درس شبیه سازی کامپیوتری

فصل چهارم– مدل های صف

حسین مومنی
momeni@iust.ac.ir

فصل ۵: مدل های صف

- تعریف: متقاضیان از زمانی به زمان دیگر وارد می شوند و به صف می پیوندند، سپس خدمت دریافت می کنند و سرانجام سیستم را ترک می کنند.
  - متقاضی اشاره به هر نوع نهادی است که خواهان دریافت خدمت می باشد.
  - تشکیلات خدماتی، سیستم های تولید، تشکیلات نگهداری، تعمیر سیستم های ارتباطات، سیستم های نقل و انتقال و نگهداری مواد و ...
- معیارهای رایج عملکرد سیستم
  - ضریب بهره برداری خدمت دهنده (درصدی از زمان که خدمت دهنده مشغول است)
  - طول صف انتظار
  - مدت های انتظار متقاضیان
- مسئله برقراری ایجاد توازن بین ضریب اشتغال خدمت دهنده و میزان جلب رضایت متقاضی بر حسب طول صف و مدت انتظار است
- در این فصل رفتار پویا و ویژگی های کلی سیستم های صف را تعبیر و روابط و معیارهای مهم عملکرد، براورد میانگین معیارهای عملکرد با استفاده از شبیه سازی و تاثیر تغییرات پارامترهای ورودی و حل ریاضی تعدادی از مدل های مهم و ابتدایی صف را مورد بررسی قرار می دهیم

۵-۱: ویژگی های سیستم های صف

- متقاضیان
  - لزوما متقاضی به تشکیلات خدمت دهنده وارد نمی شود
  - ممکن است خدمت دهنده به سوی متقاضی برود
    - تعمیرکار به سوی ماشین خراب می رود
- عناصر هر سیستم که باید توصیف شوند
  - جمعیت متقاضی (Population size)
  - ظرفیت سیستم (System capacity)
  - فرایند ورود (Arrival process)
  - رفتار صف و قانون صف (Service disciplines)
  - مدت های خدمت دهی و مکانیزم آن (Service time distribution)
  - تعداد خدمت دهنده ها (Number of servers)

عناصر سیستم های صف

- جمعیت متقاضی
  - جمعیت متقاضیان بالقوه که می توانند متناهی یا نامتناهی باشند
  - ۵ ماشین، عمل آوری لاستیک خودرو را انجام می دهند. با گذشت یک فاصله زمانی هر ماشین بطور خودکار باز شده و کارگری لاستیک پخته شده را بیرون می آورد و یک لاستیک خام در داخل آن قرار می دهد.
    - ماشین ها: متقاضیان هستند که در لحظه باز شدن خود، وارد می شوند
    - کارگر نیز خدمت دهنده است که در اسرع وقت به ماشین باز شده خدمت می دهد

عناصر سیستم های صف (ادامه)

- ظرفیت سیستم
  - حد بالای تعداد متقاضیانی که می توانند در صف قرار گیرند
    - در یک کارواش که جا برای ۱۰ ماشین است توقف ماشین ها در بیرون کارواش خطرناک بوده و مشتری به محض مشاهده پر بودن وارد سیستم نمی شود و فورا به جمعیت متقاضی بر می گردد.
  - در مورد سیستم های با ظرفیت محدود دو مورد آهنگ ورود (تعداد مراجعه به سیستم در واحد زمان) و آهنگ موثر ورود (تعداد مراجعه به سیستم و ورود آن به سیستم در واحد زمان) مورد بررسی قرار می گیرد
- تعداد خدمت دهنده ها
  - می تواند یک یا چند خدمت دهنده باشد.

عناصر سیستم های صف (ادامه)

- فرایند ورود
  - برای مدل های نامتناهی برحسب مدت های بین ورود متقاضیان متوالی مشخص می شود.
  - ورود ها می تواند در لحظات از قبل تعیین شده یا در لحظات تصادفی باشد
  - اگر تصادفی باشد مدت های ورود با توزیع آماری مشخص می گردد.
  - متقاضیان می توانند یک به یک یا گروهی وارد شوند. اندازه گروه می تواند ثابت یا متغیر و تصادفی باشد

  - مهمترین مدل برای ورود های تصادفی فرایند پواسون است.
    - اگر مدت بین ورود متقاضی $n-1$ و n برای فرایند پواسون با A_n معرفی شود، A_n از توزیع آماری نمایی منفی با میانگین $1/\lambda$ در واحد زمان پیروی می کند.
    - آهنگ ورود λ متقاضی در واحد زمان می باشد.

عناصر سیستم های صف (ادامه)

- فرایند ورود (ادامه)
  - ورودهای برنامه ریزی شده
    - ورود بیماران به مطب پزشک، ورود مواد خام به فرایند تولید
    - مدت های بین ورود یعنی A_n می تواند ثابت یا ثابت $\pm$ یک مقدار تصادفی کوچک باشد تا ورود زودهنگام یا دیرهنگام را نشان دهد.

- کاربردهای صف:
  - ورود مردم به رستوران، اتو بانکها، تشکیلات خدماتی، ورود تقاضاهای تلفنی به مرکز توزیع و هدایت شماره گیری، ورود تقاضا یا سفارش برای یک خدمت یا کالا، ورود قطعات یا ماشن آلات از کار افتاده به تعمیرگاه

عناصر سیستم های صف (ادامه)

- رفتار صف و قانون صف
  - منظور از رفتار صف کنش های متقاضی در طی مدتی که در صف قرار دارد
    - متقاضی تازه از راه رسیده با مشاهده طول صف یا با مشاهده تاخیر از پیوستن به سیستم یا ماندن در آن صرف نظر کند یا تغییر صف دهد

عناصر سیستم های صف (ادامه)

- رفتار صف و قانون صف (ادامه)
  - منظور از قانون صف، ترتیب منطقی متقاضاان در صف است و تعیین می کند با آزاد شدن یک خدمت دهنده کدام متقاضی باید برای خدمتگیری انتخاب شد.
  - انواع قوانین صف:
    - خدمتگری به ترتیب ورود (FIFO)
    - به عکس ترتیب ورود (LIFO) – (Last in First out)
    - به ترتیب تصادفی (SIRO) – (Service in random order)
    - براساس کوتاهترین مدت مورد نیاز (SPT) – (Shortest processing time first)
    - براساس اولویت (PR) – (Service according to priority)

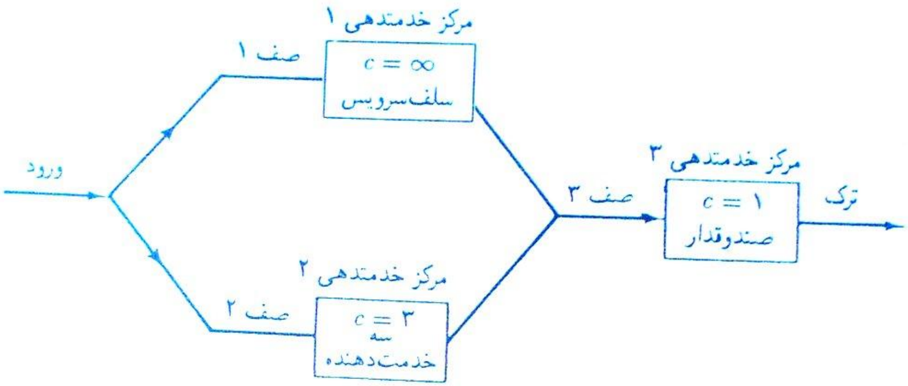
عناصر سیستم های صف (ادامه)

- مدت های خدمت دهی و مکانیزم آن
  - مدت های خدمت دهی متوالی S_1، S_2، ... می تواند ثابت یا تصادفی باشد.
  - توزیع های نمایی منفی، ویبول، گاما مورد استفاده قرار می گیرند
    - مدت خدمت دهی می تواند برای گروه و رده ای از متقاضیان توزیع آماری متفاوتی داشته باشد.
    - مدت خدمت دهی می تواند به وقت روز یا طول صف بستگی داشته باشد. مثلا ممکن است وقتی طول صف زیاد است خدمتدهنده سریعتر کارکند

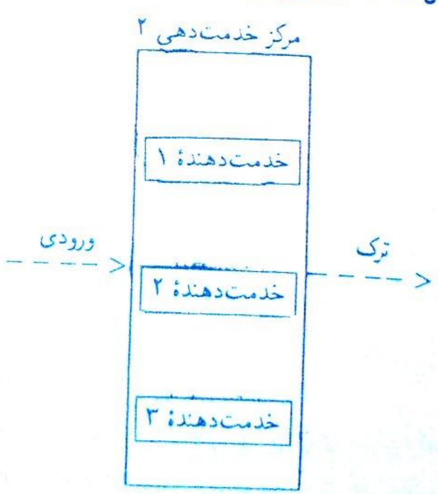
- تعداد خدمت دهنده ها
  - تعداد خدمت دهنده ها می تواند از ۱ تا ∞ باشد. در تشکیلات سلف سرویس معمولا با تعداد نامحدود خدمت دهنده روبرو هستیم

عناصر سیستم های صف (ادامه)

- یک مثال از فروشگاه زنجیره ای:



شکل ۵-۳ انبار فروش کالا با سه مرکز خدمتدهی.



شکل ۵-۴ مرکز خدمتدهی ۲ با ۳ خدمت‌دهندهٔ موازی.

