقیقاً عبارت است از نگاشتی از $(L(V))^\circ$ به $\mathcal{D}(V)$ که به هر اندومورفیسم $A \in L(V)$، میدان برداری $A^*_v = Av$ را نسبت می‌دهد. اینکه نگاشت مذکور براکت را حفظ می‌کند، مستقیماً میتوان تحقیق کرد. گیریم $A_1, A_2 \in L(V)$. دراین صورت، براکت آنها در $(L(V))^\circ$ عبارت از $A_1A_2 - A_2A_1$ است. از سوی دیگر، بنا به فرمولی شبیه به آنچه که در مثال ۸.۳.۴ داشتیم، بایستی:

$$[A^*_1, A^*_2]_v = \left(\frac{d}{dv}A^*_{2_v}\right)(v)A^*_{1_v} - \left(\frac{d}{dv}A^*_{1_v}\right)(v)A^*_{2_v} \tag{۳۱.۵}$$

اما:

$$\left(\frac{d}{dv}A^*_{2_v}\right)(v)A^*_{1_v} = A^*_{2_v}A^*_{1_v} = A_2A_1v \tag{۳۲.۵}$$

و بنابراین:

$$[A^*_1, A^*_2]_v = (A_2A_2 - A_2A_1)v \tag{۳۳.۵}$$

کلی‌تر، نمایشی از گروه لی G در V در نظر بگیرید. هومورفیسم $\tau : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ یک هومورفیسم $R(\tau) : R(G) \longrightarrow R(\mathrm{GL}(V)) = (L(V))^\circ$ القاء می‌کند و بعلاوه، هومورفیسم القایی $\sigma : R(G) \longrightarrow \mathcal{D}(V)$ دقیقاً عبارت است از ترکیب این هومورفیسم با هومورفیسم $(L(V))^\circ$ که قبلاً مطرح گردید.

مشاهده می‌کنیم که وضعیت کلی یک G–منیفلد X به تعبیری شبیه به مثال ۵.۶.۵ است. عمل $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ با ترکیب با هومورفیسم طبیعی (که ایزومورفیسم نیز هست) یک نمایشی $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^\infty(X))$ از G در $\mathcal{C}^\infty(X)$ را القاء می‌کند. مشکل اینجا است که $\mathcal{C}^\infty(X)$ خیلی بزرگ است و از دیفرانسیلپذیری این نگاشت نمی‌توان سخن گفت. ولی باکی از این نداریم، می‌توانیم هومورفیسم $R(G) \longrightarrow \mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ بتوی جبر لی

عملگرهای بر X را به صورت نمایش $R(G)$ در $\mathcal{C}^\infty(X)$ القایی توسط نمایش G در $\mathcal{C}^\infty(X)$ (درست مثل مثال ۵.۶.۵) را در نظر بگیریم.

از تعریف چنین نتیجه می‌گردد که جبر لی میدانهای برداری کیلینگ بر یک G–منیفلد، یک جبر لی از میدانهای برداری کامل است. طبیعی است بپرسیم که آیا هر جبرلی با بعد متناهی از میدانهای برداری کامل بر یک منیفلد مفروض X را می‌توان به صورت جبر لی میدانهای کیلینگ متناظر به یک عمل یک گروه لی G بر X تصور نمود. حالت خاص یک جبر لی تعویض پذیر را در اینجا مورد بحث قرار می‌دهیم. برای مشاهدهٔ پاسخ مثبتی به پرسش مطرح شده به پلیش [۱۳] مراجعه شود.

فرض کنیم یک جبر لی تعویض پذیر G بر X عمل کند. چون هومورفیسم $\tau : R(G) \longrightarrow \mathrm{Kil}(X)$ پوشا است، جبر لی میدانهای کیلینگ $\mathrm{Kil}(X)$ تعویض پذیر است. بالعکس، ثابت می‌کنیم.

۶.۶.۵ گزاره. گیریم K یک جبر لی تعویض پذیر و با بعد متناهی از میدانهای برداری کامل بر X است. در این صورت، عملی از گروه جمعی K بر X وجود دارد که جبر لی K برابر جبر لی میدانهای برداری کیلینگ متناظر به این عمل است.

اثبات: چنانچه ساختار جمعی بر K را در نظر بگیریم، K به یک گروه لی با جبر لی K تبدیل می‌گردد. عملی از K بر X به صورت زیر در نظر می‌گیریم: گیریم $A \in K$ و φ_t گروه ۱–پارامتری ازتبدیلات در X است که توسط A تولید می‌شود. در این صورت با فرض اینکه $\tau_A = \varphi_1$ به یک نگاشت $\tau : K \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ می‌رسیم. نشان می‌دهیم که τ هومورفیسم است.

گیریم $A, B \in K$ بترتیب φ_t و ψ_t را تولید کنند. در این صورت، بنا به گزارهٔ ۶.۳.۵ $\mathcal{X}_t = \varphi_t \circ \psi_t$ گروه ۱–پارامتری از تبدیلات تولید شده توسط $A + B$ است. بنابراین، همان طور که باید ثابت می‌شد:

$$\tau_{A+B} = \mathcal{X}_1 = \varphi_1 \circ \psi_1 = \tau_A \circ \tau_B \qquad (۳۴.۵)$$

ملاحظه می‌کنیم که $\tau_{tA} = \varphi_t$. اکنون زیر گروه ۱–پارامتری در K نظیر به A عبارت است از $t \longmapsto tA$ و بنابراین، میدان برداری کیلینگ نظیر A^* بر X در رابطهٔ:

$$A^*_x = \frac{d}{dt}\left\{\tau_{tA}(x)\right\}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi_t(x)\Big|_{t=0} = A_x \qquad (۳۵.۵)$$

صدق می‌کند. این نشان می‌دهد که در این حالت، هومورفیسم در قضیهٔ ۲.۶.۵ همانی است و برهان تمام است. □

هومورفیسم $\sigma : R(G) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ که در قضیهٔ ۲.۶.۵ برای هر G–منیفلد مفروض X مطرح می‌گردد، خواص ویژه‌ای از عمل $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ را منعکس خواهد کرد، یعنی:

۷.۶.۵ گزاره. گیریم $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ باعث می‌شود X یک G–منیفلد باشد و $\sigma : R(G) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ هومورفیسم القایی باشد. در این صورت:

۱) اگر τ یک به یک باشد (به عبارت دیگر، عمل موثر باشد) آنگاه σ یک به یک است.

۲) اگر عمل τ آزاد باشد، آنگاه هر میدان برداری کیلینگ یا همه جا صفر است و یا اینکه هیچ جا صفر نیست.

اثبات: گیریم $B \in R(G)$ و $\alpha \in L(G)$ زیر گروه ۱–پارامتری نظیر است. در این صورت $(\sigma B)_{\varphi_t}(x) = \dot{\varphi}_t(x)$، که $\varphi_t = \tau_{\alpha_t}$.

۱) فرض کنیم $\sigma B = 0$. در این صورت $\dot{\varphi}_t(x) = 0$ و $\varphi_t(x) = x$ بازاء هر x و هر t. چون τ یک به یک است، از $\tau_{\alpha_t} = 1_x$ نتیجه می‌شود $\alpha_t = e$ و $B_e = \dot{\alpha}_0 = 0$. یعنی $B = 0$.

۲) فرض کنیم $(\sigma B)_x = 0$ بازاء یک $x \in X$ ای . دراین صورت (بازاء هر x ثابت) $\dot\varphi_0(x) = 0$ و لذا بازاء هر t ای $\varphi_t(x) = x$، زیرا جواب $\dot\varphi_t(x) = (\sigma B)_{\varphi_t(x)}$ با شرط آغازی $\varphi_0(x) = x$ منحصر بفرد است. چون τ آزاد است، بنابراین $\varphi_t(x) = \tau_{\alpha_t}(x) = x$ بازائیک x ثابت، ایجاب می‌کند که $\alpha_t = e$ و مثل قبل $B = 0$ و لذا $\sigma B = 0$.
(یادآور می‌شویم که هر عمل آزاد الزاماً یک به یک است، لذا نباید به (۲.۵) گزاره‌های $B = 0$ و $\sigma B = 0$ معادلند.) □

توجه شود که از یک به یک بودن $\sigma : R(G) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$، یک به یک بودن $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ نتیجه نمی‌گردد.

۸.۶.۵ مثال. هومورفیسم القایی $\rho : G \longrightarrow G'$ یک عمل $\tau = L \circ \rho$ از G بر G' موجب می‌گردد (به مثال ۴.۶.۵ توجه شود) و در این صورت، هومورفیسم القایی عبارت است از $\sigma = R(\rho) : R(G) \longrightarrow R(G')$. $R(\rho)$ ممکن است یک به یک باشد، در حالی که $\tau = L \circ \rho$ نباشد. کافی است هومورفیسمی غیر یک به یک $\rho : G \longrightarrow G'$ مطرح شود که $T_e\rho : T_eG \longrightarrow T_eG'$ نظیرش یک به یک است. هومورفیسم کانونی $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$ نمونه‌ای از آن است.

۹.۶.۵ یادداشت. سعی کنیم احکام این بخش را از همان دید کلی که قبلاً به دفعات مطرح شد، بررسی کنیم. ابتدا $\mathrm{Aut}(X)$ را بعنوان یک گروه لی قلمداد می‌کنیم. این عملی مؤثر بر X دارد که بنا به ۷.۶.۵ یک هومورفیسم یک به یک $\tilde\sigma : R(\mathrm{Aut}(X)) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ القاء می‌کند. طبیعی است که تصویر آنرا مجموعهٔ همهٔ میدانهای برداری کامل بر X در نظر بگیریم. اما لزومی ندارد که چنین مجموعه‌ای یک جبر لی تشکیل دهد و این امر همه چیز را خراب می‌کند. کار دیگر این است که جبر مذکور را به $R(\mathrm{Aut}(X))$ تقیلی دهیم. در حالتی که X فشرده است، مشکلی نیست و هر میدان برداری‌ای الزاماً کامل می‌باشد. در این صورت هر عمل $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ می‌تواند (این طور تصور شود که) هومورفیسمی به شکل $R(\tau) : R(G) \longrightarrow R(\mathrm{Aut}(X))$ تعریف کند. در این صورت، بنا به قضیهٔ ۲.۶.۵، هومورفیسم $\sigma : R(G) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ دقیقاً عبارت است از ترکیب $\sigma = \tilde\sigma \circ R(\tau)$.

۱۰.۶.۵ تمرین. گیریم G گروهی تعویض پذیر است که بر منیفلد X عمل می‌کند و $\mathrm{Kil}(X)$ جبر لی میدانهای برداری کیلینگ بر X می‌باشد. نشان دهید که هر عضو از $\mathrm{Kil}(X)$ نسبت به عمل G بر $\mathrm{Kil}(X)$ ناوردا است.

۷.۵ میدان برداری کیلینگ و نگاشت اکوئی‌واریان

می‌خواهیم سازگاری نگاشتهای اکوئی‌واریان با هومورفیسم $\sigma : R(G) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ تعریف شده در بخش ؟؟ در مورد عمل چپ را نشان دهیم. روشن است که چنانچه عمل راستی از G بر X در نظر بگیریم به هومورفیسمی مشابه $\sigma : L(G) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ می‌رسیم.

ابتدا ثابت می‌کنیم که:

۱.۷.۵ لم. گیریم X و X' منیفلد، $\varphi X \longrightarrow X'$ نگاشت و "A'_1, A" و "A'_2, A" دو جفت از میدانهای برداری φ–مرتبط بر X و X' هستند. اگر φ پوشا باشد، آنگاه $A'_1 = A'_2$.

اثبات: چون از $\varphi^*f_1 = \varphi^*f_2$ نتیجه می‌شود $f_1 \circ \varphi = f_2 \circ \varphi$ و لذا اگر φ پوشا باشد، آنگاه $f_1 = f_2$، پس φ^* یک به یک است. اما بنا به تعریف φ–مرتبط بودن، می‌بایستی دیاگرام زیر تعویض پذیر باشد؛ که در این صورت، $A'_1 = A'_2$ از یک به یک بودن φ^* نتیجه می‌گردد. □

$$\begin{array}{ccc} CX & \xleftarrow{\varphi^*} & CX \\ {\scriptstyle A}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle A'_i} \\ CX & \xleftarrow{\varphi^*} & CX \end{array} \qquad (i = ۱,۲)$$

۲.۷.۵ گزاره. گیریم X نسبت به عمل $\tau : G^\circ \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ یک G°–منیفلد است و $\mathcal{X}'$ نسبت به عمل $\tau' : G^\circ \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)'$ یک G'°–منیفلد است و $\rho : G \longrightarrow G'$ یک هomomorfism می‌باشد و $\varphi : X \longrightarrow X'$ یک نگاشت ρ–اکوئی‌واریان است. همومورفیسم‌های القایی $\sigma : L(G) \longrightarrow \mathrm{Kil}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)$ و $\sigma' : L(G) \longrightarrow \mathrm{Kil}(X)' \hookrightarrow \mathcal{D}(X)'$ مطرح در قضیهٔ ۲.۶.۵ را در نظر بگیرید. اگر G بر X بطور مؤثر عمل کند و یا اینکه φ پوشا باشد، آنگاه نگاشت منحصر بفردی $\gamma : \mathrm{Kil}(X) \longrightarrow \mathrm{Kil}(X)'$ وجود دارد که دیاگرام:

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Kil}(X) \\ {\scriptstyle L(\rho)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ L(G)' & \xrightarrow{\tau_g} & \mathrm{Kil}(X)' \end{array}$$

را تعویض پذیر می‌سازد و این نگاشت یک همومورفیسم بین جبرهای لی می‌باشد.

اثبات: گیریم $A \in L(G)$. بنا به گزارهٔ ۱.۶.۵، میدانهای برداری $A^* = \sigma(A)$ و $\sigma'(L(\rho)A)$ با هم φ–مرتبطند.

ابتدا فرض کنیم G بر X بطور مؤثر عمل کند؛ بعبارت دیگر $\tau : G^\circ \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ یک به یک باشد. در این صورت، بنا به گزارهٔ ۷.۶.۵، σ نیز یک به یک است. بنابراین، بازاء هر $A^* \in \mathrm{Kil}(X)$ یک $A \in L(G)$ منحصر بفرد وجود دارد که $\sigma(A) = A^*$. تعریف می‌کنیم $\gamma(A^* := \sigma'(L(\rho)A)$.

حال فرض کنیم φ پوشا است و $A \in L(G)$. چون بنا به لم ۱.۷.۵ میدانهای برداری $A^* = \sigma(A)$ و $\sigma'(L(\rho)A)$ با هم φ–مرتبطند، پس $\sigma'(L(\rho)A)$ میدان A^* را به صورت منحصر بفرد تعریف می‌کند. اکنون γ را مثل حالت قبل تعریف می‌کنیم.

یکتایی γ از پوشایی $\sigma : L(G) \longrightarrow \mathrm{Kil}(X)$ و اینکه بنا به لم ۲.۴.۴ نگاشت γ همومورفیسم است، نتیجه می‌گردد.
□

۳.۷.۵ نتیجه. فرض کنید وضعیت همچون در گزارهٔ ۲.۷.۵ است. اگر $\varphi : X \longrightarrow X'$ یک دیفئومورفیسم ρ–اکوئی‌واریان باشد، آنگاه دیاگرام زیر تعویض پذیر است:

$$\begin{array}{ccccc} L(G) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Kil}(X) & \hookrightarrow & \mathcal{D}(X) \\ {\scriptstyle L(\rho)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^*} \\ L(G)' & \xrightarrow{\tau_g} & \mathrm{Kil}(X)' & \hookrightarrow & \mathcal{D}(X') \end{array}$$

اثبات: اگر $C \in \mathcal{D}(X)$، آنگاه C و $\varphi_* C$ با هم φ–مرتبطند. بنابراین $\gamma = \varphi_*\big|_{\mathrm{Kil}(X)}$. □

اکنون می‌خواهیم این حکم را در مورد دیفئومورفیسم $\tau_{g^{-۱}} : X \longrightarrow X$ تعریف شده توسط یک عمل از راست $\tau : G^\circ \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ بکار ببریم. ابتدا متذکر می‌شویم که:

۴.۷.۵ لم. $\tau_{g^{-1}} : X \longrightarrow X$ یک τ_g-اکوئی‌واریان است.

اثبات: چون بازاء هر $\gamma \in G$ ای :

$$\tau_{\tau_{g(\gamma)}} \circ \tau_{g^{-1}} = \tau_{g\gamma g^{-1}} \circ \tau_{g^{-1}} = \tau_{\gamma g^{-1}} = \tau_{g^{-1}} \circ \tau_\gamma \qquad (۳۶.۵)$$

پس دیاگرام زیر تعویض پذیر است:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tau_{g^{-1}}} & X \\ {\scriptstyle \tau_\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{\mathrm{Inn}_{g(\gamma)}}} \\ X & \xrightarrow{\tau_{g^{-1}}} & X \end{array}$$

بنابراین، از نتیجهٔ ۳.۷.۵ اینطور استنباط می‌کنیم که:

۵.۷.۵ گزاره. گیریم X نسبت به عمل راست $\tau : G^\circ \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ یک G°-منیفلد است و $\sigma :\longrightarrow \mathrm{Kil}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)$ هومومورفیسم القایی در قضیهٔ ۲.۶.۵ است. در این صورت، دیاگرام زیر تعویض پذیر است:

$$\begin{array}{ccccc} L(G) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Kil}(X) & \hookrightarrow & \mathcal{D}(X) \\ {\scriptstyle \mathrm{Ad}_g}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle (\tau_{g^{-1}})_*} \\ L(G) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Kil}(X) & \hookrightarrow & \mathcal{D}(X') \end{array}$$

تنها یادآور می‌شویم که $\mathrm{Ad}(g) = L(\tau_g)$. بعلاوه، روشن است که $\alpha_g = (\tau_{g^{-1}})_*$ موجب می‌شود $\mathcal{D}(X)$ یک G-جبر لی شود، زیرا τ عمل از راست است. بعلاوه، داریم:

۶.۷.۵ قضیه. گیریم X نسبت به هومومورفیسم $\tau : G^\circ \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ یک G°-منیفلد است. نمایش الحاقی G در $L(G)$ و عمل G بر $\mathcal{D}(X)$ با ضابطهٔ $\alpha_g = (\tau_{g^{-1}})_*$ را در نظر بگیرید. در این صورت، هومومورفیسم الحاقی $\sigma : L(G) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ اکوئی‌واریان است.

بنابراین، بازاء هر $A \in L(G)$ و میدان نظیرش $A^* = \sigma(A)$، فرمول:

$$(\tau_{g^{-1}})_* = \sigma(\mathrm{Ad}(g)A) \qquad (۳۷.۵)$$

برقرار است. بویژه، τ_g میدانهای برداری کیلینگ را به میدانهای برداری کیلینگ می‌نگارد.

۷.۷.۵ مثال. گیریم G با انتقال از راست بر خودش عمل کند. در این صورت، تعویض پذیری دیاگرام:

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{D}(G) \\ {\scriptstyle \mathrm{Ad}_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (R_{g^{-1}})_*} \\ L(G) & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{D}(G) \end{array}$$

که قضیهٔ بالا تضمین می‌کند، دقیقاً همان گزارهٔ ۳.۷.۴ می‌باشد.

بنا به گزارهٔ ۷.۶.۵، σ در مورد عاملهای مؤثر، یک به یک است. دیاگرام تعویض پذیری $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}(X))$:

$$\begin{tikzcd} L(G) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}_g"'] & \mathcal{D}(X) \arrow[d, "\alpha_g"] \\ L(G) \arrow[r, "\sigma"] & \mathcal{D}(X) \end{tikzcd}$$

نشان می‌دهد که $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{D}(X))$ را بعنوان توصیفی از نمایش الحاقی G میتوان تعبیر نمود.

۸.۷.۵ لم. وقتی و تنها وقتی هومورفیسم $\tau : G^\circ \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ یک به یک است که هومورفیسم $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{D}(X))$ با ضابطهٔ $\alpha_g = (\tau_{g^{-1}})_*$ یک به یک باشد.

اثبات: α عبارت است از ترکیب نگاشتهای:

$$\begin{array}{ccccccc} G & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathcal{D}(X)) \\ g & \longmapsto & g^{-1} & \longmapsto & \tau_{g^{-1}} & \longmapsto & (\tau_{g^{-1}})_* \end{array}$$

I دوسویی است و چون از $g \in \mathrm{Aut}(X)$ با $\varphi_* = 1_{\mathcal{D}(X)}$ نتیجه می‌شود $T_x\varphi = 1_{T_xX}$ و $\varphi = 1_X$، پس $*$ نیز دوسویی است. بنابراین، وقتی و تنها وقتی α یک به یک است که $\tau \circ *$ یک به یک باشد، و آن هم وقتی و تنها وقتی یک به یک است که τ باشد. $\square$

۹.۷.۵ یادداشت. در مورد عمل چپ $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ نیز دیاگرامی تعویض پذیر داریم:

$$\begin{tikzcd} R(G) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "R(\mathrm{Inn}_g)"'] & \mathcal{D}(X) \arrow[d, "\delta_g"] \\ R(G) \arrow[r, "\sigma"] & \mathcal{D}(X) \end{tikzcd}$$

که $\sigma_g(\tau_g)_*$ و بنابراین، σ نسبت به اعمال (چپ) G بر $\mathcal{D}(X)$ و $R(G)$ اکوئی‌واریان است. بنائید باز هم به دیدگاه کلی خودمان باز بگردیم و $\mathrm{Aut}(X)$ را لی گروه بدانیم. در این صورت، $\mathrm{Aut}(X)$ بطور طبیعی از چپ بر X عمل می‌کند و هومورفیسمی $\tilde{\tau} : R(\mathrm{Aut}(X)) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ را تعریف می‌کند (به یادداشت پایان بخش ۶.۵ توجه گردد). همان طور که عملاً مشاهده می‌گردد، بازاء هر $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$ ای دیاگرام:

$$\begin{tikzcd} R(\mathrm{Aut}(X)) \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] \arrow[d, "R(\mathrm{Inn}_g)"'] & \mathcal{D}(X) \arrow[d, "\varphi_g"] \\ R(\mathrm{Aut}(X)) \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] & \mathcal{D}(X) \end{tikzcd}$$

تعویض پذیر است. چنانچه $\tilde{\sigma}$ یک به یک باشد، ملاحظه می‌کنیم که $\varphi_* : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ توسیعی از نگاشت $R(\tau_\varphi)$ است، که نمایش الحاقی $\mathrm{Aut}(X)$ در $R(\mathrm{Aut}(X))$ می‌باشد. با استدلال در لم ۸.۷.۵ مشاهده می‌کنیم که $\mathrm{Aut}(X) \xrightarrow{*} \mathrm{Aut}(\mathcal{D}(X))$ که φ را به φ_* می‌نگارد، یک به یک است. پس $\tilde{\sigma}$ یک به یک است بنا به لم ۸.۷.۵.

فصل ۶

نگاشت نمایی یک گروه لی

رابطهٔ بین زیرگروههای ۱-پارامتی از یک گروه لی مفروض G و میدانهای برداری ناوردای بر آن که در بخش ۴.۵ بیان گردید، در تعریف نگاشتی $\exp : T_eG \to G$ استفاده می‌کنیم که دارای خواص بسیار جالبی می‌باشد.

۱.۶ تعریف و طبیعی بودن نگاشت نمایی

از این پس به جهت ایجاد سهولت در بحث، $L(G)$ را با T_eG یکی گرفته و از نماد $A \in T_eG$ برای یک بردار مماس در e استفاده می‌کنیم.

