

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد شمال تهران

مسایل هم ارزی بالا معین

و کاربرد آن در هم ارزی باز خورد

نجمه محمد جعفری

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض - هندسه دیفرانسیل

استاد راهنما: دکتر مهدی نجفی خواه

تابستان ۱۳۸۵

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

صحرای زرد خورشید به آسمان قدرت می‌بخشد

و آسمان را از ظلمات شب به سپیدی صبح و از سپیدی صبح به روشنایی روز و به زیبایی غروبی
دل انگیز مبدل می‌سازد.

آری من نیز آسمانی هستم که مهر مادر، دلسوزی پدر و فداکاری‌های همسرم به من قدرت بخشید
و امروزه نگاهها به من است.

تا هدیه ای کوچک به بزرگترین مهر، استقامت و گذشت تقدیم کنم.

مادر مهربان، پدر دلسوز و همسر فداکارم هر چه دارم و خواهم داشت از گوهر وجود شماست.

سپاسگزاری

سپاس خدای را که آموختن را با عشق در نهاد آدمی به ودیعه گذاشت و ستایش می کنم خدای را که به من قدرت داد تا در راه کسب علم و معرفت گام بردارم و از دنیای زیبای ریاضیات هر چند ذره‌ای بسیار ناچیز و کوچک، چیزی فراگیرم بعد از لطف و عنایت پروردگار، افراد بسیاری در راه کسب این موفقیت کوچک بنده نقش داشته‌اند که بدون شک تقدیر و تشکر از همه آنها امکان پذیر نیست ولی از پروردگار مهربان آرزوی سعادت و سربلندی برای تمامی این عزیزان دارم.

جا دارد از اساتید بزرگواری که در راستای نوشتن این پایان نامه به بنده یاری رسانده‌اند تشکر و قدردانی نمایم. در ابتدا از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مهدی نجفی خواه که استاد راهنمای بنده بودند تشکر و قدردانی می‌کنم که چه بسا اگر راهنمایی‌های ایشان نبود موفق به تنظیم و نوشتن این پایان نامه نمی‌شدم. همچنین از استاد مشاورم جناب آقای دکتر تولایی که زحمت بسیار کشیده‌اند تشکر می‌کنم. همچنین جادارد از اساتید بزرگوارم در دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال آقایان دکتر اسرافیلیان، دکتر فرودی، دکتر پاشا و دکتر مأموریان تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌ها و کلاسهای درس این بزرگواران و اساتید فرزانه بهره‌ فراوان گرفتیم. در آخر از خانواده عزیز و مهربانم بالاخص دو موجود فرزانه و گرانبهای زندگی‌ام یعنی پدر و مادرم که همواره و در همه حال پشتیبان و یاور بنده بودند کمال تشکر و قدردانی دارم. از همسر خوب و فداکارم که در تمام مراحل تنظیم و نوشتن پایان نامه مرا یاری کردند تشکر می‌کنم. و از خداوند متعال برای کلیه کسانی که از ابتدا تا کنون برای رسیدن بنده به این مرحله و مقطع زحمت فراوان کشیدند موفقیت و پیروزی در تمام مراحل زندگیشان را خواهان و خواستارم.

با تشکر

نجمه محمد جعفری

تابستان ۱۳۸۵

فهرست مندرجات

۱	چکیده
۳	مقدمه
۵	۱ چند تعریف و قضیه لازم
۵	۱.۱ چند تعریف و قضیه از جبر
۶	۲.۱ چند تعریف و قضیه از نظریه گروه‌های لی
۸	۳.۱ چند تعریف و قضیه از جبر تانسورها
۱۰	۴.۱ چند تعریف و قضیه از نظریه جتها
۱۲	۵.۱ چند تعریف و قضیه از نظریه ناوردای کلاسیک

۱۵	حساب دیفرانسیل	۲
۱۵	تعاریف اولیه	۱.۲
۱۶	دیفرانسیل	۲.۲
۱۷	وابستگی و استقلال توابع	۳.۲
۱۸	جبر فرمهای دیفرانسیلی	۴.۲
۲۱	کاربرد در نظریه گروههای لی	۵.۲
۲۴	کنج و همکنج	۶.۲
۲۴	فرمهای خاص	۷.۲
۲۷	G -ساختار	۸.۲
۲۷	دستگاه دیفرانسیلی خارجی	۹.۲
۳۱	مسأله هم ارزی کارتان	۳