۵–۲: نمادگذاری سیستم های صف (kendal)

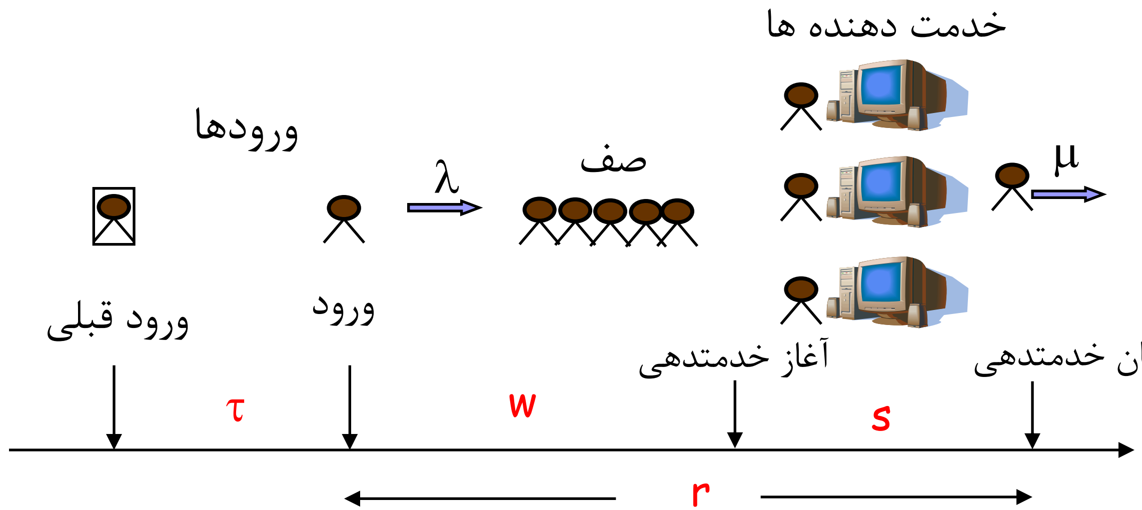
- بصورت قالب کلی A/B/c/N/K می باشد
  - A: نشاندهنده توزیع فواصل بین ورود
  - B: معرف توزیع مدت خدمتدهی است
    - برای A و B می توانت توزیع های M(نمایی) ، D(ثابت یا قطعی) ، G (عمومی یا دلخواه)
  - c: نشاندهنده تعداد خدمت دهنده های موازی است
  - N: معرف ظرفیت سیستم است.
  - K: نشان دهنده اندازه جمعیت است.
    - اگر N و K نامتناهی باشد از آخر حذف می شود

  - مثال: G/G/1/5/5

۵-۲: پارامترهای مهم برای بررسی صف

P_n	احتمال حاضر بودن n متقاضی در سیستم در حالت پایا
$P_n(t)$	احتمال حاضر بودن n متقاضی در سیستم در لحظهٔ t
λ	آهنگ ورود
λ_e	آهنگ ورود مؤثر
μ	آهنگ خدمتدهی یک خدمت‌دهنده
μ_e	آهنگ خدمتدهی مؤثر یک خدمت‌دهنده
ρ	ضریب بهره‌برداری از خدمت‌دهنده
A_n	مدت بین ورود متقاضی $n-1$ام و متقاضی nام
S_n	مدت خدمتدهی به nامین متقاضی
W_n	مجموع مدتی که متقاضی nام در سیستم می‌ماند
W_n^Q	مجموع مدتی که متقاضی nام در صف انتظار می‌ماند
$L(t)$	تعداد متقاضیان حاضر در سیستم در لحظهٔ t
$L_Q(t)$	تعداد متقاضیان حاضر در صف انتظار در لحظهٔ t
L	میانگین زمانی تعداد متقاضی حاضر در سیستم در بلندمدت
L_Q	میانگین زمانی تعداد متقاضی حاضر در صف انتظار در بلندمدت
w	میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در سیستم در بلندمدت
w_Q	میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در صف انتظار در بلندمدت

۲-۵: پارامترهای مهم برای بررسی صف (ادامه)

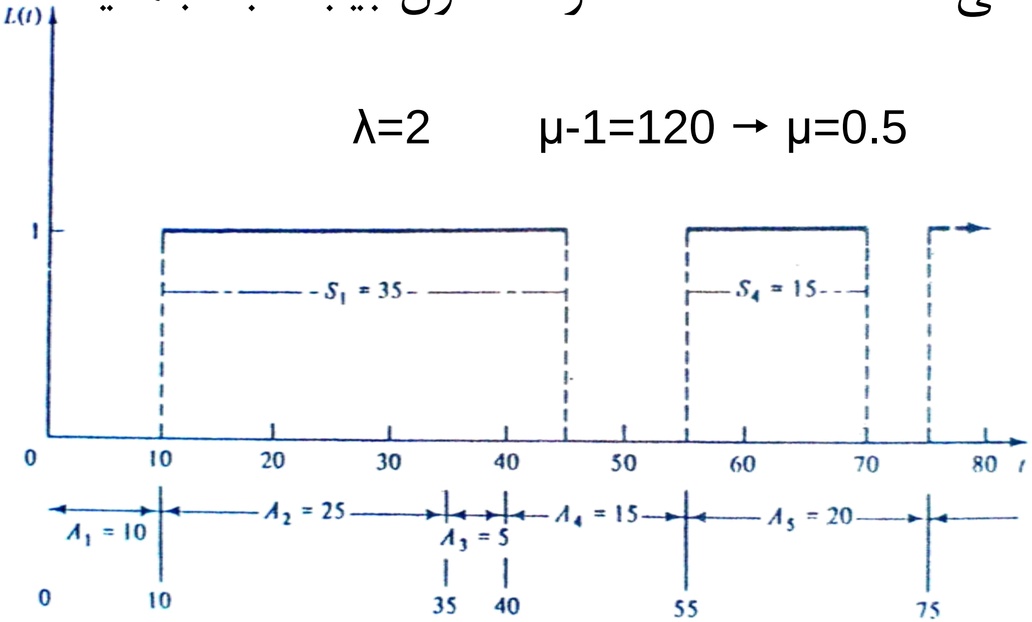


- τ: فواصل ورود
- λ: میانگین آهنگ ورود
- W: زمان انتظار
- S: مدت خدمتدهی
- r: زمان پاسخ

۵-۳: رفتار گذرا و پایای سیستم های صف

- سیستم صف $M/M/1/1/\infty$ را که در لحظه صفر خالی است در نظر بگیرید.
- صف تک مجرایی با ورودهای پواسون با نرخ λ ورود در واحد زمان و مدت های خدمت دهی نمایی با میانگین μ^{-1}
- ظرفیت سیستم برابر ۱ است بطوری که هیچگاه صف انتظار تشکیل نمی شود.
- وارد شوندگان زمانی که خدمت دهنده را مشغول بیابند به جمعیت نامتناهی بر می گردند.

λ=2 μ-1=120 → μ=0.5



شکل ۵-۶ وضعیت گذشتهٔ سیستم سکوی بارگیری.

۵-۳: رفتار گذرا و پایای سیستم های صف (ادامه)

- ضریب بهره برداری (درصد مدتی که خدمت دهنده مشغول است)

$$\hat{\rho} = \frac{35+15}{10+25+5+15+20} = \frac{50}{75} = 0.67$$

- آماره $\hat{\rho}$ را می توان بصورت زیر ارائه کرد که در آن T_i/T معرف درصد مدتی است که i متقاضی در حال دریافت خدمت هستند و $\hat{\rho}$ را میانگین موزون زمانی می نامند

$$\hat{\rho} = 0(\frac{T_0}{T}) + 1(\frac{T_1}{T}) = 0(\frac{25}{75}) + 1(\frac{50}{75}) = 0.67$$

- درصد بهره برداری در بلندمدت بصورت زیر است:

$$\rho = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{2}{2+0.5} = 0.8$$

$$\rho = \frac{120}{30+120} = 0.8 = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

۵-۳: رفتار گذرا و پایای سیستم های صف (ادامه)

- صرف نظر از شرایط شروع، رابطه زیر برقرار است

$$\hat{\rho} \xrightarrow[T\to\infty]{} \rho$$

- با استفاده از نظریه ریاضی صف داریم:

$$P(L(t)=0)=P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+a_0e^{-(\lambda+\mu)t} \qquad a_0=P_0(0)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$P(L(t)=1)=P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+a_1e^{-(\lambda+\mu)t} \qquad a_1=P_1(0)-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

- اگر زمان به بی نهایت میل کند، خواهیم داشت:

$$P_0(t)\to P_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$P_1(t)\to P_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

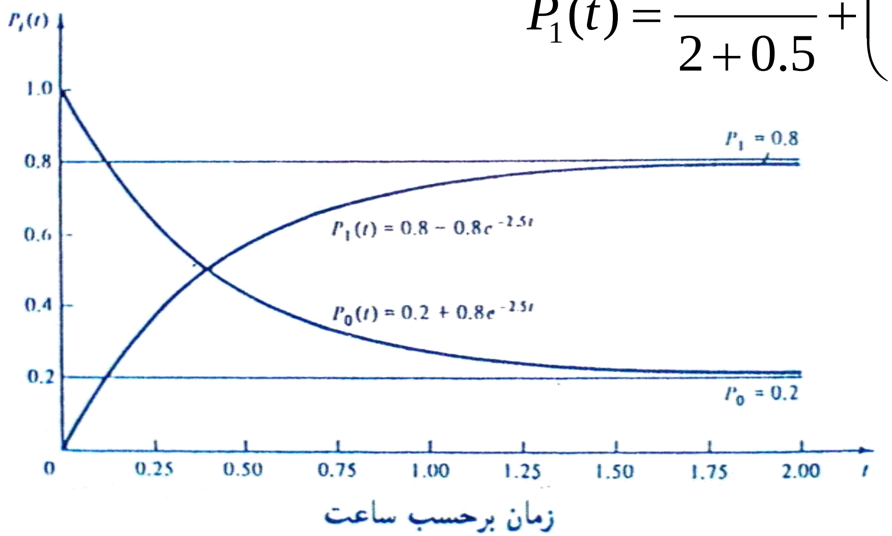
احتمالات حالت پایا

۵-۳: رفتار گذرا و پایای سیستم های صف (ادامه)

- مثال سکوی تخلیه و بارگیری $\mu^{-1}=2$ $\lambda=2$
- سیستم در لحظه صفر خالی $P_1(0)=0$ $P_0(0)=1$

$$P_0(t)=\frac{0.5}{2+0.5}+\left(1-\frac{0.5}{2+0.5}\right)e^{-2.5t}$$

$$P_1(t)=\frac{2}{2+0.5}+\left(0-\frac{2}{2+0.5}\right)e^{-2.5t}$$



شکل ۵-۷ احتمالات گذرا و احتمالات حالت پایا در مورد صف $M/M/1/1/\infty$.