۱.۱.۶ تعریف. نگاشت نمایی $\exp : T_eG \to G$ با ضابطهٔ

$$\exp A := \alpha_1 \qquad \text{بازاء هر } A \in T_eG \tag{۱.۶}$$

تعریف می‌گردد، که α زیرگروه ۱-پارامتری تولید شده توسط A در G به طریق مشروح در قضیه‌ی ۶.۶.۵ است. با نماد گذاری ما $\dot{\alpha}_0 = A$.

گیریم $\alpha \in \mathcal{L}(G)$ و بازاء هر s دلخواه و $t \in \mathbb{R}$ بخصوصی، تعریف می‌کنیم $\beta(s) = \alpha_{st}$. در این صورت، بوضوح $\beta \in \mathcal{L}(G)$ و بعلاوه، داریم:

۲.۱.۶ لم. $\dot{\beta}_0 = t\,\dot{\alpha}_0$.

اثبات: بازاء هر $f \in CG$ ای داریم $\dot{\beta}_0\, f = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} f(\alpha_{st}) = t\,\dot{\alpha}_0\, f$، و برهان تمام است. □

این نشان می‌دهد که $\exp(tA) = \alpha_t$. توجه شود که اکنون دیفرانسیلپذیری کلیهٔ α ها موجب دیفرانسیلپذیری $\exp : T_eG \to G$ می‌گردد.

۳.۱.۶ گزاره. $\exp((t_1 + t_2)A) = \exp(t_1A).\exp(t_2A)$

اثبات: α هomomorfism است. □

گزارهٔ ۱۱.۴.۵ نشان می‌دهد که بازاء هر $A, B \in T_eG$ با $[A, B] = 0$ داریم:

$$\exp(t(A + B)) = \exp(tA).\exp(tB) \tag{۲.۶}$$

و بخصوص، بازاء $t = 1$ داریم $\exp(A+B)\exp A.\exp B$. یعنی، در مجموع داریم:

۴.۱.۶ گزاره. اگر جبر لی $L(G)$ گروه لی G تعویض پذیر باشد، آنگاه $\exp : T_eG \to G$ هومورفیسمی از گروه برداری جمعی T_eG بتوی G است. □

به جهت روشن‌تر شدن مفهوم exp، مثال زیر را در نظر بگیرید.

۵.۱.۶ مثال. گیریم V یک فضای برداری حقیقی با بعد متناهی است و $G = \mathrm{GL}(V)$. در گزارهٔ ۸.۳.۴ ملاحظه کردیم که با یکی گیری $L(G)$ و T_eG داریم $L(G) = \mathcal{L}(V)$. اکنون، فرض کنیم $A \in \mathcal{L}(V)$ و $\alpha \in \mathcal{L}(G)$ زیر گروه ۱−پارامتری نظیرش است. در این حالت، مشاهده می‌کنیم که:

$$\exp(tA) = \alpha_t = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n \qquad (۳.۶)$$

برای اثبات این مطلب، فرض کنیم $\beta_t = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n$، در این صورت:

$$\dot{\beta} = \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{n}{n!}(tA)^{n-1}A = \beta_t A \qquad (۴.۶)$$

اما $\dot{\alpha}_t = \alpha_t\ \dot{\alpha}_\circ\ A$ و $\alpha_\circ = 1_V$. بنابراین چون α و β در یک معادله دیفرانسیل با مقادیر آغازی یکسان صدق می‌کنند، پس $\alpha = \beta$.

فرض کنید در مثال بالا $V = \mathbb{R}$. در این صورت $\mathrm{GL}(V) = \mathbb{R}^*$ گروه ضربی اعداد حقیقی مخالف صصفر است. جبر لی $\mathbb{R}^*$ عبارت است از $\mathbb{R}$ همراه با (تنها) ساختار جبر لی بدیهی بر آن، در این صورت، نگاشت $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ همان نگاشت نمایی معمولی $t \mapsto e^t$ است.

اکنون طبیعی بودن exp را نشان می‌دهیم. یعنی اینکه:

۶.۱.۶ گزاره. گیریم $\rho : G \to G'$ یک هومورفیسم است. در این صورت، دیاگرام:

$$\begin{tikzcd} T_eG \arrow[r, "\rho_{*e}"] \arrow[d, "\exp"'] & T_{e'}G' \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\rho"'] & G' \end{tikzcd} \qquad (۵.۶)$$

(به تعبیر نگاشتهای موضعی) تعویض پذیر است.

اثبات: گیریم $A \in T_eG$. اگر $\alpha_t = \exp(tA)$ زیر گروه ۱−پارامتری نظیر به A در G باشد، در این صورت:

$$(\rho\circ\ \dot{\alpha})(t)\Big|_{t=\circ} = \rho_{*e}\ \dot{\alpha}_\circ = \rho_{*e}A \qquad (۶.۶)$$

بنابراین $\exp(t\rho_{*e}A) = \rho(\exp(tA))$، و بازاء $t = 1$ داریم $\exp(\rho_{*e}A) = \rho(\exp A)$ و برهان تمام است. □

بعنوان کاربردی از حکم بالا، داریم:

۷.۱.۶ نتیجه. بازاء هر $g \in G$ و هر $A \in L(G)$ ای $\exp(\mathrm{Ad}(g)A) = g\exp Ag^{-1}$.

اثبات: بنا به تعریف $\mathrm{Ad}(g) = L(\tau_g)$. توجه شود که پس از یکی گیری $L(G)$ با T_eG، نمایش الحاقی در T_eG عمل می‌کند. □

مطلب ذیل کاربرد دیگری از گزارهٔ ۶.۱.۶ می‌باشد.

یک فضای برداری حقیقی V با بعد متناهی در نظر بگیرید. بنا به گزارهٔ ۸.۳.۴، جبر لی $\mathrm{GL}(V)$ برابر $\mathcal{L}(V)$ است. در این صورت، بنا به گزارهٔ ۱۱.۵.۴، همومورفیسم $\det : \mathrm{GL}(V) \to \mathbb{R}^*$ موجب القاء یک همومورفیسم جبرهای لی $\mathrm{tr} : \mathcal{L}(V) \to \mathbb{R}$ می‌گردد. طبیعی بودن نگاشت نمایی ثابت می‌کند.

۸.۱.۶ نتیجه. بازاء هر $A \in \mathcal{L}(V)$ ای $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{tr}A)$. □

تصویر نگاشت $\exp : T_eG \to G$ در مؤلفهٔ همبندی $G_\circ$ گروه G قرار دارد. مثال زیر نشان می‌دهد که لزومی ندارد نگاشت $\exp$، حتی در مورد گروههای لی همبند G، پوشا باشد.

۹.۱.۶ مثال. گیریم $\mathrm{SL}(۲,\mathbb{R})$ گروه ماتریسهای ۲×۲ با دترمینان یک است. این یک گروه لی همبند است. نشان می‌دهیم، عنصری در $\mathrm{SL}(۲,\mathbb{R})$ وجود دارد که مربعی نیست. این ایجاب می‌کند که $\exp$ پوشا نیست.

گیریم $g \in \mathrm{SL}(۲,\mathbb{R})$ و چند جمله‌ای مشخصه‌اش را در نظر می‌گیریم:

$$\det(\lambda I_۲ - g) = \lambda^۲ - \lambda \mathrm{tr}(g) + \det(g) \qquad (۷.۶)$$

که $\mathrm{tr}(g)$ نمایشگر اثر ماتریس g است. اکنون $\det(g) = ۱$ و لذا بنا به قضیه‌ای از جبر خطی $g^۲ - \mathrm{tr}(g).g + I_۲ = ۰$. با اعمال تابع اثر، نتیجه می‌گیریم $\mathrm{tr}(g)^۲ = (\mathrm{tr}(g))^۲ - ۲ \geq -۲$.

اکنون عنصر $l = \begin{pmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۱/۲ \end{pmatrix}$ از $\mathrm{SL}(۲,\mathbb{R})$ را در نظر بگیرید. به دلیل اینکه $\mathrm{tr}(l) < -۲$ پس معادلهٔ $l = g^۲$ فاقد جواب است.

۱۰.۱.۶ یادداشت. یک منیفلد X و یک گروه ۱−پارامتری از تبدیلات φ_t در X که توسط میدان برداری مفروض A^* در X تولید شده است را در نظر بگیرید. چنانچه φ_t را بعنوان زیر گروهی ۱−پارامتری از $\mathrm{Aut}(X)$ در نظر بگیریم، بجا است مثل گروههای لی بنویسیم:

$$\varphi_t = \exp(tA)^* \qquad (۸.۶)$$

حال اگر عمل G بر X را به صورت همومورفیسمی $\tau : G \to \mathrm{Aut}(X)$ در نظر بگیریم، و نیز فرض کنیم $\alpha \in \mathcal{L}(G)$ و A^* میدان برداری کیلینگ تعریف شده توسط α است، در این صورت بنا به تعریف $\tau_{\alpha_t} := \exp(tA^*)$؛ یا اگر $A \in$ با $\alpha_t = \exp(tA)$، آنگاه:

$$\tau_{\exp(tA)} = \exp(tA^*) \qquad (۹.۶)$$

این امر تعویض پذیری دیاگرام زیر را بیان می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Kil}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \exp} & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow[\tau]{} & \mathrm{Aut}(X) \end{array} \qquad (۱۰.۶)$$

که $\sigma : T_eG \to \mathrm{Kil}(X) \hookrightarrow DX$ همومورفیسم القایی توسط عمل $g \to \mathrm{Aut}(X)$ است. در گوشهٔ سمت راست بالای دیاگرام بالا نمی‌توانیم DX بنویسیم، زیرا توسط نگاشت نمایی تنها میدان برداری کامل در $\mathrm{Aut}(X)$ معنی می‌دهند. بنابراین، حتی در این حالت نیز نگاشت $\exp$ یک تبدیل طبیعی (بین فانکتورهای مناسب) است.

۲.٦ $\exp$ دیفئومورفیسمی موضعی در همان e است.

۱.۲.٦ گزاره. نگاشت خطی مماس $T_\circ \exp : T_eG \to T_eG$ القایی توسط $\exp : T_eG \to G$، همانی است.

اثبات: بازاء $A \in T_eG$ داریم:

$$\exp_{*\circ} A = \exp_{*tA} A\Big|_{t=\circ} = \left\{\exp_{*tA} . \frac{d}{dt}(tA)\right\}_{t=\circ} = \frac{d}{dt}\exp(tA)\Big|_{t=\circ} = A$$

و برهان تمام است. □

بنابراین، بر طبق قضیهٔ تابع معکوس داریم:

۲.۲.٦ قضیه. همسایگی بازی $N_\circ$ از o در T_eG و همسایگی بازی N_e از e در G چنان وجود دارند که $\exp : N_o \to N_e$ دیفئومورفیسم موضعی است. □

نگاشت وارون را با $\log : N_e \to N_o$ نشان می‌دهیم. نگاشت $\log$ چارتی برای G حول e تعریف می‌کند.

۳.۲.٦ تعریف. چارت کانونی G عبارتست از زوج $(N_e, \log)$ مرکب از یک همسایگی باز N_o از e در G و یک دیفئومورفیسم موضعی $\log : N_e \to \log(N_e) = N_o \hookrightarrow T_eG$ که وارون نگاشت نمایی تحدید یافته $\exp|_{N_o}$ می‌باشد.

ذیلاً، کاربردی بلا فصل از قضیهٔ ۲.۲.٦ ذکر می‌گردد.

۴.۲.٦ گزاره. تصور G یک گروه لی و $G_\circ$ مؤلفهٔ همبندی عنصر همانی آن است. اگر $L(G)$ تعویض پذیر باشد، آنگاه $G_\circ$ نیز هست.

اثبات: تصویر $\exp$ یک همسایگی باز U از e در G را در بر دارد. چون بنا به گزارهٔ ۴.۱.٦ نگاشت $\exp : T_eG \to G$ هومومورفیسم است. هر دو عضو از U با هم قابل تعویض هستند. اما U می‌تواند $G_\circ$ را تولید کند، بنابراین هر دو عضو از $G_\circ$ هم با هم تعویض می‌گردند. □

از این گزاره به همراه نتیجهٔ ۱۰.٦.۴ داریم:

۵.۲.٦ قضیه. گیریم G گروه لی همبند است. در این صورت، وقتی و تنها وقتی G تعویض پذیر است که G تعویض پذیر باشد. □

٦.۲.٦ لم. گیریم $\rho : G \to G'$ هومومورفیسم است. وقتی و تنها وقتی $L(\rho) : L(G) \to L(G)'$ یک به یک (بترتیب، پوشا) است که ρ_{*g} بازاء هر $g \in G$ ای یک به یک (بترتیب، پوشا) باشد.

اثبات: از $\rho(g\gamma) = \rho(g)\rho(\gamma)$ بازاء $\gamma = e$ نتیجه می‌شود که:

$$\rho_{*g} \circ (L_g)_{*e} = T_{e'} L_{\rho(g)} \circ \rho_{*e} \qquad (۱۱.٦)$$

بنابراین:

$$\rho_{*g} = (L_{\rho(g)})_{*e'} \circ \rho_{*e} \circ ((L_g)_{*e})^{-1} \qquad (۱۲.٦)$$

و برهان تمام است. □

۷.۲.٦ گزاره. گیریم G گروه لی همبند است. در این صورت $\exp : L(G) \to G$ پوشا است.

اثبات: در ۴.۱.٦ ملاحظه شد که اگر $L(G)$ تعویض پذیر باشد، آنگاه $\exp : L(G) \to G$ هومومورفیسم است. گیریم G' تصویر آن باشد. در این صورت، $T_\circ \exp$ نگاشت همانی است و لذا بنا به لم ٦.۲.٦، بازاء هر $A \in L(G)$ ای نگاشت $T_A \exp$ ایزومورفیسم است. بنابراین، G' یک زیر گروه باز (و بسته) از G است؛ در نتیجه $G' = G$.

هومورفیسمی موضعی $\rho : G \to G'$ در نظر بگیرید. گیریم $(N_e, \log)$ چارت کانونی برای G است. بنا به طبیعی بودن نگاشت $\exp$ (یعنی ٦.۱.٦) بازاء هر $g \in N_e$ ای داریم:

$$\rho(g) = \exp(L(\rho)\log(g)) \qquad (*) \qquad (۱۳.٦)$$

این شرط لازم برای تعیین $\rho|_{N_e}$ توسط $L(\rho)$ است و کاربردهایی به شرح زیر دارد.

۸.۲.٦ گزاره. گیریم $\rho_i : G \to G'$ که $i = ۱,۲$، هومورفیسم موضعی هستند. اگر هومورفیسمهای جبری القایی $L(\rho_i) : L(G) \to L(G)'$ که $i = ۱,۲$، منطبق باشند، آنگاه همسایگی بازی U از e در G وجود دارد که $\rho_۱$ و $\rho_۲$ بر آن منطبقند.

اثبات: $U = N_e$ را دامنهٔ یک چارت کانونی برای G می‌گیریم. در این صورت رابطهٔ $(*)$ نشان می‌دهد که بازاء هر $g \in U$ ای $\rho_۱(g) = \rho_۲(g)$. □

۹.۲.٦ نتیجه. گیریم G همبند است و $\rho_i : G \to G'$ با $i = ۱,۲$ هومورفیسم هستند. اگر $L(\rho_۱) = L(\rho_۲)$، آنگاه $\rho_۱ = \rho_۲$.

اثبات: هر همسایگی از e، کل G را تولید می‌کند. □

این نتیجه را می‌توان چنین تعبیر کرد که «فانکتور $L : \mathrm{Lie}_{loc} \to \mathrm{LieAlg}$ بر زیرکاتگوری گروههای لی همبند و هومورفیسمهای گروهی، صادق است.»

ذیلاً، کاربردی از حکم آخر را می آوریم.

۱۰.۲.٦ گزاره. گیریم G همبند است. در این صورت $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = Z_G$، که Z_G هستهٔ G است.

اثبات: بنا به تعریف $\mathrm{Ad} = Log$. اما همان طور که قبلاً دیدیم، از $L(\tau_g) = 1_{L(G)}$ نتیجه می‌گردد که $\tau_g = 1_G$. بنابراین $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \mathrm{Ker}(\tau) = Z_G$ و برهان تمام است. □

اکنون مسألهٔ ساخت هومورفیسم موضعی $G \to G'$ القایی توسط یک هومورفیسم بین جبرهای لی $L(G) \to L(G)'$ را در نظر می‌گیریم. یادآور می‌شویم که ایزومورفیسم $L\mathbb{T} \to L\mathbb{R}$ توسط هیچ هومورفیسمی $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ القاء نمی‌گردد. بنابراین، عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست.

۱۱.۲.٦ گزاره. گیریم G و G' گروه لی اند و $h : L(G) \to L(G)'$ یک هومورفیسم بین جبرهای لی است. گیریم $(N_e, \log)$ یک چارت کانونی در e از G است. در این صورت، اگر ρ تحدید هومورفیسم موضعی $G \to G'$ القایی توسط h باشد، آنگاه بایستی ρ به شکل

$$\rho = \exp \circ h \circ \log : N_e \to G' \qquad (۱۴.٦)$$

باشد. چنانچه $L(G)$ و $L(G)'$ تعویض پذیر باشند، آنگاه $\rho : N_e \to G'$ با تعریف بالا، یک هومورفیسم موضعی القایی توسط h است.

اثبات: دیدیم که تحدید هر همومورفیسم موضعی $G \to G'$ به N_e الزاماً به همین شکل است. بنا به ۴.۱.٦ برای $L(G)$ تعویض پذیر، exp همومورفیسمی از T_eG به G است، و لذا log نیز همومورفیسم موضعی از G به T_eG است. بنابراین ρ همومورفیسم است. گیریم $L(\rho) : L(G) \to L(G)'$ همومورفیسم القایی است. در این صورت، روشن است که $\rho_{*e} : T_eG \to T_eG$ دقیقاً همان h می‌باشد. این نشان می‌دهد که $L(\rho) = h$. □

نگاشت $\rho : N_e \to G'$ تعریف شده توسط یک همومورفیسم جبر لی $h : L(G) \to L(G)'$، حتی بدون فرض تعویض پذیری $L(G)$ و $L(G)'$ هم یک همومورفیسم $G \to G'$ است و h را القاء می‌کند. اما اثبات مستقیم این حکم به تحلیل عمیقتر موضوع نیاز دارد. به یادداشت در پایان بخش ۴.٦، پس از گزارهٔ ۲.۴.٦ توجه شود. در فصل ۷ باروشی دیگر، همومورفیسمی موضعی $g \to G'$ خواهیم ساخت که می‌تواند همومورفیسم جبر لی مفروض $h : L(G) \to L(G)'$ را القاء کند (به ۳.۲.۷ توجه گردد). به این ترتیب، نگاشت $\rho : N_e \to G'$ تعریف شده در گزارهٔ ۱۱.۲.٦ یک همومورفیسم موضعی است.

۱۲.۲.٦ تمرین. فرض کنید گروه لی G بر منیفلد X بطور مؤثر عمل کند و $\tau : G \to \mathrm{Aut}(X)$ نگاشت مربوطه باشد و $\mathrm{Kil}(X)$ جبر لی میدانهای برداری کیلینگ بر X است. نشان دهید که وقتی و تنها وقتی $g \in G$ بازاء هر $A \in \mathrm{Kil}(X)$ ای در شرط $(\tau_g)_* A = A$ صدق می‌کند که g در مرکز ساز مؤلفهٔ همبندی $G_\circ$ در G باشد.

۳.٦ یکتایی ساختار گروه لی

با اثبات حکم مهم زیر آغاز می‌کنیم.

۱.۳.٦ گزاره. گیریم G گروه لی و $\alpha : \mathbb{R} \to G$ همومورفیسمی به تعبیر جبری است که پیوسته نیز می‌باشد. در این صورت $A \in L(G)$ ای چنان وجود دارد که $\alpha_t = \exp tA$ و لذا α تحلیلی است. به عبارت دیگر یک زیر گروه ۱−پارامتری از G است.

اثبات: گیریم $(U, \log)$ یک چارت کانونی G است و V همسایگی‌ای از e در G است که $VV \subseteq U$.
گیریم $g \in V$. در این صورت، $g^۲ \in VV \subseteq U$ و $\log g$ و $\log g^۲$ هر دو تعریف می‌شوند. زیر گروه ۱−پارامتری $f \mapsto \exp(t \log g)$ از G را در نظر بگیرید. بازاء $t = ۱$ ملاحظه می‌گردد که $\exp(\log g) = g$. عنصر $g^۲$ هم بر این زیر گروه قرار دارد: $g^۲ = \exp(۲ \log g)$. از سوی دیگر، $\exp(\log g) = g$ زیرا $g^۲ \in U$. بنابراین $\log g^۲ = ۲ \log g$. یعنی، $g = \exp(\frac{۱}{۲} \log g^۲)$ و بنابراین g بطور کامل توسط $g^۲$ مشخص می‌گردد.
حال همومورفیسم پیوستهٔ $\alpha : V \to G$ را در نظر بگیرید. در این صورت، $\epsilon > ۰$ ای چنان وجود دارد که بازاء هر t با $|t| \leq \epsilon$ داریم $\alpha_t \in V$. فرض کنیم $\epsilon = ۱$ (در غیر این صورت t به λt عوض می‌کنیم که $۱ \leq \|\lambda t\|$). اکنون تعریف می‌کنیم $\alpha_۱ := g \in V$. در این صورت، $\exp(\frac{۱}{۲} \log g)$ یک ریشهٔ دوم از g در V است، و لذا بنا به بحث قبل، منحصر بفرد است. بنابراین $\alpha_{۱/۲} = \exp(\frac{۱}{۲} \log g)$. در نتیجه، با فرض $A = \log \alpha_۱$ داریم $\log \alpha_{۱/۲} = \frac{۱}{۲} A$. با تکرار این استدلال ملاحظه می‌شود که $\log(\alpha_{۱/۲^n}) = \frac{۱}{۲^n} A$ و سپس با جمع کردن داریم:

$$\log(\alpha_{p/۲^n}) = \frac{p}{۲^n}.A \qquad \text{بازاء هر } p \text{ با } ۰ \leq p \leq ۲^n \text{ و } p \in \mathbb{N}^* \text{ ای} \tag{۱۵.٦}$$

این نشان می‌دهد که بازاء هر عدد گویای ۲، ۲ ای r که $۰ \leq r \leq ۱$ داریم $\log \alpha_r = rA$. بنابراین، ثابت شد $\alpha_t = \exp(tA)$. □

از لم ذیل برای تعمیم ۱.۳.٦ به حالت یک همومورفیسم دلخواه استفاده می‌کنیم.

۲.۳.٦ لم. گیریم G گروه لی است. فرض کنید T_eG ضرب مستقیم $M \times N$ فضاهای برداری M و N است. در این صورت، نگاشت $\varphi : M \times N \to G$ با ضابطهٔ:

$$\varphi(A, B) = \exp A . \exp B \qquad A \in M, B \in N \tag{۱٦.٦}$$

یک دیفئومورفیسم موضعی در ۰ است.

