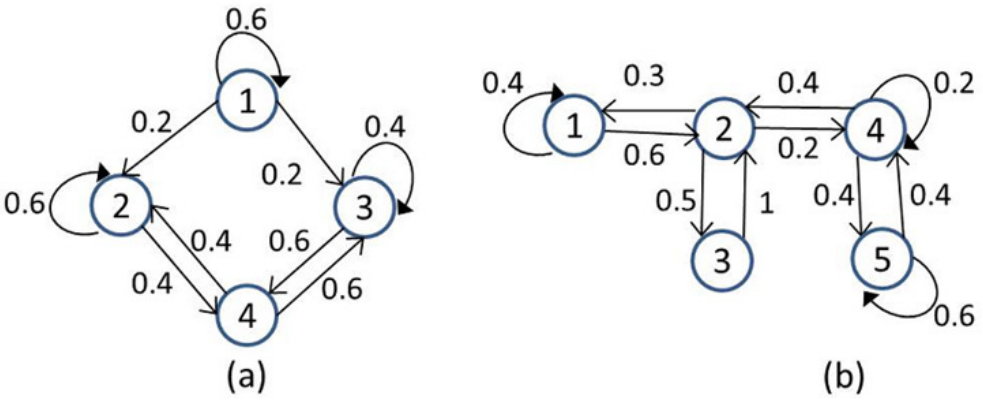
به‌نام خدا

تمرین اول درس ارزیابی کارایی	نیمسال اول ۹۵-۹۶	مهلت تحویل: ۲۲ آبان ۹۵	مدرس: م. عبداللهی ازگمی

۱) دو DTMC شکل زیر را در نظر بگیرید:



الف) در مورد ارگودیک بودن/نبودن هر کدام از آنها با ذکر دلیل اظهار نظر نمایید.

ب) در صورت ارگودیک بودن هر کدام، معادلات جریان را نوشته و احتمالات حالت پایدار آنرا محاسبه نمایید.

---

۲) از زنجیره‌های مارکوف برای مدل‌سازی ساختار هایپرلینک‌های وب توسط موتورهای جستجو استفاده می‌شود. گوگل از الگوریتم PageRank برای محاسبه **مرتبه** صفحات وب استفاده می‌کند. ماتریس احتمال-گذر مربوط به DTMC متناظر با یک مجموعه کوچک از پنج صفحه وب مربوط به این الگوریتم به‌صورت زیر است:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الف) نمودار STD متناظر با آنرا رسم کنید.

ب) آیا این DTMC ارگودیک است؟ به دقت استدلال کنید.

ج) معادلات جریان را نوشته و بردار احتمالات حالت پایدار آنرا بدست آورید.

د) با توجه به نتایج بخش (ج)، مرتبه پنج صفحه وب را مشخص کنید.

---

۳) یک سایت کامپیوتری دارای ۲ ایستگاه کاری (کامپیوتر) و ۴ کاربر است. فرض کنید که مدت زمانی که هر کاربر خارج از سایت است دارای توزیع نمایی با نرخ λ باشد. همچنین فرض کنید که به محضی که کاربر به سایت بر می‌گردد نیاز به کار با یک ایستگاه کاری دارد که مدت استفاده از آن طبق توزیع نمایی با نرخ μ است. ضمناً فرض کنید که اگر هیچ ایستگاه کاری آزاد نباشد، کاربر منتظر شده و پس از آزاد شدن یک ایستگاه کاری از آن استفاده کرده و بلافاصله سایت را ترک می‌کند:

الف) متغیر حالت اصلی و فضای حالت این سیستم را به دقت مشخص کنید.

ب) مدل زنجیره مارکوف این سیستم را بدست آورده و نمودار STD آنرا رسم کنید.

ج) معادلات جریان را نوشته و بردار احتمالات حالت پایدار را را بر حسب λ و μ بدست آورید.

د) با داشتن بردار احتمالات حالت پایدار، معیارهای زیر را بدست آورید:

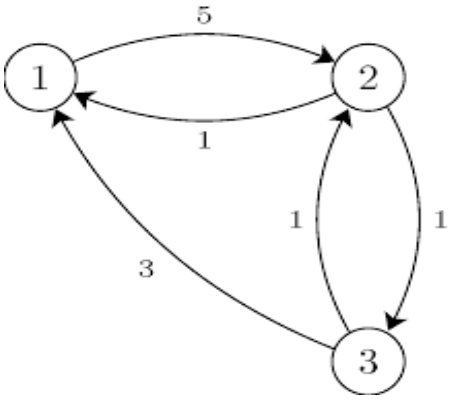
(۱) احتمال پیدا کردن یک ایستگاه کاری بیکار.

(۲) میانگین تعداد کاربران در سایت.

(۳) توان عملیاتی سایت.

(۳) توان عملیاتی ایستگاه‌های کاری.

۴) زنجیره مارکوف پیوسته-زمان (CTMC) زیر را در نظر بگیرید که نرخ‌ها روی یال‌ها مشخص شده است:



الف) آیا این زنجیره مارکوف ارگودیک است؟ استدلال کنید.

ب) ماتریس نرخ-گذر (Q) آنرا بدست آورید.

ج) معادلات جریان آنرا بنویسید.

د) احتمالات حالت پایدار آنرا بدست آورید.

هـ) اگر حالت‌های (۱) و (۲)، حالت‌های عملیاتی و حالت (۳)، حالت خرابی یک سیستم باشد، میانگین تعداد روزهای خرابی سیستم در سال را محاسبه کنید.

---

۵) در یک سیستم کامپیوتری سه پردازنده وجود دارد. هر کدام از این پردازنده‌ها با نرخ λ خراب شده و از کار می‌افتند برنامه‌هایی با نرخ α به این سیستم کامپیوتری وارد می‌شوند و در یک صف به طول ۳ قرار می‌گیرند تا هر کدام با در اختیار گرفتن یک پردازنده پردازش شوند. فرض کنید که حداکثر ۳ برنامه می‌تواند در سیستم وجود داشته باشد. زمان لازم برای پردازش هر برنامه طبق یک توزیع نمایی با نرخ μ است. وقتی آخرین پردازنده سالم از کار می‌افتد سیستم خاموش شده و صف‌ها همه خالی می‌شوند. آنگاه تعمیر انجام شده و سه پردازنده سالم در سیستم نصب می‌شود که زمان تعمیر نمایی با نرخ β است و سیستم دوباره با سه پردازنده سالم شروع به کار می‌کند:

الف) متغیر حالت اصلی و فضای حالت این سیستم را به دقت مشخص کنید.

ب) مدل زنجیره مارکوف این سیستم را بدست آورده و نمودار STD آنرا رسم کنید.

ج) در مورد شرایط ارگودیک بودن آن اظهار نظر کنید

د) معادلات جریان را نوشته و نشان دهید که بردار احتمالات حالت پایدار چگونه محاسبه می‌شود.

هـ) با داشتن بردار احتمالات حالت پایدار، معیارهای زیر را بدست آورید:

(۱) توان عملیاتی سیستم

(۲) بهره‌وری سیستم

(۳) میانگین تعداد پردازنده‌های مشغول

(۴) زمان پاسخ سیستم

(۵) قابلیت دسترسی حالت پایدار سیستم