آهنگ موثر ورود

$\lambda_e= \lambda(1-P_N)$

$\lambda_e= \lambda(1-P_1)=0.4$

$\mu_e= \mu(1-P_0)=0.5*0.8=0.4$

وقتی سیستم در حالت تعادل آماری است آهنگ موثر ورود و آهنگ موثر خدمتدهی برابر می شود

۵-۴: معیارهای عملکرد سیستم های صف در بلندمدت

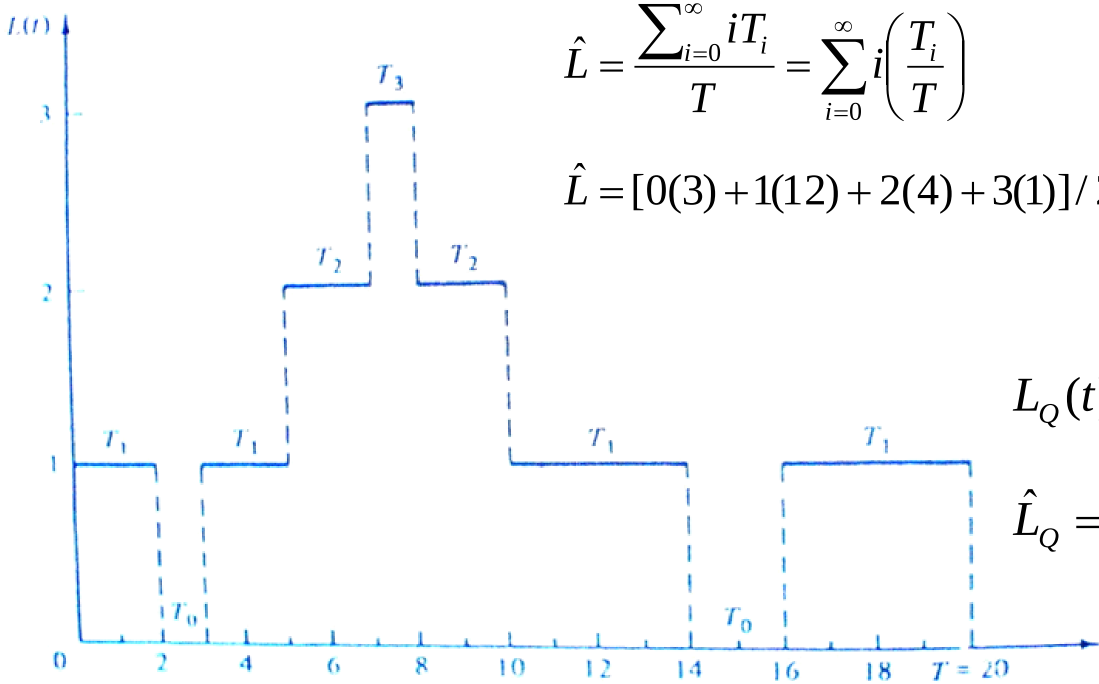
- معیارهای اصلی عملکرد
  - میانگین تعداد متقاضیان حاضر در سیستم در بلندمدت (L)
  - میانگین تعداد متقاضیان حاضر در صف انتظار در بلندمدت (L_Q)
  - میانگین مدت بسر بردن هر متقاضی در سیستم در بلندمدت (W)
  - میانگین مدت بسر بردن هر متقاضی در صف انتظار در بلندمدت (W_Q)
  - ضریب بهره برداری خدمت دهنده یا درصد مدت بهره برداری خدمتدهنده (ρ)

۵-۴-۱: میانگین زمانی تعداد در سیستم L

- مثال : در یک صف G/G/1/N/K فرض T_i مجموع مدتی باشد که در دوره زمانی [0 T] دقیقا i متقاضی در سیستم حاضر است. میانگین زمانی تعداد مشتریان در سیستم و صف؟
- با توجه به شبیه سازی شکل زیر مقادیر $T_0=3$ و $T_1=12$ و $T_2=4$ و $T_3=1$ برقرار است
- میانگین موزون زمانی تعداد در سیستم

$$\hat{L} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} iT_i}{T} = \sum_{i=0}^{\infty} i\left(\frac{T_i}{T}\right)$$

$$\hat{L} = [0(3)+1(12)+2(4)+3(1)]/20 = \frac{23}{20} = 1.15$$



شکل ۵-۸ تعداد در سیستم، $L(t)$، در لحظه t.

$$L_Q(t) = \begin{cases} 0, & L(t)=0 \\ L(t)-1, & L(t)\geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{L}_Q = [0(15)+1(4)+2(1)]/20 = 0.3$$

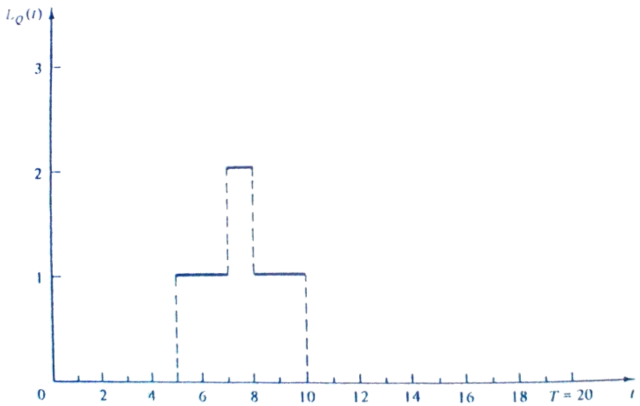
۵-۴-۱: میانگین زمانی تعداد در سیستم L (ادامه)

- میانگین انتگرال گیری شده نسبت به زمان

$$\hat{L} = \sum_{i=0}^{\infty} i\left(\frac{T_i}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{\infty} iT_i = \frac{1}{T}\int_0^T L(t)dt$$

$$\hat{L} = \frac{1}{T}\int_0^T L(t)dt \xrightarrow[T\to\infty]{} L$$

$$\hat{L}_Q = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{\infty} iT_i^Q = \frac{1}{T}\int_0^T L_Q(t)dt \xrightarrow[T\to\infty]{} L_Q$$



شکل ۵-۹ تعداد در صف انتظار، $L_Q(t)$، در لحظهٔ t.

۵-۴-۲: میانگین مدت بسر بردن هر متقاضی در سیستم در بلندمدت (W)

- فرض W_i مدتی را که متقاضی i در دوره زمانی $[0\ T]$ در سیستم به سر می برد
- میانگین مدت سیستم

$$\hat{w} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i$$

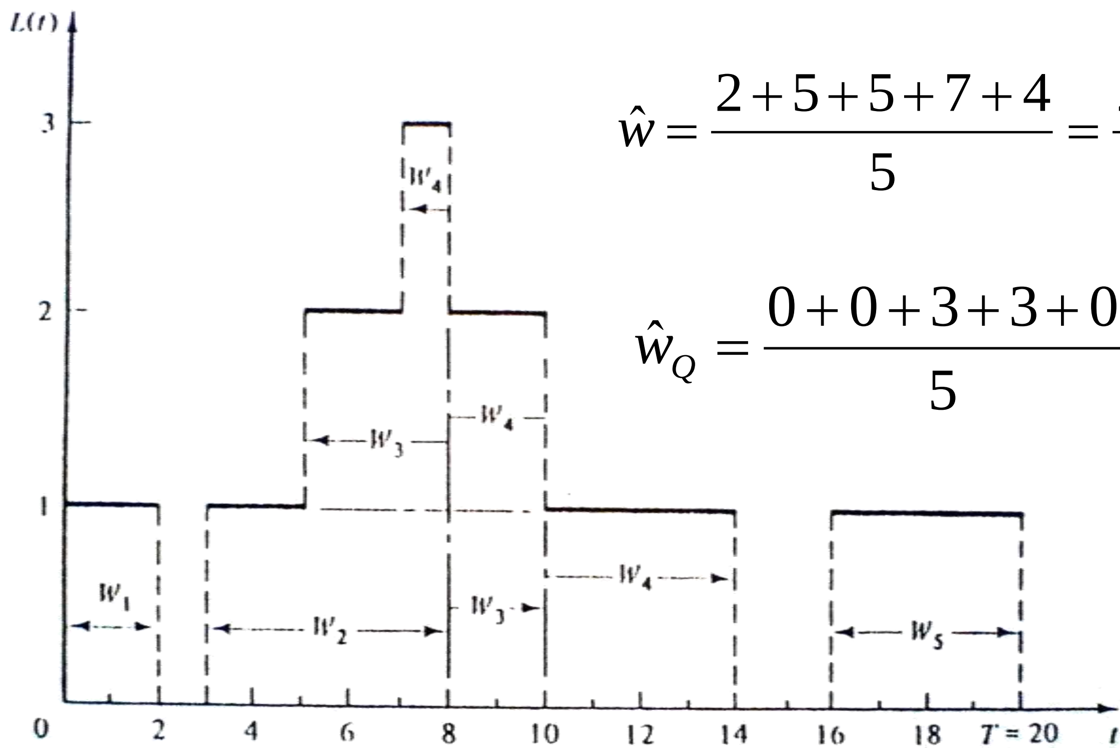
$$\hat{w} \xrightarrow[N\to\infty]{} w$$

$$\hat{w}_Q = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i^Q \xrightarrow[N\to\infty]{} w_Q$$

۵-۴-۲: میانگین مدت بسر بردن هر متقاضی در سیستم

- مثال: میانگین مدت بسر بردن هر متقاضی در سیستم و صف؟

- با شرط اینکه یک خدمتدهنده داریم و خدمتدهی به ترتیب ورود است داریم:
  - $W_1=2$ و $W_2=8-3=5$ و $W_3=10-5=5$ و $W_4=14-7=7$ و و $W_5=20-16$



$$\hat{w} = \frac{2+5+5+7+4}{5} = \frac{23}{5} = 4.6$$

$$\hat{w}_Q = \frac{0+0+3+3+0}{5} = 1.2$$

شکل ۵-۱۰ مدتهای به‌سر بردن در سیستم، W_i، در سیستم صف تک مجرایی و با خدمتدهی FIFO.