اثبات: نظر به قضیهٔ تابع وارون، کافی است نشان دهیم که $T \circ \varphi : M \times N \to T_eG$ ایزومورفیسم است. اکنون $\varphi = m \circ (\exp_M \times \exp_N)$، که m نمایشگر نگاشت ضرب $m : G \times G \to G$ می‌باشد. بنابراین، بازاء هر $(X, Y) \in M \times N$ ای داریم:

$$\varphi_{*\circ}(X, Y) = m_{*(e,e)}(\exp_{M*\circ}(X), \exp_{N*\circ}(Y)) = \exp_{*\circ}(X) + T_\circ \exp_{*\circ}(Y) = X + Y \tag{۱۷.٦}$$

زیرا بنا به لم ۱.۲.٦ نگاشت $\exp_{*\circ}$ همانی است. بنابراین، $\varphi_{*\circ}$ نیز همانی است و حکم اثبات شد. □

۳.۳.٦ یادداشت. البته، روشن است که لم را می‌توان به حالت حاصلضربی $T_eG = M_۱ \times \cdot \times M_n$ از تعداد متناهی زیر فضای برداری $M_i \subseteq T_eG$ تعمیم داد.

حکم ذیل را نیز مطرح می‌کنیم.

۴.۳.٦ لم. گیریم G و G' گروه لی و $\rho : G \to G'$ هومومورفیسمی به معنی جبری است. اگر ρ در e دیفرانسیلپذیر (تحلیلی) باشد، آنگاه ρ در همه جا دیفرانسیلپذیر (تحلیلی) است.

اثبات: با توجه به $\rho \circ L_g = L_{\rho(g)} \circ \rho$ حکم بدیهی است. □

اکنون قادریم تا ثابت کنیم:

۵.۳.٦ قضیه. گیریم G و G' گروه لی اند و $\rho : G \to G'$ هومومورفیسمی به معنی جبری است. که پیوسته نیز هست. در این صورت، ρ تحلیلی است؛ یعنی، هومومورفیسم بین گروههای لی است.

اثبات: گیریم $A \in T_eG$. تناظر $t \mapsto \rho(\exp(tA))$ هومومورفیسمی پیوسته از $\mathbb{R}$ به G است. بنابراین، $A' \in T_eG'$ ای چنان وجود دارد که $\rho(\exp(tA)) = \exp(tA')$.

حال فرض کنیم A_i ها (که $i = ۱, ۲, \cdots, n = \dim G$) پایه‌ای برای T_eG تشکیل دهند و سپس A'_i ها را چنان انتخاب می‌کنیم که $A'_i \in T_eG'$ و $\rho(\exp(tA_i)) = \exp(tA'_i)$. بنابراین:

$$\rho(\prod_{i=۱}^{n} \exp(t_i A_i)) = \prod_{i=۱}^{n} \exp(t_i A'_i) \tag{۱۸.٦}$$

در این صورت، نگاشت $\varphi : \mathbb{R}^n \to G$ با ضابطهٔ:

$$\varphi(t_۱, \cdots, t_n) = \prod_{i=۱}^{n} \exp(t_i A_i) \tag{۱۹.٦}$$

بنا به یادداشت ۲.۳.٦ یک دیفئومورفیسم موضعی در ۰ است. بنابراین، همسایگی باز V از e در G چنان وجود دارد که هر $g \in V$ ای را به صورت $g = \prod_{i=۱}^{n} \exp(t_i A_i)$ می‌توان نوشت، که t_i ها بطور تحلیلی به g بستگی دارند. اکنون فرمول:

$$\rho(\prod_{i=۱}^{n} \exp(t_i A_i)) = \prod_{i=۱}^{n} \exp(t_i A'_i) \tag{۲۰.٦}$$

تحلیلی بودن ρ در عنصر همانی e را نشان می‌دهد. در نتیجه، بنا به ۴.۳.٦ نگاشت ρ تحلیلی است. □

٦.٣.٦ یادداشت. نگاشت $\rho_{*e} : T_eG \to T_eG'$ تنها با n مقدار $\rho_{*e}(A_i) = A'_i$ معلوم می‌شود که $i = ۱, \cdots, n$ و $.n = \dim G$

٧.٣.٦ لم. گیریم G و G' گروه لی اند. اگر $G = G'$ به عنوان گروه توپولوژی، آنگاه به عنوان گروه لی نیز $.G = G'$

اثبات: اگر به عنوان گروه توپولوژی $G = G'$، پس نگاشت همانی $G \to G'$ هومورفیسم گروههای توپولوژیک است و لذا بنا به ٥.٣.٦ دیفئومورفیسم است. □

این حکم نشان می‌دهد که جبر لی متناظر به یک گروه لی، عملاً ویژگی گروه توپولوژی زمینه‌ای آن است.

این سؤال مطرح می‌شود که: کدام گروههای توپولوژی امکان پذیرش ساختار گروه لی را دارند؟ به عبارت دیگر، یک ساختار دیفرانسیلپذیر سازگار با ساختار گروهی می‌پذیرند که با توپولوژی نظیر هم سازگار می‌باشد (توپولوژی آن با توپولوژی القایی یکی است)؟

آ. م. گلیسون در صفحات ۱۹۳ تا ۲۱۲ از شمارهٔ ٥٦ مجلهٔ Ann. of Math که در سال ۱۹٥۲ به چاپ رسید ثابت کرده است هر گروه توپولوژی G موضعاً فشرده، همبند، متریک پذیر و با بعد متناهی، گروه لی است.

۴.٦ کابرد در نقاط ثابت بر یک G–منیفلد

در این بخش به عنوان کاربردی از بحث بالا، مشخصه‌ای برای نقاط ثابت بر یک G–منیفلد بوسیلهٔ جبر لی میدانهای برداری کیلینگ معرفی می‌کنیم. با لم زیر آغاز می‌کنیم:

۱.۴.٦ لم. گیریم X یک منیفلد، A یک میدان برداری بر X و φ_t گروه ۱–پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی تولید شده توسط A است. نقطهٔ $x \in X$ وقتی و تنها وقتی یک نقطهٔ ثابت هر یک از تبدیلات φ_t است که $.A_x = ۰$

اثبات: از اینکه بازاء هر t ای $\varphi_t(x)$، نتیجه می‌شود $\dot{\varphi}_t\,(x)\big|_{t=۰} = ۰$ و بنابراین $.A_x = ۰$ بالعکس، فرض کنیم $.A_x = ۰$ در این صورت، معادله دیفرانسیل $\dot{\varphi}_t\,(x) = A_{\varphi_t(x)}$ دارای جواب $\varphi_t(x) = x$ (بازاء هر t) است و بعلاوه جواب آن منحصر بفرد است. □

۲.۴.٦ مثال. هر میدان برداری بر دو – کرهٔ $\mathbb{S}^۲$ صفر دارد. بنابراین، هر گروه ۱–پارامتری از تبدیلات بر $\mathbb{S}^۲$، نقطهٔ ثابت دارد.

کلی‌تر، فرض کنیم X یک منیفلد فشرده است. در این صورت، شرط لازم و کافی برای اینکه میدان برداری فاقد صفر بر X یافت شود، این است که مشخصهٔ اولر – پوانکاره $\mathcal{X}(X)$ آن منیفلد صفر شود. (یادآور می‌شویم که ما فرض کرده‌ایم تمام میدانهای برداری، دیفرانسیلپذیرند). پس هر گروه ۱–پارامتری از تبدیلات بر یک منیفلد فشرده X با $\mathcal{X}(X) \neq ۰$ دارای نقطهٔ ثابت است.

۳.۴.٦ گزاره. فرض کنید گروه لی همبند G توسط $\tau : G \to \mathrm{Aut}(X)$ بر X عمل کند و $\mathrm{Kil}(X)$ جبر لی میدانهای برداری کیلینگ بر X باشد. وقتی و تنها وقتی نقطهٔ $x \in X$ یک G–ناوردا است که بازاء هر $A^*\mathrm{Kil}(X)$ ای $.A^*_x = ۰$

اثبات: فرض کنیم x یک G–ناوردا باشد. بازاء هر $\alpha \in \mathcal{L}(G)$ ای داریم $\tau_{\alpha_t}(x) = x$ و بنابراین $A^*_x = ۰$، که A^* میدان کیلینگ نظیر به X است. بالعکس، فرض کنیم بازاء هر $A^* \in \mathrm{Kil}(X)$ ای $.A^*_x = ۰$ بنا به لم ۱.۴.٦، بازاء

هر $\alpha \in \mathcal{L}(G)$ ای داریم $\tau_{\alpha_t}(x) = x$ اکنون، چون exp دیفئومورفیسم موضعی است. یک همسایگی باز U از e در G چنان وجود دارد که بازاء هر $g \in U$ ای $\tau_g(x) = x$. چون G همبند است، پس U می‌تواند G را تولید کند و لذا بازاء هر $g \in G$ ای $\tau_g(x) = x$.

یک $\mathbb{R}$–فضای برداری V و نمایشی $\tau : G \to \mathrm{GL}(V)$ از گروه لی همبند G بر V رادر نظر بگیرید. وقتی و تنها وقتی نقطهٔ $v \in V$ یک G–ناوردا است که بازاء هر $A^* \in \mathrm{Kil}(X)$ ای $A^*_v = \circ$ اما، بنا به مثال ۶.۵.۵، میدان برداری کیلینگ A^* متناظر به $\alpha \in \mathcal{L}(G)$ عبارت است از $A^*_v = (\tau_{*e})\, \dot{\alpha}_\circ\, v$. نمایش القایی $L(\tau) : L(G) \to \mathcal{L}(V)$ از $L(G)$ در V را در نظر بگیرید. ملاحظه می‌شود که $v \in V$ وقتی و تنها وقتی G–ناوردا است که بازاء هر $A \in L(G)$ داشته باشیم $L(\tau)A)v = \circ$). این امر انگیزه‌ای برای طرح تعریف زیر است:

۴.۴.۶ تعریف. گیریم $\wedge$ میدان، M یک $\wedge$–جبر لی، V یک $\wedge$–فضای برداری و $\sigma : M \to \mathcal{L}(V)$ نمایشی از M در V است. عنصر $v \in V$ را در صورتی ناوردا یا M–ناوردا گوئیم که بازاء هر $A \in M$ ای $\sigma(A)v = \circ$.

بنابراین، مطابق بحث بالا، داریم.

۵.۴.۶ گزاره. گیریم V یک $\mathbb{R}$–فضای برداری با بعد متناهی، G یک گروه لی همبند، $\tau : G \to \mathrm{GL}(V)$ نمایشی از G در V و $L(\tau) : L(G) \to \mathcal{L}(V)$ نمایش القایی $L(G)$ در V است. عنصر $v \in V$ وقتی و تنها وقتی G–ناوردا است که $L(G)$–ناوردا باشد. □

حال، گزارهٔ ۳.۴.۶ را برای حالی که G تعویض پذیر است، بکار می‌گیریم.

۶.۴.۶ گزاره. گیریم X منیفلد باشد. شرایط زیر معادلند:

(۱) بازاء هر گروه لی همبند، تعویض پذیر و n–بعدی G و هر عمل $\tau : G \to \mathrm{Aut}(X)$، نقطه‌ای $x \in X$ که G–ناوردا باشد، وجود دارد.

(۲) هر عمل گروه جمعی $\mathbb{R}^n$ بر X دارای نقطهٔ ثابت است.

(۳) بازاء هر n تایی $A_n, \cdots, A_۱$ از میدانهای برداری کامل با $[A_i, A_j] = \circ$ (که $i, j = ۱, \cdots, n$)، نقطه‌ای $x \in X$، با «$A_{i_x} = \circ$ بازاء هر $i = ۱, \cdots, n$» وجود دارد.

اثبات: اینکه (۲) $\Leftarrow$ (۱) بدیهی است.

(۳) $\Leftarrow$ (۲) گیریم $A_n, \cdots, A_۱$ میدانهای برداری کامل بر X اند که بازاء هر $i, j = ۱, \cdots, n$ ای $[A_i, A_j] = \circ$. گروه جمعی K تولید شده توسط $A_n, \cdots, A_۱$ را در نظر بگیرید. بنا به گزارهٔ ۶.۶.۵، عملی از K بر X وجود دارد، که جبر لی تعویض پذیر K عبارت از جبر میدانهای برداری کیلینگ متناظر به این عمل است. K با گروه جمعی $\mathbb{R}^k$ عبارت از جبر میدانهای برداری کیلینگ متناظر به این عمل است. K با گروه جمعی $\mathbb{R}^k$ (که $k \leq n$ عددی مناسب است) ایزومورف می‌باشد. بنابراین، عمل K بر X عملی از گروه جمعی $\mathbb{R}^n$ بر X القاء می‌کند، که نقطه‌ای ثابت x (بنا به فرض) دارد. حال بنا به گزارهٔ ۳.۴.۶، بازاء هر $A \in K$ ای x یک صفر A است و بویژه بازاء هر $i = ۱, \cdots, n$ ای $A_{i_x} = \circ$.

(۱) $\Leftarrow$ (۳) گیریم G یک گروه لی همبند، تعویض پذیر و n–بعدی G است، $\tau : G \to \mathrm{Aut}(X)$ یک عمل از G بر X است و $\mathrm{Kil}(X)$ جبر لی میدانهای برداری کیلینگ است. داریم $\dim \mathrm{Kil}(X) \leq n$. گیریم $A_n, \cdots, A_۱$ دستگاهی از مولدهای $\mathrm{Kil}(X)$ باشد. در این صورت بازاء هر $i, j = ۱, \cdots, n$ ای $[A_i, A_j] = \circ$. بنا به فرض، صفر $x \in X$ مشترکی برای همهٔ این میدانهای برداری وجود دارد. در این صورت x صفر هر یک از میدانهای برداری کیلینگ است و بنا به گزارهٔ ۳.۴.۶، x یک G–ناوردا است.

اگر یک (ولذا هر یک از) شرط گزارهٔ ۶.۴.۶ بازاء n ای مشخص برقرار باشد، در این صورت، بازاء هر $m \leq n$ ای نیز به وضوح برقرار است.

روشن است که منیفلد زمینهٔ هر گروه لی تعویض پذیر G با بعد n، در هیچ یک از شرایط گزارهٔ ۶.۴.۶ صدق نمی‌کند. عمل $G_\circ$ بر G با انتقالهای از راست، هیچ نقطهٔ ثابت ندارد و هر n تایی از میدانهای برداری ناوردای $A_1, \cdots, A_n$ صادق در $[A_i, A_j] = \circ$ است و هیچ یک از میدانهای برداری مذکور، صفر ندارند.

۷.۴.۶ مثال. دو ــ کرهٔ S^2 را در نظر بگیرید. در این صورت، شرط (۳) گزارهٔ ۶.۴.۶ بازاء $n = 1$ دقیقاً به این معنی است که هر میدان برداری بر S^2 صفر دارد، که نتیجه‌ای از $\mathcal{X}(S^2) \neq \circ$ می‌باشد. ی. ل. لیما در صفحات ۱۳۸ تا ۱۴۱ از پروسدینگ AMS، جلد ۱۵، ۱۰۶۴ نشان داد که شرط (۲) بازاء $n = 2$ برقرار است. □

۵.۶ فرمول تیلور

در این بخش از تحلیلی بودن G استفادهٔ اساسی می‌کنیم. یادآور می‌شویم که در این فصل، $L(G)$ را با T_eG یکی گرفته‌ایم.

۱.۵.۶ گزاره. گیریم $f \in CG$ تابعی تحلیلی در $g \in G$ است و $A \in L(G)$. در این صورت $\epsilon > \circ$ ای چنان وجود دارد که:

$$f(g.\exp(tA)) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{t^n}{n!}[A^n f](g) \qquad \text{بازاء هر } |t| < \epsilon \text{ ای} \tag{۲۱.۶}$$

اثبات: ابتدا، فرض می‌کنیم $f \in CG$. در این صورت، بنا به گزارهٔ ۸.۴.۵:

$$[Af](g) = \frac{d}{dt} f(g.\exp(tA))\Big|_{t=\circ} \tag{۲۲.۶}$$

این ثابت می‌کند که بازاء $n = 1$ داریم:

$$[A^n f](g) = \left\{ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(g.\exp(tA)) \right\}_{t=\circ} \tag{۲۳.۶}$$

حکم $(*)$ به استقراء بازاء هر n ای اثبات می‌کنیم. با فرض $t + u = v$ و درستی (۲۳.۶) بازاء n داریم:

$$\begin{aligned} [A^{n+1} f](g) &= [A^n(Af)](g) = \left\{ \left(\frac{d}{dt}\right)^n (Af)(g.\exp(tA) \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{d}{du}(g.\exp(tA).\exp(uA)) \right\}_{t=\circ, u=\circ} \\ &= \left\{ \left(\frac{d}{dv}\right)^n \frac{d}{dv} f(g.\exp(vA)) \right\}_{v=\circ} \end{aligned}$$

که برقراری $(*)$ برای $n + 1$ را نشان می‌دهد.

حال اگر f در g تحلیلی باشد، آنگاه $\epsilon > \circ$ ای چنان وجود دارد که بازاء هر $|t| < \epsilon$ ای :

$$f(g.\exp(tA)) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(g.\exp(tA)) \right\}_{t=\circ} = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{t^n}{n!}[A^n f](g)$$

و به این ترتیب، برهان تمام است. □

از این حکم برای اثبات مطلب بعد استفاده می‌کنیم.

۲.۵.٦ گزاره. گیریم $O(t^{۳})$ نمایشگر برداری در $L(G)$ باشد که بازاء یک $\epsilon > ۰$ ای و بازاء هر $|t| < \epsilon$ ای $\frac{۱}{t^{۳}}O(t^{۳})$ تحلیلی و کراندار باشد. در این صورت، بازاء هر $A, B \in L(G)$ و t باندازهٔ کافی کوچک، داریم:

۱) $\exp(tA). \exp(tB) = \exp\left\{t(A+B) + \frac{t^{۲}}{۲}[A,B] + O(t^{۳})\right\}$

۲) $\exp(tA). \exp(tB). \exp(-tA) = \exp\{tB + t^{۲}[A,B] + O(t^{۳})\}$

۳) $\exp(-tA). \exp(-tB). \exp(tA). \exp(tB) = \exp\{t^{۲}[A,B] + O(t^{۳})\}$

اثبات: گیریم f در e تحلیلی است. نشان داده‌ایم که:

$$[A^n f](e) = \left\{\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(\exp(tA))\right\}_{t=۰}$$

بنابراین:

$$[A^n B^m f](e) = \left\{\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{d}{ds}\right)^m f(\exp(tA). \exp(sB))\right\}_{t=۰, s=۰}$$

در نتیجه، سری تیلور برای $f(\exp(tA). \exp(sB))$ عبارتست از:

$$f(\exp(tA). \exp(sB)) = \sum_{n,m \geq ۰} \frac{t^{۲}}{n!}\frac{s^m}{m!}[A^n B^m f](e)$$

و لذا، بازاء $t = s$، داریم:

$$f(\exp(tA). \exp(sB)) = \sum_{n,m \geq} \frac{t^{n+m}}{n!m!}[A^n B^m f](e) \tag{۲۴.٦}$$

ضریب t عبارتست از $[Af](e) + [Bf](e)$ و ضریب $t^{۲}$ نیز عبارتست از:

$$\frac{۱}{۲}[A^{۲} f](e) + [ABf](e) + \frac{۱}{۲}[B^{\alpha} f](e)$$

از طرف دیگر، بنا به قضیهٔ ۲.۲.٦ بازاء t باندازهٔ کافی کوچک داریم:

$$\exp(tA). \exp(tB) = \exp(tZ)$$

که $Z : I \to T_eG$، I بازهٔ بازی از $\mathbb{R}$ شامل ۰ است، Z در ۰ تحلیلی است و $Z(۰) = ۰$. در نتیجه، بازاء $Z_{۱}, Z_{۲} \in T_eG$ بخصوصی، داریم:

$$Z(t) = tZ_{۱} + t^{۲}Z_{۲} + O(t^{۳})$$

فرض کنیم f تابعی دلخواه است که در یک چارت کانونی در e به صورت خطی نمایش داده می‌شود و در این صورت، f در e تحلیلی است و:

$$\begin{aligned} f(\exp(tA). \exp(tB)) &= f(\exp\{tZ_{۱} + t^{۲}Z_{۲} + O(t^{۳})\} \\ &= f(\exp\{tZ_{۱} + t^{۲}Z_{۲}\}) + O'(t^{۳}) \\ &= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}\{(tZ_{۱} + t^{۲}Z_{۲})^n f\}(e) + O'(t^{۳}) \end{aligned} \tag{۲۵.٦}$$

که $O'(t)$ تابعی است با مقدار حقیقی به گونه‌ای که بازاء یک $\epsilon > ۰$ ای و هر $|t| < \epsilon$ ای تابع $t \mapsto \frac{۱}{t^۳} + O'(t)$ تحلیلی و کراندار است.

ضریب t عبارتست از $(Z_۱ f)(e)$ و ضریب $t^۲$ نیز $(Z_۱ f)(e) + (Z_۱^۲ f)(e)$ است. با مقایسهٔ این مطلب با ضریب t و $t^۲$ در (۲۴.٦)، نتیجه می‌گیریم که:

$$(Z_۱ f)(e) = \{(A+B)f\}(e), \qquad (Z_۲ f)(e) = \{\frac{۱}{۲}[A,B]f\}(e)$$

چون این مطلب برای هر تابع دلخواه f که در یک چارت کانونی در e به شکل خطی است، درست است. بنابراین، داریم:

$$Z_۱ = A+B, \qquad Z_۲ = \frac{۱}{۲}[A,B]$$

به این ترتیب، نشان داده شد که:

$$\exp(tA).\exp(tB) = \exp(Z(t)) = \exp\{t(A+B) + \frac{t^۲}{۲}[A,B] + O(t^۳)\}$$

و لذا (۱) برقرار است. حکم (۲) توسط (۲۴.٦) به شرح زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\exp(tA).\exp(tB).\exp(-tA) &= \exp\left\{t\left((A+B) + \frac{t}{۲}[A,B] + O(t^۲)\right)_۱\right\}.\exp(-tA)\\ &= \exp\{t(\{\}_۱ - A) + \frac{t^۲}{۲}[\{\}_۱, A] + O(t^۳)\}\\ &= \exp\{(tB + \frac{t^۲}{۲}[A,B]) + \frac{t^۲}{۲}[A,B] + O(t^۳)\}\\ &= \exp(tB + t^۲[A,B] + O(t^۳))\end{aligned}$$

حکم (۳) هم به صورت مشابه، نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned}&\exp(-tA).\exp(-tB).\exp(tA).\exp(tB) =\\ &= \exp\left\{t(-(A+B) + \frac{t}{۲}[A,B] + O(t^۲)_۲\right\}.\exp\left\{t((A+B) + \frac{t}{۲}[A,B] + O(t^۳)_۱\right\}\\ &= \exp(t(\{\cdots\}_۲ + \{\cdots\}_۱) + \frac{t^۲}{۲}\Big[\{\cdots\}_۲, \{\cdots\}_۱) + O(t^۳)\Big]\\ &= \exp(t^۲[A,B] + O(t^۳))\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۳.۵.٦ یادداشت. گیریم $N_۰$ یک همسایگی باز از ۰ در T_eG است که تحدید $\exp|_{N_۰} : N_۰ \to N_e$ دیفئومورفیسم است. در این صورت، میتوان از ترکیب:

$$AoB := \log(\exp A.\log B) \qquad A,B \in N_۰ \tag{۲٦.٦}$$

سخن گفت، مشروط به آنکه $\exp A.\exp B \in N_e$. این عمل ۰ یک قانون ترکیب (جزیی) در $N_۰$ تعریف می‌کند که o عنصر همانی است. در واقع، به این ترتیب $\exp$ ایزومورفیسمی از $N_۰$ به N_e همراه با ضرب مورد نظر و به ارث آورده شده از G است. بازاء $A,B \in L(G)$ دلخواه و t باندازهٔ کافی کوچک، میتوان نوشت:

$$tA \circ tB = (tA + tB) + \frac{۱}{۲}[tA + tB] + O(t^۳) \tag{۲۷.٦}$$

حکم بنیادی که میتوان اثبات نمود، این است که جملهٔ $O(t^3)$ (بازاء t های باندازهٔ کافی کوچک) نیز بر حسب روابط بین A و B در $L(G)$ قابل بیان است. این بدان معنی است که قانون ترکیب در همسایگی N_e از e در G بطور کامل توسط جبر لی $L(G)$ مشخص می‌گردد. فرمول (۱) از ۲.۵.٦ دو جملهٔ اول از این بسط را معرفی می‌کند.