۳۱	۱.۳	صورت مسأله
۳۴	۲.۳	ترفیغ مسأله
۳۶	۳.۳	معادلات ساختاری
۳۸	۴.۳	رفع ابهام از ضرایب تاب
۴۹		۴	کاهش گروه
۴۹	۱.۴	امتداد جبرلی
۵۱	۲.۴	مسأله هم ارزی نوع اول
۵۵	۳.۴	هندسه انتگرال $\int F(x, y^1, \dots, y^m, y^{1'}, \dots, y^{m'}) dx$
۶۲	۴.۴	مسایل هم ارزی بالا معین
۶۳	۵.۴	{e}-ساختارها
۶۳	۶.۴	توابع ساختاری

۶۵	ناوردا	۷.۴
۶۸	امتداد	۸.۴
۷۵		مسائل هم ارزی بالا معین و کاربردهای آن	۵
۷۶	مثال ۱	۱.۵
۷۷	مثال ۲	۲.۵
۷۸	حل مساله هم ارزی بالا معین	۳.۵
۸۲	ادامه مثال ۱	۴.۵
۸۳	ادامه مثال ۲	۵.۵
۸۵	مثال ۳	۶.۵
۹۲		نمادهای بکاررفته در پایان نامه	
۹۴		واژه نامه	

چکیده

در این پایان نامه، موضوع اصلی بحث پیرامون مسئله هم ارزی است ما در ابتدا مسئله هم ارزی کارتان را بیان کردیم سپس مساله هم ارزی بالامعین را توضیح دادیم. هدف بررسی مسایل هم ارزی و کاربردهای آن است که ما با استفاده از فرمهای دیفرانسیلی که توضیح دادیم و همچنین معرفی مساله هم ارزی الی کارتان، به بحث مورد نظر پرداختیم و با ذکر مثالهای متعدد این مساله و کاربرد آنرا بیان کردیم.

مقدمه

در این پایان نامه پیرامون مسایل هم ارزی، روش هم ارزی کارتان و کاربردهای آن بحث می‌شود. مساله هم ارزی کارتان در واقع پیدا کردن شرایط لازم و کافی برای هم ارز بودن دو شی هندسی می‌باشد که با استفاده از تغییر متغیر (یا به عبارت دیگر دیفیومورفیسم‌ها) این کار صورت می‌پذیرد. ساده ترین مثال برای این بخش، بحث مربوط به متغیرهای یک به یک و پوشا در حساب دیفرانسیل و انتگرال است که تغییر متغیرها معمولاً منجر به پیدا کردن مساله ساده‌تری می‌شوند که معادل با مساله اول است.

در معادلات دیفرانسیل هم می‌توان از ایده هم ارزی استفاده کرد؛ به این ترتیب که با استفاده از هم ارزی معادلات دیفرانسیل از درجه بالاتر را به معادلات دیفرانسیل از درجه پائین‌تر تبدیل می‌کنیم و بعد آنها را حل می‌کنیم.

نظریه هم ارزی در قرن بیستم توسط الی کارتان دانشمند فرانسوی شکل گرفت که البته در ادامه تلاشها و کوششهای افراد بزرگی نظیر فلیکس کلاین و سوفس لی بوده است. با استفاده از هم ارزی کارتان می‌توان اشیا هندسی را دسته بندی کرد؛ و به این ترتیب مطالعه آنها بسیار راحت تر خواهد شد. انگیزه کارتان برای طرح روش هم ارزی مطالعاتی بود که او در زمینه شبه گروههای بینهایت کوچک انجام داد.

بعد از کارتان تعدادی از شاگردان او از جمله روبرت گاردنر، روبرت بریانت، س. س. چرن و افرادی نظیر شادویک، پیتراولور کارهای زیادی را در این زمینه انجام دادند.

از جمله کاربردهای مساله هم ارزی در رشته برق، الکترونیک در کنترل اتوماتیک دستگاههای مکانیکی است.

هر سیستم کنترل اتوماتیک بر اساس یک یا چند معادله دیفرانسیل بیان می‌گردد. با تعویض کردن پارامترها معادله احتمالاً تغییر پیدا می‌کند. می‌خواهیم شرایطی را پیدا کنیم که با تغییر پارامترها، جوابهای دستگاه حفظ شود و تغییر نکند.