۵-۴-۳: معادله پایستگی $L=\lambda w$

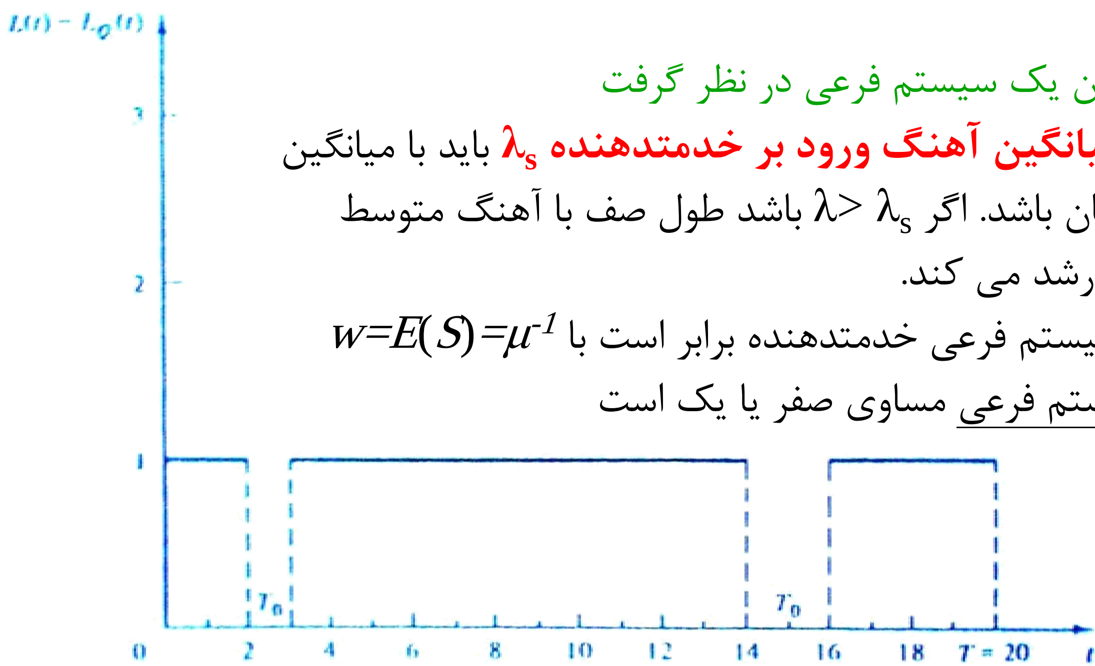
- **میانگین تعداد متقاضیان در سیستم در یک لحظه اختیاری، برابر است با حاصلضرب میانگین تعداد ورودها در واحد زمان و میانگین مدت بسر بردن در سیستم**
- λ برابر است با میانگین تعداد ورودها
- w برابر است با میانگین مدت بسر بردن مشتری در سیستم
- این رابطه در حالت کلی برقرار می باشد (هر نوع قانون صف، هر تعداد خدمتدهنده و ...)
- مثال:
  - در مساله قبل، بطور متوسط در هر لحظه از زمان چند متقاضی در سیستم موجود می باشد؟

$$L=\lambda w \quad L= 1/4*4.6 = 1.15$$

- *نام دیگر معادله پایستگی، قانون لیتل می باشد.*

۵-۴-۴: ضریب بهره برداری خدمت دهنده

- برابر است با نسبت مدتی که خدمت دهنده مشغول است $\hat{\rho} \xrightarrow[T\to\infty]{} \rho$
  - مثال قبلی ضریب بهره برداری چیست؟ (ضریب بهره برداری) $T-T_0/T$
- **ضریب بهره برداری در صف G/G/1/∞/∞**
  - صف تک مجرایی با میانگین ورود λ متقاضی در واحد زمان.
  - میانگین مدت خدمت دهی $E(S)=1/\mu$ در واحد زمان بوده، ظرفیت صف و اندازه جمعیت متقاضی بینهایت می باشد.
  - سیستم خدمتدهنده را می توان یک سیستم فرعی در نظر گرفت
  - در مورد سیستم های پایدار **میانگین آهنگ ورود بر خدمتدهنده λ_s** باید با میانگین آهنگ ورود به سیستم λ یکسان باشد. اگر $\lambda > \lambda_s$ باشد طول صف با آهنگ متوسط $\lambda - \lambda_s$ متقاضی در واحد زمان رشد می کند.
  - میانگین مدت سیستم برای سیستم فرعی خدمتدهنده برابر است با $w=E(S)=\mu^{-1}$
  - تعداد متقاضیان حاضر در سیستم فرعی مساوی صفر یا یک است



شکل ۵-۱۱ تعداد متقاضی در حال دریافت خدمت در لحظه t.

$$\hat{L}_s = \frac{1}{T}\int_0^T (L(t)-L_Q(t))dt = \frac{T-T_0}{T}$$

$$\hat{L}_s = \frac{17}{20} = \hat{\rho}$$

$$\hat{L}_s = \hat{\rho} \xrightarrow[T\to\infty]{} L_s = \rho$$

۵-۴-۴: ضریب بهره برداری خدمت دهنده - ادامه

- ضریب بهره برداری در صف $G/G/1/\infty/\infty$ (ادامه)
  - معادله پایستگی برای سیستم فرعی خدمتدهنده بصورت زیر است
    - $\rho=\lambda E(S)=\lambda/\mu$ (آهنگ ورود تقسیم بر آهنگ خدمتدهی)
    - شرط پایداری بدین صورت است که باید $\lambda<\mu$ باشد. یا $\rho=\lambda/\mu<1$
    - در مورد سیستم های ناپایدار $L_Q=w=w_Q=\infty$
- ضریب بهره برداری در صف $G/G/c/\infty/\infty$
  - با فرض اینکه همه خدمتدهنده ها بطور یکسان μ متقاضی را در واحد زمان سرویس می دهند برای هر یک داریم:
    - $\rho=L_s=\lambda E(S)=\lambda/\mu$
    - که میانگین ضریب بهره برداری برای کل خدمتدهنده ها برابراست با $\rho=Ls/c=\lambda/c\mu$
  - بالاترین آهنگ خدمتدهی معادل $c\mu$ است و این حالت وقتی رخ می دهد که همه خدمتدهنده ها مشغول باشند.
  - شرط لازم و کافی برای پایداری $\lambda<c\mu$

۵-۴-۴: ضریب بهره برداری خدمت دهنده - ادامه

- مثال برای ضریب بهره برداری در صف $G/G/c/\infty/\infty$
  - متقاضیان بطور تصادفی با آهنگ $\lambda=50$ متقاضی در واحد زمان به اداره شماره گذاری خودرو وارد می شوند. تعداد خدمتدهنده ها ۲۰ و بطور متوسط $\mu=5$ متقاضی در ساعت خدمت می دهند.
  - الف- ضریب بهره برداری هر خدمت دهنده در حالت پایدار چیست؟

$$\rho=\lambda/c\mu=50/(20*5)=0.5$$

  - ب- میانگین تعداد خدمت دهنده های مشغول چیست؟

$$L_s=c\rho=20*0.5=10$$

  - ج- آیا می توان تعداد خدمتدهنده ها را کم کرد؟

جواب: شرط پایداری $\lambda/c\mu<1$ می باشد. پس تعداد باید حداقل 11و یا بیشتر باشد.

۵-۴-۴: ضریب بهره برداری خدمت دهنده - ادامه

- ضریب بهره برداری خدمتدهنده و عملکرد سیستم
  - عامل ایجاد صف تغییرپذیری مدت های بین ورود و یا مدت های خدمتدهی است.
  - **مثال:** پزشکی بیماران خود را طوری تنظیم می کند که هر ۱۰ دقیقه مراجعه جدید داشته باشد و مدت خدمتدهی برای بیمار i بصورت توزیع آماری زیر است

$$S_i = \begin{cases} 9 \text{ min} & p=0.9 \\ 12 \text{ min} & p=0.1 \end{cases}$$

  - فرض کنید $S_1=9$ و $S_2=12$ و $S_3=9$ و $S_4=9$ و $S_5=9$ باشد، الف- درصد مشغول بودن پزشک در بلند مدت چیست؟ ب- وضعیت بیماران حاضر در سیستم بصورت لحظه ای را با نمودار نشان دهید.
  - راه حل قسمت الف:

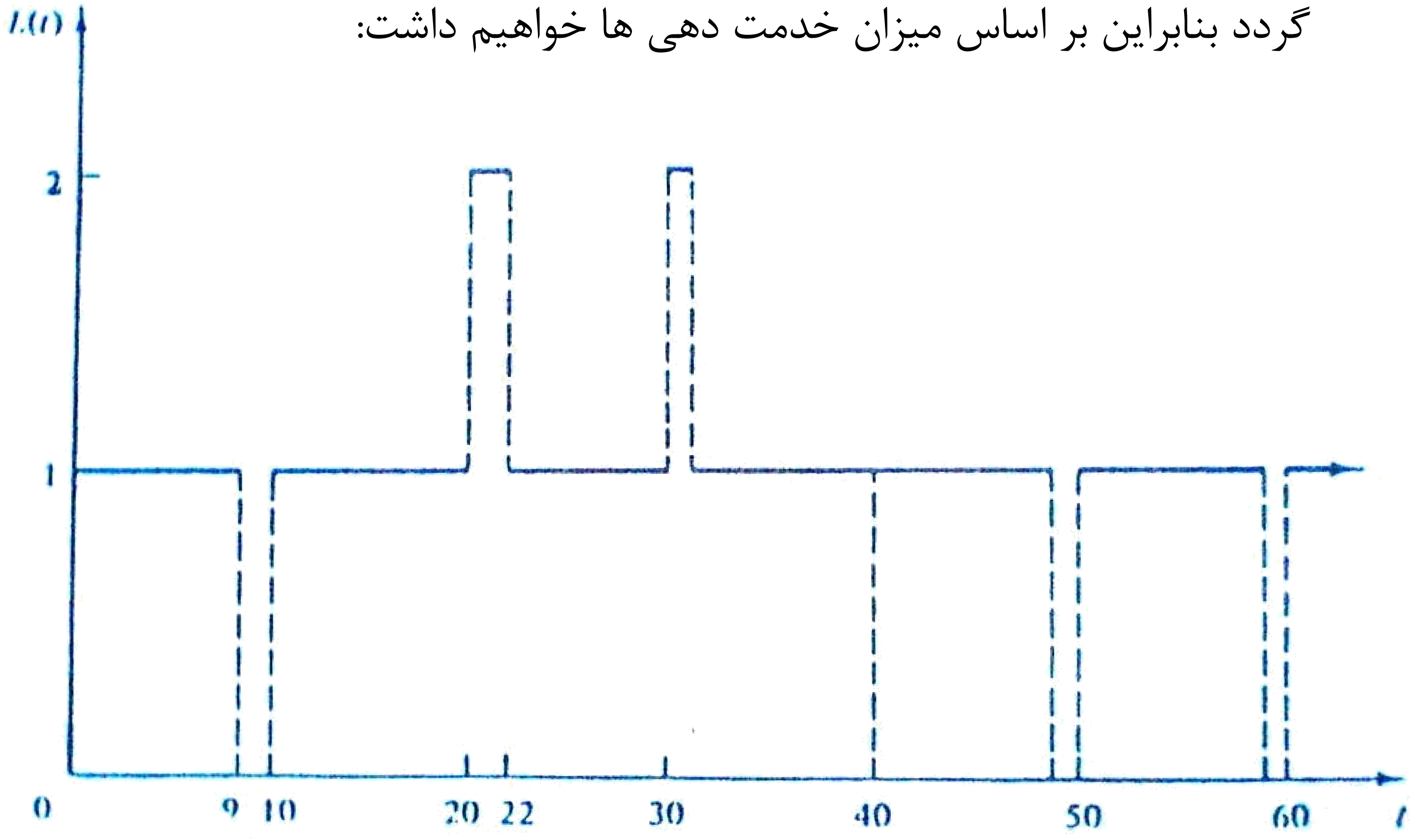
$$E(S_i)=9*(0.9)+12*(0.1)=9.3 \text{ min}$$

$$\rho=\lambda/\mu=E(S)/E(A)=9.3/10=0.93$$

پزشک در بلند مدت در ۹۳ درصد از زمان مشغول می باشد.

۵-۴-۴: ضریب بهره برداری خدمت دهنده - ادامه

- ادامه حل مثال مطب پزشک:
  - ب- زمانی که مدت خدمتدهی مورد نیاز ۱۲ دقیقه می شود منجر به تشکیل صف می گردد بنابراین بر اساس میزان خدمت دهی ها خواهیم داشت:



شکل ۵-۱۳ تعداد بیماران حاضر در مطب در لحظهٔ t.

۵-۴-۵: عامل هزینه در مسائل صف

- در نظر گرفتن هزینه برای صف انتظار
- فرض کنید هر متقاضی حاضر در صف هزینه ۱۰ واحد پول در ساعت را منجر شود.
- اگر متقاضی j ام معادل W_j^Q ساعت در صف بماند، **هزینه کل** مربوط به N متقاضی و **میانگین هزینه** بصورت زیر است:

$$\sum_{j=1}^{N} 10 W_j^Q \qquad \sum_{j=1}^{N} \frac{10 W_j^Q}{N} = 10\hat{w}_Q$$

- **متوسط هزینه در ساعت** : اگر بطور متوسط $\hat{\lambda}$ متقاضی در ساعت وارد شوند در چارچوب معادله پایستگی داریم:

$$\left(\hat{\lambda}\,\frac{\text{متقاضی}}{\text{ساعت}}\right)\left(\frac{10\hat{w}_Q}{\text{متقاضی}}\right) = 10\hat{\lambda}\hat{w}_Q = 10\hat{L}_Q$$

- راه دیگر بررسی تعداد متقاضی حاضر در صف در هر لحظه می باشد (T_i^Q) که در این صورت هزینه کل و متوسط هزینه بصورت زیر است

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{10 i T_i^Q}{T} = 10\hat{L}_Q$$

۵-۴-۵: عامل هزینه در مسائل صف - ادامه

- در نظر گرفتن هزینه برای خدمت دهنده

- اگر به هنگام بهره برداری از خدمت دهنده، هزینه ای معادل ۵ واحد پول در ساعت بر سیستم وارد شود، بصورت زیر محاسبه می شود:

$$5(c\rho)$$

- اگر در صورت بیکاری خدمت دهنده، سیستم هزینه متحمل شود، بصورت زیر محاسبه می شود:

$$5[c(1-\rho)]$$

۵-۵: رفتار حالت پایا در مدل های مارکوفی با جمعیت نامتناهی

- پاسخ مربوط به حالت پایای تعدادی از مدل های صف که به طریق ریاضی قابل حل می باشند را در این بخش معرفی می نماییم:
- مدل های با جمعیت نامتناهی بصورت زیر می باشند:
  - فرایند ورود پواسون با میانگین λ ورود در واحد زمان است
  - مدت خدمتدهی توزیع نمایی (M) یا توزیع کلی (G) می تواند باشد.
  - قانون صف به ترتیب ورود است.
  - سیستم صف در حالت تعادل آماری یا پایاست اگر احتمال بودن سیستم در یک وضعیت مشخص به زمان بستگی نداشته باشد.

$$P(L(t)=n)=P_n(t)=P_n$$

۵-۵: رفتار حالت پایا در مدل های مارکوفی با جمعیت نامتناهی - ادامه

- در مورد مدل های ساده، پارامتر حالت پایا L ، میانگین زمانی تعداد متقاضی حاضر در سیستم بصورت زیر است:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

- که در آن P_n احتمالات حالت پایای سیستم می باشد
- با استفاده از معادله لیتل (پایستگی) سایر پارامترهای حالت پایا بدست می آید

$$w = \frac{L}{\lambda}$$

$$L_Q = \lambda w_Q$$

۵-۵-۱: صف های تک مجرایی با ورود پواسون و ظرفیت نامحدود: M/G/1

- اگر بجای توزیع آماری مدت خدمت دهی فقط **میانگین** خدمت دهی و **واریانس** مدت های خدمت دهی معلوم باشد، توزیع خدمت دهی را دلخواه (G) در نظر می گیریم.
- مدت های خدمتدهی دارای میانگین μ^{-1} و واریانس σ^2 می باشند
- بطور کلی روابط ساده ای برای P_1 و P_2 و ... وجود ندارد
- تنها می توان گفت که $1-P_0=\rho$

جدول ۵-۳ پارامترهای حالت پایا برای صف $M/G/1$.

ρ	λ/μ
L	$\rho+\frac{\lambda^2(\mu^{-2}+\sigma^2)}{2(1-\rho)}=\rho+\frac{\rho^2(1+\sigma^2\mu^2)}{2(1-\rho)}$
w	$\mu^{-1}+\frac{\lambda(\mu^{-2}+\sigma^2)}{2(1-\rho)}$
w_Q	$\frac{\lambda(\mu^{-2}+\sigma^2)}{2(1-\rho)}$
L_Q	$\frac{\lambda^2(\mu^{-2}+\sigma^2)}{2(1-\rho)}=\frac{\rho^2(1+\sigma^2\mu^2)}{2(1-\rho)}$
P_0	$1-\rho$

۵-۵-۱: صف های تک مجرایی با ورود پواسون و ظرفیت نامحدود: M/G/1 - ادامه

- **مثال:**
  - ماشین های سازنده ابزار کوچک بصورت تصادفی عملکردی نامناسب پیدا می کند و توسط یک مکانیک رسیدگی می شود، نامناسب شدن عملکرد ماشین ها، طبق فرایند پواسون با آهنگ $\lambda=1.5$ در ساعت رخ می دهد. مدت های تعمیر، میانگین ۳۰ دقیقه و انحراف معیار ۲۰ دقیقه را دارد. الف- درصد بهره برداری مکانیک ب- میانگین تعداد ماشین های خراب در بلند مدت را بدست آورید؟
- حل :
  - آهنگ خدمتدهی $\mu=2$ در ساعت و σ^2 معادل (۲۰ دقیقه)۲ یا 1/9 ساعت است
  - ابزار سازنده، جمعیت متقاضی هستند
  - درصد مدت بهره برداری مکانیک $\rho=\lambda/\mu=1.5/2=0.75$
  - میانگین تعداد ماشین های خراب $L=0.75+[(1.5)^2[(0.5)^2+1/9]]/[2(1-0.75)]$

۵-۵-۱: صف های تک مجرایی با ورود پواسون و ظرفیت نامحدود: M/G/1 - ادامه

- مثال:
  - دو نفر بر سر بدست آوردن یک شغل با هم رقابت می کنند. هابیل ادعا دارد سریعتر از خباز بوده ولی خباز می گوید که منظم تر است. ورود، طبق فرآیند پواسون با آهنگ $\lambda=2$ در ساعت رخ می دهد. میانگین و انحراف معیار مدت خدمت دهی هابیل به ترتیب ۲۴ دقیقه (μ^{-1}) و ۲۰ دقیقه $(\sigma^2=20^2=400)$ است و برای خباز به ترتیب ۲۵ دقیقه (μ^{-1}) و ۲ دقیقه $(\sigma^2=2^2=4)$ است. اگر ضابطه استخدام یکی از این دو نفر، میانگین طول صف باشد، کدام یک استخدام می شود؟

- حل:
  - ضریب بهره وری هابیل: $\rho=\lambda/\mu=24/30=4/5$
  - ضریب بهره وری خباز: $\rho=\lambda/\mu=25/30=5/6$
  - میانگین طول صف پارامتر انتخاب است.

$$L_{Q-H}=\frac{(1/30)^2[24^2+400]}{2(1-4/5)}=2.711$$

$$L_{Q-KH}=\frac{(1/30)^2[25^2+4]}{2(1-5/6)}=2.097$$

صف M/M/1

- مدت خدمتدهی بصورت نمایی با میانگین μ^{-1} است.
- واریانس بدست آمده برابر است با $\sigma^2 = \mu^{-2}$

جدول ۵-۴ پارامترهای حالت پایا برای صف $M/M/1$.