بعلاوه می‌توان نشان داد هومورفیسم جبر لی $h : L(G) \to L(G)'$ نسبت به ترکیب معرفی شده در N_0 هومورفیسم است. این یکی گیری نشان می‌دهد که نگاشت $\rho : N_e \to G'$ مشخص شده توسط $h : L(G) \to L(G)'$ براساس گزارهٔ ۹.۲.٦، عملاً یک هومورفیسم موضعی $G \to G'$ است که $h : L(G) \to L(G)'$ را القاء می‌کند.

با بکار گیری گزارهٔ ۲.۵.٦ ثابت می‌کنیم که:

۴.۵.٦ گزاره. گیریم $A, B \in L(G)$. در این صورت، احکام زیر معادلند:

۱) $[A, B] = 0$

۲) بازاء هر t و هر s ای $\exp(sA).\exp(tB) = \exp(tB).\exp(sA)$.

۳) بازاء هر t ای $\exp(tA).\exp(tB) = \exp(tB).\exp(tA)$.

اثبات: بنا به گزارهٔ ۱۲.۴.۵ حالت (۲) $\Rightarrow$ (۱) برقرار است. مورد (۳) $\Rightarrow$ (۲) بدیهی است. برای مشاهدهٔ (۱) $\Leftarrow$ (۳) توجه می‌کنیم که بنا به گزارهٔ ۲.۵.٦ از (۳) نتیجه می‌شود:

$$\exp\left[t(A+B) + \frac{t^2}{2}[A,B] + O(t^3)\right\} = \exp\left\{t(B+A) + \frac{t^2}{2}[A,B] + \frac{t^2}{2}[A,B] + O(t^3)\right\}$$

بازاء t های باندازهٔ کافی کوچک برقرار است. در نتیجه $[A, B] = [B, A]$ و $[A, B] = 0$. □

شرایط (۱) و (۳) از گزارهٔ ۲.۵.٦، فرمول معروف زیر را نیز نتیجه می‌دهند:

۵.۵.٦ نتیجه. تحت شرایط گزارهٔ ۲.۵.٦ داریم:

$$(1)\ \exp\{t(A+B)\} = \exp(tA).\exp(tB).\exp\left\{\frac{t^2}{2}[A,B] + O(t^3)\right\}$$
$$= \exp(tA).\exp(tB).\exp(O(t^2))$$

$$(2)\ \exp\{t^2[A,B]\} = \exp(-tA).\exp(-tB).\exp(tA).\exp(tB).\exp(O(t^3))$$

اثبات: حکم (۱) از روابط زیر نتیجه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \exp(-tA).\exp(-tB).\exp(t(A+B)) &= \left(t\Big\{-(A+B) + \frac{t^2}{2}[A,B] + O(t^2)\Big\}\right).\exp(t(A+B)) \\ &= \exp\left(t(\{\cdots\} + (A+B)) + \frac{t^2}{2}[\{\cdots\},[A+B] + O(t^3)\right) \\ &= \exp\left(\frac{t^2}{2}[A,B] + O(t^3)\right) \end{aligned}$$

و حکم (۲) نیز این چنین نتیجه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \exp(-tB).\exp(-tA).\exp(tB).\exp(tA).(t^2[A,B]) &= \exp\{t^2[A,B] + O(t^3)\}.\exp(t^2[A,B]) \\ &= \exp(O(t^3)) \end{aligned}$$

فرمول (۱) نشان می‌دهد که منحنی $t \mapsto \exp(tA).\exp(tB)$ همان بردار مماسی در e دارد که زیر گروه یک پارامتری $t \mapsto \exp(t(A+B))$ دارد. از گزارهٔ ۱۱.۴.۵ نتیجه می‌گیریم که جملهٔ $O(t^۳)$ بازاء هر B, A که $[A,B] = ۰$ صفر می‌گردد.

فرمول (۲) عبارت $[A,B]$ را به صورت بردار مماس به منحنی:

$$t \mapsto \exp(-\sqrt{t}A).\exp(-\sqrt{t}B).\exp(\sqrt{t}A).\exp(\sqrt{t}B)$$

در نقطهٔ e توصیف می‌کند. $\square$

نتیجهٔ دیگری از ۲.۵.٦ که بعداً کاربرد فراوان خواهد داشت، عبارتست از:

٦.۵.٦ نتیجه. گیریم $A, B \in L(G)$. در این صورت، بازاء $t \in \mathbb{R}$ ای داریم:

۱) $\exp\{t(A+B)\} = \lim\limits_{n\to\infty} \Big\{ \exp\Big(\dfrac{t}{n}A\Big).\exp\Big(\dfrac{t}{n}B\Big)\Big\}^n$

۲) $\exp\{t^۲[A+B]\} = \lim\limits_{n\to\infty} \Big\{ \exp\Big(-\dfrac{t}{n}A\Big).\exp\Big(-\dfrac{t}{n}B\Big).\exp\Big(\dfrac{t}{n}A\Big).\exp\Big(\dfrac{t}{n}B\Big)\Big\}$

اثبات: گیریم $t \in \mathbb{R}$ و n باندازهٔ کافی بزرگ است. در این صورت، بنا به گزارهٔ ۲.۵.٦ و بازاء هر t دلخواه و از این پس ثابت، داریم:

$$\exp\Big(\frac{t}{n}A\Big).\exp\Big(\frac{t}{n}B\Big) = \exp\Big\{\frac{t}{n}(A+B) + \frac{t^۲}{۲n^۲}[A,B] + O\Big(\frac{۱}{n^۳}\Big)\Big\}$$

و بنابراین:

$$\Big\{\exp\Big(\frac{t}{n}A\Big).\exp\Big(\frac{t}{n}B\Big)\Big\}^n = \exp\Big\{t(A+B) + \frac{t^۲}{۲n}[A,B] + O\Big(\frac{۱}{n^۲}\Big)\Big\}$$

که (۱) را نشان می‌دهد. برای مشاهدهٔ (۲) کافی است از ۲.۵.٦ استفاده شود:

$$\begin{aligned}\Big\{\exp\Big(-\frac{t}{n}A\Big).\exp\Big(-\frac{t}{n}B\Big).\exp\Big(\frac{t}{n}A\Big).\exp\Big(\frac{t}{n}B\Big)\Big\}^{n^۲} &= \Big\{\exp\Big(\frac{t^۲}{n^۲}[A,B]\Big) + O\Big(\frac{۱}{n^۳}\Big)\Big\}^{n^۲} \\ &= \exp\Big(t^۲[A,B] + O\Big(\frac{۱}{n}\Big)\Big)\end{aligned}$$

فصل ۷

زیرگروه و زیرجبر

۱.۷ زیرگروه لی

پیش از تعریف زیر گروه لی، ثابت می‌کنیم که:

۱.۱.۷ لم. گیریم H و G گروه لی هستند و $\ell : H \to G$ یک هومورفیسم یک به یک است. در این صورت، هومورفیسم القایی $L(\ell) : L(H) \to L(G)$ نیز یک به یک است.

اثبات: گیریم $\alpha_۱, \alpha_۲ \in \mathcal{L}(H)$ زیرگروههای ۱–پارامتری از H با $\ell \circ \alpha_۱ = \ell \circ \alpha_۲$ هستند. چون ℓ یک به یک است، پس $\alpha_۱ = \alpha_۲$. بنابراین، نگاشت $\mathcal{L}(\ell) : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(G)$ القایی توسط ℓ یک به یک است. این مطلب، بنا به ۱۳.۴.۵، ایجاب می‌کند که $L(\ell)$ نیز یک به یک می‌باشد. □

توجه کنید که بنا به لم ٦.٢.٦، بازاء هر $h \in H$ ای، نگاشت مشتق مماس ℓ در h، یعنی $\ell_{*h} : H_h \to T_{\ell(h)}G$ یک به یک است.

۲.۱.۷ تعریف. گیریم G گروه لی است. زیر گروه H از G در صورتی زیرگروه لی است که:

(۱) H گروه لی باشد.

(۲) نگاشت احتوی $\ell : H \hookrightarrow G$ تحلیلی باشد.

گیریم H زیرگروه لی از G است. بنا به لم ۱.۱.۷ و یادداشت پس از آن، زوج مرتب (H, ℓ) زیرمنیفلدی از G است. البته، تعریف زیر منیفلد چنین است:

۳.۱.۷ تعریف. گیریم G منیفلد است. زیرمجموعهٔ H از G در صورتی زیرمنیفلد است که:

(۱) H منیفلد باشد.

(۲) نگاشت احتدی $\ell : H \hookrightarrow G$ ایمرشن باشد. یعنی، نگاشت ℓ دیفرانسیلپذیر بوده و بازاء هر $h \in H$ ای $\ell_{*h} : H_h \to T_{\ell(h)}G$ یک به یک باشد.

گیریم H زیرگروهی از G است، که همزمان زیر منیفلد G نیز هست. در این صورت می‌توان نشان داد که اعمال گروهی در H تحلیلی هستند و لذا H زیر گروه لی از G است.

توجه شود که زیر گروه ۱−پارامتری $\alpha : \mathbb{R} \to G$ وقتی و تنها وقتی زیر گروه لی است که α یک به یک باشد.

گیریم H زیر گروه لی G است. در این صورت، بنا به ۱.۱.۷ نگاشت ۱ محتوای $\ell : H \hookrightarrow G$ یک نگاشت یک به یک $L(\ell) : L(H) \to L(G)$ القاء می‌کند. بنابراین، $L(H)$ را با زیر گروهی از $L(G)H$ می‌توان یکی گرفت و نوشت $L(\ell) : L(H) \to L(G)$.

۴.۱.۷ لم. گیریم H زیر گروه لی G است. نگاشت $\exp : T_eH \to H$ تحدید نگاشت $\exp : T_eG \to G$ است.

اثبات: این حکم پس از اعمال یکی گیریهای کانونی دقیقاً همان طبیعی بودن ٦.۱.٦ نگاشت نمایی است. $\square$

۵.۱.۷ گزاره. گیریم $H_۱$ و $H_۲$ زیر گروه لی همبند G هستند. اگر $L(H)_۱ = L(H)_۲$، آنگاه $H_۱ = H_۲$.

اثبات: همسایگی باز e در $H_۱$ وجود دارد که همسایگی باز e در $H_۲$ نیز هست (یک چارت کانونی در e را در نظر گرفته و ۴.۱.۷ را بکار ببرید). $\square$

حکم زیر را بدون اثبات مطرح می‌کنیم.

٦.۱.۷ لم. گیریم X و Y منیفلد، S زیر منیفلدی از Y و $\varphi : X \to Y$ نگاشتی دیفرانسیلپذیر با $\varphi(X) \subseteq S$ است. اگر نگاشت القایی $\hat{\varphi} : X \to S$ پیوسته باشد، دیفرانسیلپذیر است. $\square$

۷.۱.۷ لم. گیریم G گروه لی و H زیر گروه لی آن است. در این صورت:

$$L(H) = \{A \in L(G) \mid t \mapsto \exp(tA) \text{ نگاشتی پیوسته } \mathbb{R} \to H \text{ است}\} \qquad (۱.۷)$$

اثبات: از $A \in L(H)$ نتیجه می‌شود $t \mapsto \exp(tA)$ نگاشتی دیفرانسیلپذیر $\mathbb{R} \to H$ است. حال بالعکس، فرض کنیم $A \in L(G)$ و $t \mapsto \exp(tA)$ نگاشتی پیوسته $\mathbb{R} \to H$ است. در این صورت، بنا به لم ٦.۱.۷، نگاشت مذکور دیفرانسیلپذیر است و لذا $A \in L(H)$. $\square$

۸.۱.۷ گزاره. گیریم $H_۱$ و $H_۲$ دو زیر گروه لی از G هستند. اگر $H_۱$ و $H_۲$ بعنوان گروه توپولوژی یکسان باشند، به عنوان گروه لی نیز یکسانند.

اثبات: حکم ۷.۱.۷ توصیفی برای جبر لی تنها به کمک خواص توپولوژی مطرح می‌کند. بنا به ۵.۱.۷ $H_{۱_\circ} = H_{۲_\circ}$. نگاشت همانی $H_۱ \to H_۲$ بنابراین ایزومورفیسم است. $\square$

البته این حکم نتیجه‌ای از ۷.۳.٦ نیز هست، ولی ترجیح دادیم اثباتی ساده و مستقیم ارائه کنیم.

اکنون، اذعان می‌داریم که:

۹.۱.۷ قضیه. گیریم G گروه لی است. اگر H یک زیر گروه لی از G باشد، آنگاه جبر لی H زیر جبر لی $L(G)$ است. هر زیر جبر لی از $L(G)$ جبر لی یک زیرگروه لی همبند منحصر بفرد از G است.

اثبات: تنها کافی است نشان دهیم که بازاء هر زیر جبر $\mathcal{H}$ مفروض از $L(G)$، یک زیر گروه لی همبند منحصر بفرد H از G با $L(H) = \mathcal{H}$ وجود دارد. $\square$

فرض کنیم چنین زیر گروه لی $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد. در این صورت $\exp(\mathcal{H}) \subseteq H$. بعلاوه، $\exp(\mathcal{H})$ همسایگی بازی از e در H را در بر دارد و لذا H را تولید می‌کند. پس بالعکس، مجازیم تا H را به صورت زیر گروه تولید شده توسط $\exp(\mathcal{H})$ تعریف کنیم. مسأله این است که H را زیر منیفلدی از G کنیم! ما این کار را انجام نمی‌دهیم، با این حال اثباتی

دیگر را خلاصه وار مطرح می‌کنیم (به قضیهٔ ۱ از صفحهٔ ۱۰۹ در شوالی [۱] مراجعه شود) که در آن از قضیهٔ وجودی منیفلدهای انتگرال یک میدان پیچشی از زیر فضاهای بر یک منیفلد استفاده می‌کنیم.

گیریم H زیر گروه لی G است. در این صورت، همدسته‌های چپ G به پیمانهٔ H عبارتند از زیر منیفلدهای انتگرال ماکسیمال میدان زیر فضاهای W بر G که توسط زیر فضاهای مماس همدسته‌ها تعریف می‌گردد. حال، بالعکس زیر جبری $\mathcal{H} \subseteq L(G)$ را در نظر گرفته و میدان زیر فضاهای W را می‌سازیم: W_g را زیر فضای $\{A_g\big|_A \in \mathcal{H}\}$ می‌گیریم. چون W زیر جبر است، پس W پیچشی است. گیریم H منیفلد انتگرال ماکسیمال W گذرنده از e است. برای مشاهدهٔ اینکه H زیر گروهی از G است. ابتدا توجه می‌کنیم که میدان زیر فضاهای W نسبت به انتقالهای چپ ناوردا است. بنابراین، منیفلدهای انتگرال ماکسیمال به توسط انتقالهای چپ جابجا می‌شوند. حال اگر $h \in H$، آنگاه $L_{h^{-1}}h = e$ و لذا $L_{h^{-1}}H = H$. بالعکس، اگر $L_{h^{-1}}H = H$ بازاء یک $h \in G$ ی، آنگاه $h \in H$. بنابراین $H = \{h \,|\, L_{h^{-1}}H = H\}$ و H زیر گروهی از G است. چون H زیر منیفلدی از G است، ملاحظه می‌کنیم که H زیر گروه لی در G است و برهان تمام است.

۱۰.۱.۷ تمرین. گیریم X یک G−منیفلد و H زیر جبر لی G است. در این صورت X یک H−منیفلد است. فرض کنیم $\tau : G \to \mathrm{Aut}(X)$ عملی مؤثر از G بر X است و S زیر جبری از جبر لی KX میدانهای برداری کیلینگ بر X است. در این صورت، زیر گروه لی منحصر بفرد H از G چنان وجود دارد که تحدید τ به H عملی از H بر X تعریف می‌کند و S جبر لی میدانهای کیلینگ آن است.

۲.۷ وجود هومومورفیسمهای موضعی

با لم زیر آغاز می‌کنیم.

۱.۲.۷ لم. گیریم $\rho : G \to G'$ یک هومومورفیسم موضعی بین گروههای لی است. در این صورت اگر $L(\rho) : L(G) \to L(G)'$ ایزومورفیسم باشد، آنگاه ρ نیز ایزومورفیسم موضعی است.

اثبات: اگر $L(\rho)$ ایزمورفیسم باشد، همسایگی بازی از e' در G' و نگاشتی μ که وارون موضعی $\rho : G \to G'$ وجود دارد. چون ρ هومومورفیسم موضعی است، μ لزوماً ایزمورفیسم موضعی است و بنابراین ρ ایزومورفیسم موضعی است. □

۲.۲.۷ مثال. اگر G تعویض پذیر باشد، آنگاه بنا به ۴.۱.۶ نگاشت $\exp : L(G) \to G$ یک هومومورفیسم است. اکنون $L(\exp) = Id_{L(G)} : L(G) \to L(G)$ و بعلاوه بنا به ۷.۲.۶، نگاشت $\exp$ پوشا است. این براین تعیین ساختار گروههای لی همبند تعویض پذیر کافی است. (به بخش ۳.۷ توجه شود).

قبلاً در ۱۱.۲.۶ وجود هومومورفیسم موضعی $\rho : G \to G'$ القایی توسط یک هومومورفیسم مفروض $h : L(G) \to L(G)'$ برای گروههای تعویض پذیر را ثابت کرده‌ایم. حال این را در حالت کلی اثبات می‌کنیم.

۳.۲.۷ قضیه. گیریم G و G' گروه لی‌اند و $h : L(G) \to L(G)'$ هومومورفیسمی بین جبرهای لی هستند. هومورفیسمی موضعی $\rho : G \to G'$ با $L(\rho) = h$ وجود دارد.

توجه شود که بنا به ۱۱.۲.۶، لزوماً ρ بر دامنهٔ یک چارت کانونی با $\exp \circ h \circ \log$ یکی است.

اثبات: گیریم $\tilde{K} = \{(A, h(A))\big|_A \in L(G)\}$. در این صورت، $\tilde{K}$ زیر جبر از $L(G) \times L(G)'$ همراه با ساختار جبر لی در تعریف ۲.۶.۴ است. گیریم K زیر گروه لی همبند از $G \times G'$ با جبر لی $\tilde{K}$ است. اگر $p : G \times G' \to G$

تصویر طبیعی باشد، هومومورفیسم $\lambda = p\big|_K : K \to G$ را در نظر می‌گیریم. $L(\lambda) : \tilde{K} \to L(G)$ نگاشتی با ضابطهٔ $L(\lambda)(A, h(A)) = A$ است و لذا ایزومورفیسم می‌باشد. بنا به لم ۱.۲.۷، λ یک ایزومورفیسم موضعی با وارون موضعی $\mu : G \to K$ است. بعلاوه، بازاء هر $A \in L(G)$ ای $L(\mu)A = (A, h(A))$. ترکیب $\mu : G \to K$ با تصویر $G \times G' \to G'$ هومومورفیسمی موضعی $\rho : G \to G'$ است. بنا به روش ساخت بالا، بازاء هر $A \in L(G)$ ای $L(\rho)(A) = h(A)$. به عبارت دیگر $L(\rho) = h$. □

این قضیه به همراه یکتایی مشروح در ۸.۲.٦ اذعان می‌دارد که L یک فانکتور کاملاً صادق بر کاتگوری گروههای لی و هومومورفیسمهای موضعی به کاتگوری جبرهای لی و هومومورفیسمهای بین جبرهای لی می‌باشد.

برای اینکه بتوانیم از یکتایی سخن دقیق به میان آوریم، بایستی جرمهای از هومومورفیسمهای موضعی را در نظر بگیریم. به بیان دیگر، لازم است هومومورفیسمهایی که بر یک همسایگی از عنصر همانی برابرند را برابر بگیریم.

در ٦.۵.۴ دیدیم که هر ایزومورفیسم موضعی بین گروههای لی، ایزمورفیسمی بین جبرهای لی القاء می‌کند. این امر نتیجه‌ای بدیهی از فاکتور بودن L می‌باشد. اکنون قادریم نشان دهیم که:

۴.۲.۷ قضیه. دو گروه لی G و G' وقتی و تنها وقتی موضعاً ایزومورفند که جبرهای لی آنها $L(G)$ و $L(G)'$ ایزمورف باشند.

اثبات: اگر $h : L(G) \to L(G)'$ ایزومورف باشد، آنگاه بنا به ۳.۲.۷ یک هومومورفیسم موضعی $\rho : G \to G'$ وجود دارد که h را القاء می‌کند. بنابراین، بنا به ۱.۲.۷ نگاشت ρ ایزومورفیسم موضعی است. □

این قضیه مهمترین حکمی است که تا کنون اثبات کرده‌ایم. این حکم بما می‌گوید که دقیقاً چه اطلاعاتی از جبر لی یک گروه لی استخراج می‌گردد. توجه کنید که قضیهٔ ۴.۲.٦ نتیجه‌ای ساده از ۴.۲.۷ است. در تکمیل مطالعهٔ حاضر، بجا است این خواسته مطرح شود که هر جبر لی با بعد متناهی روی $\mathbb{R}$ به صورت جبر لی یک گروه لی ظاهر شود. این درست است، اما آنرا در اینجا ثابت نمی‌کنیم. اثبات آن از قضیه به شرح ذیل که به آدو Ado منتسب است، نتیجه می‌گردد: هر $\mathbb{R}$−جبر لی با بعد متناهی g، با زیر جبری از جبرلی $g(n, \mathbb{R})$ گروه لی $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$، که n عددی خاص (وابسته به g) است، ایزومورف می‌باشد. زیر گروه همبند $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ متناظر به این زیر جبر لی، گروه لی ای است که جبر لی آن با g ایزومورف می‌باشد.

این نشان می‌دهد که به هر تقدیر، هر گروه لی دلخواه با زیر گروه لی ای از یک گروه $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ موضعاً ایزومورف است (که n عددی وابسته به g است).

نکتهٔ دیگری که می‌خواهیم در اینجا مشخ گردد، رابطهٔ بین هومومورفیسمهای (موضعی) و هومومورفیسمهای (فراگیر) است. گیریم $\rho : G \to G'$ یک هومومورفیسم موضعی است و G همبند باشد. بنا به ۹.۲.٦، حداکثر یک توسیع از ρ به یک هومومورفیسم فراگیر از G به G' وجود دارد. ما از لم ذیل در خصوص گروههای توپولوژی در این خصوص استفاده می‌کنیم.

۵.۲.۷ لم. گیریم G گروه توپولوژیک همبند، همبند موضعی و همبند ساده است و G' گروه توپولوژی دلخواه است و $\rho : G \to G'$ هومومورفیسمی موضعی (بین گروههای توپولوژی) می‌باشد. در این صورت یک توسیع منحصر بفرد از ρ به هومومورفیسمی $\tilde{\rho} : G \to G'$ وجود دارد.