فرض کنید که دو دستگاه کنترل خطی یا غیر خطی داریم و فرض کنید که بین پارامترهای آن دو روابطی بتوان پیدا کرد. آیا این روابط کفایت لازم جهت هم ارزی آن دو دستگاه را دارند؟ و اصولاً چه تعدادی از این روابط کافی است؟

در این پایان نامه، پیرامون این مساله بحث خواهیم کرد و پاسخی به آن می‌دهیم. بنابراین موضوع اصلی مورد بحث ما مسایل هم ارزی بالا معین و کاربرد آن در هم ارزی باز خورد است، که از لحاظ علمی این موضوع در طبقه بندی ساختارهای هندسی کاربرد دارد؛ بخصوص ساختارهای منبث از معادلات دیفرانسیل.

از آنجایی که مساله هم ارزی کارتان خود به زبان فرمهای دیفرانسیلی بیان شده است و هر مساله را هم باید با استفاده از مفاهیم مربوط به آن مساله ابتدا تبدیل به کنج ها نمود، لذا بیان تعاریف و قضایای مربوط به فرمهای دیفرانسیلی و دستگاههای دیفرانسیلی در فهم روش هم ارزی کارتان موثر خواهد بود.

در فصل اول تعاریف و قضایای ساده و مقدماتی را بیان می‌کنیم. در فصل دوم با توجه به اهمیت فرمهای دیفرانسیلی پیرامون این مساله بحث خواهیم کرد. در فصل سوم مساله هم ارزی کارتان را توضیح می‌دهیم و علاوه بر آن به کاربرد این روش و مساله جذب مولفه‌های اصلی می‌پردازیم. در فصل چهارم به بحث در مورد امتدادها می‌پردازیم و در نهایت در فصل پنجم بحث اصلی پیرامون مسایل هم ارزی کارتان و کاربردهای آن و مسایل بالا معین مطرح خواهد شد و چند مثال در باب روشن شدن این مطالب ارائه می‌گردد.

فهرست الفبایی

جت، ۱۹	p-فرم، ۲۵
جملات تاب، ۴۵	۱-فرم، ۱۸
دستگاه تماسی، ۲۲	۱-فرم دیفرانسیلی، ۲۴
دستگاه دیفرانسیلی خارجی، ۳۶	امتداد جبرلی، ۵۸
دوگان فضای برداری، ۲۳	برش، ۲۵
ضرایب تاب، ۴۵	برگشت، ۲۸
ضرب تانسوری، ۱۶	پائین نامعین، ۴۱
ضرب داخلی، ۲۷	تاب ذاتی، ۵۸
ضرب گوه‌ای، ۲۶	تابع تحلیلی، ۱۶
عبارت یوگا، ۴۳	تار، ۱۳
عمل گروه، ۱۳	تانسور، ۱۷
فایبر، ۱۳	هموردا، ۱۷
فرم بسته، ۲۹	تبدیل هم‌مدیس، ۴۱
فرم دقیق، ۲۹	توابع مستقل، ۲۶
فرم منظم، ۲۹	توابع وابسته، ۲۵
فرم ناوردای راست، ۳۱	ثابتهای ساختاری، ۳۱
فرمهای مورر-کارتان، ۳۱، ۴۳	

فضای کتانزانت، ۲۴

کلاف تاری، ۱۸

کنج، ۳۲

گروه ساختاری مساله هم ارزی، ۳۹

گروه متقارن، ۲۰

مساله هم ارزی از نوع ثابت مرتبه اول، ۵۹

مشتق خارجی، ۲۶

معادلات ساختاری کارتان، ۴۵، ۵۸

معادله فاف، ۴۲

میدان برداری ناورد، ۳۰

ناوردا، ۲۱

نمایش گروه، ۱۸

همکنج، ۳۲

همکنج ترفیع یافته، ۴۳

Abstract

In this thesis, the main subject of discussion is about equivalence that we earlier explained Cartan equivalence and over determined equivalence respectively. The goal is investigation of equivalence and its usage which we explained by differential forms and also introduced Cartan equivalence. We stated this subject and its uses by showing several examples.

Azad University - North Branch

Overdetermined Equivalence Problems and It's
Applications in Feedback Equivalence

by

Najmeh Mohammad Jafary

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the

Requirements for the Degree of

Master of Science

in

Pure Mathematics - Differential Geometry

Adviser : Dr. Mehdi Nadjafikhah

Winter, 2006