L	$\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda} = \dfrac{\rho}{1-\rho}$
w	$\dfrac{1}{\mu-\lambda} = \dfrac{1}{\mu(1-\rho)}$
w_Q	$\dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$
L_Q	$\dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$
P_n	$(1-\dfrac{\lambda}{\mu})(\dfrac{\lambda}{\mu})^n = \rho^n(1-\rho)$

صف M/M/1

- مثال:
  - معلوم شده مدت های بین ورود و خدمتدهی در آرایشگاهی با یک آرایشگر، توزیع نمایی دارد. میانگین مدت های بین ورود بالغ بر ½ ساعت و میانگین مدت خدمتدهی ۲۰ دقیقه است. ضریب بهره برداری خدمت دهنده و احتمالات حضور صفر، یک، دو، سه و چهار مشتری در مغازه را بدست آورید.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3}$$

$$P_1 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$$

$$P_{\geq 4} = 1 - \sum_{n=0}^{3} P_n = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \frac{8}{81} = \frac{16}{81}$$

- احتمال مشغول بودن آرایشگر

$$1 - P_0 = \rho = 0.67$$

- میانگین زمانی تعداد متقاضی حاضر در سیستم

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3-2} = 2$$

- میانگین مدت بسر بردن هر متقاضی در سیستم

$$w = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{2} = 1$$

صف M/M/1 – ادامه

- ادامه حل مثال آرایشگاه:
  - میانگین مدت بسر بردن هر متقاضی در صف انتظار

$$w_Q = w - \mu^{-1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

  - میانگین زمانی تعداد متقاضی حاضر در صف

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{4}{3(1)} = \frac{4}{3}$$

صف M/D/1

- مدت های خدمت دهی فاقد هرگونه تغییر پذیری بوده و دارای واریانس صفر می باشند
- مدت های خدمت دهی دارای مقدار ثابت $1/\mu$ می باشند.

جدول ۵-۶ پارامترهای حالت پایا برای صف $M/D/1$.

L	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \rho + /\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{1-\rho}$
w	$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \mu^{-1} + \frac{1}{2}\frac{\rho\mu^{-1}}{1-\rho}$
w_Q	$\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{2}\frac{\rho\mu^{-1}}{1-\rho}$
L_Q	$\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{1-\rho}$

صف M/D/1

- مثال:
  - تمام جت هایی که به فرودگاه می آیند به باندی هدایت می شوند. ورود ها توزیع پواسون با آهنگ ۳۰ در ساعت است. مدت لازم برای هدایت هواپیما در امر نشستن بر زمین معادل مقدار ثابت ۹۰ ثانیه است. مطلوبست تعیین L_Q ، w_Q ، L و w برای این فرودگاه؟
- حل
  - $\lambda=0.5$ per min $\quad 1/\mu=1.5$ per min
  - $\rho=\lambda/\mu=0.5/(2/3)=3/4$
  - $L_Q=(3/4)^2/[2(1-3/4)]=9/8=1.125$
  - $w_Q= L_Q/\lambda=(9/8)/(1/2)=9/4=2.25$
  - $w= w_Q+1/\mu=2.25+1.5=3.75$
  - $L= L_Q+\lambda/\mu=1.125+0.75=1.875$

- هزینه انتظار بطور متوسط ۵۰۰۰۰۰ واحد پول هزینه سوخت باشد متوسط هزینه سوخت ناشی از مدت انتظار $500000*L_Q$ می باشد.

۵-۵-۲: صف تک مجرایی با ورود پواسون و ظرفیت محدود M/M/1/N/∞

- ظرفیت سیستم N می باشد یعنی اگر به هنگام پر بودن سیستم یک ورود رخ دهد، باید از سیستم دور شود.
- آهنگ ورود و آهنگ ورود موثر در سیستم های با ظرفیت محدود مطرح می گردد.
- $\lambda_e = \lambda(1-P_N)$

جدول ۵-۷ پارامترهای حالت پایا برای صف $M/M/1/N$ (ظرفیت $= N$، $a = \lambda/\mu$).

L	$\begin{cases} \dfrac{a[1-(N+1)a^N + Na^{N+1}]}{(1-a^{N+1})(1-a)} & \lambda \neq \mu \\ N/2 & \lambda = \mu \end{cases}$
$1 - P_N$	$\begin{cases} \dfrac{1-a^N}{1-a^{N+1}} & \lambda \neq \mu \\ \dfrac{N}{N+1} & \lambda = \mu \end{cases}$
λ_e	$\lambda(1-P_N) = \mu(1-P_0) = \mu_e$
ρ	$\lambda_e/\mu = 1 - P_0$
w	L/λ_e
w_Q	$w - 1/\mu$
L_Q	$\lambda_e w_Q = L - (1 - P_0)$
P_n	$\begin{cases} \dfrac{(1-a)a^n}{1-a^{N+1}} & \lambda \neq \mu \\ \dfrac{1}{N+1} & \lambda = \mu \end{cases} \quad n = 0, 1, \ldots, N$

۵-۵-۲: صف تک مجرایی با ورود پواسون و ظرفیت محدود $M/M/1/N/\infty$

- مثال: آرایشگاهی ظرفیت سه نفر را دارد. یک نفر در حال خدمت گرفتن می باشد و دو نفر در صف. شدت آمد و شد $\lambda/\mu=2/3$ است. مطلوب است الف- احتمال بودن سه مشتری در آرایشگاه ب- امید ریاضی تعداد متقاضیان در آرایشگاه ج- آهنگ ورود موثر.
  - احتمال بودن سه متقاضی در سیستم

$$P_N = P_3 = \frac{(1-2/3)(2/3)^3}{1-(2/3)^4} = \frac{8}{65} = 0.123$$

  - امید ریاضی تعداد متقاضیان در آرایشگاه

$$L = \frac{2/3[1-4(2/3)^3+3(2/3)^4]}{[1-(2/3)4](1-2/3)} = 66/65 = 1.015$$

  - آهنگ ورود موثر

$$\lambda_e = 2(1-\frac{8}{65}) = 2(\frac{57}{65}) = 114.65 = 1.754$$

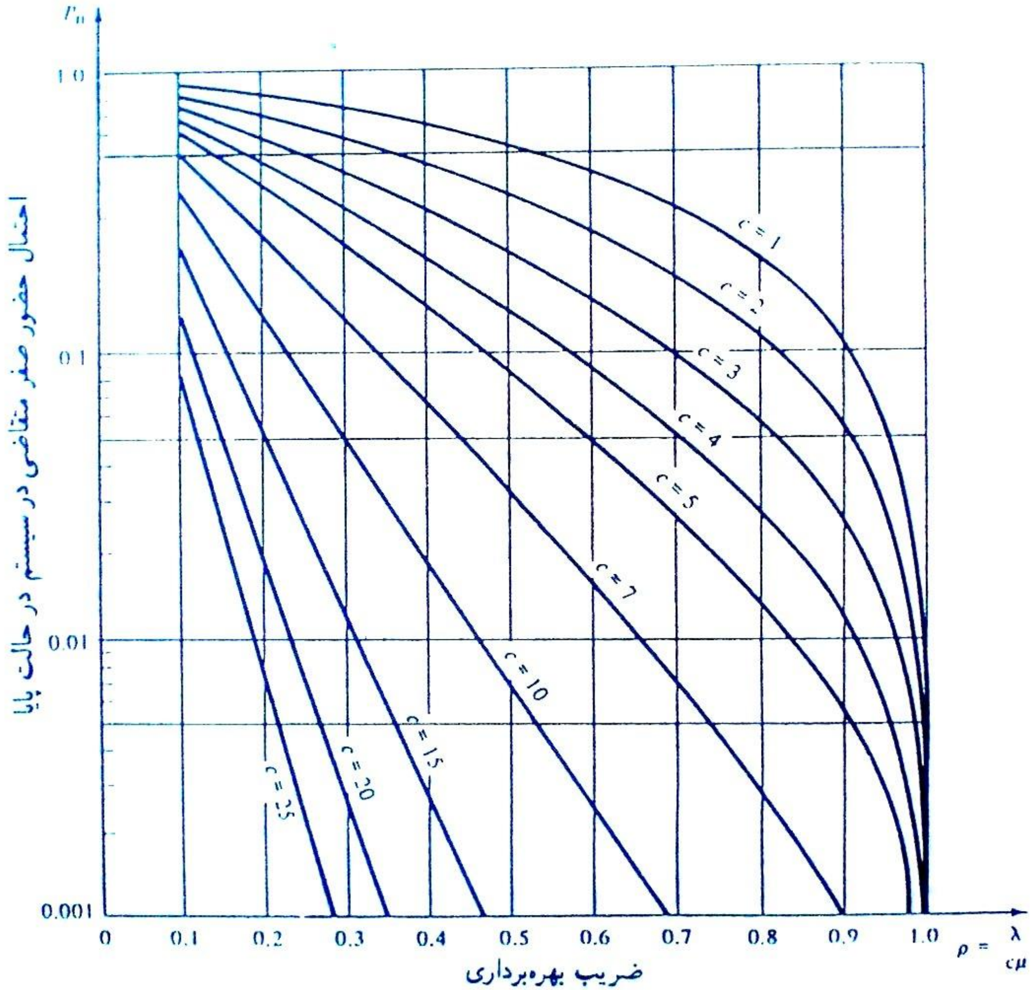
۵-۵-۳: صف های چند مجرایی M/M/c/ ∞ /∞

- تعداد c خدمت دهنده بطور موازی در حال کار می باشند. مدت خدمت دهی ها مستقل بوده و توزیع نمایی دارند.
- شرط تعادل عبارت است از:
  - $\lambda/c\mu < 1$

جدول ۵-۸ پارامترهای حالت پایا برای صف $M/M/c$.