اثبات: یکتایی بدیهی است. برای اثبات وجود، بر $G \times G'$ یک توپولوژی تعریف می‌کنیم. گیریم $V \subset G$ یک همسایگی همبند از e است که ρ بر آن تعریف می‌گردد. اگر $(g, g') \in G \times G'$، در این صورت به شکل:

$$N(g, g', W) = \big\{(x, x')\big|_x = g, x' = \rho()g', \in\big\} \qquad (۲.۷)$$

دستگاهی اساسی از همسایگیها را تعریف می‌کنیم، که W همسایگی بازی از e در G با $W \subset V$ است. نشان می‌دهیم که تصویر $p : G \times G' \to G$ یک نگاشت پوششی برای G می‌باشد. نگاشت $(wg, \rho(w)g') \mapsto$ هومومورفیسمی از W به $N(g, g'W)$ است. اگر W همبند باشد، در این صورت $N(g, g', W)$ همبند است و $p|_{N(g,g',W)}$ هومومورفیسمی از $N(g, g', W)$ و W_g می‌باشد. $p^{-1}(g)$ اجتماعی مجزا از $N(g, g',)$ های با $g' \in G'$ است. هر یک از مجموعه‌های $N(g, g', W)$، زیرمجموعه‌ای همبند و باز از این اجتماع می‌باشد. بنابراین $G \times G'$ موضعاً همبند است و p نگاشت پوششی است. گیریم $\tilde{G}$ نمایشگر مؤلفهٔ همبندی عنصر (e, e') در $G \times G'$ است. در این صورت $(\tilde{G}, p|_{\tilde{G}})$ فضای پوششی برای G است و $p|_{\tilde{G}}$ هومومورفیسم است، چرا که G همبند ساده است. گیریم μ وارون آن است و تعریف می‌کنیم $\tilde{\rho} = q \circ \mu$، که $q : G \times G' \to G'$ تصویر کانونی است. اگر $v \in V$، آنگاه $\tilde{\rho}(v) = \rho(v)$، $\tilde{\rho}$ توسیع ρ است. لازم است نشان دهیم که $\tilde{\rho}$ نیز هومومورفیسم است. بنا به تعریف $\tilde{\rho}$، بازاء هر $v \in V$ و $g \in G$ ای داریم:

$$\tilde{\rho}((\Pi_i v_i)g) = (\Pi_i \tilde{\rho}(v_i))\tilde{\rho}(g) \qquad (۳.۷)$$

و بخصوص:

$$\tilde{\rho}(\Pi_i v_i) = \Pi \tilde{\rho}(v_i) \qquad (۴.۷)$$

بنابراین:

$$\tilde{\rho}((\Pi_i v_i)g) = \tilde{\rho}(\Pi_i v_i)\tilde{\rho}(g) \qquad (۵.۷)$$

چون V کل G را تولید می‌کند، پس $\tilde{\rho}$ هومومورفیسم است. □

همراه با لم ۴.۳.۶، از این نتیجه می‌گیریم که:

۶.۲.۷ گزاره. گیریم G یک گروه لی ساده و همبند است و G' گروه لی دلخواه و $\rho : G \to G'$ هومومورفیسم موضعی است. در این صورت، توسیعی منحصر بفرد از ρ به یک هومومورفیسم $\tilde{\rho} : G \to G'$ وجود دارد.

توجه کنید که در گزارهٔ ۹.۴.۵ حالت خاصی از این حکم را اثبات کرده‌ایم.

۷.۲.۷ نتیجه. گیریم G و G' گروه لی هستند و $h : L(G) \to L(G)'$ هومومورفیسمی بین جبرهای لی است. اگر G همبند و همبند ساده باشد، آنگاه هومومورفیسمی یکتا $\rho : G \to G'$ با $L(\rho) = h$ وجود دارد.
بعلاوه، اگر G' همبند و همبند ساده باشد و h ایزومورفیسم، در این صورت ρ ایزومورفیسم است.

اثبات: به هومومورفیسم $h : L(G) \to L(G)'$، بنا به قضیهٔ ۳.۲.۷ یک هومومورفیسم موضعی $\rho : G \to G'$ نظیر می‌گردد که h را القاء می‌کند. اگر G همبند و همبند ساده باشد، آنگاه بنا به ۶.۲.۷ می‌توان ρ را به صورت یکتا به یک هومومورفیسم توسیع داد.
حال فرض کنیم G' نیز همبند و همبند ساده است. اگر h ایزومورفیسم باشد، وارون آن k هم توسط هومومورفیسمی $\lambda : G \to G'$ القاء می‌گردد. اکنون $L(\lambda \circ \rho) = 1_{L(G)}$ و بنا به یکتایی $\lambda \circ \rho = 1_G$. به صورت مشابه $\rho \circ \lambda = 1_G$ و ρ ایزومورفیسم. □

بعنوان یک کاربرد، گروه لی تعویض پذیر G در نظر بگیرید. بنا به ۴.۱.۶ نگاشت $\exp : L(G) \to G$ هومومورفیسم است. این توسط ایزمورفیسمی $1_{L(G)} : L(G) \to L(G)$ از جبرهای لی القاء شده است. نتیجهٔ ۷.۲.۷ نشان می‌دهد که:

۸.۲.۷ گزاره. اگر G گروه لی همبند ساده، همبند و تعویض پذیر باشد، آنگاه $\exp : L(G) \to G$ ایزومورفیسم است. □

۹.۲.۷ یادداشت. در اینجا، وجود گروه پوششی عام برای هر گروه لی همبند دلخواه را مطرح می‌کنیم (ولی اثباتی از آن مطرح نمی‌کنیم). یک گروه لی همبند ساده و همبند $\tilde{G}$ و یک هومومورفیسم $\varphi : \tilde{G} \to G$ که ایزومورفیسم موضعی است، به گونه‌ای وجود دارد که $(\tilde{G}, \varphi)$ منیفلدی پوششی برای G است. $(\tilde{G}, \varphi)$ خاصیت عامل ذیل را دارد: بازاء هر گروه لی H همبند ساده و همبند و هر هومومورفیسم $\rho : H \to G$، هومومورفیسم یکتایی $\tilde{\rho} : H \to \tilde{G}$ با $\rho = \varphi \circ \tilde{\rho}$ وجود دارد.

اگر G گروه لی همبند تعویض پذیر باشد، آنگاه زوج $(L(G), \exp)$ گروه پوششی عام برای G است.

حال فرض کنیم G گروه لی همبند، G' گروه لی دلخواه و $\rho : G \to G'$ هومومورفیسم موضعی است. گیریم $(\tilde{G}, \varphi)$ گروه پوششی عام برای G است. در این صورت، هومومورفیسم موضعی $\rho \circ \varphi : \tilde{G} \to G'$ بنا به ٦.۲.۷ توسیعی یکتا به یک هومومورفیسم $\Psi : \tilde{G} \to G'$ دارد. اگر G' همبند و (G', φ') گروه پوششی عام برای G' باشد، آنگاه هومومورفیسمی یکتا $\tilde{\Psi} : \tilde{G} \to \tilde{G}'$ با $\Psi = \tilde{\Psi} \circ \varphi$ وجود دارد.

بویژه، فرض کنید $\rho : G \to G'$ ایزومورفیسمی موضعی بین گروههای لی همبند G و G' باشد. استدلال بالا نشان می‌دهد که $\tilde{\Psi} : \tilde{G} \to \tilde{G}'$ ایزومورفیسم موضعی است. بنا به نتیجهٔ ۷.۲.۷، $\tilde{\Psi}$ ایزومورفیسم است. بنابراین، هر ایزومورفیسم موضعی بین گروههای لی همبند، ایزومورفیسمی بین گروههای پوششی عام نظیر به آنها، القاء می‌کند. این بدان معنی است که به هر دسته از گروههای لی همبند موضعاً ایزومورف، گروه لی منحصر بفردی (در حد ایزومورفیسم) نظیر می‌گردد، که گروه پوششی عام هر یک از اعضاء کلاس می‌باشد. هر عضو از کلاس مذکور، به صورت خارج قسمت این گروه پوششی عام بر زیرگروه نرمال گسسته‌ای از آن قابل بیان است (به بخش ۳.۷ توجه شود). بنا به ۴.۲.۷ نگاشتی یک به یک از کلاسهای از گروههای لی موضعاً ایزومورف، بتوی کلاسهای از $\mathbb{R}$−جبرهای لی ایزومورف وجود دارد. بنا به قضیه مشروح در بالا از آدو، این نگاشت دوسویی است. بنابراین، مسألهٔ طبقه‌بندی همهٔ گروههای لی همبند ممکن، به دو مرحله می‌شکنند. اول پیدا کردن همهٔ $\mathbb{R}$−جبرهای لی. دوم پیدا کردن همهٔ زیرگروههای نرمال گسستهٔ یک گروه لی همبند ساده.

مسألهٔ محدود شدهٔ طبقه بندی همهٔ گروههای لی همبند تعویض پذیر ممکن را در نظر بگیرید. هر جبر لی تعویض پذیر، توسط بعدش مشخص می‌گردد. بنابراین، مسألهٔ طبقه بندی محدود شدهٔ مذکور به مسألهٔ یافتن همهٔ زیرگروههای گسستهٔ یک گروه لی همبند سادهٔ تعویض پذیر تقلیل می‌یابد. بنا به ۸.۲.۷ این درست همان مسألهٔ یافتن زیرگروههای گسستهٔ یک $\mathbb{R}$−فضای برداری با بعد متناهی است. این را در بخش بعدی به سامان می‌رسانیم.

۳.۷ زیرگروههای گسسته

گیریم G گروه لی و H زیرگروهی از آن است. آیا H زیرگروه لی‌ای از G را می‌تواند تعریف کند؟

در مورد توپولوژی مفروضی بر H (نه لزوماً توپولوژی القایی از G بر H)، به گونه‌ای که H گروه توپولوژی است، بنا به ۸.۱.۷ حداکثر یک ساختار گروه لی وجود دارد که این توپولوژی را القاء می‌کند و H به زیر گروه لی‌ای از G تبدیل می‌گردد.

مثال اعداد گویا $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ نشان می‌دهد که اگر توپولوژی القایی بر H را در نظر بگیریم، لزومی ندارد که ساختار گروه لی‌ای بر H بتوان یافت، که توپولوژی القایی آن همین توپولوژی بر H باشد و H را به زیرگروهی لی از G تبدیل کند.

همواره H را به صورت منیفلدی ۰ — بعدی میتوان در نظر گرفت، و به این ترتیب H زیر گروه لی‌ای از G می‌گردد. جبر لی هر گروه لی صفر بعدی ۰ زیر جبرلی از $L(G)$ متناظر به هر زیرگروه لی ۰ — بعدی از G نیز ۰ است. باز هم مثال $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ نشان می‌دهد که سوای این روند بدیهی، هیچ راهی برای ساخت زیر گروه لی از روی زیر گروه مفروض یک گروه لی دلخواه وجود ندارد.

۱.۳.۷ تعریف. گیریم G گروه توپولوژی است. زیرگروه گسستهٔ H از G، زیرگروهی است که زیر فضای گسسته از G با باشد. وقتی G گروه لی است، طبیعی است که هر زیرگروه گسسته H از G را به صورت زیر گروهی لی $0-$ بعدی از G قلمداد کنیم. توجه کنید که هر زیر گروه گسسته از یک گروه لی G، زیر گروهی بسته است (از اینکه هاوسدورف است استفاده کنید).

۲.۳.۷ مثال. گیریم $0 \leq p \leq n$. در این صورت $\mathbb{Z}^p$ زیر گروهی گسسته از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

حال نشان می‌دهیم که:

۳.۳.۷ گزاره. گیریم G و G' دو گروه توپولوژی و $\rho : G \to G'$ هومومورفیسمی است که موضعاً ایزمورفیسم نیز می‌باشد. در این صورت، هستهٔ ρ زیرگروهی نرمال و گسسته از G است.

اثبات: همسایگیهای باز N و N' بترتیب از e و e' در G و G' به گونه‌ای وجود دارند که $\rho|_N : N \to N'$ هومومورفیسم است. بنابراین $\mathrm{Ker}(\rho) \cap N = \{e\}$ و e نقطه‌ای ایزوله از $\mathrm{Ker}(\rho)$ است. چون انتقالهای گروه، هومومرفیسم هستند، هر نقطه از $\mathrm{Ker}(\rho)$ ایزوله است و لذا $\mathrm{Ker}(\rho)$ گسسته می‌باشد. □

۴.۳.۷ نتیجه. گیریم G یک گروه لی تعویض پذیر است. هستهٔ هومومورفیسم $\exp : L(G) \to G$ زیرگروهی گسسته از جمعی $L(G)$ است.

اثبات: بنا به مثال ۲.۲.۷ نگاشت $\exp : L(G) \to G$ ایزومورفیسم موضعی است. □

این مسألهٔ یافتن همهٔ زیرگروههای گسستهٔ گروه برداری جمعی یک $\mathbb{R}-$فضای برداری با بعد متناهی را موجب می‌گردد. هر چنین زیرگروهی، با یک گروه $\mathbb{Z}^n$ ایزومورف است، که در آن $p \leq \dim V$. به بیان دقیق‌تر، نشان می‌دهیم که:

۵.۳.۷ لم. گیریم V یک $\mathbb{R}-$فضای برداری n بعدی است و D زیر گروهی گسسته از گروه برداری جمعی است. گیریم $p \leq n$ بعد زیرفضای تولید شده توسط D در V است. در این صورت، p برداری مستقل خطی $v_1, \cdots, v_p \in V$ یافت می‌شوند که D را تولید می‌کنند.

اثبات: فرض کنید حالت $p = 1$ معلوم است و لم را به استقراء ثابت می‌کنیم. فرض کنید لم برای همهٔ $k < p$ درست است و D زیر فضایی $p-$بعدی U از V را تولید می‌کند. زیر فضایی $(p-1)-$بعدی A از U وجود دارد که توسط عناصر در D تولید می‌گردد. گیریم $v_1, \cdots, v_{p-1}$ بردارهایی مستقل خطی در V هستند که $D \cap A$ را تولید می‌کنند. اکنون $D + A/A \cong D = D \cap A$. اینکه ایزومورفیسم جبری مذکور، ایزمورفیسم توپولوژیک است، از این نکته نتیجه می‌گردد که این گروهها موضعاً فشرده‌اند و $D + A$ پایه‌ای شمارا دارد (برای مشاهدهٔ اثباتی از آن به نتیجهٔ ۳.۳ از هنگاسون [٦] توجه کنید). بکمک این ملاحظه می‌کنیم که $D + A/A$ گسسته است. چون زیر گروهی از فضای برداری یک بعدی U/A است، گروه $D + A/A$ توسط عنصری $v_p + A$ تولید می‌گردد. بنابراین $v_1, \cdots, v_p$ مستقل خطی‌اند و D را تولید می‌کنند. □

اکنون قادریم تا ساختار گروههای لی همبند تعویض پذیر را مشخص کنیم.

٦.۳.۷ قضیه. گیریم G یک گروه همبند تعویض پذیر از بعد n است. عدد صحیحی p با $0 \leq p \leq n$ چنان وجود دارد که $G \cong \mathbb{R}^{n-p} \times \Pi^p$.

اثبات: بنا به گزارهٔ ۷.۲.٦ نگاشت $\exp : L(G) \to G$ هومومورفیسم است. بنابراین، ایزومورفیسمی $L(G)/\mathrm{Ker}\exp \cong G$ به تعبیر جبری وجود دارد. اینکه مستقیماً نشان دهیم ایزومورفیسم گروههای لی است، کار دشواری نیست. آنرا حذف

کرده و در ۷.۷.۷ حکمی کلی‌تر را ثابت می‌کنیم. اکنون بازاء یک p با $n \leq p \leq \circ$، بنا به لم ۵.۳.۷ داریم. بنابراین $G \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^p$ که اثبات را قضیه را ثابت می‌کند. □

۷.۳.۷ نتیجه. گیریم G یک گروه لی همبند و فشرده و با بعد n است. آنگاه $G \cong \Pi^n$. □

همان طور که در پایان بخش ۲.۷ ذکر کردیم، یک مرحله از مسألهٔ طبقه بندی گروههای لی، یافتن همهٔ زیرگروههای نرمال گسستهٔ یک گروه لی همبند ساده است. این را با حکم زیر فوق العاده ساده می‌کنیم:

۸.۳.۷ گزاره. گیریم H زیرگروه نرمال و گسسته از گروه توپولوژی همبند G است. در این صورت H در مرکز G قرار دارد.

اثبات: گیریم $h \in H$. نگاشت $G \to H$ با ضابطهٔ $g \mapsto ghg^{-1}$ پیوسته است. چون تصویر آن همبند است، بایستی تک نقطه باشد و بنابراین با h برابر است. □

۴.۷ زیرگروه باز و همبندی

گیریم G گروه لی و H زیرگروهی از آن است که زیر مجموعه‌ای باز از G می‌باشد. بنابراین H زیرمنیفلد G است و لذا زیر گروه لی G می‌باشد. جبر لی هر زیر گروه باز خود $L(G)$ است، چرا که نگاشت ۱ ممتوای آن ایزومورفیسمی موضعی از H به G می‌باشد. بنابراین، هر زیر گروه باز H از G الزاماً $G_\circ$ را در بر دارد، و چون $L(H) = L(G)$ نتیجه می‌گیریم $H_\circ = G_\circ$. یادآور می‌شویم که هر زیر گروه باز، الزاماً بسته است.

۱.۴.۷ مثال. گیریم V یک فضای برداری با بعد متناهی بر میدان اعداد حقیقی است و $\det : \mathrm{GL} \to \mathbb{R}^*$ هومورفیسم دترمینان است. چون $\mathbb{R}^*$ همبند نیست، $\mathrm{GL}(V)$ هم همبند نیست. از سوی دیگر، هر دو پایه برای V که هم جهت باشند (پس از انتخاب یک جهت برای V) را بشکل پیوسته و توسط اتومورفیسم‌های V می‌توان بهم تبدیل کرد. این نشان می‌دهد که در حقیقت $\det^{-1}(\mathbb{R}^+)$ مؤلفهٔ همبندی عنصر همانی در $\mathrm{GL}(V)$ است، که $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}^*\big|_x > \circ\}$.

گیریم H زیرگروهی باز از G و G/H مجموعهٔ همدسته‌های به پیمانهٔ H در G است. چون همهٔ همدسته‌های H نیز بازند، توپولوژی خارج قسمتی گسسته است و G/H را بعنوان منیفلدی $\circ$ — بعدی می‌توان در نظر گرفت. اگر H بخصوص زیر گروهی نرمال از G باشد، آنگاه G/H را به صورت یک گروه لی $\circ$ — بعدی می‌توان قلمداد نمود.

این موضوع در مورد مؤلفهٔ همبندی عنصر همانی نیز قابل بحث است ولذا خارج قسمت $\gamma = G/G_\circ$ گروه لی $\circ$ — بعدی است.

۲.۴.۷ مثال. گیریم $G = \mathrm{GL}(V)$ گروه اتومورفیسم‌های یک فضای برداری با بعد متناهی V است. در این صورت، بنا به مثال ۱.۴.۷ داریم $\gamma = \mathbb{Z}$.

چون هر مؤلفهٔ همبندی G و $G_\circ$ دیفئومورف است، منیفلد G با $G_\circ \times \gamma$ دیفئومورف می‌باشد. اما هیچ دیفئومورفیسم کانونی‌ای در این مورد وجود ندارد. هر شکافنده $s : \gamma \to G$ برای دنباله‌ی دقیق $e \to G_\circ \to G \to \gamma \to e$ به یک ایزومورفیسم از G بروی حاصلضرب نیم مستقیم $G_\circ \times_\tau \gamma$ موجب می‌گردد، که $\tau : \gamma \to \mathrm{Aut}G_\circ$ هومورفیسم با ضابطهٔ $\tau_\varepsilon = J_{s(\varepsilon)}$ برای $\varepsilon \in \gamma$، می‌باشد. چنین تجزیه‌ای در اغلب موارد وجود دارد.

۳.۴.۷ مثال. گیریم $G = \mathrm{GL}(V)$، که V یک $\mathbb{R}$–فضای برداری با بعد فرد است. انعکاس در مبداء V به همراه نگاشت همانی V، تصویر ایزومورف $Z_\circ = G/G_\circ$ در G را تشکیل می‌دهد.

در حالت گروه تعویض پذیر G، هر شکافنده $s : \gamma \to G$ برای دنبالهٔ دقیق $e \to G_\circ \to G \to \gamma \to e$ یک ایزومورفیسم از G بروی $G_\circ \times \gamma$ موجب می‌گردد.

۴.۴.۷ مثال. گیریم V یک $\mathbb{R}$–فضای برداری با بعد متناهی است. زیر فضای برداری U از V و برداری $a \in V$ را در نظر بگیرید که $a \notin U$. در این صورت، اجتماع U و انتقالهای آن باندازه مضراب صحیح a، بهمراه توپولوژی نسبی از V، تشکیل گروه لی می‌دهد. U مؤلفهٔ همبندی عنصر همانی G است و گروه مؤلفه‌های همبندی آن با $\mathbb{Z}$ ایزومورف می‌باشد. دنبالهٔ دقیق $\circ \to U \to G \to \mathbb{Z} \to \circ$ دارای همومورفیسم شکافندهٔ شخصی $s : \mathbb{Z} \to G$ است و لذا $G \cong U \times \mathbb{Z}$.

۵.۷ زیرگروههای بسته

دیدیم که زیرگروههای باز و نیز زیرگروههای گسستهٔ هر گروه لی، زیرگروه لی هستند. هر دوی این گروه از زیرگروهها، بسته هستند. اکنون اذعان می‌داریم که در کل:

۱.۵.۷ قضیه. گیریم G گروه لی و H زیر گروهی از G است. فرض کنید H زیرمجموعه‌ای بسته از G می‌باشد. دراین صورت، ساختار گروه لی منحصر بفردی بر H وجود دارد به گونه‌ای که توپولوژی القایی آن بر H، همان توپولوژی القایی از G بر H است و بعلاوه، h زیر گروه لی G می‌باشد.

اثبات: یکتایی از ۸.۱.۷ نتیجه می‌گردد. حال فرض کنیم H زیر گروهی بسته از G است. گیریم $\mathcal{L}$ به صورت زیر تعریف گردد:

$$\mathcal{L} := \{A \in L(G) \big| \exp(tA) \in H \text{ بازاء هر } t \in \mathbb{R} \text{ ای}\} \tag{۶.۷}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم که $\mathcal{L}$ زیرجبری از $L(G)$ است. $A \in \mathcal{L}$ بنا به تعریف $\mathcal{L}$ ایجاب می‌کند که بازاء هر $t \in \mathbb{R}$ ای $tA \in \mathcal{L}$. حال فرض کنیم $A, B \in \mathcal{L}$. در این صورت، بنا به ۶.۵.۶، قسمت (i)، بازاء هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\exp(t(A+B)) \in H$، چرا که H بسته است. بنابراین $A + B \in \mathcal{L}$ و بنا به قسمت (ii) از ۶.۵.۶ داریم که بازاء هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\exp t^2[A, B] \in H$ و بنابراین $[A, B] \in \mathcal{L}$. بنابراین، $\mathcal{L}$ زیرجبر $L(G)$ است.

حال زیر گروه لی همبند H^* از G با $L(H)^* = \mathcal{L}$ را در نظر بگیرید. به دلیل روش ساخت $\mathcal{L}$، داریم $\exp(\mathcal{L}) \subset H$ و بنابراین $H^* \subset H$، چرا که H^* توسط $\exp(\mathcal{L})$ تولید می‌گردد.

گیریم H با توپولوژی نسبی G همراه است. می‌خواهیم ثابت کنیم که هر همسایگی V از e در H^*، عملاً همسایگی‌ای از e در H است. این ثابت می‌کند که H^* زیر گروه توپولوژی H است (البته با استفاده از پیوستگی $H^* \hookrightarrow H$) و چنانچه V را H^* بگیریم، بعنوان گروه توپولوژی $H_\circ$ $H^* = H_\circ$. در نتیجه، $H_\circ$ زیرگروه لی G است. اکنون، به کمک تبدیلات یا انتقالهای از چپ، ساختار زیرمنیفلدی از G به H می‌دهیم. در این صورت، به وضوح ضرب $H \times H \to H$ دیفرانسیلپذیر است. این عملاً برای نشان دادن اینکه h زیرگروه لی G است، کافی است.

تنها مانده نشان دهیم که هر همسایگی V از e در H^* یک همسایگی از e در H است. فرض کنیم V همسایگی e در H نباشد و نشان می‌دهیم که این فرض به تناقض می‌انجامد. دنباله‌ای $c_1, \cdots, c_k, \cdots$ در $H - V$ با $\lim_{k\to\infty} c_k = e$ وجود دارد. گیریم M زیر فضای متمم $\mathcal{L}$ در $L(G)$ است. بنا به ۲.۳.۶، همسایگیهای همبند، باز و کراندار U_1 و U_2 از $\circ$ در M و $\mathcal{L}$ بترتیب به گونه‌ای وجود دارند که نگاشت:

$$\varphi : (A, B) \mapsto \exp(A).\exp(B) \qquad A \in M, B \in \mathcal{L} \tag{۷.۷}$$

دیفئومورفیسمی از $U_۱ \times U_۲$ بتوی همسایگی بازی از e در G وجود دارد. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم که $c_k = \exp(A_k)\exp(B_k)$ با $A_k \in U_۱$ و $B_k \in U_۲$ و $\exp(B_k) \in V$. در این صورت $A_k \neq ۰$ و $\lim_{k\to\infty} A_k = ۰$.

چون $A_k \neq ۰$، عدد صحیح $r_k > ۰$ به گونه‌ای وجود دارد که $r_k A_k \in U_۱$ و $(r_k + ۱)A_k \notin U_۱$. اکنون $U_۱$ کراندار است و لذا با رفتن به زیر دنباله‌ها، دنباله‌ی $(r_k A_k)$ همگرا به یک $A \in U_۱$ است. چون $(r_k + ۱)A_k \notin U_۱$ و $A_k \to ۰$، پس A بر مرز $U_۱$ قرار ندارد، نتیجتاً $A \neq ۰$.

گیریم p و q دو عدد صحیح با $q > ۰$ هستند. می‌توانیم بنویسیم $pr_k = qs_k + t_k$، که s_k و t_k اعداد صحیح هستند و $۰ \leq t_k < q$. در این صورت $\lim \frac{t_k}{q} A_k$ صفر است و بنابراین:

$$\exp\left(\frac{p}{q}A\right) = \lim_{k\to\infty} \exp\left(\frac{pr_k}{q}A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \left(\exp(A_k)\right)^{s_k} \qquad (۸.۷)$$

که به H متعلق است. بنا به پیوستگی، بازاء هر $r \in \mathbb{R}$ ای $\exp(tA) \in H$. اما در این صورت $A \in \mathcal{L}$ که با فرض $A \in U_۱ \subset M$ و $A \neq ۰$ در تضاد است.

حالاتهای خاص ۱.۵.۷ که قبلاً بحث شده است، به گونه‌ای است که H گسسته است یا زیرگروهی باز از G است، که به حالت $\mathcal{L} = ۰$ یا $\mathcal{L} = L(G)$ متناظر است.

۲.۵.۷ نتیجه. گیریم G گروه لی است و H زیرگروهی بسته از آن می‌باشد. گیریم $L(H)$ جبر لی H به همراه ساختار گروه لی منحصر بفرد تعریف شده در ۱.۵.۷ است. در این صورت:

$$L(H) = \left\{A \in L(G)\middle|\, \exp(tA) \in H \text{ بازاء هر } t \in \mathbb{R} \text{ ای}\right\} \qquad (۹.۷)$$

اثبات: جبر لی H در اثبات ۱.۵.۷ با این خاصیت تعریف شد. □

۳.۵.۷ یادداشت. نتیجهٔ ۲.۵.۷ برای زیر گروه لی دلخواهی H از G که به تعداد شمارا مؤلفه نیز دارد، درست می‌باشد. به صفحهٔ ۱۰۸ از هدگاسون [٦] توجه کنید.

هستهٔ هومورفیسمهای از G به گروههای دیگر، دستهٔ مهمی از زیرگروههای بستهٔ هر گروه لی G را تشکیل می‌دهند.

۴.۵.۷ گزاره. گیریم $\rho : G \to G'$ هومورفیسم بین گروههای لی است. در این صورت $\mathrm{Ker}(\rho)$ زیرگروه لی G است و $L(\mathrm{Ker}(\rho)) = \mathrm{Ker}(L(\rho))$، که $L(\rho) : L(G) \to L(G)'$ هومورفیسم القایی توسط ρ بین جبرهای لی است.

اثبات: $\mathrm{Ker}(\rho)$ زیرگروه بستهٔ G است و لذا بنا به ۱.۵.۷ زیرگروه لی G می‌باشد. بنابه ۲.۵.۷:

$$L(\mathrm{Ker}(\rho)) = \left\{A \in L(G)\big|_{\rho}(\exp tA) = e' \text{ بازاء هر} t \in \mathbb{R} \text{ ای}\right\} \qquad (۱۰.۷)$$

که e' عنصر همانی G' است. بنا به طبیعی بودن ٦.۱.٦ نگاشت $\exp$، اینکه بازاء هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\rho(\exp(tA)) = e'$ معادل است با اینکه بازاء هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\exp(L(\rho)(tA)) = e'$. این خود معادل است با اینکه $\varepsilon > ۰$ ای چنان وجود دارد که بازاء هر $|t|<\varepsilon$ ای $L(\rho)(tA) = ۰$. این یعنی $L(\rho)(A) = ۰$. بنابراین $L(\mathrm{Ker}(\rho)) = \mathrm{Ker}(L(\rho))$. □

این بخصوص نشان می‌دهد که هسته‌ی هومورفیسم $L(\rho) : L(G) \to L(G)'$ یک جبر لی است. البته، این مطلب برای هستهٔ هر هومورفیسم بین جبرهای لی نیز درست است.

همچنین، مایلیم تا بتوانیم اطلاعات را به تصویر گروههای لی منتقل کنیم. در حقیقت، داریم:

۵.۵.۷ گزاره. گیریم $\rho : G \to G'$ هومورفیسمی بین گروههای لی است. فرض کنید G همبند است. در این صورت $\mathrm{Im}(\rho)$ زیرگروه لی G' است و $L(\mathrm{Im}\rho) = \mathrm{Im}(L(\rho))$. که $L(\rho) : L(G) \to L(G)'$ هومورفیسم القایی توسط ρ بین جبرهای لی است.

اثبات: گیریم H زیر گروه لی همبند G' با $L(H) = \mathrm{Im}(L(\rho))$ است. H توسط عناصری تولید می‌گردد که $A \in L(G)$. اما بنا به ٦.١.٦ داریم $\rho(\exp(A)) = \exp(L(\rho)(A))$. بنابراین، چون H و $\rho(G)$ همبند هستند، داریم $\rho(G) = H$. □

٦.۵.۷ یادداشت. مساله‌ای در اینجا مطرح است. آیا نگاشت القایی $\hat{\rho} : G \to \rho(G)$ هومومورفیسم است، به عبارت دیگر تحلیلی است؟ این درست است (۷.۷.۷).

حال دنباله‌ای از هومومورفیسم‌های بین گروههای لی:

$$G' \xrightarrow{\rho'} G \xrightarrow{\rho''} G'' \tag{۱۱.۷}$$

را در نظر بگیرید. دنباله‌ای از هومومورفیسم‌های بین جبرهای لی به شرح ذیل القاء می‌گردد:

$$L(G') \xrightarrow{L(\rho')} L(G) \xrightarrow{L(\rho'')} L(G'') \tag{۱۲.۷}$$

۷.۵.۷ گزاره. فرض کنید G' همبند است. در این صورت، دقیق بودن (۱۱.۷)، دقیق بودن (۱۲.۷) را ایجاب می‌کند.

اثبات: اگر "$\mathrm{Im}(\rho') = \mathrm{Ker}(\rho)$، آنگاه بنا به ۴.۵.۷ و ۵.۵.۷ داریم:

$$\mathrm{Im}(L(\rho')) = L(\mathrm{Im}(\rho')) = L(\mathrm{Ker}(\rho)") = \mathrm{Ker}(L(\rho")) \tag{۱۳.۷}$$

و برهان تمام است. □

۸.۵.۷ مثال. گیریم G یک گروه همبند است. دنبالهٔ دقیق:

$$\{\circ\} \longrightarrow T_eG \longrightarrow TG \longrightarrow G \longrightarrow \{e\} \tag{۱۴.۷}$$

از گروههای لی، دنباله‌ای دقیق:

$$\{\circ\} \longrightarrow T_eG \longrightarrow L(TG) \longrightarrow (G) \longrightarrow \{\circ\} \tag{۱۵.۷}$$

از جبرهای لی را القاء می‌کند. توجه کنید که شکافندهٔ طبیعی $G \hookrightarrow TG$ دنبالهٔ اول، شکافنده‌ای $L(G) \to L(TG)$ برای دنبالهٔ دوم تعریف می‌کند.

توجه کنید که عکس گزارهٔ ۷.۵.۷ درست نیست، حتی اگر همهٔ گروهها همبند باشند.

۹.۵.۷ مثال. گیریم $\rho : G \to G'$ هومومورفیسم بین گروههای لی است که همزمان ایزومرفیسم موضعی نیز هست. در این صورت:

$$\{\circ\} \longrightarrow L(G) \xrightarrow{L(\rho)} L(G') \longrightarrow \{\circ\} \tag{۱٦.۷}$$

دنباله‌ای دقیق است. اما لزومی ندارد که:

$$\{\circ\} \longrightarrow eG \longrightarrow G' \longrightarrow \{e'\} \tag{۱۷.۷}$$

دقیق باشد. بعبارت دیگر، لزومی ندارد که G و G' ایزومورف باشند.

حالت خاص زیر، گاهی اوقات برقرار است.

۱۰.۵.۷ گزاره. گیریم $\rho : G \to G'$ هومومورفیسم بین گروههای لی است. فرض کنید G و G' همبند هستند. در این صورت ρ وقتی و تنها وقتی پوشا است که $L(\rho) : L(G) \to L(G)'$ پوشا باشد.

اثبات: اگر ρ پوشا باشد، جبر لی $L(\rho)(L(G))$ گروه لی $\rho(G)$ بایستی با جبر لی $L(G)'$ گروه G' منطبق باشد، که نشان می‌دهد $L(\rho)$ پوشا است.

بالعکس، فرض کنید $L(\rho)$ پوشا است. در این صورت $\rho_{g*} : T_gG \to T_{\rho(g)}G'$ بنا به ۶.۲.۶ پوشا است، $g \in G$. بنابراین $\rho(G)$ زیرگروهی باز (و لذا بسته) از G' است. در نتیجه $\rho(G) = G'$. □

شرط همبند بودن G' را نمی‌شود حذف کرد. چرا که نگاشت احتوی مؤلفهٔ همبندی عنصر همانی به یک گروه لی غیر همبند، ایزومورفیسمی بین جبرهای لی القاء می‌کند و پوشا است ولی خود نگاشت پوشا نیست.

ادعای مشابه برای یک به یک بودن، درست نیست. در ۱.۱.۷ دیدیم که نگاشت یک به یک $\rho : G \to G'$، نگاشت یک به یک $L(\rho) : L(G) \to L(G)'$ را القاء می‌کند. ولی یک به یک بودن $L(\rho)$، یک به یک بودن ρ را ایجاب نمی‌کند؛ مثالی از این ادعا، هومومورفیسم کانونی $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ است.

۶.۷ زیرگروههای بستهٔ گروه خطی کل

گیریم V یک $\mathbb{R}$–فضای برداری با بعد متناهی است و $\mathrm{GL}(V)$ گروه اتومورفیسمهای خطی آن است. برخی زیرگروههای بستهٔ $\mathrm{GL}(V)$ را در نظر می‌گیریم.

گیریم $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ دو خطی است و یک فرم ناتابیده بر V می‌باشد. گیریم H زیرگروهی از $\mathrm{GL}(V)$ است که φ را ناوردا می‌گذارد:

$$H = \{g \in \mathrm{GL}(V) | \varphi(gv, g) = \varphi(v, w) \text{ بازاء هر } v, w \in V \text{ ای} \} \qquad (۱۸.۷)$$

بازاء هر $v, \in V$ ثابت، نگاشت

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{GL}(V) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(V) & \longrightarrow & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ g & \longmapsto & (g, g) & \longmapsto & (gv, gw) & \longmapsto & \varphi(gv, gw) \end{array}$$

را در نظر بگیرید. چون φ پیوسته است، این نگاشت هم پیوسته است. بنابراین، مجموعهٔ:

$$S(v, w) = \{g \in \mathrm{GL}(V) | \varphi(gv, gw) = \varphi(v, w)\} \qquad (۱۹.۷)$$

در $\mathrm{GL}(V)$ بسته است. اکنون $H = \bigcap_{v, \in V} S(v, w)$. این نشان می‌دهد که H زیرگروه بسته‌ای از $\mathrm{GL}(V)$ می‌باشد.

حال جبر لی $\mathrm{GL}(V)$ را با $\mathcal{L}(V)$ یکی می‌گیریم (به گزارهٔ ۸.۳ مقایسه شود). به این ترتیب، حکم ذیل در خصوص $L(H)$ را داریم.

۱.۶.۷ گزاره. $L(H) = \{A \in \mathcal{L}(V) | \varphi(Av, w) + \varphi(v, Aw) = 0 \text{ بازاء هر } v, w \in V \text{ ای} \}$

اثبات: گیریم $A \in L(H)$. در این صورت بازاء هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\exp tA \in H$ و بازاء هر $v, w \in V$ ای $(\exp(tA)v, \exp(tA)w) = \varphi(v, w)$. با مشتق گیری نسبت به t و سپس قرار دادن $t = 0$، داریم $\varphi(Av, w) + \varphi(v, Aw) = 0$.

بالعکس، فرض کنیم $A \in \mathcal{L}(V)$ دراین شرط صدق کند. نگاشت خطی الحاقی A نسبت به φ را با نماد A^* نمایش می‌دهیم؛ که بنا به تعریف $\varphi(Av, w) = \varphi(v, A^*w)$. بنابراین، مفروضات بر A را به صورت $A^* = -A$ می‌توان تشریح کرد. می‌خواهیم نشان دهیم که بازاء هر $t \in \mathbb{R}$ ای $(\exp(tA))^* = (\exp(tX))^{-1}$، که این یعنی بازاء هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\exp tA \in H$. این ایجاب می‌کند که $A \in L(H)$.

تنها مانده است نشان دهیم که $A^* = -A$ ایجاب می‌کند $(\exp tA)^* = (\exp tA)^{-1}$. اما این مطلب از عبارت $\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty}(tA)^n/n!$ مشروح در ۵.۱.۶ نتیجه می‌گردد. □

۲.۶.۷ تمرین. گزارهٔ ۱.۶.۷ را از ۵.۴.۶ نیز نتیجه بگیرید.

اگر φ علاوه بر این، متقارن نیز باشد، در این صورت گروه H عبارت از گروه متعامد V نسبت به φ است و آنرا با $O(V,\varphi)$ نشان می‌دهیم. جبر لی آن از عملگرهایی بر V تشکیل می‌گردد که نسبت به φ پادخود الحاقی‌اند، یعنی $A^* = -A$.

۳.۶.۷ مثال. $\mathbb{R}$–فضای برداری ۳ – بعدی V با متر اقلیدسی φ را در نظر بگیرید. گیریم e_1, e_2, e_3 یک کنج متعامد یکه برای V است و جهت $\{e_1, e_2, e_3\}$ مثبت گرفته شود. در این صورت با تعریف:

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_1, e_3] = -e_2, \qquad [e_2, e_3] = e_1 \tag{۲۰.۷}$$

یک ساختار جبرلی بر V می‌توان تعریف نمود. $\mathcal{L}(V)$ را با جبر لی $\mathrm{GL}(V)$ یکی می‌گیریم (به ۸.۳.۴ توجه شود).

گیریم $a \in V$ و $A \in \mathcal{L}(V)$ با ضابطهٔ $Av = [a,v]$ برای $v \in V$ را در نظر بگیرید. در این صورت:

$$\varphi(Av, w) + \varphi(v, Aw) = \varphi([a,v],) + \varphi(v,[a,]) = 0 \tag{۲۱.۷}$$

که با تجسم $\varphi([a,v],w)$ به صورت حجم جهتدار متوازی السطوح تعریف شده توسط v, a، مشهود است. بنابراین A در جبر لی $L(O(V,\varphi))$ گروه متعامد $O(V,\varphi)$ نسبت به φ قرار دارد. نگاشت $\mathcal{I} : V \to L(O(V,\varphi))$ با ضابطهٔ $a \mapsto A$ خطی است. اما اینکه بازاء هر $v \in V$ ای $[a,v] = 0$ ایجاب می‌کند که $a = 0$ (البته این در حالت کلی درست نیست و به ساختار جبر لی بستگی دارد).

این به معنی یک به یک بودن $\mathcal{I}$ است. اما V و نیز $L(O(V,\varphi))$ سه بعدی هستند، و لذا $\mathcal{I}$ یک ایزومورفیسم خطی است. سرانجام تحقیق می‌کنیم که $\mathcal{I} : V \to L(O(V,\beta))$ ایزومورفیسم بین جبرهای لی است. گیریم بازاء $i = 1,2$ و هر $v \in V$ ای $A_i v = [a-I, v]$. در این صورت:

$$\begin{aligned} [A_1, A_2]v &= A_1A_2v - A_2A_1v \\ &= [a_1,[a_2,v]] - [a_2,[a_1,v]] \\ &= [[a_1,a_2],v] \qquad \text{(بنا به اتحاد ژاکوبی)} \end{aligned}$$

بنابراین، ملاحظه کردیم که V با جبر لی گروه $O(V,\varphi)$ توسط نگاشت $\mathcal{I} : V \to L(O(V,\varphi))$ با ضابطهٔ $a \mapsto A$ ایزومورف است، که بازاء هر $v \in V$ ای $Av = [a,v]$.

برای ملاحظهٔ اهمیت هندسی تناظر $a \mapsto A$، گروه ۱–پارامتری از $O(V,\varphi)$ تعریف شده توسط A را در نظر می‌گیریم، که بنا به ۶.۴.۵ در $\dot\alpha_t = A\alpha_t$ صدق می‌کند. گیریم $v \in V$ و $v_t = \alpha_t v$. در این صورت $\dot v_t = \dot\alpha_t\, v = A\alpha_t v = Av_t$ که آنرا به صورت $\dot v_t = [a, v_t]$ می‌توان نوشت. این نشان مدهد که زیر گروه ۱–پارامتری α_t از $O(V,\varphi)$ تعریف شده توسط A عبارتست از گروه ۱–پارامتری دورانهای در V با محور دوران a.

$O(V,\varphi)$ توسط اتومورفیسم‌های ساختار جبر لی تعریف شده در V، بر V عمل می‌کند. بنابراین، ایزومورفیسمهای $\mathcal{I} : V \to L(O(V,\varphi))$ یک نمایش برای $O(V,\varphi)$ در $L(O(V,\varphi))$ فراهم می‌سازند. اگر $\sigma : O(V,\varphi) \to \mathrm{Aut}(L(O(V,\varphi)))$ نمایشگر این نمایش باشد، آنگاه σ بازاء $g \in O(V,\varphi)$، $a \in V$، $A = \mathcal{I}(a)$ و $v \in V$ به صورت $(\sigma_g A)(v) = [ga, v]$ تعریف می‌گردد. این نمایش، درست همان نمایش الحاقی $O(V,\varphi)$ است، زیرا بازاء هر $v \in V$ ای:

$$(\sigma_g A)(v) = [ga, v] = g[a, g^{-1}v] = [g(A(g^{-1}v)) = (gAg^{-1})(v) \tag{۲۲.۷}$$

و بنابراین $\sigma_g A = gAg^{-1}$.

باز فرض کنیم V با بعد متناهی دلخواه است و φ یک فرم دو خطی متقارن ناتکین بر V است. فرض کنیم φ مثبت معین است. با همین استدلال در مورد $\mathrm{GL}(V)$ (به مثال ۱.۴.۷ توجه شود) می‌شود نشان داد که مؤلفهٔ همبندی عنصر همانی آن، برابر هستهٔ هومورفیسم $\det : O(V,\varphi) \to \mathbb{R}^*$ می‌باشد. این گروه را با نماد $S(O(V,\varphi))$ نشان می‌دهیم.

۴.۶.۷ گزاره. گیریم V یک $\mathbb{R}$–فضای برداری با بعد متناهی، φ یک فرم دو خطی متقارن و مثبت معین $O(V,\varphi)$ گروه متعامد V نسبت به φ و $S(O(V,\varphi))$ گروه عملگرهای متعامد با دترمینان یک است. در این صورت $O(V,\varphi)$ و نیز $S(O(V,\varphi))$ فشرده‌اند.

اثبات: $S(O(V,\varphi))$ زیر گروه بازی از $O(V,\varphi)$ است و لذا بسته است. پس کافی است ثابت کنیم که $O(V,\varphi)$ فشرده است. حال $O(V,\varphi)$ زیرگروهی بسته از $\mathrm{GL}(V)$ است. چون $\mathrm{GL}(V)$ زیرمجموعه‌ای باز از $\mathcal{L}(V)$ است، پس $O(V,\varphi)$ در $\mathcal{L}(V)$ نیز بسته است. بنابراین، کافی است که نشان دهیم $O(V,\varphi)$ در $\mathcal{L}(V)$ کراندار است.

حال اگر $|.| : \mathcal{L}(V) \to \mathbb{R}$ ۱–فرم با ضابطهٔ:

$$|A| := \sup_{v\neq 0,\, v\in V} \frac{\varphi(Av,Av)^{1/2}}{\varphi(v,v)^{1/2}} \tag{۲۳.۷}$$

بر $\mathcal{L}(V)$ نسبت به φ باشد، در این صورت هر $g \in O(V,\varphi)$ ای $|g|=1$ صدق می‌کند و لذا $O(V,\varphi)$ در $\mathcal{L}(V)$ کراندار است.

حال فرض کنیم $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ یک فرم دو خطی متقارن کج ناتکین بر V است (V با بعد زوج است). زیر گروه در $\mathrm{GL}(V)$ که φ را ناوردا قرار می‌دهد، گروه سیمپاکتیک V نسبت به φ است که آنرا با $\mathrm{Sp}(V,\varphi)$ نشان می‌دهیم. چون اساساً یک و تنها یک چنین φ ای وجود دارد، هر دو گروه سیمپلکتیک V با هم ایزومورفند. بر طبق ۱.۶.۷، جبر لی $\mathrm{Sp}(V,\varphi)$ از همهٔ عملگرهای V که نسبت به φ پاد خود الحاقی هستند، تشکیل می‌گردد.

حال هومورفیسم $\det : \mathrm{GL}(V) \to \mathbb{R}^*$ را در نظر بگیرید. هستهٔ این نگاشت را با $\mathrm{SL}(V)$ نشان می‌دهیم.