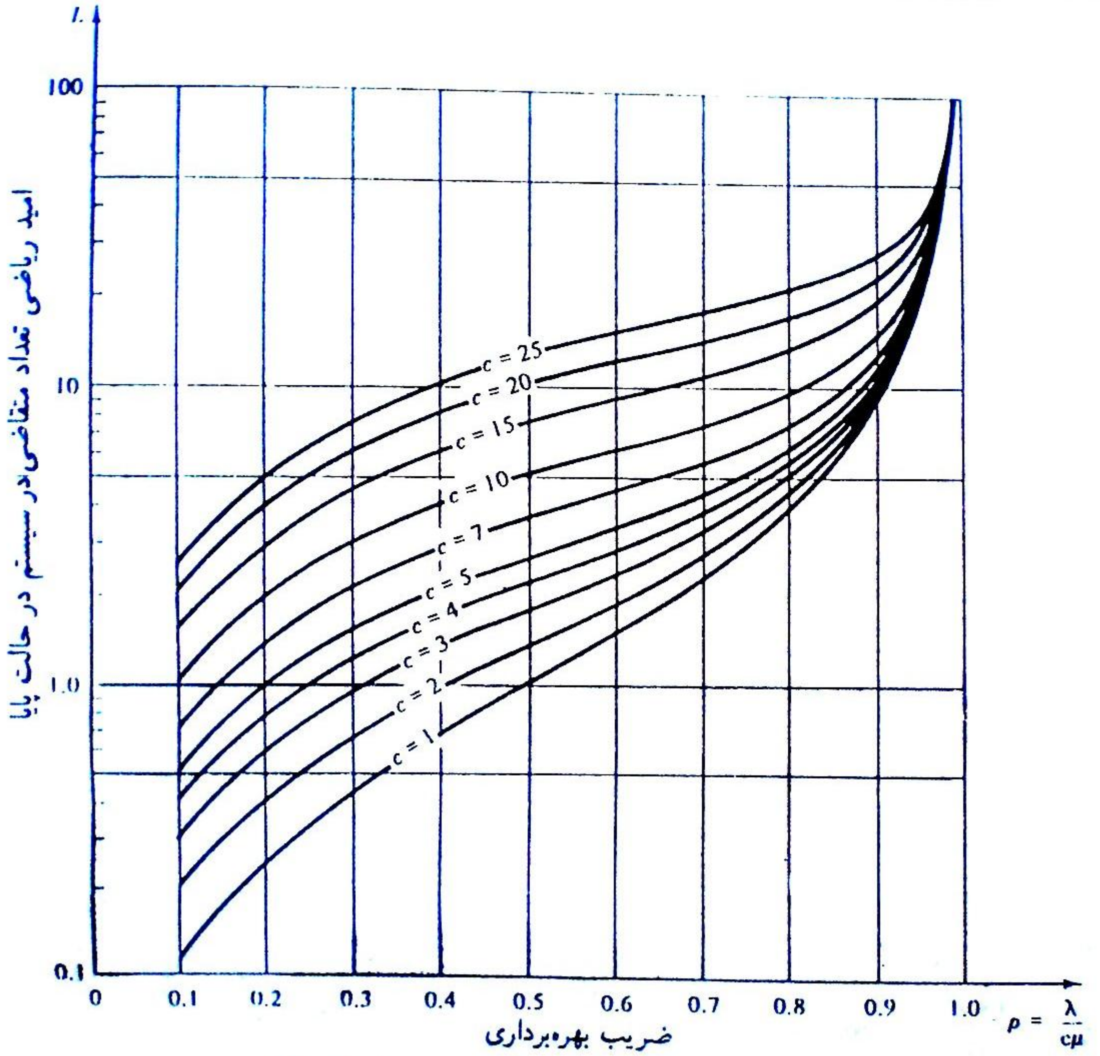
ρ	$\lambda/c\mu$
P_0	$\left\{\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right]+\left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{c!}\right)\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)\right]\right\}^{-1}$ $=\left\{\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^n}{n!}\right]+\left[(c\rho)^c\left(\frac{1}{c!}\right)\frac{1}{1-\rho}\right]\right\}^{-1}$
$P(L(t)\geq c)$	$\frac{(\lambda/\mu)^c P_0}{c!(1-\lambda/c\mu)}=\frac{(c\rho)^c P_0}{c!(1-\rho)}$
L	$c\rho+\frac{(c\rho)^{c+1}P_0}{c(c!)(1-\rho)^2}=c\rho+\frac{\rho P(L(t)\geq c)}{1-\rho}$
w	L/λ
w_Q	$w-1/\mu$
L_Q	$\lambda w_Q=\frac{(c\rho)^{c+1}P_0}{c(c!)(1-\rho)^2}=\frac{\rho P(L(t)\geq c)}{1-\rho}$
$L-L_Q$	$\lambda/\mu=c\rho$

۵-۵-۳: صف های چند مجرایی M/M/c/ ∞ /∞ (ادامه)



شکل ۵-۱۶ مقادیر P_0 برای مدل $M/M/c/\infty$.

۵-۵-۳: صف های چند مجرایی M/M/c/ ∞ /∞ (ادامه)



شکل ۵-۱۷ مقادیر L برای مدل $M/M/c/\infty$.

۵-۵-۳: صف های چند مجرایی M/M/c/ ∞ /∞ (ادامه)

- مثال:
- افرادی در اداره یک اتاق ابزار مشغول می باشند و مکانیک هایی از یک جمعیت نامتناهی برای دریافت خدمت (ابزار مورد نیاز) مراجعه می کنند. ورود پواسون با آهنگ ۲ مکانیک در دقیقه و خدمتدهی نمایی با میانگین ۴۰ ثانیه می باشد. الف- حداقل چند خدمت دهنده در اتاق ابزار لازم است تا شرط تعادل داشته باشیم؟ ب- میانگین زمانی طول صف مکانیک ها ج- میانگین زمانی تعداد مکانیک ها در سیستم؟ د- میانگین مدت بسر بردن یک مکانیک در سیستم؟ ه- میانگین مدت انتظار مکانیک ها در سیستم؟
- حل:
  - $\mu=60/40=3/2$ per min $\quad\quad$ $\lambda=2$ per min
  - چون $\lambda/\mu>1$ به منظور داشتن یک سیستم در حالت تعادل آماری به بیش از یک خدمت دهنده نیاز است. دست کم $c=2$
  - ضریب بهره برداری خدمت دهنده

$$\rho=\frac{\lambda}{c\mu}=\frac{2}{2(3/2)}=0.667$$

۵-۵-۳: صف های چند مجرایی $M/M/c/\infty/\infty$ (ادامه)

- مثال (ادامه):

  - میانگین زمانی طول صف مکانیک ها:

$$L_Q = \frac{(2/3)(8/15)}{(1-2/3)}\left(\frac{1}{5}\right) = 1.07$$

  - میانگین زمانی تعداد در سیستم:

$$L = L_Q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{16}{15} + \frac{4}{3} = 2.4$$

  - میانگین مدت بسر بردن یک مکانیک در اتاق ابزار و میانگین مدت انتظار:

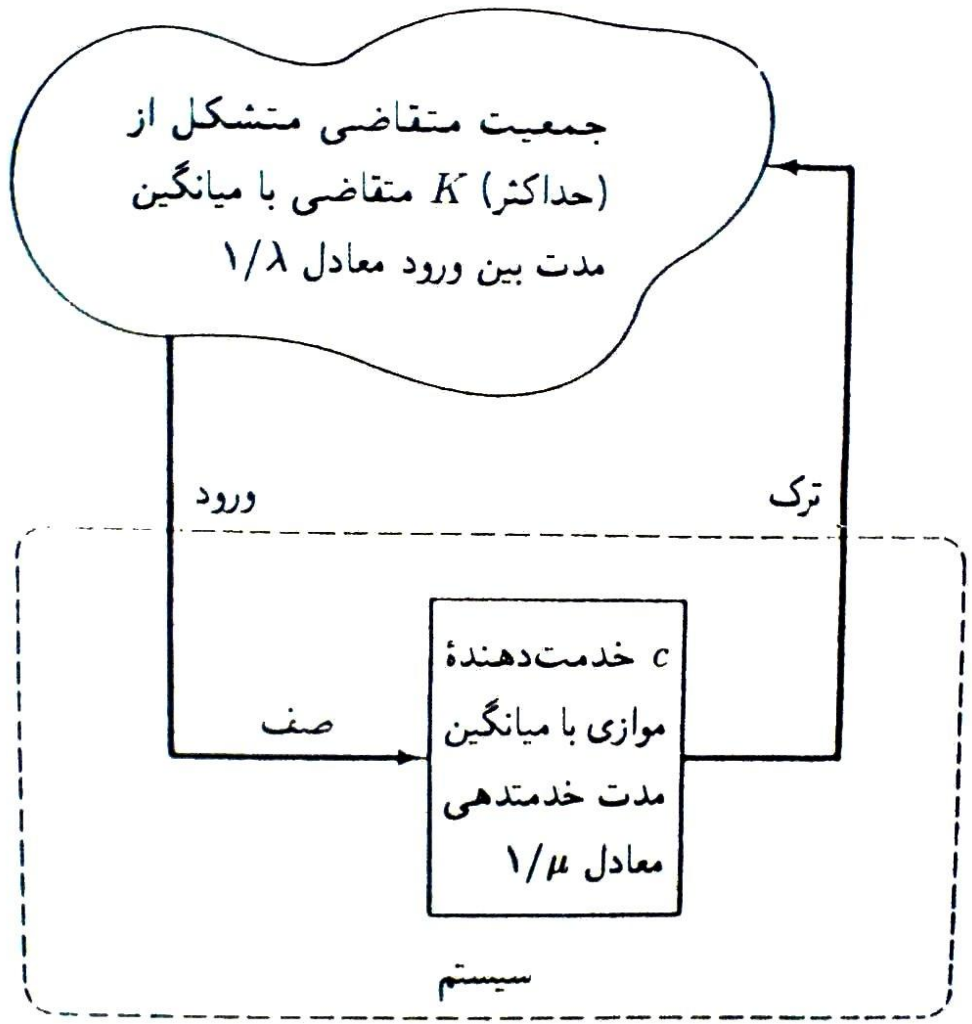
$$w = L/\lambda = 2.4/2 = 1.2$$

$$w_Q = w - \frac{1}{\mu} = 1.2 - \frac{2}{3} = 0.533$$

۵-۶: رفتار حالت پایای مدل های با جمعیت متناهی M/M/c/ K /K

- با استفاده از ضریب خدمتدهی X و تعداد خدمت دهنده دو مقدار زیر با استفاده از جدول محاسبه می شود.
  - D= احتمال اینکه یک وارد شونده ناچار از انتظار کشیدن برای دریافت خدمت باشد
  - F= ضریب کارایی، که به صورت درصد متقاضیانی که در بلندمدت یا در حال انجام ماموریت یا در حال گرفتن خدمت هستند.

۵-۶: رفتار حالت پایای مدل های با جمعیت متناهی M/M/c/ K /K (ادامه)



۵-۶: رفتار حالت پایای مدل های با جمعیت متناهی M/M/c/ K /K (ادامه)

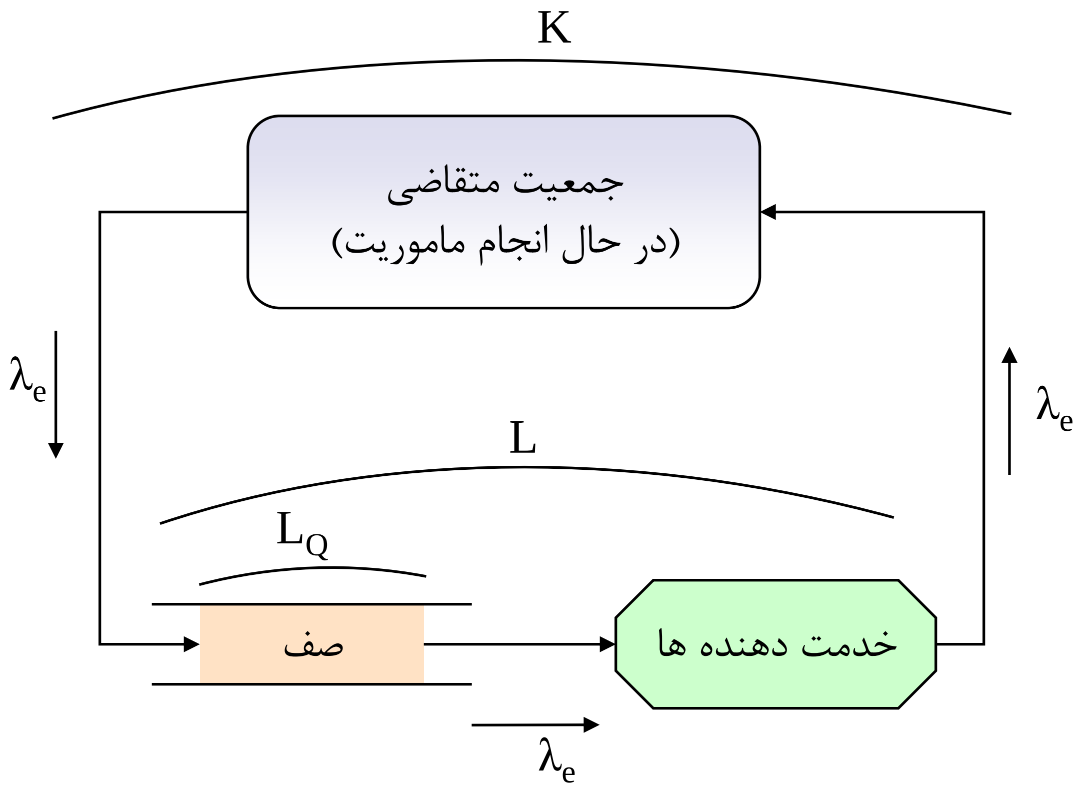
- ضریب خدمتدهی

$$F = \frac{K - L_Q}{K} \qquad X = \frac{\lambda/\mu}{\lambda/\mu + 1} = \frac{1/\mu}{1/\mu + 1/\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

جدول ۵-۱۰ کاربرد رابطهٔ $L = \lambda w$ در مورد سیستمهای فرعی یک مدل جمعیت متناهی.

سیستم فرعی	$L = \lambda w$
خدمت‌دهنده‌ها (فقط)	$L - L_Q = \lambda_e(1/\mu)$
صف (فقط)	$L_Q = \lambda_e w_Q$
صف و خدمت‌دهنده‌ها (سیستم)	$L = \lambda_e(w_Q + 1/\mu)$
جمعیت متقاضی	$K - L = \lambda_e(1/\lambda)$
تمام متقاضیان	$K = \lambda_e(w + 1/\lambda)$
خدمت‌دهنده‌ها و جمعیت متقاضی	$K - L_Q = \lambda_e(1/\mu + 1/\lambda)$

۵-۶: رفتار حالت پایای مدل های با جمعیت متناهی M/M/c/ K /K (ادامه)



۵-۶: رفتار حالت پایای مدل های با جمعیت متناهی M/M/c/ K /K (ادامه)

جدول ۵-۱۰ کاربرد رابطهٔ $L = \lambda w$ در مورد سیستمهای فرعی یک مدل جمعیت متناهی.

سیستم فرعی	$L = \lambda w$
خدمت‌دهنده‌ها (فقط)	$L - L_Q = \lambda_e(1/\mu)$
صف (فقط)	$L_Q = \lambda_e w_Q$
صف و خدمت‌دهنده‌ها (سیستم)	$L = \lambda_e(w_Q + 1/\mu)$
جمعیت متقاضی	$K - L = \lambda_e(1/\lambda)$
تمام متقاضیان	$K = \lambda_e(w + 1/\lambda)$
خدمت‌دهنده‌ها و جمعیت متقاضی	$K - L_Q = \lambda_e(1/\mu + 1/\lambda)$

- میانگین مدت بسربردن هر متقاضی در صف و در محل دریافت خدمت W

$$w = w_Q + \frac{1}{\mu}$$

۵-۶: رفتار حالت پایای مدل های با جمعیت متناهی M/M/c/ K /K (ادامه)

L_Q	$K(1-F)$
λ_e	$(K-L_Q)/(1/\mu+1/\lambda)=(K-L_Q)X\mu=KFX\mu$
w_Q	$L_Q/\lambda_e=L_Q(1/\mu+1/\lambda)/(K-L_Q)$
$L-L_Q$	$\lambda_e/\mu=(K-L_Q)X=KFX$
w	w_Q+1/μ
L	$\lambda_e w=L_Q+\lambda_e/\mu=L_Q+(K-L_Q)X$
$K-L$	$\lambda_e/\lambda=KF(1-X)$
ρ	$(L-L_Q)/c=\lambda_e/c\mu=KFX/c$
P_0	$\left[\sum_{n=0}^{c-1}\binom{K}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\sum_{n=c}^{K}\binom{K}{n}\frac{n!c^c(\lambda/c\mu)^n}{c!}\right]^{-1}$
P_n	$\begin{cases}\binom{K}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, & n=0,1,\ldots,c-1\\ \binom{K}{n}\frac{n!c^c(\lambda/c\mu)^n}{c!}P_0, & n=c,c+1,\ldots K\end{cases}$

۶-۵: رفتار حالت پایای مدل های با جمعیت متناهی M/M/c/ K /K (ادامه)

- مثال: دو کارگر اداره ۱۰ ماشین تراش را به عهده دارند. ماشین ها بطور متوسط ۲۰ دقیقه کار می کنند و به دنبال آن ۵ دقیقه دریافت خدمت می کنند. معیارهای سیستم چیست؟
  - $1/\lambda=20$ و $1/\mu=5$
  - $X=5/(5+20)=0.2$ and $c=2 \rightarrow D=0.692 \quad F=0.854$
  - $L_Q=10(1-0.854)=1.46$ machine
  - $w_Q=1.46(5+20)/(10-1.46)=4.27$ min
  - $L-L_Q=(10-1.46).2=1.708$ machine
  - $K-L=10-(1.708+1.46)=6.832$ machine تعداد ماشین های در حال کار
  - $\lambda_e=(K-L)\lambda$ روی شکل
- اگر $c=3$ داریم $D=0.3$ و $F=0.968$
  - $K-L=10*0.968*0.8=7.744$
- اگر $c=1$ داریم $D=0.987$ و $F=0.497$
  - $K-L=10*0. 497*0.8=3.976$