۵.۶.۷ گزاره. گیریم V یک $\mathbb{R}$–فضای برداری با بعد متناهی است. مجموعهٔ عملگرهای با اثر صفر یک جبر لی تشکیل می‌دهد. این جبر لی نظیر به $\mathrm{SL}(V)$ است. □

اثبات: بنا به ۱۱.۵.۴ داریم $L(\det) = \mathrm{tr}$. اکنون ۴.۵.۷ نشان می‌دهد که $L(\mathrm{Ker}(\det)) = L(\mathrm{SL}(V)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

۷.۷ فضاهای همدسته‌ای، گروههای خارج قسمت

۱.۷.۷ قضیه. گیریم G گروه لی و H زیر گروهی بسته از آن است. گیریم G/H فضای مداری عمل H بر G با انتقالهای از راست است (به ۴.۲.۲ توجه کنید). عمل طبیعی G بر G/H را در نظر بگیرید (بخش ۴.۱). در این صورت یک ساختار منیفلد تحلیلی یکتا بر G/H وجود دارد، که توپولوژی خارج قسمتی را القاء می‌کند و آنرا به یک G–منیفلد تبدیل می‌نماید. □

گیریم H با ساختار گروه لی ۱.۵.۷ همراه است. گیریم M زیرفضای برداری از $L(G)$ است به گونه‌ای که $L(G) = M \oplus L(H)$. نگاشت کانونی $G \to G/H$ را با p نمایش می‌دهیم. در این صورت قضیهٔ ۱.۷.۷ بر لم ذیل استوار است، که اثبات آنرا در اینجا حذف می‌کنیم (به صفحهٔ ۱۱۳ از کتاب هلگاسون توجه کنید).

۲.۷.۷ لم. همسایگی‌ای U از $\circ$ در M به گونه‌ای وجود دارد که $\exp|_U : U \to \exp(U)$ هومورفیسم است و $p|_{\exp(U)} : \exp(U) \to p(\exp(U))$ هومورفیسمی بروی یک همسایگی از $p(e)$ در G/H است. □

اکنون ساختار منیفلد تحلیلی بر G/H را به شکل ذیل بدست می‌آوریم: اگر $N_\circ$ نمایشگر درون $p(\exp U)$ و U° درون U باشد، در این صورت $(\exp|_U)^{-1} \circ (p|_{\exp(U)})^{-1} : N_\circ \to U^\circ \subset M$ یک چارت در $p(e) \in G/H$ است. حال G با هومورفیسم‌ها بر G/H عمل می‌کند و لذا این موجب تعریف چارتهایی در کلیهٔ نقاط G/H می‌گردد. این نشان می‌دهد که چارتهای مذکور سازگارند و لذا یک ساختار تحلیلی بر $G|H$ تشکیل می‌دهند.

در این صورت، بنا به روش ساخت، G با نگاشتهای تحلیلی بر G/H عمل می‌کند. یکتایی ساختار تحلیلی بر G/H همان طور که در ۱.۷.۷ اشاره شد، از گزارهٔ ذیل استنتاج می‌گردد.

۳.۷.۷ گزاره. گیریم X نسبت به عمل متعدی $\tau : G \to \mathrm{Aut}(X)$ یک $G-$منیفلد است. $x_\circ \in X$ ای انتخاب کرده و فرض کنیم H گروه یکروندی $x_\circ$ است. نگاشت $\varphi : G/H \to X$ با ضابطهٔ $\varphi(gH) = \tau_g(x_\circ)$ را در نظر بگیرید. گیریم G/H دارای ساختار منیفلدی تحلیلی مشروح در بالا است. در این صورت φ دیفرانسیلپذیر است. اگر φ هومورفیسم باشد. آنگاه دیفئومورفیسم است.

اثبات: از $N_\circ$ و U° به همان معنی قبل استفاده کرده و می‌نویسیم $B = \exp(U^\circ)$. در این صورت، هومورفیسم $p|_B : B \to N_\circ$ موجب تعریف B به صورت زیر منیفلدی از G می‌گردد، که نگاشت یک به یک $t : B \hookrightarrow G$ نسبت به آن دیفرانسیلپذیر است.

نگاشت $\Psi : G \to X$ با ضابطهٔ $\Psi(g) = \tau_g(x_\circ)$ را تعریف می‌کنیم. در این صورت $\varphi|_{N_\circ} = \Psi \circ (p|_B)^{-1}$ و لذا φ نیز دیفرانسیلپذیر است.

حال فرض کنیم φ هومورفیسم است (به یادداشت ذیل توجه کنید). φ در صورتی دیفئومورفیسم است که نگاشت خطی مشتق φ در کلیهٔ نقاط ایزومورفیسم باشد. چون φ اکویی واریان است (به ۱۰.۴.۱ توجه کنید)، کافی است این را برای نقطهٔ $x_\circ$ تحقیق کنیم. اکنون تجزیهٔ $\varphi|_{N_\circ} \circ \Psi \circ (p|_B)^{-1}$ نشان می‌دهد که کافی است ثابت کنیم $\Psi_{*e} : T_eG \to T_{x_\circ}(X)$ پوشا است. ثابت می‌کنیم $\mathrm{Ker}(\Psi_{*e}) = T_eH$. در این صورت:

$$\mathrm{rank}(\Psi_{*e}) = \dim(\mathrm{Ker}(\Psi_{*e})) = \dim(G) - \dim(H) = \dim(G/H) = \dim(X) \qquad (۲۴.۷)$$

(دلیل تساوی آخر، هومورفیسم بودن α است) و این اثبات را به پایان می‌برد.

تنها مانده است نشان دهیم که $\mathrm{Ker}(\Psi_{*e}) = T_eH$. چون H گروه یکروندی $x_\circ$ است، بوضوح $T_eH \subset \mathrm{Ker}(\Psi_{*e})$. بالعکس، گیریم $A_e \in \mathrm{Ker}(\Psi_{*e})$. میدان برداری کیلینگ A^* بر X تعریف شده توسط A_e، و بترتیب نظیر به $A \in R(G)$ را در نظر بگیرید؛ $\Psi-$مرتبطند (به اثبات ۲.٦.۵ توجه کنید) و این نشان می‌دهد $\Psi_{*e}(A_e) = A^*_{x_\circ} = \circ$.

در این صورت، بنا به ۱.۳.٦ بازاء هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\exp(tA_e) \in H$. در نتیجه، با توجه به ۴.۵.۷ داریم $A_e \in T_eH$.

□

۴.۷.۷ یادداشت. نگاشت $\varphi : G/H \to X$ تعریف شده در ۳.۷.۷ عملاً در صورتی هومورفیسم است که G تعدادی شمارا مؤلفه داشته باشد. با این فرض اضافه استدلال بالا نشان می‌دهد که بازاء هر منیفلد دلخواه X (و نه لزوماً با عملی متعدی بر آن) و $x_\circ \in X$، نگاشت $\varphi : G/H \to X$ دیفئومورفیسمی بروی مدار در $x_\circ$ است.

پیش از برگشت به حالتی که زیر گروه H نرمال در G است، تعریف ذیل را می‌آوریم.

۵.۷.۷ تعریف. گیریم $\mathcal{L}$ یک جبر لی روی حلقهٔ A است. ایده آل $\mathcal{I}$ از $\mathcal{L}$ عبارت است از یک زیرفضای برداری از $\mathcal{L}$ صادق در شرط: بازاء هر $A \in \mathcal{I}$ و $B \in \mathcal{L}$ ای $[A, B] \in \mathcal{I}$.

اگر $\mathcal{I}$ ایده آلی از $\mathcal{L}$ باشد، فضای برداری خارج قسمت برداری خارج قسمت $\mathcal{L}/\mathcal{I}$ به صورت کانونی با یک ساختار جبر لی همراه می‌گردد، و $\mathcal{I}$ هستهٔ هومومورفیسم کانونی $\mathcal{L} \to \mathcal{L}/\mathcal{I}$ است. بالعکس، هستهٔ $\mathcal{I}$ هر هومومورفیسم بین جبرهای لی، با دامنهٔ $\mathcal{L}$، ایده آلی $\mathcal{I}$ از $\mathcal{L}$ است و ایزومورفیسم فضاهای برداری از $\mathcal{L}/\mathcal{I}$ بروی تصویر، یک ایزومورفیسم جبرهای لی است.

حال ثابت می‌کنیم که:

۶.۷.۷ گزاره. گیریم H زیر گروه نرمال بسته‌ای از گروه لی G است. گروه خارج قسمتی G/H با ساختار منیفلدی تعریف شده در ۱.۷.۷، گروه لی است. هومومورفیسم کانونی $p : G \to G/H$ موجب القاء $L(p) : L(G) \to L(G/H)$ می‌گردد، به گونه‌ای که:

$$L(G)/L(H) \cong L(G/H) \tag{۲۵.۷}$$

اثبات: گروه خارج قسمتی G/H نسبت به توپولوژی القایی گروه توپولوژی است. ساختار منیفلدی منحصر بفرد ۱.۷.۷ برای G/H را در نظر بگیرید، به گونه‌ای که نگاشت $G \times G/H \to G/H$ با ضابطهٔ $(g, xH) \mapsto gxH$ تحلیلی است. مانده است نشان دهیم که گروه عملگرهای در G/H تحلیلی است که بدیهی است. بنا به چگونگی ساخت ساختار منیفلدی بر G/H نگاشت $p : G \to G/H$ تحلیلی است و بنابراین هومومورفیسم بین گروههای لی می‌باشد. $L(p) : L(G) \to L(G/H)$ را در نظر بگیرید. بنا به ۴.۵.۷، داریم $\mathrm{Ker}(L(p)) = L(\mathrm{Ker}(p)) = L(H)$. در نتیجه، $L(p)$ یک ایزومورفیسم $L(G)/L(H) \cong L(G/H)$ القاء می‌کند. □

توجه کنید که اگر H زیر گروه نرمال و لی غیر بستهٔ G باشد، آنگاه ممکن است گروه خارج قسمتی هاوسدورف نباشد.

به عنوان نتیجه‌ای از آن داریم:

۷.۷.۷ گزاره. گیریم $\rho : G \to G'$ هومومورفیسم بین گروههای لی است. فرض کنیم G همبند است. نگاشت کانونی $\tilde{\rho} : G/\mathrm{Ker}(\rho) \to \rho(G)$ القایی توسط ρ را در نظر بگیرید. در این صورت $\tilde{\rho}$ ایزومورفیسم بین گروههای لی است، که $G/\mathrm{Ker}(\rho)$ با ساختار گروه لی مشروح در ۶.۷.۷ است و $\rho(G)$ با ساختار مشروح در ۵.۵.۷. این بخصوص نشان می‌دهد که نگاشت $\hat{\rho} : G \to \rho(G)$ القایی توسط ρ تحلیلی است.

اثبات: دیاگرام تعویض پذیر:

$$\begin{tikzcd}
 & L(G)/\mathrm{Ker}(\rho) \arrow[d, "\cong"'] & L(\rho)(L(G)) \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, hook] & \\
L(G) \arrow[ur] \arrow[r, "L(\rho)"'] \arrow[d, "\exp"'] & L(G/\mathrm{Ker}(\rho)) \arrow[d, "\exp"'] & L(\rho(G)) \arrow[r, hook] & L(G') \arrow[d, "\exp"'] \\
G \arrow[r, "p"'] \arrow[d, equal] & G/\mathrm{Ker}(\rho) \arrow[r, "\tilde{\rho}"'] \arrow[urr, "L(\rho)"'] & \rho(G) \arrow[r, hook] & G' \arrow[d, equal] \\
G \arrow[rrr, "\rho"] & & & G'
\end{tikzcd}$$

را در نظر بگیرید. چون $L(p)$ پوشا و $L(\rho(G)) \to L(G)'$ یک به یک است حداکثر یک نگاشت $\gamma : L(G/\mathrm{Ker}(\rho)) \to L(\rho(G))$ وجود دارد که در مکان نقطه چین در شکل بالا قرار می‌گیرد. ایزومورفیسم کانونی

$\gamma: L(G)/L(\mathrm{Ker}(\rho)) \to L(\rho)(L(G))$ القایی توسط $L(\rho): L(G) \to L(G)'$ را در نظر بگیرید. γ دیاگرام را تعویض پذیر می‌کند. این ثابت می‌کند که $\tilde{\rho}$ در e تحلیلی است، چرا که γ در چارتهای کانونی قرار دارد. بنابراین $\tilde{\rho}$ در همه جا تحلیلی است. بعلاوه $L(\tilde{\rho}) = \gamma$ ایزومورفیسم است و لذا $\tilde{\rho}$ نیز ایزومورفیسم بین گروههای لی است. نگاشت $\hat{\rho}: G \to \rho(G)$ برابر ترکیب $\tilde{\rho} \circ \rho$ هومورفیسمهای تحلیلی است و لذا خودش هم تحلیلی است. □

فصل ۸

گروههای از اتومورفیسمها

۱.۸ گروه اتومورفیسمهای یک جبر

گیریم $\mathcal{A}$ یک $\mathbb{R}$−جبر با بعد متناهی است، به عبارت دیگر یک فضای برداری به همراه یک نگاشت دو خطی $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. گیریم $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$ گروه اتومورفیسمهای $\mathbb{R}$−فضای برداری زمینه‌ای $\mathcal{A}$ است. $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ گروه اتومورفیسمهای جبر $\mathcal{A}$ است. در این صورت $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{GL}(\mathcal{A})$.

۱.۱.۸ مثال. $\mathcal{A}$ یک $\mathbb{R}$−جبر لی است.

۲.۱.۸ لم. $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ زیرگروهی بسته از $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$ است.

اثبات: گیریم $A, B \in \mathcal{A}$ و نگاشت

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{GL}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathcal{A}) \times \mathrm{GL}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi, \varphi) & \longmapsto & (\varphi A, \varphi B) & \longmapsto & \varphi(A).\varphi(B) \end{array}$$

را تعریف می‌کنیم. چون ضرب $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ پیوسته است ($\mathcal{A}$ با بعد متناهی است)، این نگاشت نیز پیوسته است. مجموعهٔ $S(A, B) = \{= \varphi \in \mathrm{GL}(\mathcal{A}) | \varphi A.\varphi B = \varphi(A.B)\}$ تصویر معکوس $\varphi(A, B)$ تحت این نگاشت است و لذا در $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$ بسته است. اکنون $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) = \bigcap_{A,B\in\mathcal{A}} S(A, B)$ و لذا $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ در $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$ بسته است. □

بنابراین، بنا به ۲.۵.۷ داریم:

۳.۱.۸ گزاره. گیریم $\mathcal{A}$ یک $\mathbb{R}$−جبر با بعد متناهی است. در این صورت $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ زیرگروه لی بستهٔ $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$ است. جبر لی $L(\mathrm{Aut}(\mathcal{A}))$ به صورت زیر مشخص می‌گردد:

$$L(\mathrm{Aut}(\mathcal{A})) := \{D \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) | \exp(tD) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}), \forall t \in \mathbb{R}\} \qquad (۱.۸)$$

که در اینجا $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ جبر لی اندومورفیسمهای فضای برداری زمینه‌ای $\mathcal{A}$ است. □

۴.۱.۸ تعریف. منظور از یک مشتق D برای $\mathcal{A}$، عنصری $D \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ صادق در شرط ذیل است:

$$D(A.B) = D(A).B + A.D(B) \qquad \forall A, B \in \mathcal{A} \qquad (۲.۸)$$

۵.۱.۸ گزاره. جبر لی $\mathrm{Aut}(L(\mathcal{A}))$ عبارت از مجموعهٔ مشتقات $\mathcal{A}$ است.

اثبات: گیریم $D \in \mathrm{Aut}(L(\mathcal{A}))$. بنابه ۳.۱.۸، بازاء هر $A, B \in \mathcal{A}$ و $t \in \mathbb{R}$ ای:

$$\exp(tD(A.B)) = (\exp(tD.A)).(\exp(tD.B)) \tag{۳.۸}$$

با مشتق گیری نسبت به t و سپس قرار دادن $t = 0$ داریم $D(A.B) = D(A).B + A.D(B)$ و لذا D یک مشتق برای $\mathcal{A}$ است. به استقراء نتیجه می‌گیریم:

$$D^n(A.B) = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} D^i(A).D^j(B) \qquad i \geq 0, j \geq 0 \tag{۴.۸}$$

(حکم بازاء $n = 0$ درست است، زیرا D^0 نگاشت همانی است.) اکنون بنا به ۵.۱.۶ داریم:

$$\exp(tD) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tD)^n}{n!} \tag{۵.۸}$$

بنابراین:

$$\exp(tD(A.B)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tD)^n}{n!}(A.B) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tD)^i(A)}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tD)^j(B)}{j!}\right) = (\exp(tD.A)).(\exp(tD.B))$$

و لذا بازاء هر $t \in \mathbb{R}$ ای $\exp(tD) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$. این براساس ۳.۱.۸ نشان می‌دهد که $D \in \mathrm{Aut}(L(\mathcal{A}))$. □

۶.۱.۸ یادداشت. اینکه مجموعهٔ مشتقات $\mathcal{A}$ زیرجبری از جبرلی $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ است، مستقیماً هم قابل اثبات است و حتی بدون قید بر بعد $\mathcal{A}$ نیز درست می‌باشد. گزارهٔ ۵.۱.۸ در این حالت جوازی است برای اینکه جبرلی مشتقات را به عنوان جبرلی نظیر به گروه اتومورفیسمهای $\mathcal{A}$ قلمداد کنیم.

بویژه، گیریم X یک منیفلد است و $\mathcal{C}^\infty(X)$ عبارت از $\mathbb{R}$–جبر توابع $X \to \mathbb{R}$ می‌باشد. جبر لی $\mathcal{D}(X)$ میدانهای برداری بر X، برابر با جبر لی مشتقات $\mathcal{C}^\infty(X)$ است. اکنون، بنا به ۳.۱.۴، $\mathrm{Aut}(X)$ را با $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}^\infty(X))$ میتوان یکی گرفت. پس $\mathcal{D}(X)$ را به صورت جبر لی $\mathrm{Aut}(X)$ میتوان قلمداد کرد، امری که بسیار رایج است.

حال فرض کنیم X یک G–منیفلد نسبت به عمل $\tau : G \to \mathrm{Aut}(X)$ است. این یک عمل $\tau^* : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^\infty(X))$ القاء می‌کند. هومورفیسم $\sigma : R(G) \to \mathcal{D}(X)$ از قسمت ۲.۶.۵ را در نظر بگیرید. اینرا هومورفیسمی بین جبرهای لی القایی توسط هومورفیسم τ^* می‌توان قلمداد کرد.

۲.۸ نمایش الحاقی یک جبر لی

با یادآوری نگاتی در مورد جبر لی $\mathcal{A}$ روی یک حلقه R آغاز می‌کنیم.

با هر عنصر $A \in \mathcal{A}$، نگاشتی خطی $\mathrm{ad}(A) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ با ضابطهٔ $(\mathrm{ad}(A))(B) = [A, B]$ میتوان تعریف نمود.

۱.۲.۸ لم. $\mathrm{Ad}(A)$ مشتقی برای $\mathcal{A}$ است.

اثبات: اتحاد ژاکوبی را به صورت:

$$[A, [B_1, B_2]] = [[A, B_1], B_2] + [B_1, [A, B_2]] \tag{۶.۸}$$

می‌توان نوشت، که حکم مطلوب را اثبات می‌کند. □

۲.۲.۸ تعریف. گیریم $\mathcal{A}$ یک جبر لی است. مشتق داخلی (۱) در $\mathcal{A}$ تعریف شده توسط $A \in \mathcal{A}$ عبارتست از نگاشت $\mathrm{ad}(A) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

نگاشت $\mathrm{ad} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ بتوی جبر لی اندومورفیسمهای $\mathcal{A}$ را در نظر بگیرید.

۳.۲.۸ لم. $\mathrm{ad} : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ هومورفیسم بین جبرهای لی است.

اثبات: این هم نتیجه‌ای از اتحاد ژاکوبی است. در حقیقت:

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}[A_۱, A_۲])(B) &= [[A_۱, A_۲], B] = [A_۱, [A_۲, B]] - [A_۲, [A_۱, B]] \\ &= (\mathrm{ad}(A_۱) \circ \mathrm{ad}(A_۲))(B) - (\mathrm{ad}(A_۲) \circ \mathrm{ad}(A_۱))(B) = [\mathrm{ad}(A_۱), \mathrm{ad}(A_۲)](B)\end{aligned}$$

قبلاً دیدیم که $\mathrm{ad}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Aut}(L(\mathcal{A}))$، که $\mathrm{Aut}(L(\mathcal{A}))$ جبر لی مشتقات $\mathcal{A}$ است و زیر جبرلی $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ می‌باشد. هومورفیسم القایی توسط $\mathrm{ad} : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ را نیز با $\mathrm{ad} : \mathcal{A} \to \mathrm{Aut}(L(\mathcal{A}))$ نشان می‌دهیم. □

۴.۲.۸ تعریف. گیریم $\mathcal{A}$ یک جبرلی است. هومورفیسم $\mathrm{ad} : \mathcal{A} \to \mathrm{Aut}(L(\mathcal{A}))$ را نمایش الحاقی $\mathcal{A}$ می‌نامیم. این نمایشی از $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ است.

تصویر این هومورفیسم، مجموعهٔ مشتقات داخلی $\mathcal{A}$ است و لذا جبر لی تشکیل می‌دهد.

گیریم $\mathbb{Z}(\mathcal{A})$ نمایشگر هستهٔ این هومورفیسم است. این ایده آلی از $\mathcal{A}$ بنام مرکز $\mathcal{A}$ است و به این صورت مشخص می‌گردد: $A \in \mathbb{Z}(\mathcal{A})$ اگر و تنها اگر بازاء هر $B \in \mathcal{A}$ ای $[A, B] = ۰$.

حال فرض کنیم G گروه لی است. بنا به ۳.۱.۸، $\mathrm{Aut}(G)$ جبر لی است. بنا به ۴.۱.۸ این جبرلی عبارتست از مجموعهٔ مشتقات $\mathrm{Aut}(L(L(G)))$ جبر لی $L(G)$ خود G.

نمایش الحاقی G در $L(G)$ را در نظر بگیرید. یعنی $Ad : G \to \mathrm{Aut}(L(G))$. بنا به بحث قبل، این هومورفیسمی $L(\mathrm{Ad}) : L(G) \to \mathrm{Aut}(L(L(G)))$ القاء می‌کند.

۵.۲.۸ قضیه. $L(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad}$.

اثبات: گیریم $A \in L(G)$. در این صورت، $L(\mathrm{Ad})(A) = \frac{d}{dt}(\mathrm{Ad}(\exp(tX)))_{t=۰}$ بنا به تعریف $L(\mathrm{Ad})$. بنا به ۹.۵.۵، دومین عنصر درست adA است. □

۶.۲.۸ نتیجه. گیریم G گروه لی همبند است. در این صورت $L(\mathrm{Ad}(G)) = \mathrm{ad}(L(G))$.

اثبات: بنا به ۵.۵.۷ داریم:

$$L(\mathrm{Ad}(G)) = L(\mathrm{ImAd}) = \mathrm{Im}(L(\mathrm{Ad})) = \mathrm{Im}(\mathrm{ad}) = \mathrm{ad}(L(G)) \qquad (۷.۸)$$

و برهان تمام است. □

۷.۲.۸ نتیجه. گیریم G گروه لی همبند است. در این صورت هستهٔ Z_G زیرگروه لی از G است. جبر لی آن هستهٔ $L(G)$ است.

اثبات: از ۱۰.۲.۶ میدانیم که $Z_G = \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$. بنابراین، بر طبق ۴.۵.۷، Z_G زیرگروهنی بسته از G با جبر لی $L(Z_G) = L(\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})) = \mathrm{Ker}(L(\mathrm{Ad})) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$ است. ولی $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$ هستهٔ $L(G)$ است. □

توجه کنید که $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(L(G))$ ایزومورفیسمی $G/Z_G \cong \mathrm{Ad}(G)$ بین جبرهای لی تشکیل می‌دهد (به ۷.۷.۷ توجه کنید).

۸.۲.۸ نتیجه. بازاء هر $A \in L(G)$ ای $\exp(\mathrm{ad}(A)) = \mathrm{Ad}(\exp(A))$.

اثبات: این طبیعی بودن $\exp$ است.

از دو لم ذیل استفاده می‌کنیم.

۹.۲.۸ لم. گیریم V یک $\mathbb{R}$–فضای برداری با بعد متناهی، G یک گروه لی همبند، $\tau : G \to \mathrm{GL}(V)$ نمایشی از G در V و $L(\tau) : L(G) \to \mathcal{L}(V)$ نمایش الحاقی $L(G)$ در V است. فضای برداری $W \subset V$ وقتی و تنها وقتی G–ناوردا است که $L(G)$–ناوردا باشد. دقیق تر: بازاء هر $g \in G$ ای $\tau_g W \subset W$ اگر وتنها اگر بازاء هر $A \in L(G)$ داشته باشیم $(L(\tau)A)W \subset W$.

اثبات: فرض کنید $W \subset V$، G–ناوردا است و $A \in L(G)$ و $w \in W$. در این صورت:

$$(L(\tau)A)w = \frac{d}{dt}\left\{\tau_{\exp}(tA)\right\}_{t=\circ} w = \frac{d}{dt}\left\{\tau_{\exp(tA)}w\right\}_{t=\circ} \qquad (۸.۸)$$

که بردار مماس به منحنی $t \mapsto \tau_{\exp(tA)}w$ در W بازاء $t = \circ$ است و بنابراین $(L(\tau)A)w \in W$.

بالعکس، فرض کنید $W \subset V$، G–ناوردا است. یعنی بازاء هر $A \in L(G)$ ای $(L(\tau)A)W \subset W$. اکنون بنا به ۵.۱.۶، به وضوح $\exp(L(\tau)A)W \subset W$. بنا به طبیعی بودن $\exp$ (یعنی ۶.۱.۶) این بدین معنی است که بازاء هر $A \in L(G)$ ای $\tau_{\exp(A)}W \subset W$.

گیریم $\tilde{G} = \{g \in G | \tau_g W \subset W\}$. در این صورت $\tilde{G}$ زیرگروه G است. بنا به بحث قبل، $\tilde{G}$ همسایگی ای از e در G را در بر دارد و لذا $\tilde{G} = G$. □

۱۰.۲.۸ لم. گیریم G و G' گروه لی‌اند و H و H' زیرگروه لی همبند بترتیب از G و G' هستند. گیریم $\rho : G \to G'$ هومومورفیسم است. در این صورت، وقتی و تنها وقتی $\rho(H) \subset H'$ که داشته باشیم $L(\rho)L(H') \subset L(H')$.

اثبات: از ۵.۵.۷ این حکم بدیهی است. □

گیریم $\mathcal{A}$ جبرلی است. تعریف ۵.۷.۷ ایده آل $\mathcal{I}$ را با گفتن اینکه زیرفضای برداری $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ وقتی و تنها وقتی ایده آل است که $\mathrm{ad}(\mathcal{A})$–ناوردا باشد.

گیریم G گروه لی است. در ۶.۷.۷ ملاحظه کردیم که جبر لی هر زیرگروه نرمال بسته از یک گروه لی G، ایده آلی از $L(G)$ است. اکنون می‌توانیم ثابت کنیم:

۱۱.۲.۸ گزاره. گیریم G یک گروه لی همبند است و H زیرگروه لی همبند از G می‌باشد. در این صورت، وقتی و تنها وقتی H زیرگروه نرمال G است که $L(H')$ ایده آل $L(G)$ باشد.

اثبات: $L(H')$ وقتی و تنها وقتی ایده آل $L(G)$ است که $adL(G)$–ناوردا باشد. نظر به اینکه $L(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad}$ و نیز ۹.۲.۸، این معادل با $\mathrm{Ad}(G)$–ناوردایی $L(H')$ است. بعبارت دیگر، بازاء هر $g \in G$ ای $\mathrm{Ad}(g)(L(H')) \subset L(H')$. اما بنا به تعریف $\mathrm{Ad}(g) \subset L(\tau_g)$ و با استفادهاز ۱۰.۲.۸ ملاحظه می‌کنیم که $\mathrm{Ad}(g)(L(H')) \subset L(H')$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Inn}_g(H) \subset H$.

بنابراین $L(H')$ ایده آل $L(G)$ است اگر و تنها اگر بازاء هر $g \in G$ ای $\mathrm{Inn}_g(H) \subset H$. □

۱۲.۲.۸ نتیجه. گیریم G گروه لی همبند است. در این صورت $\mathrm{Ad}(G)$ زیرگروه لی نرمال $_\circ(\mathrm{Aut}(L(G)))$ است.

اثبات: $\mathrm{Ad}(G)$ همبند است و بنابراین مشمول در $_\circ(\mathrm{Aut}(L(G)))$ می‌باشد. اکنون بنا به ۶.۲.۸ داریم $L(\mathrm{Ad}(G)) = \mathrm{ad}(L(G))$. نظر به ۱۱.۲.۸ تنها لازم است نشان دهیم که $\mathrm{ad}(L(G))$ یک ایده آل از $(\mathrm{Aut}(L(G))) = \mathrm{Aut}(L(L(G)))$ است. این برای هر جبر لی دلخواه $\mathcal{A}$ درست است.

گیریم $D \in \mathrm{Aut}(L(L(G)))$ و $A \in \mathcal{A}$. در این صورت، لازم است نشان دهیم که:

$$[D, \mathrm{ad}(A)]B = D[A, B] - [A, D(B)] = [D(A), B] = \mathrm{ad}(D(A))(B) \qquad (۹.۸)$$

که نشان می‌دهد $[D, \mathrm{ad}(A)] = \mathrm{ad}(D)(A)$. □

۱۳.۲.۸ یادداشت. گروه $\mathrm{Ad}(G)$ لزومی ندارد که در $\mathrm{Aut}(L(G))$ بسته باشد.

گروه اتومورفیسم‌های یک گروه لی

گیریم G گروه لی است و $\mathrm{Aut}(G)$ گروه اتومورفیسمهای (ساختار گروه لی؛ البته به ۵.۳.۶ توجه شود) G می‌باشد. فانکتور L هومومورفیسمی $L : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(L(G))$ بتوی گروه اتومورفیسمهای $L(G)$ تعریف می‌کند. اگر G همبند باشد، ۹.۲.۶ نشان می‌دهد که این هومومورفیسم یک به یک است.

۱۴.۲.۸ مثال. گروه لی $\mathbb{S}^۱ = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\mathrm{Aut}(\mathbb{S}^۱) \to \mathrm{Aut}(L\mathbb{S}^۱) = \mathrm{GL}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ یک به یک است. در واقع $\mathrm{Aut}(\mathbb{S}^۱) = \{1_{\mathbb{S}^۱}, -1_{\mathbb{S}^۱}\}$، که $-1_{\mathbb{S}^۱}$ نمایشگر نگاشت القایی بر $\mathbb{S}^۱$ توسط $-1_{\mathbb{R}}$ است (به ۱۸.۲.۸ توجه کنید).

اگر G همبند و همبند راهی باشد، هومومورفیسم $L : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(L(G))$ بنا به ۷.۲.۷ ایزومورفیسم است.

۱۵.۲.۸ مثال. $G = \mathbb{R}$. در این صورت $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$.

کلی‌تر، گیریم G گروه لی همبند، همبند ساده و تعویض پذیر است. دراین صورت $\exp : L(G) \to G$ بنا به ۸.۲.۷ ایزومورفیسم است. $\mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(L(G)) = \mathrm{GL}(L(G))$ ایزومورفیسم است.

گیریم G گروه لی همبند و تعویض پذیر است. هر اتومورفیسم φ برای G، اتومورفیسمی $L(\varphi)$ از $L(G)$ تعریف می‌کند. هومورفیسم $\exp : L(G) \to G$ را در نظر بگیرید. در این صورت، $L(\varphi)(\mathrm{Ker}(\exp)) \subset \mathrm{Ker}(\exp)$. نظر به تعویض پذیری دیاگرام:

نیمی از حکم ذیل را ثابت می‌کنیم:

۱۶.۲.۸ گزاره. گیریم G گروه لی همبند تعویض پذیر است. در این صورت تصویر هومورفیسم $L : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{GL}(L(G))$ از همهٔ اتومورفیسمهای $\tilde{\varphi}$ در $L(G)$ با $\tilde{\varphi}(\mathrm{Ker}(\exp)) \subset \mathrm{Ker}(\exp)$ تشکیل می گردد.

اثبات: برای این منظور نشان می‌دهیم که بازاء هر $\tilde{\varphi} \in \mathrm{GL}(L(G))$ با $\mathrm{Ker}(\exp) \subset \mathrm{Ker}(\exp)$، یک $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ با $L(\varphi) = \tilde{\varphi}$ وجود دارد. اما $(\exp \circ \tilde{\varphi})(\mathrm{Ker}(\exp)) = e$ ایجاب می‌کند که تجزیه‌ای $\varphi : G \to G$ به صورت $\exp \circ \tilde{\varphi}$ برحسب $\exp$ وجود دارد و لذا به وضوح $L(\varphi) = \tilde{\varphi}$. □

۱۷.۲.۸ یادداشت. مشخصهٔ مشابهی برای $\mathrm{Aut}(G)$، که G گروه لی همبند دلخواه است، وجود دارد. تنها کافی است گروه پوششی عام $\tilde{G}$ و هومورفیسم $\tilde{G} \to G$ پوششی را در نظر گرفت.

گزارهٔ ۱۶.۲.۸ امکان تعیین $\mathrm{Aut}(G)$ به صورت $G \cong L(G)/\mathrm{Ker}(\exp)$ را فراهم می‌سازد. نشان می‌دهیم:

۱۸.۲.۸ گزاره. گیریم $G = \mathbb{T}^n$. در این صورت $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$.

اثبات: زیرگروهی از $L(G)$ که با $\mathbb{Z}^n$ ایزومورف است را با $\mathbb{Z}^n$ نشان می‌دهیم. در این صورت $\mathbb{T}^n \cong L(G)/\mathbb{Z}^n$. اکنون:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{T}^n) = \{\psi \in \mathrm{GL}(L(G)) | \psi(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n\} \quad (۱۰.۸)$$

این نشان می‌دهد که $\mathrm{Aut}(\mathbb{T}^n) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$. □

فصل ۹

ضمیمه: کاتگوری و فانکتور

۱۹.۰.۹ تعریف. کاتگوری $\mathbf{R}$ تشکیل می‌شود از:

(i) کلاسی از اشیاء A، B، C، و ... ؛

(ii) بازاء هر جفت (A, B) از اشیاء، مجموعه‌ای $[A, B]$، که اعضاء آن مورفیسم از A به B یا با دامنهٔ A و برد B نامیده می‌شوند (و بازاء $\alpha \in [A, B]$ نوشته می‌شود $\alpha : A \to B$ یا $A \xrightarrow{\alpha} B$)، که این مجموعه‌ها دو به دو مجزا هستند: $(A, B) \neq (A', B')$ ایجاب می‌کند که $[A, B] \cap [A', B'] = \varphi$؛

(iii) بازاء هر سه تایی (A, B, C) از اشیاء، یک نگاشت:

$$[A, B] \times [B, C] \to [A, C] \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \beta\alpha \tag{۱.۹}$$

بنام ترکیب مورفیسم‌ها؛

(iv) بازاء هر شیء A، عنصری $1_A \in [A, A]$ بنام مورفیسم همانی A؛

این اطلاعات باید در دو اصل بعد صدق کنند:

(۱) اگر $\alpha \in [A, B]$، $\beta \in [B, C]$ و $\gamma \in [C, D]$، آنگاه:

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha \tag{۲.۹}$$

(۲) اگر $\alpha \in [A, B]$، آنگاه $\alpha 1_A = \alpha$ و $1_B\alpha = \alpha$.

۲۰.۰.۹ یادداشت. مورفیسم 1_A که وجودش را (iv) تعیین می‌کند، بنا به شرط (۲) یکتا است و آنرا می‌توان تعریف این مورفیسم گرفت. زیرا اگر $1'_A$ مورفیسم دومی با همان خاصیت باشد آنگاه $1_A = 1'_A = 1'_A 1_A$.

۲۱.۰.۹ مثال. کاتگوری **Set** که اشیاء آن مجموعه و مورفیسم‌های آنها نگاشتهای بین مجموعه‌ها با ترکیب معمولی هستند.

کاتگوری **Gro** گروهها که اشیاء آن گروه و مورفیسمهای آن همومورفیسمهای بین گروهها است و ترکیب آن هم ترکیب معمولی همومورفیسمها.

چنانچه فضاهای توپولوژی را شیء و نگاشتهای پیوسته را مورفیسم بگیریم، به یک کاتگوری بنام کاتگوری فضاهای توپولوژی **Top** می‌رسیم.

به صورت مشابه، کاتگوری منیفلدهای دیفرانسیل پذیر **Man** مرکب از منیفلدهای هموار بعنوان اشیاء و نگاشتهای هموار بعنوان مورفیسمها، معرفی می‌گردد.

فرض کنید $\mathbf{R}$ یک کاتگوری و A و B اشیائی از آن هستند. مورفیسم $\alpha : A \to B$ را در صورتی هم ارزی (۱) یا ایزومورفیسم (۲) گوئیم که $\beta : B \to A$ ای با $\beta\alpha = 1_A$ و $\alpha\beta = 1_B$ وجود دارد. اگر یک هم ارزی $\alpha : A \to B$ وجود داشته باشد، می‌گوئیم A و B هم ارز یا ایزومورفند و می‌نویسیم $A \cong B$. هر هم ارزی $\alpha : A \to A$ را اتومورفیسم می‌گوئیم.

۲۲.۰.۹ تعریف. گیریم $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}'$ کاتگوری هستند. فانکتور کواریان (۳) $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$ از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}'$ عبارت است از تناظر:

(i) یک شیء $F(A)$ از $\mathbf{R}'$ به هر شیء A از $\mathbf{R}$؛

(ii) یک مورفیسم $F(\alpha) : F(A) \to F(B)$ از $\mathbf{R}'$ به هر مورفیسم $\alpha : A \to B$ از $\mathbf{R}$؛

مشروط به اینکه دو شرط زیر برقرار باشد:

(۱) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ و

(۲) $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha)$.

چنانچه شرط (۲) با:

$$F(\beta\alpha) = F(\alpha)F(\beta) \qquad (۲)' \qquad (۳.۹)$$

تعویض گردد، $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$ را فانکتور کنترا واریان (۴) مینامیم.

۲۳.۰.۹ مثال. گیریم $\mathbf{R}$ یک کاتگوری و A شیئی از $\mathbf{R}$ است. فانکتور کواریانی $h_A : \mathbf{R} \to \mathbf{Set}$ به شکل زیر می‌توان تعریف نمود: بازاء هر شیء X از $\mathbf{R}$، $h_A(X) = [A, X]$ و بازاء $\varphi : X \to X'$ و $\alpha : X' \to A$، تعریف می‌کنیم $h_A(\varphi)(\alpha) = \alpha\varphi$. توجه شود که در اینجا $h_A : (\varphi) : [A, X] \to [A, X']$. به صورت مشابه، با تعریف $h^A(X) = [X, A]$ برای شیء X از $\mathbf{R}$ و $h^A(\varphi)(\alpha) = \alpha\varphi$ برای $\varphi : X \to X'$ و $\alpha : X' \to A$، می‌توان یک فانکتور کنترا واریان $h^A : \mathbf{R} \to \mathbf{Set}$ تعریف کرد. در اینجا $h^A(\varphi) : [X', A] \to [X, A]$.

۲۴.۰.۹ تعریف. گیریم $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}'$ کاتگوری هستند و $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$ و F دو فانکتور (کواریان) از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}'$ هستند. منظور از یک تبدیل طبیعی $\varphi : F \to G$ از F به G، متناظر کردن یک مورفیسم $\varphi_X : F(X) \to G(X)$ به هر شیء X از $\mathbf{R}$ است به گونه‌ای که، بازاء هر $\varphi : X \to Y$ ای دیاگرام زیر تعویض پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd} L(G) \arrow[r, "L(\varphi)"] \arrow[d, "\exp"'] & L(G) \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\varphi"'] & G \end{tikzcd}$$

۲۵.۰.۹ مثال. گیریم K میدانی تعویض پذیر، $\mathbf{Mod}_K$ کاتگوری K−فضای برداری و $D : \mathbf{Mod}_K \to \mathbf{Mod}_K$ فانکتور است که با متناظر کردن دو گان X^* هر فضای برداری X به آن و نگاشت دو گان به هر نگاشت خطی تعریف می‌گردد. فانکتور $D^۲ : \mathbf{Mod}_K \to \mathbf{Mod}_K$ به هر فضای برداری، دوگان دومش را نسبت می‌دهد. نگاشت مقدار یابی $\varepsilon(x)(x^*) =< x, x^* >$ برای $x \in X$ و $x^* \in X^*$، تبدیل طبیعی $\varepsilon : 1_K \to D^۲$ تعریف می‌کند.

تبدیلات طبیعی را بشکل بدیهی می‌توان با هم ترکیب نمود. تبدیل طبیعی $\varphi : F \to G$ را در صورتی هم ارزی طبیعی گوئیم که تبدیل طبیعی $\psi : G \to F$ چنان یافت گردد که $\psi\varphi = 1_p$ و $\varphi\psi = 1_G$، که 1_p و 1_G نمایشگر تبدیل طبیعی $F \to F$ و $G \to G$ بترتیب هستند.

۲۶.۰.۹ ضرب و جمع. گیریم $\mathbf{R}$ کاتگوری است. شیء T از $\mathbf{R}$ را در صورتی نهایی گوئیم که بازاء هر شیء K از $\mathbf{R}$، دقیقاً یک مورفیسم $K \to T$ وجود داشته باشد. پس تنها مورفیسم $T \to T$ عبارتست از 1_T و هر دو شیء تنهایی با هم هم ارزند.

گیریم $(K_j)_{j\in\mathcal{I}}$ خانواده‌ای از اشیاء $\mathbf{R}$ اندیس شده توسط مجموعهٔ $\mathcal{I}$ است. کاتگوری $P(K_j)$ که اشیاء آن خانواده‌های اندیس گذار $\{q_j : Q \to K_j | j \in \mathcal{I}\}$ از مورفیسمهای K با دامنهٔ مشترک Q هستند و هر مورفیسم $(q_j) \to (q'_j)$ در $P(K_j)$ عبارت است از یک مورفیسم $\alpha : Q \to Q'$ که بازاء هر $j \in \mathcal{I}$ ای $q'_j\alpha = q_j$. هر شیء نهایی در $P(K_j)$، حاصلضربی از K_j ها است. بنابراین:

۲۷.۰.۹ تعریف. حاصلضرب $(K_j)_{j\in\mathcal{I}}$ شی‌ئی P از $\mathbf{R}$ به همراه مورفیسمهای $p_j : P \to K_j$ بازاء $j \in \mathcal{I}$ است، به گونه‌ای که هر خانواده از مورفیسمهای $q_j : Q \to K_j$ را بازاء یک $\alpha : G \to P$ ای منحصر بفرد به شکل $q_j = p_j\alpha$ بتوان نوشت. حاصلضرب شبیه هر شیء نهایی دیگر، در حد هم ارزی در $\mathcal{P}(K_j)$ منحصر بفرد است. به ویژه شیء حاصلضرب P در حد هم ارزی در $\mathbf{R}$ یکتا است.

گیریم $\mathbf{R}$ یک کاتگوری است. شیء S از $\mathbf{R}$ را در صورتی آغازی گوئیم که بازاء هر شیء K ای دقیقاً یک مورفیسم $S \to K$ وجود داشته باشد. پس، تنها مورفیسم $S \to S$ همان 1_S است و هر دو شیء آغازی، هم ارزند.

گیریم $(K_j)_{j\in\mathcal{I}}$ خانواده‌ای از اشیاء $\mathbf{R}$ اندیس گذاری شده توسط مجموعهٔ $\mathcal{I}$ است. کاتگوری $\Gamma(K_j)$ که اشیاء آن خانواده‌های اندیس دار $\{P_k : K_j \to \mathbf{R} | j \in \mathcal{I}\}$ از مورفیسمهای $\mathbf{R}$ هستند که برد همهٔ آنها $\mathbf{R}$ است و هر مورفیسم $(\rho_j) \to (\rho'_j)$ در $\Gamma(K_j)$ عبارت از مورفیسمی $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$ است که بازاء هر $j \in \mathcal{I}$ ای $\alpha\rho_j = \rho'_j$. هر عنصر آغازی از این کاتگوری، یک مجموع از K_j ها است. بنابراین:

۲۸.۰.۹ تعریف. حاصلجمع $(K_j)_{j\in\mathcal{I}}$ یک شیء S از $\mathbf{R}$ به همراه مورفیسمهای $\sigma_j : K_j \to S$ بازاء هر $j \in \mathcal{I}$ است، به گونه‌ای که هر خانواده از مورفیسمهای $\rho_j : K_j \to \mathbf{R}$ را بازاء یک $\alpha : S \to \mathbf{R}$ ای به صورت $\alpha\sigma_j = \rho_j$ بتوان نوشت.

حاصلجمع درحد هم ارزی در $\Gamma(K_j)$ یکتا است، به خصوص، شیء مجموع در T در حد هم ارزی یکتا است.

کتاب‌نامه

[1] Bruhat, F., Algebres de Lie et groupes de Lie, Textos de Mathematic a, Univ. do Recife, Vol. 3 (1961).

[2] Bruhat, F., Lectures on Lie groups and representations of locally compact groups. Tata Institute of fundamental research, Bombay, 1958.

[3] Chevalley, C., Theory of Lie Groups, Vol. I, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1946).

[4] John, P. M., Lie Groups. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1957).

[5] Graeub, W., Liesche Gruppen und affin zusammenhangende Mannigfaltigkeiten, Acta Math. 106 (1961), 65 -Ill.

[6] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press (1962).

[7] Hoiman, K. H., Einfuhrung in die Theorie der Liegruppen, Teil I. Vorlesungsausarbeitung, Math. Jnst. Universit'at Tubingen (1963).

[8] Koszul, J. L., Exposes sur les spaces homogenes symetriques. Soc. Math. Sao Paulo (1959).

[9] Lichnerowicz, A., Geometrie des groupes de transformations, Dunod, Paris (1958).

[10] Maissen, B., Lie-Gruppen mit Banachraumen als Parameterraume, Acta Math. (1962) 229-269.

[11] Nomizu, K. and Kobayashi, S., Foundations of differential geometry, Vol. I., Interscience, N. Y. (1963).

[12] Palais, R., The classification of G-spaces, Memoirs AMS, Vol. 36 (1960).

[13] Palais, R., A global formulation of the Lie theory of transformation groups, Memoirs AMS, Vol. 22 (1957).

[14] Pontrjagin, L. S., Topologische Gruppen, Vol. II, Teubner Leipzig (1958).